ПОЛИНОМ

№ 1 2010

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Читателю и автору

Журнал «Полином» является научно-методическим журналом, ориентированным на широкую аудиторию лиц, имеющих отношение к преподаванию математики: учителей, методистов, преподавателей и учащихся педвузов, историков образования.

Основная цель журнала — знакомить читателей с исследованиями в области теории и практики обучения математике, работами по истории математики и истории математического образования.

Название журнала — «Полином» — выбрано неслучайно. За словом «полином» скрывается не только математический объект, рациональная функция, но нечто большее. Слово «полином» происходит от греческого πολυς — многочисленный, обширный и латинского nomen — имя, т.е. фактически «полином» означает «много имен». Такое толкование тесно связано с основной задачей журнала: собирать на своих страницах «много имен», много статей из разных уголков страны и мира в целом.

Каждый желающий может предложить свой текст для публикации в журнале. Основные требования, которым должен удовлетворять текст: 1) быть потенциально интересным для читателей; 2) быть представленным в электронном виде (только текстовый редактор Word). Чертежи желательно изготовлять в программах Corel Draw или Adobe Illustrator (чтобы редактору не приходилось делать рисунки заново).

Журнал является бесплатным, гонорары авторам не выплачиваются.

На электронные ресурсы, как и на бумажные, необходимо ссылаться при цитировании. ГОСТ 7.0.5–2008 разъясняет, как организованы ссылки на электронные издания. Ориентируясь на требования, сформулированные в ГОСТе, можно предложить следующий вид ссылки на статью, опубликованную в электронном журнале «Полином»:

Иванов И.И. К вопросу о преподавании математики [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 2–8. URL: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf (дата обращения: 12.01.2009).

Полином

Научно-методический журнал
№ 1/2010

Выходит 4 раза в год

Учредитель и редактор
В. М. Бусев

Ведущие отдела задач
Д. В. Прокопенко,
П. В. Чулков

Художник
О. П. Богомолова

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Эл. № ФС77-34064

СОДЕРЖАНИЕ

Задачи

Математики-педагоги

События

Информация

Жизнь и деятельность Л.Ф. Магницкого (1669–1739)

Анатолий Григорьевич ХАРМАЦ
старший преподаватель кафедры высшей алгебры,
элементарной математики и методики преподавания математики
Московского государственного областного университета
bagishova1032@yandex.ru

От редактора. В 2009 году исполнилось 340 лет со дня рождения Леонтия Филипповича Магницкого – талантливого педагога и организатора учебного дела в Математико-навигацкой школе, учреждённой Петром I в 1700 г., автора знаменитого учебника «Арифметика». Хотя дату можно считать юбилейной несколько условно, представляется правильным вспомнить этого человека, немало сделавшего для создания и укрепления российского математического просвещения.

В предлагаемой статье А.Г. Хармаца рассказано о жизни и трудах Л.Ф. Магницкого. В другой статье того же автора, предназначенной для второго номера журнала, будут рассмотрены геометрические задачи из «Арифметики» Магницкого.

Начало пути

Биографических сведений о Л.Ф. Магницком сохранилось очень мало. Известно, что он родился в 1669 г. в семье крестьянина Теляшина (Телятина?) Осташковской патриаршей слободы Тверской губернии. Его детство прошло в бедной обстановке. Он рано начал зарабатывать своим трудом на пропитание.

Неизвестно, посещал ли Магницкий школу. В любом случае самоучкой выучился читать и писать, у него проявилась жажда к знаниям. Пристрастился к чтению церковной литературы (другой не было). Пятнадцати лет Магницкий был послан в ближайший монастырь с рыбой (для продажи). Узнав, что юноша грамотен и хороший чтец, его оставили в монастыре. Позднее он был отправлен в Москву, в Симонов монастырь для подготовки в священнослужители.

К этому моменту (1687 г.) в Москве была открыта Славяно-греко-латинская академия. У Магницкого появилось желание, поддержанное церковным начальством: поступить на учёбу в академию. Больших трудностей это не вызывало, так как туда принимались желающие из разных сословий[1].

Заиконоспасский монастырь, где располагалась Славяно-греко-латинская академия

В академии, прежде всего, изучались древние языки. Несмотря на средневековый схоластический характер процесса обучения, академия знакомила своих учеников с выдающимися образцами античной поэзии (Овидия, Вергилия, Горация), изучались произведения Петрарки, Плутарха, Сенеки и др. Воспитанники приобщались к ораторскому искусству, публично упражнялись в красноречии, сочиняли стихи и диалоги. В старших классах получали сведения по логике, философии, психологии, физике, астрономии (по Аристотелю и Птолемею – сторонникам геоцентрической системы устройства мира). Заметим, что математика в академии не изучалась.

Не удовлетворяясь сведениями, полученными на занятиях, Магницкий свободное время проводил в библиотеке. В частности, он познакомился с русскими математическими рукописями и научными книгами на разных языках. С этой целью он самостоятельно изучил немецкий, голландский и итальянский языки.

О Магницком стали говорить в Москве как о талантливом юноше, выделявшимся своей эрудицией, педагогическими способностями, знаниями языков. Его стали приглашать в семьи московской знати для обучения детей.

Открытие в Москве Навигацкой школы

В конце XVII века в старый русский быт ворвалась кипучая деятельность реформатора Петра I. М.В.Ломоносов отмечал, что Пётр I

> ...усмотрел тогда ясно, что ни полков, ни городов надёжно укрепить, ни кораблей построить и безопасно пустить в море, не употребляя математики; ни оружия, ни огнедышащих махин, ни лекарств повреждённым в сражении воинам без физики приготовить; ни законов, ни судов правости, ни честности нравов, без учения философии и красноречия ввести, и словом ни во время войны государству надлежащего защищения, ни во время мира украшения без вспоможения наук невозможно [3, с. 28].

Когда в 1700 г. началась тяжёлая Северная война, проблема подготовки военных кадров требовала особенно спешного решения. Поэтому в первую очередь были открыты специальные военно-учебные заведения – школы: Навигацкая (1701), Медицинская (1706), Инженерная (1711), Артиллерийская (1712).

Приказ об учреждении в Москве Навигацкой школы был подписан Петром I 14 января 1701 г. В нём сказано: «...быть Математических и Навигацких, то есть мореходных хитростно наук учению». Для преподавания в школе были приглашены англичане – профессор математики Эндрью Фархварсон и преподаватели Стефан Гвин и Ричард Гриз [3, с. 29]. Школа располагалась в Москве, в Сухаревой башне.

[1] Относительного того, учился ли Л.Ф. Магницкий в духовной академии, мнения исследователей расходятся. См.: [1, с. 77]. – *Прим. ред.*

Сухарева башня, где располагалась Навигацкая школа

Состав учащихся Навигацкой школы был очень разнородным [2, с. 50]. Здесь учились дети солдат и священнослужителей, ремесленников и посадских людей, дворян и бояр. Последние упорно сопротивлялись реформам Петра I и уклонялась от посылки своих детей на пожизненную военно-морскую службу. Петру I пришлось идти на крайние меры: «набирать добровольно хотящих, иных же паче с принуждением».

«В населённых пунктах России на видных местах вывешивались списки с именами неявившихся в Навигацкую школу молодых бояр и дворян... Грозный указ Петра I объявлял, что в случае дальнейшего уклонения от явки в Навигацкую школу у виновного боярина или дворянина будет отнято его имение. В 1714 и 1715 гг. все неявившиеся в школу были направлены на каторжные работы – бить сваи. За побег из школы полагались жестокие наказания. Так как в ряде случаев молодые люди из боярских и дворянских семей не только не явились в школу, но даже скрывали своё местонахождение, то Пётр I объявил, что доноситель о таких укрывающихся имеет право непосредственно являться к нему, и доносителю будет отдано имение виновного» [3, с. 33].

Полной противоположностью этому было поведение детей малоимущих лиц, которые добивались приёма в школу и с охотой там учились. Это объясняется тем, что, кроме получения знаний, открывалась единственная возможность занять достойное положение в жизни.

Число обучающихся в Навигацкой школе было первоначально определено в 200 человек (возраст воспитанников от 12 до 17 лет). Однако уже в 1703 г. число учеников увеличено до 300, а с 1706 г. – до 500. Возраст принимаемых расширился с 12 до 20 лет.

В программу обучения входили арифметика, геометрия, алгебра, плоская и сферическая тригонометрия, навигация, мореходная астрономия и география. Неграмотных дополнительно обучали читать и писать.

Школа была разделена на три отделения: «Русскую школу», где учили грамоте, «Цифирную школу» для изучения арифметики и «Навигацкую школу», где изучались остальные разделы математики, кораблевождение и география.

Приглашение Л.Ф. Магницкого в Навигацкую школу

Приглашённые в школу английские учителя ещё не владели русским языком, не знали, куда обратиться с возникающими вопросами. Учащиеся не знали английского и латинского языков, а зачастую были вовсе неграмотны. Сложилась ситуация, когда учителя и ученики не понимают друг друга, да и учебников нет!

Ошибку организаторов школы вовремя исправил дьяк Оружейной палаты А.А. Курбатов – бывший крепостной боярина Б.Д. Шереметева, умный и способный человек, приверженец реформ Петра I и фактически управляющий делами Навигацкой школы. Он доложил официальному начальнику школы адмиралу Ф.А. Головину, что надо пригласить высокообразованных «природных русских преподавателей, проживающих в Москве», в их числе – Л.Ф. Магницкого. Указом Петра I от 22 февраля 1701 г. Магницкий был назначен преподавателем Навигацкой школы.

Учителям школы было установлено денежное содержание в год: профессору Фархварсону – 250 руб., Гвину и Гризу – по 150 руб., а Магницкому – 90 руб., несмотря на то, что на нём лежали многие обязанности по школе. Лишь с 1715 г. его жалование достигло 260 рублей. За добросовестное исполнение своих обязанностей Магницкий иногда получал дополнительное вознаграждение. По распоряжению Петра I в 1704 г. для семьи Магницкого был построен дом. Были выделены деньги на пошивку саксонского кафтана и другой одежды «за его непрестанные прилежные в навигацких школах во учении труды». И, тем не менее, Л.Ф. Магницкий всегда испытывал материальные затруднения.

Создание Л.Ф. Магницким «Арифметики» – первого на Руси учебника математики

По рекомендации А.А. Курбатова, с душой занимавшегося как хозяйственными делами, так и организацией учебного процесса, на Л.Ф. Магницкого Петром I была возложена обязанность написать учебник для учащихся по математике и кораблевождению. Вот текст старинного документа об этом событии:

> ...февраля в 22 день (1701 г.) ... в тех же науках [т.е. математике и кораблевождении – *А.Х.*] велено быть Осташковцу Леонтию Магницкому, и через труд свой издать ему на Словенском диалекте избрав из арифметики и геометрии и навигации поелику возможную к тиснению книгу (цит. по: [3, с. 40]).

Первоначально Магницкому было отведено помещение для проживания в здании Сухаревой башни, где жили все учителя и учащиеся. Там же проводились и занятия. Но по приглашению Курбатова Магницкий писал свою книгу в его доме, чтобы ничто, никакой шум не отвлекал его от работы, чтобы быстрее была написана рукопись учебной книги, и тем самым в Навигацкой школе быстрее был налажен учебный процесс.

Уже 21 ноября 1701 г. Магницкий представил рукопись своей книги. Печаталась она более года в московской типографии с деревянных резных досок. «Арифметика» увидела свет в 1703 году. Тираж – 2400 экземпляров – был рассчитан на то, чтобы книгой могли воспользоваться не только учащиеся Навигацкой школы, но и других учебных заведений, а также её могли приобрести люди, занимающиеся самообразованием.

Один из экземпляров «Арифметики» попал в руки молодого М.В. Ломоносова, жившего в деревне Денисовка Беломорского края (ныне – Архангельская область). Многие места из этой книги он знал наизусть, с ней он пришёл учиться в Москву. Ломоносов назвал «Грамматику» М. Смотрицкого и «Арифметику» Магницкого «вратами учёности».

Структура «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

КНИГА ПЕРВАЯ АРИФМЕТИКИ – политика

Часть первая – о целых числах и метрология

Часть вторая – о числах ломаных или долях

Часть третья – пропорции, тройное правило

Часть четвёртая – о правилах фальшивых

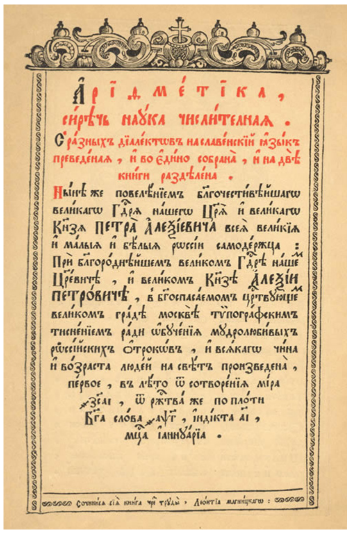
Часть пятая – о прогрессии и радиксах квадратных и кубических

КНИГА ВТОРАЯ АРИФМЕТИКИ – логистика

Часть первая – алгебра

Часть вторая – геометрия и решение уравнений (геометрические задачи, решаемые алгебраическим методом); тригонометрия

Часть третья – о кораблевождении – навигация


Арiѳметiка, сирѣчь наука числителнаѧ.
С разныхъ дiалектωвъ на славенскiй ѧзыкъ преведенаѧ, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена.
Нынѣ же повелѣнiемъ благочестивѣйшагω великагω гдрѧ нашегω црѧ и великагω кнѧзѧ Петра Алеѯiевича всеѧ великiѧ и малыѧ и бѣлыѧ россiи самодержца: При благороднѣйшемъ великомъ гдрѣ нашемъ црвичѣ, и великомъ кнзѣ Алеѯiи Петровичѣ, в богоспасаемомъ црствующемъ великомъ градѣ москвѣ тνпографскимъ тисненiемъ ради ωбученiѧ мудролюбивыхъ россiйскихъ отрокωвъ, и всѧкагω чина и возраста людей на свѣтъ произведена, первое, въ лѣто ѿ сотворенiѧ мiра ЗСАI, ѿ рождества же по плоти бга слова АΨГ, iндикта АI, мца iаннуарiа.
Сочинисѧ сiѧ книга чрезъ труды Леонтiѧ Магницкагω:

Титульный лист «Арифметики» Магницкого

Преимущества «Арифметики» по сравнению с русскими математическими рукописями XVII в.

1. По полноте содержания превосходит любую ранее составленную рукопись. Если в рукописях сведения по арифметике, алгебре, геометрии разрозненны и ограниченны, то «Арифметика» – это для своего времени энциклопедический курс элементарной математики и кораблевождения.

2. Полностью использовано всё то лучшее, что было в рукописях XVII в. (подбор практических задач, мотивировка изучения математики, пропаганда математических знаний, их необходимость в жизни; занимательные задачи).

3. Резко увеличено количество задач по сравнению с рукописями; их содержание тесно связано с практикой.

4. Впервые в России в печати появились десятичные дроби, элементы тригонометрии, астрономии и навигации.

5. Даны определения арифметических действий.

6. Использована зарубежная учебная литература (символика, терминология и пр.) Например, используется термин «миллион» вместо русского «тьмы тём».

7. Материал методически удачно расположен: движение идёт от простого к сложному, от известного и знакомого – к неизвестному.

8. Логическая взаимосвязь разделов, систематизация материала.

Некоторые недостатки «Арифметики»

1. Неудачный выбор символики (немецких коссистов, Ф. Виета), хотя уже был Р. Декарт, который пользовался более удобной символикой.

2. Не используются знаки действий $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{}$, хотя они давно уже использовались на Западе. У Магницкого вместо этих символов – слова.

3. Нет формул, сплошь «словесная алгебра».

4. В выкладках мало пояснений о том, откуда что берётся. Пишется «Твори сице» – и дальше только выкладки. При этом трудно уловить алгоритм решения задач.

5. Нет обоснований и доказательств. Не упомянуты «теорема Пифагора», «теорема Птолемея», теоремы геометрии, которые используются при решении задач.

6. Геометрических фактов используется много, но нет попытки их связать.

О других учебных пособиях, созданных Магницким или при его участии

1. Известен рукописный текст курса Навигацкой школы, созданный к началу 1703 г. К сожалению, имя автора на нём не указано. Но по многим признакам можно с большой долей вероятности полагать, что рукопись составлена Л.Ф. Магницким. В ней имеются разделы по геометрии, плоской тригонометрии, мореходной астрономии и навигации.

В разделе по геометрии сначала даны определения, а затем – задачи на построение и вычисление. Определения иллюстрируются чертежами. Изложение каждой задачи содержит текст, сопровождаемый ясным и точным чертежом, а иногда вычислениями. Доказательства отсутствуют.

В разделе рукописи, посвящённом тригонометрии, даётся определение самой тригонометрии как науки, которая позволяет по трём известным элементам треугольника сыскать неизвестный «бок или угол». Далее даются определения тригонометрических линий, а затем рассматриваются задачи на решение прямоугольных и косоугольных треугольников. По сравнению с русскими рукописями XVII в. весь материал этого отдела является новым.

Заключительная часть курса посвящена мореходной астрономии и навигации. «Навигацио или мореплавание учит, как корабль надо править на море, чтобы к месту предложенному корабль пришёл». Рассмотрены методы кораблевождения при плавании в видимости берегов и в открытом море, перечислены мореходные инструменты. Подробно говорится о морских картах. Весь этот материал также является новым в сравнении с содержанием соответствующих рукописей XVII в.

2. В 1703 г. по распоряжению Петра I для Навигацкой школы под редакцией Магницкого, Фархварсона и Гвина были изданы таблицы логарифмов и тригонометрических функций.

3. Сотрудничая в качестве редактора с типографией Василия Киприянова, Магницкий подготовил к печати и редактировал различные наглядные пособия для Навигацкой школы (карты, глобусы, различные навигационные таблицы, карты звёздного неба)[2].

---

[2] В типографии Василия Киприянова в 1705 году была напечатана первая в России настенная таблица по математике. Её экземпляр имеется в Государственном Эрмитаже, цифровая копия которого стараниями Н.Н. Андреева размещена на сайте «Математические этюды»: http://www.etudes.ru/ru/forums/topic.php?post=5666. – *Прим. ред.*

Об иных обязанностях (кроме учебных), возлагаемых на Навигацкую школу и исполняемых Магницким

Жизнь Л.Ф.Магницкого была наполнена большой творческой и иной работой, которая далеко выходила за пределы обязанностей учителя.

На преподавателей и учеников школы возлагали различные задания, не имеющие непосредственного отношения к учебному процессу в школе.

1. Так, в 1705–1706 гг. часть преподавателей и воспитанников занималась измерением дороги из Москвы до Петербурга.

2. В 1707 г. по распоряжению Петра I Магницкий руководил организацией работ по строительству оборонительных сооружений города Твери.

3. Магницкий постоянно участвовал в отборе учащихся для стажировки за границей и на боевых кораблях России.

4. В 1703 г. школе было велено направить в Воронеж двух лучших учеников для обучения матросов арифметике. Их отбирал Магницкий. Каждые два месяца происходила замена: «учителя» возвращались в Москву для продолжения учёбы, а вместо них направлялись другие.

5. Навигацкая школа являлась центром астрономической науки того времени. В её обсерватории проводились ответственные астрономические наблюдения. Сюда обратился и Пётр I с просьбой выполнить вычисления того, как долго будет длиться затмение солнца в Воронеже, где он в тот момент находился.

6. В 1714 г. Навигацкой школе было поручено новое ответственное дело. По указу Петра I во многих губерниях России учреждались «цифирные школы» для обучения детей дворян и разночинцев грамоте, арифметике и геометрии. Обязанности по подготовке педагогов для этих школ были возложены на Навигацкую школу, из которой следовало направить в каждую губернию по два ученика, прошедших курс грамоты и математики, и, кроме того, имеющих педагогические способности. Подбором этих «учителей» для новых школ должен был заниматься Магницкий.

Значение Навигацкой школы в истории России

В 1715 г. Навигацкая школа была разделена. Старшие классы (где изучались алгебра и кораблевождение) вместе с Фархварсоном, Гвином и молодыми педагогами, подготовленными из учащихся, были переведены в Петербург – в открывшуюся там Морскую академию. Младшие учащиеся, изучавшие грамоту, арифметику, геометрию и тригонометрию, остались обучаться в Москве. Остался в Навигацкой школе и Л.Ф. Магницкий.

В 1752 г. Морская академия была преобразована в Морской шляхетный (дворянский) корпус. Одновременно из Навигацкой школы дети дворян были переведены в Морской корпус, а сама Навигацкая школа закрыта.

Так закончилась полувековая история этой школы, сыгравшей огромную роль в истории отечественной науки, культуры, образования. С 1701 по 1715 г. это был своеобразный центр, обеспечивавший кадрами флот, артиллерию, инженерный корпус. Так, в 1711 г. в школе числились 311 навигаторов, т.е. учащихся последнего этапа обучения. В 1712 г. из 517 учеников были «в готовности для науки на море 50 чел., к инженерной службе – 170 чел.» (Цит. по: [3, с. 59].)

Питомцы школы направлялись не только на военную службу, но и на гражданскую. Многие стали государственными деятелями, военачальниками, архитекторами, геодезистами, инженерами, учителями.

Большинство воспитанников школы принесли немалую славу школе и всему отечеству. Выпускники школы стали крупными военачальниками и государственными деятелями (Н.Ф. Головин, М.М. Голицын, И.К. Кириллов), астрономами, геодезистами и картографами, составившими карты Камчатки, Курильских островов. Они исследовали Сибирь и северные воды Тихого океана, побережье Северного Ледовитого океана, Берингова пролива, Охотского моря; были участниками многих научных экспедиций. Из стен школы вышел выдающийся учёный-педагог Н.Г. Курганов, автор многих учебников по математике.

Историк математики проф. А.П. Юшкевич отмечал, что «основание Петром Навигацкой школы в Москве на некоторое время превратило Москву в рассадник русского математического просвещения» [3, с. 61].

Л.Ф. Магницкий в памяти поколений

Последние годы жизни Магницкого прошли в напряжённой и плодотворной работе. Смерть оборвала жизнь Магницкого 19 октября 1739 г. Он был погребён в Москве, в церкви Гребневской Богоматери, находившейся на углу Лубянской площади и Мясницкой улицы [3, с 71]. На гробнице Магницкого его сыном Иваном была сделана надпись:

> В вечную память ...Леонтию Филипповичу Магницкому, первому в России математики учителю, здесь погребенному мужу ... любви к ближнему нелицемерной, благочестия ревностного, жития чистого, смирения глубочайшего, великодушия постоянного, нрава тишайшего, разума зрелого, обхождения честного, праводушия любителю, в слугах отечеству усерднейшему попечителю, подчинённым отцу любезному, обид от неприятелей терпеливейшему, ко всем приятнейшему и всяких обид, страстей и злых дел силами чуждающимися, в наставлениях и рассуждении, совете друзей искуснейшему правды как о духовных, так и гражданских делах опаснейшему хранителю, добродетельного житья истинному подражателю, всех добродетелей собранию; который путь сего временного и прискорбного жития начал 1669 года июня 9-го дня, наукам изучился дивными неудобовероятным способом, его величеству Петру первому для остроумия в науках учинился знаем в 1700 году и от его величества, по усмотрению нрава ко всем приятнейшего и к себе влекущего, пожалован, именован прозванием Магницкий и учинён российскому благородному юношеству учителем математики, в котором звании ревностно, верно, честно все прилежно и беспорочно служа и пожив в мире 70 лет, 4 месяца и 10 дней, 1739 года, октября 19-го дня, о полуночи в 1 часу, оставя добродетельным своим житием пример оставшим по нём благочестно скончался» [3, с. 71–72].

В 1932 г. церковь Гребневской Богоматери была разрушена. Известный педагог-математик, страстный библиофил и историк математического образования Иван Козьмич Андронов внимательно следил за ходом работ по сносу церкви. В юбилейной статье, опубликованной 40 лет назад в журнале «Математика в школе»

(1969, № 6), он писал: «27 мая [1932 г. — *А.Х.*] на глубине одного метра обнаружилась плита примерно 140 см × 110 см × 25 см из крепкого известняка, на обратной стороне которой действительно оказалась тонко выбита "эпитафия" надгробия Л.Ф. Магницкого. На другой день под плитой памятником на глубине четырех метров обнаружена была гробница Магницкого» [1, с. 76].

Главный редактор журнала «Математика в школе» Р.С. Черкасов свидетельствовал, что при непосредственном участии И.К. Андронова найденная плита была взята в Исторический музей, а затем выставлена на обозрение в соборе Василия Блаженного [4, с. 176]. Кроме того, «Иван Козьмич глубоко переживал, что не сумел уследить, куда были вывезены гробницы Леонтия Магницкого и его жены Марии Гавриловны...» [там же].

Уже в наши дни в г. Осташкове был установлен памятник Л.Ф. Магницкому, на котором написано: «В память осташковского уроженца выдающегося математика и педагога Леонтия Филипповича Магницкого (1669–1739)».

Памятник Л.Ф. Магницкому

***

Прошло почти три столетия со времени жизни и творчества Л.Ф. Магницкого. Мы и сегодня с огромным уважением и благодарностью вспоминаем этого выдающегося просветителя, педагога, общественного деятеля, соратника Петра I в деле прогрессивных преобразований России. Он – автор первого отечественного учебника математики и кораблевождения, Учитель огромной плеяды учителей российских школ и училищ.

Леонтий Филиппович Магницкий – большой патриот своей страны – навсегда останется в памяти будущих поколений благодарных соотечественников.

Литература

1. *Андронов И.К.* Первый учитель математики российского юношества Леонтий Филиппович Магницкий // Математика в школе. 1969. № 6. С. 75–78.

2. *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. — М.–Л.: Гостехиздат, 1946.

3. *Денисов А.П.* Леонтий Филиппович Магницкий: 1669–1739. — М.: Просвещение, 1967.

4. *Черкасов Р.С.* Иван Козьмич Андронов // *Садчиков В.А.* Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И.К. Андронове, талантливом педагоге, учёном, просветителе. — М.: ПЕР СЭ, 2009. С. 173–178.

Вернуться к содержанию

Живая история

Как появилась технология учебных циклов[1]

Герман Григорьевич ЛЕВИТАС
учитель математики школы № 1199 г. Москвы
gglevitas@mtu-net.ru

В августе 1966 г. я начал работать в лаборатории математики нового Научно-исследовательского института школьного оборудования и технических средств обучения (НИИ ШОТСО), организованного академиком АПН РСФСР С.Г. Шаповаленко В лаборатории нас было трое: заведующий В.Г. Болтянский и научные сотрудники – В.Г. Ашкинузе и я. Очень скоро были приняты на работу старший лаборант Э.Ю. Красс и старший инженер В.Н. Толяров и на учёбу аспиранты О.А. Луговой и В.Н. Березин.

Болтянский объяснил, что мы проведём в этой лаборатории несколько лет нашей жизни и надо сделать это не без пользы. Он объяснил также, что наша работа – создание средств обучения, и прежде всего нужно понять, какие именно средства обучения нужны при преподавании того или иного раздела школьной математики. Луговому была выдана кипа бумаги (до сих пор помню её – третьесортная, зелёного цвета, формата А4), и он на каждом листе написал заголовок – один из пунктов школьной программы. И на каждом листе написал, какие именно средства обучения нужны, по его мнению, в преподавании этого пункта. Далее кипа поступила к Березину. Он дополнил записи Лугового (вычёркивать не разрешалось). Затем то же сделал Красс, потом я, затем Ашкинузе и, наконец, Болтянский. А средства обучения были такие: кинофрагмент, диафильм, диапозитивы, материалы для кодоскопа (графопроектора), настенные таблицы, индивидуальные и демонстрационные чертёжные приборы, инструменты и приспособления, четырёхзначные таблицы В.М. Брадиса. А кроме этого, Болтянский рассказал нам об увиденных им за рубежом тетрадях с печатной основой, в которых печатались задания для учащихся и тут же оставлялось место для их выполнения.

[1] Статья перепечатана из сборника «Архимед» (Вып. 6. М., 2010).

Мы долго трудились над зелёной кипой, не очень понимая, что мы потом будем с ней делать: не хватало теории, были только её зачатки. Так, Болтянский определил разницу между диафильмом и серией диапозитивов. Диафильм состоит из кадров, связанных между собой в определённой последовательности, поэтому он должен быть носителем теории. А не скреплённые между собой диапозитивы должны содержать отдельные задачи.

Дело сильно сдвинулось с приходом к нам М.Б. Воловича. Он к этому времени был уже кандидатом наук, а его научным руководителем была сама Н.Ф. Талызина – правая рука великого психолога П.Я. Гальперина. Волович и принёс нам гальперинскую теорию. А тут ещё Болтянский сделал настоящий прорыв в дидактике, дав новое определение древнейшему понятию наглядности: наглядность – это изоморфизм плюс простота[2].

Под этими двумя соусами – психологическим и дидактическим – мы начали нашу теоретическую работу. Эта работа, в отличие от многих дидактических теорий, всегда была связана с практическим преподаванием. Первым шагом в ней было создание комплекса учебного оборудования по теме «Прямоугольный параллелепипед». Были разработаны пять кинофрагментов, диафильм, серия диапозитивов, серия настенных таблиц, набор раздаточных объёмных моделей и тетрадь с печатной основой. Все они были опробованы в полномасштабном 14-урочном эксперименте в 52-й московской школе. После этого дидактического пира мы написали монографию «Комплексы учебного оборудования», которой зачитывался весь НИИ ШОТСО.

Болтянский поставил перед нами задачу: каждый год выпускать книгу с полным описанием учебного оборудования по одному классу. И в течение двух лет мы выпустили такие книги по 4 и по 5 классам. Но затем пришла финансовая проверка, и работа у нас Болтянского была объявлена незаконной (тогда были трудности с совместительством, а лауреат Ленинской премии В.Г. Болтянский имел основную работу в Математическом институте АН СССР).

И остались мы одни. К тому времени ушел и Ашкинузе, и недолго проработавшие у нас М.Я. Антоновский и А.М. Пышкало. Перешёл на партийную работу, а затем уехал в Африку Эдик Красс. Так что состав у нас был такой: я, Марк Волович и наши аспиранты: Лена Арутюнян, Юра Глазков, Володя Нодельман, Люда Апанасенко и Галя Буянкина. Буянкина скоро отчислилась, остальные защитились. Апанасенко и Нодельман уехали по месту жительства, а мы вчетвером с Воловичем, Арутюнян и Глазковым продолжали свою основную работу, начатую при Болтянском, – выпускали новые средства обучения.

На киностудиях Москвы, Ленинграда и Киева выходили наши учебные кинофрагменты по математике. Новые диафильмы и диапозитивы создавала студия «Диафильм». Издательство «Просвещение» выпускало наши настенные таблицы, а предприятия Главучтехпрома – учебные приборы, модели, инструменты и приспособления. Удалось даже выпустить комплекты грампластинок для проведения

---

[2] См.: *Болтянский В.Г.* Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 2. С. 40–43.

математических диктантов в 5–7-х классах. В качестве чтецов их записали на студии «Мелодия» О.С. Высоцкая и В.Н. Хлебников. Как раз во время этой работы Высоцкая получила звание Народной артистки СССР, и мы шутили, что именно за эту работу.

Не удавалось только наладить производство тетрадей с печатной основой. Но мы делали свои машинописные варианты таких тетрадей. Параллельно с выпуском этих средств обучения лаборатория отшлифовывала дидактические требования к ним и разрабатывала методику их использования, о чём мы публиковали статьи в журнале «Математика в школе».

Однажды зашла к нам заведующая соседней лабораторией Наталья Борисовна Каратаева и спросила: «А как учитель сможет использовать на уроке весь этот массив разрабатываемых вами пособий? Или они делаются не для системного использования, не так, как было заявлено в книге “Комплексы учебного оборудования”»? Этот вопрос заставил нас задуматься. И вот тогда мы впервые приступили к той деятельности, до которой при Болтянском у нас руки не доходили: мы решили понять, что такое урок математики. Ходили на уроки к московским учителям, в г. Химки – к замечательной М.А. Земсковой. И даже на уроки начальной школы – к великой С.Н. Лысенковой. И ничего не могли понять. Прямо по Толстому: все плохие уроки одинаковы, а все хорошие не похожи друг на друга. Хорошие – что ни урок, то особенное. Не типизируются хорошие уроки, как заколдованные. Настало лето, и стал я на досуге читать недопрочитанную педагогическую литературу об уроке математики. Нашёл классификацию такого вида: уроки математики бывают типа А, типа В, типа С и смешанного типа. Прищуриваюсь, вспоминаю посещённые уроки: не было там уроков ни типа А, ни типа В, ни типа С (эти типы бывают только в кабинетной тиши учёных дидактов), а все уроки – и хорошие, и плохие – были только смешанные. И никакой работающей теории не получается.

Тогда я решил обратиться к «смежникам» – к литературе об уроках по другим школьным дисциплинам. Какой предмет ближе всего к школьной математике? Говорят, физика. И я чуть не захлебнулся в литературе об уроках физики. Во время опомнился: чего тут общего? Там и демонстрационные и индивидуальные опыты, и лабораторные работы, и мало ли ещё что! А у нас все сидят за партами, пишут, читают, решают. Были когда-то в программе измерения на местности, но и те отменили. Какой же предмет самый близкий к математике? И всплыли слова Лобачевского: «Математика – это язык».

Должно же быть и везение! В первом же открытом мною номере журнала «Иностранные языки в школе» я буквально наткнулся на статью Инессы Львовны Бим об учебных циклах: о том, что бессмысленно анализировать и тем более унифицировать отдельные уроки иностранного языка, а изучать нужно их объединения – учебные циклы. Мысль показалась мне очень важной, но было лето, и пришлось отложить разговор на начало сентября.

Этим самым летом пригласил меня к себе в гости профессор Владимирского пединститута Давид Яковлевич Пейрос. Мы гуляли по городу и говорили о наших научных проблемах. Остановились на мосту через Клязьму. И спросил меня Давид Яковлевич, буквально повторив Н.Б. Каратаеву: «А как учитель сможет использовать на уроке весь этот массив разрабатываемых вами пособий? Или они делаются не для системного использования, не так, как было заявлено в книге “Комплексы учебного оборудования”»? Но теперь я был готов. И тут же, на мосту, сымпровизировал такой ответ.

• Преподавание математики должно состоять из двухурочных циклов.

• Первый урок должен начинаться с актуализации необходимых знаний путём проведения математического диктанта с использованием грампластинок и графопроектора.

• После диктанта следует объяснение нового материала с помощью диафильма или кинофрагмента, а также настенных справочных таблиц. При необходимости используются демонстрационные объёмные средства обучения.

• Первый урок завершается первоначальным закреплением с помощью тетрадей с печатной основой и с использованием диапозитивов и настенных рабочих таблиц. При необходимости используются индивидуальные объёмные средства обучения.

• На дом задаётся закончить работу в тетради с печатной основой.

• На втором уроке проводится самостоятельная работа с помощью карточек.

Всё легло на свои места. Давид Яковлевич спросил: «И это всё обязательно для каждого учителя?» Но у меня уже тогда хватило ума ответить: «Нет, это только для того учителя, кто иначе не умеет работать». Давид Яковлевич был удовлетворён. А я знал, с чего начнется наша работа после отпуска.

Когда я рассказал о двухурочном цикле в лаборатории, все со мной согласились. И мы решили проверить эти соображения на практике. Вначале работа шла в экспериментальных школах АПН №№ 204 и 625. Затем в течение целого учебного года мы проводили эксперимент в Брежневском районе Москвы. А потом Бог помог нам связаться с министерствами просвещения Латвийской и Армянской ССР, и в 1982 г. мы начали эксперимент в трёх регионах сразу: в Москве и этих двух республиках. Начали с 4 класса и довели его до одиннадцатого, сохраняя тот же состав учителей и учеников (всего около 1500 детей). За всю историю советской и российской педагогики не было столь продолжительного массового эксперимента, осуществлённого не лично его авторами, а лишь под их руководством.

В эти семь лет мы работали так. Сентябрь начинался распределением ролей в написании материалов для будущего года обучения. Затем мы разъезжались в командировки к нашим учителям-экспериментаторам. Эти командировки проводились в течение года от трёх до четырёх раз. Мы ходили на уроки, проводили занятия с учителями и анкетирование. В остальное время мы готовили материалы на будущий год. Фактически у нас проходили заседания лаборатории от начала и до конца каждого рабочего дня. А к апрелю-маю надо было напечатать материалы на будущий год: тетради с печатной основой и сборники текстов самостоятельных и контрольных работ – по числу учащихся, а также методические разработки – по числу учителей.

Вся наша работа не могла бы иметь никакого успеха, если бы не постоянная поддержка С.Г. Шаповаленко. Он не только отпускал нас в командировки, но и печатал двухтысячными тиражами на институтском ротапринте тетради с печатной основой и другие необходимые материалы.

За время эксперимента мы сильно продвинулись вперёд как в теории учебного оборудования, так и в технологии учебных циклов. Если в 4 классе мы ограничивались двухурочными циклами, то в дальнейшем пришлось разрабатывать технологию урока решения задач и урока общения. Некоторые рекомендации о применении средств обучения так и остались обязательными, а некоторые перешли в разряд факультативных. Но сама идея строить преподавание не уроками, а учебными циклами осталась и дала впоследствии название нашей технологии: «технология учебных циклов».

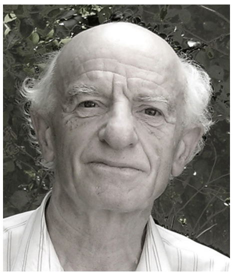
Всё это время мы поддерживали связь с Институтом гигиены детей и подростков Минздрава СССР, в который нас привела Л.В. Ковинько. Она занималась в НИИ ШОТСО проблемами школьного курса природоведения и стала применять наши рекомендации на своём предмете. Медики признали нашу работу здоровьесберегающей, а аспирант этого института А.М. Еремеев защитил кандидатскую диссертацию, анализируя нашу деятельность с гигиенических позиций.

Эксперимент завершился в июне 1989 г., и пошли мы с Воловичем в «Учительскую газету». Нас принял тогдашний редактор «УГ» Геннадий Селезнёв (впоследствии редактор «Правды» и спикер Госдумы). Он сразу опубликовал нашу статью. На неё пошёл густой поток откликов, и тогда Селезнёв порекомендовал нам созвать всесоюзное совещание учителей по результатам нашего эксперимента. Об этом совещании было объявлено в «УГ», и на него съехалось более 600 человек из разных концов страны.

На совещании выступили все наши московские, латвийские и армянские учителя, и все они признали, что, во-первых, преподавание математики по нашим рекомендациям прошло успешно, а, во-вторых, при этом повысилась успеваемость и по остальным предметам. Было принято решение о распространении нашей технологии. Присутствовали на нём представители других институтов АПН СССР, но они не приняли активного участия в его работе, и в дальнейшем ни один человек из АПН и из Министерства образования никогда не вспоминал об этом совещании. И его решение осталось невыполненным.

Так случилось, что после этого наша четвёрка распалась. Волович стал писать учебник, основанный на работе ребёнка с американским микрокалькулятором, Глазков занялся проблемами ЕГЭ, Арутюнян стала преподавать математику в вузе. Технологией учебных циклов занимаюсь только я. И хотя мне очень помогает обретённая мною докторская степень, но подлинного признания это наше детище пока не получило. В 2002 г. мне удалось начать новый эксперимент в двенадцати школах Старого Оскола. На этот раз технология используется в преподавании шести предметов: математики, истории, физики, химии, биологии и географии. Директор школы № 30 этого города Л.А. Трубина экспериментально доказала, что дети, обучающиеся по нашей технологии, способны в известном опросе PISA занимать места «впереди планеты всей».

Вернуться к содержанию



Эммануил Эльевич ШНОЛЬ
главный научный сотрудник
Института математических проблем биологии РАН
emmanuil_shnol@impb.psn.ru

Я учился на мехмате МГУ в 1943–48 годах. Я застал факультет в период его расцвета, когда там работала целая плеяда выдающихся людей.

Преподаватели

Нам читали лекции: С.В. Бахвалов (начертательная геометрия), П.С. Александров (аналитическая геометрия[1]), О.Ю. Шмидт (высшая алгебра), И.М. Гельфанд (линейная алгебра), Г.С. Ландсберг, С.Г. Калашников (физика), М.В. Келдыш (теория функций комплексного переменного), И.Г. Петровский (дифференциальные уравнения), А.Я. Хинчин (математический анализ). Видно, что нас учили замечательные физики и математики, выдающиеся люди.

Первая лекция, на которую я попал в своей жизни, была лекция Отто Юльевича Шмидта. Шла война, мне нужен был пропуск, и я добирался до Москвы довольно сложным образом. На мехмате меня встретили дамы: «А, это тот Шноль, который нам присылал телеграммы! Идите в психологический корпус, там сейчас как раз лекция». Я пошёл в психологический корпус, который располагался там же во дворе (в основное здание попала бомба, разрушила стеклянный купол, и какое-то время лекции там не читались). И попал на середину лекции Шмидта. Постучался, зашёл. Шмидт мельком поглядел на меня и продолжил дальше читать лекцию. Мне было 15 лет, а выглядел я ещё моложе – он, может быть, подумал, что какой-то школьник заблудился (и был, в общем-то, почти прав!). Мои однокурсники с изумлением смотрели, что это за мальчик пришёл к ним на лекцию, а потом меня всячески опекали.

Нашим любимым лектором был Гельфанд. Он читал линейную алгебру. По-моему, это было на втором курсе. И.М. Гельфанд относился к своему курсу крайне серьёзно. Он сказал нам, что если кто не боится, то пусть приходит заранее в такую-то аудиторию, где он будет перед официальной лекцией рассказывать нечто. Нас ходило человек 12–15, и он нам читал пробную лекцию. Гельфанд рассказывал и вытаскивал нас из-за скамеек вопросами. А потом мы слушали это на лекции и видели, что и как он изменил в изложении. Это было крайне интересно наблюдать.

Э.Э. Шноль. 1947 г.

[1] Существует его нетривиальная книга по этому предмету: *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. – 2-е изд. – СПб.: Лань, 2008. – 912 с.

Как читал Петровский, нам не нравилось, мы его не понимали, он не лектор. Курсом старше уравнения в частных производных читал Гельфанд, и мы иногда убегали с лекций Петровского к нему. А то, что Петровский читал в общем виде и глубоко продуманно, – мы тогда не оценили.

Лекции Ландсберга сопровождались демонстрациями, и это было поразительное зрелище. Некоторые опыты мне до сих пор вспоминаются. И его манера: когда опыт был показан, он всегда благодарил лаборанта и пожимал ему руку. Однажды он пришёл на лекцию и долго не мог её начать: скончался Л.И. Мандельштам, а они были близкими друзьями. Он пришёл, можно сказать, в слезах, сказал нам о смерти Мандельштама. Но потом постепенно разошёлся и читал с таким же блеском. Ему было очень тяжело, но предмет его увлёк.

На следующий год был Калашников. Мы поначалу, избалованные Ландсбергом, холодно к нему отнеслись, но он был тоже очень хороший лектор.

А.Я. Хинчин читал у нас анализ. Однажды на какой-то лекции он доказал, что операция неопределённого интегрирования есть обратная операции дифференцирования. И сказал: «Мы с вами подошли к такому важному моменту, что больше я вам ничего сегодня рассказывать не буду. После такой теоремы я ничего рассказывать не могу». И отпустил нас. А всего это заняло у него минут 20. Прошло больше 60 лет, но я и А.М. Молчанов это помним. Открытие замечательное[2], и Хинчин, после такого результата – главного в дифференциальном и интегральном исчислении – не счёл возможным что бы то ни было ещё рассказывать.

Студенты механико-математического факультета МГУ. 1944 г.
Во втором ряду стоят несколько фронтовиков, потерявших на войне одну из рук. Среди них второй слева – Тимур Магометович Энеев, ныне академик РАН; крайний справа – Иван Васильевич Чувило, лётчик-штурмовик

[2] И, вроде бы, впервые сделанное учителем Ньютона Барроу. См.: *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989, § 9.

Спецкурсы и экзамены

Формально я учился очень хорошо, у меня за всё обучение была одна «четвёрка». Середину первого курса я проболел, долго лежал в больнице, поэтому сдавал экзамены вместо января в мае и получил по анализу «четвёрку» (кстати, у Б.П. Демидовича). Я любил сдавать экзамены досрочно. Получал Сталинскую стипендию. Её каждый год назначали заново, но выдавать начинали в марте-апреле и выдавали разницу сразу за все предыдущие месяцы.

Когда мы учились, на мехмате была астрономическая группа. Потом её перевели на физфак. Мы тяготели к естествознанию. У нас перед глазами был пример братьев Ягломов, которые прошли курс и физфака и мехмата, и были широко образованы. У нас был физический практикум, я там просиживал много часов, в отличие от многих коллег-математиков. Надо было определённое число задач сделать и сдать.

Программа мехмата того времени предусматривала, что каждый студент-математик должен сдать два спецкурса (на 4 и 5 курсе), а спецкурсы он может выбрать сам. Около каждой кафедры (это было ещё в старом здании) висело объявление о спецкурсах. Какие-то из них читались, а какие-то нет – можно было по книгам подготовиться. Я сдавал два спецкурса: один – П.К. Рашевскому, другой – Л.С. Понтрягину, и ни одного из них не слушал. У Рашевского есть книга «Введение в тензорный анализ и риманову геометрию». Я познакомился с тензорами по этой книге, научился не бояться значков – опущенных, поднятых, правил суммирования и так далее. А дальше надо было взять направление в деканате и договориться с человеком, когда он может принять экзамен (это не было коллективным мероприятием).

Второе воспоминание более яркое. Понтрягин был слепой, как известно. Я просто прочёл его книжку «Основы комбинаторной топологии» – тоненькая книжечка, она у меня и сейчас есть. Экзамен проходил более-менее гладко, а потом он мне задал такой вопрос: «Каков ранг аддитивной группы рациональных чисел?» Я ему сказал: «Единица», что совершенно неверно, потому что в аддитивной группе можно только складывать, а делить нельзя. Он мне объяснил, что это неверно, что ранг её бесконечен – вот я получил такой урок на экзамене. Понтрягин мне «пятёрку» поставил, хотя после такого грубо неверного ответа «пятёрки» я не заслуживал. У него была печатка вместо подписи.

Есть и общий урок: экзамен – это составная часть обучения, причём *важная* часть. Сейчас многие считают, что это лишь завершающая часть, причём сугубо формальная. А ведь на экзамене можно узнать нечто такое, что запомнится на всю жизнь.

Это осталось и сейчас на мехмате – около каждой кафедры на 13–15 этажах висят списки спецкурсов.

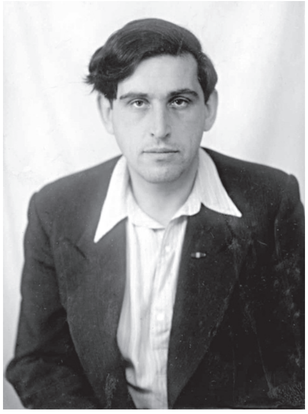
А.С. Кронрод

Моим первым математическим учителем, не являвшимся общим учителем курса, был Кронрод.

Александр Семёнович Кронрод вернулся на мехмат с фронта до окончания войны – он был ранен и комиссован. Кронрод был единственным из известных мне учёных, кто, кажется, был командиром пехотной роты[3]. Его характер и облик

[3] Документальных свидетельств этого я не знаю. Но, конечно, подробности военной службы Александра Семёновича знает Л.А. Кронрод.

вполне этому соответствовали – такой человек мог командовать пехотной ротой! (Кронрод с гордостью нам показывал экземпляр диссертации Н.Н. Лузина с дарственной надписью и говорил, что он его ученик. На мехмате проводились в то время конкурсы студенческих научных работ и Кронрод, по-моему, трижды занимал первое место.)

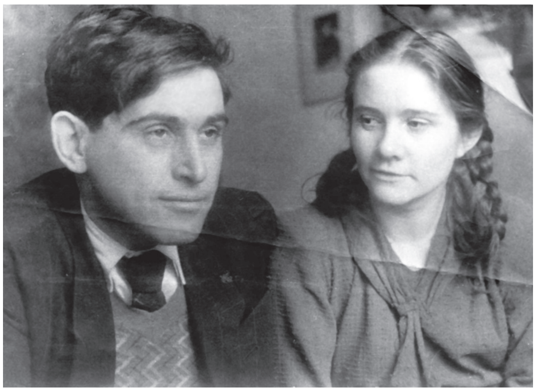


А.С. Кронрод. 1949–1950 г.

На мехмате я был человек заметный, хотя бы по внешности – какой-то мальчишка 14–15 лет бегает по мехмату. Он меня заметил, узнал, кто я такой, спросил: «Хочешь, я буду тебе давать задачки?» (Он всем говорил «ты», кроме учителей.) Я, конечно, согласился. И Кронрод мне стал давать задачи по теории функций действительного переменного, которая тогда была в расцвете.

Я проходил у него школу функций действительного переменного таким образом: он мне давал задачки, я их решал; если не мог решить – он что-то объяснял. Задачи были всегда красиво оформлены. Одно из скучных (после Кантора) упражнений было – доказать, что рациональных чисел столько же, сколько целых. А у Кронрода это говорилось так: доказать, что непересекающихся букв Т можно поместить на плоскости только счётное число (топологических букв Т – она может быть косой; могут быть разные размеры, т.е. счётное число счётных множеств).

Конечно, большинство задач я давно не помню, а одна в памяти осталась: «Представь себе, что функция двух переменных непрерывна по любой прямой. Если непрерывна только по осям, то этого для непрерывности на плоскости недостаточно. А вот если по любой прямой линии? Будет ли она непрерывной?» Я понял, что не обязательно и привёл простой пример. Тогда он мне объяснил, что ничего не стоит сделать у такой функции счётное число точек разрыва. Если можем сделать одну точку, то можем и накопить их. «А вот можно ли сделать несчётное число точек разрыва – неизвестно». Это было, наверное, в зимние каникулы 46/47 года (или 45/46). Я уехал тогда на каникулы к маме в детский дом, там размышлял над этой задачкой и построил пример функции, которая имеет континуум точек разрыва, а именно, разрывна в каждой точке канторовского множества на отрезке, а по всем прямым непрерывна. Я доказал немножко больше: если такая функция существует, то множество её точек разрыва всегда имеет меру 0. (Я уже знал, что измеримое множество устроено неоднородно, со сгустками. Более точно так: возьмём точку измеримого множества, окружим её маленьким кружочком и посмотрим, какую часть этого кружочка занимает само множество, а что относится к дополнению. Теперь будем кружочек уменьшать. Назовём точку *точкой плотности*, если относительная мера того куска, которое в него попало, стремится к единице, т.е. его всё больше. Так вот, Лебег доказал, что у измеримого множества почти все точки – это точки плотности.)



А.С. Кронрод с женой Лидой. 1951 г.

Я рассказывал свой результат Кронроду в присутствии А.Д. Мышкиса. «Вот мальчик доказал, что множество точек разрыва таких функций имеет меру 0», – сказал Крондрод. «Подумай, а каким может быть это множество точек разрыва? Найдёшь необходимое и достаточное условие – будет у тебя хорошая печатная работа». Это было в его духе. Условия я не нашёл. 50 лет спустя, разбирая свои старые заметки, я ещё раз вернулся к этой теме, немножко усилил результат и послал статью в журнал «Математические заметки»[4]. Я написал, что это дань памяти о Кронроде. В сущности, это первая моя математическая работа[5].

С 4-го курса я ходил на семинар Гельфанда. И.М. Гельфанд остался главным моим учителем. На 4 или 5 курсе я некоторое время размышлял про пятую проблему Гильберта о топологических группах. Проблему Гильберта я не решил, но кое-что понял. По-видимому, я был знаком с первым изданием (1938 год) замечательной книги Л.С.Понтрягина «Непрерывные группы». Я знал, для каких случаев положительное решение проблемы было им получено.

О моей дипломной работе

Один из старших учеников Гельфанда – Георгий Евгеньевич Шилов. И вот, Гельфанд мне посоветовал ходить на семинар Шилова. Там изучались нормированные кольца функций. Докторская диссертация Гельфанда была посвящена коммутативным нормированным кольцам, и важнейший пример таких колец, к которому, в некотором смысле, всё сводится, – это кольца функций (например, кольцо непрерывных функций). У Гельфанда есть совместная работа с Колмогоровым, где было доказано, что если есть два топологических множества и если кольца непрерывных функций на них изоморфны, то сами множества гомеоморфны. То есть кольца функций определяют топологию сами по себе. Гельфанд показал несколько больше: само множество, на котором функции естественным образом заданы, может быть восстановлено по кольцу функций. Термин общепринятый – гельфандовская теория максимальных идеалов – это и в математической энциклопедии есть.

Э.Э. Шноль с учительницей Буранной средней школы, которую он окончил. 1955 г.

Полина Ивановна Плешакова организовала сдачу экзаменов за десятый класс экстерном, и Э.Э. Шноль смог поступить на мехмат в 1943 г.

Я разобрался с двумя вопросами про кольца функций. Других результатов у меня не было, и эти составили содержание дипломной работы. Это были мои первые публикации[6].

---

[4] *Шноль Э.Э.* О функциях двух переменных, непрерывных вдоль прямых линий // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 2. С. 306–311.

[5] Кажется, Е.М. Ландису основной результат этой заметки был известен.

[6] *Шноль Э.Э.* Замкнутые идеалы в кольце непрерывно дифференцируемых функций // Математический сборник. 1950. Т. 27. Вып. 2. С. 281–284; *Шноль Э.Э.* Строение идеалов в кольцах R_α // Математический сборник. 1950. Т. 27. Вып. 1. С. 143–146.

Дополнение. Занятия математикой во время службы в армии и после

К следующему периоду моей жизни, когда я служил в армии, относится самая большая похвала, которую я получил от Гельфанда. А.М. Молчанов был со мной в оживлённой переписке, присылал книжки. Я занимался теорией задач о собственных значениях и доказал некую теорему о поведении собственных функций уравнения Штурма-Луивилля (сейчас его называют одномерным уравнением Шрёдингера). И когда Молчанов пересказал этот результат Гельфанду, тот сказал так: «После Германа Вейля в этой области это самый интересный результат». Это была очень высокая для меня похвала.

В 1950 годы американские математики D. Montgomery и I. Zippin дали в некотором смысле полное решение пятой проблемы Гильберта. Демобилизовавшись в 1953 году, я посещал семинар Гельфанда, и он спросил, кто возьмётся рассказать эти работы.

Я немедленно вызвался и стал их читать. Спустя некоторое время я сказал, что готов попробовать рассказать. Но время для моего выступления никак не находилось, постоянно были другие интересные доклады.

Откуда-то стало известно, что я разбирался с решением пятой проблемы, и меня пригласил П.К. Рашевский выступить на его семинаре. Этот доклад состоялся. Я откровенно сказал, что не всё понял, на что П.К. заметил, что «они тоже не топологи». Доклад мой, видимо, понравился, и Рашевский пригласил меня пойти работать на кафедру математики в одном из вузов, которую он, вроде бы, возглавлял. Я ему ответил, что это никак невозможно, потому что я – классный руководитель выпускного (десятого) класса. П.К. отнёсся к этому с пониманием. Это был 1954/55 учебный год.

Вернуться к содержанию

Вокруг математики

Как решать кубические уравнения, если ты не матшкольник?

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Как решить уравнение $x^3 - 2x - 5 = 0$? На вид оно совсем простое. Но подбором корень найти не получается. По графику видно, что один корень есть, и он близок к 2. Как определить его точнее?

Цель этой статьи – показать, как решать с любой точностью алгебраические уравнения с помощью только арифметических действий (например, с простым калькулятором). Мы будем рассказывать идеи, но почти ничего не будем доказывать (некоторые доказательства приведены в приложении).

Для лучшего понимания текста рекомендуется выполнять упражнения. Замечания содержат детали, которые при первом чтении можно пропустить.

Метод Герона

Для начала давайте научимся вычислять квадратный корень (т.е. решать простейшие квадратные уравнения) с помощью арифметических действий. Метод, который мы изложим, был известен ещё в Древней Греции и приписывается Герону Александрийскому. Герон жил в I веке н.э. и описал в своих книгах закон отражения света, формулу вычисления площади треугольника по трём сторонам, многочисленные механизмы. Интересно, что и в наше время метод Герона используется в некоторых вычислительных машинах (может быть, и в вашем калькуляторе!).

Обратимся к тексту самого Герона. Он объясняет свой метод на примере: пусть надо найти корень из 720[1].

Так как 720 не имеет рационального корня, то возьмем корень с очень малой погрешностью следующим образом. Так как ближайший к 720 квадрат есть 729, и оно имеет корнем 27, то раздели 720 на 27. Получается $26\frac{2}{3}$. Приложи 27. Получается $53\frac{2}{3}$. Половину этого. Получается $26\frac{5}{6}$. Итак, ближайший корень из 720 будет $26\frac{5}{6}$. [Если помножить] на самое себя, получается $720\frac{1}{36}$, так что погрешность есть 36-я часть единицы. Если мы пожелали бы, чтобы погрешность стала меньшей частью [единицы], чем 36-я, то вместо 729 мы возьмем только найденное $720\frac{1}{36}$ и, проделав то же самое, найдем, что погрешность гораздо меньше, чем $\frac{1}{36}$ [3, с. 338–339].

В этом тексте Герона содержатся три идеи:

1) как выбирать начальное приближение;

2) как производить уточнение;

3) процесс можно повторять (итерировать).

Начнём со второй идеи. Пусть нам надо вычислить $\sqrt{a}$. Если выбранное нами приближение x_0 меньше истинного значения корня, то число $\frac{a}{x_0}$ – больше, и наоборот. Поэтому их полусумма $\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)$ будет ближе к искомому корню, чем x_0. Обозначим её за x_1.

Теперь третья идея: если полученной точности нам недостаточно, то можно повторить весь процесс уточнения, начиная уже с величины x_1:

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right).$$

Уточнения можно повторять и дальше, пока мы не достигнем нужной точности.

Видим, что для достижения результата нужно проводить вычисления по одной и той же формуле:

$$x_{i+1}=\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{a}{x_i}\right). \qquad (1)$$

Такие однотипные вычисления называются итерациями. Если $x_i \to b$ с ростом i (т.е. x_i становится сколь угодно близко к b), то говорят, что *итерационный процесс сходится к числу b*.

Наконец, первая идея: Герон предлагает выбирать в качестве x_0 число с ближайшим к a квадратом. Но его можно выбирать и из каких-то других соображений. Более того, если вы выбрали $x_0 > 0$ неудачно – далеко от корня, то процесс всё равно будет сходиться к корню, только потребуется больше шагов.

[1] Числа даны в современной записи; слова в квадратных скобках добавлены для связности текста.

Упражнение 1. Если начальное приближение x_0 отрицательно, то и все следующие приближения также отрицательны (проверьте!). К чему же сходится в таком случае итерационный процесс (1)?

Приведём таблицу с вычислениями $\sqrt{3}$, сделанную ученицей 7 класса Машей Рябовой.

Таблица 1

Итерация	Значение
0 (начальное приближение)	1
1	2
2	**1,7**5
3	**1,732**142857
4	**1,73205081**0
5	**1,73205080**8

Совпадающие знаки двух последовательных итераций выделены жирным. Видно, что знаки быстро устанавливаются (перестают меняться). Разумно предположить, что знаки, совпавшие на двух последовательных итерациях, не будут меняться и впредь. Тем самым мы можем оценить погрешность приближения и остановиться на шаге с нужной нам точностью. Уже на 3-м шаге мы можем ручаться за тысячные, а на 4-м – за десятимиллионные!

Упражнение 2. Найдите методом Герона $\sqrt{2}$ с погрешностью 10^{-7}, наблюдая за устоявшимися знаками приближений. Результаты занесите в таблицу 2. В качестве оценки погрешности берите 10^{-n}, где n – число совпадающих цифр после запятой в текущем и предыдущем приближениях. Сколько понадобится итераций?

Таблица 2

Итерация	Значение	Погрешность
0 (начальное приближение)		
1		
2		
...		

Замечание 1. Для вычисления кубических корней нетрудно придумать аналог метода Герона:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{a}{x_i^2}\right). \qquad (2)$$

(Если $x_i > \sqrt[3]{a}$, то $\frac{a}{x_i^2} < \sqrt[3]{a}$ и наоборот.) Проверьте, так ли быстро он сходится, как формула (1).

Метод Ньютона

Исаак Ньютон (1643–1727), крупнейший физик и математик, написал книгу «Математические начала натуральной философии», в которой изложил основы классической механики, в том числе знаменитые три закона. В 1669 году он описал способ приближённого решения алгебраических уравнений, идея которого до сих пор используется. Снова предоставим слово автору.

Пусть требуется решить уравнение

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{3}$$

и 2 представляет то число, которое отличается от искомого корня меньше, чем на свою десятую часть. Тогда я полагаю $2 + p = x$ и подставляю это выражение в уравнение, причём получится новое:

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0, \tag{4}$$

у которого следует определить корень p, чтобы прибавить его к первому результату. Отсюда (пренебрегая $p^3 + 6p^2$ по малости), имеем приблизительно

$$10p - 1 = 0,$$

или

$$p = 0{,}1.$$

Поэтому я пишу в результате 0,1 и полагаю $0{,}1 + q = p$; это выражение я подставляю, как и раньше, причём получается

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0.$$

...уравнение почти соответствует истине, или q почти равно $-0{,}0054$...

Полагая $-0{,}0054 + r = q$, я это выражение подставляю, как раньше, и продолжаю эти операции сколько угодно раз [4, с. 83–85].

Давайте разберёмся в этом тексте. Итак, Ньютон заметил, что корень уравнения (3) близок к числу 2. Обозначив через p поправку, он составил уравнение (4) для p. Оно, вообще говоря, ничуть не проще исходного уравнения (3). Но тут Ньютон высказывает главную идею метода: *используя малость поправки, можно резко упростить уравнение для неё*. А именно, он предлагает отбросить в уравнении (4) все члены старше линейного, так как они близки к 0 (если $|p| \ll 1$, то $p^2 \ll |p|$, $|p|^3 \ll p^2$ и т.д.). Такое действие называется *линеаризацией*. В результате получаем линейное уравнение, которое решается простым делением. Правда, поправка p теперь оказывается найдена не совсем точно. Если мы хотим знать корень y точнее, можно найти «поправку к поправке» q, подставив её в исходное уравнение (4) для p и точно так же линеаризовав. Такие действия можно продолжать, обычно поправки будут всё меньше и меньше, и по достижении нужной нам погрешности можно остановиться.

В форме привычной нам таблицы результаты будут выглядеть так:

Таблица 3

Итерация	Значение
0	2
1	$2 + 0{,}1 = 2{,}1$
2	$2{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946$
3	...

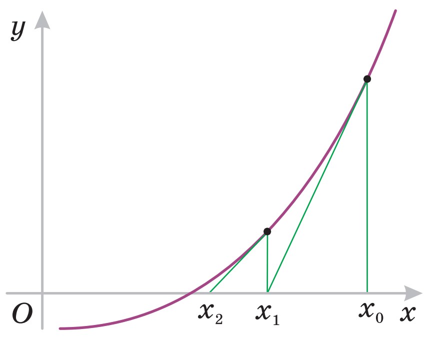


Рис. 1.

Замечание 2. Метод Ньютона имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Строим график функции $y = x^3 - 2x - 5$. Проводим касательную к точке графика с абсциссой x_0. Находим точку пересечения x_1 касательной с осью абсцисс. Из точки графика с абсциссой x_1 снова проводим касательную, и т.д. (рис. 1). Поэтому метод Ньютона иногда называют ещё *методом касательных*.

В приведённой формулировке метода приходится на каждом шаге вручную делать замену, выписывать новое уравнение, линеаризовывать его. Однако для любого данного уравнения можно проделать эти действия один раз в общем виде и пользоваться готовой итерационной формулой. Такую модификацию метода Ньютона в 1690 году произвёл его соотечественник Дж. Рафсон (1648–ок. 1715). (Поскольку Ньютон вычислял вручную, ему было всё равно, какой формой метода пользоваться; а нам вторая будет удобнее.)

Для примера возьмём простейшее нелинейное уравнение $x^2 - a = 0$. Обозначим начальное приближение через x_0. Тогда поправка будет $p = x - x_0$. Выделим полный квадрат и оставим только линейную по p часть:

$$x^2 - a = (x_0 + p)^2 - a = x_0^2 + 2x_0p + p^2 - a \approx x_0^2 + 2x_0p - a.$$

Решив линеаризованное уравнение $x_0^2 + 2x_0p - a = 0$ относительно p, получим $p = \dfrac{a - x_0^2}{2x_0}$. В свою очередь, $x = x_0 + p = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$. Найденное решение линеаризованного уравнения примем за новое приближение: $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$. Подставляя x_1 в качестве нового приближения, получим x_2 и так далее. Получим итерационный процесс $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{a}{x_i}\right)$. Формула знакома! Оказывается, метод Герона, известный за много столетий до Ньютона, есть частный случай метода Ньютона для уравнения $x^2 - a = 0$. То есть в нём тоже неявно заложена идея линеаризации (интересно, думал ли об этом Герон?).

Упражнение 3 (для тех, кто читал замечание 1)**.** Примените метод Ньютона к уравнению $x^3 - a = 0$. Сравните получившийся итерационный процесс с формулой (2). Сравните скорости сходимости этих двух процессов.

Упражнение 4 (для тех, кто знаком с производной и уравнением касательной). Докажите, что если функция $f(x)$ (не обязательно многочлен!) имеет производную, то последовательные приближения корня уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона можно искать по формуле

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Свойства метода Ньютона

Возникают вопросы:

1) Всегда ли метод Ньютона сходится?

2) Что происходит, если корней несколько?

На первый вопрос ответим сразу: если начальное приближение достаточно близко к корню, то всегда. Сам Ньютон доказательства сходимости не привёл, ограничившись таким замечанием: «Доказательство его (метода) явствует из самого способа действия, на основании чего его легко в случае необходимости вспомнить».

Чтобы ответить на второй вопрос, поэкспериментируем с каким-нибудь уравнением; например, с таким:

$$x - x^3 = 0. \qquad (5)$$

Конечно, мы прекрасно знаем, что его корни $x = 0;\ \pm 1$. Так что это уравнение тестовое – мы решаем его, чтобы изучить свойства метода касательных.

Упражнение 5. Напишите итерационный процесс для уравнения (5). Исследуйте его сходимость для начальных приближений от $-1{,}5$ до $+1{,}5$ (с шагом, скажем, 0,2).

Результат исследования изображён на рисунке 2: каждый корень помечен своим цветом. Тем же цветом помечена область графика, начав с любой точки которой, мы сойдёмся к этому корню. Получается, что у каждого корня есть своя *зона притяжения.* Если начальное приближение попадёт в правильную зону, то процесс сойдётся к нужному нам корню. Так, если $x_0 \in (-0{,}4; 0{,}4)$, то мы заведомо сойдёмся к корню $x = 0$.

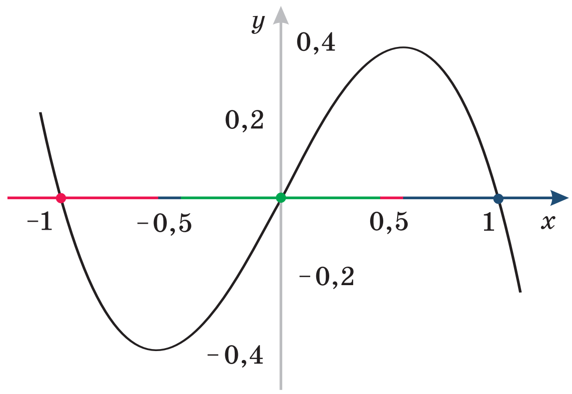


Рис. 2.

Упражнение 6. Нарисуйте зоны притяжения корней $\pm\sqrt{a}$, вычисляемых по методу Герона.

Замечание 3. В случае метода Герона всё просто: зоны представляют собой два луча, заполняющие всю прямую (кроме точки $x = 0$, т.е. середины отрезка между корнями). Очевидно, то же будет и для метода Ньютона в случае квадратного уравнения (это фактически тот же самый метод). Однако из рис. 2 видно, что уже для кубического уравнения зоны устроены более сложно: есть не только интервалы вокруг корней, но и «островки», отделённые от корня. Более того, если изобразить эти «островки» крупнее (рис. 3), то становится видно, что в них вкраплены более мелкие «островки» другого цвета. Эту структуру можно изучать экспериментально, особенно тем, кто умеет программировать. (Подробнее см. дополнения 2 и 3.)

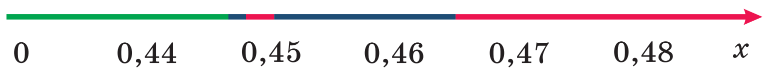


Рис. 3.

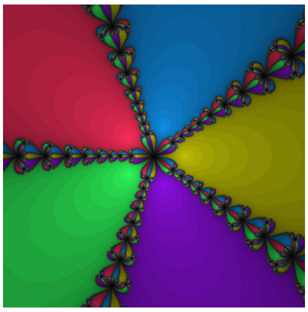


Рис. 4. Зоны притяжения для уравнения $x^5 - 1 = 0$ на комплексной плоскости. Чем светлее область, тем меньше итераций требуется для сходимости

Замечание 4 (для тех, кто знаком с комплексными числами). Методы Герона и Ньютона работают и для уравнений с комплексными коэффициентами. Зоны притяжения в этом случае двумерные, и, начиная с уравнения 3-й степени, также могут быть устроены очень сложно и красиво[2]. С точки зрения большой науки, алгебраические уравнения и их корни правильно изучать именно в комплексной плоскости.

Обратим внимание на скорость сходимости метода Ньютона. Просматривая таблицы, можно заметить следующую (приблизительную) закономерность: *число верных знаков удваивается после каждого шага*. Так, если на 2-м шаге была точность 0,01, то на 3-м – уже 0,0001. Это означает, что по мере приближения к корню сходимость убыстряется – характерное свойство метода Ньютона.

Что делать с уравнениями высших степеней?

«Уравнения высших степеней решаются совершенно так же», – замечает Ньютон. Действительно, для реализации метода Ньютона надо только делать замену переменной и линеаризовывать, а всё это мы можем производить с алгебраическим уравнением любой степени. Это очень важное замечание. Ведь даже в матклассах изучают решения уравнений 3-й и 4-й степеней, но не выше. И этому есть объяснение. В XIX веке было доказано, что для решения алгебраических уравнений 5-й степени и выше *нет общих формул в радикалах*. Это значит, что единственный способ решать такие уравнения (общего вида) – находить их корни приближённо, методом Ньютона или каким-то другим.

Отметим – и это важно! – что *метод Ньютона не позволяет определить количество корней уравнения*. Если мы нашли несколько корней, то нет никакой гарантии, что это все корни – может быть, начальные приближения просто не попали в соответствующую зону. Поэтому метод Ньютона обычно используют вместе с «независимым» определением числа корней – например по графику (как с уравнением (3)) или из теоретических соображений.

Замечание 5. Простейшим теоретическим соображением является то, что число корней уравнения n-й степени не превосходит n. Есть и более тонкие оценки количества корней, использующие конкретный вид уравнения[3].

«Дело будет к концу облегчено, как это было сделано здесь, если ты будешь постепенно отбрасывать первые его члены» – напоследок Ньютон ещё раз подчёркивает главную идею своего метода – линеаризацию.

Статья появилась в результате бесед с Э.Э. Шнолем, которому автор весьма благодарен. Также он признателен А.С. Воронцову, сделавшему рисунки для статьи.

[2] См., например: *Гордин В.А.* Как это посчитать? – М.: МЦНМО, 2005. С. 28, 32.
[3] См., например: *Шафаревич И.Р.* Метод Штурма. – М.: Гостехиздат, 1954.

Добавление 1. Доказательство сходимости метода Герона[4]

Заметим, что из наблюдавшейся стабилизации первых знаков приближений по методу Герона ещё не следует, что и следующие знаки приближения будут сходиться к истинному значению.

Приведём строгое доказательство того, что метод Герона $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ сходится к $\sqrt{a}$. Метод доказательства основан на следующей идее: если каждый следующий член последовательности отличается от предыдущего множителем p_k, где $0<p_k\le 1-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ (т.е. множитель отделён от 1 каким-то фиксированным числом), то последовательность стремится к 0[5]. Эта простая идея работает во многих задачах.

Выразим погрешность на $(k+1)$-м шаге через погрешность на k-м:

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{1}{2}(x_k-\sqrt{a})+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_k}-\sqrt{a}\right)\right|.$$

Во втором слагаемом вынесем за скобку $\frac{\sqrt{a}}{x_k}$ и получим:

$$\left|\frac{1}{2}(x_k-\sqrt{a})+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{x_k}(\sqrt{a}-x_k)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_k}\right)(x_k-\sqrt{a})\right|.$$

Итак,

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{a}\right|=p_k\cdot\left|x_k-\sqrt{a}\right|,\ \text{где}\ p_k=\frac{1}{2}\left|1-\frac{\sqrt{a}}{x_k}\right|.$$

Теперь оценим значение p_k. Заметим, что значение выражения $t+\frac{a}{t}$ не может быть слишком маленьким:

$$t+\frac{a}{t}=t-2\sqrt{a}+\frac{a}{t}+2\sqrt{a}=\left(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\right)^2+2\sqrt{a}\ge 2\sqrt{a}.$$

Это означает, что $x_k>\sqrt{a}$ при $k\ge 1$ (проверьте по нашим таблицам). Поэтому $p_k<\frac{1}{2}$ при $k\ge 1$. Отсюда следует, что на каждом шаге погрешность $\left|x_k-\sqrt{a}\right|$ уменьшается не меньше чем в два раза и, согласно нашей идее, гарантированно стремится к 0 при $k\to\infty$.

Добавление 2. Структура зон притяжения для уравнения $x-x^3=0$[6].

Исследование зон притяжения уже для простейшего кубического уравнения (5) представляет собой интересную задачу.

Кроме зон притяжения на оси Ox имеются *точки расходимости* – т.е. точки, начиная с которых метод касательных Ньютона *не сходится* (их нужно отметить новым, четвёртым цветом; пусть это будет чёрный цвет). Такими точками, например, являются точки $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, в которых функция $y=x-x^3$ достигает своих (локальных) экстремальных значений (и касательная горизонтальна). Также точками расходимо-

[4] Автор текста – А.С. Воронцов.

[5] Если же p_k может быть сколь угодно близко к 1, то и последовательность может стремиться к постоянному числу.

[6] При написании текста использованы материалы В.В. Вавилова.

сти являются точки $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, начиная с которых метод Ньютона сразу зацикливается: если, например, $x_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$, то $x_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}=x_0$ (см. рис. 5). Проводя геометрические эксперименты с проведением касательных к графику функции $y = x - x^3$, можно убедиться, что если $x_0\in\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, то процесс сходится к корню $x = 0$; если $x_0\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, то к корню $x = 1$; если же $x_0\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, то к корню $x = -1$.

Что происходит в оставшейся области? Заметим, что в силу нечётности функции $y = x - x^3$ можно утверждать, что если метод Ньютона переводит точку x_1 в x_2, то точку $-x_1$ должен переводить в $-x_2$. Это значит, что если $(a; b)$ – зона притяжения корня x_0, то $(-b; -a)$ – зона притяжения корня $-x_0$. Для краткости назовём последнее утверждение *принципом симметрии*.

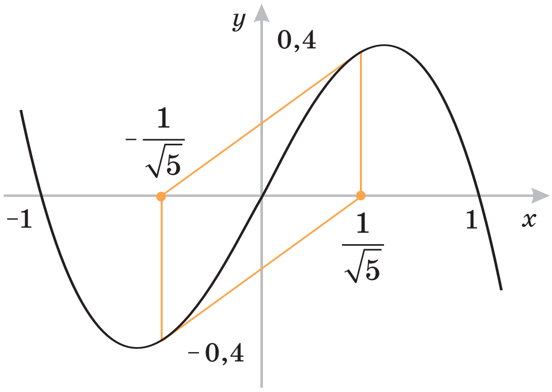


Рис. 5.

Рассмотрим касательную к графику данной функции. От горизонтального положения в точке $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ касательная поворачивается против часовой стрелки и пересекает ось Ox в точках $x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Границей этой области является $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ему соответствует точка касания $x=\varepsilon_1$ (рис. 6). Поэтому интервал $\left(\varepsilon_1;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ синий. По принципу симметрии интервал $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\varepsilon_1\right)$ красный. Повернём касательную дальше против часовой стрелки – вдоль этой красной зоны. Ей соответствует красная зона справа $(\varepsilon_2;\varepsilon_1)$, где ε_2 – абсцисса точки касания для касательной, пересекающей ось Ox в точке $x=-\varepsilon_1$. По принципу симметрии интервал $(-\varepsilon_1;-\varepsilon_2)$ является синим. Продолжая таким образом, получаем последовательность точек $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, $\pm\varepsilon_3$ … . Можно доказать, что $\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n$ и имеет место соотношение

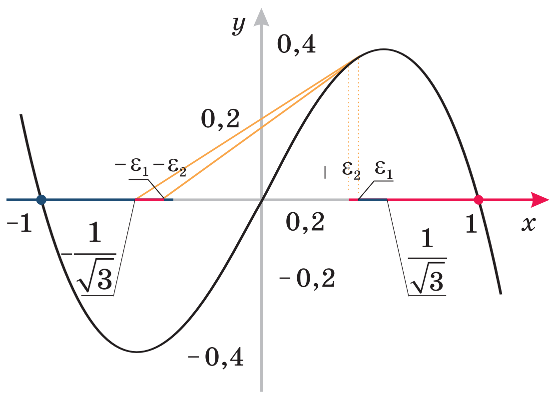


Рис. 6.

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ясно, что все точки $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, $\pm\varepsilon_3$ … являются точками расходимости. В самом деле, начав, например, с точки $x=\varepsilon_3$, процесс Ньютона проделает следующую цепочку: $\varepsilon_3\to-\varepsilon_2\to\varepsilon_1\to-\frac{1}{\sqrt{3}}\to$ «не определено».

Также из сказанного выше ясно, что точки $x=\pm\varepsilon_n$ делят интервалы $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ на оси Ox на бесконечное число более мелких интервалов $(\varepsilon_{n+1};\varepsilon_n)$ и $(-\varepsilon_n;-\varepsilon_{n+1})$, начиная с которых (выбрав в одном из них какое-либо значение x_0) процесс Ньютона сходится к тому или иному корню уравнения (5). А именно, из всех точек одного из этих двух интервалов процесс сходится к корню $x=+1$, а из всех точек другого интервала – к корню $x=-1$. При этом два последовательных интервала принадлежат зонам сходимости разных корней.

Добавление 3. Исследовательская задача

Видно, что уже для простейшего кубического уравнения зоны притяжения имеют достаточно сложную структуру.

Предлагаем изучить зоны притяжения и множество расходимости итерационного метода Ньютона для уравнений третьей степени вида $x^3 \pm x + q = 0$[7] (к таким двум уравнениям сводится практически любое из уравнений третьей степени) и уравнений четвёртой степени вида $x^4 \pm x^2 + px + q = 0$ (к таким двум уравнениям сводится практически любое из уравнений четвёртой степени).

Литература

1. *Болтянский В.* Метод итераций // Квант. 1983. № 3. С. 16–21, 37.

2. *Виленкин Н.Я.* Метод последовательных приближений. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1963. – (Серия «Популярные лекции по математике». Вып. 35.)

3. *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967.

4. *Ньютон И.* Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов // Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976.

[7] Задача усложняется, так как исчезает нечётность уравнения, обеспечивавшая нам принцип симметрии.

Вернуться к содержанию

Замечательный треугольник в треугольнике ABC

Григорий Борисович ФИЛИППОВСКИЙ
учитель математики Русановского лицея г. Киева
shvilka@mail.ru

Назовём замечательным треугольником тот, вершинами которого являются три важнейшие точки треугольника *ABC*: центр *O* описанной окружности треугольника *ABC*, его ортоцентр *H* и центр *I* вписанной в него окружности (рис. 1). Свойства треугольника *OIH* мы продемонстрируем на примере остроугольного треугольника *ABC*. Все результаты останутся в силе и в случае, когда треугольник *ABC* будет тупоугольным (что можно показать самостоятельно). Заметим также, что в равностороннем треугольнике *ABC* треугольника *OIH* не существует ($O \equiv I \equiv H$). А в равнобедренном (неравностороннем) он вырождается в отрезок.

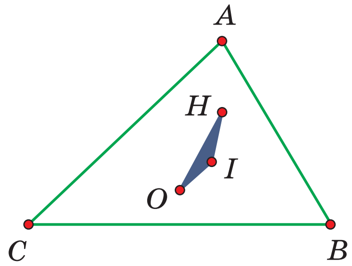


Рис. 1.

Прежде чем приступить к подробному разговору о треугольнике *OIH*, докажем несколько теорем и формул, которые нам понадобятся.

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться стандартными обозначениями: *a*, *b*, *c* – длины сторон *BC*, *AC* и *AB* треугольника *ABC*; *p* – его полупериметр; *r* и *R* – радиусы вписанной и описанной окружностей.

Теорема Стюарта. Для любой чевианы *AT* справедлива формула (рис. 2):

$$AT^2 = \frac{n}{a}b^2 + \frac{m}{a}c^2 - mn, \text{ где } CT = m,\ BT = n.$$

Доказательство. Обозначив $\angle ATB$ через α, запишем теорему косинусов для треугольников *ABT* и *ACT*:

$$c^2 = AT^2 + n^2 - 2n \cdot AT \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = AT^2 + m^2 + 2m \cdot AT \cdot \cos\alpha.$$

Домножив первое уравнение на *m*, а второе уравнение на *n* и сложив их, получим:

$$b^2n + c^2m = AT^2(m + n) + mn(m + n).$$

Так как $m + n = a$, то $AT^2 = \frac{n}{a}b^2 + \frac{m}{a}c^2 - mn.$

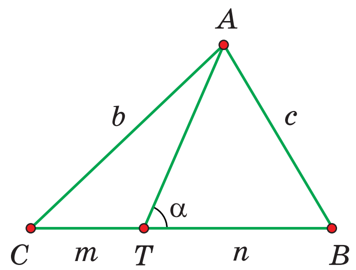


Рис. 2.

Теорема Лейбница. Для любой точки *X* в плоскости треугольника *ABC* справедлива формула:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2,$$

где *M* – точка пересечения медиан (центроид) треугольника *ABC*.

Доказательство. По правилу сложения векторов $\overline{XA} = \overline{XM} + \overline{MA}$. Аналогично, $\overline{XB} = \overline{XM} + \overline{MB}$ и $\overline{XC} = \overline{XM} + \overline{MC}$. Возведём обе части всех трёх равенств в квадрат и сложим:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + 2\overline{XM}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Поскольку $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$, получим требуемое.

Формула 1. Справедлива формула: $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, где M_1 – середина BC; H – ортоцентр треугольника ABC.

Доказательство. Проведём диаметр BK (рис. 3). Имеем: $KC = 2OM_1$ (OM_1 – средняя линия в треугольнике BKC), $KC \parallel AH$ (оба отрезка перпендикулярны стороне BC), $KA \parallel CH$ (оба перпендикулярны AB). Тогда $CKAH$ – параллелограмм и $AH = KC = 2OM_1$.

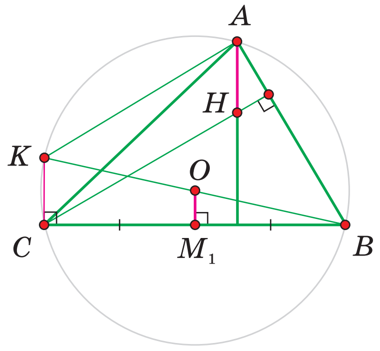


Рис. 3.

Формула 2. Справедлива формула: $ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$.

Доказательство. $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ – формула Герона. Тогда

$$pr^2 = p^3 - p^2(a + b + c) + p(ab + bc + ac) - abc.$$

Но $a + b + c = 2p$ и $abc = 4SR = 4prR$. Сокращая на p, получим:

$$r^2 = -p^2 + ab + bc + ac - 4Rr,$$

откуда $ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$.

Формула 3. Справедлива формула: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

Доказательство. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr)$, откуда после преобразований получаем требуемое.

Теперь рассмотрение свойств треугольника OIH не должно вызывать у нас особых затруднений.

Свойство 1. Треугольник OIH – тупоугольный, с тупым углом OIH.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC для определённости $a > b > c$. Проведём высоты AH_1 и CH_3, а также серединные перпендикуляры OM_1 и OM_3 (рис. 4).

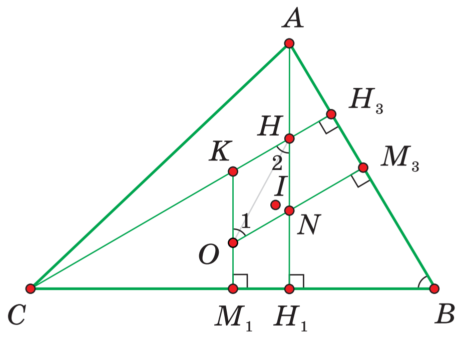


Рис. 4.

Очевидно, точка H_1 ближе к B, чем к C (так как $b > c$), а точка H_3 – ближе к A, чем к B ($a > b$). Точка I пересечения биссектрис лежит между прямыми AH_1 и OM_1 (биссектриса находится между высотой и медианой). Аналогично точка I находится между CH_3 и OM_3. Тогда инцентр I находится внутри параллелограмма $OKHN$. При этом $\angle 1 = \angle B$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), где B – острый угол (не самый большой в треугольнике ABC). Поскольку $\angle 1 = \angle 2 = \angle B$ – острые, то два других угла в параллелограмме $OKHN$ – тупые. Поэтому окружность, построенная на OH как на диаметре, будет содержать внутри себя точки K и N, а значит, и точку I. Тогда тем более $\angle OIH$ – тупой.

Следствия. $OH > OI$, $OH > IH$.

Свойство 2. Центроид M лежит на стороне OH треугольника OIH, причём $2OM = MH$.

Доказательство. Пусть медиана AM_1 пересекает отрезок OH в точке T (рис. 5). Очевидно, треугольники OM_1T и HAT подобны. Поскольку

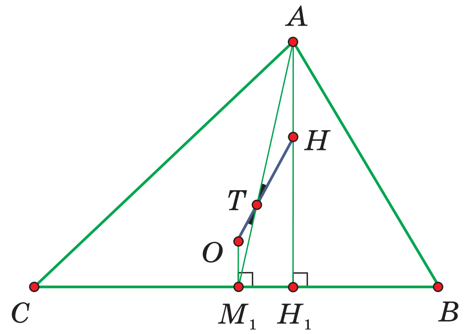


Рис. 5.

$OM_1 = \frac{1}{2}AH$ (формула 1), то $TM_1 = \frac{1}{2}AT$, или $AT = 2TM_1$. Значит, $T \equiv M$ – центроид в треугольнике ABC.

Свойство 3. Точка E – середина стороны OH треугольника OIH – является центром окружности Эйлера треугольника ABC, причем радиус её равен $\frac{R}{2}$.

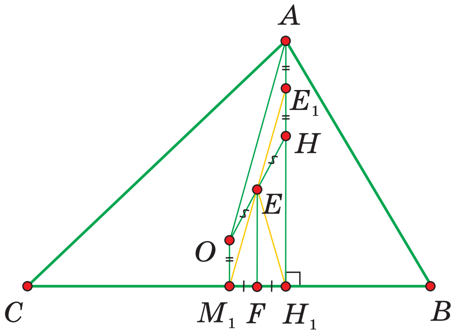


Рис. 6.

Доказательство. Пусть E_1 – середина отрезка AH (рис. 6). Тогда $OM_1 = AE_1$ и $OM_1 \parallel AE_1$, то есть OAE_1M_1 – параллелограмм. Но $OA = R$, значит, и $M_1E_1 = R$. Из равенства треугольников EOM_1 и EHE_1 следует, что $M_1E = EE_1 = \frac{R}{2}$. Очевидно, $EH_1 = EM_1 = \frac{R}{2}$ (EF – высота и медиана треугольника M_1EH_1). Аналогично показываем, что $EE_2 = EM_2 = EH_2 = \frac{R}{2}$ и $EE_3 = EM_3 = EH_3 = \frac{R}{2}$ (где точки E_i, M_i, H_i, $i = 2, 3$, выбираются так же, как и точки E_1, M_1, H_1). Итак, E – центр окружности Эйлера радиуса $\frac{R}{2}$, которой принадлежат следующие 9 точек: середины сторон треугольника ABC – точки M_1, M_2, M_3; основания его высот – точки H_1, H_2, H_3; середины отрезков AH, BH, CH – соответственно точки E_1, E_2, E_3.

Свойство 4. Длина стороны OI треугольника OIH находится по формуле Эйлера: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

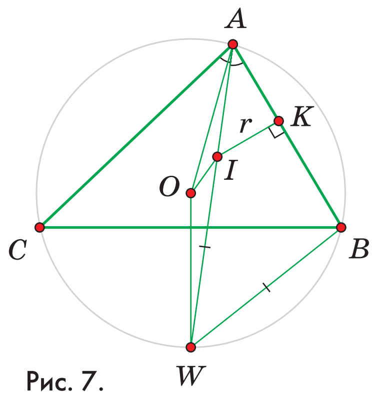


Рис. 7.

Доказательство. Пусть биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке W (рис. 7). По теореме Стюарта для треугольника AOW и чевианы OI имеем:

$$OI^2 = \frac{AI}{AW}\cdot OW^2 + \frac{IW}{AW}\cdot OA^2 - AI\cdot IW,$$

$$OI^2 = R^2\cdot\left(\frac{AI+IW}{AW}\right) - AI\cdot IW \text{ или } OI^2 = R^2 - AI\cdot IW.$$

Вычислим длины отрезков AI и IW и подставим в последнее равенство. Из треугольника AIK получим, что $AI = \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}$. По теореме синусов для треугольника ABW имеем: $IW = BW = 2R\sin\frac{\angle A}{2}$ ($IW = BW = CW$ по так называемой «теореме трилистника»). Тогда $OI^2 = R^2 - \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}\cdot 2R\cdot\sin\frac{\angle A}{2} = R^2 - 2Rr$.

Следствие. Для произвольного треугольника выполнено неравенство $R \geq 2r$. Действительно, $R^2 - 2rR \geq 0$, $R(R-2r) \geq 0$ и $R \geq 2r$.

Свойство 5. Длина стороны *OH* треугольника *OIH* вычисляется по формуле:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Доказательство. Согласно теореме Лейбница для любой точки X в плоскости треугольника ABC выполняется равенство: $XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$. Пусть $X \equiv O$. Тогда $OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$, где $OA = OB = OC = R$; MA, MB и MC – две трети соответствующих медиан в треугольнике ABC. Тогда:

$$MA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}.$$

Найдя аналогичным образом MB^2 и MC^2, получим, что:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Значит, $3R^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + 3OM^2$. Но $OM = \frac{1}{3}OH$ (свойство 2). Подставляя и преобразуя, получим требуемое.

Следствие 1. В произвольном треугольнике выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$.

Следствие 2. В произвольном треугольнике выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2 \le 8R^2 + 2Rr$.

Доказательство. Так как $OH \ge OI$ (свойство 1) и знак равенства достигается в равностороннем треугольнике ABC ($OH \equiv OI \equiv O$), то $9R^2 - (a^2+b^2+c^2) \ge R^2 - 2Rr$, или $a^2+b^2+c^2 \le 8R^2 + 2Rr$. Следствие 2 является более сильным нежели следствие 1.

Следствие 3. Длины отрезков *OM* и *MH* можно вычислить по формулам:

$$OM^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \text{ и } MH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

Для доказательства нужно заметить, что $OM = \frac{1}{3}OH$ и $MH = \frac{2}{3}OH$ (свойство 2).

Свойство 6. Длину отрезка *IM* можно вычислить по формуле:

$$IM^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{3}p^2.$$

Доказательство. По теореме Лейбница при $X \equiv I$ имеем:

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3IM^2.$$

По теореме Пифагора для треугольника AIK: $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$ (рис. 8). Аналогично $IB^2 = r^2 + (p-b)^2$, $IC^2 = r^2 + (p-c)^2$.

Мы уже показали в свойстве 5, что $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$. Подставляя найденные значения в равенство из теоремы Лейбница, получаем:

$$3r^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + 3IM^2,$$

$$3r^2 + 3p^2 - 2p(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + 3IM^2,$$

$$3IM^2 = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$IM^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{3}p^2.$$

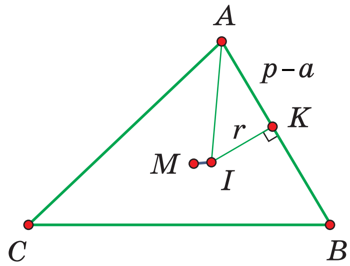


Рис. 8.

Свойство 7. Длина стороны IH треугольника OIH может быть найдена по формуле:

$$IH^2=2(2R^2+r^2)-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Доказательство. Согласно теореме Стюарта для треугольника OIH и чевианы IM имеем (рис. 9):

$$IM^2=\frac{2}{3}OI^2+\frac{1}{3}IH^2-OM\cdot MH,$$
$$3IM^2=2OI^2+IH^2-3OM\cdot 2OM,$$
$$IH^2=3IM^2+6OM^2-2OI^2.$$

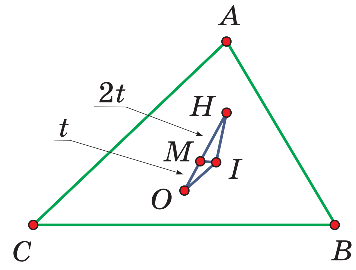


Рис. 9.

Воспользовавшись свойствами 2; 4; 6, а также следствием 3 свойства 5, получим:

$$IH^2=3r^2+\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)-p^2+6R^2-\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)-2R^2+4Rr,$$
$$IH^2=4R^2+3r^2+4Rr=2(2R^2+r^2)-(p^2-r^2-4Rr).$$

Согласно формуле 3, последнее слагаемое равно $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$, поэтому $IH^2=2(2R^2+r^2)-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Свойство 8. Окружность Эйлера касается вписанной в треугольник ABC окружности внутренним образом.

Доказательство. Пусть E – центр окружности Эйлера. Так как IE – медиана треугольника OIH (рис. 10), то по формуле медианы получаем:

$$IE^2=\frac{2(OI^2+IH^2)-OH^2}{4},$$

$$IE^2=\frac{2(R^2-2Rr+4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2))-9R^2+a^2+b^2+c^2}{4},$$

$$IE^2=\frac{R^2-4Rr+4r^2}{4}=\frac{(R-2r)^2}{4}.$$

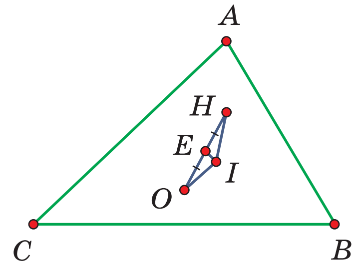


Рис. 10.

Так как $R\geq 2r$, то $IE=\frac{R-2r}{2}=\frac{R}{2}-r$.

Расстояние между центрами двух окружностей оказалось равным разности их радиусов. Значит, эти окружности имеют внутреннее касание.

Замечание. Окружность Эйлера также касается трёх вневписанных окружностей треугольника ABC (теорема Фейербаха), однако вневписанные окружности не входят в тему нашего разговора.

Свойство 9. В произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство: $OH\geq IH\sqrt{2}$.

Доказательство. По формуле медианы для треугольника OIH (рис. 10):

$$4IE^2=2(OI^2+IH^2)-OH^2.$$

При этом мы уже знаем, что $4IE^2=(R-2r)^2$ (свойство 8). Получаем:

$$R^2-4Rr+4r^2=2R^2-4Rr+2IH^2-OH^2,$$

откуда $OH^2-2IH^2=R^2-4r^2$.

Поскольку $R\geq 2r$ (следствие свойства 4), то $OH^2-2IH^2\geq 0$ и $OH\geq IH\sqrt{2}$.

Заметим, что последнее неравенство сильнее, чем следствие свойства 1.

Свойство 10. Докажите справедливость следующей векторной формулы: $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ (формула Гамильтона).

Доказательство. По правилу «треугольника» сложения векторов $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$ (рис. 11). По правилу «параллелограмма» $2\overline{OM_1} = \overline{OB} + \overline{OC}$. Однако $2\overline{OM_1} = \overline{AH}$ (формула 1). Тогда $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

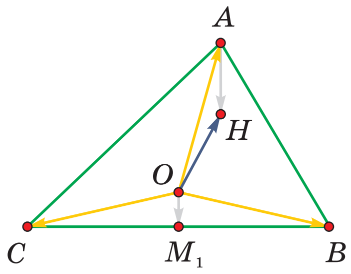


Рис. 11.

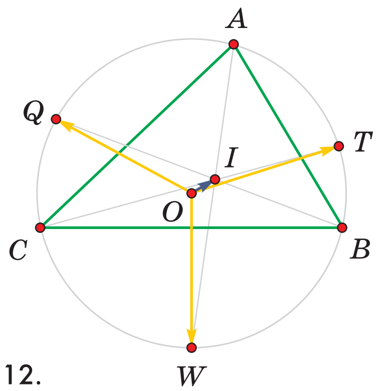


Рис. 12.

Замечание. Продолжим биссектрисы углов *A*, *B* и *C* треугольника *ABC* до пересечения с описанной около него окружностью соответственно в точках *W*, *Q*, *T* (рис. 12). Нетрудно показать, что *I* – ортоцентр в треугольнике *WQT* (покажите!). Поскольку описанная окружность для *WQT* та же самая, то вновь по формуле Гамильтона получим, что $\overline{OI} = \overline{OW} + \overline{OQ} + \overline{OT}$.

Завершая наш разговор, отметим, что одни только фамилии замечательных математиков Эйлера, Лейбница, Стюарта, Гамильтона, «работавших» с треугольником *OIH*, свидетельствуют о том, что он – замечательный! Кроме того, знание его свойств позволяет решить большое количество конкурсных и олимпиадных задач.

Литература

1. *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Задача одна – решения разные. – К.: Радянська школа, 1988.
2. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1940.
3. *Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
4. *Кушнир И.А.* Геометрия на баррикадах. – К.: Факт, 2009.
5. *Кушнир И.А.* Треугольник и тетраэдр в задачах. – К.: Факт, 2004.
6. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991.
7. *Скопец З.А., Жаров В.А.* Задачи и теоремы по геометрии. – М.: Учпедгиз, 1962.
8. *Филипповский Г.Б.* О двух параллелограммах в треугольнике // Квант. 2008. № 4. С. 34–35.
9. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.

Вернуться к содержанию

Учим математике

Преодоление неуспешности

Герман Григорьевич ЛЕВИТАС
учитель математики школы № 1199 г. Москвы
gglevitas@mtu-net.ru

Вступление

Результаты ЕГЭ выглядят устрашающе. Около четверти школьников в 2008 году не справились с заданиями по русскому языку и по математике. На наш взгляд, это результат невежества руководителей народного образования. Еще в 70–80-е гг. прошлого столетия нами была разработана и опробована в массовом эксперименте технология учебных циклов, которая решает проблему неуспешности при классно-урочной системе обучения[1]. Эта технология используется в преподавании тех предметов, в которых ведущим элементом являются точные знания, то есть курсов математики 1–6-х классов, алгебры 7–9, геометрии 7–11, алгебры и начал математического анализа 10–11-х классов, родного языка, а также многих разделов информатики, физики, химии, биологии, географии, истории, иностранного языка. Применяется она и в преподавании некоторых разделов литературы, изобразительного искусства, музыки: при изучении биографий писателей, музыкантов и художников, квинтового круга в музыке, теории перспективы в живописи, законов стихосложения.

Технология учебных циклов отличается простотой и лёгкостью применения. Вместо трудно осуществляемой дифференциации учащихся здесь применяется легко реализуемая «лесенка» сложности и трудности заданий. Не требуется непременное использование компьютера. Компьютер (если учитель им располагает) применяется не как основное средство обучения, а лишь в качестве помощника учителя. Если же компьютера нет, то это совершенно не препятствует использованию нашей технологии.

---

[1] Об истории создания этой технологии см. нашу статью, помещённую в этом же номере, на с. 12–16.

Технология учебных циклов разработана в НИИ школьного оборудования и технических средств обучения Академии педагогических наук СССР. Её авторами являются Е.Б. Арутюнян, М.Б. Волович, Ю.А. Глазков и я. В настоящем тексте местоимением «мы» обозначаются эти четыре автора. Важный вклад в наши разработки внесли В.Г. Болтянский, М.Я. Антоновский, В.Г. Ашкинузе, Э.Ю. Красс, В.С. Нодельман, Л.И. Апанасенко, А.О. Антонов, Ю.Г. Гузун, П.М. Камаев и многие учителя-экспериментаторы.

Эта технология была опробована в массовом (более 1000 учащихся) многолетнем эксперименте (непрерывное преподавание с 4 по 11 классы) в школах Москвы, Армении и Латвии и получила одобрение Института гигиены детей и подростков Минздрава СССР, а также Всесоюзной конференции учителей математики в 1989 г. Руководитель латвийской части эксперимента И.М. Милаш отозвалась о ней так.

«В течение 7 лет, с 1982 года по 1988 год, в школах Латвии проводился эксперимент по применению методики обучения математике под руководством Г.Г. Левитаса, начиная с 5-го и кончая 11-м классом. По общему признанию учителей и методистов, наиболее значимых результатов добились те участники эксперимента и использующие его идеи педагоги, которые строго придерживались методической схемы учебных циклов. Анкетирование и собеседования с учащимися, участниками эксперимента (примерно 400 человек), свидетельствуют, что систематическое использование методики позволяет сформировать полноценную учебную деятельность учащихся, характеризующуюся высоким уровнем мотивации и общеобразовательных умений и навыков. На мой взгляд, разработанная система на сегодня является единственной технологией обучения математике, реально позволяющей начинающему учителю с первых шагов самостоятельной деятельности владеть дисциплиной учащихся без администрирования и управлять обучением».

В конце прошлого века стали раздаваться голоса об устарелости результатов проведённого нами эксперимента. В ответ на это был организован повторный эксперимент в двенадцати школах города Старый Оскол по шести предметам: математике, физике, химии, истории, биологии и географии. Эксперимент начат в 2002 году и успешно продолжается по сегодняшний день.

На основе нашей технологии творчески работающий учитель может создавать *собственную методическую систему преподавания*. Такой системой, разумеется, обладает каждый хороший учитель, и у каждого она своя. Построить за него такую систему нельзя, ибо она индивидуальна по самой своей сути. Но можно показать учителю её элементы, которые существенно облегчат создание системы и помогут избежать грубых ошибок. Эти элементы – некая подсистема методической системы школьного преподавания. Одним учителям она окажется вполне приемлемой, и они встроят её в свою систему преподавания. Другими она будет отвергнута, и они построят иную. Но в любом случае, как показали вышеупомянутые массовые эксперименты, наши рекомендации небесполезны.

Вот один из таких приёмов, который принят в нашей технологии, а вместе с тем полезен и сам по себе. Это приём «да-нет». Учителя часто задают вопросы классу и хотели бы, чтобы на эти вопросы отвечали все ученики. Чтобы на вопрос ответили все, можно спросить кого-нибудь одного из учеников, а потом спросить всех, согласны ли они с данным ответом. Некоторые учителя пользуются для этого разноцветными флажками. Но проще всего написать на доске

да – нет

и попросить поднять левую руку («да») тех, кто согласен с ответом, и правую («нет») – кто не согласен. Приём «да-нет» хорош потому, что все учащиеся отвечают на вопрос одновременно и однократно, а значит – вполне определённо. После поднятия рук можно продолжить объяснение или обсудить полученные ответы.

Наши эксперименты доказывают, как говорят математики, теорему существования: *существует способ сделать эффективным преподавание точных знаний в рамках классно-урочной системы*.

Работая по нашей технологии, нужно отказаться от некоторых мифов.

Первый миф: нельзя загружать детей на уроке, так как это приводит к утомлению нервной системы. Оказывается, это не так: наибольшее утомление на уроках происходит не от нагрузок, а, наоборот, от безделья, от тягостного ничегонеделания. На уроках, проводимых по нашей технологии, дети заняты непрерывно, и у них, по сравнению с обычным уроком, резко повышается уровень трудоспособности и значительно понижается утомляемость, что подтверждено специальными инструментальными исследованиями, проведёнными Институтом гигиены детей и подростков Минздрава СССР в конце 70-х годов. Утомляемость у наших учащихся достигает пика на пятом уроке (а при традиционной методике – на втором). Работоспособность у наших учащихся падает к пятнице (а при традиционной методике – ко вторнику). При этом, в отличие от традиционного преподавания, работоспособность у наших учеников остаётся выше нормы, а утомляемость – меньше допустимой. Полная занятость на уроках позволяет резко уменьшить объем домашних заданий и привести его в соответствие с известными требованиями медиков: *Нельзя систематически задавать на дом более чем на половину времени урока; домашняя работа по одному предмету не должна идти в среднем более 20 минут.* Соблюдения этого условия мы добиваемся путём полного и эффективного использования всего времени урока.

Второй миф: ученики должны знать всё, что сказал учитель. Это не так, что было отмечено ещё К.Д. Ушинским в середине XIX века: восприятие обеспечивается не столько тем, что говорит учитель, сколько тем, какие задания выполняют учащиеся. Бытующий на уроках учительский упрёк: «Я же вам говорил» – неправомерен. Из того, что произносит учитель на уроке, необходимо выделять ту часть, которая должна быть обязательно усвоена. Для этого надо строить на доске конспект учительского рассказа (иногда такой конспект называют опорными сигналами).

Третий миф: нужно почаще вызывать детей к доске. Это неверно. Обычно учитель бывает вынужден уделять вызванному к доске всё своё внимание. Начинается индивидуальное обучение вызванного и прекращается всякое обучение остальных учеников класса. Неблагоприятен и педагогический эффект от плохих ответов у доски. Поэтому к вызовам учеников к доске следует относиться с большой осторожностью. Конечно, необходимо вызвать к доске ученика, если он желает показать, как ему удалось выполнить то или иное задание. И необходимо вызвать подготовленного ученика для ответа по теории. Но вызов неподготовленного ученика или вызов для решения на доске неизвестной ученику задачи – вряд ли оправданы. В частности, если нужно, чтобы у доски кто-либо из учеников рассказал материал учебника, то нужно предупредить заранее, кто именно будет вызван. Это снимет лишнюю тревожность и поможет добиться необходимого качества ответа.

Четвёртый миф: необходимо дифференцировать детей по их способностям. Это неверно потому, что мы не знаем, кто и насколько способен по нашему предмету, а знаем только, кто и как у нас учится. Но ведь плохо учился в школе будущий великий математик Николай Николаевич Лузин, дважды не смог сдать вступительные экзамены один из корифеев мировой математики Эварист Галуа. Мы не имеем надёжных инструментов, позволяющих устанавливать потенциальные возможности наших учеников, а значит, не имеем права сортировать детей. Некоторые учителя решают проблему дифференциации совсем особенным способом. Они предлагают самому ученику выбрать себе уровень: «красную» задачу на 5, «синюю» – на 4 и «зеленую» – на 3. Для нас этот вариант неприемлем потому, что мы не понимаем, как можно предложить ученику учиться на «три», быть «троечником по выбору». *Нужно иметь целью учиться на пятёрки*, а если не всегда получается – рассматривать это как незапланированный сбой.

Хорошо известно, чем обычно оборачивается уровневая дифференциация: некоторых детей объявляют слабыми и начинают их учить хуже, чем остальных. Это создаёт необратимый процесс дальнейшего ухудшения их знаний, не говоря уже о нравственном унижении, которому их подвергли. Нет, внутри одного класса детей нужно учить одинаково. Точнее говоря, на каждом этапе обучения нужно предоставлять всем ученикам класса равные возможности, давать им всем одинаковые обязательные задания. Откуда учитель знает, не болит ли сегодня голова у отличника и не приведёт ли это к резкому падению его возможностей? Откуда известно, не испытывает ли сегодня троечник эмоционального подъема, который позволит ему справиться с заданием высокого уровня (а это может привести к повороту во всех его взаимоотношениях с нашим предметом)? Пусть задания идут лесенкой трудности, и пусть каждый ученик доберётся до той ступеньки, на которую он способен сегодня. А вот если он показал особо выдающийся или, наоборот, особо слабый результат, вот тут-то будут нужны особые приёмы работы. Чтобы работать с сильными учениками, нужны карточки с заданиями повышенной трудности. Для работы со слабыми нужны карточки, на которых, в соответствии с теорией П.Я. Гальперина, изложен полный вариант ориентировки и даны задания для каждого этапа формирования умственных действий. Первые сборники именно таких карточек уже опубликованы.

Пятый миф: нельзя заставлять детей много запоминать. Нынешняя разгрузка учебных предметов от запоминания формул, событий, имён, дат, стихотворений и прозаических отрывков уже привели к резкому падению памяти у целого поколения. Мы требуем от детей выучивания наизусть самой важной части каждой порции теоретического материала – его конспекта.

Шестой миф: пора отходить от классно-урочной системы обучения, вводя элементы лекционно-семинарского обучения, зачётной системы и пр. Заметим, что всё это надо делать крайне осторожно. Например, с большой осторожностью следует относиться к лекциям. Лекция особенно эффективна при использовании высококвалифицированных лекторов. Однако, как показали специальные наблюдения, даже у лучших лекторов в особо подготовленных студенческих аудиториях (мехмат МГУ им. Ломоносова) непосредственно во время лекции слушатели успевают усвоить приблизительно 40% материала. На мехмате МГУ это не страшно: студенты умело конспектируют лекцию, и после неё они на семинарских занятиях и в индивидуальной домашней работе уверенно достигают необходимого уровня усвоения. Но вот возможно ли это в школе? Конечно, если лекция интересна всем, то она может продолжаться хоть целый урок (здесь мы имеем случай непроизвольного внимания). Если же это не так и внимание является произвольным, то, как показали специальные исследования, можно рассчитывать на внимание аудитории в среднем не более чем на 18 минут. Отсюда рабочее правило: *лекция, рассчитанная на произвольное внимание школьников, не должна продолжаться более 15 минут.* Что же касается классно-урочной системы в целом, то она очень подходяща для общеобразовательной школы, и это нами неопровержимо доказано нами в вышеупомянутых массовых экспериментах.

Работая по нашей технологии, учитель может получать немедленную консультацию по моему домашнему телефону (495) 314–51–83 или по электронной почте, адрес которой указан в начале статьи.

§ 1. Учебный цикл. Одноурочный цикл

Единицей учебного времени в школе обычно считают урок. Однако в течение урока не всегда удаётся преподать с начала до конца какую-либо порцию знаний. Урок может быть и началом, и продолжением, и окончанием этого процесса. А весь период такого изучения, состоящий из одного или из нескольких уроков, естественно назвать *учебным циклом*.

Учебный цикл – это фрагмент процесса обучения, в течение которого учащиеся усваивают некоторую отдельную порцию учебной информации.

Как строить учебный цикл – зависит от многих причин: от целей изучения материала, от его содержания, от выбранных методов, форм и средств обучения, от личностных свойств учителя и учеников. Однако в этом деле найдена некая отправная точка. Нами разработано и проверено в массовом многолетнем эксперименте такое строение учебного цикла, которое достаточно эффективно и в то же время удобно для работы. Овладев им, учитель далее оказывается в состоянии развивать своё мастерство, видоизменяя и сам учебный цикл.

Вот как выглядит принципиальное строение учебного цикла:

1) актуализация знаний, необходимых для усвоения новой информации;
2) введение новой информации;
3) репродуктивное (первоначальное) закрепление;
4) тренировочное закрепление;
5) контроль знаний;
6) итоговое закрепление.

Если все эти этапы удается уложить в один урок, то в этих редких случаях получаем *одноурочные циклы*.

Одноурочные циклы совершенно не характерны для курса математики. Однако некоторые школьные предметы, так сказать, принципиально одноурочны. Это история, география, биология, а также большие разделы физики, химии и некоторых других предметов. В них планирование отводит на каждый новый параграф один урок. Как может выглядеть учебный цикл в этом случае?

Здесь нам придётся рассмотреть два варианта: первый – для класса, хорошо выполняющего домашние задания, и второй – для класса, в этом отношении ненадёжного.

Одноурочный цикл (история, биология, химия, география и др.)

Вариант для класса, умеющего работать дома	Вариант для класса, не умеющего работать дома
1. Диктант. Опрос у доски 2. Рассказ-беседа; ключевые слова на доске и в тетрадях Д/з: раскрыть смысл ключевых слов по учебнику	1. Подготовка к диктанту 2. Диктант. Опрос у доски 3. Рассказ-беседа; конспект на доске и в тетрадях 4. 2–3 пересказа материала по конспекту на доске

Проиллюстрируем эту схему на примере урока истории. Сначала остановимся на первом варианте – для класса, умеющего работать дома.

1. Проводится исторический диктант. Два ученика (оповещённые об этом заранее) пишут ответы на скрытых полях доски, остальные – на отдельных листах бумаги. Диктант состоит из вопросов, ответы на которые содержались в конспекте прошлого урока. И так как дети дома эти конспекты выучили, они к диктанту готовы. Когда диктант завершён, учитель собирает листы, а вызванные к доске раскрывают свои ответы. Происходит разбор вопросов и ответов. После этого вызванные рассказывают материал учебника. Очень поощряются добавления и исправления с мест (что способствует подготовке всех учащихся к уроку по учебнику).

2. Вводится новый материал. Учитель выписывает на доске ключевые слова. Например, рассказывая об Отечественной войне 1812 года, он мог бы написать на доске следующие ключевые слова: Наполеон; 24 июня; Барклай де Толли и Багратион; Смоленск; Кутузов; Бородино; Фили; Москва; Тарутино; Малоярославец; Смоленск; Березина; декабрь. Учащиеся переносят эти записи в свои тетради.

3. Домашнее задание состоит в расшифровке ключевых слов. Заметим, что в сильном классе учитель может вводить дополнительный материал. Например, ведя речь об оставлении Москвы, можно рассказать о гениальном Тарутинском манёвре Кутузова. В этом случае на доске появляется надпись «Тарутинский манёвр», и учащиеся должны расшифровать эту надпись не с помощью учебника (в котором этого нет), а с помощью других материалов (энциклопедия, интернет и т.п.).

Второй вариант одноурочного цикла – для класса, не умеющего работать дома. В этом варианте мы не можем начинать с диктанта, так как не уверены, что дети выполнили домашнее задание. Поэтому мы начинаем с подготовки к диктанту. А именно, все вопросы диктанта задаём классу и спрашиваем ответы у тех, кто может ответить (на оценку!). После этого проводится диктант. Двое (заранее предупреждённые) пишут его на скрытой части доски, что очень облегчает последующую проверку. Затем эти двое кратко излагают текст учебника.

Изложение нового мы сопровождаем записями на доске ключевых слов с их расшифровкой. Например, пишем не «24 июня», а «24 июня – вторжение Наполеона в Россию» и т.д. На доске получается полный конспект нового материала, который учащиеся переносят в свои тетради.

Следующий этап – закрепление. По тексту конспекта, имеющемуся на доске, организуется пересказ изложенного материала. Первым это может сделать сам учитель, затем – один из лучших учеников, далее – один из средних учеников и, наконец, – один из самых слабых.

Даётся домашнее задание: выучить конспект. Назначаются двое, которые будут работать у доски.

Именно такой урок был показан старооскольским учителем А.А. Мозговым (правда, по физике). Полагаю, что это прекрасный вариант одноурочного цикла.

Как видно, одноурочный цикл включает в себя всё принципиальное содержание учебного цикла. К тому же одноурочный цикл проводится так, что каждый ученик занят на каждом этапе и отчитывается в своей работе письменно. Все учащиеся на этом уроке получают по одной или даже по две оценки.

§ 2. Двухурочный цикл. Многоурочные циклы

Одноурочные циклы очень кратки. Они не дают времени на осознание, продумывание материала. Каждый этап проводится в быстром темпе. И если кто-либо из учеников отвлёкся даже на короткое время, это может сказаться на процессе обучения.

Уже двухурочные циклы гораздо эффективнее одноурочных. Двухурочные циклы состоят из урока изложения нового материала (мы будем называть его уроком И) домашней работы и урока самостоятельной работы (урок С).

Урок изложения нового материала состоит из трёх этапов: контроль знаний – диктант (около 10 минут вместе с проверкой), этап объяснения (15 минут) и этап первоначального закрепления.

Урок С также состоит из трёх этапов. Этап проверки теоретического материала занимает около 10 минут. Этап тренировочного закрепления занимает около 15 минут. Наконец, проводится сама эта работа, занимая около 15 минут.

Видно, что и во время двухурочного цикла учитель всё время руководит работой, а ученики постоянно заняты делом и письменно отчитываются в своей работе на каждом этапе.

Двухурочный цикл достаточен для организации обучения, если:

1) не требуется длительного закрепления материала;

2) опрос по теории можно осуществить с помощью воспроизведения конспекта.

Если же нарушается какое-нибудь из этих условий, то в учебный цикл нужно вводить дополнительные уроки.

Так в некоторых учебных дисциплинах большое внимание уделяется письменному решению задач и упражнений. Двухурочный цикл не даёт места для такой работы. Для неё нужны специальные уроки. На этих уроках задачи должны решаться всеми учащимися (а не списываться с доски, как это часто бывает). Кроме того, необходимо, чтобы каждый ученик на таком уроке получил оценку за работу. Это достигается путём специальной организации *уроков решения задач* – уроков Р (см. § 5).

Второе затруднение, возникающее на двухурочных циклах, – невозможность опросить всю теорию по конспектам. Эта проблема решается путём введения в учебный цикл *урока общения* (урок О). На нём учащиеся прочитывают по учебнику теоретический материал (рассказанный им на предыдущем уроке), а затем «сдают» его учителю либо другим ученикам (см. § 6).

Включение в учебный цикл одного или нескольких уроков решения задач и (или) одного или нескольких уроков общения приводит к многоурочным циклам. Трёхурочные циклы могут быть двух видов: И–Р–С и И–О–С. Четырёхурочные циклы могут быть более разнообразными: И–Р–О–С, И–Р–Р–С и И–О–О–С. Отметим, что урок общения лучше не ставить перед уроком решения задач, то есть цикл И–О–Р–С нежелателен. Пусть учащиеся вначале научатся применять теоретический материал, а затем уже выучивают его и сдают учителю (подобно тому, как в вузе зачёт по практике обычно предшествует экзамену по теории).

Любопытный вариант был мне предложен учителем истории одной из московских школ. Он соединял обычные одноурочные циклы по своему предмету в двухурочные. Для этого он просто «склеивал» в одну порцию два подряд идущих параграфа учебника истории. В этих двухурочных циклах ему недоставало лишь одного: дети мало говорили у доски. Эту проблему удалось решить с помощью специальной организации повторительно-обобщающих уроков по большим темам. Их он строил как уроки общения (урок О).

Весьма интересны пяти- и шестиурочные циклы, использованные мною при построении курсов математики в 5–9-х классах. Основная идея этих курсов состоит в делении цикла на две составляющие. На первых двух уроках вводится новый материал и проверяется, понят ли он учащимися. Эта часть цикла состоит из уроков И и С. На следующих трёх или четырёх уроках этот материал включается в общую систему знаний. Это происходит на уроках Р и О. Последний урок цикла бывает занят итоговой проверочной работой. Такое строение курса требует видоизменения планирования, при котором годичный курс математики делится на циклы по укрупнённым темам. В 5 и 6 классах получается 30 пятиурочных циклов, в курсах алгебры 7–9-х классов – по 16 шестиурочных циклов, в курсах геометрии – по 11 шестиурочных циклов.

Учебные циклы в нашей технологии (кроме малотипичных одноурочных) состоят из уроков И, Р, О и С. Займёмся этими уроками более подробно. Каждый урок будет описан подробно, после чего это описание будет дано в виде краткой таблицы.

§ 3. Урок изложения нового материала

Первый этап такого урока – предметный диктант, занимающий вместе с проверкой около 10 минут. К началу урока на ученических столах лежат чистые листы бумаги (в половину тетрадной страницы) и такого же размера листы копировальной бумаги. В самом начале урока учитель включает магнитофон. Звучат вопросы. Ученики отвечают на них в контрольных листах, наложенных через копирку на рабочие тетради (или на другие такие же листы). Но вот диктор произнёс: «Диктант окончен», – и контрольные листы с ответами сдаются учителю. Проверит он их позже. А сейчас учитель включает графопроектор или демонстрирует запись на доске, и ученики видят правильные ответы к заданиям диктанта. По этой записи, пользуясь оставшимися у них копиями, ученики проверяют свою работу. Учитель напоминает задания, ученики объясняют свои ответы. Правильные ответы они отмечают плюсами, неправильные – минусами, не вполне правильные – плюс-минусами.

Учитель при обсуждении ответов использует приём «да-нет» (см. Вступление). Хорошим приёмом является вызов к доске одного или двух учеников перед началом диктанта (если в классе имеется распашная доска или занавеска, за которой они могут спрятать свои записи). Эти ученики пишут ответы на скрытых частях доски, а после окончания диктанта их записи используются для проверки ответов.

Я всё время говорю о проведении предметного диктанта с помощью звукозаписи. Но если у учителя её нет, это не повод отказываться от диктанта. Просто придется задавать вопросы самому учителю, хотя это и менее удобно.

Не обязательны и листы копировальной бумаги. Ответы на диктантах обычно очень кратки, и не стоит большого труда копировать их в тетради.

Полезно варьировать способы проверки и оценки диктантов. Очень эффективна взаимопроверка: ученики, писавшие один и тот же вариант, обмениваются своими листами; при сообщении правильного ответа каждый ученик ставит плюс или минус в лист своего товарища; после этого листы возвращаются авторам; они выставляют себе оценки и сообщают их учителю. При такой проверке можно не ставить плохих оценок. А можно вообще выставлять только те оценки, которые устраивают ученика:

– У тебя что?

– Четыре.

– У тебя?

– Пять.

– У тебя?

– Не ставьте, пожалуйста.

Здесь нужно остановиться ещё на одной важной проблеме – на проблеме списывания. Списывают, оказывается, не везде. Насколько мне известно, не списывают в школах США. Американские дети, приезжавшие по обмену в гости в 45-ю московскую школу, на вопросы о списывании обнаруживали удивление и говорили, что, списывая, не научишься. У нас (а также, например, в Германии, и почти повсюду в Европе) дети списывают.

Однако это не даёт права учителю подозревать детей в списывании, пока они на этом не попались. Скажем, проводит учитель предметный диктант в два варианта. Ясно, что это плохо: один вариант удобнее и диктовать, и потом разбирать, и проверять. Но дети знают: диктант проводится в два варианта для предотвращения списывания. А стоит ли это делать? Ведь списывают, когда не знают (или не уверены, что знают). Если учить так, чтобы знали, так и списывать не будут. Нравственный климат при отсутствии подозрений в списывании намного выше. А выговоры, которые нужно делать при каждом обнаружении списывания, будут настоящей борьбой за нравственность (против лжи!), если списывают всё реже и реже. *Хорошее обучение позволяет повысить нравственный уровень*. И если предметный диктант в один вариант полезнее дидактически, то и нужно его проводить в один вариант. Мы повысим уровень обучения, а это в борьбе со списыванием лучшее средство, чем грубая борьба с ним.

Осенью 2003 года я приехал в Старый Оскол посмотреть, как в его школах внедряется технология учебных циклов. Я побывал на шести уроках в разных школах города: на уроках физики, географии, биологии и математики. На каждом уроке был диктант. И все эти шесть диктантов писались в один вариант. Это было для меня большой и приятной неожиданностью и убедило меня окончательно в том, что вариант в предметном диктанте должен быть один.

Второй этап урока – объяснение материала. На него отводится не более 15 минут. Отходить от этого правила можно только тогда, когда содержание излагаемого материала безусловно интересно всем без исключения слушателям. Некоторые учителя обманываются на этот счёт. Мы с М.Б. Воловичем однажды присутствовали на уроке математики у учительницы М.А. Она была свято уверена, что её объяснения с интересом слушают все ученики. После урока мы предъявили ей бланк игры в морской бой, которой развлекались её ученики на последней парте. Так что не обольщайтесь. И если вы не уверены, что вас слушают все, не превышайте лимита в 15 минут.

Рассказывая материал, учитель выписывает на доске конспект, а дети переносят конспект в свои тетради. Конспект озаглавлен темой урока. Он заключён в рамку. Это помогает детям переносить конспект в свои тетради. С помощью приёма «да-нет» учитель добивается всеобщего участия в беседе по излагаемому материалу. Он показывает, как можно использовать новый материал для решения типовых заданий.

Третий этап первого урока – первоначальное (репродуктивное) закрепление изложенного материала. На него отводится около 15 минут. Учащиеся под руководством учителя решают задачи, аналогичные тем, которые были рассмотрены при объяснении. Учитель добивается проверки каждого этапа решения самими учащимися или их соседями.

Первоначальное закрепление должно быть выполнено с большой чёткостью. Нужны точные вопросы, точные письменные или устные ответы, должны быть достигнуты правильные формулировки ответов, всеобщее одобрение их классом (приём «да-нет»). К сожалению, обычно этого не происходит. Учитель часто удовлетворяется приблизительными ответами учащихся, а недостатки исправляет только сам. Но это – очень важный этап обучения. Гальперин указывал, что успех ориентировки на 40% определяет успех всего обучения. Поэтому правы те учителя, которые готовят первоначальное закрепление в виде сценария такого вида:

Вопрос: ....

Ожидаемый ответ: ....

Ещё более эффективно проходит первоначальное закрепление при использовании тетрадей с печатной основой. Однако не всякая тетрадь, выпускаемая ныне под названием «Рабочая тетрадь», пригодна для этого. В тетради, которая нам нужна, необходимо иметь не только задания, но и решения этих заданий, в которых оставлены пропущенные фрагменты. Ученик, заполняя пропуски, тем самым участвует в обсуждении решения. Тетрадь помогает ему овладеть новой деятельностью сразу после полученной ориентировки в рассказе учителя.

На дом даётся задание – выучить конспект наизусть для последующего воспроизведения. Учитель назначает двух учеников, которые будут отвечать у доски на последнем уроке цикла. Остальным учитель рекомендует внимательно прочитать учебник, чтобы квалифицированно выслушать ответ (всякое дельное добавление и исправление во время ответа поощряется).

Схема урока И

№ этапа	Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Предметный диктант (10 мин)	Включает магнитофон, наблюдает за работой учащихся; по окончании собирает первые экземпляры. Демонстрирует правильные ответы	Надписывают листы, записывают ответы. По окончании сдают первые экземпляры. Обсуждают результаты
2	Объяснение нового (15 мин)	Ведёт рассказ-беседу. Предъявляет конспект	Слушают, записывают конспект, участвуют в беседе
3	Репродуктивное закрепление	Даёт задания для пошагового выполнения. Контролирует правильность работы	Выполняют задания, контролируя каждый шаг

§ 4. Урок самостоятельной работы

Урок С состоит из трёх этапов. Его цель – проконтролировать усвоение введённого теоретического материала.

На первом этапе проводится опрос по конспектам и у доски. В течение 5 минут учащиеся на чистых листах воспроизводят по памяти тот самый конспект, который они переписали с доски на первом уроке и выучили наизусть дома. После этого класс слушает учеников, вызванных к доске (предупреждённых об этом накануне!), которые рассказывают материал учебника.

На втором этапе учитель готовит класс к самостоятельной работе. Самостоятельная работа проводится в 4 варианта одинаковой сложности и трудности. Исходя из сказанного во Вступлении о дифференциации обучения, мы предлагаем всем работу одинакового уровня, основанную на лесенке трудности: первые четыре задания лёгкие, пятое задание – сложное, шестое задание – трудное[2]. Каждый ученик, в зависимости от его сегодняшних возможностей, достигнет того или иного уровня, получит ту или иную оценку. Этим и будет обеспечена дифферен-

[2] Сложность = составленность из простых элементов, трудность = отсутствие готовых рецептов. Бывают задачи простые (в одно действие!), но трудные (попробуй додумайся до этого действия!).

циация. Мы считаем необходимым, чтобы перед началом работы учитель показал на доске, как решаются первые четыре задания самостоятельной работы. Учитель решает и комментирует задачи, аналогичные этим четырем заданиям. На это уходит около 15 минут. Текст решения этих заданий остается на доске на протяжении всей самостоятельной работы.

На третьем этапе выполняется самостоятельная работа в четырёх равноценных вариантах. Главное здесь – контроль. Поэтому вариантов четыре.

Схема урока С

№ этапа	Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Опрос по конспекту и у доски (10 мин)	Вызывает к доске двух заранее предупреждённых учащихся. Раздаёт остальным ученикам контрольные листы. Даёт задание воспроизвести по памяти конспект. Через 5 минут собирает контрольные листы. Опрашивает вызванных к доске по конспекту и по содержанию нового материала	Надписывают листы, воспроизводят конспект. Вызванные к доске делают это на скрытых частях доски. После сдачи контрольных листов слушают ответы вызванных к доске, исправляют и дополняют их
2	Подготовка к самостоятельной работе (15 мин)	Показывает на доске, как решаются первые четыре задания самостоятельной работы	Слушают, записывают, задают вопросы
3	Самостоятельная работа	Предъявляет задания самостоятельной работы в 4-х вариантах	Выполняют работу

§ 5. Урок решения задач. Урок повторения

В начале этого урока учитель знакомит учащихся с заданиями, записанными на доске: классным заданием и домашним. Ученики приступают к классному заданию, разбившись на пары так, чтобы было приятно и полезно работать с соседом. Учитель просит ответы к задачам обводить рамкой или выписывать на полях для удобства проверки. Он предупреждает, что работа будет приниматься от двоих, поэтому, решив задачу, ученик должен побеспокоиться о своём соседе. Однако решение каждой задачи должно быть зафиксировано в каждой тетради.

Ученики начинают работать. Учитель наблюдает за работой, оказывает помощь тем, кто в этом нуждается, и следит за тем, чтобы каждая пара работала, не отвлекаясь. Если окажется, что какая-либо пара нетрудоспособна, то он рассаживает её. Однако желательно, чтобы ученики сами определяли, с кем будут сидеть.

Пара учеников, равных по своим ролям, называется *гомогенной*, а пара учеников, различных по ролям, называется *гетерогенной*. Мы считаем, что пары на уроке решения задач должны быть, как правило, гомогенными. То есть мы против того, чтобы в каждой паре были «учитель» и «ученик». Дело в том, что, во-первых, мы не знаем, как разделить класс на две равные части: сильных «учителей» и слабых «учеников», во-вторых, считаем, что такое предварительное навешивание ярлыков вредно, а, в-третьих, как уже было ранее сказано, мы считаем полезным, чтобы дети выбирали себе пару сами. Гомогенная пара работает, всё время меняя роли: то один, то другой объясняет, то один, то другой слушает. Получается общение в процессе обучения, чего мы и добиваемся.

Иногда спрашивают: «Как будут общаться и сотрудничать самые слабые? Чему они научат друг друга?» При желании работать двоечник может научить двоечника на 3. Но если такого желания нет, то, конечно, получаются неработоспособные пары. И в этом случае учитель должен обратить на них особое внимание, часто к ним подходить и помогать. Если и этого недостаточно, то в этом (и только в этом!) случае приходится образовывать гетерогенные пары. Сделать это можно, например, так: подсадить к слабому (или даже к паре слабых учеников) сильного и сказать, что он должен объяснить им, как решать данные задачи. При этом надо освободить «учителя» от необходимости самому работать в тетради (если этого не сделать, то он может не успеть поработать со своими «учениками» и просто даст им списать своё решение). Нужно поставить перед «учителем» задачу научить «ученика» на тройку (и тогда «учитель» автоматически получает пятёрку), или на четвёрку (за это «учитель» получает две пятёрки), или на пятёрку (три пятёрки «учителю»).

На уроке решения задач необходимо оценить работу каждого ученика. Обычно к середине урока самые сильные пары заканчивают работу. Учитель проверяет их тетради, ставит высокие оценки и просит приступить к выполнению домашнего задания. За 5 минут до конца урока должно быть проверено учителем не менее трети всех работ. Тогда за оставшиеся 5 минут учащиеся, у которых работы проверены, смогут проверить работы у других учеников (каждый проверяет пару, поэтому одна треть справляется со всеми остальными).

Оценка ставится каждому ученику в зависимости от того, сколько задач им сделано. Но нам ведь надо добиваться, чтобы учащиеся работали в парах. Поэтому следует принять такое правило: *оценки соседей не могут отличаться более чем на один балл.* Это значит, что, решив, например, четвёртую задачу, ученик обязан добиться, чтобы и его сосед решил эту задачу, и только после этого он может приступать к пятой задаче.

Может ли такой урок не удаться? Разумеется. Может оказаться, что класс не в состоянии работать самостоятельно: вы дали задание, а дети и не собираются приступать к нему, и угроза двоек в конце урока не особенно их тревожит. Это значит, что в данном классе такие уроки проводить рано, и надо на первых порах отказаться от уроков решения задач внутри учебного цикла. Иногда урок решения задач не удаётся по другой причине: неточно определён объём задания, и учащиеся не успевают решить все задачи. Здесь можно поступить по-разному: не проверять работы в течение урока, а собрать их для домашней проверки, или даже продолжить работу на следующем уроке. Можно и иначе: увидев к середине урока, что самые сильные решили только четыре задачи из пяти, учитель объявляет, что сегодня делать пятую задачу не обязательно, что пятёрка будет ставиться за четыре задачи. Чтобы правильно определить объём работы на урок, нужно знать относительную скорость работы данного класса и самого учителя. Она выявляется с первых же дней знакомства с классом и в дальнейшем лишь корректируется.

По той же схеме удобно проводить и уроки повторения, отличающиеся от урока решения задач только содержанием самих заданий. Если урок решения задач – составная часть учебного цикла, то урок повторения – урок вне цикла, посвящаемый повторению пройденного.

Заметим, что если класс ещё не готов к урокам типа Р и поэтому проводить уроки решения задач нельзя, то уроки повторения проводить всё же можно. Именно на этих уроках можно приучать детей к урокам решения задач.

Уроки типа Р имеют большое воспитательное значение. На них осуществляется трудовое воспитание (дети приучаются организовывать свой самостоятельный труд), нравственное воспитание (дети несут ответственность за работу своего соседа), коммуникативное воспитание (дети сотрудничают как во время работы, так и во время проверки её результатов). На этих уроках используется коллективная форма работы в классе.

Схема урока Р

№ этапа	Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Организация работы (2 мин)	Просит распределиться по парам для решения задач. Предъявляет задания на урок и на дом	Распределяются по парам по собственному выбору
2	Решение задач (30–35 мин)	Наблюдает за работой пар, консультирует, проверяет и оценивает результаты у первых пар	Работают в парах, обращаются к учителю за помощью и за оценкой
3	Оценка работы (5 мин)	Организует проверку и оценку работ всех учащихся	Ученики, проверенные учителем, проверяют и оценивают работу остальных пар

§ 6. Урок изучения теоретического материала (урок общения)

Опрос по теоретическому материалу не всегда удаётся провести в форме опроса по конспекту на уроке самостоятельной работы. Дело не только в возрасте учащихся, а в том, что не всякий материал можно спросить в такой форме. Даже в старших классах доказательство многих формул тригонометрии можно провести именно в письменной форме, т.е. в форме опроса по конспекту. Но если ответ по теории должен включать в себя рассуждения, а не только записи, то нужно заменять письменный ответ устным. Способ, которым можно устно опросить всех учеников по теоретическому материалу, получил в нашей технологии название *урока общения* (урок О).

Учитель входит в класс и предлагает учащимся рассесться парами для работы над теоретическим материалом. Он говорит, какой материал необходимо прочесть по учебнику и какие задания по этому материалу надо выполнить. Учитель сообщает, на какие вопросы по теории нужно уметь ответить. Эти вопросы должны быть написаны на доске (так же, как и указания страниц учебника и задач). Кроме того, на доске должно быть записано домашнее задание.

Ученики рассаживаются по парам и начинают работать. Они читают материал в учебнике и отвечают на вопросы друг другу, выполняют указанные задания. Когда пара считает, что готова отвечать, она сигнализируют об этом учителю. Учитель опрашивает только две первые пары, а всех остальных опрашивают учащиеся, успешно ответившие до этого; при этом ни один из них тоже не должен опрашивать более двух пар. Впрочем, это и не требуется. Обычно учеников, готовых опрашивать, бывает вполне достаточно, и в течение урока удаётся опросить всех.

Уроки общения позволяют спросить каждого по всему необходимому материалу курса. Исчезают гадания «спросят – не спросят», опрос по теории становится обязательным элементом обучения. И хотя опрос ученика учеником теряет в качестве по сравнению с опросом ученика учителем, альтернативы этому методу мы пока не знаем.

Конечно, не любой класс готов к урокам общения. К этим урокам детей готовят двухурочные циклы и уроки решения задач. Более того, даже в подготовленном классе урок общения порой не сразу удаётся. Но если уроки Р в классе проходят успешно, не следует пугаться первых неудач в проведении уроков общения. Неудавшиеся уроки надо просто продолжить (или доспросить после урока тех, кого не успели спросить на уроке).

Всё сказанное о гомогенных и гетерогенных парах на уроке Р относится и к уроку О.

Схема урока О

№ этапа	Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Организация работы (5 мин.)	Просит учащихся разделиться на пары. Сообщает учащимся о предстоящей работе, записывает на доске вопросы и задачи	Распределяются по парам по собственному выбору
2	Изучение материала	Обходит класс, следит за работой, помогает при необходимости	Изучают материал по учебнику, отвечают друг другу на вопросы, решают задачи в парах; по окончании отвечают учителю; приступают к выполнению домашнего задания
3	Ответы учащихся	Опрашивает первые две пары. Руководит дальнейшим опросом	Опрошенные опрашивают других (по указанию учителя)

§ 7. Об использовании компьютера

В наше время происходит компьютеризация школьного образования. Встаёт вопрос: как может она повлиять на технологию учебных циклов?

Прежде всего, заметим, что появление компьютеров не приводит к изменению целей и функций нашей технологии. По-прежнему, это – образовательная технология, рассчитанная на использование в тех школах, в которых сохраняется классно-урочная система. Общение ученика с компьютером не решает многих нынешних проблем. Так, печатание на клавиатуре не заменяет письма на бумаге; чтение текста на мониторе не заменяет работы с книгой; информация, получаемая с экрана, не заменяет общения с учителем. Ошибаются те, кто думает с помощью компьютера дифференцировать обучение. Компьютер не различает, кто перед ним: холерик или сангвиник, и даже – мальчик или девочка. А учитель различает, и обращается с учеником соответственно.

Как заметил В.Г. Арутюнян, все средства обучения, рассчитанные на фронтальную работу в классе, можно заменить компьютером.

1) Вместо магнитофона или проигрывателя можно использовать звучание колонок компьютера. При этом записи на доске, которые бывают необходимы во время диктанта, легко осуществить на экране компьютера.

2) Вместо кинофрагмента, диафильма, диапозитивов можно разработать специальные программы.

3) Вместо рабочих таблиц можно использовать кадры на экране компьютера.

Нельзя заменить компьютером лишь тетради с печатной основой (индивидуальная форма работы), учебники на уроках Р и О (коллективная работа), справочные таблицы (индивидуальная работа) и задания по вариантам (индивидуальная работа).

§ 8. О процедуре освоения технологии учебных циклов педагогическими коллективами

Технология учебных циклов не требуют от учителя каких-либо новых умений, по сравнению с традиционными. Она требуют отказаться от неэффективных приёмов работы и систематически применять эффективные. Отменяется так называемый «устный счёт», в котором участвуют лишь учащиеся, желающие отвечать, а вместо него вводятся систематические диктанты, при которых на вопрос отвечают все ученики. Вместо выборочного контроля за усвоением теории вводится постоянный опрос всех учащихся по всем темам.

В практике освоения технологии учебных циклов не наблюдаются конфликты с учениками, с коллегами и с родителями. Они лишь видят, что учитель стал более систематично применять некоторые из общепринятых приёмов работы и сразу оценивают эффективность этих мер: в классе налаживается рабочее отношение к предмету, дети более систематично готовятся к урокам, увеличивается число оценок за выполненную работу, улучшается понимание детьми излагаемого материала. Известны случаи, когда родители соседних классов просят перевести ребёнка в класс, где внедряется эта технология.

Начиная работу с педагогическим коллективом, мы рассказываем в лекционном порядке о нашей технологии и даём показательный урок.

Затем учителям раздаются следующие бланки (каждому учителю – все три):

Директору школы
от учителя ....

Докладная записка

Считаю, что в ______ классах знания по ________________ находятся на удовлетворительном уровне и что нет необходимости существенно изменять принятую мной методику преподавания.

Число, подпись

Директору школы
от учителя ....

Докладная записка

Считаю, что в _____ классах знания по _______________ не находятся на удовлетворительном уровне и что необходимо принять следующие меры для исправления этого положения:

____

Число, подпись

Директору школы
от учителя ....

Докладная записка

Считаю, что в _____ классах знания по _______________ не находятся на удовлетворительном уровне и что нужно вносить изменения в методику, принятую мной. Полагаю необходимым использовать технологию учебных циклов.

Число, подпись

Учитель выбирает один из трёх бланков, заполняет его и передаёт в администрацию в указанный срок. Опыт показал, что заявление первого вида подают только те учителя, которые работают действительно успешно: их работа удовлетворяет и их самих, и детей, и родителей, и администрацию. Нарушение этой закономерности означало бы, что доволен собой учитель, чья работа не устраивает детей, родителей или администрацию школы. Полученный документ подтвердил бы необходимость избавиться от этого учителя либо заставить его пересмотреть свои позиции.

В заявлениях второго типа администрация получает необычно много дельных предложений о необходимости улучшения стиля работы в школе: в этих заявлениях учителя пишут обо всём, что мешает работать.

Заявления третьего типа позволяют определить состав учителей, желающих осваивать нашу технологию.

В дальнейшем большинство учителей, написавших заявления третьего типа, образует группу, осваивающую новые технологии, но к их работе внимательно присматриваются и остальные. Сам факт обращения к учителям с тремя указанными формами заявления оказывает хорошее влияние на весь коллектив, доказывая уважительность отношения к учителям со стороны авторов технологии.

Следующий шаг – организация работы. Администрация определяет состав группы учителей, осваивающих нашу технологию. Мы проводим практические занятия. В них участвуют все учителя, вошедшие в составленные списки, а также все желающие.

Нужно сказать, что список учителей, осваивающих данную технологию, не может быть произвольным. Он должен быть составлен с тем расчётом, чтобы ученики, включаемые в обучение по новой технологии, испытывали её воздействие достаточно часто и на протяжении длительного времени. Например, если в данном классе такую работу будет вести лишь учитель физики, – этого недостаточно. Физика занимает всего два урока в неделю, да и то лишь на протяжении 7–11-х классов. Другое дело, если за это возьмётся учитель математики или русского языка, или все учителя физики, химии, географии, биологии и истории, работающие в одном и том же классе. Тогда воздействие технологии на ученика окажется достаточным.

Важно и то, какие именно классы (какая параллель) будет в первую очередь охвачена нашей технологией. Безусловен успех в начальной школе и в пятых классах. Более старшие дети могут быть уже испорчены традиционным обучением и с трудом втягиваются в работу, свободную от лени и лжи. Конечно, сказанное верно не всегда. В любой школе есть прекрасные ученические коллективы в самых разных параллелях. Поэтому предлагается такой порядок работы.

На первом году – все пятые классы и все классы, способные к переходу на новый режим работы. В дальнейшем – продолжение работы в тех классах, которые уже перешли на нашу технологию, а также начало в тех новых классах, в которых это возможно.

Начинается преподавание с использованием нашей технологии.

Всем учителям раздаются бланки отчёта (см. ниже) об их будущей деятельности с требованием ежемесячно представлять отчёты в администрацию. Администрация объявляет способы поощрения своевременной подачи отчётов.

ОТЧЁТ учителя ______________ о работе за ____________

по ____________________________ в ________ классе

№ цикла	Виды работ	Число оценок				
		5	4	3	2	Отс.
№	Д					
	К					
	С					
	Р					
	О					
	П					
...	...	...	...	...	...	...
№	Д					
	К					
	С					
	Р					
	О					
	П					

Условные обозначения: Д – предметный диктант, К – воспроизведение конспекта или ответ у доски, С – самостоятельная работа, Р – решение задач, О – урок общения, П – урок практикума.

Дата заполнения: ______________ Подпись учителя ____________

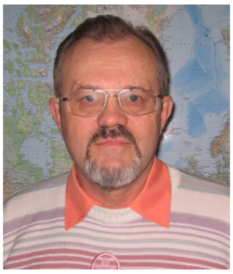
С этого момента требуется неукоснительная подача отчётов раз в четверть (в триместр, но не в полугодие). Опыт показывает, что эта мера не только необходима, но и достаточна. Учитель, подающий отчёты регулярно, регулярно и работает по технологии. Если есть возможность иногда уклоняться от входящих в неё мероприятий, то это может стать началом возвращения к традиционной методике. Систематические отчёты не дают такой возможности.

Следует заметить, что работа по технологии учебных циклов требует от учителя более тщательной, чем обычно, подготовки к урокам. Здесь уже недопустима «устная» подготовка, когда учитель просто продумывает ход урока. Необходимо его фиксировать в виде записи точных формулировок вопросов и заданий и даже отработки способов заполнения доски. Обязательная подготовка к уроку – это фактически единственная трудность освоения технологии учебных циклов.

Помощь учителю могут оказать готовые образцы диктантов, конспектов, текстов самостоятельных работ. Такие материалы могут готовиться авторами технологий, а могут – и самими учителями. Некоторую помощь могу оказать и я.

Нужно сказать, что во время проведения массового эксперимента по внедрению технологии учебных циклов в наших руках не было никаких других средств поощрения учителей, кроме тетрадей с печатной основой, текстов математических диктантов, конспектов и заданий для проведения самостоятельных работ. Этого оказалось вполне достаточно, чтобы учителя охотно приняли наши предложения. Я совершенно убеждён, что разработка даже одних только печатных средств обучения индивидуального пользования и толковых методических рекомендаций было бы достаточной мерой для повсеместного внедрения технологии учебных циклов.

Вернуться к содержанию



Александр Васильевич ЯСТРЕБОВ
зав. кафедрой методики преподавания математики
Ярославского государственного педагогического
университета им. К.Д. Ушинского
a.yastrebov@yspu.org

§ 4. Визуализация понятий и фактов стохастики с помощью графов

Графом в математике называется конечная совокупность точек, называемых вершинами; некоторые из них соединены друг с другом линиями, называемыми рёбрами графа.

Типичным примером графа является географическая карта, на которую нанесена сеть железных дорог: кружочки обозначают станции – вершины графа, а соединяющие их пути – рёбра графа.

Другим «географическим» примером графа является карта административного деления федеративного государства, например, России. Вся территория государства разбита на области, ограниченные линиями. Общие точки линий, ограничивающих области, будем считать вершинами графа, а отрезки линий, соединяющих вершины, – ребрами графа.

Теория графов – красивая область математики, происхождение и применения которой заслуживают отдельного рассмотрения. Ниже мы будем использовать понятие графа для достаточно узкой цели, сформулированной в заголовке.

Начнём с визуализации простейшего комбинаторного правила – *правила произведения*. Пусть дано множество $A = \{1, 2, 3\}$, состоящее из трёх элементов, и множество $B = \{a, b\}$, состоящее из двух элементов. Для того чтобы выбрать пару (цифра, буква), необходимо сначала выбрать одну из трёх цифр, а затем одну из двух букв, как показано на рис. 9. В результате получим $6 = 3 \cdot 2$ пар, как и предписано правилом произведения.

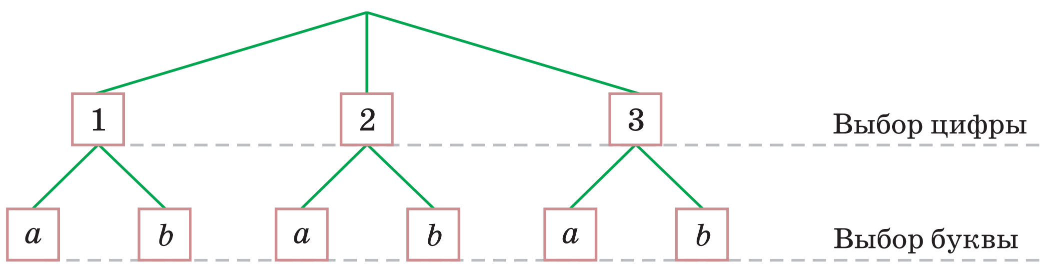


Рис. 9.

Отметим, что можно начать с выбора буквы и лишь после него делать выбор цифры. В этом случае процесс перебора пар будет изображаться несколько другим, хотя и очень похожим графом, который мы рекомендуем построить читателю.

Правило произведения можно визуализировать не только с помощью графов, но и другими способами, например, с помощью координатной плоскости, как показано на рис. 10.

Элементы множества *A* отметим на оси *Ox*, а элементы множества *B* – на оси *Oy*. Очевидно, что выбор пары (m, n), где $m \in A$ и $n \in B$, можно сделать шестью способами, которые соответствуют точкам пересечения вертикальных и горизонтальных прямых, проведённых через отмеченные точки.

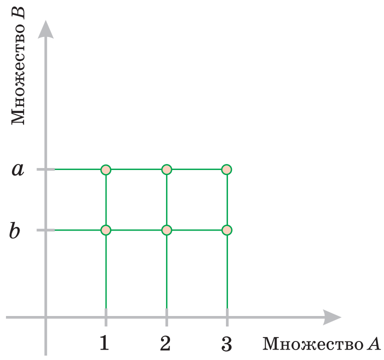


Рис. 10.

Комбинаторное *правило суммы* является ещё более простым, чем правило произведения, так что для его визуализации вряд ли целесообразно использовать такую «тяжёлую артиллерию», как графы. Достаточно отметить на координатной оси элементы множеств *A* и *B*: одни с помощью не закрашенных кружочков, а другие с помощью закрашенных, как показано на рис. 11. Очевидно, что выбрать элемент из множества *A* или из множества *B* можно пятью способами, как и предписано правилом суммы.

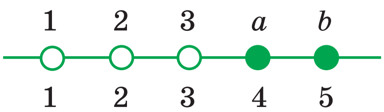


Рис. 11.

Визуализируем *процесс перебора*, с помощью которого можно подсчитать число соединений малых порядков (будем рассматривать множество, состоящее из трёх элементов 1, 2 и 3). Начнем с подсчёта *числа перестановок* третьего порядка. Для этого ответим на несколько последовательных вопросов:

а) сколькими способами можно выбрать первый элемент перестановки?

б) если первый элемент уже выбран, то сколькими способами можно выбрать второй элемент?

в) если два элемента уже выбраны, то сколькими способами можно выбрать третий элемент?

Ответы на эти вопросы подсказывают структуру графа на рис. 12, который описывает процесс перебора. Мы получаем 6 перестановок, как и положено по общим формулам. Весьма полезно теперь нарисовать граф, который визуализирует процесс перебора, позволяющий вычислить число перестановок четвёртого порядка. Для его построения придётся использовать соотношение $P_3 = 6$, а в процессе построения будет выяснено, что $P_4 = 4P_3$. Очевидно, что если наши частные рассуждения обобщить для подстановок порядка *n*, то мы получим соотношение $P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = \ldots = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = n!$

Визуализируем процесс перебора, с помощью которого можно подсчитать

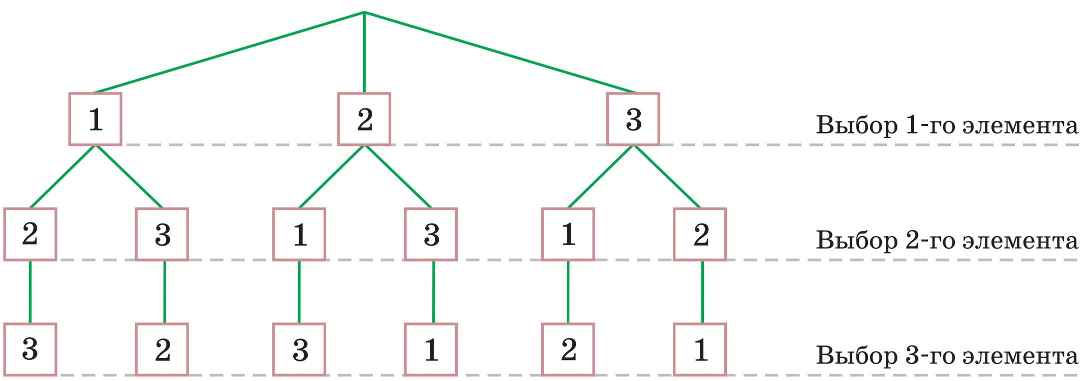


Рис. 12.

число сочетаний из четырёх элементов по два. Сочетания по два образуются стандартным способом: выбирают первый элемент и ставят его «в пару» со всеми последующими элементами, затем берут второй элемент и ставят его «в пару» со всеми последующими и т.д. В результате получится граф, изображённый на рис. 13.

Визуализируем процесс перебора, с помощью которого подсчитывается *число*

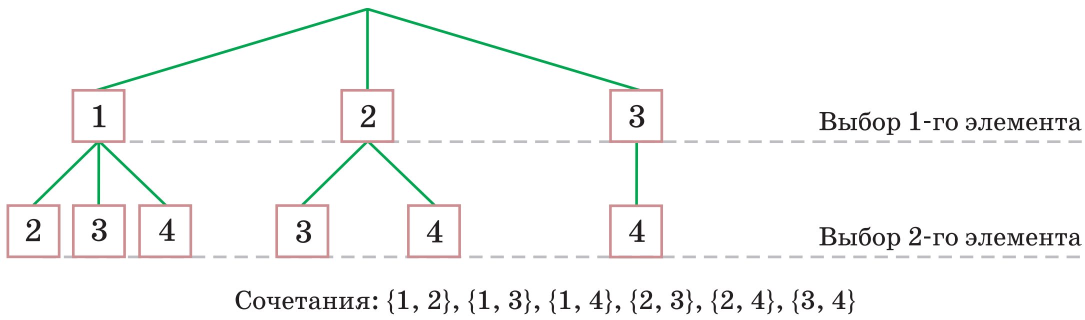


Рис. 13.

размещений из трёх элементов по два. В данном случае можно сначала выбрать подмножество из двух элементов, а потом упорядочить его. В результате получится граф, изображенный на рис. 14.

Визуализируем теперь известное *рекуррентное соотношение* $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$,

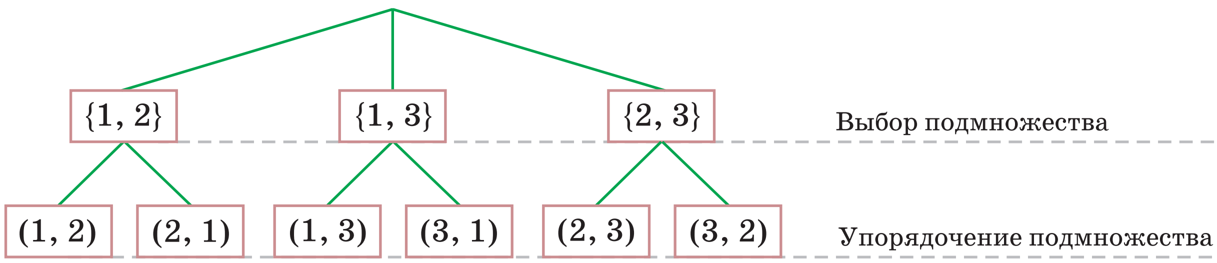


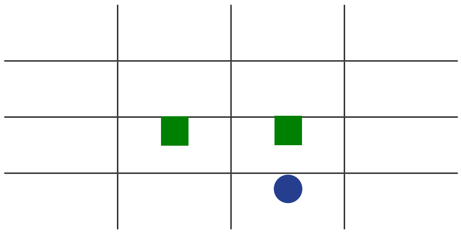
Рис. 14.

связывающее биномиальные коэффициенты. При этом будем учитывать граничные условия $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$ для натурального n. Для этого нарисуем таблицу, строки которой занумерованы параметром n, а столбцы – параметром k:

k \ n	0	1	2	...
0				
1				
2				
...				

В клетках таблицы будем записывать соответствующее число сочетаний. Поскольку в формуле числа сочетаний $n \geq k$, то заполнять следует только те клетки, которые лежат на диагонали или ниже её. При этом граничные условия позволяют заполнить первый столбец и диагональ таблицы, так что нулевая и первая строки сразу оказываются заполненными.

Рекуррентное соотношение показывает, как следует заполнять строку, если предыдущая строка уже заполнена: два последовательных числа заполненной строки (отмечены квадратиками) складываются и результат помещается в следующую строку *ниже правого* из двух последовательных чисел (отмечено кружочком):



В результате получается треугольник Паскаля:

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...								

Перейдём теперь от комбинаторики к теории вероятностей.

Для решения многих вероятностных задач полезны следующие мнемонические правила, выраженные с помощью так называемых вероятностных графов. Опишем процесс их построения.

Пусть начало испытания обозначено закрашенным кружком, а события A и B – незакрашенными кружками, в которых сделаны соответствующие надписи. Все кружки считаем вершинами графа. Если после начала испытания происходит событие A, то соединим соответствующие вершины ребром. Если после события A происходит событие B, то поступим аналогично. В результате получим граф, который называется ***графом испытания.*** Его естественно считать ориентированным, поскольку события в нашем испытании следуют одно за другим.

Припишем ориентированному ребру, идущему от начала испытания к событию A, число, равное вероятности события A. Аналогично, припишем ребру, идущему от события A к событию B число, равное условной вероятности события B при условии, что выполняется событие A. ***Весом ребра*** будем называть каждое из этих чисел. ***Весом ветви*** будем называть произведение весов всех рёбер, образующих её. В результате из графа испытания мы получим новый объект – граф, рёбра которого снабжены весами. Будем называть его ***вероятностным графом.***

Теперь мы можем визуализировать некоторые факты теории вероятностей. *Тео-*

рема об умножении вероятностей может быть изображена с помощью графа так, как показано на рис. 15, и интерпретирована следующим образом: вероятность произведения событий равна весу ветви, входящей во второй сомножитель.

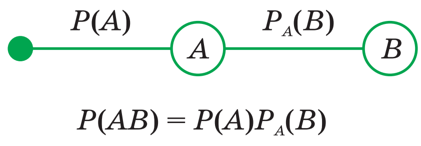


Рис. 15.

Теорема о сложении вероятностей независимых событий AB и CD может быть проиллюстрирована с помощью графа, изображённого на рис. 16:

Вероятностные графы весьма эффективно могут быть использованы для того,

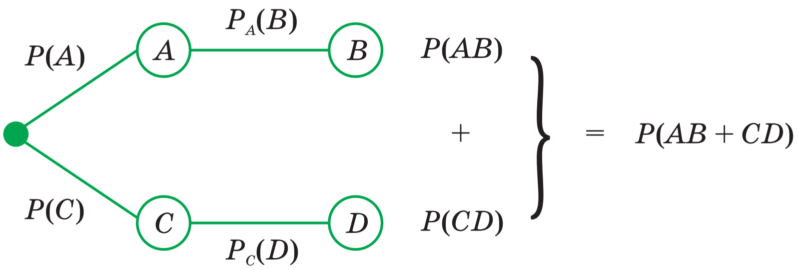


Рис. 16.

чтобы сделать наглядным процесс решения вероятностных задач. Приведём примеры.

Задача 1 (Гюйгенс). В урне 2 белых и 4 чёрных шара. Один азартный человек держит пари с другим, что среди вынутых трёх шаров будет ровно один белый. В каком отношении находятся шансы спорящих?

Решение. Вероятностный граф изображён на рис. 17. Ровно один белый шар появляется в случаях 3, 5, 6, считая сверху. Теперь для оценки шансов первого игрока нужно вычислить вероятность события «среди вынутых трёх шаров будет ровно один белый». Для этого достаточно вычислить вероятности каждого из случаев (перемножая веса входящих ветвей) и результаты сложить: $\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$. Отсюда следует, что вероятность противоположного события равна $\frac{2}{5}$, так что шансы спорящих относятся как 3:2.

Задача 2. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%

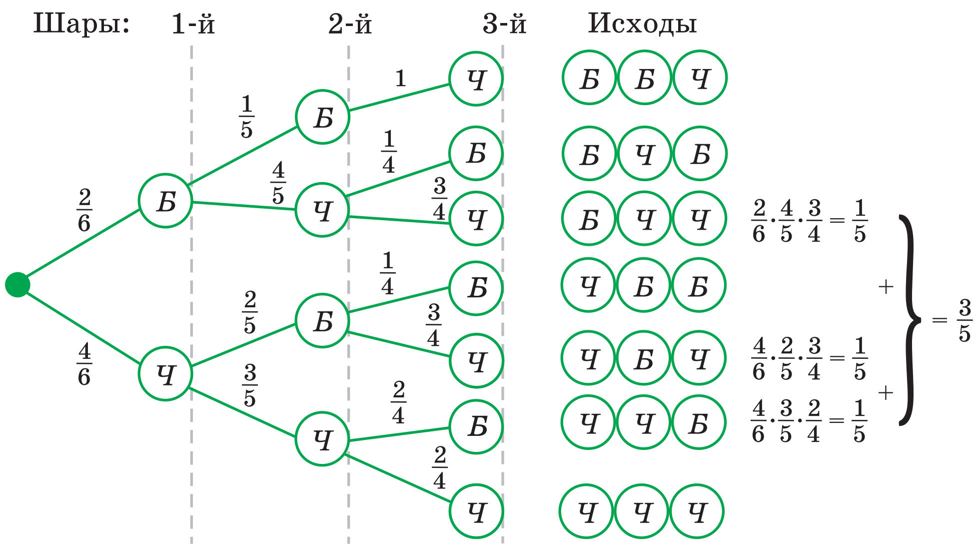


Рис. 17.

всех изделий, вторая – 35%, третья – 40%. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт является дефектным?

Решение. Пусть событие A = «выбрать дефектный болт». Выдвигаем три гипотезы: H_1 = «болт сделан первой машиной», H_2 = «болт сделан второй машиной», H_3 = = «болт сделан третьей машиной». Тогда условия задачи запишутся в виде графа, изображённого на рис. 18.

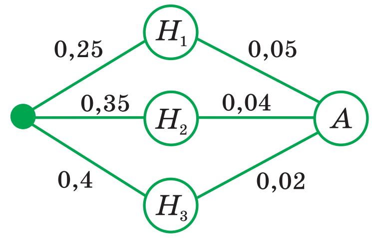


Рис. 18.

По теореме о полной вероятности вероятность события A равна сумме весов ветвей, входящих в A, то есть $0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345$.

Многочисленные задачи, решаемые с помощью вероятностных графов, рассмотрены в книге В.В. Афанасьева [1].

Педагогическая рефлексия. Мы вновь увидели, что абстрактные математические понятия и теоремы, появление которых не было связано с наглядными соображениями, могут иметь яркие и выразительные зрительные образы. При этом важно, что они являются не простыми иллюстрациями, а служат удобным инструментом для запоминания фактов и решения задач.

§ 5. Типология вероятностных задач

Теория вероятностей, как и любая другая математическая теория, имеет свои характерные, типичные задачи, которые мы приведём ниже. При этом следует помнить о двух обстоятельствах. Во-первых, никакой список типов заданий не может быть полным, поскольку многообразие задач, решаемых методами теории вероятностей, чрезвычайно велико и не укладывается в рамки жёсткой классификации. Во-вторых, усвоение каждого понятия и каждой теоремы теории вероятностей требует решения тренировочных заданий, так что типы заданий в значительной мере предопределены теоретическим содержанием курса.

Первый тип упражнений – это задания на выявление различных событий, происходящих при испытании, и их простейшее подразделение на невозможные, достоверные и случайные.

Задача 1. Бросается игральная кость. Назовите несколько событий (не менее 10), которые могут произойти в этом испытании.

Решение. Очевидно, что задача имеет много решений. Приведём некоторые из них, представляющиеся естественными с математической точки зрения.

Событие A_i = «выпадает число i», где $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Событие B = «выпадает натуральное число».

Событие C = «выпадает двузначное число».

Событие D = «выпадает чётное число».

Событие E = «выпадает нёчетное число».

Событие F = «выпадает простое число».

Событие G = «выпадает составное число».

Событие H = «выпадает число, не превосходящее 6».

Событие I = «выпадает число, не превосходящее 4».

Событие J = «выпадает дробное число».

Задача 2. Среди событий, перечисленных в решении задачи 1, укажите невозможные, достоверные и случайные.

Решение. Невозможными являются события C и J, достоверными – события B и H. Остальные события являются случайными.

Работая с парами событий, мы выясняем, являются ли два события совместными или несовместными, равновозможными или нет. Работая с группами событий, мы выясняем, полна или не полна указанная группа событий.

Событием, ***противоположным*** к событию A, называется новое событие, которое обозначается $\overline{A}$ и которое состоит в том, что событие A не наступает.

Задача 3. Из событий, перечисленных в решении задачи 1, образовано несколько групп. Для каждой из групп выясните, являются ли события совместными, равновозможными, образуют ли они полную группу событий.

1) D и E. 2) I и $\overline{I}$. 3) F и G. 4) F, G и A_1.
5) I, A_4 и A_5. 6) G и E. 7) G, E и A_2. 8) D, F и A_1.
9) A_i, где $i = 1, 2, ..., 6$.

Решение. Его удобно оформить в виде следующей таблицы:

№	События	Совместность	Равновозможность	Полная группа
1	D и E	Нет	Да	Да
2	I и $\overline{I}$	Нет	Нет	Да
3	F и G	Нет	Нет	Нет
4	F, G и A_1	Нет	Нет	Да
5	I, A_4 и A_5	Нет	Нет	Нет
6	G и E	Нет	Нет	Нет
7	G, E и A_2	Нет	Нет	Да
8	D, F и I	Да	Нет	Да
9	A_i, где $i = 1, 2, ..., 6$	Нет	Да	Да

Напомним теперь определения других операций над событиями. ***Суммой*** событий A и B называется новое событие, которое обозначается $A + B$ и которое состоит в том, что наступает событие A или событие B (союз «или» в данном случае имеет неразделительный смысл). ***Произведением*** событий A и B называется новое событие, которое обозначается AB и которое состоит в том, что наступают *одновременно* события A и B. Геометрическая иллюстрация сформулированных понятий приведена в § 2 раздела «Случайные события» (см. «Полином», 2009, № 4, с. 68 и далее).

Работая с группами событий, мы выявляем те взаимосвязи между ними, которые выражаются в терминах операций над событиями: сложения, умножения и нахождения противоположного события.

Задача 4. Из событий, перечисленных в решении задачи 1, образовано несколько групп. Выразите одно из событий через остальные события группы, используя операции алгебры событий: сумму, произведение, нахождение противоположного события. В заданиях, отмеченных звёздочкой, приведите два решения.

1) D, A_2, A_4, A_6.	2)* A_1, D, A_3, A_5.	3) A_1, A_3, E, A_5.
4)* A_2, A_4, A_6, E.	5) F, A_2, A_3, A_5.	6)* A_1, F, A_4, A_6.
7) G, A_4, A_6.	8)* A_1, A_2, A_3, A_5, G.	9) A_1, A_2, I, A_3, A_4.
10)* I, A_5, A_6.	11) J, D, E.	12) $A_2 + A_3, F, I$.
13)* A_1, F, G.	14) D, F, A_2.	15) E, A_3, F, I.
16) I, G, A_4.	17) A_5, I, F.	18) A_6, G, I.

Решение. Приведём решение задания 13. Известно, что число 1 не является ни простым, ни составным. На языке алгебры событий это означает, что при выпадении единицы наступает событие $\overline{F}$ (выпавшее число не является простым) ***и*** событие $\overline{G}$ (выпавшее число не является составным). На языке формул это означает, что $A_1 = \overline{F} \cdot \overline{G} = \overline{F + G}$. Приведём ответы для остальных заданий.

1, 2) $D = A_2 + A_4 + A_6 = \overline{A_1 + A_3 + A_5} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_5}$.

3, 4) $E = A_1 + A_3 + A_5 = \overline{A_2 + A_4 + A_6} = \overline{A_2} \cdot \overline{A_4} \cdot \overline{A_6}$.

5, 6) $F = A_2 + A_3 + A_5 = \overline{A_1 + A_4 + A_6} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_4} \cdot \overline{A_6}$.

7, 8) $G = A_4 + A_6 = \overline{A_1 + A_2 + A_3 + A_5} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_5}$.

9, 10) $I = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \overline{A_5 + A_6} = \overline{A_5} \cdot \overline{A_6}$.

11) $J = DE$.	12) $A_2 + A_3 = FI$.	13) $A_1 = \overline{F} \cdot \overline{G} = \overline{F + G}$.
14) $A_2 = DF$.	15) $A_3 = EFI$.	16) $A_4 = GI$.
17) $A_5 = F\overline{I}$.	18) $A_6 = G\overline{I}$.	

Естественная задача – нахождение вероятности события на основе его классического определения.

Задача 5. Определите вероятности событий, перечисленных в решении задачи 1.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности и запишем результат в виде следующей таблицы:

Событие	A_i	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Вероятность события	$\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0

Педагогическая рефлексия. Итак, в задачах 1–5 анализируется стандартное испытание – бросание игральной кости. Для учителя важно, что даже такое весьма простое испытание порождает *десятки* вопросов. По-видимому, это свойство характерно для очень многих задач по стохастике, так что, встретив то или иное задание в учебной литературе, полезно составить программу изучения задачной ситуации, которую затем можно *предъявить* учащимся, *составить* её вместе с ними, *предложить* её в качестве индивидуального или коллективного задания для внеклассного изучения и т.п.

Отметим, что многие факты стохастики могут быть проиллюстрированы с помощью стандартных, исторически «проверенных» испытаний: бросания одной или двух игральных костей, бросания одной или двух монет, экспериментами с колодой карт, экспериментами с разноцветными шарами, извлекаемыми из урны. Здесь важно соблюсти меру. С одной стороны, удобно использовать стандартные испытания. С другой стороны, использование только игровых примеров может завуалировать тот важный факт, что понятия и теоремы стохастики могут быть эффективно применены в самых разнообразных ситуациях, далёких от игр и важных в практической деятельности людей. Таким образом, для учителя важно *накапливать* сюжетные задачи, решаемые с помощью комбинаторики и теории вероятностей.

Следующей естественной задачей является нахождение вероятности события в более сложных условиях, когда для подсчёта общего числа исходов и благоприятного для события числа исходов приходится использовать методы комбинаторики.

Задача 6. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами от 1 до 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлечённых деталей окажутся: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

Решение. а) Общее число исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть деталей из десяти, то есть C_{10}^6. Исход благоприятствует событию, если одна деталь имеет № 1, а остальные *пять* деталей имеют другие номера. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно отобрать пять деталей из *оставшихся девяти*, то есть C_9^5. Согласно классическому определению вероятности $P=\dfrac{C_9^5}{C_{10}^6}=0{,}6$.

б) Исход благоприятствует событию, если две детали имеют номера 1 и 2, а остальные *четыре* детали имеют другие номера. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно отобрать четыре детали из *оставшихся восьми*, то есть C_8^4. Согласно классическому определению вероятности $P=\dfrac{C_8^4}{C_{10}^6}=\dfrac{1}{3}$.

Задача 7. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Решение. Общее число исходов равно числу способов, которыми можно отобрать семь человек из десяти, то есть C_{10}^7. Исход благоприятствует событию, если выполняются одновременно два условия: а) из шести мужчин отобраны четыре; б) из четырёх женщин отобраны три. Количество способов, которыми можно выполнить первое условие, равно C_6^4. Количество способов, которыми можно выполнить второе условие, равно C_4^3. По правилу произведения количество исходов, благоприятствующих событию, равно $C_6^4\cdot C_4^3$. Согласно классическому определению вероятности $P=\dfrac{C_6^4\cdot C_4^3}{C_{10}^7}=0{,}5$.

Освоение классического определения вероятности необходимо дополнить освоением геометрического определения вероятности события.

Задача 8. В круг радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

Решение. а) Радиус круга равен половине диагонали вписанного квадрата. Если его сторона равна a, то получаем равенство $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, откуда $a=R\sqrt{2}$. Вероятность рассматриваемого события равна отношению площадей квадрата и круга, то есть $P=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}$. Задание б) решается аналогично.

Задача 9. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние 6 см. На неё наудачу брошен открытый круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт ни одной из линий. (Открытость круга означает, что ограничивающая его окружность не входит в круг).

Решение. Круг не пересечёт ни одной из линий, если его центр попадёт в более узкую полосу из параллельных прямых, края которой отстоят от исходных линий на 1 см. Следовательно, ширина этой узкой полосы равна 6 − 2 = 4 (см). Вероятность рассматриваемого события равна отношению ширины узкой полосы к ширине широкой полосы: $P=\frac{6-2}{6}=\frac{2}{3}$.

Обращаем внимание на то, что вычисление площадей в данном случае бессмысленно, поскольку любая полоса имеет бесконечную площадь. К счастью, для решения задачи достаточна другая характеристика полосы – её ширина.

Освоение классического и геометрического определения вероятности необходимо дополнить освоением статистического определения вероятности события.

Задача 10. Среди изделий, производимых фабрикой, 6% имеют дефекты. В некоторой партии оказалось 186 дефектных изделий. Сколько деталей было в партии?

Решение. Обозначим через n число деталей в партии, через A – событие «выбранная деталь является дефектной». По условию $P(A) = 0{,}06$. По определению относительной частоты события $P^*(A)=\frac{186}{n}$. Поскольку вероятность события приблизительно равна его относительной частоте, получаем приближённое равенство: $0{,}06\approx\frac{186}{n}$, откуда $n\approx\frac{186}{0{,}06}=3100$.

Задача 11. Среди населения России примерно 5% людей занимается спортом. Сколько спортсменов находится среди 10000 случайно выбранных людей?

Решение. Обозначим через k искомое число спортсменов, через A – событие «выбранный человек является спортсменом». По условию $P(A) = 0{,}05$. По определению относительной частоты события $P^*(A)=\frac{k}{10000}$. Поскольку вероятность события приблизительно равна его относительной частоте, получаем приближённое равенство: $0{,}05\approx\frac{k}{10000}$, откуда $k\approx 0{,}05\cdot 10000=500$.

После задач на освоение различных определений вероятности события решаются задачи на вычисление вероятности такого события, которое тем или иным способом выражается через операции алгебры событий. Простейший тип из них – это задачи на вероятность появления хотя бы одного события. Напомним, что такие задачи основаны на простой теореме: сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Задача 12. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Введём в рассмотрение следующие события: A_i – устройство с номером i, где $i = 1, 2, 3$, не работает; B_i – устройство с номером i работает; A – в цепи нет тока; B – в цепи есть ток. Прежде всего заметим, что события A и B взаимно противоположны, поэтому $P(A) = 1 - P(B)$. Кроме того, событие B наступает тогда и только тогда, когда одновременно наступают события B_1, B_2 и B_3, то есть $B = B_1B_2B_3$, откуда следует, что $P(A) = 1 - P(B_1B_2B_3) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3)$. Последнее равенство верно ввиду независимости событий B_i. Наконец, события A_i и B_i взаимно противоположны, поэтому $P(B_i) = 1 - P(A_i)$, откуда следует, что

$$P(A) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)).$$

Подставляя в окончательную формулу исходные данные, получаем, что $P(A) = 1 - (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}2) = 0{,}388$.

Отметим, что решение задачи можно сделать более наглядным, если после введения событий свести данные и искомые величины в следующую таблицу:

Событие	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A	B
Вероятность события	0,1		0,15		0,2			

Теперь можно заполнить пустые клетки таблицы по соответствующим формулам.

Задача 13. Для разрушения моста достаточно одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Решение. Введём в рассмотрение следующие события: A_i – бомба номер i ($i = 1, 2, 3, 4$) попала в мост; B_i – бомба номер i не попала в мост; A – мост разрушен; B – мост не разрушен. Рассуждая точно так же, как и при решении предыдущей задачи, получим, что:

$$P(A) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3))(1 - P(A_4)).$$

Подставляя в эту формулу исходные данные, получаем: $P(A) = 0{,}9496$.

Педагогическая рефлексия. Мы видим, что две задачи с совершенно разными сюжетами привели к однотипным математическим рассуждениям. Это естественно, поскольку решения задач базируются на одних и тех же математических теоремах, применяемых единообразно. Мы видим, что численные результаты решения задач совершенно невозможно предсказать, базируясь только на наглядных, житейских соображениях. Это также естественно, поскольку применение теорем вскрывает такую суть явлений, которая недоступна непосредственному восприятию.

Рассмотрим теперь несколько задач на вычисление вероятности суммы и произведения событий.

Задача 14. Какова вероятность события «извлечь туза или бубновую карту» из колоды в 36 карт?

Решение. Пусть событие T означает, что извлечён туз, а событие B означает, что извлечена бубновая карта. События эти совместны, поскольку можно извлечь туза бубен. На языке алгебры событий извлечение туза бубен запишется как TB. Согласно требованию задачи мы должны найти вероятность события $T+B$. По теореме о вероятности суммы событий получим, что

$$P(T+B)=P(T)+P(B)-P(TB)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}.$$

Задача 15. Какова вероятность события «извлечь картинку или карту с чётным числом очков» из колоды в 36 карт?

Решение. Пусть событие K означает, что извлечена картинка, а событие C — что извлечена карта с чётным числом очков. Очевидно, что события эти несовместны. Согласно требованию задачи мы должны найти вероятность события $K+C$. По теореме о вероятности суммы событий получим, что $P(K+C)=P(K)+P(C)=\frac{16}{36}+\frac{12}{36}=\frac{7}{9}$.

Задача 16. Для охраны банковского депозитария установлены фотоэлемент и датчик движения. Вероятность отказа фотоэлемента равна 0,005, а датчика движения – 0,006. Какова вероятность отказа обоих устройств?

Решение. Пусть событие F – это отказ фотоэлемента, а событие D – отказ датчика движения. Согласно требованию задачи мы должны найти вероятность события FD. Устройства работают независимо друг от друга, поэтому по тереме о произведении вероятностей получим, что

$$P(FD)=P(F)P(D)=0{,}005\cdot 0{,}006=0{,}00003.$$

Решим теперь комбинированную задачу на одновременное применение обеих теорем.

Задача 17. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

Решение. Введём следующие события: A_1 = «попал первый стрелок»; A_2 = «попал второй стрелок»; B_1 = «попал *только* первый стрелок»; B_2 = «попал *только* второй стрелок». Появление события B_1 равносильно событию $A_1\overline{A_2}$, то есть $B_1=A_1\overline{A_2}$ (первый стрелок попал, а второй нет). Аналогично, $B_2=\overline{A_1}A_2$ (первый стрелок не попал, а второй попал). Событие «в мишень попадет только один из стрелков» – это событие B_1+B_2. Поскольку события B_1 и B_2 несовместны, то по теореме о сложении вероятностей мы имеем $P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$. События A_1 и A_2 независимы один от другого, следовательно, независимыми будут события A_1 и $\overline{A_2}$, а также $\overline{A_1}$ и A_2. Это означает, что к слагаемым в правой части последней формулы применима терема умножения вероятностей, то есть

$$P(B_1+B_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2).$$

Подставляя сюда данные задачи, получим, что

$$P(B_1+B_2)=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}38.$$

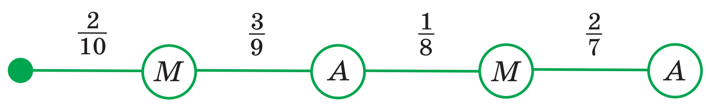
Следующее понятие курса теории вероятностей – условная вероятность.

Задача 18. В читальном зале библиотеки имеются шесть детективов, из которых три в переплёте. Библиотекарь наудачу взял два детектива. Какова вероятность того, что обе книги окажутся в переплёте?

Решение. Пусть событие A означает, что первая книга оказалась в переплёте; событие B – вторая книга оказалась в переплёте. Вероятность того, что первая книга имеет переплёт, равна $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Вероятность того, что вторая книга также имеет переплёт, при условии, что первая книга имеет переплёт, равна $P_A(B)=\frac{2}{5}$. По теореме об умножении вероятностей событий получим, что $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=0{,}2.$

Задача 19. Слово «МАТЕМАТИКА» разрезано на буквы, и из них произвольным образом отбираются и выкладываются по порядку четыре буквы. Какова вероятность получения слова «МАМА»?

Решение. Эту задачу несложно решить тем же методом, что и предыдущую, то есть четырёхкратным применением теоремы о вероятности произведения событий. Воспользуемся другим методом – построением вероятностного графа (рис. 19).



$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{420}$$

Рис. 19.

Одно из нетривиальных применений понятия условной вероятности – это теорема о полной вероятности и теорема Байеса о вероятности гипотезы. Типичным примером упражнения на вычисление полной вероятности является задача 2 *из* § 4. *Дополним её заданием на теорему Байеса.*

Задача 20. Пусть выполняются условия задачи 2 из § 4. Наудачу выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он изготовлен на первой машине?

Решение. Рассмотрим то же самое событие A и те же самые гипотезы H_i, которые были введены при решении задачи 2 раздела 2.4. Воспользуемся вероятностным графом на рис. 18. По теореме Байеса для вычисления вероятности *первой* гипотезы нужно вес *первой* ветви поделить на вес всего графа: $P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$.

Подставляя данные, получим, что

$$P_A(H_1)=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}=\frac{25}{69}.$$

Педагогическая рефлексия. В двух последних разделах мы рассмотрели более 20 заданий по теории вероятностей. Бросается в глаза многообразие сюжетов этих задач: урна с шарами, игральная кость, колода карт, дефектные болты и делающие их машины, извлечение деталей, отбор среди мужчин и женщин, бросание монеты на геометрическую фигуру, электрическая цепь, охрана депозитария, стрелки, бомбёжка, книги в обложках и без них, сложение слов из набора букв. Такая богатая «зоология» сюжетов отнюдь не случайна. Она возникла благодаря тому, что теория вероятностей имеет широчайший спектр применений в самых разнообразных сферах жизни. Одна из задач учителя состоит в демонстрации этого многообразия. Возможно, что именно реальность, повседневность рассматриваемых задач может способствовать мотивации изучения теории вероятностей.

Литература

1. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей в вопросах и задачах: Учеб. пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004.

2. *Бродский И.Л., Литвиненко Р.А.* Вероятность и статистика: 7–9 кл. Решение задач из учебников под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: АРКТИ, 2006.

3. *Бунимович Е.А., Булычёв В.А.* Вероятность и статистика: Учеб. пособие для общеобразоват. учреждений. – М.: Дрофа, 2005.

4. *Глеман М., Варга Т.* Вероятность в играх и развлечениях. – М.: Просвещение, 1979.

5. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.* Элементы статистики и теории вероятностей. – М.: Просвещение, 2005.

6. *Мордкович А.Г., Семёнов П.В.* События. Вероятности. Статистическая обработка данных. – М.: Мнемозина, 2004.

7. *Пактронова Н.Н. и др.* Введение в статистические исследования: Учеб.-метод. разработка. – Архангельск: Поморский университет, 2005.

8. *Плоцки А.* Вероятность в задачах для школьников. – М.: Просвещение, 1996.

9. *Плоцки А.* Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математике // Математика в школе. – 1991. – № 3. – С. 69–71.

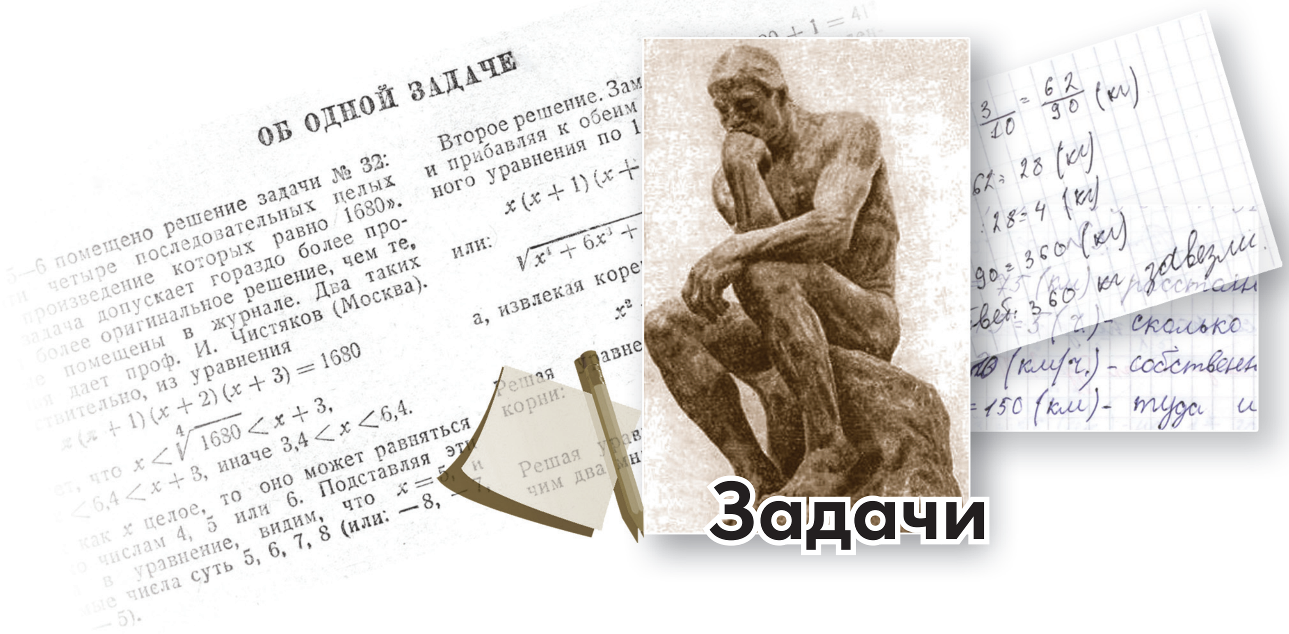
10. *Реньи А.* Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.

11. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей: 7–9 классы / Авт.-сост. В.Н. Студенецкая. – Волгоград: Учитель, 2006.

12. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.

13. *Ткачёва М.В.* Элементы статистики и вероятность: Учеб. пособие для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2006.

Вернуться к содержанию



Задачи

Новые задачи

Алгебраические задачи, предлагаемые Вашему вниманию, известны и не слишком трудны; их объединяет геометрический «подтекст». Попробуйте разобраться, в чём он состоит, и тогда не исключено, что решение доставит Вам определённое удовольствие.

Геометрические задачи образуют цепочку, в которой каждая задача связана с предыдущей. Мы предлагаем «пройтись» по маршруту от первой относительно нетрудной задачи (которая уже стала классической) до последней (новый факт геометрии треугольника).

Отметим, что если решать задачи 3–6 независимо друг от друга, это будет стоить значительных усилий. Но всё становится проще, если разглядеть в каждой из задач задачу-предшественницу. Советуем проследить, как довольно простая конструкция из задачи 3 «обрастает» дополнительными построениями, и уже в задаче 5 её довольно трудно узнать.

Решения задач просьба присылать на электронный адрес задачного отдела zadachi-polinom@mail.ru до **20 июля 2010 года**.

Желаем успеха!

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}, \\ y=\sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}, \\ z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}. \end{cases}$$

Задача 2. При каких положительных a, b и c выполнены неравенства:

а) $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\geq a^4+b^4+c^4$;

б) $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$;

в) $a^4+b^4+c^4+a^2bc+b^2ac+c^2ab\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$?

Задача 3 (*Д. Конвей.*) На продолжении сторон BA и CA (за точку A) треугольника ABC отложим отрезки AB_1 и AC_2, равные стороне BC. Аналогично построим точки B_2 и A_1, A_2 и C_1. Докажите, что все построенные таким образом точки лежат на одной окружности.

Задача 4. Пусть A_1 и A_2 – проекции точки A на биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC. Точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны, и все эти точки лежат на одной окружности.

Задача 5. Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC. A_1 и A_2 – проекции точки H_1 на прямые AB и AC. Аналогично определим точки B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны, и все эти точки лежат на одной окружности.

Задача 6 (*А. Мякишев.*) В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Вернуться к содержанию

Решения задач, помещённых в № 4 за 2009 год[1]

Дмитрий Викторович ПРОКОПЕНКО
учитель математики физико-математической
школы № 2007 г. Москвы
prokop@biochip.ru

Павел Викторович ЧУЛКОВ
учитель математики физико-математической
школы № 2007 г. Москвы
chulkov@logic.ru

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a+bcd=2, \\ b+acd=2, \\ c+abd=2, \\ d+abc=2. \end{cases}$$

Ответ. $(1;\,1;\,1;\,1)$, $(-1;\,-1;\,-1;\,3)$, $(-1;\,-1;\,3;\,-1)$, $(-1;\,3;\,-1;\,-1)$, $(3;\,-1;\,-1;\,-1)$.

Задача заимствована из журнала «Математика в школе» (1987, № 1, задача 3046).

Прежде всего отметим, что система симметрична. То есть, если $(a_0;\,b_0;\,c_0;\,d_0)$ – решение системы, то любая перестановка, например, $(a_0;\,c_0;\,b_0;\,d_0)$ – тоже решение системы.

Решение. Способ I. Приведём авторское решение (с небольшими изменениями), опубликованное в журнале «Математика в школе» (1987, № 5, с. 64).

Пусть $(a_0;\,b_0;\,c_0;\,d_0)$ – решение системы. Подставим решение в систему и вычтем из первого уравнения второе. Получим: $(a_0 - b_0)(c_0d_0 - 1) = 0$. Приходим к выводу, что если два из чисел a_0, b_0, c_0, d_0 различны, то произведение двух остальных равно 1.

Отсюда следует, что если $a_0 \neq b_0$ и $a_0 \neq c_0$, то $c_0d_0 = 1$, $b_0d_0 = 1$, откуда $b_0 = c_0$. Следовательно, по крайней мере два из чисел a_0, b_0, c_0, d_0 совпадают.

Будем считать, что $a_0 = b_0$, и рассмотрим четыре случая:

1) $a_0 = b_0 = c_0 = d_0$; 2) $a_0 = b_0 = c_0 \neq d_0$; 3) $a_0 = b_0 \neq c_0$, $c_0 \neq d_0$; 4) $a_0 = b_0 \neq c_0 = d_0$.

В случае 1) $a_0 + a_0^3 = 2$, откуда подбором находим корень $a_0 = 1$. Он единственный, поскольку функция $f(t) = t + t^3$ возрастает. Получили решение $(1;\,1;\,1;\,1)$.

В случае 2) $c_0 \neq d_0$, $a_0b_0 = 1$, $a_0^2 = 1$, откуда $a_0 = \pm 1$. Если теперь $a_0 = 1$, то из первого уравнения системы следует, что $d_0 = 1$. Поэтому $a_0 = -1$, $d_0 = 3$. Получили решение $(-1;\,-1;\,-1;\,3)$.

В случае 3) $b_0c_0 = 1$, $a_0d_0 = 1$, то есть $b_0c_0 = b_0d_0$, $c_0 = d_0$. Противоречие.

В случае 4) $a_0c_0 = 1$, $b_0 + d_0 = 2$, то есть $b_0c_0 = 1$, $b_0 + c_0 = 2$. Откуда $b_0 = c_0 = 1$. Противоречие.

---

[1] Решения задач 1–3 написаны П.В. Чулковым, задач 4–6 – Д.В. Прокопенко.

Таким образом, решениями системы являются четвёрки (1; 1; 1; 1), (−1; −1; −1; 3) и все их перестановки. Заметим, что проверка по ходу перебора случаев необходима.

Прочитав такое решение, можно почувствовать неудовлетворение. Следующее решение представляется более прозрачным.

Способ II. Пусть $(a_0; b_0; c_0; d_0)$ – решение системы. Легко проверить, что среди чисел a_0, b_0, c_0, d_0 нет нулей. Обозначим $a_0b_0c_0d_0 = A$, тогда одновременно выполнены равенства:

$$a_0+\frac{A}{a_0}=2,\ b_0+\frac{A}{b_0}=2,\ c_0+\frac{A}{c_0}=2,\ d_0+\frac{A}{d_0}=2.$$

Следовательно, числа a_0, b_0, c_0 и d_0 являются корнями уравнения $x^2 - 2x + A = 0$. Значит, среди них не более двух различных.

Пусть теперь $a_0 = b_0$. Рассмотрим случаи.

1) $a_0 = b_0 = c_0$, тогда $a_0d_0 = a_0^3d_0$, $a_0^2 = 1$. Получаем два решения (1; 1; 1; 1) и (−1; −1; −1; 3) и симметричные им.

2) $a_0 = b_0 \neq c_0 = d_0$, тогда $a_0c_0 = a_0^2c_0^2$, откуда $a_0c_0 = 1$ и $a_0 \neq c_0$. Последнее условие выполняться не может, так как если $A = 1$, то корни квадратного уравнения $x^2 - 2x + A = 0$ не могут быть различны.

Задача 2. На сторонах треугольника площади S построены квадраты. Какое наименьшее значение может принимать сумма площадей этих квадратов?

Ответ: $4\sqrt{3}S$.

Предлагаем Вашему вниманию четыре решения задачи.

Способ I (идея заимствована из «Вестника опытной физики и элементарной математики», 1914, № 10, задача № 179).

Пусть площадь треугольника ABC равна S, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Воспользуемся равенством:

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 \tag{1}$$

Получить его можно, исключив синус и косинус из соотношений:

$$\sin\angle A = \frac{2S}{ab},\ \cos\angle A = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab},\ \sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1 \tag{2}$$

Выделим в равенстве (1) полные квадраты:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 48S^2 + 2(a^2-b^2)^2 + 2(b^2-c^2)^2 + 2(c^2-a^2)^2.$$

Получим: $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 48S^2$, откуда $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{48}S = 4\sqrt{3}S$, причём равенство достигается, если $a = b = c$. Таким образом мы доказали, что сумма площадей квадратов, построенных на сторонах треугольника, достигает наименьшего значения при равных значениях сторон треугольника и равна $4\sqrt{3}S$.

Способ II. Воспользуемся тем, что $\sqrt{3}\sin\angle A + \cos\angle A = 2\sin\left(\angle A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2.$

Подставим в это выражение соотношения (2). Получим:

$$\begin{cases} c^2 - a^2 - b^2 + 4ab \geq 4\sqrt{3}S, \\ a^2 - b^2 - c^2 + 4bc \geq 4\sqrt{3}S, \\ b^2 - c^2 - a^2 + 4ca \geq 4\sqrt{3}S. \end{cases} \tag{3}$$

(Второе и третье неравенства получены из соображений симметрии.)

Сложим неравенства (3): $4ab+4bc+4ac-a^2-b^2-c^2\geq 12\sqrt{3}S.$

Осталось воспользоваться неравенством $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$. Получим:

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq 12\sqrt{3}S,\ \text{откуда}\ a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

Заметим, что поскольку мы пользовались неравенством $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$, где равенство достигается при $a=b=c$, то и в доказываемом неравенстве равенство может достигаться только при $a=b=c$, что можно проверить непосредственно.

Способ III. Пусть $a=m+n$, $b=n+k$, $c=k+m$. Если p – полупериметр, то $m=$ $=p-b$, $n=p-c$, $k=p-a$. Тогда:

$$a^2+b^2+c^2=(m+n)^2+(n+k)^2+(k+m)^2\geq 4(mn+nk+km).$$

Воспользуемся неравенством $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$. Получим:

$$4(mn+nk+km)\geq 4\sqrt{3}\sqrt{mn\cdot nk+nk\cdot km+km\cdot mn}=4\sqrt{3}\sqrt{mnk(n+k+m)}.$$

Следовательно, $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=4\sqrt{3}S.$

Способ IV. Рассмотрим два случая. 1) В треугольнике ABC величины углов не превышают 120°.

Тогда существует точка такая, что $\angle AOC=\angle AOB=\angle BOC=120°$ (точка Торричелли, рис. 1). Пусть $AO=m$, $BO=n$, $CO=p$. Найдём площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников AOB, AOC, BOC. Получим:

$$\begin{cases} S_{AOB}=\dfrac{1}{2}mn\cdot\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}mn,\\ S_{AOC}=\dfrac{1}{2}np\cdot\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}np,\\ S_{BOC}=\dfrac{1}{2}pm\cdot\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}pm.\end{cases}$$

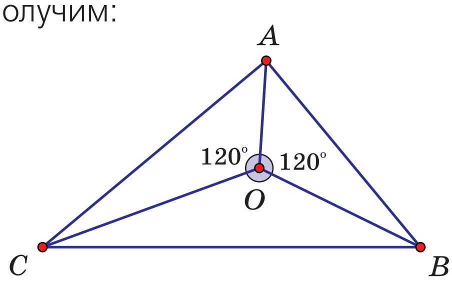


Рис. 1.

Следовательно:

$$S=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(mn+np+pm),\ \text{откуда}\ mn+np+pm=\frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны, из теоремы косинусов следует:

$$\begin{cases} a^2=p^2+n^2-2pn\cdot\cos 120°=p^2+n^2+pn,\\ b^2=m^2+p^2-2pn\cdot\cos 120°=m^2+p^2+pn,\\ a^2=n^2+m^2-2mn\cdot\cos 120°=n^2+m^2+pn.\end{cases}$$

Сложим эти равенства. Получим:

$$a^2+b^2+c^2=m^2+p^2+n^2+pn+mn+mp\geq 3(pn+mn+mp)=3\cdot\frac{4S}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}S.$$

Равенство достигается, если $m=n=p$, что соответствует случаю равностороннего треугольника.

2) В треугольнике величина одного из углов превышает 120°. Пусть, например, $\angle AOB>120°$. Тогда: $c^2>a^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2>2(a^2+b^2)\geq 4ab$. То есть в треугольнике с углом α, большим 120°:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha<\frac{1}{2}ab\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}ab,\ \ ab>\frac{4}{\sqrt{3}}S.$$

Следовательно, $a^2+b^2+c^2>4ab=\dfrac{16}{\sqrt{3}}S>4\sqrt{3}S.$

Таким образом, наименьшее значение суммы площадей квадратов, построенных на сторонах треугольника площади S равно $4\sqrt{3}S$.

Задача 3. Вычислите: $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Следующее решение опирается только на определение косинуса острого угла.

Способ I. Рассмотрим треугольник ABC с углами $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$. Проведём отрезки AD и DE так, чтобы $\angle DAC=\angle CDE=\frac{\pi}{7}$ (рис. 2). Пусть $BE = 1$, тогда $BE = ED = AD = AC = 1$; $BD=2\cos\frac{\pi}{7}$, $AE=2\cos\frac{2\pi}{7}$, $CD=2\cos\frac{3\pi}{7}$. Отметим, что здесь мы использовали определение косинуса острого угла. Для этого достаточно в соответствующем равнобедренном треугольнике провести высоту.

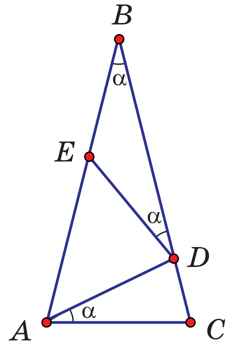


Рис. 2.

Треугольник равнобедренный, следовательно:

$$2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}=1+2\cos\frac{2\pi}{7}, \text{ откуда } \cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Ключом к решению оказалась «цепочка» из трёх равнобедренных треугольников BED, ADE и CAD.

Интересно, что с помощью «цепочки» из четырёх равнобедренных треугольников можно доказать равенство $\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}$; из пяти треугольников – равенство $\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}$; и, наконец, «цепочки» из n равнобедренных треугольников можно доказать равенство:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

Теперь немного преобразуем искомое выражение. Так как $\cos\frac{\pi}{7}=-\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{4\pi}{7}$, то $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$.

В следующем решении будем вычислять значение выражения в скобках.

Способ II. Пусть $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}$ – единичные векторы, образующие углы $\beta=\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \ldots, \frac{14\pi}{7}$ с осью абсцисс (рис. 3).

Точки A, B, C, D, E, F, G образуют правильный семиугольник с центром в начале координат. Пусть $\vec{S}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\ldots+\overrightarrow{OG}$.

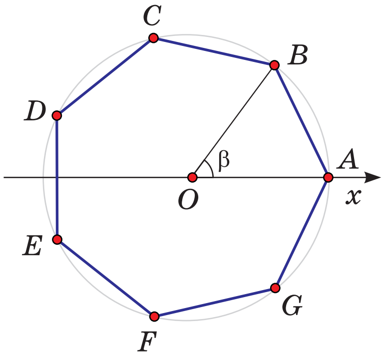


Рис. 3.

Докажем, что $\vec{S}$ – нулевой вектор. Действительно, если повернуть семиугольник на угол $\frac{2\pi}{7}$, точка A перейдёт в точку B, точка B – в точку C и так далее. И, наконец, точка G перейдёт в точку A. Система векторов после поворота на угол $\frac{2\pi}{7}$ не отличается от исходной, поэтому сумма векторов не изменится, а это возможно, только если $\vec{S}=\vec{0}$.

Следовательно, и координаты вектора $\vec{S}$ равны 0. В частности, абсцисса:

$$x=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\ldots+\cos\frac{14\pi}{7}=0.$$

Далее, поскольку $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$, получим:

$$x=2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+1=0,$$

откуда $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$, и значение исходного выражения равно $\frac{1}{2}$.

Комментарий. Аналогично можно найти, что

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

Часто сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ можно вычислить следующим образом. Слагаемые суммы представляют в виде: $a_1=b_1-b_2$, $a_2=b_2-b_3$, $\ldots$, $a_n=b_n-b_{n+1}$. Тогда

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\ldots+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}.$$

Следующее решение реализуют эту идею.

Способ III. Умножим и разделим выражение $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ на $2\sin\frac{\pi}{7}$:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Раскроем скобки и применим формулу $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)$:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Аналогично можно вычислить сумму:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Способ IV. Воспользуемся соотношением:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{18\pi}{7}.$$

Пусть $f(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x=4\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x-1$, тогда:

$$f\left(\frac{2\pi}{7}\right)=f\left(\frac{4\pi}{7}\right)=f\left(\frac{6\pi}{7}\right)=a.$$

То есть числа $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ являются корнями кубического уравнения $4y^3+2y^2-2y-1-a=0$.

Воспользуемся теоремой Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Здесь мы доказали не одно тождество, а три.

Способ V. Воспользуемся тем, что $\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)+\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)-1=$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\cos^2\frac{3\pi}{7}-1=2\cos\frac{3\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=4\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}-1.$$

Осталось найти значение произведения:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Умножим и разделим выражение на $8\sin\frac{\pi}{7}$. Получим:

$$-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8};\ \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{4}{8}-1=-\frac{1}{2}.$$

Практически дословно можно доказать:

Утверждение. Если $A=B+C$, то $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=4\cos A\cos B\cos C-1$.

Способ VI. Пусть $x=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$. Очевидно, что $x<0$. Тогда:

$$2x^2=2\cos^2\frac{2\pi}{7}+2\cos^2\frac{4\pi}{7}+2\cos^2\frac{6\pi}{7}+$$

$$+4\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+4\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Воспользуемся формулами $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$:

$$2x^2=3+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+$$

$$+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}\right).$$

Далее, $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$. Следовательно,

$$2x^2=3+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+$$

$$+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right).$$

Получим уравнение: $2x^2=3+5x$, $2x^2-5x-3=0$, откуда $x=-\frac{1}{2}$.

Задача 4. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр вписанной окружности проведена прямая, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что $AE = r$.

Доказательство. Способ I (описанная окружность как вспомогательная, идея из книги [1]). Пусть биссектриса AI пересекает описанную окружность в точке W (рис. 4). Дуги BW и WC равны и $WM \perp BC$. Тогда треугольники AEI и WMI подобны и верно равенство $\frac{AE}{MW} = \frac{AI}{IW}$ (1). Из точки I проведём перпендикуляр IB_0 к стороне AC. Треугольники AIB_0 и CWM подобны, поэтому $\frac{AI}{CW} = \frac{r}{WM}$ (2). По теореме «трилистника» $CW = IW$. Из (1) и (2) получим: $\frac{AE}{MW} = \frac{AI}{IW} = \frac{AI}{CW} = \frac{r}{WM}$, то есть $AE = r$.

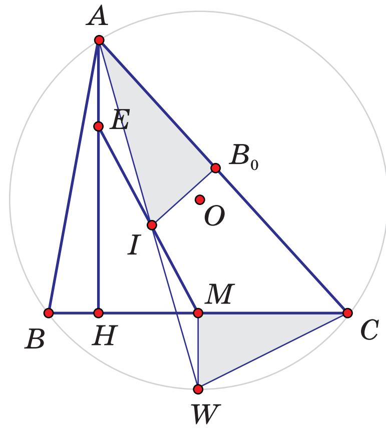


Рис. 4.

Способ II (вневписанная окружность как вспомогательная). Пусть KN – касательная к вписанной окружности, параллельная BC, F – точка касания, A_0 – точка касания вписанной окружности со стороной BC (рис. 5). При гомотетии с центром в точке A отрезок KN перейдёт в отрезок BC, а точка F в точку A_1 на стороне BC. При этом вписанная окружность перейдёт во вневписанную, которая касается стороны BC в точке A_1. Воспользуемся тем, что точка M – середина отрезка A_0A_1 (это можно доказать, вычислив длины касательных BA_0 и CA_1 к вписанной и вневписанной окружностям). Тогда MI – средняя линия треугольника FA_0A_1. Следовательно, прямая EI параллельна AA_1. Тогда $AEIF$ – параллелограмм и $AE = IF = r$. Ключом к решению оказалось то, что точки A, F и A_1 лежат на одной прямой.

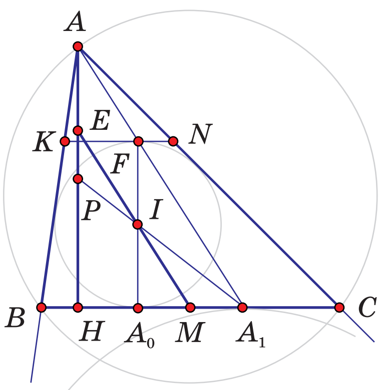


Рис. 5.

Укажем ещё два замечательных свойства этой конструкции.

Свойство 1. Пусть точка P – середина высоты AH. Тогда точки P, I и A_1 лежат на одной прямой. (Треугольники FA_0A_1 и AHA_1 гомотетичны. Середина отрезка FA_0 перейдёт в середину высоты AH.)

Свойство 2. Отрезок ME проходит через середину отрезка AA_0 (так как AEA_0I – параллелограмм).

Изучим конструкцию с точками E и F более внимательно. Для этого в качестве дополнительного построения используем прямую, проходящую через вершину треугольника параллельно основанию (рис. 6). Этой прямой И.А. Кушнир дал звучное название «прямая Евклида». Может быть, это и не совсем так; не он был первый, кто рассматривал эту прямую, – зато запоминается!

Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB как A_0, B_0 и C_0. Пусть прямые A_0B_0 и A_0C_0 пересекают прямую Евклида в точках P и Q. Из равенства углов треугольников AC_0Q и BC_0A_0 следует, что треугольник AC_0Q – равнобедренный и $AC_0 = AQ$. Аналогично, $AB_0 = AP$. Поскольку $AC_0 = AB_0$, то $AQ = AP$. Точки P, Q, C_0 и B_0 лежат на окружности с диаметром PQ. Тогда PC_0 и QB_0 – высоты в треугольнике PQA_0. Заметим, что поскольку A_0F – диаметр вписанной окружности, то углы A_0B_0F и A_0C_0F – прямые. Тогда точка F лежит на прямых PC_0 и QB_0. Следовательно, точка F – ортоцентр треугольника PQA_0.

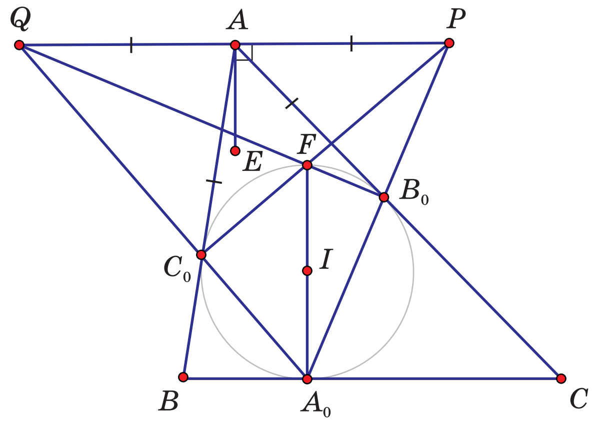


Рис. 6.

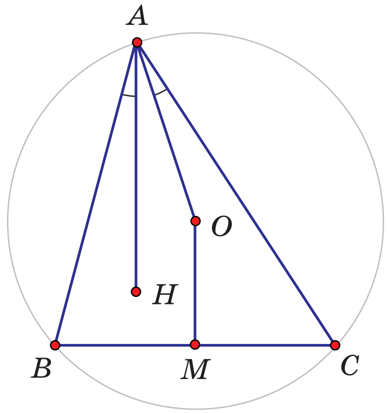


Рис. 7.

Теперь воспользуемся некоторыми фактами из геометрии треугольника (см. рис. 7): 1) $AH = 2OM$, где H – ортоцентр треугольника ABC, а точка O – центр описанной окружности; 2) углы HAB и OAC равны.

На рисунке 6 прямая AE – серединный перпендикуляр к отрезку PQ и $A_0F = 2AE$, следовательно, точка E – центр описанной окружности треугольника PQA_0. Из факта 2) сразу можно увидеть, что углы C_0A_0E и B_0A_0F равны. Еще несколько свойств: прямые EA_0 и B_0C_0 перпендикулярны; середины отрезков A_0P и A_0Q, а также точки A, C_0, B_0 лежат на одной окружности (окружность Эйлера треугольника A_0PQ).

Знание некоторых фактов конструкции с прямой Евклида помогает решить, например, задачу, предлагавшуюся на Всероссийской олимпиаде 1999 года: «Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0. Прямые A_0C_0 и B_0F пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AD и BC параллельны» (рис. 8).

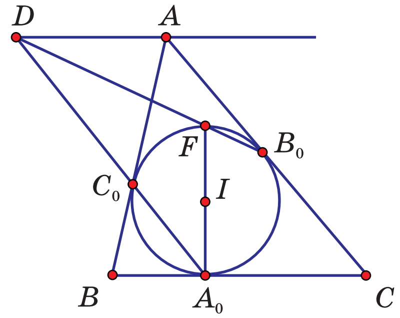


Рис. 8.

Тем, кто хочет углубить знания, рекомендуем заглянуть на сайт Турнира городов [5]. В 2009 году на Летней конференции были рассмотрены серии задач, в которых подробно изучались свойства вписанной и вневписанных окружностей.

Задача 5. Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен 80°. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 10°$. Найдите угол AMB.

Идеи приведённых ниже решений (способы I–III) взяты из книги [2]. Первые два способа решения вполне доступны для понимания и семиклассникам, поскольку используется только равенство треугольников.

Решение. Способ I. Обозначим точку пересечения луча *AM* с высотой *BH* как *D* (рис. 9). Докажем равенство треугольников *MCD* и *BCD*. Углы *BAD* и *BCD* будут равны 20°. Тогда $\angle MCD = 20°$. Угол *DMC* равен 40° как внешний для треугольника *AMC*. В треугольниках *MCD* и *BCD* равны два угла, а, значит, равны и все углы. Тогда треугольники *MCD* и *BCD* равны. Следовательно, треугольник *MDB* – равнобедренный. Угол *BMC* при основании равнобедренного треугольника *MCB* равен 70°. Тогда угол *BMD* равен 30° и угол *AMB* равен 150°.

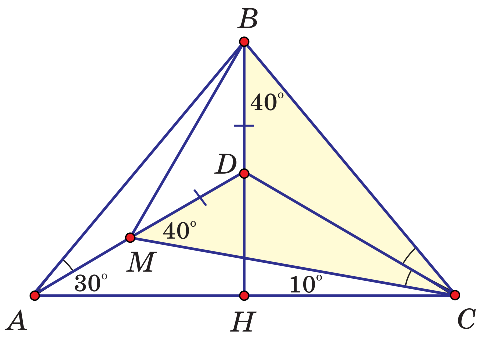


Рис. 9.

Способ II. Пусть равносторонний треугольник *ACE* лежит в одной полуплоскости с треугольником *ABC* (рис. 10). Тогда треугольники *ACM* и *ECB* равны. Следовательно, *EB* = *AM*. Тогда *AMBE* – равнобокая трапеция с углом 30° при основании и угол *AMB* равен 150°.

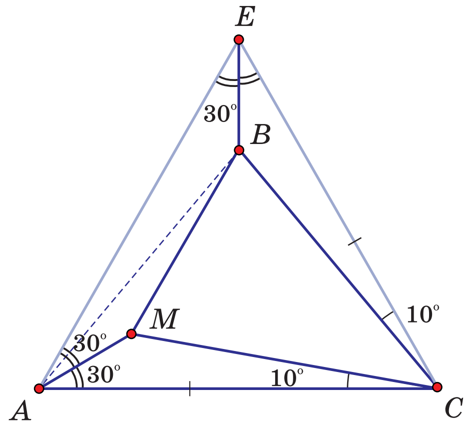


Рис. 10.

Способ III (вспомогательная окружность). Опишем вокруг треугольника *AMC* окружность с центром *O* (рис. 11). Поскольку точки *B* и *O* равноудалены от точек *A* и *C*, то они лежат на серединном перпендикуляре к *AC*. Так как вписанный угол *MAC* равен 30°, то соответствующий ему центральный угол *MCO* равен 60°. Треугольник *MOC* равнобедренный с углом 60°, следовательно, этот треугольник равносторонний и *MC* = *CO*. Далее, $\angle ACO = \angle ACB = 50°$.

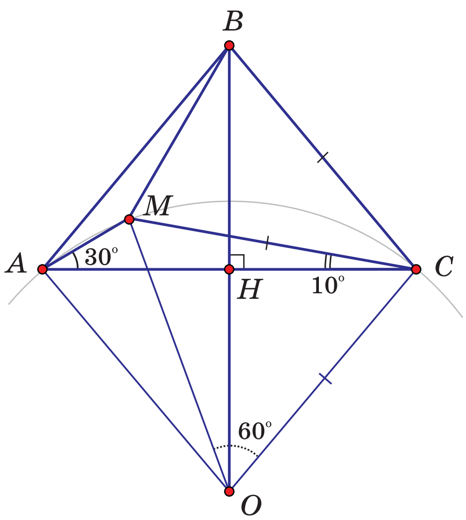


Рис. 11.

В треугольнике *BOC* *CH* является биссектрисой и высотой. Следовательно, он – равнобедренный. Тогда *BC* = *CO* = *MC*. Из равнобедренного треугольника *BMC* с углом *BCM*, равным 40°, получаем, что угол *BMC* равен 70°. Тогда *AMB* равен 150°.

Способ IV (вспомогательная окружность с центром в вершине равнобедренного треугольника).

Сделаем дополнительное построение, которое часто выручает в задачах на равнобедренный треугольник. Проведём окружность ω с центром в вершине *B* и радиусом *BA* (рис. 12). Пусть точки *M* и *M′* симметричны относительно *AC*. Тогда треугольник *AMM′* – равносторонний. Заметим, что угол *AMC* равен 140°. Тогда и угол *AM′C* равен 140°. Поскольку центральный угол *ABC* равен 80°,

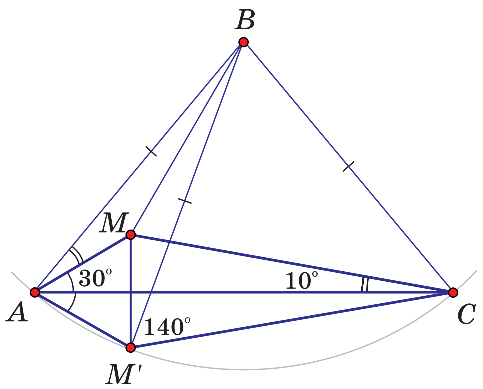


Рис. 12.

а соответствующий ему вписанный угол равен 40°, то точка M' лежит на окружности ω. Треугольники AMB и BMM' равны по трем сторонам. Следовательно, BM – биссектриса угла ABM'. Получаем, что угол AMB равен 150°.

На этой же идее построено решение такой задачи: «Угол при вершине A равнобедренного треугольника равен 80°. Вне треугольника выбрана точка P так, что $\angle PBC = \angle PCA = 30°$ и отрезок BP пересекает сторону AC. Найдите угол PAC» [4, № 230].

Отметим ещё раз, что при симметрии относительно прямой AC отрезка AM мы получили равносторонний треугольник AMM'. Этот приём можно использовать и в других задачах. Например, в задаче И.Ф. Шарыгина, предложенной на Московской математической олимпиаде в 1993 году: «Дан выпуклый четырёхугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, угол BAM равен 30°, угол ACM равен 150°. Докажите, что AM – биссектриса угла BMC».

Интересно, что окружности из III и IV способов симметричны относительно прямой AC.

Задача 6. Пусть произвольная точка X принадлежит высоте AH треугольника ABC. Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 (рис. 13). Докажите, что высота AH принадлежит биссектрисе угла B_1HC_1.

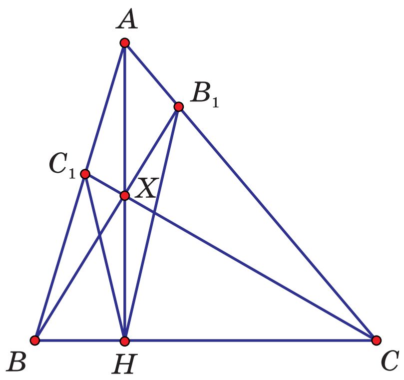


Рис. 13.

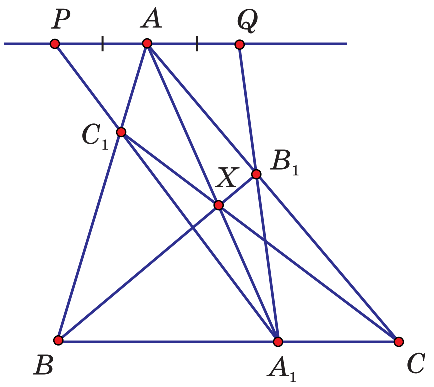


Рис. 14.

Докажем сначала одно очень полезное утверждение, связанное с прямой Евклида (идея из книги [2]).

Лемма. Пусть прямые AX, BX и CX пересекают стороны BC, AC и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 14). Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают прямую PQ, параллельную прямой BC и проходящую через вершину A, в точках P и Q. Тогда $AP = AQ$.

Доказательство. Запишем теорему Чевы для треугольника ABC и прямых AA_1, BB_1 и CC_1:

$$\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=1 \qquad (*)$$

Из подобия треугольников APC_1 и BA_1C_1, а также AB_1Q и CB_1A_1 следует, что $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BA_1}{AP}$ и $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AQ}{A_1C}$. Подставим эти соотношения в формулу (*); после сокращения получим, что $\frac{AQ}{AP}=1$, т.е. $AP = AQ$.

Вернёмся к задаче.

Решение. Способ I (идея из книги [2], прямая Евклида). По доказанной лемме в треугольнике PHQ высота AH является и медианой. Следовательно, он – равнобедренный и AH – биссектриса угла C_1HB_1. Доказано. Короткое и красивое доказательство.

Способ II (дополнительный треугольник). Воспользуемся ещё одним полезным вспомогательным построением. Отразим сторону AC относительно высоты AH (рис. 15). Точки C и B_1 перейдут в точки C' и B_1'. Треугольник $AC'B$ Э.Г. Готман в книге [3] называет дополнительным к треугольнику ABC.

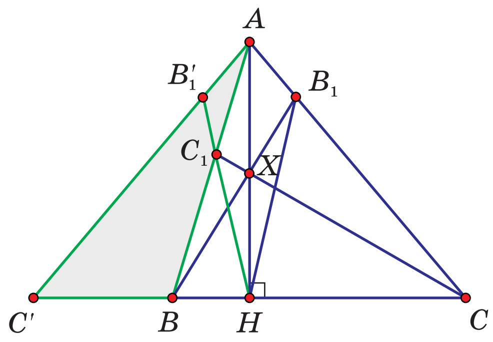


Рис. 15.

Теперь можно переформулировать задачу. Мы хотим доказать, что AH – биссектриса угла C_1HB_1, с другой стороны, AH является биссектрисой угла $B_1'HB_1$. Поэтому нам достаточно доказать, что точки B_1', H и C_1 лежат на одной прямой. Для этого покажем, что произведение $\frac{C'B'_1}{B'_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BH}{HC'}$ (*) равно 1. Тогда по теореме Менелая для треугольника ABC' и точек B_1', H и C_1 эти три точки будут лежать на одной прямой.

При симметрии относительно высоты AH точки C' и B_1' перейдут в точки C и B_1. Тогда по теореме Чевы для треугольника ABC и прямых AH, BB_1 и CC_1 произведение (*) будет равно $\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BH}{HC}=1$. Точки B_1', H и C_1 лежат на одной прямой и AH является биссектрисой угла B_1HC_1.

Так теорема Чевы в исходном треугольнике «оказалась» теоремой Менелая в дополнительном треугольнике.

Литература

1. *Кушнир И.А.* Триумф школьной геометрии. – К.: Наш час, 2005.

2. *Кушнир И.А.* Геометрия на баррикадах. – К.: Факт, 2009.

3. *Готман Э.Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. – М.: Просвещение, 1996.

4. *Шарыгин И.Ф.* 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1999.

5. Сайт летней конференции Турнира городов (страница конференции 2009 года): http://www.turgor.ru/lktg/2009/index.php

Вернуться к содержанию

Юрий Остапович ПУКАС
учитель математики гимназии г. Троицка
y-o-p1951@yandex.ru

Решая или разбирая интересные задачи, мы приобретаем какой-то новый опыт, расширяем арсенал технических приемов. В трудных ситуациях всё это может неожиданно прийти на помощь. О нескольких таких случаях из моей практики я рассказал в статье «Памятные задачи», опубликованной в сборнике «Учим математике» (М.: МЦНМО, 2006)[1]. Здесь я продолжаю разговор, начатый четыре года назад.

1. Две хозяйки и молоко

Осенью далёкого 1965 года за успех на областной олимпиаде я получил книгу Э.Г. Готмана «Уравнения, тождества, неравенства при решении геометрических задач» (М.: Просвещение, 1965). Возможно, я что-то решал тогда из неё, готовясь к поступлению в ФМШ МГУ, но потом книга долгих 40 лет простояла на полке. Вспомнил я о ней, отчаявшись решить следующую задачу с устного экзамена на ВМК МГУ.

Задача 1.1. Докажите, что сумма длин медиан треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Никак не удавалось связать сумму медиан и радиус вписанной окружности. Подсказка нашлась в виде задачи на первой странице введения упомянутой книги: «Доказать, что высоты треугольника h_a, h_b, h_c и радиус r вписанной в него окружности удовлетворяют неравенству $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ ». Так как сумма высот не превосходит суммы медиан, получаем цепочку:

$$m_a + m_b + m_c \geq h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9r.$$

Так как $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, то всё сводится к доказательству известного неравенства $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$.

Бывает, что решению трудной задачи способствует случайный фактор. Оброненная кем-то фраза или что-то, попавшее в поле зрения, могут затронуть слой памяти с нужной информацией, подсознание срабатывает иногда просто удивительно. Например, присутствие числа 9 в условии задачи с устного экзамена на факультете ВМК могло вызвать ассоциацию (но не вызвало!) с вышеупомянутым часто встречаемым неравенством. Иногда даже такого намёка, такого минимального сходства хватает, чтобы найти решение. Конечно, если какое-то сходство действительно имеется, если его удаётся увидеть и использовать.

В следующем сюжете увидеть было легко, так как опыт был приобретён буквально накануне (к этому мы ещё вернемся), и я до сих пор удивляюсь такому необычному совпадению!

---

[1] Все представленные в нём материалы можно найти по адресу: http://www.math.ru/teacher/db/

За несколько дней перед II Творческим конкурсом учителей математики (сентябрь 2005 года) в хорошо мне известной и часто используемой на занятиях кружка при подготовке детей к олимпиадам книге Д.В. Фомина «Санкт-Петербургские математические олимпиады» (СПб.: Политехника, 1994) мне вдруг бросилась в глаза следующая задача.

Задача 1.2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$.

Складываются знаменатели! Стало настолько интересно, что я сразу посмотрел указание: «Воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$». Доказать это неравенство легко, воспользоваться – ещё проще. Неравенство из указания я даже записал на листочек, чтобы не забыть и при случае показать его ученикам. Сама же задача, и это важно, запомнилась почему-то как $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$.

А вот что ждало меня (наряду с другими задачами) на конкурсе.

Задача 1.3. Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая – на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

Чтобы ответить на вопрос, надо сравнить число дней в месяце (столько литров молока купила первая хозяйка) и $20\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{d}\right)$, где a, b, c, ..., d – ежедневные цены одного литра молока. Авторское решение можно найти в интернете, а я покажу вам свой путь.

Разница между этими количествами молока (и средняя цена за месяц) не изменится, если мы увеличим число дней в месяце до 32-х, посчитав, что в добавленные дни цена за литр была равна 20 рублям, то есть средней. Пять раз разбивая слагаемые на пары и применяя неравенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, получим:

$$20\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{d}\right) \geq \frac{20\cdot 4^5}{a+b+c+\ldots+d}=32,$$

так как $a+b+c+\ldots+d=20\cdot 32$, то есть средняя цена, умноженная на количество дней.

Уже набирая этот текст, я подумал, что ведь и в неравенстве $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ «складываются» знаменатели, но удивления это у меня никогда не вызывало. Возможно, что здесь сумма $a+b+c$ воспринималась как «делитель», а не как «знаменатель». К тому же неравенство могло впервые встретиться и в таком виде: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (см., например, № 6.74 «Сборника задач по алгебре для 8–9 классов» М.Л. Галицкого, А.М. Гольдмана и Л.И. Звавича. – М.: Просвещение, 1992).

Удивительно, что выручившее меня неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{16}{a+b+c+d}$ я и ранее встречал не раз, хотя бы в задачах устных экзаменов ВМК в виде $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$. Но в сентябре 2005-го я его не узнал!

2. Удивительное сходство

Бывает, что сходство просто бросается в глаза. Взгляните на условия трёх задач.

Задача 2.1. Докажите, что для всех $0<x<\frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\frac{3x}{\sin x}>4-\cos x$. (Московская областная олимпиада, 1989, 10 класс.)

Задача 2.2. Докажите, что для всех $0<x<\frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\frac{2\cos x}{1+\cos x}<\frac{\sin x}{x}$. (Московская областная олимпиада, 1989, 11 класс.)

Задача 2.3. Докажите, что для всех $0<x<\frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $x\cdot\cos x<\frac{\pi^2}{16}$. (Московская областная олимпиада, 2009, 11 класс.)

Внешне задачи, разделённые 20-ю годами, очень похожи. Во всяком случае, я вспомнил о первых двух из них, когда в конце января 2009 года 11-классники принесли свежий вариант 1-го тура областной олимпиады, в котором под номером 3 была наша третья задача, и дружно стали просить объяснить её. Простота формулировки заворожила их. Рассмотрим сначала первую и вторую задачи. Они приведены и разобраны в книге «Российские математические олимпиады школьников» Л.П. Купцова, С.В. Резниченко и Д.А. Терёшина (Ростов-на-Дону: Феникс, 1996).

При $0<x<\frac{\pi}{2}$ первое неравенство равносильно неравенству $3x>4\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$ или $3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x>0$. Его мы докажем, исследовав на возрастание функцию $f(x)=3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$. Производная этой функции на рассматриваемом интервале положительна (убедитесь в этом сами), следовательно, $f(x)$ на нём строго возрастает, и поэтому $f(x)>f(0)=0$. Что и требовалось доказать.

Доказательство второго неравенства чуть хитрее. При $0<x<\frac{\pi}{2}$ оно равносильно неравенству $\operatorname{tg} x+\sin x-2x>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{tg} x+\sin x-2x$. Вычислим и оценим её производную:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-2>\frac{1}{\cos^2 x}+\cos 2x-2>0.$$

Здесь мы использовали тот факт, что при $0<x<\frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство $0<\cos 2x<\cos x<1$.

Однако этот опыт бесполезен при решении третьей задачи. Сходство с двумя первыми лишь обманчиво. Это — задача «на сообразительность», и она великолепна! Как при $0<x<\frac{\pi}{2}$ график $y=\sin x$ уютно «прячется под навесом» $y=x$, точно так же при $0<x<\frac{\pi}{2}$ график $y=\cos x$ располагается под графиком функции $y=\frac{\pi}{2}-x$.

Всё очень просто! Так как на данном интервале $\cos x < \frac{\pi}{2} - x$, то $x\cos x < x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, а это, разумеется, не превосходит ординаты вершины параболы $\frac{\pi^2}{16}$.

3. Деление уголком

Тригонометрия, производные — жаль, если они исчезнут из программ российских школ. А то, что в вариантах ЕГЭ будет задача на числа (олимпиадного характера), радует. Формулировки подобных задач и их решения, порою очень трудно находимые, понятны и интересны многим ученикам. Рассмотрим для примера одну из таких задач.

Задача 3.1. При каких натуральных n существует рациональное число x, удовлетворяющее равенству $n^2 + 2 = (2n - 1)^x$? (Диагностическая работа МИОО, 02.12.2008; 4-я Соросовская олимпиада, 1998).

Для меня самым важным здесь было понять идею, заметить, что $n^2 + 2$ делится на $2n - 1$. После этого удалось легко завершить решение. Вот что у меня получилось.

1) Из того, что при всех n выполнено неравенство $n^2 + 2 > 2n - 1$, следует, что искомое число $x = \frac{k}{m}$ больше единицы: $k > m$.

2) Для чисел, удовлетворяющих условию задачи, равенство $(n^2 + 2)^m = (2n - 1)^k$ определяет натуральное число, единственным образом разлагаемое на простые множители. Это значит, что в разложении на простые множители числа $2n - 1$ присутствуют все простые множители числа $n^2 + 2$, но в меньших степенях. То есть $n^2 + 2$ делится на $2n - 1$.

3) Следовательно, $n^2 + 2 = d(2n - 1)$, где d — натуральное число. Рассмотрим квадратное уравнение относительно n: $n^2 - 2dn + (d + 2) = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, должен быть квадратом натурального числа, которое обозначим j (убеждаемся, конечно, в том, что при равном нулю дискриминанте чисел, удовлетворяющих исходному равенству нет): $d^2 - d - 2 = j^2$.

Тогда $(d - j)(d + j) = d + 2$. Но $j = 1$ не даёт нам натурального d и, следовательно, натурального n. При $j = 2$ имеем $d = 3$, откуда находим, что $n = 5$, $x = 1{,}5$ (при $n = 1$, втором корне квадратного уравнения, исходное уравнение не имеет решений).

Если $j > 2$, то левая часть равенства $(d - j)(d + j) = d + 2$ больше правой, так как $d + j$ больше $d + 2$, да ещё оно умножается на $d - j$. То есть для $j > 2$ равенство $(d - j)\times$ $\times(d + j) = d + 2$ невозможно.

Итак, лишь при $n = 5$ исходное уравнение имеет рациональный корень.

Задача была решена. Чего же ещё? Я о ней и думать перестал, но в какой-то момент в голове совершенно неожиданно возникло иное завершение этой интересной задачи.

Вернёмся в начало пункта № 3. Найдём, при каких натуральных n значение выражения $\frac{n^2+2}{2n-1}$ является натуральным числом (мы его уже обозначили буквой d). Задачи с подобными формулировками можно встретить, например, в упомянутом выше «Сборнике задач по алгебре для 8–9 классов» М.Л. Галицкого и др., там, где объясняется деление уголком. Здесь есть определённые технические трудности с выделением целой части, но я лет 10 назад научился их преодолевать. Умножим числитель на 4. Если d — натуральное число, то $4d$ — также натуральное. Могут появиться лишние решения, но мы сделаем проверку! Зато теперь удобнее делить уголком, выделяя целую часть:

$$\frac{4n^2+8}{2n-1}=2n+1+\frac{9}{2n-1}.$$

Получаем остаток 9, который должен делиться на $2n - 1$, откуда следует, что $2n - 1$ это либо 1, либо 3, либо 9. Находим три значения n (это 1, 2 и 5), нам подходит только $n = 5$.

Этому полезному техническому приему я научился так. В 1997 году поступающим на факультет Института стран Азии и Африки МГУ была предложена следующая задача (интересно, что в 2004 году подобная задача была на экзаменах в МФТИ):

Задача 3.2. Найдите все пары целых x и y, удовлетворяющие уравнению

$$3xy + 16x + 13y + 61 = 0.$$

Похожие задачи на вступительных экзаменах в МГУ уже встречались, например, в 1975 году на факультете психологии:

Задача 3.3. Найдите все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

Решается она следующим образом. Перепишем уравнение в таком виде:

$$y(2x + 1) = 112 - 2x^2 + x.$$

При целых значениях x выражение $2x+1\neq 0$, поэтому, разделив обе части на $2x + 1$ и выделив целую часть, получим: $y=\frac{111}{2x+1}-x+1$. Перебирая положительные делители числа 111, рассмотрим три случая: $2x + 1 = 1$; 3; 37. Только в одном из них получаем положительную пару $x = 1$, $y = 37$.

Но вернёмся к задаче 1997-го года. Мы будем действовать по только что рассмотренной схеме: $y(3x + 13) = -(16x + 61)$. При целых значениях x выражение $3x + 13$ не обращается в нуль, поэтому можно разделить обе части на $3x + 13$. Получаем:

$$y=-\frac{16x+61}{3x+13}=-5+\frac{4-x}{3x+13}.$$

Осталось найти, при каких целых x значение выражения $\frac{4-x}{3x+13}$ также целое, но выяснить это теперь гораздо сложнее. В данном случае самое эффективное — это расширить зону поиска, умножив числитель на 3, а лишние решения затем отсеять проверкой:

$$\frac{12-3x}{3x+13}=\frac{25-3x-13}{3x+13}=-1+\frac{25}{3x+13}.$$

Перебирая делители числа 25, рассмотрим шесть случаев: $3x + 13 = \pm1, \pm5, \pm25$. После вычислений и проверок находим три пары решений: $(-4, 3)$, $(-6, -7)$, $(4, -5)$.

Сначала я эту задачу решил более сложным способом, но с тех пор, как лет 10 назад случайно заглянул в авторское решение, своё и не вспоминаю.

4. Полезные задачи с целыми числами

А теперь я расскажу о нескольких достаточно интересных, но малоизвестных задачах с целыми числами. Возможно, что решения некоторых из них ещё нигде не публиковались. Новые задачи, новые впечатления — кто знает, а вдруг это вам пригодится когда-нибудь? Ведь последние задачи вариантов ЕГЭ — это задачи с целыми числами.

Задача 4.1. Пусть a, b, c – цифры трёхзначного числа m, и $f(m) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$. Найти все m, для которых $\frac{m}{f(m)} = 1$. (ВМК МГУ, устный экзамен, 2003).

Решение. Пусть $m = 100a + 10b + c$ $(a \neq 0)$. По условию $m = f(m)$, и мы получаем уравнение:

$$100a + 10b + c = a + b + c + ab + ac + bc + abc,$$

или

$$99a + 9b = ab + ac + bc + abc,$$

откуда

$$a(bc + b + c - 99) = b(9 - c) \geq 0.$$

Если $c \neq 9$, то решений нет, так как в этом случае $bc + b + c - 99 < 81 + 9 + 9 - 99 = 0$. Если $c = 9$, находим, что $b = 9$, и a – любая отличная от нуля цифра.

Задача 4.2. Функция $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $f(-4) = 3$, $19 \leq f(3) \leq 29$. Вычислить $f(16)$, если известно, что это значение принадлежит отрезку [600; 1100]. (Олимпиада МИРЭА, 2007.)

Решение. Нетрудно показать, что для многочлена с целыми коэффициентами разность $f(k) - f(m)$ при целых k и m делится на $k - m$. Действительно, при вычитании свободные члены взаимно уничтожаются, а для любой натуральной степени n верно равенство: $k^n - m^n = (k - m)(k^{n-1} + k^{n-2}m + \ldots + m^{n-1})$.

Поэтому $f(3) - f(-4) = f(3) - 3$ делится на 7. В указанном для $f(3)$ промежутке находим единственное подходящее значение $f(3) = 24$. Рассуждая таким же образом, получаем, что $f(16) - f(3) = f(16) - 24$ делится на 13, а $f(16) - f(-4) = f(16) - 3$ делится на 20. Это можно записать так: $f(16) = 20k + 3 = 13m + 24$. Задача свелась к решению простейшего неопределённого уравнения первой степени, к задаче важной и полезной, но не трудной.

Итак, $13m = 20k - 21$, $m = \frac{20k - 21}{13} = k + \frac{7k - 21}{13}$. Выделение целой части! Общее решение этого уравнения: $k = 3 + 13n$, откуда находим: $m = 3 + 20n$. Тогда $f(16) = 20k + 3 = 260n + 63$. Из этих чисел условию $600 \leq f(16) \leq 1100$ удовлетворяет только значение $f(16) = 843$.

Задача 4.3. Доказать, что если для некоторых натуральных n и m число $n^2 + m^2 - n$ делится нацело на $2nm$, то n является квадратом натурального числа. (ВМК МГУ, устный экзамен, 2003.)

Решение. Пусть $\frac{n^2 + m^2 - n}{2mn} = k$, где k – натуральное число. Тогда $n^2 + m^2 - n = 2nkm$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно m: $m^2 - 2nkm + (n^2 - n) = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, должен быть квадратом целого числа, то есть: $n^2k^2 - n^2 + n = n(nk^2 - n + 1) = j^2$. Нетрудно заметить, что числа

n и $(nk^2 - n + 1)$ – положительные и взаимно простые, а их произведение должно быть квадратом, следовательно, каждое из них является квадратом натурального числа, в том числе и n. Что и требовалось доказать.

Сравните это с решением следующей задачи — идейное сходство несомненно!

Задача 4.4. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$. (*В. Сендеров*, Московская математическая олимпиада, 2002, 9 класс.)

Решение. Бросается в глаза формула сокращённого умножения. Можно также заметить, что x — нечётное число, и что знаки x и y можно выбирать произвольно. Договоримся искать неотрицательные решения.

Пусть $x = 2t + 1$, тогда: $(x^4 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 2t(2t + 2)(4t^2 + 4t + 2) = 2y^2$. Тогда $4t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1) = y^2$ и y — чётное число. Пусть $y = 2z$, тогда $t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1) = z^2$. Числа t, $t + 1$ и $2t^2 + 2t + 1 = 2t(t + 1) + 1$ попарно взаимно простые, а их произведение — полный квадрат. Отсюда следует, что каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t = 0$, иначе $t + 1$ не будет квадратом! Тогда и $z = 0$, получаем, что $x = \pm 1$, $y = 0$.

Задача 4.5. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a + b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a - b| > 10000$. (Московская областная олимпиада, 2006, 10 класс.)

Решение. Для определённости будем считать, что $a > b$. Пусть $k = $ НОД(a, b) — наибольший общий делитель a и b. Тогда $a = km$, $b = kn$, где m и n взаимно простые числа, причём $m > n$, поэтому $|a - b| = k(m - n) \geq k$. Докажем, что $k > 10000$. Пока заметим, что если $k \leq 10000$, то $m > n > 100$.

Если $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ делится на ab, то $a^3 + b^3$ также делится на ab. В других обозначениях получаем, что $k^3(m^3 + n^3)$ делится на k^2mn, или $km^3 + kn^3$ делится на mn. Но тогда $km^3 + kn^3$ должно делиться и на m, и на n. А так как m и n взаимно простые числа, то k должно делиться и на m, и на n, и поэтому оно должно делиться на mn. Но мы уже знаем, что если $k \leq 10000$, то $m > n > 100$. В этом случае $mn > 10000 > k$, а меньшее число на большее нацело не делится. Тем самым мы доказали, что $|a - b| = k(m - n) \geq k > 10000$. Эта задача долго у меня не получалась.

Задача 4.6. У трёхчлена $x^2 - ax + b$ коэффициенты a и b — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с 2,008... . Найдите наименьшее возможное значение a. (Московская областная олимпиада, 2008, 10 класс.)

Решение. Сначала несложным перебором убеждаемся, что при натуральных $a \leq 4$ среди корней данного квадратного трёхчлена нет такого, чья десятичная запись начинается с 2,008... . Если же $a > 4$, то корень, о котором идёт речь, это меньший корень. Пусть он равен $2 + h$, где $0{,}008 \leq h < 0{,}009$. Тогда второй (больший) корень равен $a - 2 - h$ или $n - h$, где $n = a - 2$.

По теореме Виета произведение корней данного нам квадратного трехчлена равно натуральному числу b, то есть $b = (2 + h)(n - h)$. Абсцисса вершины параболы $y = x^2 - ax + b$ равна $\frac{2+n}{2}$. Все такие параболы получаются из некоторых графиков семейства $y = x^2 - (2 + n)x + 2n$ (n — натуральное) прибавлением натурального числа k, это чуть «приподнимает» их, и получается в итоге $y = x^2 - (2 + n)x + (2n + k)$. То есть $a = 2 + n$ и $b = 2n + k$.

Нас интересуют такие значения k и n, чтобы меньший корень x_1 квадратного уравнения $x^2 - (2 + n)x + 2n + k = 0$ удовлетворял условию $2{,}008 \le x_1 < 2{,}009$. Причём k и n должны быть такими, чтобы значение n было минимальным, ведь $a = n + 2$. Достаточно найти минимальное значение n, при котором $x_1 < 2{,}009$ и сделать проверку, решив при найденных значениях n и k уравнение $x^2 - (2 + n)x + 2n + k = 0$, чтобы посмотреть на десятичную запись корня x_1.

Решая неравенство $2x_1 < 4{,}018$, или $2+n-\sqrt{n^2-4n+4-4k} < 4{,}018$, получим оценку: $0{,}036n > 4k - 4 + (2{,}018)^2$. Отсюда видно, что минимальное значение n мы найдём при $k = 1$. Получаем: $n > 113{,}12...$, минимальное целое значение $n = 114$, $a = 116$, $b = 229$. При этих значениях $x_1 = 2{,}0089...$.

Быстрому решению этой задачи способствовало рассмотрение квадратного трёхчлена $y = x^2 - (2 + n)x + 2n$ вместо $y = x^2 - ax + b$. А сделал я это, скорее всего, благодаря воспоминаниям о такой задаче № 8.1 Московской математической олимпиады 2004 года.

Задача 4.7. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами (*И.В. Ященко*).

Аналогичную задачу предложили и девятиклассникам, только в их задаче «операцию повторили девять раз». Примерно половина участников догадалась привести пример такого квадратного уравнения с натуральными p и q, взяв коэффициент p в виде $p = q + 1$. Тогда получается уравнение $x^2 + (q + 1)x + q = 0$, корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = -q$. Это как-то само собой приходит в голову, а в авторском комментарии предлагается следующее рассуждение: «Увеличение коэффициентов p и q на единицу означает прибавление $x + 1$ к исходному трёхчлену. Пусть один из корней данного уравнения -1, а второй – целый. Тогда при прибавлении $x + 1$ корень -1 будет сохраняться, а второй корень будет уменьшаться на 1».

А теперь прочтите условие вот какой задачи.

Задача 4.8. Найти наименьшее значение a, при котором уравнение $x^2 - ax + 21 = 0$ имеет корень, являющийся натуральным числом. (Вторая Соросовская олимпиада, 1995/96 учебный год, 10 класс, 3-й тур).

Решается она очень просто. Из уравнения следует, что $a = x + \frac{21}{x}$. Ближайшие к точке минимума этого выражения натуральные числа — это $x = 4$ и $x = 5$. При $x = 5$ мы получаем наименьшее (при натуральных x) значение $a = 9{,}2$. Применить этот подход к задаче № 4.6 мне пока не удалось.

А вот пять задач для самостоятельного решения.

Задача 4.9. Найдите все пары m, n натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа n слева приписать десятичную запись числа m, то получится число n^m. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, № 8.4.)

Задача 4.10. Найдите все пары m, n натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа n слева приписать десятичную запись числа m, то получится число n^{m+n}. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, № 9.2.)

Задача 4.11. Найдите все тройки m, n, k натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа k слева приписать десятичную запись числа n, а затем к полученному числу слева приписать десятичную запись числа m, то получится число k^{m+n}. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, №10.6.)

Задача 4.12. Аня нашла такое четырёхзначное число, что сумма цифр кубического корня (целочисленного) из него равна кубическому корню из суммы его цифр. Боря, Витя и Гена также нашли каждый своё такое число. Могло ли случиться так, что хотя бы трое из них, или даже все четверо, нашли разные числа? (Олимпиада мехмата МГУ, 2008, 10 класс.)

Задача 4.13. Каково наименьшее возможное значение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел $a^3b - ab^3$ и $c^3 - c$ при целых a, b и c? (Олимпиада мехмата МГУ, 2009, 10 класс.)

Последние две задачи не очень сложные. В вариантах своих олимпиад они шли под первым номером. А прочтя условия первых трёх, многие наверняка вспомнят задачу Игоря Николаевича Сергеева, последнюю в демонстрационном варианте МИОО этого года. Возможно, что решая эти задачи, вы заглянете в творческую лабораторию, в которой сейчас составляются задачи С6 для выпускников 2010 года.

Вернуться к содержанию

Квадраты целых чисел и факториалы

Василиса Юрьевна КУЗНЕЦОВА
студентка 3-го курса математического факультета
Московского педагогического государственного университета
no_speach@list.ru

В 2010 году Единый государственный экзамен по математике будет впервые проходить в новой форме, достаточно сильно отличающейся от той, которая использовалась ранее. У учеников и учителей, готовящихся к нему, большой интерес вызывают задания олимпиадного типа, рассчитанные на сильных учащихся. Это так называемые задачи С6. Они связаны со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

Ниже, разбирая конкретные задания, мы рассмотрим несколько важных идей и поучительных технических приёмов, часто применяемых при решении подобных задач – и самых простых, и довольно сложных. Начнём с очень полезной, вполне «школьной», задачи.

Задача 1. Найдите целые решения уравнения $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$. (ВМК МГУ, устный экзамен, 2000.)

Решение. Выделяем полные квадраты:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = 0,$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2y) = 0,\ (x - y)^2 + (y + 1)^2 = 1.$$

Осталось перебрать варианты: $x - y = 0$, $(y + 1)^2 = 1$; $(x - y)^2 = 1$, $y + 1 = 0$. Получаем четыре решения: $x = y = 0$; $x = y = -2$; $x = 0$, $y = -1$; $x = -2$, $y = -1$.

Ответ: $(0; 0)$, $(-2; -2)$, $(0; -1)$, $(-2; -1)$.

Теперь разберём два, как окажется несложных уравнения, при решении которых используется следующая идея: квадрат целого числа x не может давать остаток 2 при делении на 3.

Убедимся в этом. Число x может давать при делении на 3 остатки 0, 1, 2; то есть его можно представить как $x = 3k$, или $x = 3k + 1$, или $x = 3k + 2$. Рассмотрим квадраты этих чисел:

$(3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$ – остаток 0;

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ – остаток 1;

$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ – остаток 1.

Задача 2. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$. (Типовой вариант ЕГЭ-2010.)

Решение. Если $n = 0$, то $x^2 = 9$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Теперь преобразуем уравнение и рассмотрим его при $n > 1$:

$$x^2 = 3(3^{n-1} + 2) + 2,$$

т.е. правая часть при делении на 3 даёт остаток 2. Но квадрат числа в левой части не может давать остаток 2 при делении на 3, поэтому при $n > 1$ решений нет.

Ответ: $(0; 3)$, $(0; -3)$.

Задача 3. Найдите все пары натуральных чисел m и k, удовлетворяющих равенству $m! = k^2 - 24k + 97$, где $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$. (Типовой вариант ЕГЭ-2010.)

Решение. Выделяя в правой части полный квадрат, получаем:

$$m! = (k - 12)^2 - 47, \text{ или } m! + 47 = (k - 12)^2.$$

Если $m \geq 3$, то $m!$ делится на 3, а 47 даёт при делении на 3 остаток 2. При делении же на 3 правой части (квадрата целого числа) можно получить в остатке либо 0, либо 1, поэтому в этом случае решений нет. Осталось рассмотреть $m = 1$ (убеждаемся, что здесь нет решений) и $m = 2$, в этом случае $(k - 12)^2 = 49$, и мы получаем ответ: $m = 2$, $k = 5$; $m = 2$, $k = 19$.

Ответ: (2; 5), (2; 19).

Замечание. Существует и другой путь решения этой задачи, связанный с рассмотрением последней цифры числа. Заметим, что при $m \geq 5$ число $m!$ будет оканчиваться на 0, следовательно, последняя цифра числа $m! + 47$ будет равняться семи. Левая часть (квадрат целого числа!) на эту цифру оканчиваться не может. Перебирая случаи $1 \leq m \leq 4$, находим решения: $m = 2$, $k = 5$; $m = 2$, $k = 19$.

Согласитесь, многому можно научиться, решая и разбирая эти три задачи! Выделение полного квадрата, рассмотрение остатков и последней цифры, перебор – всё это очень полезные приёмы, использующиеся при решении этих и других задач.

Рассмотрим ещё несколько задач с факториалами.

Задача 4. Найдите все целые решения уравнения $1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$.

Решение. При $x \geq 4$ сумма факториалов будет оканчиваться на 3 (подумайте почему) и не будет квадратом целого числа. Рассмотрев случаи $x < 4$, находим решения: $x = 1$, $y = \pm 1$; $x = 3$, $y = \pm 3$.

Ответ: (1; 1), (1; –1), (3; 3), (3; –3).

Задача 5. Найдите все натуральные решения уравнения $x! + y! = 4z + 3$.

Решение. Справа – нечётное число, следовательно, один (и только один) из факториалов равен 1, так как при $n \geq 2$ число $n!$ чётное. Пусть $x! = 1$, тогда $y! = 4z + 2$. При $y \geq 4$ левая часть делится на 4, а правая не делится. Если $y = 2$, то $z = 0$ – число не натуральное. Если $y = 3$, $z = 1$.

Ответ: (1; 3; 1), (3; 1; 1).

Задача 6. Натуральные числа n и k таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2008. Докажите, что число n также оканчивается на 2008. (Всероссийская олимпиада, 2008, региональный этап, 11 класс.)

Решение. Так как $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n-1)n$, то на 2008 оканчивается произведение этих нескольких последовательных чисел. Их меньше пяти, иначе на конце будет цифра 0. Рассмотрев возможные произведения последних цифр двух, трёх и четырёх последовательных чисел, убеждаемся, что они не оканчиваются на 8. Следовательно, после сокращения остаётся только одно число, и получается, что k и n – это два последовательных числа, и поэтому $\frac{n!}{k!} = k + 1 = n$. А по условию задачи это число как раз и оканчивается на 2008. Что и требовалось доказать.

Задача 7. Натуральное число m таково, что существует факториал, оканчивающийся ровно m нулями, но не существует факториала, оканчивающегося $m-1$ нулями. Существует ли факториал, оканчивающийся ровно $m+1$ нулями? (*И. Акулич*, Турнир им. А.П. Савина, 1999.)

Решение. Обратим внимание на то, что число нулей, которыми оканчивается десятичная запись числа $n!$, равно степени пятёрки в каноническом разложении числа $n!$ на простые множители (это очевидно, поскольку в натуральном ряду числа, кратные 2, встречаются гораздо чаще, чем числа, кратные 5).

Пусть $n!$ – наименьший из факториалов, оканчивающийся на m нулей. Тогда n делится на 5 (иначе $(n-1)!$ тоже оканчивалось бы на m нулей). Учитывая, что не существует факториала, оканчивающегося $m-1$ нулями, делаем вывод, что n делится на 25. А тогда $(n+5)!$ оканчивается $m+1$ нулями, так как $n+5$ делится на 5, но не делится на 25.

Задача 8. Решите в натуральных числах уравнение $a!+b!+c!=d!$. (Московская областная олимпиада, 1996, районный этап.)

Решение. Пусть для определённости $a \le b \le c$. Из уравнения ясно, что $c<d$. Тогда $d \ge c+1$ и $d! \ge (c+1)!$. Но $(c+1)!=(c+1)\cdot c!$, и мы получаем цепочку неравенств:

$$3c! \ge a!+b!+c! \ge (c+1)\cdot c!$$

При $c>2$ это не выполняется. При $c \le 2$, перебирая оставшиеся возможности, находим ответ: $a=b=c=2$, $d=3$.

Ответ: (2; 2; 2; 3).

Замечание. Тот факт, что $a=b=c$, можно доказать иначе. Если $a<b\le c$, то в исходном уравнении все факториалы, кроме первого ($a!$), делятся на $b!$. Получаем противоречие. Если же $a=b\le c$, то $2a!+c!=d!$. Разделим обе части на $c!$. Получим $\frac{2a!}{c!}+1=\frac{d!}{c!}$. Число $\frac{2a!}{c!}$ может быть целым только в двух случаях: когда $a=c$ (здесь мы находим ответ), или когда $a=1$, $c=2$. Во втором случае решений нет.

Задача 9. Найдите все тройки чисел p, q, n, где число n – натуральное, а числа p и q – простые, удовлетворяющие уравнению $3(p^q+q^p)=n!$ (Всероссийская олимпиада, 2006, региональный этап, 11 класс.)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $p \ge q$. Рассмотри три случая. Если $p \ge q \ge n$, то левая часть уравнения более чем в 6 раз превосходит правую часть. Если $p \ne q$ и $q \le n$, то правая часть уравнения делится на q, а левая – не делится. И последний случай. Пусть $p=q<n$. Получаем $6q^q=n!$ Одно решение легко подбирается: $p=q=2$, $n=4$. Других решений нет, так как при нечётных значениях q левая часть будет не меньше 162-х ($q\ge 3$, $q^q \ge 27$) и не будет делиться на 4, а правая часть, если $n! \ge 162$, на 4 делится.

Ответ: (2; 2; 4).

Задача 10. Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде $x^3-y!$, где x и y – натуральные числа? (*В. Сендеров, Н. Агаханов*, Турнир им. А.П. Савина, 2006.)

Приведём авторское решение.

Решение. При $y>5$ все числа $y!$ делятся на 9, а числа x^3 при делении на 9 дают лишь третью часть возможных остатков: 0, 1, 8. Поэтому при $y>5$ чисел $x^3-y!$ среди первой тысячи не более 333 + 1.

Если $y \le 5$, то $x^3 \le 1000+5!$, т.е. $x \le 10$. Поэтому каждый $y \le 5$ даёт не более 10 представимых чисел, т.е. всего представимых чисел с $y \le 5$ существует не более 50. Итак, всех представимых чисел не более 334 + 50 = 384.

Ответ: непредставимых чисел больше.

Две последние задачи достаточно трудные. В задаче № 10 встретился куб целого числа. Вот какой совет даётся в книге «Ленинградские математические кружки» (авторы: С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин; Киров, 1994): «В задачах, в которых встречаются кубы целых чисел, бывает полезно перебрать остатки от деления на 7 или на 9 (и в том и в другом случае возможны лишь три различных остатка: 0, 1, 6 и 0, 1, 8 соответственно)». Но «кубы» в задачах встречаются реже, чем «квадраты».

Рассмотрим ещё одну задачу, где упоминается «куб».

Задача 11. Пусть каждое из натуральных чисел k, $k+1$, $k+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число делится на куб некоторого своего простого делителя. (Всероссийская олимпиада, 2007, региональный этап, 9 класс).

Решение. Первая мысль: использовать тот факт, что одно из трёх последовательных натуральных чисел делится на 3. Но эта задача на другую идею. Здесь удаётся применить важное свойство остатков: «Квадрат числа не может иметь остаток 2 или 3 при делении на 4».

Докажем, что число k не может быть квадратом, а так как оно делится на квадрат любого своего простого делителя, то в произведении простых сомножителей, на которое единственным образом раскладывается число k, какой-то простой сомножитель q будет иметь нечётную степень, не меньшую, чем 3, и число k разделится на q^3.

Число k не может быть чётным, так как в этом случае чётным будет и число $k+2$. Но из двух подряд идущих чётных чисел лишь одно может делиться на $2^2 = 4$, а по условию задачи каждое из натуральных чисел k, $k+1$, $k+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Поэтому число $k+1$ – чётное, и оно делится на 4. Так как при делении на 4 квадрата целого числа можно получить в остатке только 0 или 1, а число k при делении на 4 даёт остаток 3, то оно не является квадратом и разделится на q^3.

Задача 12. Найдите пары таких целых чисел x и y, что среднее арифметическое чисел $\frac{1}{x(x+y)}$, $\frac{1}{(x+y)(x+2y)}$, $\frac{1}{(x+2y)(x+3y)}$, …, $\frac{1}{(x+9y)(x+10y)}$ равно $\frac{1}{3^{x+14y-9}+2y^2-28}$. (МИРЭА, 2006; окружной этап Московской региональной олимпиады, 2006, 11 класс.)

Решение. Замечательная задача! Сначала находим сумму десяти алгебраических дробей, используя идею детской задачи: «Чему равна сумма дробей $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{110}$? » Вот её решение:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{110}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{10\cdot 11}=$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}.$$

Полезный технический приём, применим его:

$$\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+y)y}\right)+\left(\frac{1}{(x+y)y}-\frac{1}{(x+2y)y}\right)+\left(\frac{1}{(x+2y)y}-\frac{1}{(x+3y)y}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{(x+9y)y}-\frac{1}{(x+10y)y}\right)=\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+10y)y}=\frac{10}{x(x+10y)}.$$

Так как чисел десять, то их среднее арифметическое равно $\frac{1}{x(x+10y)}$.

Задача свелась к тому, чтобы найти такие целые решения уравнения $x(x+10y)=$ $=3^{x+14y-9}+2y^2-28$, при которых знаменатели исходных дробей не обращались бы в нуль.

Прибавим к обеим частям уравнения $25y^2$, чтобы дополнить левую его часть до полного квадрата:

$$(x+5y)^2=3^{x+14y-9}+27y^2-28.$$

Если это уравнение имеет решения, то все они удовлетворяют неравенству $x+14y-9\geq 0$ (в противном случае значение выражения $3^{x+14y-9}$ будет дробью). Если $x+14y-9>0$, то уравнение можно записать так:

$$(x+5y)^2=3(3^{x+14y-10}+9y^2-10)+2.$$

Так как квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3, то в этом случае решений нет.

Если $x+14y-9=0$, то уравнение примет вид:

$$(x+5y)^2=27y^2-27.$$

Подставив сюда $x=9-14y$, получим: $81(1-y)^2=27y^2-27$. После упрощений находим значения y из квадратного уравнения $y^2-3y+2=0$, это $y_1=2$; $y_2=1$.

Получаем в результате два решения: $(-19; 2)$ и $(-5; 1)$. Проверяем их, подставляя в исходные дроби. Первая пара подходит. Для второй пары $x+5y=0$, поэтому дроби $\frac{1}{(x+4y)(x+5y)}$ и $\frac{1}{(x+5y)(x+6y)}$ не определены.

Ответ: $(-19; 2)$.

В заключение приведу ряд задач для самостоятельного решения, которые можно использовать при подготовке к олимпиадам и к ЕГЭ.

1. Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $x!=y^2-36y+281$.

3. Докажите, что ни при каком натуральном n число $3^n+2\cdot 17^n$ не является квадратом натурального числа.

Комментарий. В этой задаче можно использовать тот факт, что квадрат числа не может оканчиваться на числа 2, 3, 7, 8 (или иметь остатки 2, 3, 7, 8 при делении на 10). В этом можно убедиться самому, или прочесть в различных пособиях. Например, в уже упомянутой книге «Ленинградские математические кружки» (авторы: С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин; Киров, 1994).

4. Найдите целые решения уравнения $x^3 + y^3 = 500$. (Олимпиада ВМК МГУ, 2000).

Комментарий. Участвуя в этой олимпиаде, я не знала того, о чём говорится в примечании к задаче № 10, и, разложив левую часть на множители, перебирала различные случаи: $x + y = n$, $x^2 - xy + y^2 = m$, $nm = 500$. Но вариантов здесь – слишком много...

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого $2009! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots, n$. (Типовой вариант ЕГЭ-2010.)

6. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число n^n не является делителем числа $2009! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009$. (Типовой вариант ЕГЭ-2010.)

Комментарий. Годом раньше эта задача была предложена 11-му классу (для числа 2008!) на олимпиаде высокого уровня – Московской математической, ее решение доступно в Интернете (http://olympiads.mccme.ru/mmo/2008/mmo2008.htm).

7. Найдите все натуральные n такие, что в десятичной записи числа $n!$ используются ровно две различные цифры. (*Е. Сосыка*, Всероссийская олимпиада, 2000, региональный этап, 10 класс).

8. Пусть A – множество таких натуральных чисел, которые записываются только с помощью цифр 1, 5 и 9, причём каждая цифра используется не менее одного раза. Может ли сумма 1001 различного числа из множества A быть полным квадратом? (Московская областная олимпиада, 2003, районный этап, 11 класс).

Комментарий. Трудная задача, но поняв, что общего у цифр 1, 5 и 9, вы поймёте, где искать противоречие.

9. Для каждого простого k найдите наибольшую натуральную степень числа $k!$, на которую делится число $(k^2)!$. (*А.Л. Канунников*, Московская математическая олимпиада, 2009, 11 класс.)

Комментарий. Три решения этой сложной задачи вы найдёте по адресу: http://olympiads.mccme.ru/mmo/2009/mmo2009.htm

Вернуться к содержанию

Александр Олегович НОВИК
доцент кафедры высшей математики
Государственного университета Высшая школа экономики
sh-novik@mail.ru

Обычно школьники, изучая графики функций, находят вторую производную, указывают промежутки выпуклости и точки перегиба. При этом часто геометрические свойства выпуклых функций не обсуждаются. Иногда, пользуясь простыми и наглядными соображениями, удаётся получить некоторые нетривиальные результаты. В настоящей статье предлагается ряд задач вполне доступных школьнику, знакомому с понятием производной. Некоторые из этих задач совсем просты, некоторые могут потребовать определённых усилий. Большинство задач снабжено указаниями и решениями.

Выпуклость

Внимательно посмотрим на рисунки 1 и 2. Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с секущей. Первая из функций выпукла вверх, и в любой точке промежутка $(x_1; x_2)$ график функции лежит выше секущей. Вторая функция выпукла вниз, и её график лежит ниже секущей.

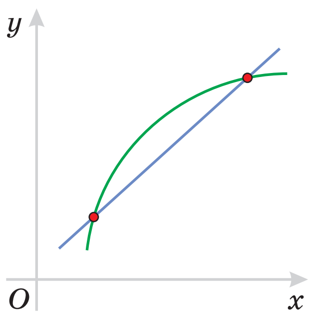


Рис. 1.

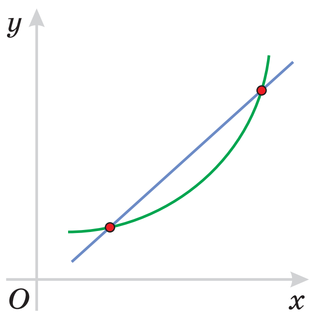


Рис. 2.

Часто используют другое определение выпуклости. Говорят что функция выпукла вверх на интервале $(a; b)$, если во всех точках интервала график функции лежит ниже любой её касательной, проведённой в любой точке этого интервала. Если график лежит выше касательной – говорят, что функция выпукла вниз.

Можно показать, что для дифференцируемых функций эти определения равносильны. Мы в этой заметке будем исходить из первого определения.

Теперь взглянем на рисунки 3 и 4. Видно, что если функция выпукла вверх, то с ростом x угол, который образует касательная с положительным ортом оси Ox, – убывающая функция аргумента x. Вместе с углом убывает и тангенс этого угла. Таким образом, первая производная $f'(x)$ функции $f(x)$ является убывающей функцией, поэтому $f''(x) < 0$.

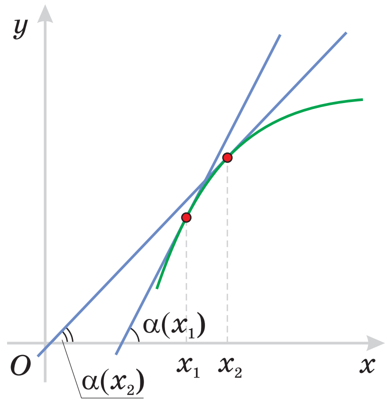


Рис. 3.

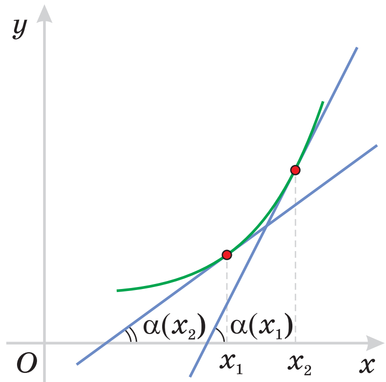


Рис. 4.

Наоборот, если функция выпукла вниз, то с ростом x угловой коэффициент касательной возрастает. Это означает, что возрастает первая производная и функция удовлетворяет условию $f''(x)>0$. Разумеется, эти соображения нельзя рассматривать как строгие математические рассуждения. Они являются лишь наглядной геометрической иллюстрацией к следующей теореме, которая приводится здесь без доказательства.

Теорема 1. Если во всех точках интервала $(a;\ b)$ вторая производная функции отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на этом интервале. Если $f''(x)>0$, то функция выпукла вниз.

Задача 1. Проверьте, что:

а) функция $y=\sqrt{x}$ выпукла вверх на всей области определения;

б) функция $y = 2^x$ выпукла вниз на всей области определения.

Задача 2. Нарисуйте график функции $y = \sin x$. Докажите что для всех $\alpha, \beta \in [0;\ \pi]$ выполнено неравенство:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2} \le \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Указание. Рассмотрите секущую, которая проходит через точки с координатами $(\alpha; \sin\alpha)$ и $(\beta; \sin\beta)$. Точка с координатами $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}; \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right)$ – середина отрезка секущей.

Замечание. Это неравенство следует из известной формулы:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

В следующей задаче применить такую простую формулу не получится.

Задача 3. Для всех $\alpha, \beta \in \left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}; \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ докажите неравенство:

$$\frac{\cos^3\alpha+\cos^3\beta}{2} \le \cos^3\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Указание. Подумайте, какова роль условия $\alpha, \beta \in \left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}; \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$?

Значок V всюду в дальнейшем обозначает сравнение. Вместо V нужно поставить $>$, $<$ или $=$. Теперь постарайтесь решить следующие задачи.

Задача 4. Сравните:

а) $\sqrt{2003}-\sqrt{2001} \vee \sqrt{2011}-\sqrt{2009}$;

б) $\sqrt{2009}+\sqrt{2007}-2\sqrt{2008} \vee \sqrt{2011}+\sqrt{2009}-2\sqrt{2010}$.

Указание. Внимательно посмотрите на график функции $y=\sqrt{x}$. Для сравнения в пункте б) рассмотрите секущие, проходящие через следующие пары точек: $(2007; \sqrt{2007})$ и $(2009; \sqrt{2009})$, $(2009; \sqrt{2009})$ и $(2011; \sqrt{2011})$.

Задача 5. Сравните:

а) $2003^{11} + 2007^{11} \vee 2\cdot 2005^{11}$;

б) $2003^{\frac{1}{11}}+2007^{\frac{1}{11}} \vee 2\cdot 2005^{\frac{1}{11}}$;

в) $\cos^2 13°+\cos^2 17° \vee 2\cos^2 15°$;

г) $\cos^2 73°+\cos^2 77° \vee 2\cos^2 75°$.

Задача 6. Сравните:

а) $\sqrt[11]{2003}+\sqrt[11]{2007} \vee \sqrt[11]{2001}+\sqrt[11]{2009}$;

б) $\sqrt[11]{2001}+\sqrt[11]{2007}-2\sqrt{2004} \vee \sqrt[11]{2011}+\sqrt[11]{2017}-2\sqrt{2014}$.

Обобщение известной школьной формулы

Известно, что если x_1 и x_2 — координаты двух точек на прямой, то точка с координатой $\frac{x_1+x_2}{2}$ будет серединой отрезка $[x_1; x_2]$. Если точка A на плоскости имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2)$, то середина отрезка AB будет иметь координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Задача 7. Пусть x_1 и x_2 — координаты двух точек на прямой. Где расположена точка с координатой $\frac{x_1}{3}+\frac{2x_2}{3}$?

Задача 8. Пусть A, B, C — точки на прямой. Пусть x, x_1, x_2 – их координаты соответственно. Докажите, что $A\in BC$ тогда и только тогда, когда существуют числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ и $x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$.

Пусть a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) — векторы (на плоскости или в пространстве). Выпуклой линейной оболочкой векторов a_i назовём множество всех векторов вида $a=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_n a_n$ таких что, все $\alpha_i\geq 0$ и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$.

Задача 9. Найдите выпуклую линейную оболочку:

а) двух неколлинеарных векторов на плоскости;

б) трёх некомпланарных векторов в пространстве;

в) трёх векторов на плоскости (рассмотрите все возможные случаи).

Давайте в определении линейной выпуклой оболочки откажемся от требования $\alpha_i\geq 0$.

Задача 10. а) Пусть a и b — два неколлинеарных вектора на плоскости. Найдите множество всех таких векторов c, что $c=\alpha_1 a+\alpha_2 b$ и $\alpha_1+\alpha_2=1$.

б) Пусть a, b и c — некомпланарные векторы в пространстве. Найдите множество всех таких векторов d, что $d=\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c$ и $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2=1$.

Неравенство Йенсена

Рассмотрим секущую графика выпуклой функции $y = f(x)$, проходящую через точки $A(x_1;\ f(x_1))$ и $B(x_2;\ f(x_2))$. Так как любая точка C (см. рис. 5 и 6) отрезка секущей, проходящей через A и B, имеет координаты $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2; \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2))$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ и таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, то для выпуклой вверх функции будет верно неравенство:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\geq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Для выпуклой вниз:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\leq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

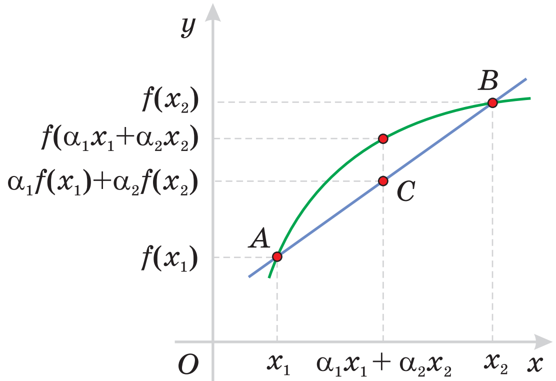


Рис. 5.

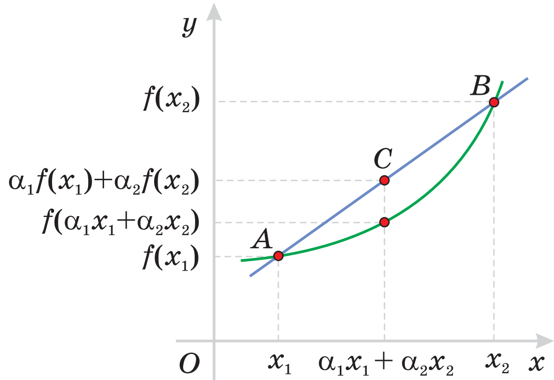


Рис. 6.

Задача 11. Пользуясь выпуклостью и монотонностью функции $y = \ln x$, докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел:

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}.$$

Указание. Возьмите $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$.

Разумеется, для двух чисел неравенство о среднем можно получить значительно проще, но эта задача позволяет на простейшем примере понять связь выпуклости логарифма и неравенства о среднем.

Задача 12. Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством $\ln(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\geq \alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2$ два раза подряд, нужным образом каждый раз выбирая α_1 и α_2.

Задача 13. Пусть функция $f(x)$ выпукла вверх, числа $\alpha_i\geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$. Докажите неравенство Йенсена:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n)\geq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+f(\alpha_n x_n).$$

Указание. Доказательство проводится по индукции (его можно прочитать ниже).

Задача 14. Воспользуйтесь неравенством Йенсена для функции $y = \ln x$ и докажите неравенство о среднем для n чисел:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Решение задачи 12. При $n = 2$ неравенство, очевидно, выполнено. Пусть для n слагаемых неравенство верно. Докажем, что тогда оно верно и для $(n + 1)$-го слагаемого. Обозначим:

$$\tilde{x} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}x_n.$$

Тогда:

$$\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n + \alpha_{n+1}x_{n+1} = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\tilde{x} + \alpha_{n+1}x_{n+1}.$$

Так $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 1$, то будет выполнено неравенство:

$$f((\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\tilde{x} + \alpha_{n+1}x_{n+1}) \geq (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)f(\tilde{x}) + \alpha_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Осталось заметить, что:

$$f(\tilde{x}) \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}f(x_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}f(x_2) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}f(x_n).$$

Литература

1. *Берколайко С., Каток С.* Об одном индуктивном методе доказательства неравенств // Квант. 1970. № 8. С. 33–36.

2. *Шкапенюк М.* Выпуклость функций и доказательство неравенств // Квант. 1980. № 3. С. 21–24.

3. *Седракян Н.М., Авоян А.М.* Неравенства. Методы доказательства / Пер. с арм. Г.В. Григоряна. – М.: Физматлит, 2002.

4. *Соловьёв Ю.П.* Неравенства. – М.: МЦНМО, 2005.

5. *Сорокин Г.А.* Выпуклые функции и неравенства // Математика в школе. 1994. № 5. С. 55–59.

Вернуться к содержанию

Математики-педагоги

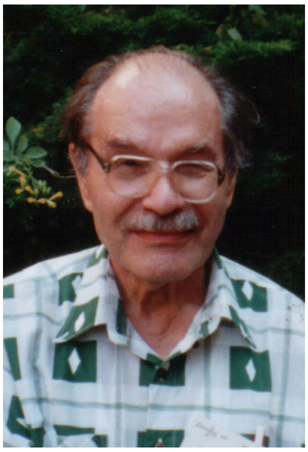
К 90-летию со дня рождения А.Д. Мышкиса

Галина Александровна ЗВЕРКИНА
доцент кафедры «Прикладная математика-1»
Московского государственного
университета путей сообщения
zverkina@inbox.ru

Андрей Матвеевич ФИЛИМОНОВ
профессор кафедры «Прикладная математика-1»
Московского государственного
университета путей сообщения
amfilimonov@yandex.ru

А.Д. Мышкис родился 13 апреля 1920 года в г. Спасске Рязанской области. Его отец Дмитрий Семёнович Ермаков был родом из тех же мест – из села Дегтянино Спасского уезда Рязанской губернии. Он был большевиком, активно участвовал в политической деятельности (в частности, в 1917 г. был избран членом Учредительного Собрания от РСДРП(б)) и в советское время занимался партийно-руководящей работой. Мать, Хая Самуиловна Мышкис, имела предков из Прибалтики, хотя её ближайшие родственники были из Молдавии. По-литовски «Miškas» значит «лес», и Анатолий Дмитриевич шутил, что его фамилия по-русски была бы «Лесков». До окончания школы он носил фамилию Ермаков, но при получении паспорта был вынужден взять фамилию матери, поскольку брак между родителями не был зарегистрирован.

Вскоре после рождения сына семья переехала в г. Харьков. Ещё до школы у Анатолия проявился интерес к вычислениям и чтению; в 1928 г. он поступил во 2-й класс 36-й школы, где училась старшая сестра Елена. В 1932 г. семья переехала в Москву. В это время Анатолий знакомится с книгами Я.И. Перельмана и делает первые самостоятельные шаги в математике: например он эмпирически обнаружил треугольник Паскаля. До 18 лет Анатолий неоднократно лечился в детских санато-



риях и по прибытии в Москву он пробыл один год в лесной школе-интернате в Сокольниках, после чего поступил в 25-ю Образцовую среднюю школу, где учились дети многих советских партийных руководителей.

В 1935 г. Анатолий начал посещать только что открывшийся математический кружок для школьников 9–10-х классов при Математическом институте им. В.А. Стеклова и Московском университете, где занятия вёл молодой преподаватель МГУ И.М. Гельфанд; занятия проходили 5 раз в месяц. А.Д. Мышкис вспоминал: «Гельфанд спросил, кто чем занимается. Многие ответили, что решают проблему Ферма. Гельфанд был полон иронии по этому поводу. А потом он стал рассказывать про многое, даже про логику, давал читать разные книжки...». В дополнение к кружковым занятиям для школьников читались лекции ведущими профессорами механико-математического факультета, эти лекции проходили в МГУ и в Математическом институте АН СССР.

В конце учебного года была проведена и первая олимпиада по математике для школьников. Олимпиада состояла из трёх этапов. После первого тура (30 марта 1935 г.), в котором участвовали 314 человек, во второй тур прошли 131 человек; для этих учащихся (не только школьников, но и рабфаковцев, и учащихся подготовительных отделений и школ для взрослых – в возрасте от 14 до 29 лет) были организованы консультации и лекции для подготовки ко второму туру олимпиады в течение двух месяцев. После второго тура, на который явилось 120 человек, к третьему туру были допущены 52. Победителями стали Игорь Николаевич Зверев, Николай Михайлович Коробов (в дальнейшем профессора мехмата) и двоюродная сестра Анатолия Дмитриевича Анна Вениаминовна Мышкис[1]. Все победители и призёры олимпиады поступили в МГУ.

Анатолий Дмитриевич участвовал во II и III олимпиадах, и на III был призёром. В 1937 г. после окончания школы с отличием он без экзаменов был принят на механико-математический факультет МГУ.

На мехмате А.Д. Мышкис учился у выдающихся математиков, с некоторыми из которых он был уже знаком по занятиям и лекциям в математическом кружке: он слушал лекции Н.К. Бари, Б.Н. Делоне, С.В. Бахвалова, А.Г. Куроша, С.Э. Хайкина, И.Г. Петровского, Л.А. Тумаркина, П.К. Рашевского, А.Я. Хинчина, И.М. Виноградова, С.Л. Соболева, И.И. Привалова, Б.В. Гнеденко, П.С. Александрова.

Позднее своими главными учителями А.Д. Мышкис называл И.М. Гельфанда, И.Г. Петровского и Я.Б. Зельдовича. Важной и практически основной частью обучения А.Д. Мышкиса было самообразование – чтение дополнительной математической литературы. Ситуация в семье была сложная в связи с репрессиями, задевшими родственников матери А.Д. Мышкиса, поэтому бóльшую часть времени он старался проводить вне дома, в читальном зале.

[1] После окончания университета Анна Мышкис ушла связисткой в действующую армию. 15 августа 1943 она умерла от ран и похоронена на ст. Кальчик Володарского района Донецкой области.

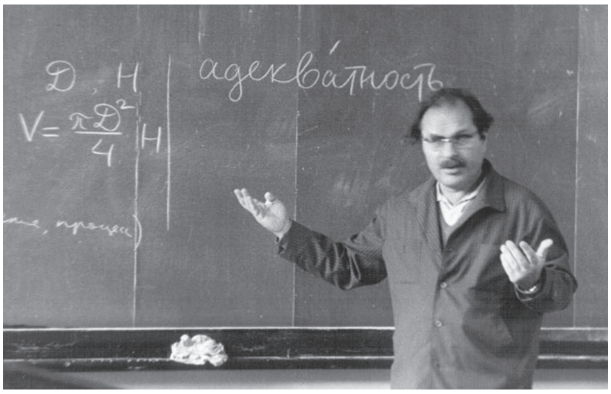
После начала Великой Отечественной Войны студенты МГУ участвовали в строительстве оборонных сооружений, а позднее многие учащиеся МГУ и гражданских вузов были призваны для обучения в Военно-воздушной инженерной академии им Н.Е. Жуковского, среди этих курсантов оказался и четверокурсник МГУ А.Д. Мышкис. В это время пятикурсники МГУ сдавали госэкзамены, и Анатолий Дмитриевич, подготовившись за 2 дня, сдал их, получив диплом с отличием (дипломную работу ему представлять не пришлось).

Новых курсантов Академии направили в Свердловск для прохождения всех учебных курсов за 3 года. Так как эти курсанты были студентами-старшекурсниками различных естественных факультетов гражданских вузов, им не читали базовых курсов, а обучали специальным дисциплинам. А.Д. Мышкис был зачислен на факультет авиационного вооружения, и практические занятия по теории вероятностей у него вела Елена Сергеевна Вентцель, с которой он в дальнейшем много и плодотворно сотрудничал – и в вопросах обсуждения проблем преподавания математики, и в преподавании в Московском институте инженеров транспорта (ныне Московский государственный университет путей сообщения – МИИТ), а лекции по теории вероятностей читал В.С. Пугачёв.

В 1942 г. эвакуированный мехмат МГУ был переведён из Ашхабада в Свердловск. А.Д. Мышкис, посоветовавшись со своим учителем И.М. Гельфандом, решил поступать в аспирантуру к И.Г. Петровскому. Он, не имея пока разрешения от руководства Академии, сдал экзамены в заочную аспирантуру, и лишь много позже добился этого разрешения. В 1943 г. вместе с Академией А.Д. Мышкис вернулся в Москву.

При защите диплома в Военно-воздушной академии, где по совету Е.С. Вентцель А.Д. Мышкис, в частности, решал задачу о максимизации вероятности поражения цели, рецензентом был приглашён Б.В. Гнеденко. После окончания с отличием Академии А.Д. Мышкис был распределён младшим преподавателем на её кафедру высшей математики. Здесь он работал вместе с В.В. Голубевым, Н.Д. Моисеевым и Г.Ф. Лаптевым, а также с сотрудниками кафедры теоретической механики А.А. Космодемьянским и М.А. Лаврентьевым. Тогда же А.Д. Мышкис часто общался с представителями инженерных кафедр, что, по его словам, способствовало приобщению к прикладному стилю мышления.

Одновременно с обучением в аспирантуре А.Д. Мышкис преподавал на половину ставки на кафедре дифференциальных уравнений в МГУ, где в то время работали И.Г. Петровский, В.В. Степанов, В.В. Немыцкий, С.Л. Соболев, С.А. Гальперн. На научных семинарах А.Д. Мышкис общался с А.Н. Тихоновым, И.Н. Векуа, Л.А. Люстерником, С.Л. Соболевым и другими выдающимися математиками. Среди мехматовских учеников А.Д. Мышкиса были В.Г. Болтянский, Е.М. Ландис, О.А. Ладыженская, О.А. Олейник (позднее А.Д. Мышкис рецензировал её дипломную работу). Вместе с О.А. Ладыженской А.Д. Мышкис создал «Маленький семинар» для изучения работ Р. Куранта и Д. Гильберта (в семинаре активно участвовали С.А. Гальперн, М.А. Крейнес, М.И. Вишик, Р.А. Александрян, О.А. Ладыженская, О.А. Олейник и др.).



Однако основным местом работы А.Д. Мышкиса оставалась Военно-воздушная академия, где в конце войны и после её окончания курсантами были в основном прошедшие войну офицеры, лишь немного освежившие знания по математике на подготовительных курсах. Поэтому в преподавании в Академии А.Д. Мышкису приходилось постоянно проводить дополнительные занятия и консультации, которые посещались курсантами охотно: в случае отчисления им пришлось бы возвратиться в командировавшую их на учёбу часть. Позже, когда в Академию стали поступать выпускники школ, обучение стало более соответствовать вузовскому. Подходящих для занятий задачников тогда не было, и А.Д. Мышкис самостоятельно составлял задачи для проведения практических занятий и контрольных работ.

С 1945 г. А.Д. Мышкис начинает активно публиковаться в научных журналах – сначала в отечественных, а затем и в зарубежных. Основные темы его публикаций – различные свойства решений обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, математические задачи механики (в особенности, задачи гидромеханики с учётом поверхностных сил) и методологические проблемы прикладной математики.

В 1946 г. А.Д. Мышкис защитил кандидатскую диссертацию по теории потенциала. Он пытался демобилизоваться и остаться работать в Москве по прикладной тематике, но в 1947 г. он был направлен в Ригу – во 2-е Ленинградское Краснознамённое Высшее авиационно-инженерное военное училище. Параллельно с работой в училище он начал преподавать в Латвийском государственном университете. В 1950 г. началось сокращение штатов военных учебных заведений, и ему удалось демобилизоваться в звании инженер-капитана.

С января 1950 г. основным местом работы А.Д. Мышкиса стал Латвийский государственный университет. В это время он не только преподавал в ЛГУ и занимался научной работой, но и проводил лекции для преподавателей средней школы, участвовал в организации внешкольной математической работы, организовывал работу студенческих семинаров, проводил студенческие математические конкурсы. Его, как ведущего математика Латвийской ССР, часто приглашали в руководящие органы республики для оценки различных посланий трудящихся, связанных с математикой (часто это были очередные «доказательства» теоремы Ферма, однако приходилось много работать и с новыми школьными и вузовскими пособиями по математике). Обращения к нему как к эксперту продолжались и после переезда из Латвии. Со времени работы в Риге важной частью работы А.Д. Мышкиса стало изучение и анализ содержания и методов математического образования в школе и в вузе.

В «рижский» период научная работа А.Д. Мышкиса была связана с рассмотрением вопроса о постановке краевых задач в областях со сложной границей (например, граница круга без радиуса) и с исследованием дифференциальных уравнений с запаздыванием. В связи с этими задачами рассматривались некоторые неравенства из теории интеграла Стильтьеса и классического математического анализа. Также А.Д. Мышкис изучал свойства смешанной задачи для линейных систем уравнений с частными производными. За это время он опубликовал (иногда в соавторстве) 31 научную статью, 1 книгу, 16 методических работ, 7 информационных статей, 4 статьи в газетах, им было отредактировано 5 книг. В 1950 г. А.Д. Мышкис защитил докторскую диссертацию по теории функционально-дифференциальных уравнений, а в 1952 г. стал профессором.

В 1953 г. А.Д. Мышкис переехал в Минск, оказавшись там единственным доктором наук-математиком (в 1955 г. защитил докторскую диссертацию Д.А. Супруненко, а позднее в Минск переехали из Ленинграда Н.П. Еругин и В.И. Крылов).

С 1953 г. А.Д. Мышкис заведовал кафедрой дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета и работал на полставки в Минском пединституте, руководил студенческой и аспирантской научной работой, сотрудничал с реферативным журналом «Математика» и Большой советской энциклопедией, переводил, редактировал и дополнил книгу Р. Беллмана «Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений».

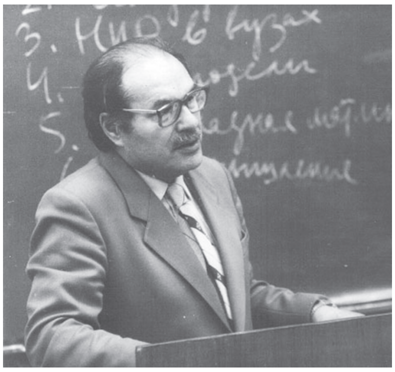
В эти годы он продолжал работу по начатым в Риге научным исследованиям, опубликовал 13 научных статей.

Всё время работы в Минске А.Д. Мышкис с семьёй жил в студенческом общежитии, и улучшения жилищных условий не предвиделось. Поэтому он активно искал работу в других городах Советского Союза. Наиболее привлекательным оказалось предложение Н.И. Ахиезера, добившегося предоставления семье А.Д. Мышкиса жилья в преподавательском доме Харьковского авиационного института; в 1956 г. А.Д. Мышкис переехал в Харьков.

С осени 1956 г. он работает профессором кафедры лопаточных машин авиационного института, где читает базовые курсы высшей математики, а с осени 1957 г. до осени 1964 г. А.Д. Мышкис – заведующий кафедрой высшей математики этого института. Здесь он сотрудничал с Н.И. Ахиезером, Я.Л. Геронимусом, И.М. Глазманом, Н.С. Ланкофом, Б.Я. Левиным, В.А. Марченко, А.Я. Повзнером и А.В. Погореловым. А.Д. Мышкис активно участвовал в заседаниях Харьковского математического общества, где заслушивались доклады харьковских и приглашённых математиков о своей работе и обзорные доклады.

В это время А.Д. Мышкис участвовал в работе научных семинаров, куда привлекались молодые исследователи, организовывал факультативные студенческие семинары, где студенты изучали новые результаты математики по недавно вышедшим книгам, посвящённым прикладным методам математики. В частности, изучались работы Г.И. Марчука о методах расчёта ядерных реакторов. В Харьковском авиационном институте кроме стандартных курсов для студентов А.Д. Мышкис начал читать курсы по дополнительным главам математики для преподавателей. Также он читал лекции для студентов по дополнительным главам теории обыкновенных дифференциальных уравнений и топологии.

А.Д. Мышкис продолжал начатую в Риге и Минске научную работу и руководство оставшимися там аспирантами, занимался решением ряда задач, свя-



занных с приложениями математики в технических задачах. Вопрос о том, является ли математика сугубо теоретической наукой или она – средство познания окружающего мира и инструмент для создания новых технологий, не стоял перед А.Д. Мышкисом: он много и активно занимался решением возникавших в инженерной практике задач и сделал многое для того, чтобы частные вопросы технического характера были сформулированы на языке математики и затем решены.

Так, обращение инженера Б.В. Абрамова с вопросом о влиянии периодических толчков на устойчивость работы мотора привело к постановке задачи о решении новых типов дифференциальных уравнений. В простейшей постановке задача была несложной, и поэтому А.Д. Мышкис предложил её темой курсовой работы студента В. Мильмана. Результаты этой работы были опубликованы в первом томе Сибирского математического журнала и стали основой для развития нового направления теории дифференциальных уравнений – теории импульсных дифференциальных уравнений.

А.Д. Мышкис участвовал в организации юбилейной сессии 1957 г. Института математики АН УССР, во многих конференциях и математических школах, проходивших в СССР. В среде харьковских математиков тогда начал подниматься вопрос о создании Харьковского исследовательского математического института, где могли бы работать и обучаться в аспирантуре многие молодые талантливые выпускники харьковских вузов, не имевшие возможности поступить в аспирантуру Харьковского государственного университета. И когда в Харькове в мае 1960 г. был создан Физико-технический институт низких температур (ФТИНТ) АН УССР, в нём был организован большой математический сектор (в чём весьма существенную роль сыграл В.А. Марченко). Туда пришли на работу многие перспективные выпускники МГУ. ФТИНТ, будучи оборонным институтом, хорошо финансировался и достаточно быстро обзавёлся новым зданием и жилым городком.

В конце 1960 г. во ФТИНТе был организован отдел Прикладной математики, и А.Д. Мышкис заведовал им с 1961 г., при этом заведуя кафедрой в авиационном институте до 1964 г.; он продолжал там читать лекции до 1968 г.

В отдел пришли работать многие ученики А.Д. Мышкиса, и большинство решавшихся ими задач было связано с разработками инженеров КБ им. Малышева, закрытых НИИ и сотрудников Харьковского авиационного института. Часто математические методы решения инженерных и экономических задач были связаны с запросами действующих производственных объединений и транспортных организаций. Так, методами линейного программирования были проведены расчёты по транспортной задаче для предприятий цементной промышленности.

В связи с развитием космонавтики математикам отделу Прикладной математики предлагались такие задачи, как исследование свойств поверхности Луны по косвенным данным, исследование температурного режима в трубе, по которой в ракету подаётся жидкий кислород, а для ведомства С.П. Королёва (ныне НПО «Энергия») были проведены исследования поведения жидкости в условиях малых объёмных сил, когда приходится учитывать капиллярные силы, а иногда и самогравитацию.

В рамках последней задачи рассматривались, например, такие вопросы: «Пусть жидкость подвешена силами поверхностного натяжения в цилиндрическом баке – при каких внешних возмущениях она может обрушиться?» Поиск ответа на это вопрос привёл к глубоким исследованиям поведения и устойчивости форм жидкости, изучению равновесных форм её поверхности. Для решения этих задач применялись как аналитические методы, так и численные расчёты на компьютерах.

Решение подобного рода задач о поведении жидкости в невесомости было чрезвычайно важно при разработке космических аппаратов и в оборонной технике. С 1963 г. А.Д. Мышкис участвовал в работе закрытых конференций по поведению жидкости в условиях космического полёта. По материалам этих исследований позднее была издана монография «Гидромеханика невесомости: Математическая теория капиллярных явлений» [2].

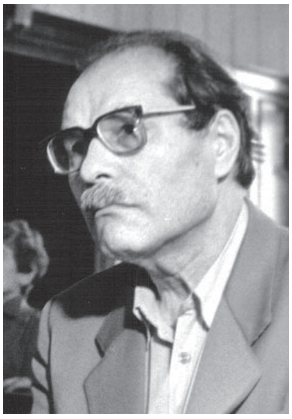
Параллельно с этими задачами он продолжал исследования в области теории дифференциальных уравнений, участвовал в конференциях в социалистических странах, читал лекции и оппонировал на защитах диссертаций в различных городах СССР, начал работу над созданием телекинокурса по высшей математике.

Во время работы в Харькове А.Д. Мышкис издал знаменитый курс «Лекции по высшей математике» [3], ориентированный на студентов технических вузов, написанный ясным, выразительным языком без излишней формализации понятий дифференциального и интегрального исчислений (сам А.Д. Мышкис считал очень удачным курс А.Ф. Берманта, доработанный И.Г. Арамановичем). Позднее этот курс был дополнен книгой «Математика для втузов. Специальные курсы» [4]. Также на студентов технических вузов и инженеров была ориентирована его книга «Элементы прикладной математики» в соавторстве с Я.Б. Зельдовичем [5].

Вопросы содержания и методики преподавания математических курсов в школе и вузе давно занимали А.Д. Мышкиса. В своих учебниках он отходил от «общепринятой» тогда практики чрезвычайно строгого и логически безупречного изложения основ математического анализа. А.Д. Мышкис обучал будущих инженеров, и для него главным в образовании будущих специалистов было не скрупулёзное соблюдение правил логики, а достижение понимания студентами сути излагаемых им математических фактов.

В 1965 г. вышла небольшая книга «Математик Пирс Боль из Риги» в соавторстве с И.М. Рабиновичем [6].

В это же время началась активная А.Д. Мышкиса работа в Комиссии по математическому образованию АН СССР и в Научно-методическом совете по математике при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР. Совместно с Я.Б. Зельдовичем он выступал в газете «Известия» и в Колмогоровской комиссии о необходимости модернизации программы по математике для средней школы – о введении элементов высшей математики, упрощении изложения материала, усиления связи математики с другими школьными дисциплинами. Однако многое из «Колмогоровской» реформы средней школы, когда в жертву «строгому логическому построению математики» приносились навыки практического применения математического знания и понимание сути математических высказываний, А.Д. Мышкисом не поддерживалось.



В 1961 г. Харьковский обком КПСС предложил А.Д. Мышкису проводить методический семинар преподавателей математики харьковских вузов и он провёл несколько заседаний таких семинаров.

С 1968 по 1974 гг. А.Д. Мышкис занимался разнообразной научной, педагогической, методической и научно-популяризаторской деятельностью в Москве, Харькове, Таллине. Он продолжал работать над телекинокурсом, примерно два раза в месяц участвовал в обсуждении работы своего отдела Прикладной математики Физико-технического института низких температур, работал над созданием новых учебных курсов: «Математика для втузов. Специальные курсы»; совместно с Я.Б. Зельдовичем – «Элементы математической физики: Среда из невзаимодействующих частиц» [7]; совместно В.Г. Бабским, Н.Д. Копачевским, Л.А. Слобожаниным, А.Д. Тюпцовым – «Гидромеханика невесомости», готовил к переизданию «Элементы прикладной математики».

По программе Научно-методического совета по математике А.Д. Мышкис объехал многие города страны, участвуя в семинарах-совещаниях преподавателей математики.

В 1974 г. по приглашению Л.Е. Садовского А.Д. Мышкис перешёл на работу в Московский институт инженеров железнодорожного транспорта (МИИТ, ныне Московский государственный университет путей сообщения) на кафедру «Прикладная математика», где он трудился до своей кончины – сначала на кафедре «Прикладная математика», затем на кафедре «Высшая математика», а в последние годы – на кафедре «Прикладная математика-1».

Работая МИИТе, А.Д. Мышкис руководил научно-исследовательским семинаром, в котором участвовали математики и аспиранты института. Из выпускников МИИТа он подготовил несколько кандидатов физико-математических наук.

В последние годы значительную часть своего времени А.Д. Мышкис посвящал вопросам преподавания математики – он перерабатывал свои старые учебники, работал в различных методических комиссиях, неоднократно выступал в периодической печати (в том числе совместно с Е.С. Вентцель) по вопросам математического образования.

В эти годы А.Д. Мышкис уделял большое внимание методологии прикладной математики. В монографии [8] им и его соавторами впервые в мировой литературе отчетливо сформулированы характерные особенности прикладного математического мышления, наличие специфической логики и т.д., а также изложены оригинальные взгляды на способы преподавания математики для инженеров, физиков и других специалистов.

Он активно участвовал в работе Московского математического общества, где руководил Секцией втузов, и в работе математической секции Московского Дома Учёных.

Разносторонняя деятельность А.Д. Мышкиса была отмечена рядом правительственных наград. Он являлся заслуженным работником высшей школы, действительным членом Академии нелинейных наук, почётным членом президиума Харьковского математического общества, почётным профессором МИИТа, почётным железнодорожником, членом редколлегий международных журналов: «Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications», «Journal of Difference Equations and Applications», «Functional Differential Equations».

Анатолий Дмитриевич Мышкис скончался после непродолжительной тяжёлой болезни 9 июля 2009 г. в г. Москве. Его научная и педагогическая деятельность не прекращалась около 60 лет, он трудился до последних дней своей жизни (весной 2009 г. состоялась защита одного из его аспирантов).

Вклад Анатолия Дмитриевича Мышкиса в математику и в методику преподавания математики неоценим. Мало найдётся в нашей стране математиков, которым неизвестна фамилия Мышкис. По его учебникам учились многие советские инженеры, его работы переводились на разные языки и издавались во многих странах.

Анатолий Дмитриевич Мышкис – не только известный преподаватель, популяризатор науки, автор ряда выдающихся учебных пособий и популярных книг по математике, но и основатель принципиально нового направления в теории дифференциальных уравнений: он ввёл в рассмотрение общий класс уравнений с запаздывающим аргументом и заложил основы теории систем таких уравнений. Одним из наиболее значительных, но далеко не единственным достижением Анатолия Дмитриевича в науке является построение теории функционально-дифференциальных уравнений (это современное название уравнений с запаздывающим аргументом) – нового направления в теории дифференциальных уравнений [1].

Значительное внимание А.Д. Мышкис уделял и уравнениям с частными производными. Он впервые ввёл понятие обобщённого решения уравнений с многозначной разрывной правой частью. Для гиперболических систем полулинейных и квазилинейных уравнений им были введены понятия обобщённого решения и доказаны теоремы о разрешимости смешанной задачи. Одна из его работ по уравнениям с частными производными была удостоена премии Московского математического общества.

А.Д. Мышкис получил ряд основополагающих результатов в теории дифференциальных уравнений с многомерным временем, а также в теории многозначных отображений и дифференциальных включений. Он также впервые ввёл и исследовал импульсные дифференциальные уравнения, которые сейчас активно изучаются и применяются многими исследователями.

Сказанное далеко не в полной мере отражает научную деятельность А.Д. Мышкиса. Например, он получил важные результаты в теории разностных уравнений и неравенств, теории «бушующих» систем, в спектральных задачах с изменяющейся границей, активно занимался анализом влияния скоростных сил на устойчивость колебаний, вопросами выбора формы тела качения по двум параллельным направляющим и многими другими проблемами.

Круг его интересов был огромен: А.Д. Мышкис интересовался историей науки ([6], [9]), внимательно следил за новыми результатами в смежных областях математики. И, конечно же, он не мог обойти вниманием важные для страны решения, связанные с реформированием математического образования, как в советское время («Колмогоровская» реформа), так и в последние годы.

А.Д. Мышкис опубликовал более 330 научных статей (многие с соавторами); был автором и соавтором более 70 методических публикаций, более 300 информационных заметок, 14 статей в газетах, 19 книг, вышедших 50 изданиями на 10 языках, двух авторских свидетельств; был редактором и переводчиком 16 книг. Он был официальным руководителем 36 защищённых кандидатских диссертаций; семеро из их авторов стали в дальнейшем докторами наук. А.Д. Мышкис был официальным оппонентом 50 докторских диссертаций и около 100 кандидатских диссертаций, написал рецензии на несколько сотен рукописей, присланных ему из редакций.

Он был знаком и сотрудничал со многими ведущими учёными СССР, России и зарубежных стран. В последней его книге [9] мы видим впечатляющую галерею портретов многих отечественных математиков с описанием тематики их исследований и краткими, точными и доброжелательными характеристиками.

Неоценим и его вклад в теорию и практику преподавания математики – как в школе, так и в вузе. Он принимал активное участие в обсуждении и разработке программ обучения математике школьников и будущих инженеров.

С началом введения электронно-вычислительной техники началась дискуссия о том, надо ли вообще инженерам изучать математику в условиях компьютеризации, А.Д. Мышкис и его коллеги последовательно защищали необходимость глубоких математических знаний инженерно-технических работников. Размышления о сути прикладного математического знания, о методах и логике прикладного математического исследования легли в основу его книг [8], [10].

А.Д. Мышкис считал, что математика в технических вузах должна преподаваться иначе, чем в университетах, где готовят математиков-исследователей. Различными должны быть и содержание математических курсов, и методика их преподавания.

Он был противником излишней формализованности изложения математического материала будущим инженерам: его студенты должны были понимать суть того или иного математического факта, а не зазубривать формальное доказательство. Поэтому А.Д. Мышкис и на лекциях, и в своих замечательных книгах [3–5] все факты излагал предельно просто и наглядно. Если сравнивать его учебники со знаменитым курсом Г.М. Фихтенгольца или с более поздними книгами, такими, например, как курс В.А. Зорича, можно увидеть, как формально строгие логически, но малопонятные по сути рассуждения А.Д. Мышкис заменял наглядным, понятным рассуждением и иллюстрировал их точно подобранными элегантными примерами и рисунками.

Пользующийся мировым признанием замечательный математик Анатолий Дмитриевич Мышкис принадлежал к числу людей, составляющих гордость не только Москвы и России, но и всей мировой науки.

До последних дней жизни А.Д. Мышкис активно участвовал в жизни кафедры «Прикладная математика-1» МИИТа. Это был чрезвычайно эрудированный, доброжелательный человек. Требовательный к себе и своей работе, он всегда был отзывчив к своим ученикам и коллегам. Он великолепно разбирался в музыке (в молодости увлекался игрой на скрипке и фортепиано), обладал замечательным чувством юмора, беседы с ним были всегда интересными и познавательными.

Книги А.Д. Мышкиса

1. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.–Л.: Гостехиздат, 1951. (3 издания)

2. Гидромеханика невесомости: Математическая теория капиллярных явлений. (соавторы В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов). М.: Наука, 1976. (2 издания)

3. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1964. (10 изданий)

4. Математика для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. (6 изданий)

5. Элементы прикладной математики (соавтор Я.Б. Зельдович). М.: Наука, 1965. (9 изданий)

6. Математик Пирс Боль из Риги (соавтор И.М. Рабинович). Рига: Зинатне, 1965.

7. Элементы математической физики: Среда из невзаимодействующих частиц (соавтор Я.Б. Зельдович). М.: Наука, 1973.

8. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики (соавторы И.И. Блехман, Я.Г. Пановко). М.: Наука, 1983. (4 издания)

9. Советские математики: мои воспоминания. М.: УРСС, 2007. (2 издания)

10. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов (соавторы И.И. Блехман, Я.Г. Пановко). Киев: Наукова думка, 1976. (2 издания)

11. Rownania roznickowe zwyczajne. (Matematyka dla politechnik) (соавтор J. Muszynski). Warszawa, 1984.

12. Введение в теорию многозначных отображений (соавторы Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, В.В. Обуховский). Воронеж, 1986. (2 издания)

13. Low-Gravity Fluid Mechanics. Mathematical Theory of Capillary Phenomena (соавторы В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов). Berlin: Springer-Verlag, 1987.

14. Матрицы и квадратичные формы. Основные понятия. Терминология. (соавторы В.Ф. Журавлев, Е.В. Панкратов, С.Д. Шелов, И.М. Яглом). М.: Наука, 1990. (Сборники научно-нормативной терминологии. Вып. 112).

15. Applied Theory of Functional Differential Equations (соавтор V.B. Kolmanovskii). Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1992. (Mathematics and Its Applications, Soviet Series, V. 85).

16. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости (соавторы В.Г. Бабский, М.Ф. Жуков, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов). Киев: Наукова думка, 1992.

17. Элементы теории математических моделей. М.: Физматлит, 1994. (3 издания)

18. Сборник задач по математике (для втузов) в пяти частях (соавторы – от 11 до 13 преподавателей МИИТ). М.: УРСС, 1997–2002.

19. Introduction to the Theory and Applications os Functional Lifferential Equations. (соавтор V.B. Kolmanovskii). Dordrecht: Kluver Ac. Press, 1999.

Вернуться к содержанию

Наш учитель Анна Ивановна Соколова (1925–1998)

Александр Николаевич РУМЯНЦЕВ
генеральный директор ООО «ИБС Пермь»
arumyanzev@ibs.ru

Юрий Витальевич СОКОЛОВ
педиатр центральной районной больницы г. Оса

Галина Ивановна СОКОЛОВА
учитель средней школы № 3 г. Оса

Александр Георгиевич УРЖУМЦЕВ
профессор университета Нанси (Франция)

А.И. Соколова

В математику люди приходят каждый своим путём: кто-то самостоятельно (см. рассказ Э.Э. Шноля об И.М. Гельфанде, «Полином», 2009, № 1), кто-то, обучаясь у выдающихся математиков либо в специализированных школах. Смеем предположить что, тем не менее, у большинства первоначальный интерес к математике возникает благодаря «районным» учителям. Роль этих учителей важна, тем более, что они, не ставя перед собой только задачу подготовки математиков, учат жизни, мышлению, логике, общей культуре сотни и тысячи будущих граждан.

Чтобы сохранить память о своих учителях, мы предлагаем читателям «Полинома» поделиться воспоминаниями о них в следущих выпусках журнала. Мы же хотим рассказать об одном из таких учителей, НАШЕМ учителе математики.

Анна Ивановна Соколова (девичья фамилия Бушуева) родилась 11 июля 1925 года в деревне Притыцкая Даровского района Кировской области в семье крестьянина. В 1943 году с отличием окончила Красносельскую школу. Сразу после её окончания в течение года работала в Госбанке Опаринского района Кировской области, сначала учеником, потом кассиром и затем старшим кассиром. В 1944 году поступила без экзаменов в Пермский (тогда Молотовский) государственный университет на физико-математический факультет. По окончании 2-го курса способная студентка стала Молотовским стипендиатом. Жизнь пермских студентов в то время была нелёгкой, голодной. Выручали редкие посылки из дома, на которые покушались многочисленные стаи крыс, ведь общежитие было неблагоустроенным.

После окончания университета в 1949 году Анна Ивановна была направлена учителем математики в г. Осу. Этот город, расположенный на левом берегу Камы в середине её течения, – один из старейших городов Прикамья (основан в XVI веке), известный купеческий и торговый центр Пермской губернии.

Город был свидетелем многих событий истории и культуры, но после Первой мировой войны и революции, без развитой промышленности и в стороне от железнодорожных магистралей, он потерял свою значимость. Открытие нефтяных месторождений неподалеку и строительство серии водохранилищ на Каме и Волге хотя и дали новый экономический импульс развитию города, но всё же оставили Осу одним из сотен российских районных центров.

До революции Оса располагала несколькими начальными школами, женскими прогимназией и гимназией, реальным училищем. В 1922 году здание женской гимназии занял педагогический техникум, ставший в 1938 году Осинским педагогическим училищем.

Осинское педагогическое училище

Педагогическое училище готовило учителей начальных классов, распределявшихся в первую очередь в деревни района и области, зачастую затерянные, и в те годы без регулярной связи даже с Осой (ясно, что это было определённое самопожертвование – судьбы многих из этих совсем молодых людей складывались далеко не радужно). Наличие этого училища с его «базовой» начальной школой создавало замечательное окружение для молодых учителей – энтузиастов в послевоенное время.

До экономического «нефтяного» подъёма в 60-е годы и интенсивного роста Осы город довольствовался единственной средней школой, располагавшейся в здании бывшей земской управы. В этой школе Анна Ивановна и проработала 25 лет до выхода на пенсию по состоянию здоровья.

Осинская средняя школа № 1

За годы работы Анна Ивановна дала тысячам учеников не только прочные знания в области математики, но и жизненный урок трудолюбия, самопожертвования любимому делу, порядочности. Многие выпускники талантливого учителя добились успеха, среди них есть и её последователи – учителя математики в родном городе и за его пределами. Многие нашли себя в различных областях математики и в смежных с ней науках, работая в Пермском политехническом университете, Пермском государственном университете, в Уральском политехническом университете, в Военно-Воздушной инженерной Академии им. В.А. Жуковского, в университете Страсбурга. Среди учеников Анны Ивановны есть медицинские работники, служащие банков, военные, руководители крупных заводов и предприятий. Навещая родной город, благодарные ученики поддерживали связь с любимым учителем.

Глубокие знания по математике, высочайшее педагогическое мастерство, большой объём внеклассной работы – всё это позволило Анне Ивановне добиться значительных успехов в работе. Она щедро делилась опытом с коллегами, оказала неоценимую помощь молодым, начинающим коллегам, в том числе Н.А. Румянцеву, В.Н. Русанову (который известен достаточно широкому кругу отечественных читателей как автор нескольких книг с задачами школьных математических олимпиад), А.Н. Чернявской, Е.К. Сапрыкиной, А.П. Гусеву.

А.И. Соколова

Как учитель, руководитель школьной, а затем и районной секции учителей математики, Анна Ивановна многое сделала для развития внеклассного математического образования. С 1957/58 учебного года она принимала активное участие в проведении математических олимпиад. Ученики Анны Ивановны занимали призовые места на районных и областных турах этих олимпиад. Усилиями А.И. Соколовой и её коллег, в первую очередь В.Н. Русанова и Н.А. Румянцева, под Осой в течение многих летних каникул открывался палаточный математический лагерь для учащихся старших классов. Анна Ивановна успешно организовывала школьные математические вечера, КВНы, выпуски стенных математических газет и альбомов об учёных-математиках, выступала с сообщениями о методах своей работы в районе и в области.

С 1965 года А.И. Соколова вела классы с углублённым изучением математики, в том числе в городской физико-математической школе. Под руководством талантливого учителя старшеклассники проводили занятия математических кружков в начальных классах. Её учащиеся впервые в районе стали учениками Заочной математической школы при Московском государственном университете и Физико-математической школы-интерната № 18 при МГУ.

В 1968 году А.И. Соколова была делегатом Всесоюзного съезда учителей в Москве. На предшествующем ему областном съезде учителей она выступила с докладом, в котором обобщила опыт своей работы.

За свой труд Анна Ивановна награждена нагрудным знаком «Отличник народного просвещения», многочисленными грамотами, в том числе «Почётной Грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР», медалями «Ветеран труда», «50 лет Победы в Великой Отечественной войне».

Но мы уверены, что самой главной наградой Анны Ивановны стали признание, любовь её учеников и их благодарная память. Наверное, не так важны какие-либо цифры типа «процент учеников А.И. Соколовой, поступивших в вузы», а важны сотни и тысячи людей, в судьбе которых она приняла участие.

У авторов сохранилось немало личных воспоминаний, которые сложно поместить в эту заметку. Мы ограничимся лишь совсем короткими фразами. А.Н. Румянцев: «Я благодарен Анне Ивановне за то, что она материализовала мой неосознанный интерес к математике; это дало мне возможность много лет с истинным удовольствием заниматься математическими исследованиями». А.Г. Уржумцев: «Среди многих моих учителей, которых мне повезло встретить, именно благодаря Анне Ивановне определилась моя профессия и, тем самым, очень многое в моей жизни».

Примечание. Фотографии Осинского педагогического училища и Осинской средней школы № 1 сделаны А.В. Иваньковым.

Вернуться к содержанию

Конспект семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната «Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На двенадцатом заседании семинара (22.12.2009) ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Замечательные точки треугольника и кубические кривые»**.

Тема оказалась на стыке «детской» и «взрослой» математики (соответственно, геометрия треугольника и эллиптические кривые).

Введём понятие изогонального сопряжения двумя способами. Предварительно зафиксируем треугольник.

Определение 1. Возьмём произвольную точку A внутри треугольника. Проведём через неё чевианы и отразим их относительно соответствующих биссектрис. Новые лучи пересекутся в одной точке B. Эту точку назовём *изогонально сопряжённой* точке A (рис. 1).

Определение 2. Возьмём произвольную точку A внутри треугольника. Опустим из неё перпендикуляры на стороны. Проведём описанную окружность полученного треугольника. Она пересечёт стороны исходного треугольника ещё в трёх точках (в случае касания – в тех же). Восстановим в них перпендикуляры. Они пересекутся в одной точке B. Эту точку назовём *изогонально сопряжённой* точке A (рис. 2).

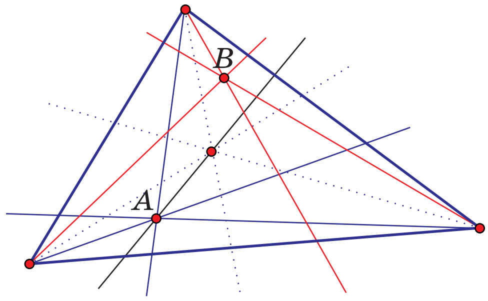


Рис. 1.

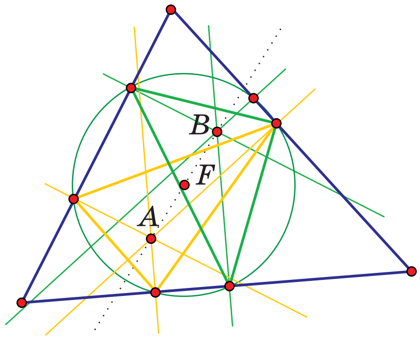


Рис. 2.

Упражнение 1. Докажите корректность и эквивалентность определений.

Упражнение 2. Какая точка будет изогонально сопряжена точке *B*?

Упражнение 3. Что дадут определения, если точка *A* окажется вне треугольника?

Замечание. С точки зрения «взрослой» математики изогональное сопряжение – это квадратичное преобразование плоскости.

Зафиксируем в плоскости треугольника точку *F* («центр вращения»). *Отметим все точки A, изогонально сопряжённые к которым точки B лежат на прямой FA.*

Утверждение. Получится кубическая кривая *C*.

Факт. Если в качестве центра вращения *F* выбрать замечательную точку треугольника, то на кривой *C* тоже будет лежать много замечательных точек.

Примеры.

1. Кубика Томсона. Центр вращения *F* – точка пересечения медиан. Кривая *C* проходит через ортоцентр, центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

2. Кубика Дарбу. Центр вращения *F* – точка, симметричная ортоцентру относительно центра описанной окружности. Кривая *C* проходит через ортоцентр и центр описанной окружности.

(Подробности и доказательства см.: *Прасолов В.В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. – М.: Фазис, 1997. Глава 21.)

В последние годы открыто множество замечательных точек треугольника (всего более 3000). Существуют общества их любителей, сайты, каталоги и т.д. Мы предлагаем свой подход к их классификации, объединяющий «взрослую» и «детскую» математику, – по кубическим кривым.

Проект (коллективный). Создать каталог замечательных точек, расклассифицировав их по кубическим кривым.

К сожалению, построение кубических кривых затруднительно в программе «Живая геометрия», так как она создана не для этого. Зато такое построение нетрудно реализовать, скажем, в Maple (записав аналитически лучи, симметричные относительно биссектрис), однако эти «взрослые» программы не приспособлены для работы с треугольниками.

Также на двенадцатом семинаре прозвучали два доклада школьников. **Василий Болбачан** (г. Ставрополь, школа № 6, 9 класс) сделал доклад «Короткое элементарное доказательство формулы Гийера-Сондова». История этой удивительной работы такова. Вася учится в обычной школе. Заинтересовавшись высшей математикой, он купил справочник, в котором формулы приведены без доказательств. Узнав о степенных и тригонометрических рядах, он подумал, почему бы не быть логарифмическим рядам, стал пробовать, и пришёл к формуле

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}C^k{}_m\frac{(-1)^{k+1}}{m}\ln(ku+1).$$

Сначала это была только догадка, потом Вася получил длинное доказательство формулы, затем смог упростить его. Короткое доказательство было послано на Московскую математическую конференцию школьников (ММКШ) и рассмотрено А.Б. Скопенковым. Оказалось, что формула была получена в последние годы Гийером и Сондовым (J. Guillera, Spain, and J. Sondow, USA – специалисты по теории чисел), однако неэлементарными средствами. Сам Сондов счёл доказательство Василия новым и поздравил его с успехом. В результате Василий получил Научную премию конференции ММКШ (второй раз в истории конференции). Текст работы В. Болбачана (на английском языке) можно найти по ссылке http://arxiv.org/pdf/0910.4048v1.

Прямо во время доклада Г.Б. Шабат проверил формулу в программе Maple, взяв около 30 слагаемых. Сходимость получилась плохая, и Г.Б. усомнился, действительно ли ряд сходится. Василий на это ответил, что биномиальные коэффициенты при таких значениях индексов очень большие, и ошибки округления в Maple быстро накапливаются. И в самом деле, после повышения точности вычислений сумма стала сходиться гораздо лучше.

Вторым был доклад одиннадцатиклассника **Андрея Блинова** (г. Москва, школа-интернат «Интеллектуал», 11 класс, руководитель Я.И. Абрамсон) «Критерий выпуклости». Замечательно, что Андрей также сам является автором задачи. Легко доказать, что если на плоскости есть выпуклое замкнутое множество, то расстояние от произвольной точки плоскости до него достигает минимума в одной и только в одной точке множества. Андрей поставил обратную задачу: известно, что для любой точки вне замкнутого множества расстояние до точек множества достигает минимума в единственной точке; верно ли, что множество выпуклое? Задача была им полностью решена, правда, по ходу изложения слушатели выловили некоторые неточности, которые Андрей потом устранил. Как потом выяснили участники семинара, задача также оказалась уже решена (и даже для произвольной размерности n), однако более «тяжёлыми» средствами. Ответ положительный (в гильбертовых же пространствах вопрос остаётся открытым).

Участники семинара желают успехов Василию и Андрею на математическом поприще и в жизни.

На тринадцатом (19.01.2010), четырнадцатом и пятнадцатом заседаниях семинара ***Г.Б. Шабат*** сделал доклады на тему «Комбинаторика».

I. Комбинаторика и её привлекательность для начинающих математиков.

1. Прямые задачи комбинаторики отвечают на вопрос «*сколько*?»

Детская задача: найти количество подмножеств в пятиэлементном множестве (5 удобно потому, что можно загибать пальцы). Для решения этой задачи нужно ввести порядок на множестве и уметь сравнивать ответы.

Взрослый пример: та же задача для n-элементного множества.

2. Обратные задачи комбинаторики (термин А.К. Звонкина)

Пусть в прямой задаче 1 и в прямой задаче 2 оказались одинаковые ответы. Задача: построить биекцию между перечисляемыми объектами.

Примеры.

А. Разные определения чисел Каталана.

Б. Количество прямоугольников в клетчатом квадрате $n \times n$ равно количеству кубиков в решётчатом кубе $n \times n \times n$.

В. (Эйлер). *Разбиением* натурального числа n назовём его представление в виде суммы невозрастающих натуральных чисел: $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, где $x_i \in N$, $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$.

Выделим среди всех разбиений числа n два подвида:

Нечестные: $x_1 > x_2 > \ldots$. Обозначим их число Uneven (n).

Нечётные: x_i, $i_n = 2N + 1$. Обозначим их число Odd (n).

Эйлер открыл, что Uneven (n) = Odd (n).

Интересно было бы *доказать этот факт, построив биекцию между нечётными и нечестными разбиениями*.

Задача доступна и младшим школьникам: сколькими способами кучу из n шишек можно разложить на меньшие кучки? (Формулировка А.К. Звонкина, Г.Б. Шабата для летней школы в Переславле, 1990.)

3. Производящие функции

Пусть c_0, c_1, c_2, ... – количества перечисляемых объектов в «серийной» задаче.

Факт. *Для огромного количества глубоких задач комбинаторики оказывается, что*

$$f(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

– замечательная функция.

Пример. Сколько есть k-элементных подмножеств в n-элементном множестве? Обозначив искомое количество через $\binom{n}{k}$, имеем: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

Более сложный пример. Найти комбинаторный смысл производящей функции

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y = \sum c_k(y) x^k.$$

Интересно и вычисление производящей функции по данным числам c_0, c_1, c_2, ... и, наоборот, нахождение чисел c_0, c_1, c_2, ... по данной производящей функции.

4. Асимптотическая комбинаторика

Если ответ в задаче сложный и плохо вычисляется, то изучить *тенденцию роста* часто легче. (Особенно активно этим пользуются в статистической физике.)

Пример. Формула Стирлинга приближённо выражает факториал числа:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(т.е. отношение левой части равенства к правой стремится к 1 при $n \to \infty$).

Удивительно, что для выражения произведения целых чисел понадобились два трансцендентных числа – π и e.

Реально получить красивые асимптотические формулы в следующей задаче:

Проект. Сколько существует трёхвалентных графов?

Трёхвалентным называется граф, у которого из каждой вершины выходит три ребра или полуребра.

Исходные трёхвалентные графы изображены на рис. 3.

Известны три операции получения нового трёхвалентного графа из имеющегося:

1) пристыковка «сковородки» к ребру;
2) вставка перемычки между двумя рёбрами;
3) вставка двух рёбер внутрь имеющегося.

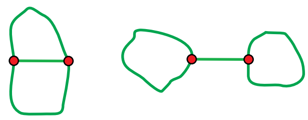


Рис. 3. «Тета» и «очки»

Теорема. Применяя к «тете» и «очкам» эти операции, можно получить все трёхвалентные графы.

Это даёт алгоритм, генерирующий список всех графов (без пропусков, но с повторениями). Отсюда можно получить оценки на количество таких графов. Интересно уточнить эти оценки, придумывая процедуры, сокращающие повторы. Для этого надо ввести процедуры сравнения.

II. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля – единственный известный докладчику математический объект, который может увлечь и младшеклассника, и студента-гуманитария.

Когда мы работаем с комбинаторикой, то плодотворный подход – дать много определений одного объекта.

Введём пять определений биномиальных коэффициентов.

1) $\binom{n}{k} := \#\,\{k$-элементных подмножеств n-элементного множества$\}$.

2) Определение через производящие функции:

$$(1+x)^n =: \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

3) Индуктивное определение:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{k}:=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k},\ \text{где } 0<k<n.$$

4) Определение явной формулой:

$$\binom{n}{k}:=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5) Определение через протоколы (записи испытаний Бернулли):

$$\binom{n}{k} := \{\textit{протоколы}(\omega_1,\ldots,\omega_n) \mid \#\,\textit{успехов} = k\}, \text{ где } \omega_i \in \{\textit{успех}, \textit{неудача}\}.$$

Зачем много определений?

Логическая экономия: вместо десяти равносильностей хватит пяти.

Можно выбирать наиболее лёгкий «маршрут» доказательства. В нашем случае, например: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 3$, $2 \Leftrightarrow 5$, $1 \Leftrightarrow 5$.

Разные свойства очевидны из разных определений. Например, из определения 1) следует, что $\binom{n}{k}$ – натуральное.

Разные определения провоцируют разные обобщения. Так, определение 2) подсказывает, что надо рассмотреть производящую функцию $(1+x+y)^n$. Определение 4) – рассмотреть выражения вида $\dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$. Определение 5) – рассмотреть вместо испытаний Бернулли испытания с тремя, четырьмя и т.д. исходами.

III. Числа Каталана

n	0	1	2	3	4	5	...
c_n	1	1	2	5	14	42	...

Рекурсивное определение:

$$c_0 = 1,$$
$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0. \qquad (*)$$

Для гуманитариев понятнее так:

$$1\cdot 1 = 1$$
$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$
$$1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5 \text{ и т.д.}$$

Введём *категории Каталана* – систему множеств C_0, C_1, ...:

$$\#\, C_0 = 1,$$
$$C_{n+1} \cong (C_0 \times C_n) \amalg (C_1 \times C_{n-1}) \amalg \ldots \amalg (C_n \times C_0).$$

Здесь $\amalg$ – копроизведение, а $\cong$ – взаимное соответствие.

Примеры.

1. Скобочные «слова»

$C_0 = \{\,\}$ – пустое скобочное слово.

Определим сцепление скобочных слов: U + V := (U)V.

Каждое новое скобочное слово получается сцеплением уже имеющихся.

Упражнение. Определить, какой набор правил описывает правильные скобочные слова. (*Ответ*: 1. В слове количество открывающихся скобок *равно* количеству закрывающихся. 2. В любой части слова от начала до текущего положения количество открывающихся скобок *не меньше* количества закрывающихся.)

$C_n = \{$«слова» длины $2n\}$.

Интересно сравнить операцию сцепления со сложением:

• нет коммутативности,

зато

• есть однозначная расцепляемость!

2. Триангуляция многоугольников

C_n = «триангуляция ($n + 2$)-угольника»

У треугольника выделена одна сторона и есть триангуляция (что равносильно занумерованности вершин).

Определим сцепление триангуляций (рис. 5). Они также расцепляемы (проверьте!).

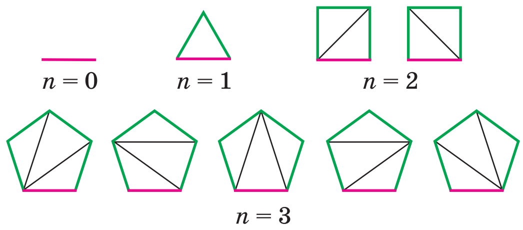


Рис. 4. Триангуляции многоугольников

Упражнение (связь 1 и 2)**.** Постройте взаимно однозначное соответствие между скобочными словами и триангуляциями (используйте однозначную расцепляемость тех и других).

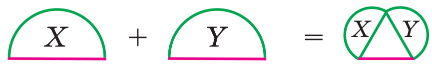


Рис. 5. Сцепление триангуляций

3. Плоские корневые деревья

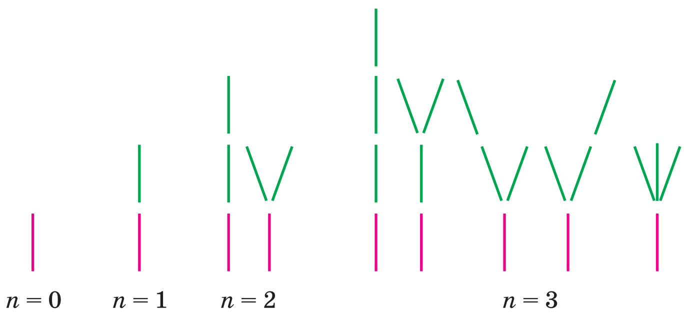


Рис. 6. Плоские корневые деревья

Упражнение (связь 1 и 3). Пусть плоское корневое дерево нарисовано на школьной доске, и его против часовой стрелки, начиная с корня, обползает учёная муха. Около доски стоит школьник с мелом и, глядя на движущуюся муху, пишет последовательность из открывающихся и закрывающихся скобок: когда муха ползёт вдоль ребра первый раз, школьник ставит открывающуюся скобку, а когда второй раз – закрывающуюся. Докажите, что, когда муха доползёт обратно до корня, школьник напишет правильное скобочное слово.

Научитесь по правильному скобочному слову рисовать плоское корневое дерево.

Факт. Во всех известных Г.Б. Шабату категориях Каталана на C_n действуют инволюции (т.е. преобразования, двукратное применение которых даёт тождественное). Например, в триангуляциях и скобочных словах это – осевая симметрия. Но часто они не соответствуют друг другу!

Проект. Изучить наборы инволюций в категориях Каталана (порядки групп и т.д.).

4. Производящая функция $C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$. Нетрудно проверить, что (*) эквивалентна тому, что

$$xC^2 - C + 1 = 0 \Rightarrow C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Разлагая полученную функцию в ряд, будем узнавать коэффициенты – числа Каталана.

Заметим, что

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2},\ \frac{c_2}{c_1} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3},\ \frac{c_3}{c_2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4},\ \ldots\ \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4n+2}{n+2}.$$

Последнюю формулу можно доказать наглядно.

Упражнение. Составьте таблицы триангуляций с отмеченной невыделенной стороной и с отмеченным направленным ребром (рис. 7). Сделайте вывод.

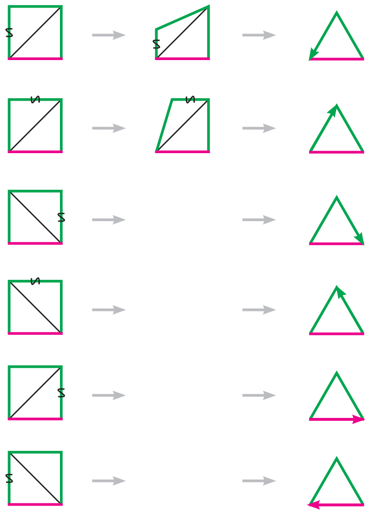


Рис. 7.

На тринадцатом заседании семинара (19.01.2010) ***Андрей Валентинович Зязин*** сделал доклад на тему **«История криптографии как источник исследовательских задач для школьников».**

Вначале докладчик перечислил конкурсы, связанные с криптографией:

• Олимпиада по математике и криптографии (проведено уже 20), 8–11 класс, участвуют 18 субъектов Федерации;

• Заочный конкурс по математике и криптографии (6–11 класс);

• Конкурс проектов по истории криптографии для старшеклассников (рефераты, математические работы, программистские работы).

Есть задачи, которые на олимпиаду не очень годятся, потому что требуют долгого осмысления. Из них можно сделать исследовательские задачи.

Примеры.

Задача 1. Дан зашифрованный текст (простая замена – сдвиг каждой буквы текста на одно и то же число букв по алфавиту), надо найти в нём слово “подъезд”».

В задаче возможны постепенные продвижения. Приведём этапы решения задачи с критериями оценки:

1) найти два одинаковых символа на расстоянии в три буквы (таких мест 7) [–+]

2) отобрать те, в которых остальные буквы не повторяются (их 4) [+–]

3) подставить узнанные буквы в остальной текст и отсеять бессмыслицу (останется 1) [+]

4) использовать частоты употребления букв [+!]

Заметим, что частота появления символов является инвариантом простой замены. С этим борются, вставляя пустышки из 2–3 символов.

Частое слово можно заменять одним символом, это же делают стенографистки и архиваторы.

Задача 2 (диск Альберти). Для зашифрования текста использовался вращающийся диск, центр которого находится на оси, закреплённой на неподвижном основании. Диск разделен на 32 равных сектора, в которые в неизвестном порядке вписаны все буквы русского алфавита (по одной в каждый сектор; буквы Е и Ё не различаются). На основании, по одной напротив каждого сектора, выписаны буквы в алфавитном порядке по часовой стрелке. Каждое положение диска, получающееся из исходного поворотом на угол, кратный величине сектора, задает соответствие между буквами на основании и на диске. При зашифровании очередной буквы текста её заменяли соответствующей ей буквой при текущем положении диска, после чего диск поворачивался на один сектор по часовой стрелке.

Вопросы:

1. Как крутить, чтобы шифр был устойчивым?

2. Запрограммируйте диск Альберти.

3. Какой шифр лучше: вначале простая замена, потом диск Альберти или наоборот? (С точки зрения математики здесь надо изучить группы подстановок.)

Энигма – знаменитая немецкая шифровальная машина времён Второй мировой войны – сделана из композиции трёх дисков Альберти. Первый компьютер создан ради чтения шифра энигмы.

Среди нескольких вариантов расшифровки человек сразу отличает нормальный текст от «абракадабры». Интересно научить делать это компьютер.

Особенности криптографии как источника исследовательских тем:

• тема может уйти в историю, в программирование, в математику;

• есть ясная для школьника практическая мотивация (современная экономика держится на шифрованных электронных переводах денег, спам-фильтры и т.д.).

Математические идеи, которые понадобятся школьникам для работы:

• подстановки;

• вероятность;

• комбинаторика;

• сложность / оптимизация алгоритмов.

Материалы по криптографии можно найти на сайте http://cryptolymp.ru/ и в книжке: *Зубов А.Ю.* Олимпиады по криптографии и математике. М.: МЦНМО, 2006.

На пятнадцатом заседании семинара (16.03.2010) ***А.Б. Скопенков*** сделал доклад на тему **«Летние конференции Турнира городов»** (о них см.: сайт http://www.turgor.ru/lktg и книгу «Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы». Выпуск 1. М.: МЦНМО, 2009).

Особенности летних конференций:

• отбор участников по итогам олимпиад высокого уровня;

• мотивировка: школьники приходят к теоремам естественным путём – решая задачи;

• проверка: жюри серьёзно читает письменные решения, возможна доработка решений по советам жюри;

• свобода: выбор из 5–6 задач, нерегламентированные занятия;

• продолжение темы после конференции – единичные случаи.

Набираются 50–80 человек после 9-го и 10-го классов. Длительность конференций около недели.

Задачи:
• учебные (не новые, но малоизвестные):
• классическая геометрия;
• комбинаторика;
• теория групп, теория чисел;
• комбинаторная геометрия;
• алгебра (реже).

Примеры задач.

1. Сложность суммирования

(http://olympiads.mccme.ru/lktg/2003/summ.ru/index.htm).

За одну копейку автомат вычисляет сумму двух чисел. За какую минимальную сумму он вычислит:

1. $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$;
2. $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$ и $x_{50} + x_{51} + \ldots + x_{150}$;
3. …

…

$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}x_n$, где $i = 1, \ldots, m$?

Результаты. Обозначим через $L(m, n)$ наименьшую сумму, за которую автомат при любых коэффициентах a_{ij} гарантированно вычислит $y_1, \ldots, y_m$. Тогда

$$\frac{c_1 n^2}{\log_2 n} < L(n,n) < \frac{c_2 n^2}{\log_2 n}.$$

Левое неравенство строится из мощностных соображений, а правое – конструированием явной схемы.

2. Плетение корзинок (http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm)

Изобразим несколько прямых так, чтобы было видно – одна проходит над другой или под другой. Тогда некоторые картинки реализуются, а другие – нет.

Простейший пример нереализующейся картинки – с 4 прямыми.

Теорема 1. Существует бесконечное семейство нереализуемых картинок, все подкартинки каждой из которых реализуемы.

Изотопией назовём сдвиг прямых, при котором не возникают пересечения прямых по три и который не переносит прямую за «точку встречи» двух других.

Теорема 2. Реализуемость неинвариантна относительно изотопии (есть пример с 6 прямыми).

Вариант задачи. Даны горизонтальные и вертикальные прямые. Каждая точка встречи прямых описывается 0 (горизонтальная выше) или 1 (вертикальная выше). Как по матрице пересечений проверить реализуемость картинки?

Вернуться к содержанию

Информация

Всероссийский съезд учителей математики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова возрождает традиции проведения Всероссийских съездов учителей-предметников. В ближайшие годы в стенах МГУ пройдут съезды школьных учителей математики, физики, химии, биологии, географии, русского языка и литературы, истории, информатики, обществознания и иностранных языков.

28–30 октября 2010 года в МГУ состоится Всероссийский съезд учителей математики, на котором пройдёт широкое обсуждение состояния и перспектив развития школьного математического образования в контексте основных принципов Национальной образовательной инициативы «Наша новая школа».

На Съезд приглашаются:

- учителя математики общеобразовательных школ;
- специалисты по педагогике и методике преподавания математики;
- руководители образовательных учреждений;
- представители органов управления образованием;
- учителя информатики, физики и других дисциплин естественнонаучного цикла.

Работа Съезда организована в виде тематических секций и круглых столов, посвящённых различным аспектам современного математического образования. Список секций будет определён после 1 июня 2010 года.

Для участия в работе Съезда **с докладом** необходимо в период с 1 июня 2010 года по 1 августа 2010 года подать заявку с тезисами выступления в Программный комитет Съезда. Требования к тезисам будут определены после 1 июня 2010 года. Решение об участии в работе Съезда с докладом на одной из секций принимает Программный комитет Съезда по результатам рассмотрения поданной заявки.

Для участия в работе Съезда **без доклада** необходимо в период с 1 мая 2010 года по 1 сентября 2010 года подать заявку в Организационный комитет Съезда.

Формы заявок и вся дополнительная информация размещается на официальном web-сайте Съезда по адресу http://math-congress-2010.msu.ru

Организационный комитет Съезда