International Scientific Journal

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Volume 20

Simferopol, 2010

UDC 517+515

International Scientific Journal
Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. /Group of authors. –
Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of mathematical and physical specialities.

Please visit our site in the Internet: www.kromsh.info

МОЙ ДОРОГОЙ УЧИТЕЛЬ АНАТОЛИЙ ДМИТРИЕВИЧ МЫШКИС (к 90-летию со дня рождения)[1]

Н.Д. Копачевский

Умирают мои старики,
Мои боги, мои педагоги,
Пролагатели торной дороги,
Где шаги мои были легки.

Угасают большие огни
И гореть за себя поручают.
Орденов не дождались они,
Сразу памятники получают.

1. Дохарьковский период

1.1. **Детство и школьные годы.** Анатолий Дмитриевич Мышкис был выдающимся математиком-теоретиком и математиком-прикладником, а также замечательным педагогом. В конце своей жизни он написал, учитывая просьбы коллег и друзей, книгу воспоминаний [1]. Первая глава этой книги посвящена собственно биографии А.Д., а вторая — описанию встреч, научных и дружеских контактов со многими известными математиками и физиками. Поскольку я был знаком с А.Д. Мышкисом лишь с сентября 1957 г., то некоторые сведения о жизни А.Д. здесь будут изложены на базе его книги [1].

А.Д. Мышкис родился 13 апреля 1920 г. в городе Спасске Рязанской области. Его отец Дмитрий Семенович Ермаков — выходец из села Дегтяного Спасского уезда Рязанской губернии, а мать Хая Самуиловна Мышкис — из г. Оргеева в Бессарабской губернии. Паспорт А.Д. получил на фамилию матери, поскольку в его свидетельстве о рождении отец не числился (родители А.Д. всю жизнь прожили вместе, но брак не регистрировали).

Его дед прибыл в Бессарабию из Литвы; по-литовски "мишке" — лес, так что фамилию Мышкис, как пишет в [1] А.Д., можно условно перевести как "Лесков" и хотя бы этим соприкоснуться с выдающимся писателем.

В возрасте полутора лет родители А.Д. переехали в Харьков, где затем и жили до осени 1932 г. Его отец окончил всего два класса школы, был рабочим на Путиловском заводе, ранен на I мировой войне. С марта 1917 г. он долгие годы работал на различных партийных должностях. Мать А.Д. была более образованной, она неплохо знала немецкий и французский языки, а с 1919 г. стала членом РКП(б) и затем работала в Комиссии по истории компартии Украины, преподавала в школе Коминтерна.

С детства А.Д. пристрастился к вычислениям. Однажды, в частности, он решил досчитать до миллиона, но, затратив несколько дней, дошел до ста тысяч и бросил. Еще в школе он увлекался астрономией, затем химией и даже дома ставил химические опыты. Отсюда, как пишет А.Д. в [1], зародилось его пристрастие к приложениям математики.

В 1932 г. отца А.Д. перевели на работу в Москву, где он затем стал работать в ЦК ВКП(б). Вслед за ним в Москву переехала и вся семья. С сентября 1932 г. А.Д. начал учиться в шестом классе лесной школы-интерната в Сокольниках,

---

[1] Данная статья была опубликована ранее в журнале “Математический анализ и геометрия”

где учились также родственники (племянники) Г.И. Петровского, С.В. Косиора и других партийных деятелей. В сентябре 1933 г. А.Д. приняли в 7 класс знаменитой в то время 25-й образцовой школы г. Москвы. В этой школе в разное время учились, в частности, Василий и Светлана Сталины, Светлана Молотова, дочь В.В. Куйбышева, Коля Луначарский (племянник А.В. Луначарского) и другие.

В частности, с сентября 1935 г. А.Д. учился в одном классе с Л. Овсянниковым (впоследствии академиком), а также с Т. Шнейдером. Как пишет А.Д. в своих воспоминаниях, эти трое (вместе с А.Д.) существенно превосходили всех остальных учеников класса по математическим способностям. На уроках по математике их почти не вызывали и "автоматом" ставили пятерки в четверти.

Весьма важным событием в школьной жизни А.Д. несколько позже стало следующее обстоятельство: на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова решили заниматься со школьниками. Первое занятие школьного математического кружка, куда А.Д. пришел вместе с друзьями, проводил тогда совсем еще молодой И.М. Гельфанд. С этого момента И.М. Гельфанд, по сути, стал наставником молодого А.Д.

Летом после 8-го класса А.Д. познакомился с простыми понятиями высшей математики (как пишет А.Д., вероятно, по пятитомнику В.И. Смирнова). Обладая предварительной подготовкой, в последних классах он учился, не затрачивая больших усилий.

1.2. **Учеба на мехмате МГУ.** Все трое школьных друзей получили аттестаты отличников и потому поступили на мехмат МГУ без экзаменов. Здесь снова, кроме других выдающихся математиков и педагогов, А.Д. встретился с И.М. Гельфандом, который проводил практические занятия по математическому анализу. Как пишет А.Д. в [1], начиная со 2-го и до конца 4-го курса он перешел как бы под персональную опеку И.М. Гельфанда. (Отметим, что А.Д. считает своими учителями трех выдающихся ученых: И.М. Гельфанда, И.Г. Петровского и физика-теоретика Я.Б. Зельдовича).

Первое время А.Д. добросовестно ходил на все лекции и старательно их конспектировал. Однако это продолжалось не более одного семестра: ему показалось более полезным читать учебники, так как там изложение было более глубоким и доказательства можно было разобрать не спеша.

На втором курсе лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) читал И.Г. Петровский. На третьем курсе уравнения математической физики (УМФ) читал С.Л. Соболев, а практические занятия вел И.Г. Петровский. В дальнейшем А.Д. слушал курсы лекций по ТФКП (лектор И.И. Привалов), по теории вероятностей (А.Н. Колмогоров), по основам функционального анализа (И.М. Гельфанд) и по другим предметам.

Впрочем, А.Д., верный своей методе, по большинству курсов лекций почти не слушал, а читал учебники и другие книги. При этом А.Д. математикой занимался все свободное время. Помимо математики А.Д. занимался также музыкой. В частности, ежедневные упражнения на скрипке у него занимали в среднем 3 часа в день.

Первое знакомство с И.Г. Петровским состоялось уже на втором курсе. Он прочитал рукопись лекций И.Г. Петровского по теории ОДУ, которая затем легла в основу известного учебника И.Г. При этом, как пишет А.Д. в [1], он обнаружил три неточности в рукописи и сообщил свои соображения И.Г., который быстро согласился с ними. Следующим летом этот курс лекций вышел из печати, и в предисловии автор выразил благодарность В.А. Степанову, С.А. Гальперну, а также

А.Д. Мышкису. На А.Д., начинающего студента, это уважительное отношение сильно подействовало.

1.3. **Война. Работа и учеба в ВВИА.** Война началась, когда А.Д. окончил 4-й курс МГУ. Студентов, как и многих других, отправили в Подмосковье на рытье противотанковых рвов. В начале сентября 1941 г., когда фронт подошел совсем близко к Москве, студентов, окончивших 4-й курс, вернули в Москву и объявили, что их отправляют в Свердловск учиться в Военно–воздушной инженерной академии имени Н.Е. Жуковского (ВВИА).

А.Д. Мышкису удалось сдать экстерном экзамены в МГУ за 5-й курс и получить диплом об окончании университета, и началась трехгодичная учеба в ВВИА на факультете авиационного вооружения (ФАВ). Сначала было особенно тяжело: интенсивное обучение, холод, голод, физическая и строевая подготовки. Все это приводило к усталости и некоторому отупению. Как пишет А.Д., в то время в среде обучающихся в ВВИА ходила злая шутка: "Мое образование — четыре года университета минус три года академии".

В сентябре 1942 г. А.Д. снова встретился с И.М. Гельфандом в Свердловске (куда из Ашхабада переехал мехмат МГУ) и, посоветовавшись с ним, решил поступить в аспирантуру к И.Г. Петровскому.

Темой дипломного проекта в ВВИА у А.Д. было "Стрелково–пушечное вооружение многоцелевого самолета типа ТУ–2", по кафедре воздушной стрельбы. В этой работе при выборе схемы размещения вооружения А.Д. взял в качестве критерия максимизацию вероятности поражения нападающего противника; в последующие годы этот критерий нашел широкое применение. А.Д. окончил ВВИА, получив диплом с отличием.

После этого он начал работать младшим преподавателем кафедры высшей математики ВВИА, где проработал три года. Здесь А.Д. часто общался с преподавателями инженерных кафедр, и это его активно приобщало к прикладному образу мышления.

1.4. **Преподавание на мехмате МГУ, жизнь в Риге и Минске.** Через год после окончания ВВИА А.Д. начал работать также на полставки на кафедре дифференциальных уравнений мехмата МГУ. Здесь работали такие известные математики, как В.В. Степанов (заведующий), В.В. Немыцкий, И.Г. Петровский и С.Л. Соболев. В обязанности А.Д. входили практические занятия по курсам ОДУ и уравнениям математической физики (УМФ).

В группе, которую А.Д. вел по УМФ, учились, в частности, О.А. Ладыженская и О.А. Олейник, впоследствии выдающиеся женщины–математики, академики АН СССР.

В это же время появились первые научные публикации А.Д., причем, что характерно для всего научного творчества А.Д., порой не только темы, но и области науки резко сменялись: это были работы по ОДУ, уравнениям с частными производными (УсЧП), по теории устойчивости и др. В июне 1946 г. А.Д. защитил кандидатскую диссертацию по так называемой видоизмененной задаче Дирихле для уравнения Лапласа в n-мерной области общего вида (научн. рук. И.Г. Петровский). Всего в этот период А.Д. опубликовал 10 научных работ, причем за обзорную статью в журнале "Успехи математических наук" (УМН) в 1948 г. он был удостоен премии Московского математического общества (ММО).

Весьма существенную роль в жизни А.Д. в это время и далее сыграли научные семинары на мехмате по дифференциальным уравнениям, а также по уравнениям с частными производными. В этих семинарах принимали участие и были лидерами

В.В. Степанов, И.Г. Петровский, А.Н. Тихонов, И.Н. Векуа, Л.А. Люстерник, а позже — О.А. Ладыженская, О.А. Олейник, М.И. Вишик и другие.

Как пишет А.Д. в [1], знаменитая международная конференция "Семинар имени И.Г. Петровского" возникла, по-видимому, из семинара по УсЧП. А.Д. отмечает, что этот период — один из самых ярких в жизни.

Большая учебная нагрузка в ВВИА привели А.Д. к мысли о смене места работы. Это привело к тому, что в июле 1947 г. Управление кадров ВВС предложило А.Д. поехать в Ригу на должность преподавателя кафедры высшей математики II ЛКВАИВУ (авиационное инженерное военное училище). Позже А.Д. стал и.о. начальника этой кафедры, а также работал на полставки в Латвийском госуниверситете (ЛаГУ). Продолжая здесь активно заниматься математикой, он познакомился, в частности, с трудами П. Боля. В итоге появилась книга [2], в которой были отражены не только серьезные достижения П. Боля, но и его шахматные успехи, обзор которых сделал экс-чемпион мира по шахматам М.М. Ботвинник.

В Риге по образцу семинаров мехмата МГУ начал работать учебно–научный семинар под руководством А.Д. В этот период он познакомился с возникшим на практике дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Такие уравнения, как потом стало ясно, появляются в теории управления, биологии, экономике, медицине и т.д., однако систематически до сих пор не изучались. Перед А.Д. открылось чистое поле для работы, и результаты, как пишет А.Д., посыпались как из ведра.

В 1949 г. в УМН вышла первая статья А.Д., посвященная дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом, а в декабре того же года А.Д. закончил докторскую диссертацию на эту тему. Это была первая в мире докторская диссертация по данному направлению. В 1951 г. вышла и соответствующая монография [3], первая в мировой литературе.

С февраля 1950 г. А.Д. перешел на работу в Латвийский госуниверситет (ЛаГУ), где стал заведовать кафедрой общей математики. Здесь, в частности, А.Д. занялся исследованиями систем уравнений гиперболического типа с одной пространственной переменной. Важной формой работы со студентами и преподавателями стал семинар научно–исследовательского характера при кафедре. Появились первые номера журнала "Ученые записки" физмата ЛаГУ, А.Д. написал для студентов сочинение "Как подготовиться к исследовательской работе". Кроме того, А.Д. организовал студенческий конкурс решения задач "на ε и δ", которые возникают при изучении первых глав математического анализа. Позже на этой основе возникла брошюра [4], которая имела успех не только в Риге, но даже, например, в США.

Как пишет А.Д., в этот период работы в Риге его квартира была открыта знакомым и незнакомым для консультаций и деловых бесед. Летом такой же открытой становилась дача на взморье, которую семья А.Д. снимала каждый год.

Постепенно А.Д. стал известен в Латвии, его приглашали в партийные органы в качестве эксперта по математическим вопросам. Однако на факультете возникали конфликты: А.Д. считал, что главное, что нужно делать — это развивать научную работу на кафедрах, иное мнение было у декана: тот считал, что главным должна быть общественная работа. Поэтому руководство факультета тормозило представление А.Д. к званию профессора. Появилось и еще одно важное обстоятельство: у второго сына А.Д. — Мити — обнаружилась бронхиальная астма, он болел воспалением легких. Как сказал врач, причина — во влажном климате Риги.

Надо было уезжать, хотя А.Д. пишет, что он всем сердцем прирос к Риге. С осени 1953 г. А.Д. перешел на работу в Белорусский госуниверситет (БГУ), однако контакты с рижскими математиками длились еще долго.

В течение рижского периода работы А.Д. опубликовал около 30 научных статей по следующей тематике: краевые задачи в областях со сложной границей, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, теория потенциала, смешанные задачи для линейных систем УсЧП, теоремы о неподвижных точках для многозначных отображений и др.

В Минске А.Д. стал работать в качестве заведующего кафедрой дифференциальных уравнений БГУ, а также на полставки — в Минском педуниверситете. А.Д. пишет, что белорусы — спокойные, открытые и доброжелательные люди, и это очень располагало к контактам, общечеловеческим и научным. В это время А.Д. был в Минске единственным доктором наук — математиком.

С весеннего семестра 1953/54 учебного года под руководством А.Д. начал работу учебно–исследовательский семинар для студентов старших курсов и аспирантов. В частности, в этот период у него было 8 аспирантов (из Риги и Минска). Его собственные научные интересы в это время были связаны с продолжением исследований по смешанной задаче для систем уравнений гиперболического типа с единственной пространственной переменной, с изучением строения окрестности точек покоя общей автономной системы с переключением на плоскости и др. Всего за минский период А.Д. опубликовал 13 работ, был переводчиком и редактором книги Р. Беллмана "Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений"(М.: ИЛ, 1954).

В конце минского периода А.Д. познакомился с такими выдающимися учеными, как М.А. Красносельский, С.Г. Крейн и Н.И. Ахиезер, а также с некоторыми другими. Эти знакомства сыграли в дальнейшем важную роль в его жизни.

К сожалению, несмотря на хорошие отношения А.Д. с преподавателями и студентами БГУ, ему пришлось уехать из Минска, так как он не смог получить квартиру, удовлетворяющую его семью. Н.И. Ахиезер, узнав об этом, помог А.Д. перехать в Харьков. Там такая возможность была: директор Харьковского авиационного института (ХАИ), которого Н.И. хорошо знал, хранил на всякий случай хорошую квартиру в жилом доме института, и в нее можно было немедленно въехать. Кроме того, А.Д. имел представление о весьма высоком уровне Харькова, в том числе и математическом: здесь наряду с Н.И. работали выдающиеся математики Б.Я. Левин, В.А. Марченко, А.В. Погорелов и другие. Наконец, Харьков был для А.Д. в определенной степени родным городом, так как А.Д. здесь провел детство.

Поэтому в сентябре 1956 г., после 24-летнего перерыва, для А.Д. начался второй харьковский период жизни. Здесь он, работая в ХАИ и во ФТИНТе, прожил 18 лет.

2. Харьковский период жизни и творчества

2.1. **Работа в ХАИ.** В августе 1956 г. А.Д. с семьей переехал из Минска в Харьков и стал сначала профессором кафедры лопаточных машин ХАИ, а с осени следующего года — заведующим кафедрой высшей математики ХАИ.

Именно в это время я познакомился с А.Д. при следующих обстоятельствах. Я поступил на 1-й курс ХАИ (факультет авиамоторостроения), и в начале учебного года декан нашего факультета организовал встречу с первокурсниками. В то время в вузы принимали не только выпускников школ, но и так называемых производственников (проработавших несколько лет), а также отставных военных. У нас, в частности, были студенты в возрасте 30 лет и старше. Перед началом встречи я заметил одного человека такого вида, который сел в первом ряду. Декан произнес приветственные слова и добрые пожелания первокурсникам, а затем сказал: "Слово предоставляется зав. кафедрой высшей математики профессору А.Д. Мышкису". Каково же было мое удивление, когда из первого ряда вышел этот самый "производственник" и сердечно и проникновенно приветствовал первокурсников.

Главной своей удачей в жизни я считаю то, что А.Д. начал читать нам лекции по высшей математике, и у меня появилась возможность общаться с ним. Это произошло, правда, далеко не сразу. В то время я учился легко, экзамены сдавал, как правило, досрочно, но с А.Д. во время экзаменов не приходилось встречаться. Я, к тому же, занимался спортом, играл в сборной ХАИ по волейболу, и А.Д. в основном знал меня как студента–спортсмена. Надо сказать, что в то время в Харькове были очень популярны межвузовские соревнования, в том числе и по волейболу. От каждого вуза выступали 6 команд, 3 женских и 3 мужских. Начинались такие встречи в 6 вечера, а заканчивались порой в 2 часа ночи. А.Д. очень любил волейбол, и на этих соревнованиях он был постоянным болельщиком. Однажды я даже видел, как он в битком набитом зрителями спортивном зале "висел" на шведской стенке, чтобы лучше можно было видеть спортивную арену.

К концу второго курса я однажды подошел к А.Д. и сказал ему, что хотел бы более глубоко, чем это нужно рядовому инженеру, заниматься математикой. А.Д. был весьма удивлен, так как не знал, как я учусь, и, кроме того, знал о моих занятиях спортом. Он для начала посоветовал мне начать читать пятитомник В.И. Смирнова по высшей математике, а когда я дойду до 4–5 тома, то можно будет поговорить и конкретнее. Теперь я, конечно же, понимаю, что это была проверка. Первые два тома я проглотил быстро, к концу второго года.

В то время в ХАИ набирали из отличников так называемые спецгруппы студентов для более углубленного изучения математических и физических наук. Я попал в такую группу, которую называли "ядерной". Предполагалось, что мы будем специалистами по ядерным авиадвигателям (позже эта идея себя не оправдала). Нам читали курсы лекций по квантовой механике, ядерной физике и другим сопутствующим наукам. Под руководством А.Д. мы начали изучать на математическом кружке, в частности, первые тома знаменитого десятитомника по теоретической физике Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. В итоге познакомились с первыми двумя томами, а затем интересы участников этого кружка разошлись.

Эти первые мои контакты с А.Д. привели к тому, что я, во-первых, понял, что следует параллельно с учебой в ХАИ прослушать основные курсы лекций по математике и физике в ХГУ (что я и сделал на 5–6 курсе ХАИ), а во-вторых, — я принял предложение А.Д. после учебы поступить на работу в отдел прикладной математики в то время создававшегося в Харькове научно–исследовательского института "Физико–технический институт низких температур" (ФТИНТ) АН УССР.

2.2. **Отдел прикладной математики ФТИНТ.** Выяснилось, что этот отдел А.Д сформировал, с одной стороны, из инженеров с математическим уклоном — выпускников ХАИ (А.Д. Тюпцов, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, В.Г.Бабский, И.Д. Борисов, И.И. Иевлев, Е.А. Щербаков, Б.В. Базалий и др.), а с другой — из выпускников мехмата ХГУ (М.А. Беляева, Н.Н. Морозовская и др.). При ФТИНТе был создан математический сектор — фактически институт математики; руководителями и сотрудниками отделов здесь были долгие годы такие выдающиеся математики, как В.А. Марченко, А.В. Погорелов, Б.Я. Левин, Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. Идея создания такого математического сектора при физическом научно–исследовательском институте горячо поддерживалась директором ФТИНТа, впоследствии академиком Б.И. Веркиным.

К этому моменту А.Д. уже закончил редактирование знаменитого двухтомника по теоретической физике [5], а также написание ставшего впоследствии знаменитым его учебника по высшей математике для втузов [6]. Этот учебник А.Д. считает одним из главных итогов своей жизни. В нем был реализован тезис А.Д. о том, что учебник по высшей математике для втузов должен быть ориентирован на приложения, и, в частности, необходимо сократить разрыв между математикой преподаваемой и применяемой. В дальнейшем эти идеи получили глубокое развитие в курсе лекций [7], в книгах [8–10], а также в его сотрудничестве с академиком Я.Б. Зельдовичем.

Сначала отдел прикладной математики не имел определенной яркой прикладной тематики, хотя А.Д. Тюпцов, я, а также Л.А. Слобожанин защищали дипломные работы (а не проекты!) в ХАИ под руководством А.Д. по проблемам, связанным с обтеканием газа в решетках турбомашин. При этом мы использовали теорию квазиконформных отображений, считая, что сплошная среда является не несжимаемой жидкостью (когда рабочим математическим аппаратом являются конформные отображения), а слабо сжимаемым газом.

После защиты диплома А.Д. рекомендовал мне далее развить эти работы и оформить в виде кандидатской диссертации, однако в этот момент в отделе появилась фундаментальная тема для исследований, связанная с поведением жидкого топлива в баке космической ракеты в условиях, близких к невесомости.

История появления этой тематики такова. Директор ФТИНТ Б.И. Веркин иногда в командировках в некоторые серьезные организации просил А.Д. поехать с ним и принимать участие в обсуждении проблем, возникших при разработке новой техники. В частности, в знаменитой организации "Энергия", возглавляемой С.П. Королевым, возникла проблема поведения жидкости в слабых гравитационных полях, когда необходимо учитывать действие капиллярных сил, а иногда и сил самогравитации.

При поддержке Б.И. Веркина наш отдел во главе с А.Д. начал активно заниматься этой тематикой. Сразу появилось несколько направлений. Задачами статики, связанной с определением формы равновесия капиллярной жидкости в сосуде, занимались А.Д. Тюпцов, Л.А. Слобожанин и М.А. Беляева (Свечкарева), которая проводила расчеты на ЭВМ. Проблема малых колебаний досталась мне, а задачи о конвективных движениях жидкости исследовал В.Г. Бабский.

Исследование этих, а также близких проблем потребовало достаточно большого времени, и в итоге в 1976 г. появилась первая в мире монография по гидромеханике невесомости [11], которая была написана А.Д. и его четырьмя учениками, к тому времени уже кандидатами физ.-мат. наук. Далее вышли в свет ее второе издание на английском языке [12], а также третье издание [13] с новым соавтором из Ростова-на-Дону — М.Ю. Жуковым.

Возвращаясь к первому периоду исследований по проблемам гидромеханики невесомости, отмечу, что отдел прикладной математики ФТИНТ в эти годы тесно сотрудничал с отделом, возглавляемым академиком Н.Н. Моисеевым в ВЦ АН СССР (Москва), а также с отделом динамики и устойчивости многомерных систем Института математики АН УССР (руководители: сначала профессор С.Ф. Фещенко, а затем долгие годы и по настоящее время — академик АН УССР И.А. Луковский). Итоги этих исследований отражены, в частности, в сборнике научных работ [14], написанных сотрудниками отдела прикладной математики ФТИНТ и отдела, возглавляемого Н.Н. Моисеевым.

Сотрудничество с ведущими коллективами СССР, занимающимися близкой тематикой, приводило иногда к курьезным ситуациям. Однажды А.Д. приехал из Москвы, где он выступал в отделе Н.Н. Моисеева с подведением очередных итогов наших исследований по гидромеханике невесомости. При этом, он сообщил нам, что "моисеевцы" занимаются не только задачами статики, как и мы, но и строят теорию малых колебаний. "А кто этим занимается у нас?", — спросил А.Д., смотря на меня. В это время соответствующая теория еще не была мною полностью построена. В частности, не были до конца ясны свойства оператора кинетической энергии изучаемой гидросистемы. Этих слов было достаточно, чтобы я в течение последующей ночи (и почти во сне) окончательно разобрался с указанными свойствами оператора, и общая картина для меня стала совершенно прозрачной.

Отмечу, что А.Д. очень ненавязчиво и деликатно руководил нами, начинающими исследователями, и было полное ощущение, что мы все делаем сами; в значительной мере это так и было, А.Д. решал по сути главные, принципиальные вопросы.

Второй эпизод произошел летом 1966 г., когда я приехал к А.Д. на математическую школу в Кацивели (Крым), в работе которой принимали участие многие выдающиеся математики СССР. Я показал А.Д. первую главу моей диссертации, а он попросил оценить ее результаты О.А. Ладыженскую, которая находилась здесь же. Я написал постановку задачи и итоги ее исследования на большом листе формата А–2 и показал О.А. Она сказала, что прочтет только постановку, а затем, продумав около 30 секунд, сформулировала те же выводы, над которыми я мучительно раздумывал до этого времени и изложил в первой главе диссертации.

Третий эпизод связан с именем С.Г. Крейна. В свое время в 1965 г. С.Г. Крейн сделал доклад на заседании Харьковского математического общества, где он рассказал о ставшей знаменитой проблеме нормальных колебаний вязкой тяжелой жидкости в частично заполненном контейнере (топливо в баке космической ракеты). С.Г. при исследовании существенно использовал теорию линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и это дало весьма эффективную возможность качественно исследовать проблему. К тому моменту для идеальной жидкости и с учетом капиллярных сил я тоже пришел к этой мысли, хотя А.Д. не сразу поддержал эту идею. Доклад С.Г. и его работы по данному направлению произвели на меня настолько большое впечатление, что далее я уже не сомневался, что методы функционального анализа "работают" в линейной гидродинамике. Когда моя диссертация была почти готова, я показал ее А.Д. Он был несколько удивлен, так как прошло лишь два года аспирантуры, потом подумал и сказал: "Нужно ехать с докладом в Воронеж к С.Г. Крейну". С.Г. выслушал меня очень внимательно, а затем сразу сказал: "Это диссертация, и я согласен быть оппонентом". С этого момента мои тесные контакты с С.Г. (с подачи А.Д.) продолжались долгие годы, в итоге у нас с С.Г. появились три монографии по применению операторных методов в линейных проблемах гидродинамики.

Расскажу еще об одном эпизоде, связанном с моим научным сотрудничеством с А.Д. В 1968 г. я исследовал проблему малых нормальных колебаний самогравитирующего вязкого жидкого шара, находящегося в условиях невесомости. После разделения переменных по так называемым обобщенным сферическим функциям (частным случаем этих функций являются обычные сферические функции) возникло некоторое сложное трансцендентное уравнение в комплексной области, которое необходимо было исследовать качественно и асимптотически и сделать заключение о свойствах спектра нормальных колебаний вязкого шара. Когда в процессе решения у меня остался один нерешенный вопрос, который я никак не мог "пробить", я обратился к А.Д. и рассказал о сложившейся ситуации. А.Д. подумал и сказал: "Оставьте мне эти материалы, я посмотрю". Через некоторое время он рассказал, как решается возникшая проблема, и в итоге у нас появилась совместная работа по данной задаче. Это еще раз подчеркивает, что А.Д. всегда "включался" и помогал нам, когда это было необходимо.

Кстати, А.Д. говорил мне, что, по его принципам, он оформляет работу в соавторстве в том случае, если его вклад в проблему не менее пятидесяти процентов, в противном случае он отказывается быть соавтором статьи.

Еще одним направлением сотрудничества с ведущими научными коллективами по гидромеханике невесомости были наши контакты с В.И. Юдовичем (Ростов-на-Дону) и его кафедрой в университете, а также с его учителем И.И. Воровичем. В частности, В.И. Юдович и его ученик Л.И. Срубщик занимались асимптотическими методами в задачах статики капиллярной (т.е. обладающей поверхностным натяжением) жидкости; эти исследования вошли в книгу "Гидромеханика невесомости". Другое направление контактов с ростовчанами — тесное сотрудничество В.Г. Бабского, в то время начинающего прикладника, с В.И. Юдовичем, признанным лидером в исследовании задач гидромеханики методами функционального анализа. Оба они, как оказалось, независимо, пришли к мысли об использовании в задачах конвекции, в том числе и в условиях невесомости, теории осцилляционных матриц и ядер, построенной Ф.Р. Гантмахером и М.Г. Крейном, а также теории конусов в банаховом пространстве на основе исследований М.А. Красносельского и его школы.Эти исследования отражены в третьем разделе монографии [13], а также в книге [15].

Интересно отметить, как создавалась наша книга [11]. Мы наметили план, каждый, как смог, написал свою часть, а затем А.Д. взялся весь этот разнородный материал оформить с единых позиций прикладной математики; окончательный текст и редактирование принадлежат ему. Писал он весьма организованно, в течение одного дня на работе появлялось примерно пять страниц текста. Каждый абзац А.Д. тщательно продумывал, а затем целиком, почти без переделок, печатал на машинке текст. При этом он оставлял места для формул и тут же, не снимая лист с барабана, вставлял необходимые формулы. Между прочим, поначалу отношение к этой книге у А.Д. было несколько снисходительное, однако позже, как выяснилось, она стала востребованной для многих специалистов, занимающихся данной тематикой.

Впоследствии А.Д. говорил, а затем это отметил и в [1], что работа в отделе прикладной математики ФТИНТ была наиболее продуктивной и интересной в его научной жизни.

2.3. **Другие направления работы в харьковский период.** Так как А.Д. был многоплановым исследователем, он, конечно же, не ограничивался изучением задач гидромеханики невесомости. Более того, эта тематика была для него как бы проходной, а параллельно с ней он занимался традиционными для себя математическими проблемами. В частности, в это время он опубликовал два обзора состояния и проблем в теории функционально–дифференциальных уравнений, было также несколько работ по системам с толчками в заданные моменты времени, занимался по-прежнему смешанной задачей для полулинейных систем с УсЧП гиперболического типа и другими проблемами.

Кроме того, изучалась примыкающая к космической тематике проблема нахождения величины запаса устойчивости, т.е. глубины минимума функции нескольких переменных, а затем и функционала потенциальной энергии в бесконечномерном функциональном пространстве. Для этого объекта (введенного А.Д.) указана схема его вычисления.

Далее несколько статей было посвящено методологическим вопросам: что такое прикладная математика, каковы ее особенности. В это же время А.Д. перевел и отредактировал интересный курс обыкновенных дифференциальных уравнений Ф. Трикоми. Наконец, "Лекции по высшей математике", вышедшие в 1964 г., переиздавались также в переработанном виде в 1967 г., а затем в 1969 г. Кроме того, в соавторстве с Я.Б. Зельдовичем вышла из печати книга "Элементы прикладной математики" (первое издание — 1965 г., второе — 1967 г.).

В эти же годы А.Д. принимал активное участие в Комиссии по математическому образованию при АН СССР ("Колмогоровской комиссии") и в Научно–методическом совете по математике при МВССО СССР. В частности, А.Д. совместно с Я.Б. Зельдовичем выступал со статьями о необходимости модернизации программ по математике для средней школы — введения элементов высшей математики, упрощения изложения, усиления связи курса математики с физикой и т.д.

Еще один род педагогической деятельности А.Д. — это участие в качестве организатора и лектора в телекинокурсе высшей математики для студентов втузов. В это же время А.Д. совместно с коллегами из Воронежа (Ю.Г. Борисевич и его ученики) стал заниматься многозначными отображениями и дифференциальными включениями. Одновременно А.Д. писал второй свой учебник для студентов втузов — спецкурсы [7]. Как отмечает А.Д., когда он писал эти два учебника ("Лекции" и "Спецкурсы"), он брал в качестве образца знаменитый пятитомник В.И. Смирнова "Курс высшей математики".

Жизнь в отделе прикладной математики ФТИНТ в эти годы была весьма активной, в том числе и в научном и общекультурном плане. Мы участвовали во многих конференциях с обзорными докладами по тематике, связанной с гидромеханикой невесомости, а также иногда принимали участие в турпоходах под руководством А.Д. Два таких похода особенно запомнились мне. Один из них — в 1970 г. по Крымским горам, в частности, по Ай-Петри и Большому каньону, а второй — под Алма-Атой, выше известного высокогорного катка Медео. Мы поднимались на Талгарский перевал (Заилийский Алатау), на ледники — это осталось в памяти навсегда.

2.4. **Годы странствий.** Так сам А.Д. назвал период своей жизни с 1968 по 1974 гг. В это время А.Д. частично переехал в Москву, оставаясь руководителем отдела прикладной математики ФТИНТ и приезжая к нам 1–2 раза в месяц, т.е. руководя нами "вахтовым методом". Наша научная жизнь в это время активно продолжалась, защищались кандидатские диссертации учеников А.Д. (А.Д. Тюпцов, Л.А. Слобожанин, В.Г. Бабский, М.А. Беляева–Свечкарева и др.). Наконец, это был период, когда и происходила работа по написанию "Гидромеханики невесомости".

В 1969 г. А.Д. закончил писать "Спецкурсы", и мы принимали участие в тщательном окончательном техническом редактировании этой книги. После этого А.Д. начал писать, вплоть до 1971 г., учебник с Я.Б. Зельдовичем "Элементы математической физики: Среда из невзаимодействующих частиц". Далее, в 1970 г. А.Д. готовил второе издание книги "Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом", а также "Элементов математической физики".

Таким образом, активная творческая жизнь А.Д. продолжалась, несмотря на то, что он в это время не имел жилья в Москве.

3. Послехарьковский период творчества

3.1. **Работа в МИИТе.** С сентября 1974 г. А.Д. перешел на работу в Московский институт инженеров транспорта (МИИТ). В это время А.Д. завершал написание "Гидромеханики невесомости", а также писал работы по функционально–дифференциальным уравнениям и на другие темы.

Работая на кафедре прикладной математики МИИТа, А.Д. активно занимался, кроме собственно учебного процесса, методологическими проблемами, организовал постоянно действующий семинар по дифференциальным уравнениям и смежным вопросам. В тоже время А.Д. принимал активное участие в научных конференциях, как внутрисоюзных, так и международных: Словакия, Фрунзе, Черновцы, Киев, Прага и др.

В 1984 г. А.Д. с соавторами начал работу по подготовке английского издания "Гидромеханики невесомости", в котором исходный текст был существенно переработан и дополнен. В итоге появилась книга "Low–Grawity Fluid Mechanics. Mathematical Theory of Capillary Phenomena" (см. [12]).

После выхода в свет этой книги А.Д., как всегда, переключился на другую тематику. В частности, он написал книгу "Элементы теории математических моделей" (1991 г.). Одновременно возникла (по инициативе В.Г. Бабского) идея еще одного и еще более расширенного издания книги по гидромеханике невесомости, так как результаты исследований по этому направлению продолжали появляться. Это привело к тому, что вышло третье издание [13].

Всего за этот период с 1974 г. по 1991 г. А.Д. занимался следующими проблемами: гидромеханика капиллярной жидкости, функционально–дифференциальные уравнения, вариационные и краевые задачи для функций одного или нескольких аргументов (УсЧП эллиптического типа), многозначные отображения, асимптотические и осцилляционные свойства операторно–дифференциальных уравнений, интегральные уравнения Вольтерра в метрическом пространстве с мерой, условия экстремума в спектральных изопериметрических задачах с изменяющейся границей, задача о качении твердого тела по двум направляющим линиям (тематика МИИТа), эффекты стабилизации и дестабилизации при введении малых диссипативных сил в неконсервативных системах, новые свойства решений о поперечных колебаниях нити с бусинками, а также другие работы разведывательного характера. Всего А.Д. в этот период написал 93 научные работы, был автором и соавтором семи книг.

3.2. **Жизнь в Москве — столице России.** А.Д. решительно приветствовал переход от так называемого социалистического строя к новому, связанному с рыночной экономикой. Он очень высоко, в частности, оценивал реформы Е.Т. Гайдара. В это время он по необходимости начал дополнительно работать в Российском открытом университет (РОУ), где преподавал два года. Затем пошли гранты: фонд Сороса, РФФИ и другие, и жить стало легче. А.Д. часто ездит в научные командировки (США, Израиль, Бразилия), где он встречается со многими соотечественниками – математиками, а также выдающимися зарубежными коллегами. Как всегда, он в эти годы много работает по разным направлениям.

В мае 2000 г. в Воронеже состоялась Международная конференция по нелинейному анализу и ФДУ (функционально–дифференциальным уравнениям) под названием АДМ–2000, посвященная восьмидесятилетию А.Д. Мышкиса, а во второй половине августа — юбилейный семинар математического отделения ФТИНТ, также посвященный юбилею А.Д.

В сентябре 2002 г. А.Д. впервые приехал на Крымскую осеннюю математическую школу–симпозиум (КРОМШ–13). Эта школа действует ежегодно с 1990 г. и организует ее наша кафедра математического анализа Симферопольского (ныне Таврического национального) университета. После защиты второй диссертации в 1980 г. я, по совету жены вернулся в родной для меня Симферополь. К 1990 году я уже созрел для того, чтобы организовать в Крыму (Ласпи, Батилиман) такую же школу, как школа С.Г. Крейна в Воронеже, но только осенью в бархатный сезон. Я в течение ряда лет приглашал А.Д. приехать к нам в Крым, но он сначала не мог это сделать, так как не мог пропускать лекции в МИИТе. Однако позже, начиная с 2002 г. и по 2008 г., А.Д. регулярно приезжал к нам, читал лекции, выступал во время дискуссий по методологическим вопросам преподавания математики и был, как говорится в полной математической форме. Он ходил и ездил по окрестностям (мыс Айя, Балаклава, Форос, церковь на скале и т.д.), и получал удовольствие от общения с коллегами, учениками и учениками учеников (научными внуками).

За последний период жизни у А.Д. вышло более восьмидесяти статей научного характера, в том числе и большая работа "Смешанные ФДУ" в серии "Современная математика. Фундаментальные направления" (4, 2003, с. 5–120).

3.3. **Итоги.** Подведем формальные краткие итоги жизни А.Д. Мышкиса, замечательного ученого, педагога, очень интересного и доброго человека. Он был официальным научным руководителем 36 защищенных кандидатских диссертаций, семеро из их авторов стали в дальнейшем докторами наук. А.Д. является автором и соавтором 17 книг, выдержавших 43 издания на 10 языках, 332 научных статей, был редактором и переводчиком 16 книг.

В свое время, когда А.Д. выдвигали в член–корреспонденты АН УССР, я приехал в Воронеж к его другу М.А. Красносельскому по поводу поддержки А.Д. в связи с этим выдвижением. М.А., подумав немного, сказал: "Пиши. Деятельность А.Д. можно представить по следующим семи направлениям ...". И он подробно описал ее, выделив главные достижения, как в чисто теоретических, так и прикладных вопросах.

К сожалению, А.Д., как и его выдающиеся друзья М.А. Красносельский и С.Г. Крейн, не стали членами АН СССР, хотя, безусловно, были достойны этих званий. Учитель А.Д. академик И.Г. Петровский, очень высоко оценивал научную деятельность А.Д. и считал его одним из лучших своих учеников. В частности, когда однажды И.Г. узнал, что некоторого коллегу избрали член-корреспондентом АН СССР, он сказал: "Да, но это не Мышкис". Вот почему, снова вспоминая, какую огромную роль А.Д. сыграл в моей жизни, я поместил эпиграф в начале этой статьи (сообщенный мне В.С. Шульманом) о наших учителях, которым мы безмерно благодарны.

Список литературы

[1] А.Д. Мышкис. *Советские математики: Мои воспоминания.* — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — 304 с.; 2-е издание — М.: КомКнига/URSS, 2009. — http://book.ru-deluxe.ru/16386-sovetskie-matematiki-moi-vospominanija..html

[2] Мышкис А.Д., Рабинович И.М. *Математик Пирс Боль из Риги.* — Рига: Зинатне, 1965. — 98 с.

[3] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* — М.;Л: Гостехиздат, 1951. — 255 с. — http://study.crimea.ua/file3296.html

[4] Мышкис А.Д., Лепин А., Ванагс А., Коровина З. *Задачи на ε и δ.* — Рига: Латвийский гос. ун-т им. П. Стучки, 1951. — 26 с.

[5] Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики.* — Т. 1. — М.: ИЛ, 1958. — 930 с. — http://study.crimea.ua/file2392.html; Т. 2. — М.: ИЛ, 1960. — 886 с. — http://study.crimea.ua/file2393.html

[6] А.Д. Мышкис. *Лекции по высшей математике.* — М.: Наука, 1969 (третье издание). — 640 с. — http://kpm.clan.su/load/45-1-0-78

[7] А.Д. Мышкис. *Математика для втузов. Специальные курсы.* — М.: Наука, 1971. — 632 с. — http://kpm.clan.su/load/45-1-0-78

[8] И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. *Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов.* — К.: Наукова думка, 1976. — 270 с.

[9] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. *Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.* — 2-е издание — М.: Наука, 1990. — 360 с; 3-е издание — М.: КомКнига/URSS, 2005.

[10] Мышкис А.Д. *Элементы теории математических моделей.* — М.: Физматлит, 1994. — 192 с; 3-е издание — М.: КомКнига/URSS, 2007. — http://www.4tivo.com/education/3216-myshkis-a.d.-jelementy-teorii.html

[11] Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. (под редакцией А.Д. Мышкиса) *Гидромеханика невесомости.* — М.: Наука, 1976. — 504 с.

[12] A. D. Myshkis, V.G. Babskii, N.D. Kopachevskii, L.A. Slobozhanin, A.D. Tyuptsov *Low–Gravity Fluid Mechanics.* — Springer-Verlag, Berlin, ... , Tokyo, 1987. — 584 p.

[13] Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости.* — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.

[14] *Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости* / Под редакцией Н.Н. Моисеева. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. — 280 с.

[15] Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И. *Математическая теория электрофореза.* — К.: Наукова думка, 1983. — 202 с.

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 513.83 MSC2000: 55R10, 46L80

А.Б. Антоневич

РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И K-ТЕОРИЯ: ПЕРВЫЕ ШАГИ

Данная работа представляет собой обработку лекций, прочитанных в Крымской осенней математической школа-симпозиуме в 2009 году. Целью является ознакомление читателя с основными понятиями теории расслоенных пространств и векторных расслоений. Изложены только начальные идеи теории и примеры расслоенных пространств, причем с использованием наиболее элементарных методов. В ряде мест факты, которые следуют из общих теорем, получены "вручную", с помощью явных конструкций.

Введение

Целью данной работы является ознакомление читателя с основными понятиями теории расслоенных пространств. Текст адресован в первую очередь специалистам по анализу и дифференциальным уравнениям, у которых интерес к этому направлению стимулируется обычно формулой индекса для псевдодифференциальных операторов. Но расслоенные пространства встречаются и в других вопросах, и полезно увидеть в рассматриваемых конструкциях структуру расслоенного пространства.

Теория расслоенных пространств достаточно хорошо отражена в литературе, имеется ряд книг на русском языке, в которых описана продвинутая топологическая техника исследования. Отличие данного сочинения в том, что в нем изложены только начальные идеи теории и примеры расслоенных пространств, причем с использованием наиболее элементарных методов. В ряде мест факты, которые следуют из общих теорем, получены "вручную", с помощью явных конструкций, привычных специалистам по анализу и дифференциальным уравнениям. Надеемся, что такой подход облегчит читателю первоначальное ознакомление с предметом и сделает более доступным изучение в дальнейшем более тонких фактов. Однако полностью избежать использования топологического аппарата, например гомотопических групп, не удается.

1. Индекс фредгольмовых операторов

При изучении различных классов уравнений давно было обнаружено, что их некоторые свойства не изменяются при малом изменении данных задачи. Обычно с такими свойствами связаны топологические инварианты. Приведем простейший пример.

В круге $|z| \leq 1$ на комплексной плоскости рассмотрим уравнения вида $f(z) = 0$, где f – непрерывная функция. Если $f(z) \equiv z$, то уравнение, очевидно, имеет решение $z = 0$. Это свойство устойчиво, а именно, имеет место

Утверждение 1. *Если f – непрерывная функция и $|f(z) - z| < 1$ на единичной окружности $|z| = 1$, то уравнение $f(z) = 0$ имеет в круге $|z| \leq 1$ хотя бы одно решение.*

Инвариант, связанный с рассматриваемой задачей, есть индекс Коши, он будет рассмотрен ниже, в п. 2, где будет приведено доказательство более общего утверждения.

Одним из топологических инвариантов, представляющих наибольший интерес для специалистов по уравнениям, является индекс фредгольмова оператора.

Напомним соответствующие определения и основные факты теории фредгольмовых операторов.

Ограниченный линейный оператор A в банаховом пространстве (или действующий из одного банахова пространства в другое) называется *оператором Фредгольма*, если

1) Образ ImA замкнут;

2) Ядро $\ker A$ конечномерно;

3) Ядро $\ker A^*$ сопряженного оператора конечномерно.

Индексом фредгольмова оператора A называется целое число

$$IndA = \dim\ker A - \dim\ker A^*.$$

Например, в стандартных курсах функционального анализа доказывается, что каждый оператор вида $A = I + K$, где K – компактный оператор, является оператором Фредгольма и что $IndA = 0$.

Условие, что оператор A фредгольмов, эквивалентно тому, что решение уравнения $Ax = y$ существует тогда и только тогда, когда для элемента y выполнено конечное число (равное $\dim\ker A^*$) линейно независимых условий разрешимости и при этом решение определено с точностью до конечного числа (равного $\dim\ker A$) произвольных постоянных.

Для полного исследования уравнения было бы хорошо найти размерности ядер $\dim\ker A$ и $\dim\ker A^*$, но эти характеристики очень неустойчивы и их вычисление даже для операторов вида $I + K$ является сложной задачей. Особый интерес к индексу оператора связан с тем, что индекс устойчив относительно малых и относительно компактных возмущений. Это вытекает из приведенной ниже теоремы.

Теорема 1. ***1.*** *Если оператор A фредгольмов, то для любого компактного оператора K оператор $A + K$ фредгольмов и*

$$Ind(A + K) = IndA.$$

2. *Если оператор A фредгольмов, то существует $\delta > 0$, такое, что любой оператор, удовлетворяющий условию $\|A - B\| < \delta$, является фредгольмовым и при этом*

$$IndB = IndA.$$

3. *Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда существует* регуляризатор — *оператор R, такой, что $AR = I + K_1, RA = I + K_2$, где K_1 и K_2 – компактные операторы.*

4. *Если из трех операторов A, B и AB два являются фредгольмовыми, то третий также фредгольмов и*

$$IndAB = IndA + IndB.$$

5. *Если из трех операторов A, B и $A \bigoplus B$ два являются фредгольмовыми, то третий также фредгольмов и*

$$Ind\ A \bigoplus B = IndA + IndB.$$

Следствие (гомотопическая инвариантность индекса) *Пусть семейство операторов A_t, $0 \leq t \leq 1$, непрерывно в смысле нормы зависит от числа t и все операторы A_t фредгольмовы. Тогда*

$$IndA_0 = IndA_1.$$

Обычно в пространствах функций исследуются не произвольные операторы, а классы операторов специального вида. Это могут быть, например, дифференциальные или псевдодифференциальные операторы на многообразиях, операторы типа свертки, теплицевы операторы, дифференциально-функциональные операторы и т.п.

Для каждого класса возникает задача получения условий на коэффициенты, при которых оператор является фредгольмовым и задача о вычислении индекса фредгольмова оператора.

В частности, для псевдодифференциального оператора на компактном многообразии необходимым и достаточным условием фредгольмовости является эллиптичность оператора. Индекс является устойчивой характеристикой фредгольмова оператора, т.е. является некоторым топологическим инвариантом. В алгебраической топологии, которая развивалась независимо от теории псевдодиффиенциальных операторов, было построено много разных топологических инвариантов.

В известной статье *Об эллиптических уравнениях* [3] И.М. Гельфанд поставил задачу о вычислении индекса эллиптического дифференциального оператора на компактном многообразии, в частности,о получении выражения для индекса через известные ранее топологические инварианты. Эта задача привлекла внимание многих специалистов и вскоре появился ряд работ об индексе псевдодифференциальных операторов (М.С.Агранович, А.И. Вольперт, А.С. Дынин, С.Г. Михлин).

Общее решение было получено в 1963 году М. Атья и И. Зингером на основе $K-$теории — одного из разделов алгебраической топологии, базирующегося на изучении векторных расслоений. Эти результаты имели большой резонанс, так как в них объединились математические направления, ранее развивавшиеся независимо.

Ниже в данной работе при обсуждении конструкций, связанных с расслоенными пространствами и $K-$теорией, мы будем аппелировать к задаче о вычислении индекса фредгольмова оператора.

2. Системы сингулярных интегральных уравнений на контуре

Рассмотрим сначала пример класса операторов, для которых условия фредгольмовости и формула индекса оператора получаются достаточно элементарными методами.

2.1. **Алгебра сингулярных интегральных операторов.** Пусть Γ - простой гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости. Сингулярный интегральный оператор Коши на контуре задается формулой

$$Su(z) = \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{u(t)}{z-t} dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Этот оператор ограничен в пространствах $L_p(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$. Поскольку мы рассматриваем пример, будем рассматривать операторы в пространстве $L_2(\Gamma)$ и будем считать, что контур Γ является окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Для произвольного простого гладкого замкнутого контура и для всех p, таких, что $1 < p < \infty$, результаты полностью аналогичны.

Одним из свойств оператора S является его инволютивность: $S^2 = I$. Поэтому вместо единичного оператор и оператора S удобнее рассматривать ограниченные проекторы

$$P_- = \frac{1}{2}(I - S), \quad P_+ = \frac{1}{2}(I + S).$$

В случае, когда контур Γ является окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, действие этих проекторов очень просто задается с помощью разложения функции $u \in L_2(S^1)$ в ряд Фурье. Если

$$u(z) = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} u_j z^j, \quad u_j \in \mathbb{C},$$

то

$$P_+ u = \Sigma_{j=0}^{+\infty} u_j z^j, \quad P_- u = \Sigma_{-\infty}^{-1} u_j z^j. \tag{1}$$

Сингулярным интегральным оператором (СИО) называется оператор вида

$$B = a(z)P_+ + b(z)P_- + K, \tag{2}$$

где $a(z)$ и $b(z)$ есть заданные непрерывные функции, $K-$ компактный оператор. Если оператор рассматривается в пространстве вектор-функций, то $a(z)$ и $b(z)$ есть матрично-значные непрерывные функции.

При исследовании СИО существенно используется то, что такие операторы образуют алгебру. А именно, имеет место

Теорема 2. *Произведение двух СИО также является СИО и имеет вид*

$$\begin{aligned}[a_1(z)P_+ + b_1(z)P_- + K_1][a_2(z)P_+ + b_2(z)P_- + K_2] = \\ = [a_1(z)a_2(z)P_+ + b_1(z)b_2(z)P_- + K].\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что оператор S (следовательно, и операторы $P_{\pm}$) перестановочен с оператором умножения на непрерывную функцию a точностью до компактного оператора. Это следует из интегрального представления

$$(aS - Sa)u(z) = \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{a(z) - a(t)}{z - t} u(t)dt.$$

Для гладких функций a ядро $\frac{a(z)-a(t)}{z-t}$ является непрерывной функцией и такой интегральный оператор компактен. Для произвольных непрерывных функций компактность получаем с помощью приближения гладкими.

Раскрыв скобки в левой части (3), после преобразований, использующих перестановочность с точностью до компактного и равенство $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, получаем требуемое.

Пара функций (a, b) называется *символом СИО B.*

Следствие. *Если символ оператора B обратим, т.е. выполнены условия*

$$deta(z) \neq 0,\ detb(z) \neq 0, \tag{4}$$

то оператор

$$R = [a(z)]^{-1}P_+ + [b(z)]^{-1}P_-$$

является регуляризатором для оператора B и, значит, при выполнении условий (4) оператор B фредгольмов.

Как будет показано ниже, условия (4) являются не только достаточными, но и необходимыми для фредгольмовости оператора B.

Согласно теореме 2, индекс фредгольмова СИО не зависит от компактной добавки и индекс не изменяется при гомотопии коэффициентов. Поэтому для получения формулы индекса естественно попытаться описать классы гомотопных между собой невырожденных матриц-функций. За счет того, что здесь матрицы-функции определены на просто устроенном пространстве — на окружности, задача гомотопической классификации допускает простое решение.

2.2. **Гомотопическая классификация невырожденных матриц-функций на контуре.** *Скалярный случай.* Если оператор действует в пространстве $L_2(S^1)$ скалярных функций, то a и b есть скалярные функции, а условие фредгольмовости оператора есть $a(z) \neq 0,\ b(z) \neq 0$.

Задача гомотопической классификации таких функций, т.е. непрерывных отображений окружности в комплексную плоскость с выколотой точкой 0, является одной из классических задач топологии, она встречается и в многих других вопросах. При решении этой задачи появляется топологический инвариант – индекс Коши функции.

Теорема 3. *Каждая непрерывная комплекснозначная функция на окружности, удовлетворяющая условию $f(z) \neq 0$, гомотопна в классе таких функций некоторой функции z^k, $k \in \mathbb{Z}$, причем при разных k функции z^k негомотопны.*

Число k называется *индексом Коши* функции f, будем обозначать его $ind\ f$.

Доказательство. Пусть $z = e^{i2\pi s}$, $0 \leq s \leq 1$. Для функции f существует представление $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi(s)}$, где $\varphi(s)$ – непрерывная ветвь аргумента значений функции. Здесь значениям $s = 0$ и $s = 1$ соответствует одно и то же значение $f(1)$, выполнено $e^{\varphi(1)} = e^{\varphi(0)}$. Поскольку аргумент комплексного числа определен с точность до 2π, разность $\varphi(1) - \varphi(0)$ кратна 2π, т.е. $\varphi(1) - \varphi(0) = k2\pi$. Это число k будем обозначать $ind\ f$, это и есть индекс Коши функции f. Таким образом, *индекс Коши* функции f есть приращение непрерывной ветви аргумента значений функции при обходе окружности, деленное на 2π.

Гомотопия

$$f_t(z) = \{(1-t)|f(z)| + t\}e^{i\varphi(s)}$$

соединяет исходную функцию с функцией $e^{i\varphi(s)}$. Далее строится гомотопия

$$e^{\{i[(1-t)[\varphi(s)-2\pi ks]+t2\pi ks]\}},\ 0 \leq t \leq 1,$$

соединяющая функцию $e^{i2\pi\varphi(s)}$ с функцией $e^{i2\pi ks} = z^k$, что и требовалось.

При малом изменении функции приращение аргумента мало изменяется. Но индекс Коши принимает только целые значения, поэтому при гомотопии он не изменяется. Отсюда следует, что индекс Коши является *гомотопическим инвариантом*, в частности, функции, имеющие разные индексы Коши, негомотопны.

В качестве приложения теоремы 3 получим аналог утверждения 1.

Утверждение 2. *Если f – непрерывная функция и при некотором $k \neq 0$ на единичной окружности $|z| = 1$ выполнено неравенство $|f(z) - z^k| < 1$, то уравнение $f(z) = 0$ имеет в круге $|z| \leq 1$ хотя бы одно решение.*

Доказательство. На единичной окружности рассмотрим функцию $\widetilde{f}(z) = f(z)$. Согласно условию, на единичной окружности $|z| = 1$ выполнено

$$\widetilde{f}(z)(1-t) - z^k t \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{5}$$

и семейство функций (5) задает гомотопию (в классе функций, не обращающихся в нуль) функции $\widetilde{f}$ с функцией z^k. Поэтому $ind\widetilde{f} = k \neq 0$.

Предположим, что $f(z) \neq 0$ в круге $|z| \leq 1$. Тогда семейство функций $\widetilde{f}_t(z) = f(tz),\ 0 \leq t \leq 1$ задает гомотопию (в классе функций, не обращающихся в нуль) функции $\widetilde{f}$ и постоянной $f(0)$, откуда следует, что $ind\widetilde{f} = 0$. Получаем противоречие.

Матричный случай. Более тонким является утверждение о том, что классы гомотопически эквивалентных невырожденных матрично-значных функций на окружности также классифицируются одним целым числом – индексом Коши определителя.

Теорема 4. *Каждая непрерывная невырожденная матрично-значная функция $a(z)$ на окружности гомотопна в классе таких функций диагональной матрично-значной функции вида $diag(z^k, 1, \ldots, 1)$, где $k = ind\ deta$, причем функции, которым соответствуют разные k, негомотопны.*

Доказательство. Пусть $a(z) = (a_{ij}(z))$. Предположим, что $a_{11}(z) \neq 0$. Построим гомотопию

$$a(z;t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - t\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{11} & a_{13} - t\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{11} & \ldots & a_{1n} - t\frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{11} \\ a_{21} & a_{22} - t\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} & a_{23} - t\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21} & \ldots & a_{2n} - t\frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} - t\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{n1} & a_{23} - t\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{n1} & \ldots & a_{nn} - t\frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{n1} \end{pmatrix}$$

приводящую к матрице, у которой первая строка имеет вид

$$(a_{11}, 0, 0, \ldots, 0).$$

Заметим, что здесь $deta(z;t) = deta(z) \neq 0$, т.е. гомотопия проводится в классе невырожденных матриц. У полученной матрицы определитель не зависит от $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$, поэтому можно прогомотопировать эти члены к нулю. В результате получам, что исходная матрица функция гомотопна некоторой блочно -диагональной матрице вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & a_{23} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(с другими компонентами).

Повторяя эту процедуру для полученной матрицы меньшей размерности, после серии таких гомотопий получаем диагональную матрицу.

Далее каждый диагональнальный элемент, согласно теореме 1, можем прогомотопировать в функцию вида z^{k_i} и получаем диагональную матрицу

$$diag(z^{k_1}, z^{k_2}, z^{k_3}, \ldots, z^{k_n}).$$

Последний шаг доказательства заключается в том, что гомотопны матрицы

$$\begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 \\ 0 & z^{k_2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} z^{k_1+k_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуемую гомотопию задает семейство матриц

$$D(z;t) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 & 0 \\ 0 & z^{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

так как

$$D(z;0) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 \\ 0 & z^{k_2} \end{pmatrix}; \;\; D(z;\pi/2) = \begin{pmatrix} z^{k_1+k_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если условие $a_{11}(z) \neq 0$ не выполнено, то предварительно следует провести еще одну гомотопию. Для заданной матрицы существует $\delta > 0$, такое, что все матрицы $b(z)$, удовлетворяющие условию $|a_{ij}(z) - b_{ij}(z)| < \delta$, являются невырожденными. Для любой непрерывной функции $a_{11}(z)$ существует непрерывная функция $b_{11}(z) \neq 0$, такая, что $|a_{11}(z) - b_{11}(z)| < \delta$. В этом рассуждении существенно, что z лежит на линии. Например, согласно утверждению 1, в круге $|z| \leq 1$ функцию $f(z) = z$ нельзя приблизить непрерывной функцией, всюду отличной от нуля в этом круге.

Далее линейная гомотопия $b(z;t)$, где $b_{11}(z;t) = (1-t)a_{11}(z) + tb_{11}(z)$ и $b_{i,j}(z) = a_{i,j}(z)$, если $(i,j) \neq (1,1)$, соединяет матрицу $z(z)$ с матрицей $b(z)$ в классе невырожденных матриц.

2.3. **Индекс сингулярного интегрального оператора.** После построения гомотопической классификации коэффициентов задача о вычислении индекса СИО решается просто.

Теорема 5. *Матричный сингулярный интегральный оператор*

$$B = a(z)P_+ + b(z)P_- + K$$

фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$deta(z) \neq 0, \;\; detb(z) \neq 0, \tag{6}$$

а его индекс задается формулой

$$IndB = ind\ det\ b - ind\ det\ a.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (6). Согласно теореме 4 и следствию из теоремы 2 оператор B гомотопен в классе фредгольмовых операторов оператору

$$\widehat{B} = \widehat{a}(z)P_+ + \widehat{b}(z)P_-,$$

где

$$\widehat{a}(z) = \begin{pmatrix} z^{k^+} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \;\; \widehat{b}(z) = \begin{pmatrix} z^{k^-} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$k^+ = ind\ det\ a,\ k^- = ind\ det\ b$.

Оператор $\widehat{B}$ является прямой суммой скалярного оператора $\widetilde{B} = z^{k^+}P_+ + z^{k^-}P_-$ и единичного оператора (в пространстве функций размерности $m-1$). Поэтому $IndB = Ind\widehat{B} = Ind\widetilde{B}$.

Так как $\widetilde{B} = z^{k^-}B_k$, где $B_k = z^kP_+ + P_-, \;\; k = k^+ - k^-$, получаем, что

$$IndB = IndB_k.$$

При $k \geq 1$ имеем $B_k = (B_1)^k + K$, поэтому в силу свойства 4 теоремы 1 имеем

$$IndB_k = k\ Ind\ B_1. \tag{7}$$

Так как $B_{-1}B_1 = I + K$, то $IndB_{-1} = -IndB_1$ и формула (7) верна для всех целых k. Таким образом, задача свелась к вычислению индекса одного конкретного оператора $B_1 = zP_+ + P_-$, который легко вычисляется непосредственно.

Действительно, используя представление (1) получаем, что

$$B_1u = \Sigma_{j=1}^{+\infty}u_{j-1}z^j + \Sigma_{-\infty}^{-1}u_jz^j.$$

Поэтому, если $B_1u = 0$, то $u = 0$, т.е. $dimKerB_1 = 0$.

Уравнение $B_1u = v$, где $v \in L_2(S^1)$, $v = \Sigma_{j\in\mathbb{Z}}v_jz^j$, имеет решение тогда и только тогда, когда $v_0 = 0$, для разрешимости уравнения необходимо и достаточно выполнения одного условия, откуда $dimKerB_1^* = 1$ и $IndB_1 = -1$.

Таким образом получаем

$$IndB = kIndB_1 = (k^+ - k_-)(-1) = ind\ det\ b - ind\ det\ a.$$

Здесь левая часть – аналитический индекс, т.е. индекс оператора, правая часть – топологический индекс - топологический инвариант, определяемый через коэффициенты.

Необходимости условий (6) для фредгольмовости оператора получается по следующей схеме. Пусть оператор B фредгольмов. Согласно теореме 1 существует окрестность оператора, в которой все операторы фредгольмовы и их индексы равны. Допустим, что $det\ a(z_0) = 0$ в какой-нибудь точке. Тогда в окрестности рассматриваемой функции a есть невырожденные функции с разными индексами Коши, и тогда у соответствующих операторов имеем разные индексы. Получаем противоречие.

В разделе 2 мы следуем работе Б. Боярского [2].

3. Алгебраический подход к задаче об индексе

При исследовании СИО существенно использовалось, что эти операторы образуют алгебру. Это подсказывает, что и для других классов операторов при решении задачи об индексе адекватным языком может быть язык операторных алгебр.

Пусть $LB(F)$ есть алгебра ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве F и $\mathcal{K} \subset LB(F)$ есть идеал компактных операторов. Пусть $\sigma : LB(F) \to LB(F)/\mathcal{K}$ есть каноническое отображение в фактор-алгебру. Элемент $\sigma(A) \in LB(F)/\mathcal{K}$ будем называть *символом оператора* A. Из теоремы 1 следует

Теорема 6. *Оператор $A \in LB(F)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ $\sigma(A)$ обратим.*

Алгебра $LB(F)/\mathcal{K}$ весьма обширна и естественно, что для произвольного оператора получить явные условия обратимости символа невозможно. Но обычно рассматриваются не все операторы в заданном пространстве, а операторы из некоторой замкнутой подалгебры $\mathcal{A}$ из $LB(F)$, содержащей все компактные операторы.

Тогда $\sigma(A)$ является элементом подалгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K} \subset LB(F)/\mathcal{K}$. Если символ $\sigma(A)$ обратим, как элемент алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, то согласно теореме 1 оператор A фредгольмов. Однако утверждение в обратную сторону не всегда выполняется. Согласно теореме, если оператор A фредгольмов, то для $\sigma(A)$ существует обратный элемент элемент R из алгебры $LB(F)/\mathcal{K}$. Но может оказаться, что R не принадлежит подалгебре $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ и в этом случае $\sigma(A)$ необратим, как элемент алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, несмотря не то, что оператор фредгольмов. Поэтому для справедливости аналога теоремы 2 в случае алгебры операторов, приходится накладывать дополнительное *условие наполненности* на алгебру $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ или на исходную алгебру $\mathcal{A}$. Сформулируем это условие в общем виде.

Пусть B есть банахова алгебра и B_1 – ее подалгебра. Подалгебра B_1 называется *наполненной* в B, если из того, что для элемента $b \in B_1$ существует обратный $b^{-1} \in B$, следует, что $b^{-1} \in B_1$.

В разных контекстах используется и другая терминология: наполненные подалгебры называют *спектрально инвариантными* , пару $B_1 \subset B$ называют *винеровской парой алгебр.*

Например, если $b \in B_1 \subset B$, то спектр элемента b зависит от того, в какой алгебре рассматривается этот элемент. В общем случае спектр b, как элемента подалгебры B_1, может быть шире, чем спектр в алгебре B. Условие наполненности эквивалентно тому, что для любого элемента его спектр в B_1 совпадает со спектром в B. Это поясняет происхождение термина *спектрально инвариантная подалгебра* .

Проверка наполненности конкретных подалгебр в общем случае является достаточно сложной задачей, которой посвящены многочисленные исследования. Отметим один случай, в котором достаточные условия наполненности подалгебры легко проверяются. В дальнейшем будем рассматривать только такие алгебры.

Теорема 7. *Пусть H гильбертово пространство. Если подалгебра A в $LB(H)$ замкнута по норме и симметрична, т.е. если из $b \in B$ следует, что $b^* \in B$, то она наполнена в $LB(H)$ и, следовательно, наполнена в любой содержащей ее замкнутой подалгебре из $LB(H)$.*

Алгебры, удовлетворяющие условиям из теоремы 7, допускают абстрактное описание. Банахова алгебра с инволюцией называется *C^*-алгеброй*, если для любого элемента выполнено $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Теорема 8. ***(Теорема Гельфанда — Наймарка)***. *Банахова алгебра с инволюцией является C^*-алгеброй тогда и только тогда, когда она изоморфна замкнутой по норме и симметричной подалгебре алгебры $LB(H)$ линейных ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве.*

Таким образом, имеет место

Теорема 9. *Если $\mathcal{A}$ есть C^*-подалгебра в алгебре $LB(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, то оператор $A \in \mathcal{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ $\sigma(A)$ обратим в алгебре $\mathcal{A}/\mathcal{K}$.*

Это схема успешно применяется при изучении конкретных операторных алгебр благодаря тому, что во многих случаях алгебра символов $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ устроена достаточно просто — она изоморфна алгебре непрерывных матриц-функций на некотором вспомогательном компактном пространстве. Тогда условие фредгольмовости есть условие невырожденности символа в каждой точке.

В частности, если $\mathcal{A}$ есть алгебра псевдодифференциальных операторов порядка нуль на компактном многообразии M, то алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ изоморфна алгебре непрерывных матриц-функций на пространстве $S(M)$ единичных кокасательных векторов к M [8]. Условие невырожденности символа в этом примере есть условие эллиптичности псевдодифференциального оператора.

В силу гомотопической устойчивости индекса естественно рассмотреть множество $[\Phi(\mathcal{A})]$, элементами которого являются классы гомотопных между собой фредгольмовых операторов из алгебры $\mathcal{A}$. Умножение в алгебре $\mathcal{A}$ порождает на этом множестве структуру группы. Поскольку индекс у гомотопных фредгольмовых операторов одинаков, корректно определено отображение $ind : [F(\mathcal{A})] \to \mathbb{Z}$. При этом из равенства $IndAB = IndA + IndB$ следует, что это отображение является гомоморфизмом из группы $[\Phi(\mathcal{A})]$ в группу целых чисел. Поэтому для получения формулы индекса достаточно найти индексы только для образующих группы, т.е. для некоторого набора конкретных операторов.

Фредгольмовы операторы из алгебры $\mathcal{A}$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны их символы в группе обратимых элементов из алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}$. Поэтому задача сводится к построению гомотопической классификации обратимых элементов из алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}$, т.е. фактически к описанию множества компонент линейной связности группы обратимых элементов из алгебры символов $\mathcal{A}/\mathcal{K}$.

Например, для алгебры СИО на окружности фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ изоморфна алгебре, состоящей из матрично-значных функций на множестве, состоящем из двух окружностей. Формулу индекса СИО удалось получить потому, что мы построили гомотопическую классификацию таких функций.

Сделаем теперь важное для дальнейшего замечание, позволяющее усовершенствовать подход к решению задачи об индексе.

Обратим внимание на то, что при получении формулы индекса СИО мы не полностью придерживались описанной схемы исследования. В частности, классы гомотопных между собой фредгольмовых СИО нумеруются размерностью матриц n и парами целых чисел $k^+, -k^-$, т.е. имеется три инварианта. Но получение общей формулы индекса было сведено к вычислению индекса только одного оператора.

Проанализируем доказательство теоремы 5. На первом шаге доказательства мы воспользовались гомотопической классификацией и по оператору B выбрали наиболее простой представитель $\widehat{B}$ из класса гомотопных операторов.

Но дальнейшие переходы — это переходы к операторам, *негомотопным* исходному, но имеющим тот же индекс. При переходе от оператора $\widehat{B}$ к оператору $\widetilde{B}$ была исключена зависимость задачи от размерности вектор-функций – задача сведена к случаю операторов в пространствах скалярных функций. При переходе от оператора $\widetilde{B}$ к оператору B_k мы исключили зависимость задачи от каждого из чисел $k^+, -k^-$ и получили зависимость индекса только от их разности.

Иначе говоря, в процессе доказательства мы рассматривали не одну алгебру, а семейство алгебр СИО, действующих в пространствах вектор-функций разной размерности, и перешли к рассмотрению новых классов эквивалентности, более обширных, чем классы гомотопных между собой операторов.

Этот прием оказывается существенным и при исследовании других операторных алгебр, в частности, в случае псевдодифференциальных операторов на компактном многообразии.

В случае псевдодифференциальных операторов на компактном многообразии пространство $S(M)$ устроено достаточно сложно и построение гомотопической классификации символов фредгольмовых операторов из заданной операторной алгебры в общем случае проблематично, оно связано с нахождением большого числа топологических инвариантов. При этом среди таких инвариантов оказываются такие, которые не влияют на индекс. Например, на торе T^2 группа, состоящая из классов гомотопных между собой скалярных эллиптических псевдодифффеpенциальные операторов, устроена как прямая сумма трех экземпляров группы $\mathbb{Z}$. Иначе говоря, здесь имеется три гомотопических инварианта, каждый из них принимает произвольное целое значение. Ясно, что не все эти инварианты существенны при решении задачи об индексе.

Переход от классов гомотопных фредгольмовых операторов к рассмотрению более широких классов по существу есть некоторый способ исключения "лишних" инвариантов и выявления наиболее существенных. При этом задача упрощается, так как можно не находить группу $[\Phi(\mathcal{A})]$ (т.е. не строить гомотопическую классификацию), а сразу описывать множество более широких классов.

Следует отметить, что рассмотренный выше случай СИО является особым – в этом случае исследование операторов в пространствах вектор-функций удалось свести к исследованию операторов в пространствах скалярных функций. В общем случае оказывается, что более удобно исследование операторов в заданном пространстве вектор-функций свести к исследованию операторов в пространстве вектор-функций большей размерности. Это связано с тем, что обычно легче построить гомотопию в классе невырожденных матриц-функций большей размерности.

Эти соображения (на другом языке) используются при построении $K-$ теории. Как будет показано ниже, векторные расслоения задаются с помощью невырожденных матриц-функций и анализ векторных расслоений эквивалентен исследованию таких матриц-функций.

4. Некоторые топологические понятия

Для удобства читателя приведем необходимые для дальнейшего сведения из топологии.

Одним из основных в рассматриваемой тематике является понятие гомотопии отображений. Пусть X и Y топологические пространства, $I = [0,1]$. Непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ называются *гомотопными,* если существует непрерывное отображение $F : X \times I \to Y$, такое, что $F(x,0) = f_0(x),\ F(x,1) = f_1(x)$. Если при фиксированном t обозначить $F(x,t) = f_t(x)$, то гомотопность отображений означает, что отображения f_0 и f_1 можно соединить семейством f_t непрерывных отображений, непрерывно зависящим от t.

Заметим, что понятие гомотопии операторов, использованное выше, является частным случаем общего определения, если в качестве X рассмотреть пространство, состоящее из одной точки.

Гомотопность отображений является отношением эквивалентности, поэтому для каждой пары пространств определено множество $[X, Y]$, состоящее из классов гомотопных между собой отображений. Если пространство X состоит из одной точки, то элементы из $[X, Y]$ называются *компонентвми линейной связности* пространства Y. Пространство Y называется *линейно связным*, если оно состоит из одной компоненты линейной связности.

Заметим, что задача гомотопической классификации эллиптических псевдодифференциальных операторов на компактном многообразии M есть задача описания множества $[S(M), GL(n, \mathbb{C})]$.

Гомеоморфные топологические пространства устроены одинаково по определению. Однако в задачах, связанных с гомотопическими свойствами, некоторые негомеоморфные пространства также можно считать аналогично устроенными.

Топологические пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными,* если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, такие, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному в Y, а отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному в X.

Например, окружность, кольцо и плоскость с выколотой точкой гомотопически эквиваленты. Пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно сфере S^2.

Пространство, гомотопически эквивалентное точке, называется *стягиваемым.* Например, отрезок, круг, шар, конус являются стягиваемыми пространствами.

Полезность введенного понятия подтверждается следующим утверждением.

Утверждение. *Если пространство X гомотопически эквивалентно X_1, а пространство Y гомотопически эквивалентно Y_1, то существует естественная биекция между множеством $[X, Y]$ и множеством $[X_1, Y_1]$.*

В качестве простого упражнения можно доказать следующие утверждения.

1. *Если пространство Y стягиваемо, то любые два отображения $f : X \to Y$ гомотопны.*

2. *Если пространство X стягиваемо, а пространство Y линейно связно, то любые два отображения $f : X \to Y$ гомотопны.*

3. *Отображение f сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в пространство Y гомотопно постоянному отображению тогда и только тогда, когда существует непрерывное продолжение отображения f на шар $D^n \subset \mathbb{R}^n$.*

Нам потребуются некоторые способы построения новых топологических пространств по заданным исходным пространствам.

1. *Прямое произведение.* Наиболее простая конструкция – декартово произведение топологических пространств $X \times Y$. Базу топологии в $X \times Y$ образуют множества вида $U \times V$, где U и V есть открытые множества в X и Y соответственно. Здесь очевидно, что все свойства топологического пространства $X \times Y$ однозначно определяются по свойствам X и Y.

2. *Одноточечная компактификация.* Если X - локально компактное пространство, не являющееся компактным, то существует много компактных пространств, в которые пространство X может быть вложено как всюду плотное подпространство. Наименьшее из таких пространств $\widetilde{X}$ отличается от X только одной точкой (называемой точкой Александрова), обозначаемой обычно ∞. Пространство $\widetilde{X}$, как множество, есть $X \bigcup \{\infty\}$, база окрестностей точки ∞ состоит из множеств вида $\widetilde{X} \setminus K$, где K есть компактное множество в X.

Пример 1. Одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна сфере S^n. В частности, одноточечная компактификация $\widetilde{\mathbb{C}}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ гомеоморфна сфере S^2, это пространство называют *сферой Римана.*

В одноточечной компактификации пространства $\widetilde{X}$ имеется особая точка ∞. В ряде других конструкций также полезно иметь некоторую *отмеченную точку* x^* из X. Например, если пространство является группой, то в качестве отмеченной точки обычно рассматривается нейтральный элемент группы.

3. *Фактор-пространство.* Пусть на топологическом пространстве X задано отношение эквивалентности R, по которому пространство разбивается на классы эквивалентных между собой элементов. Определена каноническая проекция $p : X \to X/R$ на фактор-пространство – множество X/R классов эквивалентных между собой элементов. Топология на X/R задается следующим образом: $U \subset X/R$ называется открытым, если прообраз $p^{-1}(U)$ является открытым в X.

Частным случаем построения фактор-пространства является *стягивание в точку* замкнутого подмножества $M \subset X$. В этом случае точки из подмножества M объявляются эквивалентными друг другу, а остальные точки эквивалентны только себе. Соответствующее фактор-пространство обозначается X/M. Здесь класс, состоящий из множества M, обычно считается отмеченной точкой.

Примеры.

2. Пусть $I = [0,1], M = \{0,1\}$. Пространство, полученное из отрезка отождествлением точек 0 и 1, гомеоморфно окружности S^1.

3. Если X есть квадрат $I\times I$, а M – его граница, то пространство, полученное из квадрата при стягивании границы в точку, гомеоморфно сфере S^2. Аналогично, при стягивании в точку границы $n-$мерного куба I^n получаем сферу S^n.

4. В произведении $X \times [0,1]$ стянем в точку множество $M = X \times \{1\}$. Полученное пространство называется *конусом* над X. В частности, конус над сферой S^n есть шар в $\mathbb{R}^n$.

Еще один частный случай фактор-пространства – приклеивание одного пространства к другому. Пусть есть два топологических пространства X и Y и задано биективное непрерывное отображение f подмножества $M_1 \subset X$ на $M_2 \subset Y$. Точки x и $f(x)$ объявляются эквивалентными. Тогда говорят, что соответствующее фактор-пространство есть пространство, полученное склеиванием пространств X и Y с помощью f.

Примеры.

5. При склеивании двух экземпляров круга с помощью тождественного отображения границы в границу получается сфера. Такое представление сферы будет использоваться ниже.

6. Пусть K^+ есть конус, полученный из произведения $X \times [0,1]$ стягиванием в точку множество $M^+ = X \times \{1\}$, и K^- есть конус, полученный из произведения $X \times [-1,0]$ стягиванием в точку множество $M^- = X \times \{-1\}$. Пространство, полученное склеиванием оснований конусов K^+ и K^-, т.е. множеств $X \times \{0\}$, с помощью тождественного отображения, называется *неприведенной надстройкой.* В частности, надстройка над S^n есть S^{n+1}.

Аналогично определяется склеивание части пространства $M \subset X$ с помощью отображения, удовлетворяющего условию $f(f(x)) \equiv x$.

Пример 7. При склеивании граничной окружности круга с помощью отображения, переводящего точку окружности в диаметрально противоположную точку, получается проективная плоскость.

4. *Приведенное произведение.* В случае пространств с отмеченной точкой рассматривается несколько другая конструкция произведения пространств и надстройки. Пусть (X,x^*) (Y,y^*) есть пространства с отмеченными точками. Рассмотрим произведение $X\times Y$, в нем подмножество $M = (X\times\{y^*\})\bigcup(\{x^*\}\times Y)$ и стянем это подмножество в точку. Получившееся топологическое пространство называется *приведенным произведением* и обозначается $X\bigwedge Y$.

Надстройкой над X называется приведенное произведение $X\bigwedge S^1$.

Конструкцию надстройки можно описать иначе (в случае компактного пространства X): выбрасываем из пространства X отмеченную точку, оставшееся множество умножаем на интервал (0,1) и затем добавляем бесконечно удаленную точку.

В случае сферы $S^n = \widetilde{\mathbb{R}^n}$ после выбрасывания точки ∞ остается пространство $\mathbb{R}^n$. Умножая на $\mathbb{R}$ (пространство, гомеоморфное (0,1)), получаем $\mathbb{R}^{n+1}$, добавив бесконечно удаленную точку получаем S^{n+1}. Таким образом, надстройка над сферой S^n есть сфера S^{n+1}.

Среди свойств приведенного произведения отметим выполнение равенства

$$(X \wedge S^1) \wedge S^1 = X \wedge (S^1 \wedge S^1) = X \wedge S^2,$$

означающего, что вторая надстройка есть приведенное произведение пространства на S^2.

5. Расслоенные пространства. Основные понятия

Расслоением называется сюръективное непрерывное отображение $p : E \to X$ топологических пространств, т.е. тройка (E, X, p).

Пространство E называется *пространством расслоения* или *расслоенным пространством*, пространство X называется *базой расслоения*, отображение p называется *проекцией*. Прообраз точки $p^{-1}(x)$ называется *слоем над точкой* x и обозначается E_x.

Формально определение расслоения совпадает с определением отображения. Но другая терминология связана с другой точкой зрения на это отображение. Здесь в центре внимание то, что пространство расслоения E представляется в виде объединения непересекающихся слоев, база X есть фактор-множество по отношению эквивалентности, при котором классы эквивалентности есть слои, и топология на X есть топология фактор-пространства. Но при этом весьма существенна топология на E, она описывает, как расположены слои относительно друг друга.

В дальнейшем будем рассматривать расслоения, в которых все слои устроены одинаково – гомеоморфны некоторому топологическому пространству F.

Расслоение (E, X, p) называется *локально тривиальным с типовым слоем* F, если у любой точки $x \in X$ существует окрестность U, такая, что каждое множество $p^{-1}(U)$ гомеоморфно декартову произведению $U \times F$, причем соответствующий гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ перестановочен с проекциями.

Множество U называется *картой*, гомеоморфизм φ называется *тривиализацией расслоения* над картой U. Набор карт, покрывающий все X, называется *атласом.*

Расслоения E^1 и E^2 над X называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : E^1 \to E^2$, перестановочный с проекциями и переводящий слой E^1_x в слой E^2_x.

Сечением расслоения называется непрерывное отображение $s : X \to E$ такое, что $ps = Id$. Это условие означает, что для каждого x образ $s(x)$ принадлежит слою E_x. Пространство непрерывных сечений расслоения E обозначается $\Gamma(E)$.

На тривиализацию расслоения можно смотреть как на задание локальной системы координат: отображение $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ ставит в соответствие точке $v \in p^{-1}(U)$ некоторую пару точек $(x, \xi) \in U \times F$, элементы x и ξ служат координатами точки v. Здесь первая координата определена канонически ($x = p(v)$), а условие локальной тривиальности означает, что вторую координату можно задать непрерывно зависящей от v в окрестности точки.

Примером локально тривиального расслоения является декартово произведение топологических пространств $E = X \times F$ с естественной проекцией $p : (x, \xi) \to x$. Такое расслоение называется *расслоением-произведением.*

Расслоение, изоморфное расслоению-произведению, называется *тривиальным.* Содержательность теории расслоений определяется тем, что существуют локально тривиальные расслоения, не являющиеся тривиальными.

Обсудим введенные понятия и, в частности, поясним с разных точек зрения некоторые отличия локально тривиального расслоения от топологического декартова произведения $X \times F$.

Условие перестановочности φ с проекциями означает, слой над точкой x отображается в множество $\{x\} \times F$. Иначе говоря, здесь $v \in E_x$ отображается в точку вида $(x, \xi) = (p(v), \psi_i(v))$, каждый слой гомеоморфен типовому слою F. Поэтому E, как множество, является декартовым произведением $X \times F$, но топология на нем может быть отличной от топологии декартова произведения топологических пространств. Это проявляется в том, что в случае топологического произведения существует непрерывная проекция на F: гомеоморфизмы, отбражающие E_x в F, непрерывно зависящие от x на всем пространстве X. В случае нетривиального расслоения такие гомеоморфизмы $E_x \to F$ нельзя выбрать непрерывно зависящими от точки на всем X.

В случае расслоения-произведения сечение есть непрерывное отображение из X в F, существует много таких отображений, в частности, существуют постоянные сечения. Для произвольного расслоения может оказаться, что не существует ни одного сечения. В случае тривиального расслоения также существует много сечений. Однако понятия постоянного сечения нет, так как изоморфизм с произведением не определяется канонически.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере, который встречается уже на первых шагах знакомства с математикой.

Пример 1. Пусть $E = GL(2, \mathbb{C})$ есть группа матриц размерности 2×2 с естественной топологией. Покажем, что это пространство может быть представлено как расслоенное пространство, причем несколькими разными способами. Такие представления помогают описать топологические свойства этой группы.

1а. Пусть $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и проекция $p(A) = detA, \ \ A \in GL(2, \mathbb{C})$. Здесь слоем E_λ, т.е. прообразом точки $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — является множество матриц с определителем λ. Покажем, что это локально тривиальное расслоение, в котором типовым слоем является группа матриц с определителем 1: $F = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : detA = 1\}$. Действительно, при заданном λ_0 рассмотрим круг $U_0 = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < |\lambda|_0\}$. Построим тривиализацию — отображение φ из $p^{-1}(U_0)$ в $U_0 \times F$. Для этого матрице $A \in p^{-1}(U_0)$ поставим в соответствие пару

$$(detA, \sqrt{detA}\ A) \in U_0 \times F.$$

Чтобы это отображение было непрерывным, следует зафиксировать входящую в формулу непрерывную ветвь $\sqrt{\lambda}$ в круге U_0. Это означает, что расслоение локально тривиально. Но нельзя выбрать непрерывную ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ на всем множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, так как у этой функции имеется точка ветвления. Из этого можно получить, что расслоение не является тривиальным.

1б. Пусть $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и проекция $p(A)$ ставит в соответствие матрице ее первый столбец $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Здесь слоем $E_\xi, \xi \in X$, является множество матриц, у которых первым столбцом является вектор ξ. При заданном ξ такие матрицы определяются вторым столбцом $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, причем вектор ζ должен быть линейно независимым с ξ. Например, если $\xi = (1, 0)$, то вектор ζ должен удовлетворять условию $\zeta_2 \neq 0$. Таким образом, слой на этой точкой есть пространство вида $F = \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2 : \eta_2 \neq 0\}$, т.е. это пространство $\mathbb{C}^2$ с выброшенным одномерным подпространством, состоящим из векторов вида $(\eta_1, 0)$. Очевидно, что остальные слои устроены аналогично: матрицы из слоя E_ξ параметризуются векторами из $\mathbb{C}^2$ с выброшенным одномерным подпространством, порожденным вектором ξ.

Покажем, что это расслоение локально тривиально. Пусть $U_1 = \{\xi : \xi_1 \neq 0\}$. Матрице $A \in p^{-1}(U_1)$ поставим в соответствие пару $(\xi, \eta) \in U_1 \times F$ по формуле

$$\eta = (\frac{\zeta_1}{\xi_1}, \zeta_2 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\zeta_1).$$

Пусть $U_2 = \{\xi : \xi_2 \neq 0\}$. Матрице $A \in p^{-1}(U_2)$ поставим в соответствие пару $(\xi, \eta) \in U_2 \times F$ по другой формуле

$$\eta = (\frac{\zeta_2}{\xi_2}, \zeta_1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}\zeta_2).$$

Таким образом, пространство X покрыто двумя картами U_1 и U_2, над которыми расслоение тривиально. Мы пока не можем доказать нетривиальность этого расслоения, но предпосылка к доказательству содержится в том, что эти две тривиализации заданы принципиально разными формулами.

По расслоению E над X и непрерывному отображению $f : Y \to X$ естественно строится расслоение $f^*(E)$ над Y. Оно задается как подмножество в произведение $Y \times E$ вида

$f^*(E) = \{(y,v) : p(v) = f(y)\}$. Определив на $f^*(E)$ проекцию $q : (y,v) \to y$, получаем, что $f^*(E)$ есть расслоение, причем слоем над точкой y является слой $E_{f(y)}$ в расслоении E. Это отображение расслоений обладает *свойством функториальности*: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Представление пространства E как расслоенного пространства прежде всего позволяет изучить топологическое устройство этого пространства и связать его топологические свойства со свойствами базы X и слоя F.

С другой точки зрения, совокупность всех расслоений над X с заданным типовым слоем F зависит от устройства пространства X и, следовательно, является его топологической характеристикой. В случае, когда типовой слой F является конечномерным векторным пространством, эта точка зрения развивается при построении $K-$теории. При этом ведущую роль играют топологические свойства групп матриц, а эти свойства исследуются, в свою очередь, с помощью представления групп матриц в виде расслоенных пространств, подобно тому, как это было сделано в рассмотренном выше примере 1.

6. Координатное описание расслоения

Для заданного расслоения (E, X, p) рассмотрим атлас – покрытие пространства X множествами, над которыми расслоение тривиально. Если пространство X компактно, то существует конечный атлас $U_i, i = 1, \ldots, m$. Заметим, что если $X = \bigcup U_i$, где открытые множества U_i стягиваемы, то над U_i любое расслоение тривиально и такой набор является атласом для любого расслоения. Иногда полезно рассмотрение *максимального атласа*, состоящего из набора всех открытых подмножеств из X, над которыми расслоение тривиально.

Если пересечение $U_i \bigcap U_j$ непусто, то для множества $p^{-1}(U_i \bigcap U_j)$ определены два гомеоморфизма с пространством $(U_i \bigcap U_j) \times F$, перестановочные с проекциями:

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i \bigcap U_j) \to (U_i \bigcap U_j) \times F, \quad \varphi_j : p^{-1}(U_i \bigcap U_j) \to (U_i \bigcap U_j) \times F.$$

Поэтому композиция $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ является гомеоморфизмом произведения $(U_i \bigcap U_j) \times F$ на себя, отображающим каждый слой в себя, т.е. имеющим вид

$$\varphi_{ij}(x, \xi) = (x, \varphi_{ij}(x, \xi)).$$

Здесь при фиксированном x отображение $\varphi_{ij}(x, \cdot)$ есть гомеоморфизм слоя. Будем обозначать этот гомеоморфизм через $\psi_{ij}(x)$, а образ точки $\xi \in F$ при этом гомеоморфизме будем обозначать $\psi_{ij}(x)\xi$. Иначе говоря, используем обозначение $\varphi_{ij}(x, \xi) = \psi_{ij}(x)\xi$.

Таким образом, здесь на каждом из множеств $U_i \bigcap U_j$ задано непрерывное отображение в группу гомеоморфизмов типового слоя. Отображения $\psi_{ij}(x)$ называются *функциями склейки.*

По функциям склейки расслоение восстанавливается следующим образом. Рассмотрим дизъюнктное объединение произведений

$$\coprod_i (U_i \times F).$$

На нем зададим отношение эквивалентности по правилу: если $x \in U_i \bigcap U_j$, то точка $(x, \xi) \in U_i \times F$ эквивалентна точке $(x, \psi_{ij}(x)\xi)) \in U_i \times F$. Эта конструкция есть склеивание пространств $U_i \times F$ с помощью отображений $\psi_{ij}(x)$. После отождествления эквивалентых точек получаем пространство, гомеоморфное исходному пространству расслоения E и естественную проекцию на X.

Выше по непрерывному отображению $f : Y \to X$ и расслоению E над X было построено расслоение $f^*(E)$ над Y.

Рассмотрим, как эта конструкция описывается с помощью функций склейки. Пусть $\{U_i\}$ есть атлас и $\psi_{ij}(x)$ есть соответствующие функции склейки. Тогда прообразы $V_i = f^{-1}(U_i)$ образуют покрытие Y открытыми множествами, над которыми расслоение $f^*(E)$ тривиально, а на пересечении $V_i \bigcap V_j$ функции склейки имеют вида $\psi_{ij}(f(y))$.

Обычно рассматриваются функции склейки, значения которых не являются произвольными гомеоморфизмами слоя, а принадлежат некоторой подгруппе G группы всех гомеоморфизмов пространства F. Эта группа G называется *структурной группой расслоения.*

Подгруппа G группы всех гомеоморфизмов пространства F обычно возникает, если на F задана дополнительная структура. В этом случае естественно в качестве G взять подгруппу, состоящую из гомеоморфизмов, согласованных с этой структурой. Например, если F есть $n-$мерное комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$, то естественно рассмотреть группу $GL(n,\mathbb{C})$ линейных преобразований этого пространства.

Локально тривиальное расслоение E над пространством X называется *$n-$мерным комплексным (вещественным) векторным расслоением,* если типовой слой $F=\mathbb{C}^n$ ($F=\mathbb{R}^n$) и структурная группа есть группа $GL(n,\mathbb{C})$ ($GL(n,\mathbb{R})$) линейных преобразований $n-$мерного пространства.

Здесь приходится вернуться к понятию изоморфизма расслоений, так как это понятие может зависеть от рассматриваемой структурной группы. Расслоения E^1 и E^2 называются *$G-$изоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : E^1 \to E^2$, перестановочный с проекциями, такой, что слой E^1_x гомеоморфно отображается на слой E^2_x с помощью гомеоморфизма, принадлежащего группе G.

Если группа G фиксирована, то $G-$изоморфные расслоения обычно называют просто изоморфными. В дальнейшем изоморфные расслоения отождествляются.

Вернемся к координатному заданию расслоений.

Выбирая разные покрытия пространства X и функции склейки, можно задать все расслоения над X со слоем F. Заметим, что функции склейки не могут выбираться произвольно: они должны удовлетворять дополнительным условиям.

Пусть не пусто пересечение трех множеств $U_i\bigcap U_j\bigcap U_k$. Тогда на множестве $(U_i\bigcap U_j\bigcap U_k)$ определены три функции склейки $\varphi_{ij},\varphi_{jk}$ и φ_{ik}, которые связаны соотношением

$$\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}=\varphi_{ik}, \tag{8}$$

так как $\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}\circ\varphi_j\circ\varphi_k^{-1}$.

Кроме того, очевидно, что

$$\varphi_{ij}=\varphi_{ji}^{-1},\quad \varphi_{ii}(x)\equiv x. \tag{9}$$

Набор отображений отображений $\{\varphi_{ij}\}$, определенных на $U_i\bigcap U_j$ и связанный соотношениями (8) и (9), называется *коциклом.* Каждый такой коцикл задает локально тривиальное расслоение над X со слоем F.

Выясним, когда два коцикла задают изоморфные расслоения.

Предложение 1. *Пусть*

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i)\to U_i\times F \quad \text{и} \quad \omega_i : p^{-1}(U_i)\to U_i\times F$$

– две тривиализации расслоения E над множеством U_i. Тогда $\lambda_i=\varphi_i\circ\omega_i^{-1}$ есть отображение $U_i\times F$ в себя, перестановочное с проекцией, причем при фиксированном $x\in U_i$ это есть отображение слоя, принадлежащее группе G.

Таким образом, две тривиализации расслоения связаны условием, что существует набор отображений $\lambda_i : U_i\to G$, такой, что $\varphi_i=\lambda_i\circ\omega_i$. Из это утверждения получаем связь коциклов.

Теорема 10. *Коциклы $\{\varphi_{ij}\}$ и $\{\omega_{ij}\}$ задают изоморфные расслоения тогда и только тогда, когда существует набор непрерывных отображений $\lambda_i : U_i\to G$, такой, что $\varphi_{ij}=\lambda_i\circ\omega_{ij}\circ\lambda_j^{-1}$.*

Два коцикла, для которых выполнено условие, описанное в теореме 10, называются *когомологичными.* Таким образом, можем переформулировать теорему.

Теорема 11. *Множество классов изоморфных расслоений над X находится в биективном соответствии с множеством классов когомологичных коциклов.*

Заметим, что это утверждение не есть решение задачи об описании множества классов изоморфных расслоений над X, а просто некоторая переформулировка задачи.

В ряде примеров, например, в случае, когда X есть сфера, оказывается, что достаточно рассмотреть покрытие только двумя множествами U_1 и U_2, над которыми расслоение тривиально. В таком случае имеется только одна функция склейки, заданная на пересечении $U_1 \bigcap U_2$, и любое непрерывное отображение $\psi : U_1 \bigcap U_2 \to G$ является коциклом.

Главные G-расслоения. Пусть $\psi_{ij}(x)$ есть функции склейки для некоторого расслоения E. Значение $\psi_{ij}(x)$ (при фиксированном x) есть элемент группы G и его можно применить не только к элементам пространства F, но и применить (умножив слева) к элементам группы G, т.е. он задает гомеоморфизм группы G. Значит, по этим функциям склейки можно построить новое расслоение, слоем которого является группа G. Такое расслоение E_G называется *главным G-расслоением.* Главное G-расслоение задается с помощью тех же функций склейки и отражает все свойства исходного расслоения E.

Связь теории расслоений с гомотопическими вопросами проявляется в том, что если для расслоений E_1 и E_2 функции склейки гомотопны, то расслоения изоморфны. Это вытекает из следующего общего утверждения. В дальнейшем будут рассматриваться только расслоения, у которых структурная группа является некоторой группой матриц или группой Ли.

Теорема 12. *Пусть $E \to X \times I$ есть локально тривиальное G-расслоение над произведением компактного пространства X и отрезка $I = [0,1]$, и G есть группа Ли. Тогда ограничение расслоения E на подпространство $X \times \{0\}$ изоморфно ограничению расслоения E на подпространство $X \times \{t\}$ для любого $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Множества вида $U \times [(\alpha,\beta) \bigcap I]$, где U – открытое в X, образуют базу открытых множеств в произведении $X \times I$. Поэтому существует конечный набор таких множеств, образующий покрытие пространства $X \times I$, над которыми расслоение тривиально. При этом такие множества можно выбрать так, что тривиализация φ : $p_{-1}(U \times [(\alpha,\beta) \bigcap I)$ непрерывно продолжается на замыкание множества $U \times [(\alpha,\beta) \bigcap I]$.

Сначала выберем из те множества из покрытия, для которых множество $(\alpha,\beta) \bigcap I$ содержит точку 0, и занумеруем их. Получаем множества $U_i \times [0,\beta_i), 1 \le i \le N$. Возьмем $\beta_0 > 0$, такое, что $\beta_0 < \min\{\beta_i\}$. Тогда расслоение E тривиально над множествами $U_i \times [0,\beta_0]$ и эти множества образуют покрытие произведения $X \times [0,\beta_0]$. Функции склейки ψ_{ij} являются функциями двух переменных x и t, где $x \in U_i \bigcap U_j$, $t \in [0,\beta_0]$ со значениям в группе G.

Рассмотрим функции

$$\omega_{ij}(x,t_1,t_2) = \psi_{ij}(x,t_1)\psi_{ij}^{-1}(x,t_2) \quad \text{для} \;\; x \in U_i \bigcap U_j, \;\; t_1,t_2 \in [0,\beta_0].$$

Так как $\omega_{ij}(x,0,0) = e$, при достаточно малом β_0 значения $\omega_{ij}(x,t_1,t_2)$ лежат в заданной окрестности $\mathcal{O}$ единицы группы G.

Так как G является группой Ли, существует окрестность $\mathcal{O}$ единицы в группе G, которая гомеоморфна шару в евклидовом пространстве, и при этом каждая из окрестностей $\mathcal{O}^j$ при $1 \le j \le N$ также гомеоморфна шару.

Теперь мы можем доказать изоморфность расслоений E_0 и E_t. Для этого, согласно теореме 10, достаточно построить функции $\lambda_i : U_i \times [0,\beta_0] \to G$, такие, что

$$\varphi_{ij}(x,t) = \lambda_i \circ \varphi_{ij}(x,0) \circ \lambda_j^{-1}.$$

Будем строить эти функции по индукции. Положим $\lambda_1(x,t)) \equiv e$. На пересечении $U_1 \bigcap U_2$ должно выполняться $\lambda_2(x,t) = \varphi_{ij}(x,t)\varphi_{ij}^{-1}(x,0)$. Поскольку значения $\varphi_{ij}(x,t)$ $\varphi_{ij}^{-1}(x,0)$ принадлежат окрестности $\mathcal{O}$, значения $\lambda_2(x,t)$ принадлежат окрестности $\mathcal{O}^2$, гомеоморфной шару из конечномерного пространства. Согласно лемме Урысона-Титце, функцию $\lambda_2(x,t)$ можно продолжить до непрерывной функции на всем U_2 со значениями в окрестности $\mathcal{O}^2$. Если пересечение $U_1 \bigcap U_2$ пусто, то положим $\lambda_2(x) \equiv e$. Далее допустим, что функции уже заданы при $j < n$. Тогда функция λ_n однозначно определена на пересечениях $U_j \bigcap U_n$ при $j < n$ и принимает значения в $\mathcal{O}^n$. Для такой функции также существует продолжение на все U_n со значениями в $\mathcal{O}^n$. Таким образом, существуют требуемые функции λ_j и из теоремы 10 следует, что расслоения E_t изоморфны при всех $t \in [0, \beta_0]$.

Далее из компактности отрезка получаем, что изоморфизм имеет место для всех $t \in [0, 1]$.

Следствие 1 *Если отображения f_0 и f_1 гомотопны, то расслоения $f_0^*(E)$ и $f_1^*(E)$ изоморфны.*

Следствие 2 *Если для расслоений E_1 и E_2 функции склейки гомотопны, то расслоения изоморфны.*

Следствие 3 *Если пространства X_1 и X_2 гомотопически эквиваленты и $f : X_1 \to X_2$ – гомотопическая эквивалентость, то отображение f^* порождает биекцию между множеством классов эквивалентых G-расслоений со слоем F над X_1 и над X_2. В частности, если пространство X стягиваемо, то все G-расслоения над X тривиальны.*

Замечание. В общем случае из изоморфности расслоений не следует, что функции склейки (соответствующие коциклы) гомотопны.

7. Гомотопические группы

В рассматриваемых задачах важной оказываются информация о структуре множества $[Y, X]$, состоящего из классов гомотопных отображений из пространства Y в X. Среди таких множеств особый интерес представляет случай, когда $Y = S^k$, так как на множестве $[S^k, X]$ можно ввести операцию умножения, превращающую это множество в группу. Приведем соответствующие определения.

Пусть (X, x^*) есть топологическое пространство с отмеченной точкой x^*. *Петлей* в (X, x^*) называется непрерывное отображение отрезка $\varphi : [0, 1] \to X$, такое, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x^*$. Множество $\pi_1(X, x^*)$ есть множество классов гомотопных между собой петель. Заметим, что петлю можно рассматривать как непрерывное отображение в X окружности S^1 (полученной отождествлением точек 0 и 1 отрезка), отображающее отмеченную точку в отмеченную.

Для петель вводится операция умножения по правилу

$$[\varphi \circ \psi](s) = \begin{cases} \varphi(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \psi(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases} \tag{10}$$

Это умножение петель порождает на множестве $\pi_1(X, x^*)$ структуру группы, в частности, обратным к классу, содержащему петлю φ, является класс, порожденный петлей $\psi(s) = \varphi(1-s)$.

Построенная группа $\pi_1(X, x^*)$ называется *фундаментальной* или *первой гомотопической группой* пространства X.

Заметим, что согласно определению, все петли являются отображениями отрезка в компоненту линейной связности, содержащую отмеченную точку, и группа $\pi_1(X, x^*)$ не зависит от устройства остальных компонент линейной связности. Если пространство X линейно связно, то фактически группа $\pi_1(X, x^*)$ не зависит от выбранной отмеченной точки — при выборе другой отмеченной точки получаем изоморфную группу.

Высшие гомотопические группы $\pi_k(X, x^*)$ вводятся аналогично. Пусть $I = [0, 1]$ и I^k есть $k-$мерный куб. Рассматриваются $k-$мерные петли – непрерывные отображения $\varphi : I^k \to X$, такие, что $\varphi(s) = x^*$ для всех точек границы куба. Если границу куба стянуть в точку, получаем $k-$мерную сферу S^k с отмеченной точкой. Поэтому $k-$мерная петля есть фактически непрерывное отображение сферы S^k в пространство X, отображающее отмеченную точку в отмеченную, и ее обычно называют *$k-$мерным сфероидом.*

Множество $\pi_k(X, x^*)$ есть множество классов гомотопных между собой $k-$мерных сфероидов.

Представление петель как отображений куба удобно для введения умножения. При $k > 1$ умножение сфероидов вводится по правилу

$$[\varphi \circ \psi](s) = \begin{cases} \varphi(2s_1, s_2, \ldots, s_k), & 0 \le s_1 \le \frac{1}{2}, \\ \psi(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k), & \frac{1}{2} \le s_1 \le 1. \end{cases}$$

Введенное умножение сфероидов порождает на множестве $\pi_k(X, x^*)$ структуру группы, причем при $k > 1$ эта группа коммутативна.

При $k = 0$ множество $\pi_0(X)$ определяется как множество компонент линейной связности пространства X, причем умножение на этом множестве не вводится.

Функториальность. Непрерывное отображение $f : X \to Y$, переводящее отмеченную точку в отмеченную, порождает отображение петель $\varphi \to f \circ \varphi$, которое, в свою очередь, порождает гомоморфизм гомотопических групп

$$f_* : \pi_k(X, x^*) \to \pi_k(Y, y^*).$$

При этом $(g \circ f)_* = g_* f_*$ — композиции отображений соответствует произведение гомоморфизмов.

Вычисление гомотопических групп конкретных пространств может оказаться очень сложной задачей, но разработаны различные методы, позволяющие во многих случаях получить явные результаты. Приведем некоторые сведения о гомотопических группах, в основном без доказательств.

Сначала сформулируем несколько простых общих утверждений, которые следуют непосредственно из определений.

Теорема 13. *1. Если пространство стягиваемо, то все его гомотопические группы тривиальны.*

2. Если пространства гомотопически эквивалентны, то их гомотопические группы изоморфны.

3. Если отображения гомотопны, то индуцированные ими гомоморфизмы гомотопических групп совпадают.

4.

$$\pi_k(X \times Y) = \pi_k(X) \bigoplus \pi_k(Y).$$

Покажем, например, как доказывается утверждение 4. Сфероид $\varphi : I^k \to X \times Y$ имеет вид $\varphi(s) = (\varphi_X(s), \varphi_Y(s))$, где $\varphi_X : I^k \to X$, $\varphi_Y : I^k \to Y$. Поэтому гомотопию сфероидов φ_X и φ_Y можно проводить независимо, откуда и получается утверждение.

Утверждение 4 является одним из способов доказательства нетривиальности расслоения. Действительно, если для некоторого k

$$\pi_k(E) \neq \pi_k(X) \bigoplus \pi_k(F), \tag{11}$$

то пространство расслоения E не гомеоморфно произведению $X \times F$ и, следовательно, расслоение нетривиально.

Такой прием не помогает в случае векторных расслоений, так как для них равенство (11) выполнено. Но можно рассмотреть соответствующее главное G-расслоение E_G. Так как обычно среди гомотопических групп $\pi_k(G)$ есть нетривиальные, может оказаться, что некоторого k группа $\pi_k(E_G)$ неизоморфна группе $\pi_k(X) \bigoplus \pi_k(G)$, тогда расслоение E_G нетривиально и, следовательно, нетривиально исходное векторное расслоение E.

Как было отмечено, задача о гомотопической классификации фредгольмовых операторов для специальных классов операторов сводится к гомотопической классификации невырожденных матриц-функций на некотором компактном пространстве. Естественно, что при этом начинают играть роль гомотопические группы линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$. Фактически при получении формулы индекса СИО (при доказательстве теоремы 4) мы уже вычислили одну из таких групп.

Следствие из теоремы 4.

$$\pi_0(GL(\mathbb{C}, n)) = 0, \quad \pi_1(GL(\mathbb{C}, n)) = \mathbb{Z}.$$

В дальнейшем нам понадобятся также гомотопические группы сфер.

Теорема 14. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_k(S^1) = 0$ *при* $k \geq 2$.

Доказательство. Вычисление группы $\pi_1(S^1)$ содержится в доказательстве теоремы 3. Согласно теореме 3 каждому классу гомотопных между собой петель соответствует целое число – индекс Коши. При умножении петель по правилу (10) их индексы Коши складываются. Поэтому групповая операция на $\pi_1(S^1)$ совпадает с обычным сложением целых чисел.

При $k = 2$ доказательство приведено ниже.

Теорема 15. $\pi_k(S^n) = 0$ *при* $k < n$.

Схема доказательства. Сфероид $\varphi : I^k \to S^n$ можно приблизить гладким отображением, которое гомотопно исходному. При $k < n$ образ гладкого сфероида не может иметь размерность, большую k, поэтому образ гладкого сфероида не совпадает со всей сферой S^n. Пусть $x_0 \in S^n$ и эта точка не принадлежит образу сфероида. Пространство $S^n \setminus x_0$ гомеоморфно шару, является стягиваемым пространством, поэтому сфероид гомотопен постоянному отображению.

Первый результат о нетривиальности гомотопических групп сферы S^n при $n \geq 2$ в был получен Хопфом (H. Hopf).

Теорема 16. $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Если n-мерный сфероид рассматривать как отображение из S^n в S^n, то среди таких сфероидов есть тождественное отображение $\varphi(s) = s$. Это отображение негомотопно постоянному и класс этого отображения является образующим элементом группы $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Неожиданным оказался открытый Хопфом факт, что отображение $f : S^3 \to S^2$ может быть негомотопным постоянному отображению, т.е. что гомотопическая группа $\pi_k(S^n)$ сферы S^n может быть нетривиальной при $k > n$. В частности, им было доказана

Теорема 17. $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Обнаружение этих фактов "явилось в начале тридцатых годов одной из главных сенсаций"([9] стр.97).

Хопфом была использована следующая конструкция. Пространство $\mathbb{R}^4$ будем рассматриваит как $\mathbb{C}^2 = \{(u, w) : z,\ w \in \mathbb{C}\}$, а трехмерную сферу реализовать как подмножество в $\mathbb{C}^2$:

$$S^3 = \{(u, w) : |u|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Для точки $(u, w) \in S^3$ отношение $z = u/w$ может быть комплексным числом и может принимать значение ∞, т.е. это точка из расширенной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}}$— сферы Римана. Поэтому определено отображение, называемое *отображением Хопфа*

$$f : S^3 \to S^2 = \widetilde{\mathbb{C}}, \quad f(u, w) = u/w. \tag{12}$$

Отображение Хопфа негомотопно постоянному (это будет показано ниже) и порождает образующий элемент группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Как отмечалось выше, из изоморфности расслоений в общем случае не следует, что функции склейки гомотопны. Покажем, что в случае, когда базой расслоения является сфера, гомотопность функций склейки обычно эквивалентна изоморфности соответствующих расслоений. Соответствующее утверждение формулируется обычно в следующем виде.

Теорема 18. *Если структурная группа G является связной группой Ли, то существует биекция между классами эквивалентных G-расслоений над сферой S^n и элементами группы $\pi_{n-1}(G)$.*

Доказательство. Сферу S^n представляем как объединение двух полусфер $S^n = U_1 \bigcup U_2$. Каждая из полусфер гомеоморфна шару $D^n = \{x : \|x\| \leq 1\}$ в R^n и является стягиваемым пространством. Поэтому над каждой из полусфер любое расслоение тривиально. Следовательно, расслоение определяется одной функцией склейки, заданной на пересечении $U_1 \bigcap U_2$. При этом любое непрерывное отображение $\psi : U_1 \bigcap U_2 \to G$ является коциклом.

Пересечение $U_1 \bigcap U_2$ является сферой S^{n-1} (либо гомотопически эквивалентно S^{n-1}), а функция склейки является непрерывным отображением $\varphi : S^{n-1} \to G$.

Согласно следствию 2 теоремы 12, если функции склейки для двух расслоений гомотопны, то расслоения изоморфны.

Покажем, что в рассматриваемом случае верно и обратное. Пусть два расслоения над сферой S^n изоморфны и пусть φ и ω есть соответствующие функции склейки. Согласно теореме 12 функции склейки когомологичны, т.е. существуют непрерывные отображения $\lambda_i : U_i \to G$, такие, что $\varphi(x) = \lambda_1(x) \circ \omega(x) \circ \lambda_2^{-1}(x)$ при x, принадлежащих сфере $S^{n-1} = U_1 \bigcap U_2$. Тогда семейство отображений

$$\varphi_t(x) = \lambda_1(tx) \circ \omega(x) \circ \lambda_2^{-1}(tx),\ 0 \leq t \leq 1,\ x \in D^n,$$

является гомотопией между функцией склейки $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ и функцией склейки

$$\varphi_0(x) = \lambda_1(0) \circ \omega(x) \circ \lambda_2^{-1}(0).$$

В силу линейной связности группы постоянное отображение $\lambda_i(0)$ гомотопно постоянному отображению $\lambda_0(s) \equiv e$. Поэтому φ и ω гомотопны.

8. Точная гомотопическая последовательность расслоения

Одним из первых результатов, связывающих топологические свойства расслоенного пространства E со свойствами базы X и слоя F, является теорема о точной гомотопической последовательности.

Как было отмечено, если $E = X \times F$, то имеет место равенство

$$\pi_k(E) = \pi_k(X) \times \pi_k(F). \tag{13}$$

В случае локально тривиального расслоения E эти равенства могут не выполняться, но имеется связь между гомотопическими группами, заключающаяся в существовании точной гомотопической последовательности.

Напомним, что конечная или бесконечная последовательность групп и гомоморфизмов

$$\to G_{k-1} \stackrel{d_{k-1}}{\to} G_k \stackrel{d_k}{\to} G_{k+1} \stackrel{d_{k+1}}{\to}$$

называется *точной,* если $Imd_{k-1} = Kerd_k$ для каждого k.

Существование точной последовательности иногда позволяет однозначно определить группу G_k по остальным группам, но в общем случае это не так.

Например, точность последовательности

$$0 \to G_1 \to G_2 \to 0$$

эквивалентна тому, что группы G_1 и G_2 изоморфны.

Точность последовательности групп

$$0 \to G_1 \stackrel{d_1}{\to} G_2 \stackrel{d_2}{\to} G_3 \to 0 \tag{14}$$

означает, что G_1 вкладывается в G_2 и группа G_3 изоморфна фактор-группе G_2/G_1. Но эти условия не определяют однозначно группу G_2 по группам G_1 и G_3.

Например, пусть $G_1 = \mathbb{Z},\ G_3 = \mathbb{Z}_2$ и существует точная последовательность (14). Здесь возможны два варианта.

1. $G_2 = \mathbb{Z}$ и отображение d_1 действует по формуле $d_1(k) = 2k$.

2. $G_2' = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}_2 = \{(k, l) : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}_2\}$ и отображение d_1 действует по формуле $d_1(k) = (k, 0)$.

Для групп G_2 и G_2' существуют точные последовательности вида (14), но эти группы неизоморфны.

Рассмотрим локально тривиальное расслоение $p : E \to X$. Проекция $p : E \to X$ порождает гомоморфизмы $p_* : \pi_k(E) \to \pi_k(X)$ соответствующих гомотопических групп. Пусть $j : F \to E_* \subset E$ есть вложение типового слоя F в E в виде слоя над отмеченной точкой. Это отображение также порождает гомоморфизмы гомотопических групп $j_* : \pi_k(F) \to \pi_k(E)$.

Теорема 19. *Существуют такие гомоморфизмы $\partial_k : \pi_k(X) \to \pi_{k-1}(F)$, что последовательность*

$$\to \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k-1}(F) \xrightarrow{j_*} \pi_{k-1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{p_*} \pi_1(X)$$

является точной.

При применении этой теоремы бывают ситуации, когда только из существования точной последовательности можно сделать определенные выводы.

Следствие. 1. *Если $\pi_k(X) = \pi_k(F) = 0$, то для любого расслоения с базой X и типовым слоем F выполнено $\pi_k(E) = 0$.*

2. *Если $k > 1$ и $\pi_k(F) = \pi_{k-1}(F) = 0$, то для любого расслоения с базой X и типовым слоем F выполнено $\pi_k(E) = \pi_k(X)$.*

Обычно информацию о гомотопических группах $\pi_k(E)$, отличающую конкретное расслоение от других расслоений с той же базой и тем же слоем, получают, находя явный вид отображений, входящих в точную гомотопическую последовательность.

9. Примеры расслоений

Структурой расслоения обладают многие пространства, встречающиеся в разных вопросах. Рассмотрим несколько примеров.

1. *Накрытие окружности прямой.* Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Рассмотрим отображение $p : \mathbb{R} \to S^1$, заданное формулой $p(s) = e^{i2\pi s}$. Здесь каждый слой есть счетное множество, состоящее из точек вида $t_0 + k, k \in \mathbb{Z}$, естественно изоморфное (дискретному) пространству $\mathbb{Z}$.

Построим функции склейки для этого примера. Прообраз полуокружности U_1 есть

$$p^{-1}(U_1) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} [0, 1/2] + k = \{t = \tau + k : \tau \in [0, 1/2], k \in \mathbb{Z}\}.$$

Здесь $\tau = \{t\}$ – дробная часть t, $k = [t]$ – целая часть t. Для этого множества можем многими способами задать тривиализацию – изоморфизм с произведением $[0, 1/2] \times \mathbb{Z}$. Выбираем наиболее простой из таких изоморфизмов

$$\varphi_1 : p^{-1}(U_1) \ni t \to (\tau, k). \tag{15}$$

Прообраз полуокружности U_2 есть

$$p^{-1}(U_2) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} [1/2, 1] + n = \{t = \tau + n : \tau \in [1/2, 1], n \in \mathbb{Z}\}.$$

и тривиализация может быть задана по аналогичной формуле

$$\varphi_1 : p^{-1}(U) \ni t \to (\tau, n). \tag{16}$$

Здесь пересечение $U_1 \bigcap U_2$ состоит из двух точек. В точке $1/2$ функция склейки тождественная $\psi(1/2)k = k$. При тривиализации (15) точке $t = k$ соответствует пара $(0, k)$. Но точка 0 на окружности отождествляется с точкой 1 и при тривиализации (16) точке $t = k$ соответствует пара $(0, k-1)$. Таким образом, склеивающее отображение действует по формуле $\psi(0)k = k - 1$.

Таким образом, здесь типовым слоем является группа $\mathbb{Z}$, а действие склеивающих отображений задается как композиции с элементом из группы (вычитание числа 1). Согласно введенной выше терминологии это означает, что рассматриваемое расслоение является главным $\mathbb{Z}$-расслоением.

Проведенные рассуждения становятся наглядными и геометрически очевидными, если прямую реализовать в пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \bigoplus \mathbb{R}$ как винтовую линию $\{(e^{i2\pi t}, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

2. *n-листное накрытие окружности.* Отображение окружности S^1 в себя, заданное формулой $z \to z^n$, является локально тривиальным расслоением, типовым слоем является дискретное пространство, состоящее из n точек. Аналогично предыдущему нетрудно построить функции склейки и убедиться, что структурная группа есть группа Z_n.

При $n > 1$ у тривиального расслоения S^1 со слоем Z_n пространство расслоения есть несвязное пространство $S^1 \times Z_n$. Но в рассматриваемом примере пространство расслоения есть S^1 и это связное пространство. Поэтому расслоение нетривиально.

3. *Лист Мебиуса.* Это один из немногих примеров неодномерных расслоенных пространств, которые можно представить наглядно, поскольку это пространство может быть реализовано как подмножество в $\mathbb{R}^3$. С другой стороны этот пример создает иллюзию, что и другие расслоения можно представить зрительно и применить геометрическую интуицию. Однако возможности нашего воображения ограничены и представить другие расслоения наглядно труднее, чем исследовать их свойства с помощью аналитического аппарата.

Лист Мебиуса M_I определяется обычно как пространство, полученное из прямоугольника склеиванием двух противоположных сторон с противоположной ориентацией. Прямоугольник есть $\{(x,\xi) : 0 \le x \le 1,\ -1 \le \xi \le 1\}$. Указанное склеивание означает, точка $(0,\xi)$ объявляется эквивалентной (приклеивается к) точке $(1,-\xi)$. Если рассмотреть средний отрезок $\{(x,0), 0 \le x \le 1\}$, то из этого отрезка после склеивания получается окружность S^1. Отображение $(x,\xi) \to x$ порождает отображение $p : M \to S^1$, слой над точкой x есть множество $M_x = \{(x,\xi) : -1 \le \xi \le 1\}$, гомеоморфное отрезку $[-1,1]$.

С помощью функций склейки лист Мебиуса может быть задан следующим образом. Пусть $U_1 = [0,1/2]$, $U_2 = [1/2,1]$. Функции склейки для произведений $U_i \times [-1,1]$ задаются в точках из пересечения $U_1 \bigcap U_2$ по формулам:

$$\varphi_{12}(1/2,\xi) = (1/2,\xi), \quad \varphi_{12}(0,\xi) = (0,-\xi).$$

Здесь участвует только два гомеоморфизма слоя, с помощью которых склеиваются рассматривамые произведения: тождественное $\psi(1/2) : \xi \to \xi$ отображение в точке $1/2$ и отображение $\psi(0) : \xi \to -\xi$. Эти отображения образуют группу из двух элементов, т.е. структурной группой можно считать $G = \mathbb{Z}_2$.

Построим соответствующее главное G-расслоение. Каждое из произведений $U_i \times G$ есть пара отрезков, согласно заданным функциям склейки они склеиваются в точке $1/2$ "прямо"и в точке 0 – "накрест". Получившееся пространство устроено как окружность, но проекция действует как наматывание два раза окружности на окружность, т.е. это расслоение из примера 2, соответствующее $n = 2$. Так как расслоения из примера 2 нетривиальны, лист Мебиуса есть нетривиальное расслоение.

4. *Расслоение Хопфа трехмерной сферы.* Пусть $f : S^3 \to S^2 = \widetilde{\mathbb{C}}$ есть введенное выше отображение Хопфа (12), заданное формулой $f(u,w) = u/w$. Здесь использована реализация трехмерной сферы как подмножество в $\mathbb{C}^2$:

$$S^3 = \{(u,w) : |u|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Покажем, что это отображение задает локально тривиальное расслоение.

Пусть $U_1 = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : |z| < \infty\}$. Обозначив $\lambda w = \xi$, получаем, что точка $(z,\lambda u,\lambda w)$ из $f_{-1}(U_1)$ может быть однозначно представлена в виде $(z,\xi z,\xi)$, где $|\xi| = 1$. Поставим в соответствие ей точку (z,ξ) из $U_1 \times S^1$. Таким образом построено отображение $\varphi_1 : p_{-1}(U_1) \to U_1 \times S^1$, т.е тривиализация расслоения над U_1.

Пусть $U_2 = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : z \ne 0\}$. Обозначив $\lambda u = \eta$, получаем, что точка $(z,\lambda u,\lambda w)$ из $p_{-2}(U_1)$ может быть однозначно представлена в виде $(z,\eta,\eta/z)$, где $|\eta| = 1$. Поставим в соответствие этой точке пару $(z,\eta) \in U_2 \times S^1$. Это и есть тривиализация расслоения над U_2.

Допустим, что это расслоение тривиально, т.е. что сфера S^3 гомеоморфна произведению $S^2 \times S^1$. Согласно теореме 13, п.4, $\pi_1(S^2 \times S^1) = \pi_1(S^2) \bigoplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Но $\pi_1(S^3) = 0$ и получаем противоречие. Таким образом, построенное расслоение сферы S^3 на окружности нетривиально.

Заметим, что тривиализации достаточно построить над меньшими множествами

$$\widetilde{U_1} = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : |z| \le 1\}, \quad \widetilde{U_2} = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : z \ge 1\}, \tag{17}$$

так как они тоже образуют покрытие.

Упражнение. Сферу S^3 можно реализовать как $\mathbb{R}^3$, к которому присоединена точка ∞. Построить расслоение Хопфа для такой реализации S^3.

5. *Векторное расслоение Хопфа.* Формула $f(u,w) = u/w$ задает не только отображение, определенное на S^3, но и отображение из $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ в S^2. При этом отображении прообраз каждой точки образует одномерное комплексное подпространство в $\mathbb{C}^2$ с выброшенной точкой 0. Чтобы получить семейство непересекающихся векторных подпространств, вложим эту конструкцию в пространство большей размерности. Для этого в тривиальном расслоении $\widetilde{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^2$ зададим подмножество с естественной проекцией на $\widetilde{\mathbb{C}} = S^2$:

$$H = \{(u/w, (\lambda u, \lambda w)) \in \widetilde{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Получаем одномерное комплексное расслоение, которое называется *векторным расслоением Хопфа.*

Локальная тривиальность расслоения получается с помощью тех же рассуждений, что и локальная тривиальность отображения Хопфа $f : S^3 \to S^2 = \widetilde{\mathbb{C}}$. Рассмотрим покрытие множествами (17).

Для $z \in \widetilde{U_1}$ точка $(z, \lambda u, \lambda w)$ из $p_{-1}(\widetilde{U_1})$ однозначно представляется в виде $(z, \xi z, \xi)$. Поставим в соответствие ей точку (z, ξ) из $\widetilde{U_1} \times \mathbb{C}$. Это и есть тривиализация расслоения Хопфа над $\widetilde{U_1}$ – отображение $\varphi_1 : p_{-1}(U_1) \to \widetilde{U_1} \times \mathbb{C}$.

Для $z \in \widetilde{U_2}$ точка $(z, \lambda u, \lambda w)$ из $p_{-2}(\widetilde{U_2})$ однозначно представляется в виде $(z, \eta, \eta/z)$. Поставим в соответствие этой точке пару $(z, \eta) \in \widetilde{U_2} \times \mathbb{C}$. Это и есть тривиализация расслоения Хопфа над $\widetilde{U_2}$.

Найдем функцию склейки на перерсечении, т.е при $|z| = 1$. Имеем $\varphi_1^{-1}(z, \xi) = (z, \xi z, \xi) = (z, \xi z, \frac{\xi z}{z})$. Поэтому $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z, \xi) = (z, z\xi)$. Таким образом, функцией склейки является функция $\psi_{21}(z) = z$.

Здесь значения функции склейки принадлежать группе $U(1)$ унитарных преобразование одномерного комплексного пространства и построенное расслоение является одномерным комплексным векторным расслоением на сферой. При этом расслоение Хопфа из п.4 есть главное $U(1)-$расслоение, соответствующее векторному расслоению Хопфа. Этим и объясняется полная аналогия при исследовании отображения Хопфа и векторного расслоения Хопфа. В частности, векторное расслоение Хопфа нетривиально.

6. *Касательное расслоение к сфере* S^2. Рассмотрим множество $T(S^2)$ касательных векторов к сфере с естественной топологией.

Определим проекцию $p : T(S^2) \to S^2$, поставив в соответствие касательному вектору ту точку сферы, в которой вектор является касательным. Каждой точке x сферы соответствует двумерное вещественное векторное подпространство T_x — касательная плоскость в точке x.

Это пример расслоения, который кажется наглядным, но в действительности это пространство устроено достаточно сложно и, в частности, не может быть реализовано как подмножество в $\mathbb{R}^3$. Поэтому попытки наглядно геометрически представить имеющиеся особенности строения этого пространства оказываются безуспешными и здесь исследование приходится проводить с помощью аналитического аппарата. Например, редкий читатель сможет из наглядных соображений, без вычислений, указать, какая функция склейки соответствует расслоению $T(S^2)$.

Пространство $T(S^2)$ может быть реализовано как подмногообразие в $\mathbb{R}^6$ заданное набором алгебраических равенств

$$T(S^2) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^6 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0\}. \tag{18}$$

Проверим локальную тривиальность. У каждой точки сферы хотя бы одна из координат x_1, x_2, x_3 отлична от нуля. Пусть множество $U_k^{\pm}$ состоит из точек, где $\pm x_1 > 0$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\varphi_1 : p^{-1}(U_1^+) \to U_1^+ \times \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(x, \xi) = (x, (\xi_2, \xi_3)).$$

Здесь существует непрерывное обратное отображение

$$\varphi_1^{-1}(x, (\eta_1, \eta_2)) = (x, (-\frac{1}{x_1}(x_2\eta_1 + x_3\eta_2), \eta_1, \eta_2),$$

т.е. φ_1 есть тривиализация расслоения над U_1^+. Аналогично строятся тривиализации над всеми множествами $U_k^{\pm}$

В частности, для отображения

$$\varphi_2 : p^{-1}(U_2^+) \to U_2^+ \times \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, \xi) = (x, (\xi_1, \xi_3))$$

существует непрерывное обратное отображение

$$\varphi_2^{-1}(x, (\eta_1, \eta_2)) = (x, (\eta_1, -\frac{1}{x_2}(x_1\eta_1 + x_3\eta_2), \eta_2)$$

и φ_2 есть тривиализация расслоения над U_2^+.

На пересечении $U_1 \bigcap U_2$ найдем произведение $\varphi_1\varphi_2^{-1}$, т.е. функцию склейки. Согласно предыдущему, это отображение переводит точку $(x, (\eta_1, \eta_2)) \in (U_1 \bigcap U_2) \times \mathbb{R}^2$ в точку $(x, -\frac{1}{x_2}(x_1\eta_1 + x_3\eta_2), \eta_2)$ и имеет вид $\varphi_1\varphi_2^{-1}(x, \eta) = (x, \psi_{12}(x)\eta)$, где матрица $\psi_{12}(x)$, т.е. функция склейки, задана формулой

$$\psi_{12}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_2} & 0 \\ -\frac{x_3}{x_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функции склейки есть линейные отображения пространства $\mathbb{R}^2$ и $T(S^2)$ есть двумерное вещественное векторное расслоение.

Заметим, что двумерное вещественное пространство $\mathbb{R}^2$ можно отождествить с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Но не любое линейное отображение в $\mathbb{R}^2$ является линейным, как отображение в $\mathbb{C}$. Поэтому в общем случае двумерное вещественное расслоение может не быть одномерным комплексным расслоением. Ниже будет показано, что $T(S^2)$ обладает структурой одномерного комплексного расслоения. Нетривиальность этого расслоения будет доказана в п. 13.

7. Рассмотрим группу $U(n)$ унитарных матриц размерности n. Столбцы унитарной матрицы образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^n$, в частности, каждый столбец принадлежит сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение $p : U(n) \to S^{2n-1}$, ставящее в соответствие каждой матрице ее первый столбец.

Покажем, что это локально тривиальное расслоение, в котором типовым слоем является пространство $U(n-1)$. Сначала рассмотрим прообраз вектора $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{2n-1}$. Все унитарные матрицы, у которых первый столбец есть e_1, имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

есть унитарная матрица размерности $n-1$.

Пусть теперь x^0 есть произвольная точка сферы и пусть $a^0 \in p^{-1}(x_0)$. Тогда для любой другой матрицы $a \in p^{-1}(x_0)$ у матрицы $b = (a^0)^{-1}a$ первый столбец есть e_1 и из предыдущего следует, что слой $p^{-1}(x_0)$ устроен как $U(n-1)$.

Чтобы доказать локальную тривиальность, получим аналогичное представление сразу для всех x из окрестности точки x^0. Достаточно рассмотреть точку e_1.

Сначала каждому вектору x из окрестности V точки e_1 непрерывным образом поставим в соответствие унитарную матрицу $a^0(x)$, такую, что $p(a^0(x)) = x$. Иначе говоря, построим в окрестности сечение расслоения.

Система векторов $x, e_2, \dots, e_n$ линейно независима для x, лежащих в окрестности V точки e_1. Применив к этой системе процесс ортогонализации, получаем ортонормированный базис, первым элементом которого является вектор x. При этом такой базис непрерывно зависит от x. Матрица, столбцами которой являются элементы построенного базиса, будет искомой унитарной матрицей $a^0(x)$.

Далее матрице $a \in p^{-1}(V)$ поставим в соответствие точку $p(a) \in V$ и матрицу $b = [a^0(p(a))]^{-1} \times a$. Матрица b имеет вид

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{23} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{b} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{23} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

есть унитарная матрица размерности $n-1$. Тем самым построен гомеоморфизм между $p^{-1}(V)$ и $V \times U(n-1)$.

10. О векторных расслоениях

Теперь обратим внимание на некоторые особенности векторных расслоений.

Согласно определению, векторное расслоение $p : E \to X$ это такое расслоение, что существует гомеоморфизм $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U \times \mathbb{C}^n$, перестановочный с проекциями, причем на пересечениях $U_i \bigcap U_j$ функции склейки

$$\varphi_{ij} : (U_i \bigcap U_j) \times \mathbb{C}^n \to (U_i \bigcap U_j) \times \mathbb{C}^n$$

имеют вид $(x, \xi) \to (x, \psi_{ij}(x)\xi)$, где $\psi_{ij}(x)$ есть невырожденная непрерывная матричнозначная функция.

Если в $\mathbb{C}^n$ задать базис $\{e_k\}$, то прообразы базисных векторов при гомеоморфизме $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U \times \mathbb{C}^n$, будут задавать базис в слоях E_x. Таким образом, карты U_i есть части пространства X, на которых можно выбрать базисы в слоях, непрерывно зависящие от x. А функции склейки задают связь этих базисов – переход от одного базиса к другому. В частности, условие, что расслоение тривиально над всем пространством, означает, что можно выбрать базисы во всех слоях, непрерывно зависящие от x.

В случае расслоения произведения $X \times \mathbb{C}^n$ сечения есть обычные векторно-значные функции. С этой точки зрения сечение $s : X \to E$ векторного расслоения есть обобщение понятия вектор-функции – это тоже “вектор-функция”, но ее значения в разных точках x лежат в разных векторных пространствах.

Подмножество V в векторном расслоении E называется *векториальным*, если его пересечение с каждым слоем E_x является векторным подпространством в E_x. Векториальное подмножество называется *векторным подрасслоением*, если слои V_x непрерывно зависят от x. В частности, тогда размерность слоев V_x локально постоянна; если пространства X связно, размерность слоев V_x подрасслоения постоянна на всем X.

В рассмотренных выше примерах мы реализовали касательное расслоение к сфере, как подрасслоение тривиального расслоения $S^2 \times \mathbb{R}^3$, и реализовали расслоение Хопфа как подрасслоение тривиального расслоения $S^2 \times \mathbb{C}^2$.

Аналогичная реализация возможна для любого векторного расслоения.

Теорема 20. *Если база X векторного расслоения E является компактным пространством, то расслоение E изоморфно подрасслоению тривиального расслоения $X \times \mathbb{C}^N$ (соответственно $X \times \mathbb{R}^N$) достаточно большой размерности.*

Доказательство. Пусть $\{U_i,\ i = i, \ldots, m\}$ есть конечный атлас и отображения $\varphi_i : p^{-1}(u_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$ имеет вид $\varphi_i(v) = (p(v), \psi_i(v))$.

Существует подчиненное атласу разбиение единицы, т.е. набор непрерывных функций $h_i(x) \geq 0$, таких, что $\sum_i h_i(x) \equiv 1$ и $h_i(x) = 0$ при $x \notin U_i$. Рассмотрим тривиальное расслоение $X \times \mathbb{C}^{nm}$ и представим пространство $\mathbb{C}^{nm}$ в виде

$$\mathbb{C}^{nm} = \mathbb{C}^n \bigoplus \mathbb{C}^n \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbb{C}^n.$$

Зададим отображение

$$f : E \to X \times \mathbb{C}^{nm}$$

с помощью формулы

$$f(v) = (h_1(p(v))\psi_1(v), h_2(p(v))\psi_2(v), \ldots, h_m(p(v))\psi_m(v)).$$

Далее непосредственно проверяется, что при фиксированном $x = p(v)$ вектора $\xi(v)$ образуют $n-$мерное подпространство в $\mathbb{C}^{nm}$, такие подпространства непрерывно зависят от x и образуют подрасслоение E^1 в $X \times \mathbb{C}^{nm}$. Отсюда следует, что отображение f является изоморфизмом расслоений E и E^1.

Доказанная теорема есть основа для еще одной точки зрения на то, как возникают векторные расслоения. Реализация векторного расслоения E как подрасслоения в тривиальном расслоении означает, что для каждого $x \in X$ выделено подпространство $E_x \subset \mathbb{C}^N$, и эти подпространства непрерывно зависят от x. Такая ситуация возникает, в частности, когда в пространстве вектор-функций (т.е. пространстве сечений тривиального расслоения) рассматривается подпространство, заданное с помощью линейных соотношений в каждой точке x. Такое подпространство оказывается пространством сечений векторного подрасслоения.

Например, краевая задача для системы уравнений первого порядка с частными производными порядка m исследуется локально в каждой точке границы, т.е. сводится к исследованию системы с постоянными коэфициентами в полупространстве $\{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. После преобразования Фурье по касательным переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du(t;\xi)}{dt} = A(\xi)u(t;\xi) \tag{19}$$

с коэффициентами, зависящими от $\xi \in S^{n-2}$. При анализе краевой задачи для каждого ξ рассматривается подпространство начальных условий, при которых решение стремится к 0 при $t \to +\infty$. В случае эллиптической системы эти подпространства имеют одинаковую размерность и непрерывно зависят от ξ, т.е. с системой уравнений (19) связано векторное расслоение на сферой S^{n-2}, причем это расслоение может оказаться нетривиальным.

Получим одно из следствий доказанной теоремы. Говорят, что на векторном расслоении задана *риманова метрика*, если в каждом слое E_x задано скалярное произведение, причем эти скалярные произведения непрерывно зависят от x.

Следствие 1 из теоремы 20. *На любом векторном расслоении над компактным пространством существует риманова метрика.*

Доказательство. Согласно теореме 20, расслоение может быть реализовано как подрасслоение тривиального расслоения $X \times \mathbb{C}^N$. Поэтому скалярное произведение на $\mathbb{C}^N$ порождает в каждом слое E_x скалярное произведение, непрерывно зависящее от x.

Риманова метрика на расслоении не единственна, но для векторных расслоений над компактными пространствами все римановы метрики эквивалентны.

Если на расслоении задана риманова метрика, то естественно рассмотреть только те линейные отображения, которые сохраняют скалярное произведение. т.е. в качестве структурной группы взять группу $U(n)$ унитарных матриц.

Мы отмечали выше, что понятие изоморфизма расслоений зависит от рассматриваемой структурной группы. Следующее утверждение показывает, что переход от полной линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$ к группе $U(n)$ унитарных матриц не меняет основных свойств расслоений, в частности, не меняет понятия изоморфизма расслоений. Этот прием называют *редукцией к унитарной группе.*

Теорема 21. *Комплексные векторные расслоения $GL(n,\mathbb{C})$-изоморфны тогда и только тогда, когда они $U(n)$-изоморфны.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что пространство $GL(n,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентно пространству $U(n)$. Это можно показать с помощью следующих рассуждений. Для невырожденной матрицы A существует полярное разложение – представление в виде $A = SU$, где матрица U унитарная, а S – самосопряженная положительная. При этом самосопряженная матрица S определяется как положительный квадратный корень из положительной матрицы AA^* и непрерывно зависит от A. Это означает, что пространство $GL(n,\mathbb{C})$, как топологическое пространство, является произведением $U(n)\times K$, где K есть конус из положительных самосопряженных матриц.

Так как конус является стягиваемым пространством, пространство $GL(n,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентно $U(n)$. Поэтому функция со значениями в $GL(n,\mathbb{C})$ гомотопна некоторой функции со значениями в $U(n)$. Из этого следует, что коцикл со значениями в $GL(n,\mathbb{C})$ гомотопен коциклу со значениями в $U(n)$ и когомологичности коциклов со значениями в $GL(n,\mathbb{C})$ равносильна когомологичности коциклов со значениями в $U(n)$.

11. Векторные расслоения над окружностью

Теперь мы можем перейти от примеров к описанию *всех* векторных расслоений над некоторыми конкретными пространствами. Рассмотрим случай окружности.

1. *Вещественные векторные расслоения над окружностью.* Аналогично конструкции листа Мебиуса можно вместо прямоугольника рассмотреть пространство $[0,1]\times\mathbb{R}$ и также склеить точку $(0,\xi)$ с точкой $(1,-\xi)$. Тогда слой над точкой x в соответствующем фактор-пространстве M_R гомеоморфен прямой $\mathbb{R}$, и при этом структурная группа состоит из линейных преобразований. Таким образом, M_R есть одномерное вещественное расслоение на S^1, называемое *вещественным векторным расслоеним Мебиуса.* Пространство сечений этого расслоения можно реализовать как множество непрерывных вещественных функций на отрезке, удовлетворяющих условию антипериодичности $s(0) = -s(1)$.

Аналогично анализу листа Мебиуса можно показать, что вещественное векторное расслоение Мебиуса нетривиально. Это утверждение является частным случаем описания вещественных векторных расслоений над окружностью.

Рассмотрим произвольное n-мерное вещественное векторное расслоение E над окружностью. Если окружность реализаована как отрезок $[0,1]$ со склеенными концами, то расслоение тривиально над $U_1 = [0,1/2]$ и тривиально над $U_2 = [1/2,1]$. Тогда функция склейки задается в точке $1/2$ как умножение на некоторую матрицу $\psi(1/2)$. а в точке 0 – как умножение на некоторую матрицу другую матрицу $\psi(0)$. Группа $GL(n,\mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности – матрицы с положительным определителем и матрицы с отрицательным определителем. Поэтому каждая матрица гомотопна либо единичной матрице I либо диагональной матрице $diag(-1,1,\dots,1)$. Возможны четыре варианта знаков определителей этих матриц. Если знаки определителей одинаковые, то имеем тривиальное расслоение, если разные – нетривиальное, причем все нетривиальные расслоения изоморфны. Из этих рассуждений следует

Теорема 22. *Над окружностью S^1 для любой размерности n существуют только два неизоморфные n-мерные вещественные расслоения.*

3. *Комплексный аналог листа Мебиуса.* Рассмотрим то же покрытие окружности, что и выше, и зададим для произведений $U_i\times\mathbb{C}$ функции склейки теми же формулами: $\varphi_{12}(1/2,\xi) = (1/2,\xi), \varphi_{12}(0,\xi) = (0,-\xi)$. Получаем одномерное комплексное расслоение E над окружностью — комплексный аналог листа Мебиуса.

Когда речь идет об одномерном комплексном векторном расслоении, то предполагается, что структурная группа есть $GL(\mathbb{C},1) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Эта группа связна и поэтому любая матрица (задающая правило склейки) гомотопна единичной. Поэтому расслоение E тривиально.

Можно непосредственно указать изоморфизм этого расслоения с произведением $E^0 = S^1 \times \mathbb{C}$. Такой изоморфизм может быть задан, например, формулой

$$E^0 \ni (x,\xi) \to \begin{cases} (x,\xi) \in E^1, & 1 \leq x \leq 1/2,, \\ (x, e^{\pi i 2(x-1/2)}\xi) \in E^1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Полученное утверждение есть частный случай общей теоремы.

Теорема 23. *Над окружностью S^1 любое комплексное векторное расслоение тривиально.*

Доказательство. Группа $GL(\mathbb{C}, n)$ связна, т.е. $\pi_0(GL(\mathbb{C}, n)) = 0$. Поэтому утверждение следует из теоремы 18.

12. Действия над векторными расслоениями. Определение $K(X)$

Пусть $Vect_n(X)$ есть множество классов эквивалентных n-мерных расслоений над пространством X,

$$Vect(X) = \bigcup_n Vect_n(X)$$

— множество всех классов эквивалентных векторных расслоений (разной размерности) над пространством X. Здесь параллельно будем рассматривать случай комплексных и случай вещественных векторных расслоений, соответствующие множества в случае необходимости будем обозначать соответственно $Vect_C(X)$ и $Vect_R(X)$.

Пространству X поставлено в соответствие множество $Vect(X)$. В алгебраической топологии обычно рассматриваются функторы, которые пространству ставят в соответствие множество со структурой группы или кольца, и отображению пространств ставят в соответствие гомоморфизмы. На множестве $Vect(X)$ также можно задать алгебраические операции.

В линейной алгебре имеется ряд операций, с помощью которых по векторным пространствам строятся новые векторные пространства. Это прямая сумма, тензорное произведение пространств, переход к сопряженному пространству, внешняя степень пространства, переход к пространству линейных операторов. Все эти операции естественно порождают соответствующие операции над векторными расслоениями с одной и той же базой. При построении $K-$теории используются в первую очередь операции прямой суммы и тензорного произведения.

Напомним определение тензорного произведения конечномерных пространств и тензорного произведения операторов. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис в векторном пространстве V, $w_1, \ldots, w_m$ – базис в векторном пространстве W. *Тензорным произведением пространств* $V \bigotimes W$ называется векторное пространство, порожденное базисом из nm элементов $v_i \otimes w_j$. *Тензорным произведением операторов* $A : V \to V$ и $B : W \to W$ называется оператор $A \bigotimes B$, действующий в $V \bigotimes W$, заданный на базисных векторах по формуле

$$[A \bigotimes B](v_i \otimes w_j) = Av_i \otimes Bw_j.$$

Любой линейный оператор в $V \bigotimes U$ задается матрицей размерности $nm \times nm$. Здесь уместно уточнить, что называть матрицей. Согласно Бурбаки, матрицей называется функция на произведении двух конечных множеств. В стандартном определении, связанном с записью матрицы как таблицы, предполагается, что задана нумерация элементов указанных конечных множеств натуральными числами. Во многих приложениях оказывается естественной другие способы нумерации. В частности, для базиса в пространстве $V \bigotimes W$ имеется естественная нумерация с помощью пар (i, j). Поэтому элементы матрицы $A \bigotimes B$ нумеруются четырьмя индексами и имеют вид $a_{ij}b_{kl}$.

По заданным расслоениям E^1 и E^2 строится новое расслоение, обозначаемое $E^1 \bigoplus E^2$, у которого слой над точкой x есть прямая сумма слоев $E^1_x \bigoplus E^2_x$, и строится расслоение, обозначаемое $E^1 \bigotimes E^2$, слой которого над точкой x есть тензорное произведение слоев $E^1_x \bigotimes E^2_x$.

Искомые расслоения задаются следующим образом. Прежде всего отметим, что для двух расслоений атласы могут быть разными. Но можно рассмотреть новый атлас, состоящий из попарных пересечений карт первого и второго атласов. Тем самым для любых двух расслоений всегда существует общий атлас.

Пусть $\{U_i\}$ есть общий атлас для расслоений E^1 и E^2,

$$\varphi_i^1 : p_1^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n, \quad \varphi_i^2 : p_2^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^m$$

есть соответствующие тривиализации,

$$\psi_{ij}^1 : U_i \bigcap U_j \to GL(n, \mathbb{C}), \quad \psi_{ij}^2 : U_i \bigcap U_j \to GL(m, \mathbb{C})$$

есть соответствующие функции склейки.

Прямой суммой (суммой Уитни) векторных расслоений E^1 и E^2 называется векторное расслоение $E^1 \bigoplus E^2$ размерности $n+m$, построенное с помощью функций склейки $\psi_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL(n+m, \mathbb{C})$, имеющих вид

$$\psi_{ij}(x) = \psi_{ij}^1(x) \bigoplus \psi_{ij}^2(x).$$

Тензорным произведением векторных расслоений E^1 и E^2 называется векторное расслоение $E^1 \bigotimes E^2$ размерности nm, построенное с помощью функций склейки $\psi_{ij} : U_i \bigcap U_j \to GL(nm, \mathbb{C})$, имеющих вид

$$\psi_{ij}(x) = \psi_{ij}^1(x) \bigotimes \psi_{ij}^2(x).$$

В вещественном случае определения полностью аналогичны.

Можно дать некоординатное определение расслоения $E^1 \bigoplus E^2$. В произведении пространств $E^1 \times E^2$ рассматривается подмножество E, состоящее из пар $u \in E^1, v \in E^2$, таких, что $p_1(u) = p_2(v)$. Проекция на X, заданная формулой $p(u, v) = p_1(u)$, превращает E в векторное расслоение над X. Это и есть искомое расслоение, изоморфное $E^1 \bigoplus E^2$.

Введенные операции согласованы с отношением эквивалентности и порождают операцию сложения и операцию умножения на $Vect(X)$. Относительно операции сложения $Vect(X)$ является коммутативной полугруппой, нейтральным элементом является 0-мерное расслоение. Но это не группа — обратного элемента не существует. Однако существует подобие обратного элемента – обратный с точностью до тривиального расслоения.

Следствие 2 из теоремы 20. *Для каждого векторного расслоения E существует расслоение E', такое, что расслоение $E \bigoplus E'$ тривиально.*

Доказательство. Расслоение E вложим как подрасслоение в тривиальное расслоение $X \times \mathbb{C}^N$. В слое $\mathbb{C}^N$ зададим скалярное произведение. Расслоение E' зададим как подрасслоение в $X \times \mathbb{C}^N$, у которого слой $E'_x = E_x^\perp$.

Относительно двух введенных операций множество $Vect(X)$ является полукольцом.

Следующим шагом является построение по полукольцу $Vect(X)$ кольца $K(X)$. Используется следующая конструкция А. Гротендика.

Пусть S коммутативная полугруппа. Рассматривается множество $S \times S$, состоящее из пар (h^+, h^-) с операцией покоординатного сложения. Две пары $g = (g^+, g^-)$ и $h = (h^+, h^-)$ называются *эквивалентными,* если существует элемент $s \in S$ такой, что $g^+ + h^- + s = g^- + h^+ + s$. Через $K(S)$ обозначим множество классов эквивалентности. Тогда, как легко проверить, сложение в $S \times S$ порождает на $K(S)$ операцию сложения, относительно которой $K(S)$ является группой. Если на S задана также операция умножения, то она порождает на $K(S)$ операцию умножения, т.е. $K(S)$ является кольцом.

Описанная выше конструкция применяется к полугруппе $Vect(X)$, Получаем кольцо $K(Vect(X))$, которое обозначается $K(X)$.

Отображение $f : X \to Y$ порождает отображение $f^* : Vect(Y) \to Vect(X)$. Это отображение согласовано с введенными операциями, т.е. является гомоморфизмом полуколец и продолжается до гомоморфизма колец $f^* : K(Y) \to K(X)$. При этом композиции отображений пространств соответствует произведение гомоморфизмов, т.е $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Тем самым построен контравариантный функтор из категории топологических пространств в категорию колец.

Проанализируем описанную алгебраическую конструкцию.

Допустим, что коммутативная полугруппа S может быть вложена в группу G_0, т.е. существует инъективный гомоморфизм из S в G_0. Тогда наименьшая группа G, в которую вложена S, состоит из элементов, представимых в виде разности $g = a - b, a \in S, b \in S$. У элемента $g \in G$ представление в виде разности не единственно. Поэтому группа G может быть описана как фактор-множество произведения $S \times S$ по отношению эквивалентности: $(a, b) \sim (a_1, b_1)$, если $a + b_1 = a_1 + b$.

Конструкцию группы G можно трактовать как добавление к полугруппе "отрицательных" элементов, такая конструкция копирует введение группы целых чисел по полугруппе натуральных чисел. Построенная группа G называется *группой разностей* полугруппы S.

Однако не любая полугруппа может быть вложена в группу. Условие вложимости может быть получено из следующих соображений. Пусть $f : S \to G$ есть гомоморфизм из полугруппы S в некоторую группу G. Если $a + s = b + s$, то $f(a) + f(s) = f(b) + f(s)$, откуда $f(a) = f(b)$. Но в произвольной полугруппе может быть, что $a + s = b + s$, но $a \neq b$. Так как при этом $f(a) = f(b)$, в таком случае отображение f не является инъективным, т.е. не является вложением.

Говорят, что S есть *полугруппа с сокращениями*, если из равенства $a + s = b + s$ следует, что $a = b$.

Утверждение *Коммутативная полугруппа S может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда S является полугруппой с сокращениями.*

Поэтому в случае произвольной полугруппы сначала следует построить по ней полугруппу с сокращениями: ввести на S отношение эквивалентности: $a \sim b$, если существует такое s, что $a + s = b + s$. Множество $\widetilde{S}$ классов эквивалентности образует полугруппу с сокращениями.

Описанная выше конструкция Гротендика совмещает два описанных шага: разбиение полугруппы на классы эквивалентности, и вложения получившейся полугруппы с сокращениями в группу разностей.

В интересующем нас случае полугруппы $Vect(X)$ эта усложненная конструкция существенна, так как полугруппа $Vect(X)$ в общем случае не допускает сокращений.

Покажем это на конкретном примере двумерного вещественного расслоения $T(S^2)$ – касательного расслоения к сфере. Через I будем обозначать одномерное тривиальное расслоение, а через mI — m-мерное тривиальное расслоение. Рассмотрим одномерное расслоение $N(S^2)$, состоящее из векторов, нормальных к сфере. Это расслоение естественно реализуется как подрасслоение в $S^2 \times \mathbb{R}^3$ вида

$$N(S^2) = \{(x, tx) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Это расслоение тривиально — отображение $(x, tx) \to (x, t)$ задает изоморфизм с расслоением -произведением $S^2 \times \mathbb{R} = I$. Здесь очевидно, что $T(S^2) \bigoplus N(S^2) = S^2 \times \mathbb{R}^3 = 3I$.

Таким образом, $T(S^2) \bigoplus I = 3I$ и $2I \bigoplus I = 3I$. Но $T(S^2) \neq 2I$. Это и означает, что полугруппа $Vect_R(S^2)$ не допускает сокращений.

Переход от полугруппы $Vect(X)$ к полугруппе с сокращениями $\widetilde{Vect}(X)$ означает, что расслоения E_1 и E_2 считаются эквивалентными, если существует расслоение E, такое, что $E_1 \bigoplus E = E_2 \bigoplus E$. Этому отношению эквивалентности можно придать более простой вид. Согласно следствию 2 теоремы 20, для расслоения E существует такое расслоение E', что $E \bigoplus E' = mI$. Если расслоения E_1 и E_2 эквивалентны, то

$$E_1 \bigoplus E \bigoplus E' = E_2 \bigoplus E \bigoplus E',$$

т.е. $E_1 \bigoplus mI = E_2 \bigoplus mI$.

Определение. Векторные расслоения E_1 и E_2 называются *стабильно эквивалентными*, если для некоторого m имеем

$$E_1 \bigoplus mI = E_2 \bigoplus mI.$$

Например, в такой терминологии касательное расслоение к двумерной сфере стабильно эквивалентно тривиальному расслоению.

Таким образом, полугруппа $\widetilde{Vect}(X)$ состоит из более широких классов стабильно эквивалентных векторных расслоений, а $K(X)$ есть группа разностей группы $\widetilde{Vect}(X)$. В частности, если E_1 и E_2 стабильно эквивалентны, то пары расслоений $(E^1, 0)$, $(E^2, 0)$ и $(E^1 + mI, mI)$ порождают один и тот же элемент из $K(X)$. Поэтому вычисления в $K(X)$ оказываются более простыми. Например, расслоение $E^1 + mI$ является расслоением большей размерности, ем E_1, соответствующая структурная группа больше, и функции склейки, негомотопные в меньшей группе, могут оказаться гомотопными в большей группе. Благодаря этому в ряде примеров удается найти $K(X)$, не имея явного описания полукольца $Vect(X)$.

Иначе говоря, $K(X)$ отражает только наиболее существенные топологические инварианты расслоений, которые сохраняются после перехода к расслоению более высокой размерности.

С точки зрения приложений к задаче о вычислении индекса фредгольмова оператора, удачность конструкции $K(X)$ заключается в том, что инварианты, отвечающие за индекс операторов, содержатся в $K(X)$.

Это довольно естественно со следующей точки зрения. В алгебре операторов аналогом отношения стабильной эквивалентости является следующее отношение эквивалентности для фредгольмовых операторов: $A \sim B$, если оператор $A \bigoplus I$ гомотопен оператору $B \bigoplus I$. При этом из $A \sim B$ очевидно следует, что $IndA = IndB$, хотя при этом операторы A и B могут быть негомотопными.

По построению, элементы из $K(X)$ есть классы эквивалентных пар расслоений (E^1, E^2) (их называют *виртуальными расслоениями*). В частности, корректно определена размерность $\dim : K(X) \to \mathbb{Z}$, задаваемая выражением $dim[(E^1, E^2)] = dimE^1 - dimE^2$. Это отображение есть гомоморфизм колец. Размерность виртуальных расслоений может быть отрицательной, имеются также виртуальные расслоения нулевой размерности, которые порождены парами расслоений одинаковой размерности. Как уже отмечалось, размерность не относится к числу существенных инвариантов с точки зрения задачи об индексе. Поэтому интерес представляет множество виртуальных расслоений нулевой размерности, т.е. ядро отображения $\dim : K(X) \to \mathbb{Z}$, отражающее наиболее существенные свойства расслоений. Это кольцо обозначается $\widetilde{K}(X)$ и называется *приведенным K-кольцом.*

13. Комплексные векторные расслоения над двумерной сферой

Это один из наиболее важных примеров, повторим конструкцию и проведем вычисление $K(S^2)$ "вручную", без использования техники, принятой в K-теории. В книгах обычно явный вид кольца $K(S^2)$ получается как следствие общих теорем. Надеемся, что после ознакомления с приведенным рассуждениями доказательства общих теорем будут выглядеть более доступными.

Согласно теореме 18 существует биекция между $Vect_n(S^m)$ и элементами группы $\pi_{m-1}(GL(n, \mathbb{C}))$. Выше было показано, что $\pi_1(GL(n, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}$. и что каждая функция склейки гомотопна матрице-функции вида $diag(z^k, 1, \ldots, 1)$. Обозначим через E^k_n класс расслоений над S^2, изоморфных n-мерному расслоению, построенному с помощью функции склейки $diag(z^k, 1, \ldots, 1)$.

Векторное расслоение Хопфа в дальнейшем играет особую роль. Как было показано выше, у векторного расслоения Хопфа в качестве функции склейки выступает функция z, т.е. в этих обозначениях $H = E^1_1$.

Полностью аналогично анализу расслоения Хопфа можно показать, что для подрасслоения

$$H^k = \{(z = [u, w], \lambda u^k, \lambda w^k) \in S^2 \times \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\} \tag{20}$$

в $S^2 \times \mathbb{C}^2$ функция склейки есть z^k, т.е. $H^k = E^k_1$ и все одномерные расслоения над S^2 могут быть представлены в виде (20).

Найдем, как действуют введенные операции на $Vect_C(S^2)$.

Теорема 24. *Множество $Vect_C(S^2)$ имеет вид*

$$Vect_C(S^2) = \{E_n^k : n = 0, 1, 2, \ldots;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{(n, k) : n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k \in \mathbb{Z}\},$$

а операции в нем заданы формулами

$$(n, k) + (m, l) = (n + m, k + l),$$

$$(n, k) \times (m, l) = (nm, nl + mk).$$

Доказательство. Описание $Vect_C(S^2)$ как множества следует из сказанного выше.

При операции прямой суммы расслоений размерности расслоений складываются. Функция склейки прямой суммы расслоений есть блочно-диагональная матрица, ее определитель есть произведение определителей блоков, при умножении определителей их индексы Коши складываются, откуда следует формула для сложения.

Рассмотрим операцию тензорного умножения расслоений. То, что при тензорном умножении размерности расслоений перемножаются, следует непосредственно из определения тензорного произведения.

Формула для индекса Коши получается из формулы определителя тензорного произведения. Функция склейки для $E^{n,k} \bigotimes E^{m,l}$ задается матрицей-функцией $\psi_1(z) \times \psi_2(z)$, где

$$\psi_1(z) = diag(\underbrace{z^k, 1, \ldots, 1}_{n}), \quad \psi_2(z) = diag\,(\underbrace{z^l, 1, \ldots, 1}_{m}).$$

Для диагональных матриц тензорное произведение есть диагональная матрица

$$\psi_1(z) \otimes \psi_2(z) = diag(\underbrace{z^k z^l, z^k, \ldots, z^k}_{m}, \underbrace{\underbrace{z^l, 1, \ldots, 1}_{m}, \ldots, \underbrace{z^l, 1, \ldots, 1}_{m}}_{n-1})$$

и

$$\det(\psi_1(z) \otimes \psi_2(z)) = z^{mk+nl}.$$

Отсюда получаем, что $E^{n,k} \bigotimes E^{m,l} = E^{nm,nl+mk}$, что и требовалось.

При умножении одномерных векторных расслоений получается более простая формула $(1, k) \times (1, l) = (1, n + m)$, т.е. индексы Коши складываются. В частности, расслоение (20) при $k > 1$ есть $k-$тая степень расслоения Хопфа, что согласуется с обозначениями.

Теперь описание кольца $K(S^2)$ получается элементарно из теоремы 24.

Полугруппа $Vect(S^2)$ есть полугруппа с сокращениями, поэтому стабильная эквивалентность расслоений совпадает с обычной эквивалентностью, и $Vect(S^2)$ вкладывается в кольцо $K(S^2)$, а $K(S^2)$ есть группа разностей

$$K(S^2) = \{(n, k) : n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$$

с операциями, заданными теми же формулами, что и выше

$$(n, k) + (m, l) = (n + m, k + l),$$

$$(n, k) \times (m, l) = (nm, nl + mk).$$

Обычно строение $R(S^2)$, как кольца, описывается следующей теоремой.

Теорема 25. *$K(S^2)$ есть кольцо с единицей I и одной образующей H, удовлетворяющей соотношению $(H - I)^2 = 0$.*

Доказательство. Пусть $H = (1, 1)$ − элемент из $K(S^2)$, порожденный расслоением Хопфа. Очевидно, что этот элемент является образующим: $(n, k) = kH + (n - k)I$. Из закона умножения получаем, что $(H - I)^2 = (0, 1)^2 = (0, 0)$, что и требовалось.

Равенство $(H - I)^2 = 0$ эквивалентно равенству $H^2 + I = 2H$ и его можно пояснить на уровне расслоений и функций склейки. Оно означает, что матрица-функция $diag(z^2, 1)$, соответствующая расслоению $H^2 + I$, гомотопна матрице-функции $diag(z, z)$, соответствующей расслоению $2H = H + H$. Это было непосредственно проверено при доказательстве теоремы 4.

Приведенное кольцо $\widetilde{K}(S^2)$ описывается еще проще – это кольцо (без единицы) с одной образующей $H - 1$, удовлетворяющей соотношению $(H - I)^2 = 0$. Тем самым $\widetilde{K}(S^2)$ есть группа $\mathbb{Z}$ с тривиальным умножением.

Еще раз отметим, что из описания кольца $K(S^2)$ видна особая роль расслоения Хопфа H.

Аналогия конструкции $K(S^2)$ с вычислением индекса СИО

Покажем, что конструкции, использованные при построении $K(S^2)$ хорошо коррелируют с действиями над СИО, которые использовались при доказательстве теоремы 5 об индексе СИО.

Если оператор $B = a(z)P^+ + b(z)P^-$ фредгольмов, то a и b есть невырожденные матрицы-функции на окружности. Если эти матрицы-функции на окружности рассматривать как функции склейки, то им соответствуют комплексные векторные расслоения E_a и E_b над сферой S^2. Таким образом, оператору B соответствует пара расслоений (E_a, E_b), которая порождает виртуальное расслоение — некоторый элемент $[(E^+, E^-)]$ из группы $K(S^2)$. Здесь размерности E_a и E_b равны, поэтому элемент $[(E^+, E^-)] \in \widetilde{K}(S^2) = \mathbb{Z}$. Заметим, что тот же класс порождают расслоения (E_{a_1}, E_{b_1}) (в том числе и другой размерности), если $ind\ detb - ind\ deta = ind\ detb_1 - ind\ deta_1$. При этом индекс оператора есть гомоморфизм из группы $\widetilde{K}(S^2)$ в группу $\mathbb{Z}$ и достаточно найти образ образующего элемента $H - I \in \widetilde{K}(S^2)$. Представителем класса, соответствующего этому элементу, является оператор $zP^+ + P^-$ и задача сводится к вычислению индекса одного оператора.

Поскольку S^2 есть надстройка над S^1, описанная выше аналогия подсказывает, как установить связь псевдодифференциальных операторов на компактном многообразии M с векторными расслоениями.

Символ эллиптического оператора есть невырожденная матрица-функция A размерности n на компактном пространстве $S(M)$. Неприведенная надстройка $\Lambda(S(M))$ состоит из двух конусов K^+ и K^-, склеенных с помощью тождественного отображения оснований. Поэтому, склеив тривиальные расслоения $K^+ \times \mathbb{C}^n$ и $K^- \times \mathbb{C}^n$ с помощью матрицы-функции A, получаем n-мерное векторное расслоение E_A над $\Lambda(S(M))$. Это позволяет свести изучение эллиптических псевдодифференциальных операторов к изучению векторных расслоений над $\Lambda(S(M))$.

Сделаем несколько замечаний общего характера.

1. Покажем, что касательное расслоение к сфере $T(S^2)$ является также одномерным комплексным расслоением, оно изоморфно одному из расслоений H^k. Чтобы найти соответствующее k, построим реализацию касательного расслоения, аналогичную (20).

Как при построении векторного расслоения Хопфа, сферу S^2 реализуем как расширенную комплексную плоскость $\widetilde{\mathbb{C}}$ и рассмотрим карты

$$U_1 = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : |z| \leq 1\}, \quad U_2 = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : |z| \geq 1\}.$$

При такой реализации экватор на сфере есть $S^1 = \{z : |z| = 1\}$. Рассмотрим в каждой точке экватора единичный вектор, касательный к экватору и ориентированный против часовой стрелки, если смотреть от северного полюса. Обозначим его $v(z)$. При реализации (18) это есть точка касательного расслоения вида $(x_1, x_2, 0, -x_2, x_1, 0)$, где $z = x_1 + ix_2$.

При тривиализации касательного расслоения над U_1 получаем отображение в $U_1 \times \mathbb{C}$. При тривиализации свойство вектора быть касательным к экватору сохранится, т.е. вектор $v(z)$ перейдет в вектор, касательный к окружности $S^1 = \{z : |z| = 1\}$. Поэтому после тривиализации над U_1 вектору $v(z)$ соответствует точка $(z, \lambda_1(z)iz)$, где $\lambda_1(z) > 0$.

Аналогично рассмотрим тривиализацию над U_2. Введем на U_2 координату $u = z^{-1}, u \neq \infty$. Здесь при стандартном обходе u по единичной окружности получаем имеем обход экватора в противоположном направлении. Поэтому выделенный единичный касательный вектор к экватору в точке u после перехода к локальным координатам перейдет в вектор вида $(u, -\lambda_2(u)iu)$, где $\lambda_2(u) > 0$. Если вернуться к переменной z, то это вектор вида $(z, -\lambda_2(z^{-1})iz^{-1})$.

При склейке тривиализаций точки, соответствующие одном и тому же вектору, должны отождествляться. По определению функции склейки точка $(z, \eta) \in U_1 \times \mathbb{C}$ эквивалентна точке $(z, \psi(z)\eta) \in U_2 \times \mathbb{C}$. В силу сказанного выше, при $\eta = \lambda_1(z)iz$ имеем $\lambda_1(z)iz = \varphi(z)\lambda_2(z)iz^{-1}$, откуда

$$\varphi(z) = -\frac{\lambda_1(z)}{\lambda_2(z)}z^2.$$

Здесь существенно, что полученная функция склейки задается в каждой точке как умножение на комплексное число. Это и означает, что $T(S^2)$ является одномерным комплексным расслоением.

Так как $\lambda_1(z) > 0, \lambda_2(z) > 0$, эти функции гомотопны 1, функция $\varphi(z)$ гомотопна функции z^2 и, следовательно, расслоение $T(S^2)$ изоморфно H^2.

2. Пусть M_k есть множество единичных векторов в одномерном комплексном расслоении H^k над сферой S^2. Это множество является расслоением со слоем S^1 и является также трехмерным компактным многообразием. Таким образом, получено счетное множество компактных трехмерных многообразий, имеющих структуру расслоения над S^2 со слоем S^1. В частности, $M_0 = S^2 \times S^1$, $M_1 = S^3$, M_2 есть многообразие единичных касательных векторов к сфере.

Эти примеры могут быть полезны с точки зрения общего образования — обычно студенты могут привести в качестве примеров трехмерных компактных многообразий только $S^3, S^2 \times S^1$, и трехмерный тор $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, в то время как существует очень много разных компактных трехмерных многообразий, многообразия M_k есть только небольшая часть таких многообразий.

3. Среди особых свойств расслоений над сферой S^2 отметим, что здесь любое n-мерное расслоение E_n^k может быть представлено в виде суммы одномерных расслоений:

$$E_n^k = E_1^k \bigoplus E_1^0 \bigoplus \dots \bigoplus E_1^0.$$

Обращаем на это особое внимание потому, что в общем случае для расслоений такое свойство может не выполняться.

Например, касательное расслоение к сфере S^2, рассматриваемое как двумерное вещественное расслоение, не разлагается в прямую сумму одномерных подрасслоений.

Другой пример такой ситуации приведен ниже. Над сферой S^4 любое одномерное расслоение тривиально и при этом существуют нетривиальные расслоения большей размерности. Такие расслоения не могут быть представлены в виде суммы одномерных расслоений.

4. Нормированный базисный вектор в слое расслоения H^k над точкой z задан формулой

$$e_k(z) = (\frac{1}{\sqrt{1+|z|^{2k}}}, \frac{z^k}{\sqrt{1+|z|^{2k}}})$$

при $z \neq \infty$. Если $k = 0$, то $e_0(z) \equiv (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и эта вектор-функция непрерывно продолжается в точку $z = \infty$. Это есть отражение того, что при $k = 0$ соответствующее расслоение тривиально. Если $k \neq 0$, то у векторов $e_k(z)$ не существует предела при $z \to \infty$ и вектор-функция $e_k(z)$ не может быть продолжена непрерывно в точку ∞. Это есть отражение нетривиальности расслоений H^k при $k \neq 0$.

Верно и обратное – если в слоях одномерного расслоения можно выбрать базисный вектор, непрерывно зависящий от z, то расслоение тривиально. На это простое замечание можно посмотреть с другой точки зрения. Построение базисов в слоях, непрерывно зависящих от z, есть построение невырожденного сечения, т.е. такого, что $s(z) \neq 0$ для всех z.

Из сделанных замечаний вытекает

Теорема 26. *При $k \neq 0$ у расслоения H^k не существует невырожденных сечений.*

Так как касательное расслоение к сфере есть H^2, частным случаем полученной теоремы является известная "теорема о еже".

Теорема 27. *На сфере S^2 не существует невырожденного касательного векторного поля.*

В вольной интерпретации эта теорема утверждает, что ежа нельзя причесать.

Отметим, что из теоремы 27 следует, что касательное расслоение к сфере является нетривиальным и как двумерное вещественное расслоение – у тривиального расслоения существуют невырожденные сечения.

5. Полученная реализация расслоений H^k позволяет также получить описание сечений таких расслоений. Пространство сечений тривиального расслоения H^0 есть пространство непрерывных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}$, у которых существует конечный предел на бесконечности. Пространство сечений расслоения Хопфа есть пространство непрерывных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}$, таких, что при $z \to \infty$ существует конечный предел функции $g(z) = f(z)\frac{|z|}{z}$, т.е. допускающих на бесконечности разложение

$$f(z) = c\frac{z}{|z|} + o(1).$$

Аналогично, пространство сечений расслоения H^k есть пространство непрерывных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}$, допускающих на бесконечности разложение $f(z) = c\frac{z^k}{|z|^k} + o(1)$.

К таким функциям можно применить утверждение 2, из которого следует, что при $k \neq 0$ любое непрерывное сечение расслоения H^k обращается в нуль хотя бы в одной точке. Это есть другая формулировка теоремы 26.

Рассмотрим пример. Пусть $p(z)$ есть полином степени k. Тогда функция $f(z) = p(z)/(1 + |z|^k)$ является сечениям расслоения H^k и при $k \neq 0$ обращается в нуль хотя бы в одной точке. Таким образом, т.н. "основная теорема алгебры" является следствием теоремы 26.

14. Комплексные векторные расслоения над сферами высших размерностей

Согласно теореме 18 множество $Vect_n(S^d)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы $\pi_{d-1}(GL(n,\mathbb{C}))$ и задача сводится к описанию гомотопических групп матриц.

Случай сферы S^3.

Теорема 28. *Для любого n выполнено $\pi_2(GL(n,\mathbb{C})) = 0$ и, следовательно, над сферой S^3 каждое комплексное векторное расслоение тривиально.*

Доказательство. Прежде всего имеем $\pi_2(GL(n,\mathbb{C})) = \pi_2(U(n))$, т.е. задача сводится к вычислениям для унитарных групп.

Напомним, что $U(1) = S^1 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$. Покажем, что $\pi_2(S^1) = 0$.

Пусть $\varphi : S^2 \to U(1)$ – непрерывное отображение. Сферу S^2 будем рассматривать как расширенную комплексную плоскость $\widetilde{\mathbb{C}}$. Тогда $\varphi(z)$ есть комплекснозначная функция, причем $|\varphi(z)| = 1$.

На любой из окружностей $|z| = r$ индекс Коши функции $d(z)$ равен нулю. Отсюда следует, что существует непрерывная ветвь логарифма функции $\varphi(z)$, т.е. представление $\varphi(z) = e^{iv(z)}$, где вещественнозначная функция $v(z)$ непрерывна. Тогда гомотопия

$$e^{i(1-t)v(z)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

соединяет функцию $\varphi(z)$ с постоянной 1. Отсюда $\pi_2(U(1)) = 0$.

Далее стандартное доказательство проводится по индукции, с использованием точной гомотопической последовательности расслоения.

Как показано в п.9, пример 7, пространство $U(n)$ является расслоением на S^{2n-1} с типовым слоем $U(n-1)$. Поэтому существует точная гомотопическая последовательность

$$\to \pi_k(U(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k-1}(U(n-1)) \xrightarrow{j_*} \pi_{k-1}(U(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_{k-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} . \tag{21}$$

Рассмотрим часть этой последовательности

$$\pi_2(U(n-1)) \xrightarrow{j_*} \pi_2(U(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^{2n-1}).$$

Если $n \geq 2$, то $2n-1 \geq 3$ и $\pi_2(S^{2n-1}) = 0$. Поэтому при $n = 2$ получаем,

$$0 \xrightarrow{j_*} \pi_2(U(2)) \xrightarrow{p_*} 0,$$

откуда $\pi_2(U(2)) = 0$. При $n = 3$ получаем,

$$0 \xrightarrow{j_*} \pi_2(U(3)) \xrightarrow{p_*} 0,$$

откуда $\pi_2(U(3)) = 0$. Следовательно $\pi_2(U(n)) = 0$ для любого n.

Следствие $K(S^3) = \mathbb{Z}$ с обычным умножением, $\widetilde{K}(S^3) = 0$.

Заметим, что доказать теорему 28 можно без использования точной гомотопической последовательности, а построив в явном виде гомотопию произвольной невырожденной матрицы-функции на S^2 к постоянной единичной матрице, подобно тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 4. Такое доказательство по существу повторяет для рассматриваемого случая доказательство теоремы о точной гомотопической последовательности расслоения.

Но явное построение гомотопии только кажется более убедительным доказательством, в действительности важен факт существования требуемой гомотопии, а ее явный вид не имеет значения. Аппарат теории гомотопических групп, в частности, точных гомотопических последовательностей, позволяет получать существование гомотопий без их явного построения.

Случай сферы S^d при $d \geq 4$.

Для сфер размерности 4 и больше аналогичные рассуждения не проходят. Задача описания векторных расслоений сводится в вычислению гомотопических групп $\pi_k(U(n))$, но не все гомотопические группы $\pi_k(U(n))$ вычислены. Кроме того оказывается, что нет единообразия, обнаруженного в случае расслоений над S^1, S^2 и S^3 – группы $\pi_k(U(n))$ могут быть весьма разного вида и сложным образом зависят от k и n.

Проиллюстрируем некоторые из известных результатов об этих группах на языке векторных расслоений.

1. $\pi_k(U(1)) = 0$ при $k > 1$. Это означает, что на сферах S^d при $d > 2$ нет нетривиальных одномерных расслоений.

Что можно сказать о двумерных расслоениях? Так как $\pi_k(U(2)) = \pi_k(S^3)$ при $k \geq 2$, то из известных результатов о гомотопических группах сферы S^3 получаем следующие утверждения

2. $\pi_3(S^3) = Z$, поэтому над сферой S^4 имеется счетное число двумерных расслоений.

Что касается сфер высших размерностей, то здесь ответы достаточно экзотические: для $d = 5, \ldots, 20, 21$ число различных расслоений размерности 2 над сферой S^d есть соответственно 2,12,12,2,2,3, 15,2,4,8,16,4,2,2,2,4,16.(Фукс)

Но кольцо $K(S^d)$ может быть найдено для сфер любой размерности благодаря тому, что не требуется описывать $Vect(S^d)$, а достаточно описать классы стабильно эквивиалентых расслоений. И это можно сделать благодаря тому, что при фиксированном k с ростом n гомотопические группы стабилизируются с ростом n.

Теорема 29. При $n > (k+2)/2$

$$\pi_k(U(n)) = \pi_k(U(n+1)) = \pi_k(U(n+2)) = \ldots.$$

Доказательство. Рассмотрим точную гомотопическую последовательность (21). Условие $n > (k+2)/2$ эквивалентно тому, что $k+1 < 2n-1$, поэтому $\pi_{k+1}(S^{2n-1}) = \pi_k(S^{2n-1}) = 0$. Утверждение следует из точности последовательности

$$0 \to \pi_k(U(n)) \to \pi_k(U(n+1)) \to 0.$$

Из этой теоремы следует, что описание классов стабильно эквивиалентных расслоений над сферой сводится к гомотопической классификации функции склейки не в группе матриц заданной размерности, а в группе матриц большой размерности.

Приведем основной результат (из сказанного выше не вытекающий).

Теорема 30. $\widetilde{K}(S^n) = \mathbb{Z}$ *при четном* n *и* $\widetilde{K}(S^n) = 0$ *при нечетном* n.

Эта теорема является частным случаем одной из основных теорем $K-$теории.

Теорема 31. ***(Теорема периодичности Ботта.)*** *Для любого компактного пространства X кольцо $K(X \bigwedge S^2)$ изоморфно кольцу $K(X)$.*

Например, как было показано выше, $K(S^1) = 0$. Так как сфера S^3 есть вторая надстройка над S^1,$K(S^3) = 0$. Так как сфера S^5 есть вторая надстройка над S^3,$K(S^5) = 0$ и.т.д.

15. Подход с точки зрения C^*-алгебр

Основой этого подхода является теорема о том, что векторное расслоение E над X может быть реализовано как подрасслоение в тривиальном расслоении $X \times \mathbb{C}^N$ достаточно большой размерности. Тогда при каждом x выделено n-мерное подпространство $E_x \subset \mathbb{C}^N$. Пусть $p(x) \in Mat(N, \mathbb{C})$ есть матрица, задающая ортогональный проектор на E_x. Эти матрицы удовлетворяют условиям

$$p(x)^2 = p(x), \quad p(x)^* = p(x). \tag{22}$$

Поскольку подпространства E_x непрерывно зависят от x, матрица-функция $p(x)$ также непрерывно зависит от x.

Очевидно и обратное: каждая непрерывная матрица-функция, удовлетворяющая (22), задает векторное подрасслоение в $X \times \mathbb{C}^N$, т.е. векторное расслоение над X.

Таким образом, естественно появляется алгебра непрерывных матриц- функций $C(X, Mat(N, \mathbb{C}))$. Такую алгебру можно записать также как алгебру матриц, элементами которых являются непрерывные функции, т.е. в виде $Mat(N, C(X))$. Тогда расслоения можно отождествить с элементами этой алгебры, удовлетворяющими условию

$$p^2 = p, \ p^* = p.$$

Изоморфизм расслоений также можно описать с помощью алгебры матриц.

Теорема 32. *Пусть расслоения E^1 и E^2 вложены в тривиальное расслоение $X \times \mathbb{C}^N$ и $p_1, \ p_2$ — соответствующие проекторы. Расслоения E^1 и E^2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $u \in Mat(N, C(X))$, что выполнено*

$$uu^* = p_1, \ u^*u = p_2. \tag{23}$$

Доказательство. Так как слои E_x^1 и E_x^2 есть подпространства одинаковой размерности в $\mathbb{C}^N$, для каждого x существует много линейных обратимых отображений $f(x) : E_x^1 \to E_x^2$, в частности, их можно выбрать изометрическими, т.е. сохраняющими норму. По определению, расслоения E^1 и E^2 изоморфны, если такие отображения $f(x) : E_x^1 \to E_x^2$, можно выбрать непрерывно зависящими от x. Заметим, что отображение $f(x)$ в общем случае нельзя задать с помощью непрерывной матрицы-функции (надо в слоях выбрать базисы, непрерывно зависящие от x, а это невозможно, если расслоение нетривиально). Но отображение $f(x) : E_x^1 \to E_x^2$, можно канонически продолжить на более широкий слой $\mathbb{C}^N$, задав его нулем на ортогональном дополнении к каждому слою E_x^1. Иначе говоря,рассмотрим линейные отображения $u(x) : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, заданные формулой $u(x) = f(x)p_1(x)$. А такие отображения уже задается непрерывной матрицей-функцией, т.е. порождают элемент алгебры $Mat(N, C(X))$. Так как $u^*(x) = f^*(x)p_2(x)$, то получаем (23).

Легко проверить и обратное.

Элемент u из C^*-алгебры, для которого произведения uu^* и u^*u являются проекторами, называется *частичной изометриеей.*

Таким образом, определение векторного расслоения и определение изоморфизма расслоений можно записать в терминах алгебры матриц-функций на X, т.е. им можно придать чисто алгебраический характер. Это замечание позволяет рассмотреть аналогичные понятия в случае произвольной C^*-алгебры. Этот подход описан в лекциях В.Е. Назайкинского.

Пример 1. Касательному расслоению к сфере, реализованному как двумерное вещественное подрасслоение в $S^2 \times \mathbb{R}^3$ по формуле (18), может быть задано с помощью проектора $p(x)\xi = \xi - \langle \xi, x \rangle x$ или в координатной записи

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & 1 - x_2^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & 1 - x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Одномерные комплексные расслоения H^k над двумерной сферой мы реализовали как подрасслоения в $S^2 \times \mathbb{C}^2$ вида (20). При заданном z слой над точкой z есть одномерное комплексное подпространство, порожденное вектором $(1, z^{-k})$ при $z \neq \infty$ и вектором $(0, 1)$ при $z = \infty$. Соответствующий ортогональный проектор записывается в виде

$$p_k(z) = \frac{1}{1 + |z|^{2k}} \begin{pmatrix} 1 & \overline{z}^k \\ z^k & |z|^{2k} \end{pmatrix},$$

причем при $z \to \infty$ в пределе получаем проектор

$$p_k(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $p_k(z)$ является проекторнозначной функцией, непрерывной на сфере Римана.

Список литературы

[1] Атья М. *Лекции по K-теории.* — Москва, Мир —1967.

[2] Боярский Б. *Прямой подход к теории систем сингулярных интегральных уравнений*// Добавление VI к книге [6], с. 478-488.

[3] Гельфанд И.М. *Об эллиптических уравнениях*// УМН —-1960. — Т.15, вып.3. –с.121-132.

[4] Каруби М. *K-теория. Введение* . — Москва, Мир —1981.

[5] Мищенко А.С. *Векторные расслоения и их применения.* — Москва, Наука — 1984.

[6] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* — Москва, Наука — 1968.

[7] Пале Р. *Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.* — Москва, Мир —1970.

[8] Сили Р.Г. *Интегро-дифференциальные операторы на векторных расслоениях*// Математика, Москва, Мир. — 1965.— Т.11, N.2.— с.57-97.

[9] Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. *Гомотопическая топология.* — Москва, МГУ — 1969.

[10] Ху Сы-Цзян *Теория гомотопий.* — Москва, Мир —1964.

[11] Хъюзмоллер Д. *Расслоенные пространства.* — Москва, Мир —1970.

Антоневич Анатолий Борисович, 220030, Беларусь, Минск, Белгосуниверситет, мехмат

Польша, Белосток, Университет в Белостоке, институт математики

E-mail: `antonevich@bsu.by`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 515.16+514.7 MSC2000: 53C, 58J

Ю.А. Кордюков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ[1]

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы дать читателю представление о некоторых фундаментальных примерах линейных дифференциальных операторов, использующихся в глобальной дифференциальной геометрии и анализе на многообразиях, а также описать некоторые их приложения в задачах геометрии и топологии.

Введение

Данная работа является расширенной версией курса лекций, который автор прочитал на XX Крымской осенней математической школе-симпозиуме в 2009 году. Ее основная цель состоит в том, чтобы дать читателю представление о некоторых фундаментальных примерах линейных дифференциальных операторов, использующихся в глобальной дифференциальной геометрии и анализе на многообразиях, а также описать некоторые их приложения в задачах геометрии и топологии.

Мы начинаем в разделе 1 с обзора основных понятий и фактов исчисления внешних дифференциальных форм, начиная с краткого напоминания о гладких многообразиях. В частности, мы вводим некоторые фундаментальные понятия римановой геометрии, прежде всего, понятие римановой метрики, и описываем различные метрические структуры на пространствах дифференциальных форм, определяемые римановой метрикой. Наконец, мы определяем некоторые геометрические дифференциальные операторы, действующие в пространствах дифференциальных форм — дифференциал и кодифференциал де Рама, оператор де Рама, оператор Лапласа на дифференциальных формах (и, как частный случай, оператор Лапласа-Бельтрами на функциях). Введенные понятия исчисления дифференциальных форм позволяют нам определить комплекс де Рама и когомологии де Рама — фундаментальный топологический инвариант гладких многообразий. Исчисление дифференциальных форм позволяет также дать инвариантные определения классических операций векторного анализа. Наконец, в конце раздела мы приводим основные результаты теории Ходжа, связывающей когомологии де Рама с гармоническими дифференциальными формами и позволяющей применять методы теории эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными для исследования когомологий де Рама и топологических инвариантов гладких многообразий.

Раздел 2 посвящен дифференциальным операторам, действующим в сечениях произвольного векторного расслоения. Мы начинаем с краткого обзора понятия векторного расслоения. Затем мы вводим понятия ковариантной производной сечений векторных расслоений (линейной связности в векторном расслоении) и кривизны линейной связности. Фундаментальным примером линейной связности является связность Леви-Чивита в римановой геометрии (симметрическая связность, согласованная с римановой метрикой). Тензор кривизны связности Леви-Чивита позволяет определить фундаментальные геометрические инварианты римановых многообразий - скалярную кривизну, кривизну Риччи и секционную кривизну. Аппарат ковариантных производных позволяет также инвариантно определять различные дифференциальные операторы, действующие в

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00389)

сечениях векторных расслоений. В этом разделе мы приводим один пример конструкции такого рода — конструкцию лапласиана Бохнера. В частном случае, когда векторное расслоение есть внешняя степень кокасательного расслоения, его гладкие сечения есть дифференциальные формы. В данном случае сравнение оператора Лапласа на дифференциальных формах с лапласианом Бохнера дается формулой Бохнера. Следствием этой формулы являются теорема Бохнера, дающая топологическое препятствие к существованию метрики положительной кривизны Риччи на компактном многообразии.

Раздел 3 посвящен важному классу геометрических дифференциальных операторов, действующих в сечениях векторных расслоений — операторам типа Дирака. Этот класс включает в себя много важных примеров геометрических дифференциальных операторов, таких, как оператор де Рама на дифференциальных формах, описанный в разделе 1, оператор Дольбо в комплексном анализе, спинорный оператор Дирака и т.п. Оператор Дирака впервые был введен Дираком в 1928 году при решении задачи описания движения квантовой релятивистской частицы со спином 1/2. Он является матричным дифференциальным оператором первого порядка в четырехмерном евклидовом пространстве (точнее, в пространстве Минковского). Конструкция Дирака послужила мотивировкой для Атьи и Зингера при построении операторов Дирака на многообразиях, играющих важную роль в теории индекса эллиптических операторов. Раздел 3 начинается с описания конструкции оператора Дирака в плоском евклидовом пространстве произвольной размерности. Эта конструкция использует язык алгебр Клиффорда. Затем мы даем определения расслоения Дирака на гладком римановом многообразии и ассоциированного оператора Дирака и приводим несколько примеров, в частности, пример спинорного оператора Дирака. Одним из фундаментальных фактов, связывающих анализ с геометрией и топологией, является теорема Атьи-Зингера, которая дает выражение для индекса эллиптических операторов в топологических терминах. Мы приводим формулировки этой теоремы в двух важных частных случаях — для оператора де Рама на дифференциальных формах и для спинорного оператора Дирака. В качестве приложений мы получаем многомерное обобщение классической теоремы Гаусса-Бонне и теорему Лихнеровича, дающую топологические препятствия к существованию метрики положительной скалярной кривизны на компактном многообразии.

1. Дифференциальные формы

В этом разделе мы даем обзор основных понятий и фактов исчисления внешних дифференциальных форм.

1.1. **Несколько слов о гладких многообразиях.** Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать гладкое многообразие M размерности n. Согласно определению, M представляет собой хаусдорфово топологическое пространство, обладающее счетной базой открытых множеств, которое локально диффеоморфно открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Точнее, для любой точки пространства M в некоторой ее открытой окрестности $U \subset M$ (координатной окрестности) можно ввести локальную систему координат, т.е. гомеоморфизм $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ области U на некоторую открытую область в $\mathbb{R}^n$, ставящий в соответствие любой точке $p \in U$ ее координаты $\phi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Более того, любые две такие локальные системы координат $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ согласованы в следующем смысле. Если их области определения U и V имеют непустое пересечение, то координаты $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ точек, принадлежащих их общей области определения $U \cap V$, связаны гладкой взаимнооднозначной заменой координат

$$y^j = y^j(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \phi(U \cap V).$$

(Здесь и всюду в дальнейшем “гладкий” означает “класса C^∞”.)

Данное определение задает гладкое многообразие как абстрактный геометрический объект, безо всякой ссылки на объемлющее пространство. Более конкретно, можно представлять себе гладкое многообразие M как n-мерную поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ при некотором N. В этом случае локальные координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ можно рассматривать как локальную параметризацию точек поверхности M.

1.2. **Определение дифференциальных форм и операции над ними.**

Определение 1. Дифференциальной формой степени p на многообразии M называется кососимметрическое тензорное поле типа $(0,p)$. Другими словами, на M определена дифференциальная форма степени p, если в любой локальной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определен набор вещественнозначных функций

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x), \quad i_k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

удовлетворяющий следующим условиям:

(1) Кососимметричность по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_p$: для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, p\}$ имеет место соотношение

$$A_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}}(x) = \operatorname{sign} \sigma A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x),$$

где $\operatorname{sign} \sigma$ обозначает знак перестановки σ.

(2) Если области определения двух локальных систем координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ пересекаются, то в их общей области определения наборы $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x), i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и $B_{j_1 j_2 \ldots j_p}(y), j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, определяющие дифференциальную форму, связаны соотношением

$$B_{j_1 j_2 \ldots j_p}(y(x)) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}}.$$

Имеется другое, более инвариантное определение дифференциальных форм. Чтобы его привести, нам необходимо сначала напомнить понятия касательного вектора и гладкого векторного поля.

Для любой точки $m \in M$ рассмотрим множество $\mathcal{F}_m$ гладких вещественнозначных функций f, определенных в окрестности точки m (зависящей от f). Скажем, что функции f и g из $\mathcal{F}_m$ эквивалентны, если они совпадают в некоторой окрестности точки m, содержащейся в областях определения функций f и g. Соответствующие классы эквивалентности называются ростками гладких функций в точке m. Обозначим через $C^\infty(m)$ множество ростков гладких функций в точке m. На $C^\infty(m)$ имеется естественная структура алгебры.

Касательным вектором к многообразию M в точке m называется отображение $X_m : C^\infty(m) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in C^\infty(m)$ следующим условиям:

(1) $X_m(\alpha f + \beta g) = \alpha X_m f + \beta X_m g$ (линейность);

(2) $X_m(fg) = (X_m f) g(m) + f(m)(X_m g)$ (правило Лейбница).

Множество всех касательных векторов в точке m является линейным пространством, которое называется касательным пространством многообразия M в точке m и обозначается $T_m M$.

В любой локальной системе координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенной в окрестности точки $m \in M$, касательный вектор X_m в точке m с координатами $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ имеет вид производной по направлению

$$X_m(f) = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0), \quad f \in C^\infty(x_0)$$

при некоторых $(X^1, X^2, \ldots, X^n) \in \mathbb{R}^n$.

При переходе к другой локальной системы координат с координатами $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ компоненты $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ касательного вектора X_m преобразуются следующим образом:

$$Y^i = \sum_i X^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0),$$

где $(Y^1, Y^2, \ldots, Y^n)$ — компоненты вектора X_m в координатах $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Другими словами, касательный вектор X_m является тензором типа $(1,0)$ в точке m.

Гладким векторным полем на многообразии M называется функция X, ставящая в соответствие любой точке $m \in M$ касательный вектор $X_m \in T_m M$, которая в любой локальной системе координат с координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ записывается в виде $X = \sum_{j=1}^n X^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$, где X^j являются гладкими функциями в координатной окрестности U.

Любое гладкое векторное поле X определяет дифференциальный оператор 1-го порядка в пространстве $C^\infty(M)$:

$$X(f)(m) = X_m(f_m), \quad f \in C^\infty(M),$$

где $f_m \in C^\infty(m)$ обозначает росток функции f в точке m, или, в локальных координатах,

$$X(f) = \sum_{j=1}^n X^j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Будем обозначать через $\mathcal{X}(M)$ линейное пространство гладких векторных полей на M.

Нетрудно показать, что для любых гладких векторных полей X и Y коммутатор $[X, Y] = XY - YX$ соответствующих дифференциальных операторов 1-го порядка является дифференциальным оператором 1-го порядка, определяющим некоторое векторное поле, которое мы также будем обозначать $[X, Y]$. Это векторное поле называется скобкой Ли (или коммутатором) векторных полей X и Y. Скобка Ли вводит структуру алгебры Ли на $\mathcal{X}(M)$.

Определение 2. Дифференциальной формой степени p на многообразии M называется отображение

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M)}_{p \text{ раз}} \to C^\infty(M),$$

которое

(1) кососимметрично: для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \dots, p\}$ имеет место соотношение

$$\alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sign}\sigma)\alpha(X_1, X_2, \dots, X_p), \quad X_1, X_2, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M),$$

(2) полилинейно над $C^\infty(M)$:

$$\alpha(fX_1 + gY_1, X_2, \dots, X_p) = f\alpha(X_1, X_2, \dots, X_p) + g\alpha(Y_1, X_2, \dots, X_p),$$
$$f, g \in C^\infty(M), \quad X_1, Y_1, X_2, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M).$$

Связь между двумя определениями дифференциальных форм дается следующим образом. Если в локальной системе координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ дифференциальная форма определена своими компонентами

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \quad i_k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

то соответствующее кососимметрическое полилинейное отображение имеет вид:

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_p)(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} A_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) X_1^{i_1}(x) X_2^{i_2}(x) \dots X_p^{i_p}(x),$$

где $(X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^n)$ — компоненты векторного поля $X_j, j = 1, 2, \dots, p$. Наоборот, любое кососимметрическое полилинейное отображение, удовлетворяющее условиям определения 2, имеет такой вид в любой локальной системе координат.

Обозначим через $\Omega^p = \Omega^p(M)$ пространство гладких дифференциальных форм степени p на M и через $\Omega = \Omega(M)$ пространство гладких дифференциальных форм произвольной степени на M.

Пример 1. Гладкие функции на M являются дифференциальными формами степени 0.

Пример 2. Для любой гладкой функции f на M ее дифференциал

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

является дифференциальной формой степени 1. В частности, это означает, что набор $\{\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\}$ компонент дифференциала df в любой локальной системе координат определяет дифференциальную 1-форму, т.е., ковектор. Соответствующее отображение $df : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ имеет вид

$$df(X) = X(f), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

В локальных координатах дифференциальные формы удобно записывать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эту форму записи пока следует понимать чисто формально, но, как мы вскоре увидим, она согласована с операциями внешнего умножения и внешнего дифференциала и имеет вполне конкретный смысл. В частности, здесь символ dx^i означает дифференциал локальной координаты x^i, а знак "$\wedge$" означает операцию внешнего умножения.

Для любых дифференциальных форм $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^q$ определено их внешнее умножение $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}$, обладающее следующими свойствами:

(1) Для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^q$

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta = a_1\alpha_1 \wedge \beta + a_2\alpha_2 \wedge \beta.$$

(2) Для любых $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^q$

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

Используя данные свойства, нетрудно вычислить внешнее произведение форм $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^q$, записанных в виде (1), что может служить одним из определений внешнего произведения.

Для любой дифференциальной форм $\alpha \in \Omega^p$ определен ее внешний дифференциал $d\alpha \in \Omega^{p+1}$, обладающий следующими свойствами:

(1) Для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^p$

$$d(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = a_1 d\alpha_1 + a_2 d\alpha_2.$$

(2) Для любых $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^q$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(3) Для любой $\alpha \in \Omega^p$

$$d(d\alpha) = 0.$$

Для дифференциальной формы α, записанной в виде (1), ее дифференциал задается формулой

$$d\alpha = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \frac{\partial A_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Операция взятия внешнего дифференциала $\alpha \mapsto d\alpha$ определяет линейный оператор $d : \Omega \to \Omega$, называемый дифференциалом де Рама.

Пример 3. Для любой гладкой функции $f \in \Omega^0$ ее внешний дифференциал как дифференциальной формы степени 0 совпадает с дифференциалом f как функции:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Пример 4. Для дифференциальной формы степени 1

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$$

ее внешний дифференциал есть дифференциальная форма степени 2, задаваемая формулой

$$d\alpha = \sum_{i<j} \beta_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}.$$

Важнейшей операцией над дифференциальными формами является операция интегрирования дифференциальных форм степени n (они иногда называются формами объема).

Прежде всего, напомним понятие ориентированного многообразия. Многообразие M называется ориентируемым, если существует покрытие многообразия M координатными окрестностями $M = \cup_\alpha U_\alpha$, которые согласованы в том смысле, что для любых двух координатных окрестностей U_α и U_β с координатами $(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n)$ и $(x_\beta^1, x_\beta^2, \ldots, x_\beta^n)$ соответственно, таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, определитель матрицы Якоби замены переменных удовлетворяет условию

$$\det \left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} > 0.$$

Выбор такого покрытия называется ориентацией многообразия M. Координатные окрестности, входящие в это покрытие, а также координатные окрестности, согласованные с ними в смысле приведенного выше определения, называются положительно ориентированными.

Для любого ориентированного многообразия M размерности n и для любой финитной дифференциальной n-формы на M определен интеграл $\int_M \omega$ формы ω по M. Если носитель формы ω содержится в положительно ориентированной координатной окрестности с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in U$,

$$\omega = f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n, \quad f \in C_0^\infty(U),$$

то положим

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Общий случай сводится к данному при помощи покрытия многообразия M положительно ориентированными координатными окрестностями и разбиения единицы, подчиненного этому покрытию.

Важнейшим фактом, относящимся к интегрированию дифференциальных форм, является теорема Стокса.

Теорема 1 (Формула Стокса). *Пусть M — гладкое ориентированное многообразие с краем ∂M (снабженным индуцированной ориентацией), и ω — гладкая $(n-1)$-форма на M. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

В частности, если многообразие M не имеет края, то

$$\int\limits_M d\omega = 0.$$

Частными случаями этой формулы являются основные интегральные формулы анализа — формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса.

1.3. **Риманова метрика и дифференциальные операторы.** Римановой метрикой (или метрическим тензором) на гладком многообразии M называется положительно определенное симметрическое тензорное поле типа $(0, 2)$. Другими словами, на многообразии M задана риманова метрика, если в каждой локальной системе координат задан набор гладких функций $\{g_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) Квадратная матрица размера $n \times n$, составленная из чисел $\{g_{ij}(m), i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, симметрична и положительно определена для любого $m \in M$.
(2) Если области определения двух локальных систем координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ пересекаются, то в их общей области определения

наборы $\{g_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ и $\{h_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n\}$, определяющие риманову метрику, связаны соотношением

$$h_{\alpha\beta}(y) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}.$$

Многообразие M называется римановым, если на нем выбрана риманова метрика.

Инвариантное определение римановой метрики дается следующим образом. Римановой метрикой на гладком многообразии M называется семейство скалярных произведений $(\cdot, \cdot)_m$ на касательном пространстве T_mM, гладко зависящих от точки m. Здесь гладкая зависимость означает, что для любых гладких векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ функция $m \in M \mapsto (X_m, Y_m)_m \in \mathbb{R}$ является гладкой. Таким образом, риманова метрика определяет отображение $(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$.

Связь между двумя определениями дается следующим образом. Если $\{g_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ — компоненты римановой метрики в локальной системе координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенной в окрестности точки $m \in M$. то скалярное произведение касательных векторов $X, Y \in T_mM$ имеет вид

$$(X, Y)_m = \sum_{ij} g_{ij}(x_0) X^i Y^j,$$

где $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ — координаты точки m, $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ и $(Y^1, Y^2, \ldots, Y^n)$ — компоненты векторов X и Y соответственно.

Риманова метрика определяет длину $\ell(\gamma)$ произвольной гладкой кривой γ, задаваемой отображением $[0, 1] \to M : t \to x(t)$. В локальных координатах $\ell(\gamma)$ задается формулой

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \left(\sum_{ij} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{1/2} dt$$

Пусть M — n-мерное ориентированное риманово многообразие. Римановой формой объема называется дифференциальная форма vol степени n, задаваемая в любой положительно ориентированной локальной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ по формуле

$$vol = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где g обозначает матрицу, составленную из компонент $\{g_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ римановой метрики в данной системе координат.

Риманова метрика позволяет определить скалярное произведение дифференциальных форм α и β одной и той же степени p в точке m. В локальной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенной в окрестности точки m, запишем формы α и β в виде

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

и

$$\beta = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_p} B_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x) dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}.$$

Обозначим через $\{g^{ij}\}$ обратную матрицу к матрице $\{g_{ij}\}$. Пусть $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — координаты точки m. Скалярное произведение $(\alpha, \beta)_m$ дифференциальных форм α и β в точке m определяется по формуле

$$(\alpha, \beta)_m = \frac{1}{p!} \sum g^{i_1 j_1}(x_0) g^{i_2 j_2}(x_0) \ldots g^{i_p j_p}(x_0) A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x_0) B_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x_0).$$

Для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^p$ существует единственная форма $*\alpha \in \Omega^{n-p}$, удовлетворяющая следующему условию: для любой формы $\beta \in \Omega^p$ и для любого $x \in M$

$$(\alpha, \beta)_x vol = \beta(x) \wedge *\alpha(x).$$

Соответствие $\alpha \mapsto *\alpha$ определяет линейный оператор $* : \Omega^p \to \Omega^{n-p}$, называемый оператором Ходжа. Этот оператор обладает следующим свойством:

$$*^2\alpha = (-1)^{pn+p}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^p.$$

Если $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ — набор дифференциальных 1-форм, образующих положительно ориентированную ортонормированную систему относительно скалярного произведения $(\alpha, \beta)_x$ для любого x, то для любых $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ имеет место соотношение

$$*(\alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_p}) = \varepsilon(\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_{n-p}}),$$

где $j_1, j_2, \ldots j_{n-p}$ — набор, дополнительный к $i_1, i_2, \ldots, i_p$, т.е. $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \cup \{j_1, j_2, \ldots j_{n-p}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, а число $\varepsilon = \pm 1$ выбирается таким образом, что

$$(\alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_p}) \wedge *(\alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_p}) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n.$$

Глобальное скалярное произведение дифференциальных форм $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^p$ определяется формулой

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int\limits_M (\alpha, \beta)_x vol = \int\limits_M \beta \wedge *\alpha = \int\limits_M \alpha \wedge *\beta.$$

Обозначим через d^* оператор, формально сопряженный к оператору d относительно данного скалярного произведения. Иногда этот оператор называется кодифференциал де Рама. По определению, для любых $\alpha \in \Omega^p$ и $\beta \in \Omega^{p-1}$ имеет место соотношение

$$\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^*\alpha, \beta \rangle.$$

Если $\alpha \in \Omega^p$, то справедлива следующая формула:

$$d^*\alpha = (-1)^{np+n+1} * d * \alpha. \tag{2}$$

Для дифференциальной 1-формы $\alpha \in \Omega^1$ форма $d^*\alpha \in \Omega^0 = C^\infty(M)$ называется дивергенцией формы α и обозначается $\operatorname{div}\alpha$:

$$d^*\alpha = \operatorname{div}\alpha.$$

Если записать форму α в локальных координатах в виде

$$\alpha = \sum_i A_i dx^i,$$

то

$$d^*\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} A_i \right).$$

Оператором Лапласа римановой метрики называется дифференциальный оператор второго порядка в пространстве Ω, определяемый по формуле

$$\Delta = d^*d + dd^* = (d + d^*)^2.$$

Оператор Лапласа сохраняет степень дифференциальных форм. Его ограничение на пространство функций называется оператором Лапласа-Бельтрами. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta f = d^*df = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

В локальной системе координат оператор Лапласа-Бельтрами задается формулой

$$\Delta = -\frac{1}{\det g} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Определим также оператор де Рама римановой метрики как дифференциальный оператор первого порядка в пространстве Ω, задаваемый формулой

$$D = d + d^*.$$

Операторы Лапласа и де Рама являются эллиптическими дифференциальными операторами.

1.4. **Когомологии де Рама.** Одно из важнейших приложений исчисления дифференциальных форм состоит в том, что с его помощью можно построить аналитическую модель важнейших геометрических и топологических инвариантов многообразий. Фундаментальную роль в этой конструкции играет конструкция комплекса де Рама и его когомологий.

Пусть M — компактное многообразие без края. Обозначим через $d_p, p = 0,1,\dots,n$, ограничение дифференциала де Рама d на Ω^p. Пространства Ω^p и операторы d_p можно записать в виде последовательности

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \xrightarrow{d_n} 0,$$

где для удобства обозначений мы положили $d_{-1} = 0$. Основное свойство этой последовательности заключается в том, что

$$d_p d_{p-1} = 0, \quad p = 0,1,\dots,n. \tag{3}$$

В этом случае говорят, что такая последовательность является комплексом. В данном случае она называется комплексом де Рама многообразия M.

Важнейшими характеристиками комплекса являются его группы когомологий. Группы когомологий комплекса де Рама многообразия M называются группами когомологий де Рама многообразия M.

Дифференциальная форма α называется замкнутой, если $d\alpha = 0$. Дифференциальная форма α называется точной, если существует такая форма β, что $\alpha = d\beta$. Обозначим через Z_p пространство замкнутых дифференциальных форм степени p:

$$Z_p = \ker d_p = \{\alpha \in \Omega^p : d_p\alpha = 0\},$$

и через B_p пространство точных дифференциальных форм степени p:

$$B_p = \operatorname{im} d_p = \{\alpha \in \Omega^p : (\exists \beta \in \Omega^{p-1})(\alpha = d_{p-1}\beta)\}.$$

Из основного свойства комплекса (3) вытекает, что любая точная форма является замкнутой: $B_p \subset Z_p$.

p-я группа когомологий де Рама $H^p_{dR}(M)$ определяется следующим образом:

$$H^p_{dR}(M) = Z_p/B_p = \frac{\ker d_p}{\operatorname{im} d_{p-1}}, \quad p = 0,1,\dots,n.$$

Непосредственным следствием теории Ходжа и теории эллиптических операторов является тот факт, что группы когомологий де Рама компактного многообразия без края M конечномерны:

$$\dim H^p_{dR}(M) < \infty, \quad p = 0,1,\dots,n.$$

Пример 5. 0-я группа когомологий де Рама $H^0_{dR}(M)$ совпадает с ядром дифференциала d_0 на функциях:

$$H^0_{dR}(M) = \ker d_0,$$

которое состоит из локально постоянных функций на M. Поэтому,

$$H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}^s,$$

где s — число компонент связности многообразия M. В частности, если многообразие M связно, то

$$H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}.$$

Пример 6. Пусть $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — двумерный тор. Гладкие функции на M можно рассматривать как $\mathbb{Z}^2$-периодические гладкие функции на $\mathbb{R}^2$. Дифференциальная один-форма $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ замкнута тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Эта форма является точной тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 a(\xi,0)d\xi = 0, \quad \int_0^1 b(0,\eta)d\eta = 0. \tag{4}$$

При этом условии форма ω представима в виде $\omega = df$, где

$$f(x,y) = \int_0^x a(\xi,y)d\xi + \int_0^y b(0,\eta)d\eta.$$

Условия (4) гарантируют периодичность функции f. Поэтому, имеет место изоморфизм

$$H^1_{dR}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2,$$

определяемый формулами

$$\omega \in Z^1 \mapsto \left(\int_0^1 a(\xi,0)d\xi, \int_0^1 b(0,\eta)d\eta \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогично, произвольная дифференциальная два-форма $\omega = c(x,y)dx \wedge dy$ замкнута. Эта форма является точной тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \int_0^1 c(x,y)dx\,dy = 0. \tag{5}$$

При этом условии форма ω представима в виде $\omega = d\alpha$, где

$$\alpha = a(y)dx + b(x,y)dy$$

с

$$a(y) = \int_0^1 \int_0^y c(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad b(x,y) = \int_0^x c(\xi,y)\,d\xi - \int_0^x \int_0^1 c(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Условие (5) гарантирует периодичность функций a и b. Поэтому, имеет место изоморфизм

$$H^2_{dR}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R},$$

определяемый формулой

$$\omega \in Z^2 \mapsto \int_{\mathbb{T}^2} \omega = \int_0^1 \int_0^1 c(x,y)dx\,dy \in \mathbb{R}.$$

Важнейшим свойством групп когомологий де Рама является свойство инвариантности. Сначала напомним, что для любого гладкого отображения $f : M \to M'$ определено индуцированное отображение пространств дифференциальных форм $f^* : \Omega^p(M') \to \Omega^p(M)$, обладающее следующими свойствами:

(1) f^* линейно: для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^p(M')$ и $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$f^*(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = a_1 f^*(\alpha_1) + a_2 f^*(\alpha_2).$$

(2) для любых $\alpha \in \Omega^p(M')$ и $\beta \in \Omega^q(M')$ справедливо соотношение

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

(3) f^* коммутирует с дифференциалом де Рама d:

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha), \quad \alpha \in \Omega(M').$$

Таким образом, если записать отображение f в локальных координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ на M и $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ на M' в виде

$$y^j = y^j(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и дифференциальную форму $\alpha \in \Omega^p(M')$ — в виде

$$\alpha = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} A_{i_1 i_2 \dots i_p}(y) dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \dots \wedge dy^{i_p},$$

то дифференциальная форма $f^*\alpha \in \Omega^p(M)$ получается из α при помощи замены y на $y(x)$, а dy^i на $f^*(dy^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$.

Используя свойство (3), легко проверить, что отображение f^* переводит $Z_p(M')$ в $Z_p(M)$ и $B_p(M')$ в $B_p(M)$, и потому естественным образом определяет отображение групп когомологий де Рама $H^p_{dR}(M)$:

$$f^* : H^p_{dR}(M') \longrightarrow H^p_{dR}(M).$$

В частности, отсюда вытекает инвариантность групп когомологий де Рама при диффеоморфизмах: если многообразия M и M' диффеоморфны, то их группы когомологий де Рама изоморфны: $H^p_{dR}(M) \cong H^p_{dR}(M')$.

На самом деле, группы когомологий де Рама топологически инвариантны. то есть, если многообразия M и M' гомеоморфны, то их группы когомологий де Рама изоморфны: $H^p_{dR}(M) \cong H^p_{dR}(M')$. Более того, имеет место теорема де Рама:

$$H^p_{dR}(M) \cong H^p(M, \mathbb{R}), \tag{6}$$

где $H^p(M, \mathbb{R})$ обозначает p-ю группу сингулярных когомологий топологического пространства M с коэффициентами в $\mathbb{R}$.

1.5. **Дифференциальные формы и векторный анализ.** Используя введенные в этом разделе операции над дифференциальными формами, можно дать инвариантные определения классических операций векторного анализа.

Прежде всего, отметим, что на любом гладком римановом многообразии M определен естественный линейный изоморфизм $\# : \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$. Для любого $X \in \mathcal{X}(M)$ соответствующая 1-форма $\#X \in \Omega^1(M)$ определяется формулой

$$\#X(Y) = (X, Y), \quad Y \in \mathcal{X}(M).$$

Эта операция является частным случаем операции опускания индексов в тензорном анализе. В локальной системе координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ оператор $\#$ задается следующим образом. Для векторного поля $X = \sum_{j=1}^n X^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ соответствующая 1-форма $\#X = \sum_{i=1}^n (\#X)_i dx^i$ определяется формулой

$$(\#X)_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} X^j,$$

где g_{ij} — компоненты римановой метрики.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное стандартной евклидовой метрикой. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ее градиент $\nabla f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ задается формулой

$$\nabla f = \#^{-1} df.$$

Затем для любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ его дивергенция $\operatorname{div} X \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ задается формулой

$$\operatorname{div} X = \#^{-1} d * \#X.$$

Наконец, операция rot определена только в случае $n = 3$. Для любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ его ротор $\operatorname{rot} X \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ задается формулой

$$\operatorname{rot} X = \#^{-1} * d\#X.$$

Эти формулы позволяют дать определения соответствующих операций на произвольном гладком римановом многообразии M, а также выписать выражения для классических операций векторного анализа в криволинейных координатах (т.е. в случае, когда пространство $\mathbb{R}^n$ наделено произвольной римановой метрикой). В частности, в локальной системе координат с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ имеют место следующие формулы для градиента

$$(\nabla f)^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и дивергенции
$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} X^i \right).$$

Напомним, что векторное поле X называется безвихревым в области $U \subset \mathbb{R}^3$, если $\operatorname{rot} X = 0$, и потенциальным, если существует такая скалярная функция f, что $X = \nabla f$. На языке дифференциальных форм это означает, что X — безвихревое векторное поле тогда и только тогда, когда $d\#X = 0$ (т.е. дифференциальная 1-форма $\#X$ замкнута, $\#X \in Z^1$), и X — потенциальное векторное поле тогда и только тогда, когда $\#X = df$ для некоторой функции f (т.е. дифференциальная 1-форма $\#X$ точна, $\#X \in B^1$). Поскольку $B^1 \subset Z^1$, любое потенциальное поле является безвихревым, но обратное, вообще говоря, неверно и выполняется тогда и только тогда, когда $H^1_{dR}(U) = \{0\}$. Последнее условие выполнено, например, в том случае, когда область U односвязна.

Аналогичным образом, напомним, что векторное поле X называется соленоидальным (или бездивергентным) в области $U \subset \mathbb{R}^3$, если $\operatorname{div} X = 0$. Оно имеет векторный потенциал Y, если $X = \operatorname{rot} Y$. На языке дифференциальных форм это означает, что X — соленоидальное векторное поле тогда и только тогда, когда $d * \#X = 0$ (т.е. дифференциальная 2-форма $*\#X$ замкнута, $*\#X \in Z^2$), и X имеет векторный потенциал Y тогда и только тогда, когда $*\#X = d\#Y$ (т.е. дифференциальная 2-форма $*\#X$ замкнута, $*\#X \in B^2$). Поскольку $B^2 \subset Z^2$, если векторное поле имеет векторный потенциал, то оно является соленоидальным, но обратное, вообще говоря, неверно и выполняется тогда и только тогда, когда $H^2_{dR}(U) = \{0\}$.

1.6. **Теория Ходжа.** Риманова метрика позволяет выбрать канонический представитель в каждом классе когомологий де Рама, а именно, гармоническую форму. Эта идея лежит в основе теории Ходжа.

Обозначим через Δ_p ограничение оператора Лапласа Δ на пространство дифференциальных форм степени p.

Дифференциальная форма α, удовлетворяющая условию $\Delta\alpha = 0$, называется гармонической дифференциальной формой. Обозначим через $\mathcal{H}_p$ пространство гармонических форм степени p.

Теорема 2 (Изоморфизм Ходжа)**.** *Имеет место изоморфизм*
$$H^p_{dR}(M) \cong \mathcal{H}_p.$$

Более подробно, данное утверждение означает следующее:

(1) $\mathcal{H}_p = \{\alpha \in \Omega^p \colon d\alpha = d^*\alpha = 0\} \subset Z_p$.

(2) Для любого класса когомологий $x \in H^p_{dR}(M)$ существует единственная форма $\alpha_0 \in \mathcal{H}_p$, класс когомологий которой $[\alpha_0] \in H^p_{dR}(M)$ совпадает с x, или другими словами, для любой замкнутой формы $\alpha \in \Omega^p$ существует единственная гармоническая форма $\alpha_0 \in \Omega^p$ такая, что $\alpha - \alpha_0$ является точной формой.

Пример 7. Для двумерного тора $\mathbb{T}^2$, наделенного стандартной евклидовой метрикой, имеем
$$\mathcal{H}_1 = \{adx + bdy : a, b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{H}_2 = \{adx \wedge dy : a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R},$$
что согласуется с вычислениями примера 6.

Поскольку оператор Δ_p является эллиптическим оператором, из теоремы 2 немедленно получаем следующий факт.

Следствие 1. *Когомологии любого компактного многообразия без края M конечномерны:*
$$\dim H^p(M, \mathbb{R}) < \infty, \quad p = 0, 1, \ldots, n.$$

Поскольку когомологии де Рама определяются, не используя никакую риманову метрику, немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Размерность пространства $\mathcal{H}_p$ гармонических p-форм не зависит от выбора римановой метрики на компактном многообразии M.*

Еще одним непосредственным следствием теоремы 2 является изоморфизм Пуанкаре.

Следствие 3. *Для любого ориентируемого компактного многообразия без края имеют место изоморфизмы*

$$H^p(M,\mathbb{R}) \cong H^{n-p}(M,\mathbb{R}), \quad p=0,1,\ldots,n.$$

Доказательство. Выберем ориентацию и риманову метрику на M. Согласно (6) и теореме 2 достаточно доказать, что

$$\mathcal{H}_p \cong \mathcal{H}_{n-p}, \quad p=0,1,\ldots,n.$$

Рассмотрим оператор Ходжа $* : \Omega^p \to \Omega^{n-p}$, определяемый римановой метрикой. Используя явную формулу (2) для оператора d^* в терминах оператора Ходжа, легко проверить, что

$$*\Delta_p = (-1)^n \Delta_{n-p} * .$$

Следовательно, оператор Ходжа определяет изоморфизм

$$\alpha \in \mathcal{H}_p \mapsto *\alpha \in \mathcal{H}_{n-p}, \quad p=0,1,\ldots,n.$$

Теорема 3 (Разложения Ходжа)**.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

(1) $Z_p \cong B_p \oplus \mathcal{H}_p$.
(2) $\Omega_p \cong Z_p \oplus \operatorname{Im} d_p^* \cong \operatorname{Im} d_p \oplus \mathcal{H}_p \oplus \operatorname{Im} d_p^*$.

Частным случаем разложения Ходжа является теорема разложения Гельмгольца в векторном анализе, которая утверждает, что любое векторное поле в пространстве представимо в виде суммы безвихревого и соленоидального полей. Чтобы это увидеть, следует отметить, что X — соленоидальное векторное поле тогда и только тогда, когда $d^*\#X = 0$ (т.е. $\#X \in \ker d^*$), и X имеет векторный потенциал тогда и только тогда, когда дифференциальная 1-форма $\#X$ принадлежит образу оператора d^*, $\#X \in \operatorname{Im} d^*$).

2. Связности в векторных расслоениях

2.1. **Предварительные сведения о векторных расслоениях.** Гладкое вещественное векторное расслоение ранга N на гладком многообразии M представляет собой гладкое локально тривиальное семейство $\{E_x : x \in M\}$ вещественных линейных пространств размерности N, параметризованное точками многообразия M. Под гладкостью и локальной тривиальностью семейства понимается следующее. Прежде всего, на дизъюнктном объединении $E = \bigsqcup_{x\in M} E_x$ элементов семейства задана структура гладкого многообразия, причем естественная проекция $p : E \to M$, ставящая в соответствие любому элементу пространства E_x точку x, является гладким отображением. Более того, для любой точки $x \in M$ существует такая открытая окрестность U точки x и такой диффеоморфизм ϕ_U множества $E\,|_U = \bigsqcup_{x\in U} E_x = p^{-1}(U)$ на $U \times \mathbb{R}^N$, что для любого $y \in U$ ограничение ϕ_y диффеоморфизма ϕ_U на E_y определяет линейный изоморфизм векторных пространств $E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^N$. Окрестность U называется тривиализующей, а диффеоморфизм ϕ_U называется тривиализацией расслоения E над U.

Если две тривиализующие окрестности U и V пересекаются, то на их пересечении определена функция перехода $\psi_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ при помощи соотношения

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1} : (U\cap V) \times \mathbb{R}^N \to (U\cap V)\times \mathbb{R}^N : (x,v) \mapsto (x, \psi_{UV}(x)v).$$

Многообразие M называется базой расслоения, E — тотальным пространством расслоения. Линейное пространство E_x называется слоем расслоения в точке x.

Аналогичным образом определяются комплексные векторные расслоения.

Гладкое отображение $s : M \to E$ называется гладким сечением расслоения E, если $p \circ s = \mathrm{id}$, или, эквивалентным образом, для любого $x \in M$ точка $s(x)$ принадлежит E_x. Множество гладких сечений векторного расслоения имеет естественную структуру линейного пространства и обозначается $C^\infty(M,E)$.

Пример 8. Возьмем в качестве E_x фиксированное линейное пространство $\mathbb{R}^N$. Тогда множество $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$ совпадает с $M \times \mathbb{R}^N$. Естественно наделить множество E структурой прямого произведения многообразий M и $\mathbb{R}^N$. Такое расслоение называется тривиальным расслоением над M ранга N.

Нетрудно видеть, что любое гладкое сечение s тривиального расслоения $M \times \mathbb{R}^N$ имеет вид

$$s(x) = (x, f(x)), \quad x \in M,$$

где f — гладкая функция на M со значениями в $\mathbb{R}^N$. Поэтому, сечения тривиального расслоения естественно отождествляются с гладкими векторнозначными функциями.

Поскольку локально любое векторное расслоение тривиально, любое гладкое сечение векторного расслоения локально можно рассматривать как гладкую векторнозначную функцию, но глобально это неверно.

Пример 9. Возьмем в качестве E_x касательное пространство T_xM многообразия M в точке x. Тогда на множестве $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$ существует естественная структура гладкого многообразия, такая, что TM является векторным расслоением над M. Если U — координатная окрестность с координатами $(x^1, \dots, x^n)$, то она является тривиализующей окрестностью для касательного расслоения TM. Тривиализация

$$\phi_U : TM\,|_U \to U \times \mathbb{R}^n$$

ставит в соответствие любому $X \in T_xM$ $(x \in U)$ набор его компонент $(X^1, \dots, X^n)$ в данной локальной системе координат:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Если две координатные окрестности U и V с координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ пересекаются, то соответствующая функция перехода $\psi_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ задается формулой

$$(\psi_{VU})_{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пространство гладких сечений расслоения TM совпадает с пространством гладких векторных полей на M:

$$C^\infty(M, TM) = \mathcal{X}(M).$$

Расслоение TM называется касательным расслоением многообразия M.

Пример 10. Возьмем в качестве E_x кокасательное пространство T_x^*M многообразия M в точке x (то есть, пространство, двойственное к касательному пространству T_xM, — пространство линейных функционалов $T_xM \to \mathbb{R}$). Тогда на множестве $T^*M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$ существует естественная структура гладкого многообразия, такая, что T^*M является векторным расслоением над M. Если U — координатная окрестность с координатами $(x^1, \dots, x^n)$, то она является тривиализующей окрестностью для кокасательного расслоения T^*M. Тривиализация

$$\phi_U : T^*M\,|_U \to U \times \mathbb{R}^n,$$

ставит в соответствие любому функционалу $\omega \in T_x^*M$ $(x \in U)$ набор его компонент $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ в данной локальной системе координат:

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X^i, \quad X \in T_xM.$$

Если две координатные окрестности U и V с координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ пересекаются, то соответствующая функция перехода $\psi_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ задается формулой

$$(\psi_{VU})_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пространство гладких сечений расслоения T^*M совпадает с пространством гладких дифференциальных один-форм на M:

$$C^\infty(M, T^*M) = \Omega^1(M).$$

Расслоение T^*M называется кокасательным расслоением многообразия M.

Пример 11. Для любого p существует естественное векторное расслоение $\Lambda^p T^*M$ на M, такое, что пространство гладких сечений этого расслоения совпадает с пространством гладких дифференциальных p-форм на M:

$$C^\infty(M, \Lambda^p T^*M) = \Omega^p(M).$$

Расслоение $\Lambda^p T^*M$ называется p-м внешним расслоением многообразия M. Слоем расслоения $\Lambda^p T^*M$ в точке $x \in M$ является p-я внешняя степень $\Lambda^p T^*_x M$ кокасательного пространства $T^*_x M$ в точке x. Пространство $\Lambda^p T^*_x M$ состоит из кососимметрических p-линейных функционалов на касательном пространстве $T_x M$.

2.2. **Ковариантная производная.** Любое гладкое векторное поле X на многообразии M определяет дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на M — дифференцирование по направлению векторного поля X. Этот объект корректно определен, и его определение инвариантно, то есть, оно не зависит от выбора локальной системы координат. Аналогичная операция дифференцирования векторнозначных функций — сечений векторных расслоений не столь хорошо и однозначно определена. Чтобы ее определить, необходимо ввести дополнительную структуру на векторном расслоении, называемую в геометрии (линейной) связностью. Мы начнем с того, что явно сформулируем те свойства, которые мы ожидаем от такой операции дифференцирования.

Определение 3. Ковариантной производной (связностью) на векторном расслоении E называется отображение

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E), \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для любого $X \in \mathcal{X}(M)$ отображение $\nabla_X : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ линейно;

(2) для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и $s \in C^\infty(M, E)$

$$\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$$

(3) для любых $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ и $s \in C^\infty(M, E)$

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s;$$

(4) для любых $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ и $s \in C^\infty(M, E)$

$$\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + X(f) s.$$

Из условия (3) данного определения вытекает, что значение $\nabla_X s$ в точке $m \in M$ зависит только от значения X в точке m. Условие (4) является аналогом правила Лейбница в данной ситуации.

Выберем некоторую тривиализующую окрестность U для расслоения E. Тогда сечения векторного расслоения E над U естественно отождествляются с векторнозначными функциями, определенными на U со значениями в $\mathbb{R}^N$ ($N = \operatorname{rank} E$):

$$C^\infty(U, E|_U) \cong C^\infty(U, \mathbb{R}^N).$$

Наивный способ задания ковариантной производной сечений векторного расслоения E над U задается формулой

$$\nabla_X s = Xs.$$

Легко проверить, что такой способ не инвариантен относительно замен тривиализации расслоения E. Естественно пытаться строить ковариантную производную сечений векторного расслоения E над U по формуле

$$\nabla_X s = Xs + \omega_U(X) s, \quad X \in \mathcal{X}(U), \quad s \in C^\infty(U, \mathbb{R}^N), \tag{7}$$

где $\omega_U(X)$ — гладкая функция на U со значениями в алгебре матриц $M(N,\mathbb{R})$. Тогда условие (4) выполнено, поскольку умножение на $\omega_U(X)$ является поточечным линейным отображением. Более того, из условий (2) и (3) следует, что $\omega_U(X)$ зависит линейно от X. Таким образом, можно сказать, что ω_U является дифференциальной один-формой со значениями в пространстве матриц $M(N,\mathbb{R})$ (или квадратной матрицей, состоящей из дифференциальных один-форм), называемой формой связности.

Если две тривиализующие окрестности U и V пересекаются, то нетрудно проверить, что на их пересечении $U\cap V$ формы связности должны быть связаны соотношением

$$\omega_V = \psi_{UV}^{-1}\omega_U\psi_{UV} + \psi_{UV}^{-1}d\psi_{UV}. \tag{8}$$

Нетрудно построить набор форм связности $\{\omega_U\}$, определенных в тривиализующих окрестностях для расслоения E, который удовлетворяет условию (8), что позволяет определить по формуле (7) ковариантную производную ∇ на расслоении E.

Важнейшей характеристикой связности является ее кривизна.

Определение 4. Оператором кривизны связности ∇ называется оператор

$$K(X,Y): C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E),$$

определяемый парой векторных полей $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ по формуле

$$K(X,Y)s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$$

для любого $s\in C^\infty(M,E)$.

Нетрудно проверить, что для любых $f,g,h\in C^\infty(M)$ имеет место соотношение

$$K(fX,gY)[hs] = fghK(X,Y)s$$

для любого $s\in C^\infty(M,E)$. Этот факт позволяет утверждать, что оператор K определяется семейством линейных операторов $K_x(X,Y): E_x\to E_x$, $x\in M$, $X,Y\in T_xM$.

2.3. **Связности в касательном расслоении.** Важным примером связностей являются связности в касательном расслоении TM многообразия M. В этом случае в любой локальной системе координат $(x^1,x^2,\dots,x^n)$ можно записать, что

$$[\omega_U(X)]_k^j = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ik}^j X^i \in M(n,\mathbb{R}),$$

и соответственно ковариантная производная записывается в виде

$$(\nabla_X Y)^j = \sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \sum_{i,k}\Gamma_{ik}^j X^iY^k,$$

где

$$X=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_{j=1}^n Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Функции Γ_{ik}^j называются символами Кристоффеля связности ∇.

Определение 5. Кручение T связности ∇ задается формулой

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\in\mathcal{X}(M)$$

для любых $X,Y\in\mathcal{X}(M)$.

Кручение является тензорным полем типа $(1,2)$: для любых $f,g\in C^\infty(M)$ имеет место соотношение

$$T(fX,gY) = fgT(X,Y),\quad X,Y\in\mathcal{X}(M).$$

Определение 6. Связность ∇ называется симметричной (или связностью без кручения), если $T=0$.

В локальной системе координат кручение T определяется набором функций

$$T^j_{ik} = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}.$$

Симметричность связности ∇ эквивалентна условию

$$\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$$

для любых i, j и k.

Ковариантная производная ∇ в касательном расслоении TM естественно определяет ковариантную производную любых тензорных полей.

Ковариантное дифференцирование в кокасательном расслоении (т.е. ковариантная производная дифференциальных форм степени 1)

$$\nabla_X : \Omega^1 \to \Omega^1, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

определяется формулой

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

для любых $\omega \in \Omega^1$ и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, или эквивалентно в локальных координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$

$$(\nabla_X \omega)_i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \sum_{j,k} \Gamma^j_{ik} X^k \omega_j,$$

где

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i, \quad X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Нетрудно видеть, что ковариантная производная ∇ допускает естественное продолжение до оператора

$$\nabla_X : \Omega^p \to \Omega^p, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

удовлетворяющего следующим условиям:

(1) для любых $f \in C^\infty(M)$ и $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_{fX} = f \nabla_X;$$

(2) для любых $\alpha \in \Omega^p$, $\beta \in \Omega^q$ и $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \nabla_X \beta.$$

2.4. **Риманова связность.** Пусть M — гладкое риманово многообразие. Таким образом, определено отображение $(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$.

Определение 7. Связность ∇ в касательном расслоении TM согласована с римановой метрикой, если для любых $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ выполнено условие:

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z).$$

Теорема 4 (Основная теорема римановой геометрии)**.** *Существует единственная симметричная связность, согласованная с римановой метрикой.*

Связность, определяемая этой теоремой, называется связностью Леви-Чивиты (или римановой связностью).

Символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты задаются формулой

$$\Gamma^j_{ik} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{2} g^{j\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} \right).$$

Кривизна связности Леви-Чивита

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

называется тензором римановой кривизны.

В локальной системе координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ можно записать

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \sum_{i=1}^n R^i_{\ell jk} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где

$$R^i_{\ell jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^n \Gamma^m_{k\ell}\Gamma^i_{jm} - \sum_{m=1}^n \Gamma^m_{j\ell}\Gamma^i_{km}.$$

Тензор римановой кривизны является достаточно сложным инвариантом римановой метрики. С его помощью можно определить более простые инварианты.

Тензор Риччи риманова многообразия M определяется формулой

$$\mathrm{Ric}_{ab} = \sum_{i=1}^n R^i_{aib}.$$

Скалярная риманова многообразия M определяется формулой

$$\kappa = \sum_{ab} g^{ab}\mathrm{Ric}_{ab}.$$

Риманов тензор кривизны есть тензор R типа (4,0), определяемый в локальных координатах формулой

$$R_{ijk\ell} = \sum_{m=1}^n g_{im}R^m_{jk\ell}.$$

Можно дать также и инвариантное определение риманова тензора кривизны. Соответствующее отображение

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$$

определяется по формуле

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = (R(X_3, X_4)X_2, X_1), \quad X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{X}(M).$$

Если многообразие M двумерно, то тензор кривизны R имеет 4 нетривиальные компоненты

$$R_{1212} = -R_{2112} = R_{1221} = -R_{1221},$$

остальные компоненты равны нулю. Имеет место соотношение

$$2R_{1212} = \kappa(g_{11}g_{22} - g_{12}^2),$$

причем скалярная кривизна κ связана с гауссовой кривизной K по формуле

$$\kappa = 2K.$$

Этот факт служит мотивировкой для определения понятия секционной кривизны для произвольного риманова многообразия M размерности n. Именно, для каждой двумерной плоскости π в касательном пространстве T_xM секционная кривизна $K(\pi)$ для π определяется по формуле

$$K(\pi) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = (R(X_1, X_2)X_2, X_1),$$

где X_1, X_2 — ортонормированный базис в π. Можно показать, что $K(\pi)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса X_1, X_2, и что множество значений $K(\pi)$ для всех плоскостей π определяет тензор римановой кривизны.

2.5. **Дифференциальные операторы.** Пусть M — компактное риманово многообразие. Напомним, что связность Леви-Чивита ∇ естественно определяет оператор ковариантного дифференцирования на дифференциальных формах

$$\nabla_X : \Omega^p \to \Omega^p, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Используя этот оператор, можно определить различные геометрические дифференциальные операторы, действующие в пространствах дифференциальных форм.

Пусть $\nabla^*_X : \Omega^p \to \Omega^p$ — дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору ∇_X относительно скалярного произведения на дифференциальных формах. Можно доказать, что

$$\nabla^*_X = -\nabla_X - \operatorname{div} X,$$

где $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$ — дивергенция векторного поля X (см. раздел 1.5). Можно показать, что в локальных координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ функция $\operatorname{div} X$ задается формулой

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{ij} \Gamma^j_{ji} X^i,$$

где $X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, Γ^j_{ik} — символы Кристоффеля римановой связности ∇.

Лапласианом Бохнера (грубым лапласианом) называется дифференциальный оператор второго порядка $B : \Omega^p \to \Omega^p$, задаваемый в координатной окрестности U с локальными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ по формуле

$$B = \sum_{i,j} \nabla^*_{\partial_i} g^{ij} \nabla_{\partial_j},$$

где ∂_j обозначает локальное векторное поле $\frac{\partial}{\partial x^j}$.

Можно доказать, что оператор B корректно определен, то есть, его определение не зависит от выбора локальной системы координат.

Оператор B является положительно определенным самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка. В координатной окрестности U с локальными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ справедливо равенство

$$(Bu, u) = \int\limits_M \sum_{i,j} g^{ij} (\nabla_{\partial_j} u(x), \nabla^*_{\partial_i} u(x))_x dvol(x), \quad u \in C^\infty(U).$$

Следует отметить, что, в отличие от оператора Лапласа Δ, лапласиан Бохнера B определен для любого риманова векторного расслоения на римановом многообразии M. (Расслоение E над M называется римановым, если в слоях расслоения E определено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{E_x}$, гладко зависящее от $x \in M$.)

Сравнение оператора Лапласа с лапласианом Бохнера приводит к интересным геометрическим результатам.

Теорема 5 (формула Бохнера)**.** *Имеет место формула*

$$\Delta = B + \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ — некоторый дифференциальный оператор нулевого порядка, выражающийся в терминах тензора кривизны.

В некотором смысле теорема 5 утверждает, что оператор Лапласа Δ имеет вид оператора Шредингера с некоторым матричнозначным потенциалом.

При доказательстве этой теоремы важную роль играет следующий факт, дающий выражение дифференциала де Рама d и кодифференциала де Рама d^* в терминах связности Леви-Чивиты. Для любого $X \in \mathcal{X}(M)$ определим оператор $i_X : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ внутреннего умножения на X по формуле

$$i_X\omega(X_1, X_2, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, X_2, \dots, X_{p-1}), \quad X_1, X_2, \dots, X_{p-1} \in \mathcal{X}(M).$$

Лемма 1. *В локальных координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ справедливы следующие соотношения:*

$$d = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge \nabla_{\partial_j}, \quad d^* = \sum_{j,k=1}^n g^{jk} i_{\partial_k} \nabla_{\partial_j}.$$

Оператор $\mathcal{R}$ имеет достаточно сложное выражение в терминах римановой кривизны, и поэтому из теоремы 5 не так просто получить конкретные геометрические приложения. Однако в некоторых частных случаях это возможно. Прежде всего, отметим, что ограничение оператора $\mathcal{R}$ на Ω^0 равно нулю, т.е. $\Delta = B$. Более интересным фактом является то, что ограничение оператора $\mathcal{R}$ на Ω^1 задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^j_i = \sum_\ell \mathrm{Ric}_{i\ell} g^{\ell j}.$$

В качестве немедленного следствия этого факта получается следующая теорема.

Теорема 6 (Бохнер). *Если кривизна Риччи компактного риманова многообразия M неотрицательна в любой точке M и строго положительна хотя бы в одной точке, то*

$$H^1(M,\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Доказательство. Ввиду положительной определенности оператора B, для любого $u \in \Omega$ имеет место оценка

$$(\Delta u, u) = (Bu, u) + (\mathcal{R}u, u) \geq (\mathcal{R}u, u) = \int (\mathcal{R}u, u)_m dvol(m).$$

Из условия теоремы вытекает, что для любого $u \in \Omega^1$

$$\int (\mathcal{R}u, u)_m dvol(m) > 0.$$

Таким образом, оператор Лапласа на дифференциальных один-формах Δ_1 строго положителен, и потому его ядро тривиально:

$$\mathcal{H}_1 = \{0\}.$$

Применение теоремы Ходжа, теоремы 2, завершает доказательство.

В качестве простейшей иллюстрации этой теоремы приведем такое утверждение, являющееся следствием того факта, что $H^1(\mathbb{T}^2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ (см. пример 6):

Предложение 1. *На двумерном торе $\mathbb{T}^2$ не существует римановой метрики, кривизна Риччи которой всюду неотрицательна и строго положительна хотя бы в одной точке.*

3. Операторы типа Дирака

3.1. **Случай плоского пространства.** В 1928 году в связи с задачей описания движения свободной релятивистской квантовомеханической частицы со спином 1/2 Дирак поставил и решил вопрос о существовании дифференциального оператора первого порядка в стандартном евклидовом пространстве, квадрат которого совпадает с оператором Лапласа. На самом деле, оказывается, что эта задача не имеет решение в скалярных дифференциальных операторов. Поэтому, необходимо рассматривать матричные дифференциальные операторы, что приводит к изучению представлений комплексных алгебр Клиффорда.

Точнее, в плоском евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим оператор

$$\Delta \otimes 1 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix},$$

действующий в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$ гладких функций на пространстве $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{C}^N$, где Δ обозначает оператор Лапласа:

$$\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти дифференциальный оператор первого порядка D в $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$, удовлетворяющий условию

$$D^2 = \Delta \otimes 1. \tag{9}$$

Любой такой оператор D будем называть оператором Дирака.

Будем искать оператор D в виде

$$D = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

с некоторыми $c_j \in M(N,\mathbb{C})$. Тогда D удовлетворяет условию (9) тогда и только тогда, когда матрицы c_j удовлетворяют соотношениям

$$c_j c_k + c_k c_j = -2\delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Введем абстрактную алгебраическую структуру, определяемую данными алгебраическими соотношениями.

Определение 8. Пусть V — вещественное евклидово векторное пространство, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в V, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в V. Комплексной алгеброй Клиффорда называется алгебра $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(V)$ над полем комплексных чисел, порожденная элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$e_j e_k + e_k e_j = -2(e_j, e_k), \quad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Можно показать, что определение корректно, то есть, оно не зависит от выбора базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в V, то он определяет изоморфизм евклидовых пространств $V \cong \mathbb{R}^n$ и соответственно изоморфизм алгебр Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Согласно определению, алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ порождается элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$e_j e_k = -e_k e_j, \quad j \neq k, \quad e_j^2 = -1.$$

Таким образом, любые матрицы $c_j \in M(N, \mathbb{C})$, удовлетворяющие соотношениям (10), задают представление алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$. Поэтому, задача построения оператора Дирака сводится к исследованию представлений алгебр Клиффорда.

Теория представлений алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ различается при n четном и n нечетном. Мы рассмотрим только случай четного n. Таким образом, предположим, что $n = 2k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. В этом случае оказывается, что существует единственное с точностью до изоморфизма нетривиальное неприводимое унитарное представление $c : \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(S)$ алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, называемое спинорным представлением. Пространство S этого представления называется пространством спиноров. Его комплексная размерность равна 2^k. Более того, сама алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ изоморфна алгебре линейных отображений пространства S. Любое другое представление алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ имеет вид $c \otimes 1 : \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(S \otimes E)$ для некоторого линейного пространства E.

В случае $n = 2$ пространство спиноров S двумерно, $S \cong \mathbb{C}^2$, и спинорное представление задается матрицами Паули:

$$c(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c(e_1 e_2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Ассоциированный оператор Дирака D есть оператор Коши-Римана. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^2$ через (x, y). Тогда

$$D = c(e_1)\frac{\partial}{\partial x} + c(e_2)\frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае $n = 4$ пространство спиноров S четырехмерно, $S \cong \mathbb{C}^4$, и спинорное представление задается матрицами Дирака размера 4×4, обычно обозначаемыми через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$:

$$c(e_j) = \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Опишем конструкцию спинорного представления комплексной алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(V)$ для произвольного вещественного евклидового векторного пространства V четной размерности $n = 2k$. Зададим на пространстве V комплексную структуру, то есть, такой линейный оператор $J : V \to V$, что $J^2 = -1$. Будем также предполагать, что комплексная структура согласована с евклидовой структурой, то есть, что оператор J является ортогональным оператором, $J^* J = 1$. Например, можно выбрать какой-либо ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве V и определить комплексную структуру J по формулам

$$J e_j = e_{j+k}, \quad j = 1, \ldots, k, \quad J e_j = -e_{j-k}, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V:

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = \{u + iv : u, v \in V\}.$$

Оператор J продолжается до $\mathbb{C}$-линейного отображения пространства $V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию $J^2 = -1$. Поэтому, он имеет собственные значения i и $-i$, и пространство $V_{\mathbb{C}}$ представляется в виде прямой суммы подпространств

$$V_{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \bigoplus V^{(0,1)},$$

где $V^{(1,0)}$ (соотв. $V^{(0,1)}$) — собственные подпространства оператора J, соответствующие собственному значению i (соотв. $-i$):

$$V^{(1,0)} = \{v \in V_{\mathbb{C}} : Jv = iv\}, \quad V^{(0,1)} = \{v \in V_{\mathbb{C}} : Jv = -iv\}.$$

В качестве пространства спиноров S возьмем внешнюю алгебру пространства $V^{(0,1)*}$:

$$S = \Lambda V^{(0,1)*} = \bigoplus_{p=0}^{k} \Lambda^p V^{(0,1)*}.$$

Скалярное произведение $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ продолжается по $\mathbb{C}$-линейности до комплексно-билинейного отображения $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. Отображение $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ обращается в нуль на $V^{(1,0)} \times V^{(1,0)}$ и $V^{(0,1)} \times V^{(0,1)}$. Ограничение этого отображения на $V^{(1,0)} \times V^{(0,1)}$ задает невырожденное спаривание

$$(\cdot,\cdot) : V^{(1,0)} \times V^{(0,1)} \to \mathbb{C},$$

определяющее изоморфизм $V^{(1,0)} \cong V^{(0,1)*} : v^{(1,0)} \mapsto v^{(1,0)*}$.

Представление c алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(V)$ в пространстве S определяется для любого $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)} \in V$ по формуле:

$$c(v) = \sqrt{2}(\varepsilon_{v^{(1,0)*}} - i_{v^{(0,1)}}),$$

где $i_{v^{(0,1)}}$ — оператор внутреннего умножения на $v^{(0,1)}$, $\varepsilon_{v^{(1,0)*}}$ — оператор внешнего умножения на $v^{(1,0)*} \in V^{(0,1)*}$.

Соответствующий оператор Дирака задается формулой

$$D = \sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*) : C^\infty(V, \Lambda V^{(0,1)*}) \to C^\infty(V, \Lambda V^{(0,1)*}),$$

где $\bar\partial$ обозначает $\bar\partial$-оператор, ассоциированный с комплексной структурой J.

3.2. **Случай искривленного пространства.** Использование языка алгебр Клиффорда и их представлений позволяет обобщить конструкцию оператора Дирака на случай искривленного пространства. Операторы Дирака на гладких многообразиях были впервые введены Атьей и Зингером. Эти операторы играют важную роль в теории индекса эллиптических операторов.

Пусть M — гладкое риманово многообразие. Таким образом, в каждом касательном пространстве T_mM определено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_m$, гладко зависящее от $m \in M$. Поэтому, для любого $m \in M$ определена комплексная алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T_mM)$. Можно пытаться повторить конструкцию оператора Дирака в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ «поточечно». Необходимые элементы конструкции и требуемые от них свойства собраны в следующем определении.

Определение 9. Комплексное векторное расслоение S на M называется расслоением Дирака (или клиффордовым расслоением), если:

(1) для любой точки $m \in M$ слой S_m расслоения S является пространством представления комплексной алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T_mM)$ (для любого $a \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T_mM)$ будем обозначать через $c(a)$ соответствующее линейное отображение пространства S_m);
(2) в каждом слое S_m расслоения S определено эрмитово скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_m$, гладко зависящее от m;

(3) задана связность на S:

$$\nabla^S_X : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S), \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

причем выполнены следующие условия:

(а): для любых $s_1, s_2 \in S_m$ и $a \in T_mM$

$$(c(a)s_1, s_2)_m + (s_1, c(a)s_2)_m = 0;$$

(б): для любых $s_1, s_2 \in C^\infty(M,S)$ и $X \in T_mM$

$$X[(s_1,s_2)_m] = (\nabla^S_X s_1, s_2)_m + (s_1, \nabla^S_X s_2)_m;$$

(в): для любых $s \in C^\infty(M,S)$ и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla^S_X(c(Y)s) = c(\nabla_X Y)s + c(Y)\nabla_X s.$$

Определение 10. Пусть S — расслоение Дирака на M. Выберем локальный ортонормированный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в TM (т.е. такой набор $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ векторных полей, определенных в некоторой открытой области U, что для любого $m \in U$ набор $(e_1(m), e_2(m), \ldots, e_n(m))$ является ортонормированным базисом в T_mM). Оператор Дирака, ассоциированный с расслоением S, есть дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве $C^\infty(M,S)$ по формуле

$$D = \sum_{i=1}^n c(e_i)\nabla^S_{e_i}.$$

Условия, приведенные в определении расслоения Дирака, гарантируют, что оператор Дирака D является корректно определенным формально самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором первого порядка.

Пример 12. На произвольном ориентированном гладком римановом многообразии M расслоение Дирака строится следующим образом. Расслоение S есть комплексная внешняя алгебра $\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M$ кокасательного расслоения T^*M. Действие $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(TM)$ на S задается формулой

$$c(a) = \varepsilon_{a^*} - i_a, \quad a \in T_mM,$$

где $a^* \in T^*_mM$ — ковектор, двойственный к a:

$$a^*(X) = (a, X)_m, \quad X \in T_mM$$

ε_{a^*} — оператор внешнего умножения на a^*, i_a — оператор внутреннего умножение на a. Связность ∇^S есть эрмитова связность, определяемая римановой метрикой. Ассоциированным оператором Дирака является оператор де Рама $D = d + d^*$, действующий в пространстве комплекснозначных дифференциальных форм $\Omega_{\mathbb{C}} = C^\infty(M, \Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$ (см. лемма 1).

Пример 13. Расслоение Дирака наименьшего ранга 2^k существует не на произвольном ориентированном гладком римановом многообразии M размерности $n = 2k$. Имеются топологические препятствия к существованию такого расслоения.

Локально такое расслоение Дирака можно построить следующим образом. Возьмем локальный ортонормированный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в TM, определенный в некоторой открытой области U. Таким образом, для любого $m \in M$ определен изоморфизм $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T_mM) \cong \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Положим $S_m = S$ — фиксированное пространство спиноров и $c(e_j(m)) = c_j$ — фиксированное представление алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве S. Оказывается, что произвольная связность ∇^S_X, согласованная с введенными таким образом эрмитовой и клиффордовой структурами, имеет вид

$$\nabla^S_X = X + \frac{1}{4}\sum_{j,k}(\nabla_X e_j, e_k)c_j c_k + iA(X),$$

где A — произвольная вещественнозначная 1-форма на U.

Многообразие M размерности $n = 2k$ называется комплексным спинорным (или Spin^c) многообразием, если на M существует расслоение Дирака $S(M)$ ранга 2^k. Расслоение $S(M)$ называется фундаментальным расслоением спиноров. Ассоциированный оператор Дирака называется Spin^c-оператором Дирака.

Можно доказать, что, если M — комплексное спинорное многообразие, то для любой точки $m \in M$ существует такая ее окрестность U и такой локальный ортонормированный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в TM, определенный в U, что ограничение фундаментального расслоения спиноров $S(M)$ на U имеет вид, описанный в примере 13.

Имеется важный подкласс комплексных спинорных подмногообразий, определяемый следующим образом. Многообразие M размерности $n = 2k$ называется спинорным многообразием, если на M существует расслоение Дирака S ранга 2^k, удовлетворяющие условию: для любой точки $m \in M$ существует такая окрестность U точки m и такой локальный ортонормированный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в TM, определенный в U, что ограничение фундаментального расслоения спиноров $S(M)$ на U имеет вид, описанный в примере 13, с $A = 0$. Ассоциированный оператор Дирака называется спинорным оператором Дирака.

Любой комплексное (даже почти-комплексное или эрмитово) риманово многообразие является комплексным спинорным многообразием. Фундаментальное расслоение спиноров $S(M)$ есть внешняя алгебра $\Lambda T^{(0,1)*}M$ расслоения $T^{(0,1)*}M$. Если многообразие кэлерово (т.е. риманова метрика согласована определенным образом с комплексной структурой), то ассоциированный оператор Дирака имеет вид

$$D = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*).$$

3.3. **Теорема об индексе.** Важное свойство пространства спиноров S в случае четной размерности $n = 2k$ заключается в том, что оно представляется в виде ортогональной прямой суммы подпространств размерности k:

$$S = S_+ \oplus S_-,$$

причем для любого $a \in \mathbb{R}^n$ оператор $c(a)$, задающий его действие как элемента алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, переводит S_+ в S_- и S_- в S_+. Таким же свойством обладает пространство любого унитарного представления алгебры $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, а также любое расслоение Дирака. Другими словами, если M — компактное риманово многообразие четной размерности $n = 2k$, то любое расслоение Дирака S на M представимо в виде ортогональной прямой суммы $S = S_+ \oplus S_-$. Более того, по отношению к этому соответствующему разложению пространств

$$C^\infty(M, S) = C^\infty(M, S_+) \bigoplus C^\infty(M, S_-)$$

ассоциированный оператор Дирака имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix},$$

где $D_+ : C^\infty(M, S_+) \to C^\infty(M, S_-)$ и $D_- : C^\infty(M, S_-) \to C^\infty(M, S_+)$, $D_- = D_+^*$.

Важным инвариантом оператора Дирака является его индекс, определяемый по формуле

$$\operatorname{ind} D_+ = \dim \operatorname{Ker} D_+ - \dim \operatorname{Ker} D_- \in \mathbb{Z}.$$

Индекс оператора D является инвариантом многообразия M и расслоения Дирака S, то есть, если D^z — однопараметрическое семейство операторов Дирака, действующих в пространстве $C^\infty(M, S)$, построенных по римановой метрике g^z на M и по представлению c^z комплексной алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T_m M)$ в слоях расслоения S, то индекс оператора D^z не зависит от z. Потому индекс оператора Дирака выражается в терминах характеристических классов многообразия M и расслоения Дирака S. Соответствующая формула дается теоремой об индексе, впервые доказанной Атьей и Зингером.

Следует отметить, что первоначальная формулировка теоремы об индексе относится к произвольному эллиптическому оператору на компактном многообразии, а не только к операторам типа Дирака. Тем ни менее, можно показать, используя K-теорию и

K-гомологии, что, с точки зрения теории индекса, любой эллиптический оператор эквивалентен обобщенному оператору Дирака.

Мы приведем формулировку теоремы об индексе для двух частных случаев оператора Дирака.

Оператор де Рама (см. пример 12). В данном случае соответствующий оператор D_+ имеет вид

$$D_+ = d + d^* : \Omega^{\mathrm{ev}} = \bigoplus_{j=0}^{k} \Omega^{2j} \to \Omega^{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{j=0}^{k-1} \Omega^{2j+1},$$

и его индекс совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$ многообразия M:

$$\operatorname{ind} D_+ = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p(M, \mathbb{R}) = \chi(M).$$

Для любого четного n на пространстве кососимметрических матриц размера $n \times n$ определена вещественнозначная функция Pf, называемая пфаффианом, которая является многочленом от элементов матрицы и однозначно определяется следующими условиями:

(1) $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$;
(2) $\mathrm{Pf}(B^t AB) = \mathrm{Pf}(A)\det(B)$ для любой матрицы B размера $n \times n$.
(3) $\mathrm{Pf}(R) = 1$, где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{pmatrix}.$$

Можно написать явную формулу для этой функции: для матрицы A с элементами $\{a_{ij}\}$ имеем

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^{n/2} n!} \sum (\operatorname{sign} \sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \dots a_{\sigma(n-1)\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по множеству всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

В локальных координатах кривизна связности Леви-Чивита определяет кососимметрическую матрицу R размера $n \times n$, элементами которой являются дифференциальные формы степени 2:

$$R_{i\ell} = \sum_{j,k} R_{i\ell jk} dx^j \wedge dx^k, \quad i, \ell = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $R_{i\ell jk}$ — компоненты риманова тензора кривизны типа $(4, 0)$.

Формальное применение функции Pf к матрице $-R$ приводит к выражению

$$\mathrm{Pf}(-R) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2} n!} \sum (\operatorname{sign} \sigma) R_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge R_{\sigma(3)\sigma(4)} \wedge \dots \wedge R_{\sigma(n-1)\sigma(n)},$$

которое можно рассматривать как дифференциальную форму степени n. Можно проверить, что эта форма не зависит от выбора системы координат и замкнута. Таким образом, получаем корректно определенную замкнутую дифференциальную форму $\mathrm{Pf}(-R)$ на M

Классом Эйлера $e(TM)$ многообразия M называется класс когомологий степени n, определяемый замкнутой дифференциальной формой $\mathrm{Pf}(-R)$. Можно показать, что класс Эйлера $e(TM) \in H^n(M, \mathbb{R})$ не зависит от выбора римановой метрики.

Теорема 7 (Гаусс-Бонне-Черн). *Справедлива формула*

$$\operatorname{ind} D_+ = (2\pi)^{-n/2} \int_M e(TM)$$

Классическая теорема Гаусса-Бонне является частным случаем этой теоремы, получающимся при $n = 2$.

Теорема 8 (Гаусс-Бонне). *Если M двумерно, то*

$$\chi(M) = \operatorname{ind} D_+ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_M K\, vol,$$

где K — гауссова кривизна.

Спинорный оператор Дирака. Рассмотрим функцию $j(z) = \frac{\operatorname{sh}(z/2)}{z/2}$ в комплексной плоскости. Эта функция является четной аналитической функцией. Потому ее можно разложить в ряд Тейлора

$$j(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{2k}.$$

Подставим в ряд, стоящий в правой части формулы для $j(z)$, вместо z квадратную матрицу R размера $n \times n$, элементами которой являются дифференциальные формы степени 2, определяемую кривизной связности Леви-Чивита. Поскольку наивысшая степень нетривиальной дифференциальной формы равна n, ряд обрывается, и, потому, получаем корректно определенную квадратную матрицу $j(R)$ размера $n \times n$, элементами которой являются суммы дифференциальных форм степени $4k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$j(R) = 1 + \sum_{k=1}^{n/2} a_k R^{2k}.$$

Заметим, что компонента нулевой степени формы $j(R)$ совпадает с единичной матрицей. Поэтому, определена функция

$$\det{}^{-1/2}(j(R)) = \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\operatorname{sh}(R/2)}\right),$$

которая является суммой дифференциальных форм степени $4k$, $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что эта форма не зависит от выбора системы координат и замкнута. Таким образом, получаем корректно определенную замкнутую дифференциальную форму на M

$\hat{A}$-род (приведенный класс Атьи-Хирцебруха) многообразия M определяется как класс когомологий $\hat{A}(M) \in H^n(M, \mathbb{R})$ многообразия M, представляемый компонентой степени n замкнутой дифференциальной формы

$$\det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\operatorname{sh}(R/2)}\right) \in \Omega^{4*}(M, \mathbb{R}).$$

Теорема 9. *Если M — четномерное компактное спинорное риманово многообразие и D — спинорный оператор Дирака, то его индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} D_+ = (2\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \hat{A}(M).$$

Поскольку $\hat{A}$-род может быть отличен от нуля только, если размерность n многообразия M делится на 4, немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Если* $\dim M = 2 \mod 4$*, то*

$$\operatorname{ind} D_+ = 0.$$

Другим важным следствием теоремы об индексе являются теоремы целочисленности.

Следствие 5. *Если M — четномерное компактное спинорное риманово многообразие, то*

$$(2\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \hat{A}(M) \in \mathbb{Z}.$$

Имеются примеры компактных многообразий, не имеющих спинорной структуры, для которых

$$(2\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \hat{A}(M) \notin \mathbb{Z}.$$

Например, комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^2$ не имеет спинорной структуры. С другой стороны,

$$(2\pi i)^{-n/2}\int\limits_M \hat{A}(M) = -\frac{1}{8}.$$

3.4. **Теорема Лихнеровича.** Пусть M — компактное риманово многообразие, S — расслоение Дирака на M, $D : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ — ассоциированный оператор Дирака.

Как и в случае пространства дифференциальных форм, можно определить лапласиан Бохнера, который является дифференциальным оператором второго порядка $B : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$, задаваемым в локальных координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ по формуле

$$B = \sum_{i,j} (\nabla^S_{\partial_i})^* g^{ij} \nabla^S_{\partial_j}.$$

Можно доказать, что оператор B корректно определен, то есть, его определение не зависит от выбора локальной системы координат.

Определим дифференциальный оператор нулевого порядка $c(R^S) : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ по формуле

$$c(R^S) = \sum_{j,k} c(e_j)c(e_k)R^S(e_j,e_k),$$

где $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — локальный ортонормированный базис в TM, $R^S(X,Y) : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ — оператор кривизны связности ∇^S.

Теорема 10 (Формула Лихнеровича). *Справедлива формула*

$$D^2 = B + c(R^S).$$

Пример 14. Для оператора сигнатуры $D = d + d^* : \Omega \to \Omega$ формула Лихнеровича совпадает с формулой Бохнера (см. теорему 5).

Для спинорного оператора Дирака D формула Лихнеровича имеет особенно простой вид. В этом случае оператор $c(R^{S(M)})$ совпадает с оператором умножения на *скалярную* функцию $\frac{\kappa}{4}$, где κ — скалярная кривизна римановой метрики, и формула Лихнеровича принимает вид

$$D^2 = B + \frac{\kappa}{4}.$$

В качестве геометрического следствия получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Если M — компактное спинорное риманово многообразие, и $\kappa > 0$, то*

$$\int\limits_M \hat{A}(M) = 0.$$

Доказательство. Из неотрицательности оператора B вытекает, что для любого $u \in C^\infty(M,S)$ имеет место оценка

$$(\Delta u, u) = (Bu, u) + (\kappa u, u) \geq (\kappa u, u) = \int (\kappa u, u)_m dvol(m).$$

Из условия теоремы вытекает, что для любого $u \in C^\infty(M,S)$

$$\int (\kappa u, u)_m dvol(m) > 0.$$

Таким образом, оператор Дирака D строго положителен, и потому его ядро тривиально:

$$\ker D = \{0\}.$$

Отсюда следует, что

$$\ker D_+ = \{0\}, \quad \ker D_- = \{0\}.$$

Поэтому,

$$\operatorname{ind} D_+ = 0.$$

Остается применить теорему об индексе, теорему 9.

Следствие 6. *Если M — компактное многообразие, допускающее спинорную структуру, и $\hat{A}$-род многообразия M отличен от нуля, то на многообразии M не существует римановой метрики положительной скалярной кривизны.*

Условие существования спинорной структуры на M существенно. Например, на $\mathbb{C}P^2$ можно построить метрику положительной скалярной кривизны, но, как уже было упомянуто выше,

$$\int\limits_M \hat{A}(M) \neq 0.$$

Список литературы

[1] Berline N., Getzler E., Vergne M. *Heat Kernels and the Dirac Operator* // Springer – 1992.

[2] Ботт Р., Ту Л. В. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии* // М.: Наука – 1989.

[3] Громов М. *Знак и геометрический смысл кривизны* // Издательский дом «Удмуртский унмверситет» – 1999.

[4] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*// М.: Мир, 1971.

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии, т. I*// М.: Наука, 1981.

[6] Кордюков Ю.А. *Теория индекса и некоммутативная геометрия на многооообразиях со слоением* // УМН – 2009. – Т.64, N.2. – с.73-202.

[7] Lawson B., Michelsohn M.-L. *Spin Geometry* // Princeton University Press – 1989.

[8] Мищенко А.С. *Векторные расслоения и их применения* // М.: Наука – 1984.

[9] Новиков С. П., Тайманов И. А. *Современные геометрические структуры и поля* // М: МЦНМО – 2005.

[10] Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ* // М.: Наука – 1967.

[11] Roe J. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods* // Longman – 1998.

[12] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* // Мир – 1987.

Ю.А. Кордюков, Россия, Уфа 450008, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, ул. Чернышевского, 112

E-mail: `yurikor@matem.anrb.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.518.23 MSC2000: 26A12

Г.С. Балашова

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

Рассматриваются пространства

$$W^{\infty}\{a_{km},p\}_{(T^2)} \stackrel{def}{=} \{u(x,y) \in C^{\infty}(T^2) : \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} \|D_{xy}^{k+m}u(x,y)\|_p^p < \infty\}, \tag{1}$$

где числовая последовательность $a_{km} \geq 0$, $k = 0,1,2,...;$ $m = 0,1,2,...;$
$\infty > p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ - норма в пространстве Лебега $L_p(T^2)$.

Пространство (1) нетривиально, если оно бесконечномерно и плотно в $L_2(T^2)$, для этого, как доказал Ю.А. Дубинский [1] , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k,m\to\infty} a_{km}^{\frac{1}{k+m}} = 0. \tag{2}$$

Это условие впредь предполагается выполненным.

Изучим условия вложения

$$W^{\infty}\{a_{km},p\}_{(T^2)} \subset W^{\infty}\{b_{km},p\}_{(T^2)}. \tag{3}$$

Для (3), очевидно, достаточным является условие

$$\overline{\lim}_{k,m\to\infty} b_{km} a_{km}^{-1} = K < \infty, \tag{4}$$

а для компактности этого вложения достаточно, чтобы

$$\lim_{k,m\to\infty} b_{km} a_{km}^{-1} = 0. \tag{5}$$

Условия (4), (5) слишком ограничительны, поэтому предполагается регуляризовать последовательность $\{a_{km}\}$ так, чтобы $a_{km}^{(1)} > 0$ для всех k и m и пространства $W^{\infty}\{a_{km}^{(1)},p\}_{(T^2)}$ и $W^{\infty}\{a_{km},p\}_{(T^2)}$ поэлементно совпадали, то есть

$$W^{\infty}\{a_{km},p\}_{(T^2)} \rightleftharpoons W\{a_{km}^{(1)},p\}_{(T^2)}. \tag{6}$$

Сначала остановимся на одномерном случае.

Пусть $\{M_n^c\}$ - выпуклая регуляризация посредством логарифмов (в.р.п.л.) последовательности

$$M_n = \begin{cases} a_n^{-1}, & \text{если } a_n \neq 0 \\ \infty, & \text{если } a_n = 0 \end{cases},$$

при этом $\{n_i\}$ - последовательность основных индексов, то есть

$$M_{n_i} = M_{n_i}^c$$

см. [2].

Определим

$$a_n^{(1)} = \max\{a_n, (M_n^c)^{-1} v_n(i)\}, n_i \leq n < n_{i+1}, \tag{7}$$

где $v_n(i)$ - любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} v_n(i) \leq K < \infty.$$

Например,

$$v_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1-n_i)^2}, & n_i \le n < \frac{n_{i+1}+n_i}{2}, \\ \frac{1}{(n_{i+1}+1-n)^2}, & \frac{n_{i+1}+n_i}{2} \le n < n_{i+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда для $\forall n \ \ a_n^{(1)} > 0$ и (6) выполняется. Отметим, что при условии

$$\sup_i (n_{i+1} - n_i) = K < \infty$$

достаточно положить для всех n

$$a_n^{(1)} = (M_n^c)^{-1}.$$

Таким образом, для вложения и компактности вложения

$$W^\infty\{a_n, p\}_{(T)} \subset W\{b_n, p\}_{(T)} \tag{9}$$

достаточными являются, соответственно, условия

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n (a_n^{(1)})^{-1} = K < \infty, \lim_{n\to\infty} b_n (a_n^{(1)})^{-1} = 0.$$

Если же последовательность $\{a_n\}$ - быстро убывающая, то есть удовлетворяющая соотношению

$$1 > a_n^q \ge a_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

для некоторого числа $q > 1$, и последовательность $\{a_n^{-1}\}$ логарифмически выпукла (при этом на последовательность $\{b_n\}$ указанные ограниченния не распространяются), то для вложения и компактности вложения (9) необходимо и достаточно, чтобы соответственно

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n a_n^{-1} = K < \infty, \lim_{n\to\infty} b_n a_n^{-1} = 0.$$

Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (10) с $q \ge 2$, то $\{a_n^{-1}\}$ — логарифмически выпукла и потому это требование можно исключить. В случае же $1 < q < 2$ требование логарифмической выпуклости последовательности $\{a_n^{-1}\}$ существенно. Доказательство смотри в работе автора [3].

Перейдём к рассмотрению пространств (1), которые определяются двумерной бесконечной матрицей. При этом естественно предполагать, что последовательности $\{a_{k0}\}$ и $\{a_{0m}\}$ содержат бесконечно много членов, отличных от нуля, иначе любая бесконечно дифференцируемая функция одного переменного будет принадлежать пространству $W^\infty\{a_{km}, p\}_{(T_2)}$ и потому не будет существовать пространства $W^\infty\{a_{km}^{(1)}, p\}_{(T^2)}$ с $\{a_{km}^{(1)} > 0\}$, совпадающего с исходными. Более того, из результатов, изложенных выше для одномерного случая, следует, что можно считать все $a_{k0} > 0$ и $a_{0m} > 0$; $\ k, m = 0, 1, 2, \ldots$ В противном случае их можно заменить на $\{a_{k0}^{(1)} > 0\}$ и $\{a_{0m}^{(1)} > 0\}$.

Пусть коэффициенты $\{a_k m\}$ удовлетворяют условию:

$$a_{km} \le a_{k0} + a_{0m}; \quad k, m = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Представим

$$a_{km} = a_{km}\frac{a_{k0}}{a_{k0} + a_{0m}} + a_{km}\frac{a_{0m}}{a_{k0} + a_{0m}} = c_{km} + d_{km}.$$

Условия (2) и (11) позволяют построить в.р.п.л. последовательности $\{c_{km}\}$ при каждом фиксированном $k = k^*$ и последовательности $\{d_{km}\}$ при каждом фиксированном $m = m^*$. Обозначим

$$c_{k^*m}^{(1)} = ((c_{k^*m}^{-1})^c)^{-1} v_m(i), \quad m_i \le m \le m_{i+1},$$

где $\{m_i\}$ - последовательность основных индексов при в.р.п.л. последовательности $\{c_{k^*m}^{-1}\}$, а $v_m(i), \quad m = 0, 1, \ldots$ определяются формулами (8). Аналогично,

$$d_{km^*}^{(1)} = ((d_{km^*}^{-1})^c)^{-1} v_k(i), \quad k_i \le k \le k_{i+1},$$

где $\{k_i\}$ последовательность основных индексов при в.р.п.л. последовательности $\{d_{km^*}^{-1}\}$, а $v_k(i), \quad k = 0, 1, \ldots$; определяются формулами (8).

Определим последовательность

$$a_{km}^{(1)} = \max(c_{km}, c_{km}^{(1)}) + \max(d_{km}, d_{km}^{(1)}).$$

Полученное пространство $W^\infty\{a^{(1)}_{km},p\}_{(T^2)}$ совпадает поэлементно с исходным пространством $W^\infty\{a_{km},p\}_{(T^2)}$, причём

$$\|u(x,y)\|^p_{W^\infty\{a^{(1)}_{km},p\}_{(T^2)}} \leq 2^p K \|u(x,y)\|^p_{W^\infty\{a_{km},p\}_{(T^2)}}.$$

Доказательство во многом повторяет доказательство для одномерного случая.

Замечание 1. Если последовательности основных индексов при в.р.п.л. всех последовательностей $\{c^{-1}_{k^*m}\}$ и $\{d^{-1}_{km^*}\}$ ограничены одним и тем же числом $K < \infty$, то можно определить

$$a^{(1)}_{km} = ((c^{-1}_{km})^c)^{-1} + ((d^{-1}_{km})^c)^{-1}.$$

Замечание 2. Если $a_{km} \leq \min(a_{k0}, a_{0m})$ для всех $k, m = 1, 2, \ldots$, то регуляризованную матрицу можно строить следующим образом: сначала провести регуляризацию исходной матрицы $\{a_{km}\}$ по каждому столбцу, затем в полученной матрице провести регуляризацию по каждой строке.

Замечание 3. Может оказаться, что в $\{a^{(1)}_{km}\}$ не все элементы $a^{(1)}_{km} > 0$.

Поскольку для полученной матрицы $\{a^{(1)}_{km}\}$, очевидно, снова выполнено условие (11), то можно аналогичным способом построить вторую регуляризацию $\{a^{(2)}_{km}\}$. При этом, если для исходной матрицы $\{a_{km}\}$ существуют последовательности натуральных чисел $k_j \to \infty$ и $m_j \to \infty$ такие, что

$$a_{k_j m_j} > 0,$$

то для всех $k, m = 1, 2, \ldots$, получаются

$$a^{(2)}_{km} > 0.$$

Окончательно, для вложения и компактности вложения (3) достаточными являются условия (4) и (5) соответственно, в которых элементы a_{km} следует заменить на элементы регуляризованной строго положительной матрицы.

Всё это можно проиллюстрировать на примере пространств определяемых последовательностями

$$a_{00} = b_{00} = 1, \quad a_{km} = \begin{cases} k^{-2k}, & m = 0, k = 1, 2, \ldots \\ m^{-2m}, & k = 0, m = 1, 2, \ldots \\ 2k^{-2k}, & k = m = 2j, j = 1, 2, \ldots \\ 0, & k \neq m, k, m = 1, 2, \ldots \text{ или } k = m = 2j+1 \end{cases}$$

$$b_{km} = \begin{cases} k^{-2k}, & m = 0, k = 1, 2, \ldots \\ m^{-2m}, & k = 0, m = 1, 2, \ldots \\ k^{-2k} m^{-2m}, & k, m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Поскольку

$$\overline{\lim}_{k,m\to\infty} b_{km} a^{-1}_{km} = \overline{\lim}_{k,m\to\infty} a_{km} b^{-1}_{km} = \infty,$$

то условия (4) и (5) не позволяют установить соотношение между рассматриваемыми пространствами. Так как для последовательности $\{a_{km}\}$ выполнено условие (11), то описанным алгоритмом находится матрица $\{a^{(1)}_{km}\}$. Однако, для бесконечно многих k и m в ней получаются $a^{(1)}_{km} = 0$, поэтому находим и вторую регуляризацию (выкладки здесь не приводим) и получаем $a^{(2)}_{km} > 0$ для всех k и m и $\overline{\lim}_{k,m\to\infty} \frac{b_{km}}{a^{(2)}_{km}} = e + 1 < \infty$. Следовательно, имеет место вложение (3).

Список литературы

[1] Дубинский Ю.А. *О нетривиальности некоторых классов функций и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка* // Дифф. уравнения – 1975. – т.11, № 6. – с.1190-1200.

[2] Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* - М.:ИЛ. – 1955.

[3] Балашова Г.С. *Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций* //Матем. сб. – 1993. – т.184,№1. – с.105-128.

Балашова Галина Сергеевна, Российская Федерация, г. Москва, Московский энергетический институт

E-mail: balashovags@mpei.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.983 MSC2000: 47A06, 47A010, 34B05

В.М. Брук

О РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ СРАВНИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ [1]

В гильбертовом пространстве рассматриваются заданные абстрактными граничными условиями сужения линейных отношений. В предположении, что резольвента некоторого сужения обладает такими свойствами, как принадлежность идеалу Неймана-Шэттена или существование заданной асимптотики s-чисел, получены необходимые и достаточные либо достаточные требования к возмущению граничных условий, обеспечивающие сохранение этих свойств у резольвенты взмущенного сужения.

Restrictions of linear relations defined by abstract boundary conditions are considered in Hilbert space. Under the assumption that the resolvent of some restriction has properties such as belonging to the Neumann-Shatten ideal or having given asymptotic of the s-numbers, ether sufficient or necessary and sufficient conditions are found for a perturbation of the boundary conditions guaranteeing that the above properties are preserved for the resolvent of the perturbed restriction.

Введение

Расширения и сужения линейных операторов и отношений, порожденных дифференциальными выражениями, могут задаваться граничными условиями. Удобным аппаратом для описания и классификации таких расширений и сужений являются абстрактные пространства граничных значений (ПГЗ). В работах [1], [2] введено ПГЗ для описания диссипативных, аккумулятивных и других расширений симметрического оператора. Одной из основных целей при изучении расширений и сужений дифференциальных операторов с помощью граничных условий является получение в терминах граничных значений утверждений о спектральных свойствах соответствующих краевых задач. Аналогичная цель в общей ситуации преследуется в методе абстрактных ПГЗ: исследовать свойства расширений и сужений при наложении различных ограничений на операторы, входящие в соответствующие абстрактные граничные условия. Для ПГЗ из [1], [2] такая задача решалась в [3], при этом использовалась методика, разработанная в [4], [5] для дифференциальных операторов (результаты всех упомянутых выше работ подробно изложены в монографии [6]).

В данной работе подобная задача решается для ПГЗ из статей [7], [8] (это ПГЗ удобно для описания обратимых сужений линейных операторов и отношений). Приведенные здесь теоремы носят следующий характер. Пусть T_{θ_1}, T_{θ_2} – два линейных отношения, заданных граничными отношениями θ_1, θ_2, и отношение T_{θ_1} обладает некоторыми свойствами типа принадлежности резольвенты классу $\mathfrak{S}_p$ Неймана-Шэттена или определенного поведения асимптотики s-чисел резольвенты. Устанавливается, что если отношения θ_1, θ_2 "близки" в некотором смысле, то отношение T_{θ_2} обладает теми же свойствами, что и T_{θ_1}.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00131

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ – банаховы пространства. Линейным отношением $\mathbf{T}$ с областью определения в $\mathfrak{B}_1$ и областью значений в $\mathfrak{B}_2$ называется любое линейное многообразие $\mathbf{T}\subset\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2$. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [6], [9]. Далее используются следующие обозначения: $\{x_1,x_2\}$ – упорядоченная пара, составленная их элементов x_1, x_2; $\mathcal{D}(\mathbf{T})$ – область определения, $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ – область значений отношения $\mathbf{T}$; $\ker\mathbf{T}$ – множество таких элементов x, что пара $\{x,0\}\in\mathbf{T}$; $\mathrm{Ker}\mathbf{T}$ – множество пар $\{x,0\}\in\mathbf{T}$; $\rho(\mathbf{T})$ – резольвентное множество отношения $\mathbf{T}$, т.е. множество точек $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых отношение $(\mathbf{T}-\lambda E)^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором. Все операторы и отношения, встречающиеся в дальнейшем, предполагаются линейными; в связи с этим слово "линейное" будет часто опускаться.

Пусть T – замкнутое линейное отношение, $T\subset\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2$; $\tilde{\mathcal{B}}_1$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$ – банаховы пространства, $\delta: T\to\tilde{\mathcal{B}}_1\times\tilde{\mathcal{B}}_2$ – линейный оператор. Обозначим $\delta_i=p_i\delta$, где p_i – естественная проекция $\tilde{\mathcal{B}}_1\times\tilde{\mathcal{B}}_2$ на $\tilde{\mathcal{B}}_i$, т.е. $p_i\{x_1,x_2\}=x_i$, $x_i\in\tilde{\mathcal{B}}_i$, $i=1,2$.

Определение 1. ([7], [8]) Четверка $(\tilde{\mathcal{B}}_1,\tilde{\mathcal{B}}_2,\delta_1,\delta_2)$ называется пространством граничных значений или граничной четверкой для замкнутого отношения T, если выполняются условия: а) δ_1, δ_2 непрерывны на T (на T норма пространства $\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2$); б) для любых элементов $f_1\in\tilde{\mathcal{B}}_1$, $f_2\in\tilde{\mathcal{B}}_2$ существует такая пара $h=\{h_1,h_2\}\in T$, что $\delta_1 h=f_1$, $\delta_2 h=f_2$; в) сужение δ_1 на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением на $\tilde{\mathcal{B}}_1$.

Из свойств а), б) следует, что δ непрерывно отображает отношение T на пространство $\tilde{\mathcal{B}}_1\times\tilde{\mathcal{B}}_2$.

Введем в рассмотрение отношения $\widehat{T}$ и T_0, являющиеся сужениями T на $\ker\delta_1$ и $\ker\delta_1\cap\ker\delta_2$ соответственно. Ясно, что $T_0\subset\widehat{T}$. Из замкнутости T и из непрерывности операторов δ_1, δ_2 следует замкнутость отношений T_0, $\widehat{T}$. В [8] установлено, что отношение $\widehat{T}^{-1}$ является оператором и области значений отношений T и $\widehat{T}$ совпадают, $\mathcal{R}(T)=\mathcal{R}(\widehat{T})$.

Оператор β_δ определим как обратный к сужению оператора δ_1 на $\mathrm{Ker}T$, т.е. $\beta_\delta=(\delta_1|_{\mathrm{Ker}T})^{-1}$. Из условия в) вытекает, что это определение корректно, а из условия а) и из теоремы о замкнутом графике следует непрерывность оператора β_δ. Положим

$$\Phi=\delta_2\beta_\delta. \tag{1}$$

Из изложенного выше получаем, что Φ – ограниченный оператор, отображающий пространство $\tilde{\mathcal{B}}_1$ в пространство $\tilde{\mathcal{B}}_2$.

Из определения 1 вытекает, что между отношениями $\theta\subset\tilde{\mathcal{B}}_1\times\tilde{\mathcal{B}}_2$ и отношениями $\mathcal{T}$ со свойством $T_0\subset\mathcal{T}\subset T$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством

$$\delta\mathcal{T}=\theta. \tag{2}$$

В этом случае обозначаем $\mathcal{T}=T_\theta$. Из (2) следует, что отношение T_θ состоит из тех и только тех пар $h=\{x,f\}\in T$, которые удовлетворяют условию

$$\delta h=\{\delta_1 h,\delta_2 h\}\in\theta. \tag{3}$$

Отметим, что условие (3) равносильно следующему $\{\delta_1 h,\delta_2 h-\Phi\delta_1 h\}\in\theta-\Phi$.

В [10] установлено равенство $\overline{T_\theta}=T_{\overline{\theta}}$. Отсюда следует, что отношения T_θ и θ одновременно замкнуты или нет. Следующая теорема доказана в [7], [8].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{R}(T)=\mathfrak{B}_2$. Отношение T_θ^{-1} является ограниченным всюду определенным оператором (т.е. $0\in\rho(T_\theta)$) тогда и только тогда, когда таким же оператором является* $(\theta-\Phi)^{-1}$.

В предположении, что $0\in\rho(\theta-\Phi)$, обозначим

$$\mathcal{N}=(\theta-\Phi)^{-1}. \tag{4}$$

Для дальнейшего понадобится формула, устанавливающая зависимость между оператором $\mathcal{N}$ и оператором $T_\theta^{-1}-\widehat{T}^{-1}$, где $\mathcal{N}$ и θ связаны равенством (4).

Любую пару $\{x, f\} \in T$ можно единственным образом представить в виде

$$\{x, f\} = \{u, 0\} + \{\widehat{T}^{-1} f, f\}, \tag{5}$$

где $u \in \ker T$. Пусть V – ограниченный оператор со свойствами: $\mathcal{D}(V) = \mathfrak{B}_2$, $\mathcal{R}(V) \subset \ker T$, $\ker V \supset \mathcal{R}(T_0)$. Отношение T_θ^{-1} является ограниченным всюду определенным оператором тогда и только тогда, когда существует такой оператор V с перечисленными выше свойствами, что T_θ состоит из пар вида $h = \{x, f\}$, где $x = Vf + \widehat{T}^{-1} f$, $f \in \mathfrak{B}_2$. В этом случае

$$V = T_\theta^{-1} - \widehat{T}^{-1}. \tag{6}$$

Оператору V соответствует оператор $V_0 : \mathfrak{B}_2/\mathcal{R}(T_0) \to \ker T$, определяемый равенством $V = V_0 \pi_1$, где π_1 – каноническое отображение $\mathfrak{B}_2$ на факторпространство $\mathfrak{B}_2/\mathcal{R}(T_0)$. Введем в рассмотрение оператор $W : \mathfrak{B}_2 \to \tilde{\mathcal{B}}_2$ формулой $Wf = \delta_2\{\widehat{T}^{-1} f, f\}$. Оператор $W_0 : \mathfrak{B}_2/\mathcal{R}(T_0) \to \tilde{\mathcal{B}}_2$, определенный с помощью равенства $W = W_0 \pi_1$, непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathfrak{B}_2/\mathcal{R}(T_0)$ на $\tilde{\mathcal{B}}_2$. Обозначим через $j_0 : \ker T \to \mathrm{Ker} T$ оператор, действующий по формуле $j_0 u = \{u, 0\}$, где $u \in \ker T$.

Замечание 1. Введенные выше операторы $W : \mathfrak{B}_2 \to \tilde{\mathcal{B}}_2$, $W_0^{-1} : \tilde{\mathcal{B}}_2 \to \mathfrak{B}_2/\mathcal{R}(T_0)$, $j_0^{-1}\beta_\delta : \tilde{\mathcal{B}}_1 \to \mathfrak{B}_1$, $\delta_1 j_0 : \ker T \to \tilde{\mathcal{B}}_1$ непрерывны.

Лемма 1. *Пусть* $0 \in \rho(T_\theta)$. *Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{N} = \delta_1 j_0 V_0 W_0^{-1}, \quad V = j_0^{-1} \beta_\delta \mathcal{N} W. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{N}_1 = \delta_1 j_0 V_0 W_0^{-1}. \tag{8}$$

Отсюда получим

$$V = j_0^{-1} \beta_\delta \mathcal{N}_1 W. \tag{9}$$

Из (5), (6), (8), (9) следует, что отношение T_θ состоит из пар $h = \{x, f\}$ вида

$$\{x, f\} = \beta_\delta \mathcal{N}_1 \delta_2 \{\widehat{T}^{-1} f, f\} + \{\widehat{T}^{-1} f, f\}, \tag{10}$$

где f – произвольный элемент из $\mathfrak{B}_2$. Из равенства (10) и из определения операторов β_δ, Φ получаем

$$\delta_1 h = \mathcal{N}_1 \delta_2 \{\widehat{T}^{-1} f, f\}, \quad \delta_2 h = \Phi \mathcal{N}_1 \delta_2 \{\widehat{T}^{-1} f, f\} + \delta_2 \{\widehat{T}^{-1} f, f\}.$$

Последние два равенства влекут $\mathcal{N}_1 = (\theta - \Phi)^{-1}$. Отношения θ и T_θ однозначно определяют друг друга. Отсюда и из (4) следует, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$. Лемма 1 доказана. □

Далее нам понадобятся некоторые сведения об s-числах операторов. Подробное изложение свойств s-чисел имеется, например, в книгах [11, с. 46], [6, с. 44]. Пусть G – вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. Собственные числа $\lambda_j(\sqrt{G^* G})$ оператора $\sqrt{G^* G}$ называются s-числами оператора G и обозначаются $s_j(G)$, $j = 1, 2, ...$ (ненулевые s-числа нумеруются в порядке убывания с учетом их кратности). В случае, когда область значений оператора G имеет конечную размерность d, полагается $s_j(G) = 0$ при $j \geqslant d + 1$. В [6], [11] доказано, что s-числа обладают следующими свойствами:

(а) для любого ограниченного оператора Q

$$s_j(QG) \leqslant \|Q\| \, s_j(G), \quad s_j(GQ) \leqslant \|Q\| \, s_j(G), \quad j = 1, 2, ...;$$

(б) если G_1, G_2 – вполне непрерывные операторы, то

$$s_{m+n-1}(G_1 + G_2) \leqslant s_m(G_1) + s_n(G_2), \quad m, n = 1, 2, ...,$$

$$s_{m+n-1}(G_1 G_2) \leqslant s_m(G_1) s_n(G_2), \quad m, n = 1, 2, ...;$$

(в) если G_1, G_2 – вполне непрерывные операторы и

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(G_1) = a, \quad \lim_{n\to\infty} n^r s_n(G_2) = 0 \quad (r > 0),$$

то $\lim_{n\to\infty} n^r s_n(G_1 + G_2) = a$.

Символом $\mathfrak{S}_p$ ($p \geqslant 1$) обозначается идеал Неймана-Шэттена в кольце ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, т.е. множество всех тех вполне непрерывных операторов G, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(G) < \infty$. Множество всех вполне непрерывных операторов обозначается $\mathfrak{S}_\infty$.

2. Основные результаты

В этом разделе предположим, что в определении 1 $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}$ и пространства $\mathfrak{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}_1$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$ гильбертовы. Пусть отношения $\theta_i \subset \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2$ $(i = 1, 2)$. В целях сокращения записи обозначаем $T_{\theta_i} = T_i$. По теореме 1 условия $0 \in \rho(T_i)$ и $0 \in \rho(\theta_i - \Phi)$ равносильны. В этом случае отношения $\mathcal{N}_i = (\theta_i - \Phi)^{-1} (i = 1, 2)$ являются ограниченными всюду определенными на $\tilde{\mathcal{B}}_2$ операторами. Обозначим

$$R_\lambda^{(i)} = (T_i - \lambda E)^{-1} \quad (i = 1, 2),$$

где $\lambda \in \rho(T_i)$, E – тождественный оператор. Очевидно, при $\lambda = 0$ имеем $R_0^{(i)} = T_i^{-1}$.

В теоремах 2 – 5 предполагается, что $\mathcal{N}_i : \tilde{\mathcal{B}}_1 \to \tilde{\mathcal{B}}_2$ $(i = 1, 2)$ – ограниченные всюду определенные операторы.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$. Для того чтобы оператор $R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)} \in \mathfrak{S}_p$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{S}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Из равенства (6) следует, что $T_i^{-1} = V_i + \widehat{T}^{-1}$ $(i = 1, 2)$, где $V_i : \mathfrak{B} \to \ker T$ – ограниченный оператор такой, что $\ker V_i \supset \mathcal{R}(T_0)$. Отсюда имеем

$$T_1^{-1} - T_2^{-1} = V_1 - V_2. \tag{11}$$

Из (7) следует, что операторы V_i, $\mathcal{N}_i$ связаны равенствами $\mathcal{N}_i = \delta_1 j_0 V_{0,i} W_0^{-1}$, $V_i = j_0^{-1} \beta_\delta \mathcal{N}_i W$ $(i = 1, 2)$, где операторы $V_{0,i}$ определяются по V_i так же, как V_0 по V (описание операторов, входящих в эти равенства, приведено перед замечанием 1). Отсюда получаем

$$\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = \delta_1 j_0 (V_{0,1} - V_{0,2}) W_0^{-1}, \quad V_1 - V_2 = j_0^{-1} \beta_\delta (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) W. \tag{12}$$

Из свойства (a) s-чисел, из замечания 1, а также из равенств (11), (12) следует, что операторы $T_1^{-1} - T_2^{-1}$ и $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2$ одновременно принадлежат или не принадлежат идеалу $\mathfrak{S}_p$.

Далее, используя резольвентное тождество, получим

$$\begin{aligned} R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)} &= (R_\lambda^{(1)} - R_0^{(1)}) + (R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) + (R_0^{(2)} - R_\lambda^{(2)}) = \\ &= \lambda R_\lambda^{(1)} R_0^{(1)} + (R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) - \lambda R_\lambda^{(2)} R_0^{(2)} = (R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) + \lambda R_\lambda^{(1)} (R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) + \\ &\quad + \lambda (R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)}) R_0^{(2)} = (E + \lambda R_\lambda^{(1)})(R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) + \lambda (R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)}) R_0^{(2)}. \end{aligned}$$

Эти равенства влекут

$$(R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)})(E - \lambda R_0^{(2)}) = (E + \lambda R_\lambda^{(1)})(R_0^{(1)} - R_0^{(2)}).$$

Отсюда и из равенств

$$(E - \lambda R_0^{(2)})^{-1} = E + \lambda R_\lambda^{(2)}, \quad (E + \lambda R_\lambda^{(1)})^{-1} = E - \lambda R_0^{(1)}$$

получим

$$R_0^{(1)} - R_0^{(2)} = (E - \lambda R_0^{(1)})(R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)})(E - \lambda R_0^{(2)}),$$

$$R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)} = (E + \lambda R_\lambda^{(1)})(R_0^{(1)} - R_0^{(2)})(E + \lambda R_\lambda^{(2)}).$$

Последние два равенства и свойство (a) s-чисел влекут требуемое утверждение. Теорема 2 доказана. $\square$

Следствие 1. *Если оператор $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2$ вполне непрерывен, то существенные спектры отношений T_1 и T_2 совпадают.*

Теорема 3. *Пусть $\lambda \in \rho(T_1)$, $\mu \in \rho(T_2)$ и резольвента $R_\lambda^{(1)} \in \mathfrak{S}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для того чтобы резольвента $R_\mu^{(2)} \in \mathfrak{S}_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{S}_p$.*

Доказательство. Согласно теореме 2 $R_0^{(1)} - R_0^{(2)} \in \mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{S}_p$. Из резольвентного тождества $R_\lambda^{(1)} - R_0^{(1)} = \lambda R_\lambda^{(1)} R_0^{(1)}$ и из свойства (а) s-чисел следует, что $R_\lambda^{(1)}$ и $R_0^{(1)}$ одновременно принадлежат или не принадлежат $\mathfrak{S}_p$. С другой стороны, из того же свойства s-чисел и из резольвентного тождества

$$R_\mu^{(2)} - R_0^{(2)} = \mu R_\mu^{(2)} R_0^{(2)} \tag{13}$$

получаем, что $R_\mu^{(2)}$ и $R_0^{(2)}$ одновременно принадлежат или не принадлежат $\mathfrak{S}_p$. Отсюда следует утверждение теоремы 3. □

Теорема 4. *Пусть $\lambda \in \rho(T_1)$, $\mu \in \rho(T_2)$, резольвента $R_\lambda^{(1)} \in \mathfrak{S}_\infty$ и*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(R_\lambda^{(1)}) = a \quad (\alpha > 0). \tag{14}$$

Для выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(R_\mu^{(2)}) = a \quad (\alpha > 0) \tag{15}$$

достаточно, чтобы $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{S}_\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Согласно теореме 3 оператор $R_\mu^{(2)}$ вполне непрерывен. Докажем (15). Предположим сначала, что $\lambda = \mu = 0$. На основании свойства (а) s-чисел и равенств (12), (16) заключаем, что $\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(V_1 - V_2) = 0$. Отсюда, из равенств (11), (14) и из свойства (в) s-чисел получаем $\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(R_0^{(2)}) = a$.

Пусть теперь точки λ, μ, удовлетворяющие условиям теоремы, произвольны. Покажем, что равенства (14), (15) справедливы тогда и только тогда, когда они справедливы при $\lambda = \mu = 0$. Пусть, например, равенство (15) выполнено при $\mu = 0$. Воспользуемся резольвентным тождеством (13). Из свойства (а) s-чисел имеем неравенство $n^\alpha s_n(R_\mu^{(2)} R_0^{(2)}) < a_1$. Из (13) на основании свойства (б) s-чисел получаем, что $n^\alpha s_n(R_\mu^{(2)}) < a_2$. Отсюда следует неравенство $n^{2\alpha} s_n(R_\mu^{(2)} R_0^{(2)}) < a_3$ $(a_1, a_2, a_3 < \infty)$. Теперь из свойства (в) s-чисел вытекает (15). Равенство (14) доказывается аналогично. Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Пусть $\lambda \in \rho(T_1)$, $\mu \in \rho(T_2)$, резольвента $R_\lambda^{(1)} \in \mathfrak{S}_\infty$ и*

$$\lim_{n\to\infty} n^\beta s_n(R_\lambda^{(1)}) = 0 \quad (\beta > 0).$$

Если оператор $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{S}_\infty$, то для выполнения при $\delta \leqslant \beta$ и при всех n неравенства

$$b_1 \leqslant n^\delta s_n(R_\mu^{(2)}) \leqslant b_2 \quad (0 < \delta,\ 0 < b_1, b_2 < \infty), \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех n выполнялось неравенство

$$c_1 \leqslant n^\delta s_n(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \leqslant c_2 \quad (0 < c_1, c_2 < \infty). \tag{18}$$

Доказательство. По теореме 3 оператор $R_\mu^{(2)}$ вполне непрерывен. Предположим сначала, что $\lambda = \mu = 0$. Из (11) и свойства (в) s-чисел (это свойство останется верным и в рассматриваемом случае) вытекает, что неравенство (17) выполняется тогда и только тогда, когда

$$d_1 \leqslant n^\delta s_n(V_1 - V_2) \leqslant d_2 \quad (0 < d_1, d_2 < \infty). \tag{19}$$

Из (12) и из свойства (а) s-чисел следует, что неравенства (18) и (19) одновременно выполняются или нет. При $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$ требуемое утверждение получается повторением конца доказательства теоремы 4. Теорема 5 доказана. □

Пример. На отрезке $[0, b]$ $(b < \infty)$ рассмотрим дифференциальное выражение $l[y] = y'' + Ay + q(t)y$, где $q(t)$ – непрерывная в сильной операторной топологии функция, значениями которой являются ограниченные операторы в гильбертовом пространстве H; A – самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H (можно сразу считать, что $A \geqslant E$).

Пусть H_ξ $(-\infty < \xi < \infty)$ – гильбертова шкала пространств, порожденная оператором A [6, с. 65]. Оператор A непрерывно и взаимно однозначно отображает H_{+1} на $H_0 = H$.

Поэтому сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на H_{-1} и является расширением оператора A. Обозначим $\tilde{l}[y] = y'' + \tilde{A}y + q(t)y$.

Методом последовательных приближений нетрудно показать, что интегральные уравнения

$$U_1(t,s) = \cos\sqrt{A}(t-s) + \int\limits_s^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-\xi)}{\sqrt{A}} q(\xi)U_1(\xi)d\xi,$$

$$U_2(t,s) = \frac{\sin\sqrt{A}(t-s)}{\sqrt{A}} + \int\limits_s^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-\xi)}{\sqrt{A}} q(\xi)U_2(\xi)d\xi \quad (0 \leqslant s,t \leqslant b)$$

имеют решения: первое – в классе сильно непрерывных операторных функций, значениями которых являются ограниченные операторы в H, второе – в классе сильно непрерывных операторных функций, значениями которых являются ограниченные операторы из $H_{-1/2}$ в H. Пусть $U(t) = (U_1(t,0), U_2(t,0))$ – операторная однострочная матрица. При фиксированном t оператор $U(t)$ непрерывно отображает пространство $H \times H_{-1/2}$ в H, а операторная функция $t \to U(t)$ сильно непрерывна.

Положим $\mathfrak{H} = L_2(H;0,b)$ и обозначим через $\mathcal{D}'$ множество функций $y(t)$, удовлетворяющих условиям: (a) $y(t)$ принимает значения в $\mathcal{D}(A)$; (b) $y(t)$ имеет сильную производную $y'(t)$, абсолютно непрерывную в пространстве H; (c) $l[y] \in \mathfrak{H}$. На множестве $\mathcal{D}'$ определим оператор L' равенством: $L'y = l[y]$. Замыкание оператора L' обозначим L и назовем максимальным оператором. Функция $y \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{D}(L)$, когда y можно представить в виде

$$y(t) = U(t)x + \int\limits_0^t U_2(t,s)h(s)ds, \tag{20}$$

где $x = \{x_1, x_2\} \in H \times H_{-1/2}$, $h(t) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, функция $y \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{D}(L)$, когда $y'(t)$ существует в пространстве $H_{-1/2}$, абсолютно непрерывна в H_{-1} и $\tilde{l}[y] \in \mathfrak{H}$. На функциях $y \in \mathcal{D}(L)$ оператор L действует по формуле $Ly = \tilde{l}[y]$. Из равенства (20) следует, что всякая функция $y \in \mathcal{D}(L)$ сильно непрерывна в H, а y' сильно непрерывна в $H_{-1/2}$. (Доказательства приведенных выше утверждений относительно $\mathcal{D}(L)$ можно найти в [6, гл. 3].)

Для любой функции $y \in \mathcal{D}(L)$ обозначим через Y_t упорядоченную пару $Y_t = \{y(t), y'(t)\}$. Определим операторы $\delta_1 : \mathcal{D}(L) \to H \times H_{-1/2}$, $\delta_2 : \mathcal{D}(L) \to H \times H_{-1/2}$ формулами: $\delta_1 y = Y_0$, $\delta_2 y = Y_b$. Равенство (20) влечет непрерывность операторов δ_1, δ_2 (на $\mathcal{D}(L)$ норма графика L). Из существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $\tilde{l}[y] = h(t)$ с начальными условиями $y(s) = c_0 \in H$, $y'(s) = c_1 \in H_{-1/2}$ $(s \in [0,b])$, а также из изложенного выше следует, что четверка $(\mathcal{H} \times \mathcal{H}, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$, где $\mathcal{H} = H \times H_{-1/2}$, является пространством граничных значений в смысле определения 1 для оператора L. Здесь $\tilde{\delta}_i\{y,h\} = \delta_i y$ $(i = 1,2)$, где пара $\{y,h\} \in L$, т.е. $Ly = h$.

Обозначим через L_0 сужение оператора L на $\ker\delta_1 \cap \ker\delta_2$, а через $\widehat{L}$ – сужение L на $\ker\delta_1$. Оператор $\widehat{L}$ имеет всюду определенный ограниченный обратный. Оператор Φ, определенный формулой (1), в рассматриваемом примере отображает $\mathcal{H} = H \times H_{-1/2}$ на $\mathcal{H} = H \times H_{-1/2}$ и задается операторной матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} U_1(b) & U_2(b) \\ U_1'(b) & U_2'(b) \end{pmatrix}.$$

Пусть линейное отношение $\theta \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. В соответствии с формулой (2) через L_θ обозначим такой оператор $\mathcal{L}$, что $L_0 \subset \mathcal{L} \subset L$ и $\delta\mathcal{L} = \theta$, т.е. $\delta L_\theta = \theta$.

Теорема 6. *Пусть $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ (или $A^{-1} \in \mathfrak{S}_2$) и $0 \in \rho(L_\theta)$. Тогда $L_\theta^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ (или $L_\theta^{-1} \in \mathfrak{S}_2$) в том и только том случае, когда $(\theta - \Phi)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ($(\theta - \Phi)^{-1} \in \mathfrak{S}_2$ соответственно).*

Доказательство. Отметим сначала, что $\delta\widehat{L} = \theta_0 = \{0\} \times \mathcal{H}$. Тогда $\theta_0 - \Phi = \theta_0$ и $\theta_0^{-1} = 0$. В [6, с. 195, 197] установлено, что если $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ (или $A^{-1} \in \mathfrak{S}_2$), то $\widehat{L}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ($\widehat{L}^{-1} \in$

$\mathfrak{S}_2$ соответственно). Положив в теореме 3 $T_1 = \widehat{L} = L_{\theta_0}$, $T_2 = L_\theta$, получим требуемое утверждение. $\square$

В случае, когда $q(t)$ – самосопряженные операторы, теорема 6 установлена в [6, гл. 3] для максимальных диссипативных и аккумулятивных сужений оператора L при другом выборе граничных значений.

Список литературы

[1] Кочубей А.Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Матем. заметки – 1975. – Т. 17, № 1. – с. 41-48.

[2] Брук В.М. *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Матем. сб. – 1976 – Т. 100, № 2. – с. 210-216.

[3] Брук В.М. *О расширениях симметрических отношений* // Матем. заметки – 1977. – Т. 22, № 4. – с. 825-835.

[4] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. *О самосопряженных граничных задачах с дискретным спектром для уравнения Штурма-Лиувилля с неограниченным операторным коэффициентом* // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – Т. 5, № 4. – с. 67-68.

[5] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. *О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля с операторным потенцалом* // Укр. матем. ж. – 1972. – Т. 24, № 3. – с. 291-304.

[6] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений* // Наукова Думка, Киев, 1984.

[7] Брук В.М. *Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах* // Функциональный анализ (Ульяновск) – 1988. – № 28. – с. 17-22.

[8] Брук В.М. *О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами* // Дифференциальные уравнения – 2007. – Т. 43, № 1. – с. 21-27.

[9] Баскаков А. Г., Чернышов К. И. *Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов* // Матем. сборник – 2002. – Т. 193, № 11. – с. 3-42.

[10] Bruk V.M. *On linear relations generated by nonnegative operator function and degenerate elliptic differential-operator expression* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry – 2009. – V. 5, № 1. pp. 123-144.

[11] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* // Наука, М., 1965.

Брук В.М., Россия, Саратов, Саратовский государственный технический университет

E-mail: `vladislavbruk@mail.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2010

УДК 517.95 MSC2000: 35J67

Г.О. Бузыкин, В.И. Власов

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ТРЕФФЦА

Изложено теоретическое обоснование метода Треффца решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоских областях $\mathcal{B}$, являющегося вариационным в пространстве Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$ — подпространстве соболевского пространства $W_2^1(\mathcal{B})$ функций, гармонических в $\mathcal{B}$. Проведено численное исследование, показавшее эффективность метода Треффца и, в частности, экспоненциальный характер его сходимости.

Введение

Хорошо известен предложенный Е.Треффцем [1] (см. также [2], [3]) вариационный метод решения задачи Дирихле

$$\Delta u(z) = 0,\ z \in \mathcal{B}, \qquad u(z') = h(z'),\ z' \in \Gamma, \tag{1}$$

в областях $\mathcal{B}$, ограниченных кусочно–гладким контуром Г. В этом методе в качестве аппроксимативной выбирается система гармонических многочленов $\xi_k(z)$, определяемых по формуле

$$\xi_0(z) := 1, \quad \xi_{2k-1}(z) := \operatorname{Re}(z-z_0)^k, \quad \xi_{2k}(z) := \operatorname{Im}(z-z_0)^k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а z_0 — некоторая точка комплексой плоскости $z = x + iy$. Решение задачи (1) ищется в виде предела последовательности приближенных решений u^N (N — верхний индекс), определяемых в виде линейной комбинации первых N функций ξ_k,

$$u = \lim_{N\to\infty} u^N, \qquad u^N = \sum_{k=0}^{N} a_k^N \, \xi_k, \tag{3}$$

где коэффициенты a_k^N находятся из условия наименьшего отклонения приближенного решения от точного в энергетической норме

$$\left| u \right|^2 := \int_{\mathcal{B}} |\operatorname{grad} u(z)|^2 \, dx\, dy\,. \tag{4}$$

Естесственным предположением при таком условии является принадлежность решения $u(z)$ соболевскому пространству $W_2^1(\mathcal{B})$, состоящему, как известно [4]- [6], из функций $u(z) \in L_2(\mathcal{B})$, имеющих обобщенные первые производные из $L_2(\mathcal{B})$.

Указанное условие

$$\left| u^N - u \right| = \min \tag{5}$$

приводит к следущей системе линейных уравнений относительно $\{a_k^N\}_{k=1}^N$:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} a_j^N \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad}\xi_k,\, \operatorname{grad}\xi_j\rangle\, dx\, dy = \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u,\, \operatorname{grad}\xi_k\rangle\, dx\, dy, \quad k = \overline{1,\, N}. \tag{6}$$

Применяя к интегралам, входящим в последнее равенство, тождество Грина [7]- [10], что допустимо с учетом вложений $\xi_k \in C^\infty(\overline{\mathcal{B}})$, $u \in W_2^1(\mathcal{B})$, переписываем систему (6) в виде

$$\sum_{j=1}^{N} a_j^N \Big(-\!\int_{\mathcal{B}} \xi_j\, \Delta\xi_k\, dx\, dy + \int_{\Gamma} \xi_j\, \partial_\nu \xi_k\, |dz| \Big) = -\!\int_{\mathcal{B}} u\, \Delta\xi_k\, dx\, dy + \int_{\Gamma} u\, \partial_\nu\xi_k\, |dz|\,, \tag{7}$$

где $k=\overline{1,\,N}$, а ∂_ν — производная по внешней нормали к границе Γ. Учитывая теперь, что $u(z')=h(z')$ на Γ, а функции ξ_k являются гармоническими, преобразуем систему линейных уравнений (7) к окончательному виду

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} a_j^N \int_\Gamma u_j\,\partial_\nu u_k\,|dz| \,=\, \int_\Gamma h\,\partial_\nu u_k\,|dz|, \qquad k=\overline{1,\,N}, \tag{8}$$

откуда коэффициенты $\left\{a_1^N,\,\ldots,\,a_N^N\right\}$ находятся однозначно, поскольку матрица системы (8) есть матрица Грама системы линейно независимых элементов [2], [3], [11]; отметим также, что она симметрична.

Отметим, что описанный метод позволяет получить приближенное решение u^N с точностью до константы, поскольку при вычислении $\operatorname{grad} u^N$, фигурирующего в условии минимума нормы (5), коэффициент a_0^N в представлении (3) выпадает, а следовательно не входит в систему (8).

Определим эту константу, т.е. коэффициент a_0^N, по формуле:

$$a_0^N \,:=\, \int_\Gamma \Big(h(z)-\sum\nolimits_{k=1}^{N} a_k^N\,\xi_k(z)\Big)\,|dz|\,, \tag{9}$$

и, таким образом, приближенное решение — по следующей формуле

$$u^N(z) := \, a_0^N \,+\, \sum\nolimits_{k=1}^{N} a_k^N\,\xi_k(z)\,. \tag{10}$$

Основной целью работы является проведение теоретического обоснования описанного метода. При этом использована интерпретация метода как вариационного в функциональном пространстве Вейля $I_2^1\,(\mathcal{B})$, являющегося подпространством соболевского пространства $W_2^1\,(\mathcal{B})$ функций, гармонических в $\mathcal{B}$. Изучены свойства пространства $I_2^1\,(\mathcal{B})$ и дано доказательство сходимости метода Треффца. Кроме того, выполненное для ряда конкретных примеров численное исследование показало экспоненциальную скорость сходимости этого метода.

1. Пространства Вейля

1.1. **Пространства Соболева и Соболева — Слободецкого.** Пусть жорданова область $\mathcal{B}$ ограничена кусочно гладким контуром Γ, гладкие звенья которого соединяются под углами $\pi\alpha_q$ $(q=1,\,\ldots,\,Q)$. Если для всех q выполняются условия $\alpha_q\in(0,\,2)$, то будем говорить, что $\mathcal{B}\in(PS)$.

Как известно [4]- [6], норма в пространстве Соболева $W_2^1\,(\mathcal{B})$ определяется по формуле

$$\big\|u;\,W_2^1\,(\mathcal{B})\big\|^2 := \big\|u;\,L_2\,(\mathcal{B})\big\|^2 + \big|u;\,W_2^1\,(\mathcal{B})\big|^2\,, \tag{11}$$

где $\big\|u;\;L_2\,(\mathcal{B})\big\|$ — норма в $L_2\,(\mathcal{B})$, а $\big|u;\;W_2^1\,(\mathcal{B})\big| \;:=\; \big|u\big|$ — энергетическая норма, определенная по формуле (4).

В соответствии с [7]- [10], [12] пространство Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$ на границе Γ состоит из функций $u\,(z)\,\in\,L_2\,(\Gamma)$, для которых конечен следующий интеграл:

$$\big|u;\,W_2^{1/2}\,(\Gamma)\big|^2 := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|u\,(z_1)\,-\,u\,(z_2)|^2}{|z_1\,-\,z_2|^2}\,|dz_1|\,|dz_2|\,.$$

Норма в пространстве $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$ определяется по следующей, аналогичной (11), формуле:

$$\big\|u;\,W_2^{1/2}\,(\Gamma)\big\|^2 :=\, \big\|u;\,L_2\,(\Gamma)\big\|^2 \,+\, \big|u;\,W_2^{1/2}\,(\Gamma)\big|^2\,.$$

Известно [7]- [10], [12], что любая функция $u(z)\,\in\,W_2^1\,(\mathcal{B})$ имеет на Γ след[1] $u(z')$, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$, и справедлива оценка

$$\big\|u(z');\,W_2^{1/2}\,(\Gamma)\big\| \,<\, C_1\,\big\|u(z);\,W_2^1\,(\mathcal{B})\big\|$$

с константой C_1, не зависящей от $u(z)$.

[1]) След элемента $u(z)\in W_2^1\,(\mathcal{B})$ понимается (см., например, [7]- [10], [12]) как предел в $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$ сужений $u_n(z')$, $z'\in\Gamma$, $n\in\mathbb{N}$, последовательности липшицевых в $\overline{\mathcal{B}}$, т.е. принадлежащих $C^{0,1}\,(\overline{\mathcal{B}})$, функций $u_n(z)$, приближающих в норме $W_2^1\,(\mathcal{B})$ элемент $u(z)$.

Наоборот, существует линейный оператор $\mathcal{L}$, который всякой функции $u(z') \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ ставит в соответствие функцию $u(z) = \mathcal{L}\,u(z') \in W_2^1(\mathcal{B})$ со следом $u(z')$, причем, имеет место оценка

$$\big\|u(z);\, W_2^1(\mathcal{B})\big\| < C_2\,\big\|u(z');\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|$$

с константой C_2, не зависящей от $u(z')$. Таким образом, пространства $W_2^1(\mathcal{B})$ и $W_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу. Заметим, что в качестве линейного оператора $\mathcal{L}$ продолжения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^1(\mathcal{B})$ можно использовать оператор задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1) в области $\mathcal{B}$. С этими свойствами согласуется следующее известное [7]- [10], [12]

Предложение 1. *Решение $u(z)$ задачи (1) с граничной функцией $h \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ существует и единственно в пространстве $W_2^1(\mathcal{B})$.*

1.2. **Неравенство Пуанкаре для пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Аппроксимационная теорема.** Сначала приведем важное *неравенство Пуанкаре* [4] для функций $u(z)$ из $W_2^1(\mathcal{B})$:

$$\big\|u;\, L_2(\mathcal{B})\big\|^2 \le M_1\left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \big|u;\, W_2^1(\mathcal{B})\big|^2\right], \tag{12}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $u(z)$.

Аналог неравенства Пуанкаре для функций из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ устанавливает следующая

Теорема 1. *Для функций $u(z)$ из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ имеет место неравенство*

$$\big\|u;\, L_2(\Gamma)\big\|^2 \le M_2\left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \big|u;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2\right], \tag{13}$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $u(z)$.

Доказательство. Покажем вначале, основываясь на установленной в [7] компактности вложения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, что для любой функции $u \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma) := \big\{u \in W_2^{1/2} : \int_\Gamma u(z)\,|dz| = 0\big\}$ имеет место оценка

$$\big\|u;\, L_2(\Gamma)\big\|^2 \le M\,\big|u;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2 \tag{14}$$

с постоянной $M > 0$, не зависящей от функции $u(z)$.

Действительно, предположим, что (14) неверно. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется функция $u_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ такая, что

$$\big\|u_k;\, L_2(\Gamma)\big\|^2 > k\,\big|u_k;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2. \tag{15}$$

Заметим, что в силу (15) нормы $\big\|u_k;\, L_2(\Gamma)\big\|$ для всех $k \in \mathbb{N}$ отличны от нуля. Рассмотрим последовательность функций $v_k := u_k\,\big\|u_k; L_2(\Gamma)\big\|^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Учитывая (15), легко убедиться, что последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ обладает следующими тремя свойствами:

$$\text{а) } v_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma); \quad \text{б) } \big\|v_k;\, L_2(\Gamma)\big\| = 1; \quad \text{в) } \big|v_k;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2 < 1/k, \tag{16}$$

откуда, в частности, имеем

$$\big\|v_k;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 = \big\|v_k;\, L_2(\Gamma)\big\|^2 + \big|v_k;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2 < 1 + 1/k < 2.$$

Таким образом, последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Следовательно (см. [13]), из нее можно выделить подпоследовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty$, слабо сходящуюся в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$ к некоторой функции v,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W_2^{1/2}(\Gamma), \qquad j \to \infty. \tag{17}$$

Докажем, что v равна нулю на границе Γ.

Рассмотрим над пространством $W_2^{1/2}(\Gamma)$ семейство линейных функционалов

$$\Lambda_\varphi(u) := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{u(z_1) - u(z_2)}{|z_1 - z_2|}\,\varphi(z_1, z_2)\,|dz_1|\,|dz_2|,$$

где φ — произвольная функция, принадлежащая классу $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\Gamma\times\Gamma$. Поскольку по неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\bigl|\Lambda_\varphi(u)\bigr| \le \bigl\|\varphi;\ L_2\,(\Gamma\times\Gamma)\bigr\|\ \bigl|\!\!\bigl|u;\ W_2^{1/2}\,(\Gamma)\bigr|\!\!\bigr|\ , \tag{18}$$

то выполняется оценка $\bigl|\Lambda_\varphi(u)\bigr| \le \bigl\|\varphi;\ L_2\,(\Gamma\times\Gamma)\bigr\|\,\bigl\|u;\ W_2^{1/2}\,(\Gamma)\bigr\|$, т.е. функционалы $\Lambda_\varphi(u)$ являются ограниченными и принадлежат пространству, сопряженному к $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$. Слабая сходимость (17) означает, что

$$\forall\varphi\in\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Gamma\times\Gamma):\qquad\qquad \Lambda_\varphi(v_{k_j})\ \to\ \Lambda_\varphi(v)\,,\quad j\ \to\ \infty\,. \tag{19}$$

С другой стороны, из соотношения в) в формуле (16) с учетом неравенства (18) вытекает, что $\Lambda_\varphi(v_{k_j})$ стремится к нулю при $j\to\infty$ для всех $\varphi\in\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$. Отсюда и из соотношения (19) следует, что для любой функции φ из $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$ справедливо равенство $\Lambda_\varphi(v)=0$. Поэтому (см. [14]) разность $v(z_1)-v(z_2)$ равна нулю на множестве $\Gamma\times\Gamma$, т.е. функция $v(z)$, определенная на границе Γ, является константой.

Рассмотрим теперь на элементах пространства $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$ линейный ограниченный функционал $F(u):=\int_\Gamma u(z)\,|dz|$. Из указанного в (16) свойства а) следует, что $F(v_{k_j})=0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Отсюда заключаем, что в силу (17) значение $F(v)$ тоже равно нулю, т.е. функция v, являющаяся константой, есть тождественный нуль.

Из компактности вложения пространства $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$ в пространство $L_2\,(\Gamma)$ следует (см. [13]), что последовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к нулю в $W_2^{1/2}\,(\Gamma)$, в $L_2\,(\Gamma)$ сходится к нулю сильно, т.е. предел $\bigl\|v_{k_j};\ L_2\,(\Gamma)\bigr\|$ равен нулю при $j\to\infty$, что противоречит свойству б), указанному в (16).

Таким образом, оценка (14) для функций из $\widehat{W}{}_2^{1/2}\,(\Gamma)$ установлена. Рассмотрим теперь произвольную функцию $u\in W_2^{1/2}\,(\Gamma)$. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl\|u;\ L_2\,(\Gamma)\bigr\|^2\ &=\ \left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz|+u-\int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2\,(\Gamma)\right\|^2\ \le\\ &\le\ 2\left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2\,(\Gamma)\right\|^2\ +\ 2\left\|u-\int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2\,(\Gamma)\right\|^2.\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что функция $u-\int_\Gamma u(z)\,|dz|$ принадлежит $\widehat{W}{}_2^{1/2}\,(\Gamma)$, поэтому первое слагаемое в правой части неравенства (20) можно оценить с помощью (14). Учитывая, что интеграл в формуле (14) не изменяется при вычитании из функции u константы, окончательно получаем

$$\bigl\|u;\ L_2\,(\Gamma)\bigr\|^2\ \le\ \max\Bigl\{2M,\,2|\Gamma|\Bigr\}\left[\left(\int_\Gamma u\,(z)\,|dz|\right)^2+\ \bigl|\!\!\bigl|u;\ W_2^{1/2}\,(\Gamma)\bigr|\!\!\bigr|^2\right],$$

где через $|\Gamma|$ обозначена длина границы Γ. Теорема доказана.

Возможность использования системы (2) в качестве аппроксимативной для решения задачи (1) обеспечивает следующая

Теорема 2. *При условии $\mathcal{B}\in(PS)$ система (2) полна, а если $z_0\in\mathcal{B}$, то и минимальна в пространстве $W_2^1\,(\mathcal{B})$.*

Доказательство проводится с помощью аппроксимативных теорем [15], [16] для решений эллиптических краевых задач.

1.3. **Пространства Вейля. Изоморфизм.** *Пространство Вейля $I_2^1\,(\mathcal{B})$* представляет собой фактор–пространство $\widetilde{W}{}_2^1\,(\mathcal{B})/\,\mathbb{R}$, в котором отождествляются функции, отличающиеся на константу; здесь $\widetilde{W}{}_2^1\,(\mathcal{B})$ — пространство Соболева $W_2^1\,(\mathcal{B})$ гармонических в области $\mathcal{B}$ функций, а $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Элементы пространства $I_2^1\,(\mathcal{B})$ будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент —

той же буквой без тильды (например, $\widetilde{u}$ и u). Скалярное произведение в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ определяется по формуле [17]

$$[\widetilde{u}, \widetilde{v}] = \big(\widetilde{u}, \widetilde{v};\ I_2^1(\mathcal{B})\big) := \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle\, dx\, dy\,, \tag{21}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение плоских векторов. Значение интеграла в формуле (21), очевидно, не зависит от выбора представителей u и v соответственно элементов $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$, а величина

$$\big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\| := [\widetilde{u}, \widetilde{u}]^{1/2} = \big|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\big| = \left(\int_{\mathcal{B}} |\operatorname{grad} u(z)|^2\, dx\, dy\right)^{1/2} \tag{22}$$

является нормой в $I_2^1(\mathcal{B})$.

Функцию $\widehat{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, если она принадлежит этому элементу и удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma} \widehat{u}(z)\, |dz| = 0. \tag{23}$$

Аналогично, на подпространстве функций u из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ введем фактор–пространство элементов $\{u + \mathrm{const}\}$, которое назовем *пространством Вейля на границе* Γ и обозначим $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Его элементы также будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент — той же буквой без тильды. Скалярное произведение в $I_2^{1/2}(\Gamma)$ введем по формуле

$$\big(\widetilde{u}, \widetilde{v};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big) := \int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{\big[u(z_1) - u(z_2)\big]\big[v(z_1) - v(z_2)\big]}{|z_1 - z_2|^2}\, |dz_1|\, |dz_2|. \tag{24}$$

Как и выше, значение интеграла в (24) не зависит от выбора функций $u \in \widetilde{u}$ и $v \in \widetilde{v}$, а величина $\big\|\widetilde{u};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\| := \big(\widetilde{u}, \widetilde{u};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big)^{1/2} = \big|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|$ представляет собой норму в $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Функцию $\widehat{u} \in \widetilde{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, если она удовлетворяет условию (23).

Теорема 3. *Пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу.*

Доказательство. 1) Пусть $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, и пусть $\widehat{u}$ — естественный представитель этого элемента. Для функции $\widehat{u}(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ однозначно определен след $\widehat{u}(z')$ на границе Γ, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и имеет место неравенство

$$\big\|\widehat{u}(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big\| \le C_1 \big\|\widehat{u}(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\big\|, \tag{25}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\widehat{u}$. Этот след в силу условия (23) является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Оценим норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$ через норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. С учетом (25) имеем

$$\big\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 = \big|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2 \le \big\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 \le$$
$$\le C_1^2 \big\|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\big\|^2 = C_1^2 \big\|\widehat{u};\ L_2(\mathcal{B})\big\|^2 + C_1^2 \big|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\big|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в правой части последнего равенства с помощью неравенства Пуанкаре (12) и с учетом (23), получаем

$$\big\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 \le C_1^2 M_1 \left(\int_{\Gamma} \widehat{u}(z)\, |dz|\right)^2 + C_1^2 (M_1 + 1) \big|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\big|^2 =$$
$$= C_1^2 (M_1 + 1) \big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\|^2,$$

где $M_1 > 0$ также не зависит от $\widehat{u}$.

Таким образом установлено, что любому элементу $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ можно поставить в соответствие элемент $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, причем справедлива оценка

$$\big\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\| \le c_1(\mathcal{B})\, \big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\|, \tag{26}$$

где постоянная $c_1(\mathcal{B}) = C_1\sqrt{M_1 + 1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

2) Обратно, пусть $\widetilde{h}$ — произвольный элемент пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, а функция $\widehat{h} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — его естественный представитель. Существует линейный оператор $\mathcal{L}$, ставящий в соответствие функции $\widehat{h}(z')$ единственную гармоническую функцию $\mathcal{L}\widehat{h}(z) \in \in W_2^1(\mathcal{B})$ такую, что $[\mathcal{L}\widehat{h}](z') = \widehat{h}(z')$, и справедлива оценка

$$\big\|\mathcal{L}\widehat{h};\ W_2^1(\mathcal{B})\big\| \le C_2\,\big\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|, \tag{27}$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $\widehat{h}$. Функция $\mathcal{L}\widehat{h}$, удовлетворяющая условию (23), является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. Оценим норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ через норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Учитывая (27), имеем

$$\big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\|^2 = \big|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\big|^2 \le \big\|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\big\|^2 \le$$
$$\le C_2^2\,\big\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 = C_2^2\,\big\|\widehat{h};\ L_2(\Gamma)\big\|^2 + C_2^2\,\big|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в последнем равенстве с помощью неравенства Пуанкаре (13) и с учетом (23), получаем

$$\big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\|^2 \le C_2^2 M_2\Big(\int_\Gamma \widehat{h}(z)\,|dz|\Big)^2 + C_2^2(M_2+1)\,\big|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2 =$$
$$= C_2^2(M_2+1)\big\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2,$$

т.е. справедливо неравенство

$$\big\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\big\| \le c_2(\mathcal{B})\,\big\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|, \tag{28}$$

где постоянная $c_2(\mathcal{B}) = C_2\sqrt{M_2+1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

Объединяя результаты (26) и (28) пунктов 1) и 2) доказательства, находим, что линейный оператор $\mathcal{L}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Отметим еще, что полнота пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, очевидно, следует из полноты пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ и неравенства (13), а полнота пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ следует из изоморфизма пространств $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$.

2. Метод Треффца

Рассмотрим задачу (1) с граничной функцией $h \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Ее решение $u(z)$ согласно предложению 1 существует и единственно в пространстве $W_2^1(\mathcal{B})$.

Из сравнения определяющего для метода Треффца условия (5) и определения нормы (22) в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ видно, что метод Треффца является вариационным в указанном пространстве Вейля. Учитывая этот факт, докажем следующую основную теорему.

Теорема 4. *Последовательность определенных по формуле (10) приближенных решений $u^N(z)$, а также последовательности их производных сходятся равномерно на любом компакте $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ соотвественно к функции $u(z)$ — решению задачи (1) — и ее производным, т.е. справедливо соотношение*

$$D^{l,m}\,u^N(z) \overset{\mathcal{E}}{\Longrightarrow} D^{l,m}\,u(z) \tag{29}$$

для любых целых неотрицательных l и m, где $D^{l,m} := \partial^{l+m}/\partial x^l\,\partial y^m$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{h}$ — элемент пространста $I_2^{1/2}(\Gamma)$, содержащий h. Решение $u(z)$ задачи принадлежит некоторому элементу $\widetilde{u}$ пространства $I_2^1(\mathcal{B})$. В терминах пространства Вейля этот элемент $\widetilde{u}$ строится в виде предела последовательности $\{\widetilde{u}^N\}_{N=1}^\infty$ приближенных элементов

$$\widetilde{u}^N := \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N\,\widetilde{\xi}_k, \tag{30}$$

где коэффициенты a_k^N находятся, как было отмечено выше, из условия

$$\big\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B})\big\| = \min. \tag{31}$$

Учитывая очевидные соотношения для естесственных представителей

$$\widehat{u}(z) = u(z) - \int_\Gamma h(z)\,|dz|, \qquad \widehat{u}^N(z) = u^N(z) - \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N \int_\Gamma \xi_k(z)\,|dz|,$$

а также формулу (9), можно увидеть, что для доказательства сходимости (29) приближенных решений $u^N(z)$ и их производных достаточно установить аналогичную сходимость для функций $\widehat{u}^N(z) := \sum_{k=1}^N a_k^N\,\widehat{u}_k(z)$ к $\widehat{u}(z)$ вместе со всеми производными.

Используя неравенство Пуанкаре (13) и оценку (26), связанную с изоморфизмом пространств $I_2^1\,(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}\,(\Gamma)$, получаем цепочку неравенств

$$\big\|\widehat{u};\; L_2\,(\Gamma)\big\|^2 \;\le\; M_2\,\big\|\widetilde{u};\; I_2^{1/2}\,(\Gamma)\big\|^2 \;\le\; C\,\big\|\widetilde{u};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\|^2 \qquad \forall\,\widetilde{u}\in I_2^1\,(\mathcal{B}), \tag{32}$$

где $M_2 > 0$ и $C = M_2\,c_1^2(\mathcal{B}) > 0$ — константы, не зависящие от $\widetilde{u}$, $c_1(\mathcal{B})$ — константа из формулы (26).

Согласно предположению о полноте системы $\Big\{\widetilde{\xi}_k\Big\}_{k=1}^{\infty}$, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти число $N_0 \in \mathbb{N}$ и постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$ такие, что имеет место неравенство

$$\big\|\widetilde{u} \,-\, \sum\nolimits_{k=1}^{N_0} \alpha_k\,\widetilde{\xi}_k;\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\| \,<\, \varepsilon.$$

Так как элемент $\widetilde{u}^{N_0} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k^{N_0}\,\widetilde{\xi}_k$, построенный по методу Треффца, удовлетворяет условию (31), т.е. дает наилучшее среди сумм такого вида приближение в норме $I_2^1\,(\mathcal{B})$, то отсюда получаем оценку

$$\big\|\widetilde{u} \,-\, \widetilde{u}^{N_0};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\| \,<\, \varepsilon.$$

Но поскольку $\big\|\widetilde{u} \,-\, \widetilde{u}^{N};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\|$ не превосходит $\big\|\widetilde{u} \,-\, \widetilde{u}^{N_0};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\|$ для любого $N \ge N_0$, то верна также и оценка

$$\big\|\widetilde{u} \,-\, \widetilde{u}^{N};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\| \,<\, \varepsilon$$

для любого $N \ge N_0$. Воспользовавшись теперь (32), получаем, что

$$\big\|\widehat{u} \,-\, \widehat{u}^{N};\; L_2\,(\Gamma)\big\|^2 \;\le\; C\,\big\|\widetilde{u} \,-\, \widetilde{u}^{N};\; I_2^1\,(\mathcal{B})\big\|^2 \,<\, C\varepsilon^2,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая только от области $\mathcal{B}$, а $N \ge N_0$.

Для функций $\widehat{u} - \widehat{u}^N \in W_2^1\,(\mathcal{B})$ и любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ справедливо доказанное в [18] для более широкого класса функций неравенство

$$\sup_{z\in\mathcal{E}}\big|D^{\,l,\,m}\,\big(\widehat{u}(z) - \widehat{u}^N(z)\big)\big| \,<\, M(\mathcal{E})\big\|\widehat{u} \,-\, \widehat{u}^{N};\; L_2\,(\Gamma)\big\| \,<\, M(\mathcal{E})\sqrt{C}\varepsilon, \quad \forall\,N \ge N_0,$$

где $M(\mathcal{E})$ — некоторая положительная константа, не зависящая от N. Таким образом, имеет место сходимость (29). Теорема доказана.

Отметим также, что, как известно из общей теории аппроксимативных систем (см., например, [20]), для существавания пределов коэффициентов a_k^N при увеличении длины приближения N

$$\lim_{N\to\infty} a_k^N = a_k,$$

необходимо и достаточно, чтобы система (2) была минимальной, т.е. чтобы выполнялось условие $z_0 \in \mathcal{B}$.

3. Результаты численных экспериментов

Было проведено исследование характера сходимости метода Треффца с помощью численных экспериментов. При этом в качестве тестовых использовались полученные в [19] аналитические решения ряда задач вида (1) в прямоугольной и крестообразной областях с различными граничными функциями h, существенно отличающимися по гладкости.

Проведенное исследование показало, что внутри области $\mathcal{B}$ сходимость $u^N\,(z)$ к $u\,(z)$ имеет экспоненциальный характер, т.е. для любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ выполняется оценка

$$\max_{z\,\in\,\mathcal{E}}\Big|u\,(z) \,-\, u^N\,(z)\Big| \,=\, \mathrm{O}\left(e^{\,-\lambda_1\,N}\right), \qquad N \,\to\, \infty\,, \qquad \lambda_1 \,=\, \lambda_1(\mathcal{E}) \,>\, 0\,, \tag{33}$$

независимо от того, принадлежит или нет точка z_0 области $\mathcal{B}$, т.е. является ли система (2) минимальной или нет (при выполнении условий ее полноты).

Исследован также характер сходимости (или расходимости) приближенных коэффициентов a_k^N при увеличении длины N приближения. Установлено, что если $z_0 \in \mathcal{B}$ и, значит, система (2) минимальна, то сходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ к предельным a_k имеет экспоненциальный характер,

$$\left| a_k - a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{-\lambda_2 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_2 > 0.$$

Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$ и, значит, система (2) не минимальна, то расходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ также имеет экспоненциальную скорость,

$$\left| a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{\lambda_3 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_3 > 0;$$

несмотря на это, последовательность приближенных решений сходится к точному с экспоненциальной скоростью, согласно оценке (33).

Список литературы

[1] Trefftz E. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren* // Verhanl. d. 2 internat. Kongress für techniche Mechanik. Zürich – 1926.

[2] Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*, М.: Наука – 1970.

[3] Лебедев В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика*, М.: Физматлит – 2000.

[4] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Л.: Изд. ЛГУ – 1950.

[5] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*, М.: Наука – 1973.

[6] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: Наука – 1989.

[7] Слободецкий Л.Н. *Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных* // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та – 1958. – Т. 197. – С 54-112.

[8] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир – 1973.

[9] Adams R. *Sobolev spaces*, New York — San Francisco — London: Academic Press – 1975.

[10] Grisvard P. *Eliptic problems in nonsmooth domains*, London: Pittman – 1985.

[11] Ректорис К. *Вариационные методы математической физики и техники*, М.: Мир – 1985.

[12] Пальцев Б.В. *О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187, № 4. – С. 59-116.

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука – 1976.

[14] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, М.: Наука – 1976.

[15] Beckert H. *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen* // Math. Ann. – 1959. – V. 139. – P. 255-264.

[16] Browder F.E. *Function analysis and partial differential equations, 2* // Math. Ann. – 1962. – V. 145. – P. 81-226.

[17] Weil H. *The method of orthogonal projection in potential theory* // Duke Mathematical Journal – 1940. – V. 7. – P. 411-444.

[18] Власов В.И., Рачков А.В. *О весовых пространствах типа Харди* // Докл. РАН – 1993. – Т. 328, № 3. – С. 281-284.

[19] Бузыкин Г.О., Власов В.И. *Исследование некоторых вариационных методов решения краевых задач, основанных на глобальных аппроксимативных системах.* Технический отчет ВЦ РАН – 2005.

[20] Lewin S. *Über einige mit der Konvertgenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionalfolgen* // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 32, H. 4.

Г.О. Бузыкин, В.И. Власов, 119333, Россия, Москва, Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40

E-mail: `gbuzykin@newmail.ru`, `vlasov@ccas.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 519.624.2 MSC2000: 34B60

В.И.Власов, С.Л.Скороходов, Х. Фужита Яшима

О НЕКОТОРЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Изложена модель стационарного осесимметричного движения воздуха в нижнем слое смерча или тайфуна. Эта модель, учитывающая вязкость и сжимаемость воздуха, силу Кориолиса и трение о поверхность Земли, сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений для осредненных по вертикали в этом слое величин горизонтальной скорости и плотности воздуха. С помощью задания функции β, описывающей вертикальный поток на верхней границе слоя, удается расщепить исходную задачу на две последовательно решаемые: краевую задачу для тангенциальной компоненты скорости и задачу Коши для плотности воздуха, после решения которых оставшиеся неизвестные (осредненные по вертикали радиальная скорость и давление) находятся явно. Осуществлена эффективная численная реализация модели. Результаты вычислений хорошо согласуются с наблюдаемыми данными. Проведенное численное моделирование позволило выявить некоторые закономерности в распределении скорости внутри нижнего слоя вихря.

1. Введение

В работе рассматриваются атмосферные вихри двух видов: смерчи и тайфуны. Они относятся к числу наиболее опасных атмосферных явлений. Средняя энергия, высвобождаемая во время смерча, равна энергии нескольких “эталонных” (т.е. с тротиловым эквивалентом 20 килотонн) атомных бомб, а энергия тайфуна — нескольким сотням тысяч таких бомб [1]- [4]. Смерчи возникают при столкновении холодных и теплых воздушных фронтов, а тайфуны зарождаются над перегретыми районами океана. Быстрый подъем теплого воздуха в центре смерча или, соответственно, тайфуна и опускание холодных масс воздуха вдали от центра приводит, при некоторых дополнительных условиях, к сильной горизонтальной закрученности потока и образованию устойчивых интенсивных атмосферных вихрей, соответственно, малого или крупного масштаба. Горизонтальный размер смерчей имеет десятки или сотни метров, а размер тайфунов — сотни километров; скорость ветра в тайфунах достигает 300 км/час, а в смерчах — 1000 км/час (см. [1]- [9]).

Современное математическое моделирование тайфунов включает, как правило, описание трехмерного нестационарного течения воздушных масс, происходящих в них процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом силы Кориолиса и взаимодействия с океаном [8], [10]- [12]. Однако точность численной реализации таких моделей даже на мощных ЭВМ часто оказывается недостаточной [1], [6], [10]. Что же касается математического моделирования смерчей, то оно развито в настоящее время намного меньше, что объясняется, в частности, трудностями экспериментальных исследований этого явления [4], [13].

Наряду с “большими” моделями атмосферных вихрей развиваются и упрощенные, учитывающие лишь основные факторы этих явлений [10]- [13]. Изложенная в настоящей работе модель смерчей и тайфунов относится к этому, упрощенному типу, а ее отличительной чертой является рассмотрение лишь нижнего слоя вихря, непосредственно оказывающего разрушительное действие. Эта модель описывает стационарное осесимметричное движение воздуха в указанном слое с учетом его вязкости и сжимаемости, трения о поверхность Земли и силы Кориолиса. Ряд основных принципов этой модели был сформулирован в [14]. В основе моделирования лежит осреднение по вертикали внутри рассматриваемого приземного слоя и задание вертикального потока воздуха на верхнем уровне этого слоя. Модель включает систему трех нелинейных дифференциальных уравнений для трех осредненных по вертикали величин: двух компонент горизонтальной скорости воздуха и его плотности. Возникающую краевую задачу для этой системы удается свести к последовательному решению двух задач: краевой задачи для тангенциальной компоненты скорости и задачи Коши для плотности воздуха, после решения которых оставшиеся неизвестные (радиальная скорость и давление) находятся по явным формулам.

Предложенная модель атмосферного вихря была численно реализована, а сравнение результатов расчетов с данными наблюдений показало их хорошее согласование и позволило объяснить ряд характерных особенностей исследуемых атмосферных вихрей.

2. Модель вихря и постановка задачи

2.1. Двумерная модель. Рассмотрим нижний слой стационарного атмосферного вихря (смерча или тайфуна), предполагая, что в декартовых координатах этот слой бесконечно простирается в горизонтальной плоскости $(x_1,\, x_2)$, а по вертикальной координате x_3 он расположен между поверхностью Земли $\{x_3 = 0\}$ и уровнем $\{x_3 = H\}$.

Полагая поток вязкого сжимаемого воздуха в этом слое близким к однородному по высоте, используя процедуру осреднения по вертикали (см. [15], [16]) для всех характеристик течения, получим на плоскости $(x_1,\, x_2)$ замкнутую систему уравнений относительно осредненных по x_3 компонент вектора горизонтальной скорости воздуха $\mathbf{v} = (v_1,\, v_2)$, его осредненных плотности ϱ и давления p:

$$\varrho\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} \,-\, \mu\,\Delta\mathbf{v} \,-\, \lambda\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) \,=\, -\nabla\,p \,-\, \varrho\,L\,\mathbf{v} \,-\, \alpha\,\mathbf{v}\,, \tag{1}$$

$$(\nabla\cdot\varrho\,\mathbf{v}) \,=\, -\beta\,. \tag{2}$$

Здесь через ∇ и Δ обозначены соответственно операторы "набла" и Лапласа на плоскости $(x_1,\, x_2)$; через $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ — скалярное произведение плоских векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, через λ и μ — коэффициенты соответственно объемной и динамической вязкости воздуха, а через α — коэффициент трения воздуха о поверхность Земли. Сила Кориолиса в уравнении (1) задана в виде

$$\varrho\,L\,\mathbf{v} = (-\varrho\,l_0\,v_2,\ \ \varrho\,l_0\,v_1)\,, \qquad l_0 \,=\, 2\,\omega\,\sin\varphi_0\,, \tag{3}$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, φ_0 — географическая широта центра вихря. Функция $\beta(x_1,\, x_2)$ в (2) представляет собой деленную на H вертикальную составляющую потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя и считается заданной.

Предполагая течение воздуха адиабатическим, замыкаем систему (1), (2) соответствующим уравнением состояния, связывающим плотность ϱ и давление p:

$$p\,(\varrho) = \,P_\infty\,\left(\varrho/\varrho_\infty\right)^\gamma, \tag{4}$$

где P_∞ и ϱ_∞ заданы и соответствуют давлению и плотности воздуха вдали от центра вихря (т.е. в невозмущенной атмосфере), а γ — показатель адиабаты воздуха.

2.2. Осесимметричная модель. Данные метеонаблюдений говорят о преимущественно осесимметричном характере течений в смерчах и тайфунах, поэтому будем полагать все рассматриваемые функции зависящими лишь от радиальной координаты r, отсчитываемой от центра вихря. Обозначая радиальную и тангенциальную компоненты скорости соответственно через $U(r)$ и $\Phi(r)$, перепишем систему (1), (2), (4) в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси $r \in [0,\, \infty)$ относительно трех искомых неизвестных $\varrho(r)$, $U(r)$ и $\Phi(r)$:

$$\mu\,\frac{d}{dr}\left[\frac{d\,(r\Phi)}{r\,dr}\right] - \varrho\,U\frac{d\Phi}{dr} - \,\frac{\varrho}{r}\,U\,\Phi - \alpha\,\Phi - l_0\,\varrho\,U \,=\, 0, \tag{5}$$

$$(\mu+\lambda)\frac{d}{dr}\left[\frac{d(r\,U)}{r\,dr}\right]-\varrho\,U\frac{dU}{dr}\,-\alpha\,U+\,\frac{\varrho}{r}\,\Phi^2\,+\,l_0\,\varrho\,\Phi=P_\infty\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right)^{\gamma}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\,\varrho\,U)\;=\;-\beta. \tag{7}$$

Для компонент скорости Φ, U в центре вихря и на бесконечности принимаются однородные условия:

$$\Phi(0)\;=\;U(0)\;=\;0\,,\qquad\qquad \lim_{r\to\infty}\Phi(r)\;=\;\lim_{r\to\infty}U(r)\;=\;0\,, \tag{8}$$

а для плотности в бесконечно удаленной точке — условие стремления к ϱ_∞:

$$\lim_{r\to\infty}\varrho(r)=\;\varrho_\infty\,. \tag{9}$$

Рассматривается классическое решение задачи, естественное с физической точки зрения:

$$\{U(r),\;\Phi(r),\;\varrho(r)\}\;\in\;C\,[0,\infty]\cap C^2\,(0,\infty)\,, \tag{10}$$

причем плотность $\varrho(r)$ должна быть строго положительна при всех $r\in[0,\infty]$.

Дополнительным условием, выполняющимся согласно данным наблюдений, является закрученность потока в атмосферном вихре против часовой стрелки в Северном полушарии и по часовой стрелке в Южном полушарии, т.е.

$$l_0\,\Phi(r)\;>\;0,\qquad r\in(0,\,\infty)\,. \tag{11}$$

2.3. Функция $\beta(r)$**.** Как было указано выше, функция $\beta(r)$, введение которой является ключевым моментом рассматриваемой модели, представляет собой деленную на H вертикальную составляющую потока воздуха на верхней границе $\{x_3\;=\;H\}$ рассматриваемого слоя.

Вид этой функции, выбираемый в соответствии с данными наблюдений за атмосферными вихрями, заметно различается для тайфунов и для смерчей [1]- [9].

Для тайфунов распределение вертикального потока на поверхности $\{x_3\;=\;H\}$ имеет следующий характер: вблизи центра воздух поднимается вверх, при удалении от центра скорость его подъема уменьшается, в некоторой точке $r=R$ поток обращается в ноль, а при дальнейшем удалении от центра тайфуна воздух опускается вниз.

Распределение той же величины для смерча имеет другой характер. В малой (порядка нескольких метров) окрестности центра смерча холодный воздух опускается вниз, и при некотором $r\;=\;r_e$ этот поток становится равным нулю; круг этого радиуса иногда называют "глазом" смерча [3], [4], [9]. При дальнейшем удалении от центра вертикальный поток воздуха положителен и скорость подъема увеличивается, достигая максимальной величины. По мере дальнейшего удаления от центра эта скорость уменьшается, в некоторой точке $r=R$ вертикальный поток опять обращается в ноль, а при последующем удалении от центра смерча воздух опускается вниз. При стремлении к бесконечности вертикальное движение воздуха в смерче и тайфуне полностью прекращается.

Для рассматриваемой функции $\beta(r)$ во всех случаях, очевидно, должно выполняться условие баланса массы

$$2\pi\int_0^\infty r\,\beta(r)\,dr\;=\;0\,. \tag{12}$$

В настоящей работе обсуждаемая функция для тайфунов, обозначаемая $\beta_h(r)$, и для смерчей, обозначаемая $\beta_t(r)$, задается в следующем виде:

$$\beta_h(r)=\beta_0\Big(\frac{r^2}{R^2}-1\Big)\Big(D_h\frac{r^2}{R^2}\,-1\Big)(1+qr)e^{-qr}\,, \tag{13}$$

$$\beta_t(r)=\beta_1\Big(\frac{r^2}{r_e^2}-1\Big)\Big(\frac{r^2}{R^2}-1\Big)\Big(D_t\frac{r^2}{R^2}\,-1\Big)(1+qr)\,e^{-qr}\,, \tag{14}$$

где величины β_0, β_1, r_e, R и $q>0$ являются свободными параметрами модели, причем β_0 и $-\beta_1$ представляют собой соответственно значения функций $\beta_h(r)$ и $\beta_t(r)$ в центре вихря $r\,=\,0$, а параметр q определяет показатель экспоненциального затухания этих функций при $r\to\infty$. Нижний индекс h в (13) соответствует слову "harricane" (тайфун), а индекс t в (14) — слову "tornado" (смерч).

Коэффициенты D_h и D_t в (13), (14) определяются из условия баланса (12) и равны

$$D_h = \frac{q^2 R^2 (q^2 R^2 - 10)}{10 (q^2 R^2 - 28)}, \qquad D_t = \frac{q^2 R^2 (q^4 R^2 r_e^2 - 10 q^2 r_e^2 - 10 q^2 R^2 + 280)}{10 (q^4 R^2 r_e^2 - 28 q^2 r_e^2 - 28 q^2 R^2 + 1512)}. \tag{15}$$

Выбирая параметры r_e, R и q так, чтобы выполнялись неравенства $D_h < 0$, $D_t < 0$, получим для функции $\beta_h(r)$ необходимое условие обращения в нуль лишь в одной конечной точке $r = R$, а для функции $\beta_t(r)$ – лишь в двух точках $r = r_e$ и $r = R$. Отметим здесь, что функция $\beta_t(r)$ асимптотически совпадает с $\beta_h(r)$ при стремлении $r_e \to \infty$. Задание функции $\beta(r)$ завершает постановку задачи (6)–(10).

3. Особые точки системы

Основываясь на теории особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений и систем (см. [17], [18]) убеждаемся, что система (6)–(7) имеет две особые точки, $r = 0$ и $r = \infty$. Предполагая степенной характер поведения искомых функций вблизи начала координат, находим для них следующие асимптотики:

$$\Phi(r) \sim \Phi_1 r, \qquad U(r) \sim U_1 r, \qquad \varrho(r) \sim \varrho_0 + \varrho_* r^2, \qquad r \to 0, \tag{16}$$

где Φ_1, U_1, ϱ_0, ϱ_* — некоторые ненулевые константы.

В соответствии с видом (13), (14) функций $\beta_t(r)$ и $\beta_h(r)$ предполагаем экспоненциально–степенной характер асимптотики решений $\Phi(r)$, $U(r)$, $\varrho(r)$ вблизи бесконечности; тогда из уравнения (7) находим асимптотику радиальной скорости соответственно для тайфуна $U_h(r)$ и для смерча $U_t(r)$:

$$U_h(r) \sim \frac{\beta_0 D_h}{R^4 \varrho_\infty} r^5 e^{-qr}, \qquad U_t(r) \sim \frac{\beta_1 D_t}{r_e^2 R^4 \varrho_\infty} r^7 e^{-qr}, \qquad r \to \infty. \tag{17}$$

Асимптотика тангенциальной скорости для тайфуна имеет следующий вид:

$$\Phi_h(r) \sim \widetilde{\Phi}(r) := \begin{cases} \Phi_\infty r^{-1/2} \exp\big(-\sqrt{\alpha/\mu}\, r\big), & \sqrt{\alpha/\mu} < q, \\ \Phi_\infty r^6 \exp\big(-q r\big), & \sqrt{\alpha/\mu} = q, \\ \Phi_\infty r^5 \exp\big(-q r\big), & \sqrt{\alpha/\mu} > q, \end{cases} \tag{18}$$

а вид аналогичной асимптотики для смерча отличается от (18) лишь показателями степеней во второй и третьей строках: вместо 6 следует писать 8, а вместо 5 — 7.

Сходным способом получаем асимптотику плотности для тайфуна:

$$\varrho_h(r) \sim \varrho_\infty - \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\varrho_\infty^2 l_0}{\gamma P_\infty} \widetilde{\Phi}(r), \quad \text{при} \quad \sqrt{\alpha/\mu} \le q, \tag{19}$$

$$\varrho_h(r) \sim \varrho_\infty - \frac{\varrho_\infty^2 l_0}{q \gamma P_\infty} \widetilde{\Phi}(r) + \frac{\beta_0 D_h}{q \gamma R^4 P_\infty} \big[\alpha - q^2(\mu + \lambda)\big] r^5 e^{-qr}, \quad \text{при} \ \sqrt{\alpha/\mu} > q, \tag{20}$$

где через $\widetilde{\Phi}(r)$ обозначена правая часть асимптотики (18). Аналогичная асимптотика для смерча получается повышением показателя степени при r на 2 в (20).

4. Сведе́ние к системе двух уравнений

Домножая уравнение (7) на r и интегрируя от нуля до r, получаем связь между радиальной скоростью $U(r)$ и плотностью $\varrho(r)$

$$\varrho(r)\, U(r) = -\, b(r), \tag{21}$$

где обозначено

$$b(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s\, \beta(s)\, ds. \tag{22}$$

Это позволяет в системе (6)–(7) исключить $U(r)$ и прийти к системе только двух уравнений относительно тангенциальной скорости $\Phi(r)$ и плотности $\varrho(r)$:

$$\Phi'' + \big(r^{-1} + b\,\mu^{-1}\big)\, \Phi' - \big(r^{-2} - r^{-1} b\,\mu^{-1} + \alpha\mu^{-1}\big)\, \Phi = -\, l_0\, b\, \mu^{-1}, \tag{23}$$

$$(\mu + \lambda)\, b\, \varrho'' - 2\,(\mu + \lambda) b\, \varrho^{-1} \varrho'^{\,2} +$$

$$+\left[2(\mu+\lambda)b' + (\mu+\lambda)r^{-1}b + b^2 - \gamma P_\infty \varrho_\infty^{-\gamma}\varrho^{\gamma+1}\right]\varrho' + \qquad (24)$$
$$+\left(l_0\Phi + r^{-1}\Phi^2\right)\varrho^3 + \left[(\mu+\lambda)r^{-2}b - r^{-1}b' - b'' - b\,b' + \alpha b\right]\varrho = 0\,.$$

Краевые условия следуют из соотношений (8), (9) и получаемых из (7), (7) равенств $\lim\limits_{r\to\infty} U'(r) = 0\,,\ \lim\limits_{r\to\infty} U''(r) = 0:$

$$\Phi(0) = 0\,, \qquad \lim_{r\to\infty}\Phi(r) = 0\,, \qquad (25)$$

$$\lim_{r\to\infty}\varrho(r) = \varrho_\infty\,, \qquad \lim_{r\to\infty}\varrho'(r) = 0\,. \qquad (26)$$

Система двух уравнений (23), (24) вместе с краевыми условиями (25), (26) составляет итоговую краевую задачу относительно неизвестных $\Phi(r)$ и $\varrho(r)$.

Первое уравнение (23) этой системы и краевые условия (25) содержат только одну неизвестную функцию — тангенциальную скорость $\Phi(r)$, поэтому относительно нее эта задача решается отдельно. Отметим еще, что уравнение (23) является линейным и сингулярным.

Подставляя найденную $\Phi(r)$ во второе уравнение (24) задачи (нелинейное и также сингулярное), получаем вместе с краевыми условиями (26) задачу Коши для искомой плотности $\varrho(r)$. Вычислив $\varrho(r)$, находим радиальную скорость U по формуле (21), а давление p — по формуле (4).

5. Вычисление тангенциальной скорости $\Phi(r)$

5.1. Перенос краевых условий из особых точек. При использовании метода конечных разностей для решения сингулярных краевых задач в общем случае необходимо задавать в некоторой точке, близкой к особой, краевое условие, адекватное исходному. Для такой процедуры, называемой переносом краевых условий из особых точек, известно несколько способов [19], [20].

В рассматриваемой задаче (23), (25) для скорости $\Phi(r)$ точка $r = 0$, служащая особой для уравнения (23), тем не менее для функции $\Phi(r)$ является регулярной, поэтому переноса условия в близкую неособую точку $r = r_* \ll 1$ не потребуется.

Перенос краевого условия (25) из точки $r = \infty$ в достаточно удаленную неособую точку $r = r_N \gg 1$ осуществляется на основе асимптотики (18). Опираясь на нее, находим предел для отношения

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)} = -\,\sigma\,, \qquad \sigma := \begin{cases} \sqrt{\alpha/\mu}\,, & \sqrt{\alpha/\mu} < q, \\ q\,, & \sqrt{\alpha/\mu} \ge q. \end{cases} \qquad (27)$$

Отсюда получаем приближенное граничное условие для тангенциальной компоненты скрорости $\Phi(r)$ в достаточно удаленной точке $r = r_N$:

$$\Phi'(r_N) = -\,\sigma\,\Phi(r_N)\,, \qquad (28)$$

что обеспечивает требуемый перенос граничного условия из особой точки $r = \infty$.

5.2. Разностный алгоритм для $\Phi(r)$**.** Для численного решения задачи (23), (25) используем равномерную сетку с шагом h

$$r_j = j\,h\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, N\,, \qquad (29)$$

где N – достаточно большое целое число, такое что величина $r_N = Nh$ значительно больше, чем характерный радиус исследуемого вихря.

Значения функций $\Phi(r)$ и $b(r)$ в узлах сетки (29) обозначаем через $\Phi_j = \Phi(r_j)$, $b_j = b(r_j)$ и используем центральные разностные аппроксимации порядка $O(h^2)$ для приближения производных $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$ в точке r_j:

$$\Phi'(r_j) \approx \left(\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}\right)/(2\,h)\,, \qquad \Phi''(r_j) \approx \left(\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}\right)/h^2\,. \qquad (30)$$

Подставляя аппроксимации (30) в уравнение (23), получаем разностную схему для искомых значений Φ_j.

Краевые условия (25) в точке $r = 0$ и (28) в точке $r = r_{N-1}$ примут следующий вид:

$$\Phi_{(0)} = 0\,, \qquad \left(\Phi_N - \Phi_{N-2}\right)/(2\,h) = -\sigma\,\Phi_{N-1}\,. \qquad (31)$$

Построенная разностная схема для значений Φ_j является линейной трехточечной, поэтому для ее решения применялся удобный в таких случаях метод прогонки [21].

6. Вычисление плотности $\varrho(r)$

Численное решение задачи (24), (26) ищем на сетке (29), обозначая его $\varrho_j = \varrho\,(r_j)$.

Перенос условий Коши (26) из бесконечности в достаточно удаленную точку осуществляем с помощью задания значений ϱ_{N} и ϱ_{N-1} на основе асимптотики (19), (20), что эквивалентно заданию $\varrho\,(r_{N})$ и разностной производной $\varrho\,'(r_{N})$.

Для разностных аппроксимаций производных $\varrho'(r_j)$ и $\varrho''(r_j)$ использовались формулы, аналогичные (30), что позволило записать уравнение (24) в виде разностной трехчленной схемы относительно переменных ϱ_{j-1}, ϱ_j и ϱ_{j+1}. Разрешая полученное соотношение, находим рекуррентную формулу, выражающую ϱ_{j-1} через значения ϱ_j и ϱ_{j+1}. Используя эту формулу и заданные величины ϱ_{N} и ϱ_{N-1}, рекуррентно вычисляем искомые плотности ϱ_{N-2}, ϱ_{N-3}, $\ldots, \varrho_0$. Таким образом, поставленная задача Коши для плотности $\varrho(r)$ решена.

Имея распределение плотности ϱ_j в точках сетки r_j, вычисляем значения радиальной скорости U_j и плотности p_j с помощью соотношений (21) и (4).

7. Расчет траекторий частиц воздуха в вихре

Траектории частиц воздуха в вихре удобно записать в в полярных координатах $(r,\,\vartheta)$ в виде зависимости $\vartheta = \vartheta(r)$, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\,\vartheta(r)}{d\,r} \;=\; \frac{\Phi(r)}{r\,U(r)}\,, \tag{32}$$

где правая часть выражается через компоненты скорости $\Phi(r)$ и $U(r)$.

Зная найденные величины Φ_j и U_j в узлах расчетной сетки r_j, выбирая начальное положение частицы воздуха в точке $(r_{N}\,,\,\vartheta_{N})$ и используя первую разностную производную вида (30) для аппроксимации $\vartheta'(r)$ в уравнении (32), получаем приближенное решение $\vartheta_j = \vartheta(r_j)$ задачи расчета траектории $\vartheta(r)$ частиц воздуха:

$$\vartheta_j \;=\; \vartheta_{j+1} \;-\; \frac{2(r_{j+1}-r_j)}{(r_{j+1}+r_j)}\,\frac{(\Phi_{j+1}+\Phi_j)}{(U_{j+1}+U_j)}\,. \tag{33}$$

Последовательно вычисляя ϑ_j по формуле (33) при $j = N-1,\, N-2, \ldots, 1$, строим искомую траекторию $(r_j,\,\vartheta_j)$.

8. Численная реализации модели и результаты расчетов

8.1. Реализация модели и исследование точности вычислительного алгоритма. Представленная модель движения воздуха в нижнем слое атмосферного вихря была численно реализована для широкого диапазона параметров модели. Эта реализация включала решение на сетке (29) краевой задачи (23), (25) для тангенциальной компоненты скорости $\Phi(r)$ и задачи Коши (24), (26) для плотности воздуха $\varrho(r)$. После этого искомые радиальная компонента скорости $U(r)$ и давление $p(r)$ находились с помощью соотношений (21) и (4), а траектории частиц воздуха рассчитывались по формуле (33).

Для построенного алгоритма была исследована погрешность вычисления компоненты скорости $\Phi(r)$ и плотности $\varrho(r)$ в зависимости от числа N узлов сетки и от длины r_{N} интервала интегрирования $[0, r_{N}]$. Обработка численных результатов для $\Phi(r)$ и $\varrho(r)$ при увеличении N в диапазоне $[10^2,\; 10^4]$ показала, что относительная погрешность решения убывала со скоростью $O(N^{-2})$, что согласуется со вторым порядком аппроксимации производных (30). Варьирование длины интервала интегрирования r_{N} в диапазоне от 3 до 5 характерных горизонтальных размеров вихря с неизменным шагом h сетки (29) выявило экспоненциальный характер убывания погрешности решения с ростом r_{N}. Указанные свойства численного алгоритма позволили в основной части интервала интегрирования достичь относительной точности расчетов не хуже 10^{-3}, что вполне достаточной для целей настоящего исследования.

8.2. Параметры модели. Выбор параметров модели осуществлялся, главным образом, на основе эмпирических данных из [1], [10]. Значения давления P_∞ и плотности ϱ_∞ в бесконечности, а также показателя адиабаты воздуха γ в уравнении состояния (4) принимались для всех вариантов расчетов соответствующими невозмущенной атмосфере на уровне океана [10]: $P_\infty = 10^5\,$кг$/($м$\,$с$^2)$, $\varrho_\infty = 1.29\,$кг$/$м^3, $\gamma = 1.4$. Коэффициенты динамической вязкости μ_h и μ_t соответственно для тайфунов и смерчей, а также коэффициенты трения α_h и α_t брались в интервалах:

$$\mu_h \in [0.5, 2]\cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{мс}}, \;\; \mu_t \in [30, 200]\frac{\text{кг}}{\text{мс}}, \;\; \alpha_h \in [4, 10]\cdot 10^{-6}\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\text{с}}, \;\; \alpha_t \in [3, 15]\cdot 10^{-7}\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\text{с}}.$$

Коэффициент объемной вязкости λ выбирался в диапазоне $\lambda \in [\mu/3, \mu]$, а географическая широта φ_0 центра вихря, определяющая параметр Кориолиса l_0, бралась в интервале $\varphi_0 \in [8,\ 20]^o\,$СШ. Для модельной функции $\beta_h(r)$ из (13) – плотности вертикального потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя тайфуна – параметры выбирались в интервалах: $\beta_0 \in [2,\ 6]\cdot 10^{-3}\,$кг$/($м$^3\,$с$)$, $R \in [50\,,\,100]\cdot 10^3\,$м, $q \in \left[\frac{4.8}{R}\,,\,\frac{5}{R}\right]$. Для функции $\beta_t(r)$ из (14), описывающей аналогичный поток для смерча, параметры выбирались в интервалах: $\beta_1 \in [0.01,\,0.1]\,$кг$/($м$^3\,$с$)$, $R \in [100\,,\,400]\,$м, $r_e \in [4\,,\,15]\,$м, $q \in \left[\frac{4.5}{R}\,,\,\frac{6}{R}\right]$.

8.3. Расчет характеристик типичного тайфуна. Численная реализация модели тайфуна с различным набором значений параметров из указанных диапазонов в п. 8.2 приводила к качественно сходным картинам распределения характеристик.

Приведем типичные распределения скорости воздуха в основной части тайфуна, полученные при следующих значениях параметров функции $\beta_h(r)$ из (13): $\beta_0 = 2.5\cdot 10^{-3}$кг$/($м^{3}с$)$, $R = 90\cdot 10^3$м, $q = 4.93/R$. Значения остальных параметров полагались равными $\mu_h = 1.3\cdot 10^5$кг$/($мс$)$, $\lambda = \mu_h/2$, $\alpha_h = 6\cdot 10^{-6}$кг$/($м^{3}с$)$, $\varphi_0 = 10^o\,$СШ.

На Рис. 1 штрихпунктирной и сплошной светлой линиями показаны графики зависимости соответственно тангенциальной $\Phi(r)$ и радиальной $|U(r)|$ компонент скорости воздуха, измеряемой в м/с, от расстояния r до центра тайфуна. Жирной линией изображен график зависимости модуля скорости $|v(r)| = \sqrt{\Phi^2 + U^2}$ от r.

Представленное на Рис. 1 распределение модуля скорости $|v(r)|$ хорошо согласуется с экспериментальными данными измерений скорости ветра в тайфунах экваториальной Атлантики, приведенными в [22].

8.4. Расчет характеристик смерча. Численная реализация модели смерча с различным выбором значений параметров из указанных диапазонов в п. 8.2 приводила к весьма различным картинам распределения расчетных характеристик.

Приведем зависимости скорости воздуха и давления от r, а также траектории движения частиц воздуха в основной части смерча, полученные при следующих значениях параметров функции $\beta_t(r)$ из (14): $\beta_1 = 0.027$кг$/($м^{3}с$)$, $R = 170$м, $r_e = 8$м, $q = 5.63/R$. Значения остальных параметров полагались равными $\mu_t = 70$кг$/($мс$)$, $\lambda = \mu_t/2$, $\alpha_t = 8\cdot 10^{-7}$кг$/($м^{3}с$)$, $\varphi_0 = 10^o\,$СШ.

На Рис. 2 штрихпунктирной и сплошной светлой линиями показаны графики зависимости соответственно тангенциальной $\Phi(r)$ и (взятой с противоположным знаком) радиальной $-U(r)$ компонент скорости воздуха от расстояния r до центра смерча. Жирной линией изображен график модуля скорости $|v(r)|$.

На Рис. 3 показана полученная для смерча зависимость от r давления воздуха $p(r)$, измеряемого в атмосферах.

На Рис. 4 изображены рассчитанные траектории частиц воздуха в моделируемом нижнем слое смерча.

8.5. Обсуждение результатов. Согласно приведенным на Рис. 1 результатам расчета скорости ветра в тайфуне, характерный размер этого крупномасштабного атмосферного вихря, т.е. расстояние от его центра, на котором ветер уже не представляет опасности (где $|v(r)| < 10\,$м/с), составило 170 км, а радиус зоны разрушений этого тайфуна, т.е. зоны, где скорость превышает штормовое значение 20 м/с, был равен $r = 130$ км. Из Рис. 1 видно, что компонента скорости $\Phi(r)$ имеет резкий максимум при $r = 15$ км, а компонента $|U(r)|$ — слабо выраженный при $r = 55$ км.

Сочетание таких зависимостей для $\Phi(r)$ и $|U(r)|$ создает довольно длинный участок высокого значения модуля скорости $|v(r)| = \sqrt{\Phi^2 + U^2}$, что приводит к возникновению большой зоны сильных разрушений в нижнем слое тайфуна.

Сравнение результатов расчета скорости ветра в смерче (Рис. 2) и в тайфуне (Рис. 1) хорошо иллюстрирует закон "четырех третьих" Обухова — Колмогорова, определяющий увеличение вязкости течения жидкости с увеличением его характерного размера [15] и имеющий вид

$$\frac{\mu_h}{\mu_t} \sim \left(\frac{l_h}{l_t}\right)^{4/3}, \tag{34}$$

где μ_h и μ_t — соответственно вязкости в тайфуне и смерче, l_h и l_t — характерные размеры тайфуна и смерча. Подстановка в соотношение (34) значений вязкости $\mu_h = 1.3 \cdot 10^5$кг/(мс), $\mu_t = 70$кг/(мс), а также величин $l_h = 15 \cdot 10^3$м — расстояния от центра тайфуна до точки максимума $|v(r)|$ — и $l_t = 50$м — расстояния от центра смерча до точки максимума $|v(r)|$ — превращает это соотношение в порядковое равенство $1857 \sim 2008$, что наглядно подтверждает указанный закон. Отметим, что приведенные значения $l_h = 15 \cdot 10^3$м и $l_t = 50$м являются характерными для, соответственно, тайфунов и смерчей [1], [4], [9], [10].

Полученное на Рис. 3 распределение давления в смерче хорошо согласуется с данными наблюдений, когда в центре такого вихря давление может падать на несколько процентов [4], [9]. Траектории движения частиц воздуха в смерче, показанные на Рис. 4, также хорошо совпадают с данными наблюдений.

Таким образом, представленная модель движения воздуха в нижнем слое рассмотренных типов атмосферных вихрей адекватно описывает распределение компонент скорости и плотности воздуха в смерчах и тайфунах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00715 и № 10-01-00837) и Программы №3 ОМН РАН.

Список литературы

[1] *Хаин А.П., Сутырин Г.Г.* Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат. 1983.

[2] *Минина Л.С., Безрукова Н.А.* Циклоны тропиков. М.: Знание, 1984. Вып. 9.

[3] Интенсивные атмосферные вихри. Пер. с англ. (Ред. Л. Бенигсен и Дж. Лайтхилл). М.: Мир. 1985.

[4] *Кушин В.В.* Смерч. М.: Энергоатомиздат. 1993.

[5] *Palmen E., Newton C.W.* Atmospheric Circulation Systems. N.-Y., London, 1969.

[6] *Мамедов Э.С., Павлов Н.И.* Тайфуны. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

[7] *Riehl H.* Climate and Weather in the Tropics. London, 1979.

[8] *Anthes R.A.* Tropical Cyclones — Their Evolution, Structure, and Effects. Boston, 1982.

[9] *Наливкин Д.В.* Смерчи. М.: Наука. 1984.

[10] *Хаин А.П.* Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

[11] The Science and Forecasting of Tropical Cyclones. TPC-47. Rep. WMO/TD-No. 1129, Geneva, 2002.

[12] *Takeda M., Matsuo N., Matsuda E.* Evaluation of Typhoon Model Parameters and Storm Surge Analysis by Data for Past Ten Years // Journ. of Research Inst. for Scien. and Techn. 2001. V. 13. P. 123–132.

[13] *Заволженский М.В.* Стационарная модель гидродинамической структуры смерча // Изв. РАН. Сер. физ. атм. и океана. 2002. Т. 38, No 1. С. 56–63.

[14] *Розанова О.С., Фужита Х.Я.* Стационарное решение уравнений движения воздуха в нижней части тайфуна // Сиб. ж. индустр. матем. 2005. Т. 8, No 4. С. 100–123.

[15] *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.

[16] *Алишаев Д.М.* О динамике двумерной бароклинной атмосферы // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. физ. атм. и океана. 1980. Т. 16, No 2. С. 99–107.

[17] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

[18] *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. London, 1955.

[19] *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б.* Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Computational Mathematics. Banach Center Publications. 1981. Vol. 13. P. 319–351.

[20] *Рябенький В.С.* Точный перенос разностных краевых условий // Функциональный анализ и его приложения. 1990. Т. 24. No 3. С. 90–91.

[21] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

[22] *Sheets R.C.* On the structure of hurricanes as revealed by research Aircraft data, In: Intense atmospheric vortices. Proceedings of the Joint Simposium (IUTAM/IUGC) held at Reading (United Kingdom) July 14-17, 1981. Edited by L.Begtsson and J.Lighthill. P. 33–49.

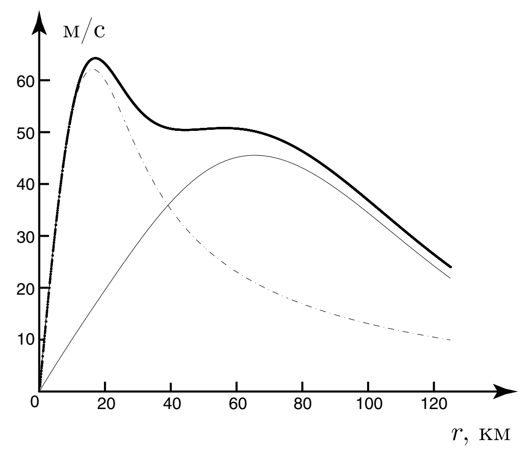


Рис. 1

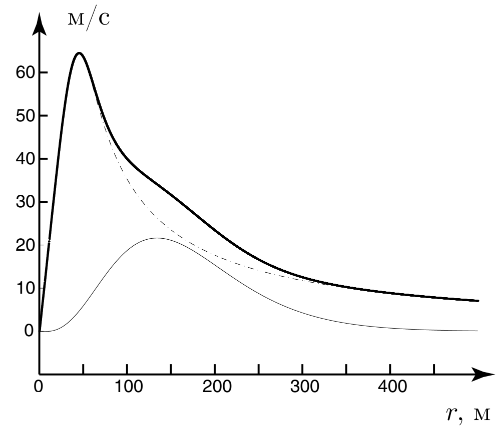


Рис. 2

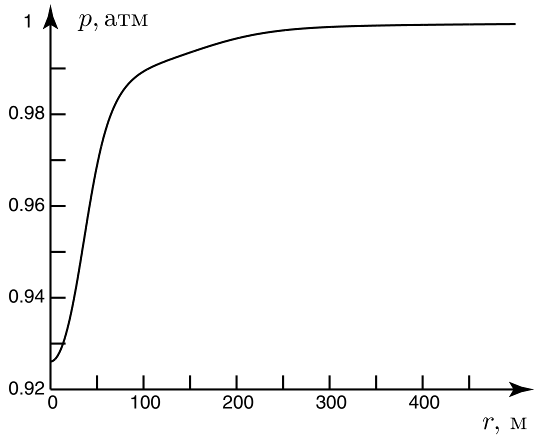


Рис. 3

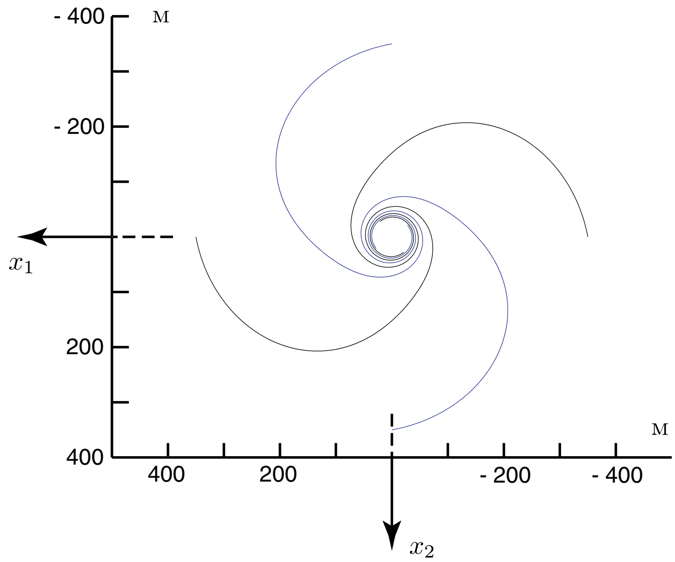


Рис. 4

В.И. Власов (vlasov@ccas.ru), С.Л. Скороходов (skor@ccas.ru) (Россия, Москва, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН)
Х. Фужита Яшима (hisao.fujitayashima@unito.it) (Италия, Турин, Университет Турина).

E-mail: `vlasov@ccas.ru, skor@ccas.ru, hisao.fujitayashima@unito.it`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 519.833 MSC2000: 27.47.19

М.И. Высокос, В.И. Жуковский

МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОЙ ДУОПОЛИИ КУРНО

Методом динамического программирования найден явный вид ситуации равновесия по Нэшу и равновесных выигрышей в двухшаговой конкурентной позиционной математической модели взаимодействия двух продавцов на рынке сбыта.

The obvious type of a situation of Nash equilibrium and equilibrium winnings of players in two-step competitive positional mathematical model of interaction of two sellers on a commodity market is find by the method of the dynamic programming.

1. "Статический" вариант модели

Две фирмы выпускают однородную продукцию за некоторый (заданный априори) промежуток времени. Пусть q_i – количество продукции, выпущенное i-ой фирмой ($i = 1, 2$). *Издержки* производства предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной продукции q_i и поэтому будут $cq_i + d$, где c и d соответственно переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным — аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\tilde{q} = q_1 + q_2$ поступившего на продажу товара. Цену товара представляем в виде $p(\tilde{q}) = a - b\tilde{q}$, где $a = const > 0$ — цена (на рынке) при отсутствии товара, а коэффициент $b = const > 0$ показывает, на сколько "падает"цена при поступлении в продажу единицы продукции. Тогда выручка 1-ой фирмы будет

$$p(\tilde{q})q_1 = (a - b\tilde{q})q_1 = [a - b(q_1 + q_2)]q_1,$$

а ее *прибыль* (выручка минус издержки)

$$\psi_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - (cq_1 + d) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1 - d,$$

одновременно прибыль второго

$$\psi_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - (cq_2 + d) = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - cq_2 - d.$$

Вследствии строгой вогнутости $\psi_i(q_1, q_2)$ по q_i (т.к. $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial q_i^2} = -2b < 0$) достаточные условия существования q_i^*, максимизирующей $\psi_i(q_1, q_2)$ по q_i ($i = 1, 2$), сводятся к построению решения системы из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}|_{q_1^*} = a - 2bq_1^* - bq_2 - c = 0, \\ \frac{\partial\psi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}|_{q_2^*} = a - bq_1 - 2bq_2^* - c = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2}{2b},\ q_2^* = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

Итак, в "статическом"варианте математической модели функциональная зависимость между "наилучшими ответами"двух фирм (при конкурентном взаимодействии) связаны соотношениями

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b},\ q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

Этот факт будет учтен при построении динамического варианта модели.

2. Динамический вариант модели

Здесь будем предполагать,

во-первых, время продолжительности выпуска продукции разбивается на два периода моментами времени $k = 0, 1, 2$;

во-вторых, существует временной лаг (здесь берем его равным одному периоду) и поэтому функции наилучшего ответа каждой из фирм на действия конкурента приобретают вид

$$q_1(k+1) = \frac{a-c-bq_2(k)}{2b},\ q_2(k+1) = \frac{a-c-bq_1(k)}{2b}\ (k = 0, 1);$$

в-третьих, фиксированы начальное количество продукта (т.е. в момент $k = 0$) на складах i-ой фирмы $q_i(0) = q_{i0}$ $(i = 1, 2)$.

Наконец, *в-четвертых*, руководство фирмы (в дальнейшем называемое *игроком*) формирует и организует *интенсивность* (на каждый период) выпуска продукции (за счет, например, инвестиций в свое производство, внедрения новых технологий); такую интенсивность для i-ой фирмы в k-ый период обозначим через $u_i[k]$ $(i = 1, 2;\ k = 0, 1)$, причем u_i в момент времени $k = 2$ зависит от количества продуктов, выпущенных обеими фирмами в момент $k = 1$. Таким образом $U_i(k)$ — *стратегию* (правило поведения — способ руководства своей фирмой) i-го игрока $(i = 1, 2)$ в момент $t = k$ $(k = 0, 1)$ будем отождествлять со скалярной функцией $u_i(k, q_1, q_2)$ (этот факт обозначается $U_i \div u_i(k, q)$, здесь и далее двухкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2)$), причем $u_i(k, q) \geq 0$ при $q_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$. Тогда сама математическая модель управляемой динамической системы Σ, описывающий процесс выпуска продукции в дискретные моменты времени $0, 1$ и 2 представится следующим образом

$$\begin{cases} q_1(k+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2(k)}{2} + u_1(k, q(k)),\ q_1(0) = q_{10}, \\ q_2(k+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1(k) + u_2(k, q(k)),\ q_2(0) = q_{20}\ (k = 0, 1). \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что (1) есть система из двух разностных (двухшаговых) линейных уравнений, а множество стратегий $U_i(k)$ на k-ом шаге далее обозначаем символом $\mathcal{U}_i(k)$ $(i = 1, 2;\ k = 0, 1)$. Тогда стратегию i-го игрока U_i образует упорядоченная пара $(U_i(0) \div u_i(0, q),\ U_i(1) \div u_i(1, q(1)))$ $(i = 1, 2)$, где $U_i(k) \in \mathcal{U}_i(k)$ $(k = 0, 1)$ и $q(1) = (q_1(1), q_2(1))$,

$$\begin{aligned} q_1(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_{20} + u_1(0, q_{10}, q_{20}), \\ q_2(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_{10} + u_2(0, q_{10}, q_{20}). \end{aligned} \tag{2}$$

Наконец, заметим, что пара стратегий игроков (U_1, U_2) образует ситуацию игры которую обозначим через U и тогда $\{U\} = \mathcal{U}$ — множество ситуаций.

С возрастанием времени k от 0 до 2 "развертывание игры во времени"происходит следующим образом. Пусть игроки, не объединяясь в коалицию, каждый i-ый $(i = 1, 2)$ сам выбирает свою стратегию $U_i = (U_i(0), U_i(1)) \in \mathcal{U}_i$, т.е. формирует две скалярные функции $u_i(0, q_1, q_2) \geq 0$ и $u_i(1, q_1, q_2) \geq 0$ (при $q_1 \geq 0$ $q_2 \geq 0$). Сам выбор стратегии $U_i(0) \in \mathcal{U}_i(0)$ и $U_i(1) \in \mathcal{U}_i(1)$ игрок i осуществляет, руководствуясь стремлением к возможному увеличению своего выигрыша (значения своей функции выигрыша $J_i(U, q_0)$, $q_0 = (q_{10}, q_{20})$, явный вид которой будет приведен ниже). Используя (1) при $k = 0$, т.е. применяя (2), находим значение фазового вектора $q(1) = (q_1(1), q_2(1))$. Затем, снова используя (1) при $k = 1$ и уже выбранные скалярные функции $u_i(1, q_1, q_2)$ $(i = 1, 2)$, строим

$$\begin{aligned} q_1(2) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_2(1) + u_1(1, q_1(1), q_2(1)), \\ q_2(2) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_1(1) + u_2(1, q_1(1), q_2(1)). \end{aligned} \tag{3}$$

В результате получаем,

во-первых, две последовательности

$$\{q_i(k)\}_{k=0}^{2}\ (i = 1, 2), \tag{4}$$

образующие дискретную траекторию системы (1) при использовании игроками упомянутых (и выбранных) конкретных стратегий $U_i \div \{(u_i(0, q), u_i(1, q)\}$, $U_i \in \mathcal{U}_i$ $(i = 1, 2)$;

во-вторых, две последовательности *реализаций*

$$\{u_i[k] = u_i(k, q_1(k), q_2(k))\}_{k=0}^{1} \ (i = 1, 2) \tag{5}$$

выбранных игроками стратегий $U_i \in \mathcal{U}_i$ $(i = 1, 2)$.

С помощью (4) и (5) построим критерий (функцию выигрыша) игрока i, значение которой (выигрыш) оценивает качество функционирования этого игрока. При этом будем учитывать следующие два обстоятельства.

Во-первых, каждая i-ая фирма $(i = 1, 2)$ стремится выпустить на рынок возможно большее количество продукции, что, в конечном счете, можно свести к максимизации i-ым игроком (за счет подходящего выбора $U_i \in \mathcal{U}_i$) следующей суммы

$$q_i^2(2) + \sum_{k=0}^{1} q_i^2(k).$$

Во-вторых, затратить при таком выпуске возможно меньше своих ресурсов. Это требование можно свести к стремлению возможно увеличить

$$\sum_{k=0}^{1}(-\alpha_i u_i^2[k]),$$

постоянная $\alpha_i > 0$.

В результате получаем *функцию выигрыша* i-го игрока в виде

$$J_i(U, q_0) = q_i^2(2) + \sum_{k=0}^{1}(q_i^2(k) - \alpha_i u_i^2[k]) \ (i = 1, 2). \tag{6}$$

Упорядоченная четверка

$$\Gamma = \langle\{1, 2\}, \ \Sigma \div (1), \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2}, \{J_i(U, q_0) \div (6)\}_{i=1,2}\rangle$$

образует двухшаговую бескоалиционную позиционную линейно-квадратичную игру двух лиц. В ней $\Sigma \div (1)$ означает, что управляемая система Σ описывается системой разностных уравнений (1), а $J_i(U, q_0) \div (6)$ — функция выигрыша i-го игрока, которая имеет вид (6).

Ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathcal{U}$ является *равновесной по Нэшу в игре* Γ, если

$$\max_{U_1 \in \mathcal{U}_1} J_1(U_1, U_2^e, q_0) = J_1(U^e, q_0),$$
$$\max_{U_2 \in \mathcal{U}_2} J_2(U_1^e, U_2, q_0) = J_2(U^e, q_0).$$

Тройка $(U^e, J_1^e = J_1(U^e, q_0), J_2^e = J_2(U^e, q_0))$ называется *равновесным решением игры* Γ.

Замечание. Для построения равновесного решения воспользуемся схемой, предложенной в [1]. Для игры Γ ее можно свести к выполнению трех этапов.

Этап 1. При $k = 2$ строятся две функции

$$V_i^{(2)}(q) = q_i^2 \ (i = 1, 2).$$

Этап 2. При $k = 1$ находим четыре скалярные функции $u_i^e(1, q)$ и $V_i^{(1)}(q)$ $(i = = 1, 2)$, исходя из условий

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(q) &= \max_{u_1}\{q_1^2 - \alpha_1 u_1^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_2 + u_1]^2\} = Idem\{u_1 \to u_1^e(1, q)\}, \\ V_2^{(1)}(q) &= \max_{u_2}\{q_2^2 - \alpha_2 u_2^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_1 + u_2]^2\} = Idem\{u_2 \to u_2^e(1, q)\}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $Idem\{u_i \to u_i^e(1, q)\}$ означает выражение в фигурных скобках, где u_i заменено на $u_i^e(1, q)$.

Этап 3. При $k = 0$ определяем четыре скалярные функции $u_i(0, q)$ и $V_i^{(0)}(q)$ $(i = 1, 2)$ согласно двум требованиям

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}(q) &= \max_{u_1}\{q_1^2 - \alpha_1 u_1^2 + V_1^{(1)}(q_1(1), q_2(1))\} = Idem\{u_1 \to u_1^e(0, q)\}, \\ V_2^{(0)}(q) &= \max_{u_2}\{q_2^2 - \alpha_2 u_2^2 + V_2^{(1)}(q_1(1), q_2(1))\} = Idem\{u_2 \to u_2^e(0, q)\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$q_1(1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_2 + u_1, \ q_2(1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1 + u_2. \tag{9}$$

Тогда, *во-первых*, ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ будет $U^e = (U_1^e, U_2^e)$, $U_i^e = (U_i^e(0), U_i^e(1))$ и $U_i^e(0) \div u_i^e(0, q_1, q_2)$, $U_i^e(1) \div u_i^e(1, q_1^e(1), q_2^e(1))$ $(i = 1, 2)$, где

$$\begin{aligned} q_1^e(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_{20} + u_1^e(0, q_{10}, q_{20}), \\ q_2^e(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_{10} + u_2^e(0, q_{10}, q_{20}); \end{aligned} \tag{10}$$

во-вторых, равновесные выигрыши игроков (их выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу) будут

$$J_i(U^e, q_0) = V_i^{(0)}(q_{10}, q_{20}) \ (i = 1, 2);$$

равновесное решение игры Γ при этом образует тройка $(U^e, V_1^{(0)}(q_0), V_2^{(0)}(q_0))$.

3. Построение равновесного решения

Следуем схеме, представленной в приведенном выше замечании.

Этап 1 (при $k = 2$). Строим две скалярные функции

$$V_i^{(2)}(q) = q_i^2 \ (i = 1, 2).$$

Этап 2 (при $k = 1$). Первое равенство из (7) реализуется при $u_1^e(1, q)$, если

$$\max_{u_1} \psi_1(u_1) = \psi_1(u_1^e(1, q)) \quad \forall q \in \mathbf{R}^2, \tag{11}$$

где $\psi_1(u_1) = -\alpha_1 u_1^2 + [\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_2 + u_1]^2$.

В свою очередь, (11) имеет место, если

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\psi_1(u_1)}{\partial u_1}\big|_{u_1^e(1,q)} &= -2\alpha_1 u_1^e(1, q) + 2[\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_2 + u_1^e(1, q)] = 0, \\ \tfrac{\partial^2\psi_1(u_1)}{\partial u_1^2}\big|_{u_1^e(1,q)} &= -2\alpha_1 + 2 = -2(\alpha_1 - 1) < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

При $\alpha_1 > 1$ последнее неравенство выполняется, а из (12) получаем

$$u_1^e(1, q) = \frac{a - c - bq_2}{2b(\alpha_1 - 1)}, \tag{13}$$

аналогично из второго равенства в (7) имеем при $\alpha_2 > 1$

$$u_2^2(1, q) = \frac{a - c - bq_1}{2b(\alpha_2 - 1)}. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в правые части (7), приходим к

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(q) &= q_1^2 + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_1-1}(\tfrac{a-c-bq_2}{2b})^2, \\ V_2^{(1)}(q) &= q_2^2 + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_2-1}(\tfrac{a-c-bq_1}{2b})^2; \end{aligned} \tag{15}$$

заметим, что второе равенство из (15) выводим аналогично первому.

Итак, в результате этапа 2 найдены (при условии $\alpha_i > 1$ $(i = 1, 2)$) четыре функции:

$$\begin{aligned} u_1^e(1, q) &= \tfrac{a-c-bq_2}{2b(\alpha_1-1)}, \\ u_2^e(1, q) &= \tfrac{a-c-bq_1}{2b(\alpha_2-1)}, \\ V_1^{(1)}(q) &= q_1^2 + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_1-1}(\tfrac{a-c-bq_2}{2b})^2, \\ V_2^{(1)}(q) &= q_2^2 + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_2-1}(\tfrac{a-c-bq_1}{2b})^2. \end{aligned}$$

Этап 3 (при $k = 0$). Согласно (8) и (15),

$$\begin{aligned} &V_1^{(0)}(q) = \max\nolimits_{u_1}\{q_1^2 - \alpha_1 u_1^2 + (\tfrac{a-c-bq_2}{2b} + u_1)^2 + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_1-1}[\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_1 + u_2^e(0, q))]^2\} = \\ &= Idem\{u_1 \to u_1^e(0, q)\}, \end{aligned} \tag{16}$$

аналогично,

$$\begin{aligned} &V_2^{(0)}(q) = \max\nolimits_{u_2}\{q_2^2 - \alpha_2 u_2^2 + (\tfrac{a-c-bq_1}{2b} + u_2)^2 + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_2-1}[\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{1}{2}q_2 + u_1^e(0, q))]^2\} = \\ &= Idem\{u_2 \to u_2^e(0, q)\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя результаты этапа 2, получаем при $\alpha_i > 1$ $(i = 1, 2)$

$$u_1^e(0, q) = \frac{a - c - bq_2}{2b(\alpha_1 - 1)}, \ u_2^e(0, q) = \frac{a - c - bq_1}{2b(\alpha_2 - 1)}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (16) и (17), приходим к

$$V_1^{(0)}(q) = q_1^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}\left(\frac{a-c-bq_2}{2b}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)^2 4^2 b^2}[(a-c)(\alpha_2-2)+bq_1\alpha_2]^2,$$
$$V_2^{(0)}(q) = q_2^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}\left(\frac{a-c-bq_1}{2b}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{(\alpha_2-1)(\alpha_1-1)^2 4^2 b^2}[(a-c)(\alpha_1-2)+bq_2\alpha_1]^2.$$

Итак, получим следующее

Утверждение. Пусть в игре Γ постоянные $\alpha_i > 1$ $(i=1,2)$. Тогда

1) ситуация равновесия по Нэшу $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ в Γ будет
$U_i^e = (U_i^e(0), U_i^e(1))$ $(i=1,2)$, где

$$U_1^e(0) \div u_1^e(0,q) = \frac{a-c-bq_2}{2b(\alpha_1-1)},$$
$$U_1^e(1) \div u_1^e(1,q) = \frac{a-c-bq_2(1)}{2b(\alpha_1-1)},$$
$$U_2^e(0) \div u_2^e(0,q) = \frac{a-c-bq_1}{2b(\alpha_2-1)},$$
$$U_2^e(1) \div u_2^e(1,q) = \frac{a-c-bq_1(1)}{2b(\alpha_2-1)},$$

причем

$$q_1(1) = \frac{a-c-bq_{20}}{2b} + \frac{a-c-bq_{20}}{2b(\alpha_1-1)} = \alpha_1\frac{a-c-bq_{20}}{2b(\alpha_1-1)},$$
$$q_2(1) = \alpha_2\frac{a-c-bq_{10}}{2b(\alpha_2-1)};$$

2) равновесные выигрыши при этом:

$$J_1(U^e,q_0) = q_{10}^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}\left(\frac{a-c-bq_{20}}{2b}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)^2 16b^2}[(a-c)(\alpha_2-2)+bq_{10}\alpha_2]^2,$$
$$J_2(U^e,q_0) = q_{20}^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}\left(\frac{a-c-bq_{10}}{2b}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{16b^2(\alpha_2-1)(\alpha_1-1)^2}[(a-c)(\alpha_1-2)+bq_{20}\alpha_1]^2.$$

Замечание. Если в игре Γ
$\alpha_i = 2$ $(i=1,2)$, $b=2$, $a=c$,

1) то равновесной по Нэшу будет ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e)$, где
$U_1^e \div (-\frac{1}{2}q_2, -\frac{1}{2}q_2(1))$, $U_2^e \div (-\frac{1}{2}q_1, -\frac{1}{2}q_1(1))$, $q_1(1) = -q_{20}$, $q_2(1) = -q_{10}$;

2) выигрыши игроков в ситуации равновесия

$$J_1(U^e,q_0) = \frac{q_{10}^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} + \frac{q_{20}^2}{(\sqrt{2})^2},\qquad J_2(U^e,q_0) = \frac{q_{10}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{q_{20}^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2}. \tag{19}$$

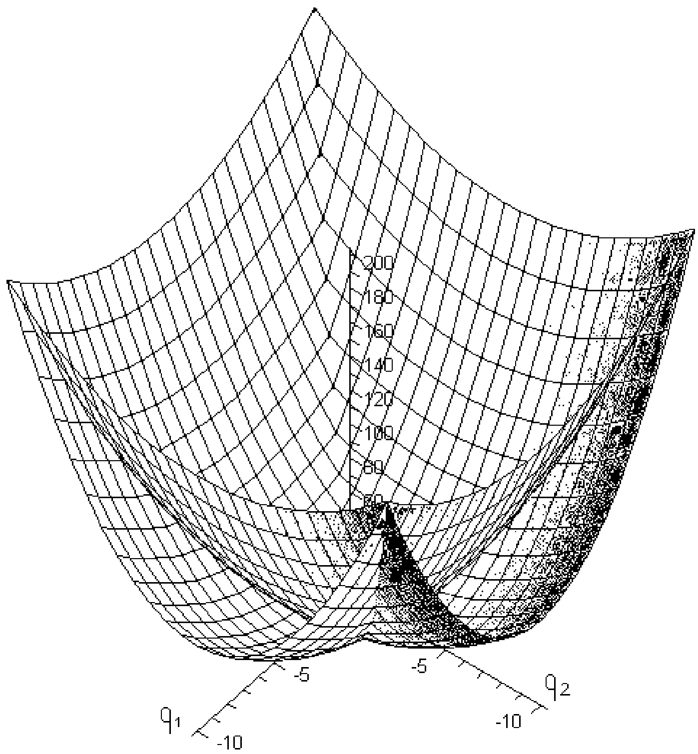


Рис. 1

Графиком функции $J_i(U^e, q_0)$ (в зависимости от начальных значений q_{10}, q_{20}) является "кусок"эллиптического параболоида, "вырезанный"первым октантом, т.к. $q_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2)$ (рис. 1).

Список литературы

[1] Жуковский В.И., Золотарев В.В. *Равновесие по Нэшу в многошаговой игре* // Spectral and Evolution Problems – 2009. – Vol.19.– P.50-55.

Высокос М.И., 142600, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Шулайкиной, 2, филиал ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности" в г. Орехово-Зуево

Жуковский В.И., 142600, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Шулайкиной, 2, филиал ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности" в г. Орехово-Зуево

E-mail: mvysokos@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.9   MSC2000: 47H04 54C60

Н.Ю. Гликлих

О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СО СВОЙСТВАМИ W-НЕПРЕРЫВНОСТИ

W-непрерывные отображения допускают разрывы первого рода на расстояние не более $w > 0$. В статье изучаются w-непрерывные и w-полуненепрерывные сверху и снизу многозначные отображения и взаимосвязи между ними. Доказаны теоремы о существовании их w-неподвижных точек.

W-continuous mappings permit discontinuities of first kind at the distance no greater than $w > 0$. In the paper the w-continuoius and w-upper and lower semicontinuous set-valued mappings are investigated as well as interrelations between them. Some theorems on existence of their w-fixed points are proved.

Введение

В работе [1] И. Булой было введено понятие w-непрерывного однозначного отображения и показано, что для w-непрерывного отображения, переводящего в себя выпуклый компакт, и любого $w' > w$ существует точка, находящаяся на расстоянии не более $2w'$ от своего образа.

Затем в работе [2] И. Була описала и исследовала w-полунепрерывные сверху многозначные отображения на основе подхода, аналогичного конструкции А. Филиппова перехода от разрывных однозначных отображений к полунепрерывным сверху многозначным.

В настоящей статье введены и исследованы w-непрерывные по метрике Хаусдорфа многозначные отображения и для таких отображений доказаны аналоги основных утверждений из [1], в частности, получены утверждения о существовании w-неподвижных точек для w-непрерывных многозначных отображений. Затем рассматриваются w-полунепрерывные сверху многозначные отображения, для исследования которых развиваем новый – аппроксимативный – подход (альтернативный подходу И. Булы). Отметим, что аппроксимативный подход более удобен при исследовании прикладных задач и его развитие представляет независимый интерес. Далее вводится новое понятие w-полунепрерывного снизу многозначного отображения и доказывается, что многозначное отображение является w-непрерывным в метрике Хаусдорфа тогда и только тогда, когда оно одновременно w-полунепрерывно сверху и снизу.

Предварительные сведения и обозначения из теории многозначных отображений могут быть найдены в [3].

1. W-непрерывные по метрике Хаусдорфа многозначные отображения и их w-неподвижные точки

Пусть X – метрическое пространство. Обозначим $Cb(X)$ совокупность всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Метрику в пространстве X обозначим через ρ. Через h мы обозначаем метрику Хаусдорфа на множестве $Cb(X)$.

Пусть задано многозначное отображение (мультиотображение) $F : D(F) \to Cb(X)$, $D(F) \subset X$.

Определение 1. Пусть $w > 0$ – вещественное число. Мультиотображение F называется w-непрерывным в точке $x_0 \in D(F)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x \in D(F)$ таких, что $\rho(x, x_0) < \delta$ выполнено $h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon + w$.

Определение 2. Мультиотображение F называется w-непрерывным, если оно w-непрерывно в каждой точке $x \in D(F)$.

Определение 3. Мультиотображение $F : D(F) \to Cb(X)$ называется равномерно w-непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in D(F)$ таких, что $\rho(x, y) < \delta$, выполнено $h(F(x), F(y)) < \varepsilon + w$.

Определение 4. Мультиотображение

$$G : A \to Cb(X), \ \ (D(F) \subset A \subset X)$$

называется многозначной μ-аппроксимацией ($\mu > 0$) мультиотображения $F : D(F) \to Cb(X)$, если для любого $x \in D(F)$ выполнено

$$h(F(x), G(x)) < \mu.$$

Для удобства изложения далее мы будем называть многозначные аппроксимации просто аппроксимациями.

Теорема 1. *Пусть A компактное подмножество метрического пространства X. Если $F : A \to Cb(X)$ – w-непрерывное мультиотображение, то F равномерно $2w$-непрерывно.*

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x, y \in A$, для которых $\rho(x, y) < \delta$ и при этом $h(F(x), F(y)) > \varepsilon_0 + 2w$. Выберем последовательность $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют последовательности $(x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N}$, где $x_n, y_n \in A$ такие, что $\rho(x_n, y_n) < \delta_n$ и при этом $h(F(x_n), F(y_n)) > \varepsilon_0 + 2w$. Так как A – компакт, то существует подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(x_n)_{n\in N}$, которая сходится к точке $x_0 \in A$; аналогично существует подпоследовательность $(y_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(y_n)_{n\in N}$, сходящаяся к той же точке $x_0 \in A$, поскольку

$$\rho(y_{n_k}, x_0) \le \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho((x_{n_k}, x_0) <$$

$$< \delta_{n_k} + \rho(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Возьмем $\varepsilon \le \varepsilon_0/2$. Из w-непрерывности мультиотображения F в точке x_0 следует, что

$$h(F(x_{n_k}), F(x_0)) < \varepsilon + w \quad \text{и} \quad h(F(y_{n_k}), F(x_0)) < \varepsilon + w,$$

поэтому при $k \to \infty$ получаем

$$h(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \le h(F(x_{n_k}), F(x_0)) + h(F(x_0), F(y_{n_k})) <$$

$$< 2\varepsilon + 2w \le \varepsilon_0 + 2w$$

Но по построению последовательностей $(x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N}$ имеем

$$h(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \ge \varepsilon_0 + 2w,$$

что и дает искомое противоречие.

Определение 5. Пусть G – открытое подмножество пространства X. Открытое покрытие $U = \{U_\mu\}, \mu \in M$ множества G называется каноническим относительно X, если выполнены следующие два условия:

1) U – локально конечно, то есть для любого $a \in G$ существует окрестность V точки a такая, что $V \bigcap U_\mu \ne \emptyset$ не более чем для некоторого конечного числа $\mu \in M$;

2) Для каждой точки $a \in X \backslash G$ и для каждой окрестности $V \subset X$ точки a существует окрестность $W \subset X$ точки a такая, что из того что $U_\mu \bigcap W \ne \emptyset$ следует $U_\mu \subset V$.

Известна теорема о покрытии (см., например, [4]), которая утверждает, что если X – метрическое пространство, то для любого открытого подмножества $G \subset X$ существует каноническое покрытие G относительно X.

Теорема 2. *Предположим, что X – линейное нормированное пространство. Пусть множество $A \subset X$ – компактно и мультиотображение $F : A \to Cb(X)$ равномерно w-непрерывно. Тогда для любого $w' > w$ существует непрерывная по метрике Хаусдорфа w'-аппроксимация $\overline{F}$ мультиотображения F на множестве A.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon' > 0$ так, чтобы неравенство $w + \varepsilon' \leq w'$ сохранялось. Из равномерной w-непрерывности мультиотображения F следует что существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in A$, для которых $\rho(x, y) < \delta$ выполняется неравенство $h(F(x), F(y)) < \varepsilon' + w$. Так как A компактно, то существует его конечная γ-сеть для каждого $\gamma > 0$. Построим $\gamma = \delta/2$ – сеть $M_\delta = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ в множестве A. Таким образом $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \delta/2)$.

Из теоремы о покрытии следует, что существует каноническое покрытие $\{G_\mu\}, \mu \in M$ множества $X \backslash M_\delta$. В каждом множестве G_μ выберем точку x_μ и зададим точку $a_\mu \in M_\delta$ так, чтобы выполнялось неравенство $\rho(x_\mu, a_\mu) < 2\rho(x_\mu, M_\delta)$. В точке $x \in X \backslash M_\delta$ числовые функции

$$\tau_\mu(x) = \frac{\rho(x, X \backslash G_\mu)}{\sum\limits_{\mu' \in M} \rho(x, X \backslash G_{\mu'})}$$

принимают положительные значения только для конечного числа индексов $\mu \in M$. Каждая точка $x \in X \backslash M_\delta$ принадлежит по крайней мере одному и не более чем конечному числу множеств G_μ ($\{G_\mu\}$ локально конечно). Таким образом сумма в знаменателе определена и строго положительна, и мы получаем отображение $\tau_\mu : X \backslash M_\delta \to R$. Ясно, что $\tau_\mu(x) \geq 0$, и

$$\sum_{\mu \in M} \tau_\mu(x) = \sum_{\mu \in M} \frac{\rho(x, X \backslash G_\mu)}{\sum\limits_{\mu' \in M} \rho(x, X \backslash G_{\mu'})} = \frac{\sum\limits_{\mu \in M} \rho(x, X \backslash G_\mu)}{\sum\limits_{\mu' \in M} \rho(x, X \backslash G_{\mu'})} = 1,$$

$$\forall x \in X \backslash M_\delta.$$

Более того, $\tau_\mu > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in G_\mu$.

Так как покрытие G_μ локально конечно для любого $x_0 \in X \backslash M_\delta$, то существует окрестность $U_0 \subset X \backslash M_\delta$ такая, что только для конечного числа индексов $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n$ выполнено условие $U_0 \bigcap G_\mu \neq \emptyset$. Поэтому для любой точки $x \in U_0$ имеем

$$\tau_\mu(x) = \frac{\rho(x, X \backslash G_\mu)}{\rho(x, X \backslash G_{\mu_0}) + ... + \rho(x, X \backslash G_{\mu_n})}.$$

Таким образом, отображение τ_μ непрерывно.

Теперь определим $\overline{F} : X \to Cb(X)$ следующим образом

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M_\delta \\ \sum\limits_{\mu \in M} \tau_\mu(x) F(a_\mu), & x \in X \backslash M_\delta. \end{cases}$$

Это мультиотображение является продолжением мультиотображения $F : M_\delta \to Cb(X)$ на все пространство X и при этом $\overline{F}(X) \subset conv F(M_\delta) \subset conv F(A)$.

Теперь покажем, что $\overline{F}$ является w'-аппроксимацией мультиотображения F на множестве A. Выберем произвольную точку $x \in A$. Если $x \in M_\delta$, тогда $h(\overline{F}(x), F(x)) = 0 \leq w'$. Если же $x \notin M_\delta$, тогда $x \in A \backslash M_\delta$ или $x \in X \backslash M_\delta$. Рассмотрим открытый шар $K(x, \delta/n)$ для некоторого фиксированного $n \in N$. Покрытие $\{G_\mu\}$ является каноническим для пространства $X \backslash M_\delta$, следовательно существует окрестность $U_0 \subset X \backslash M_\delta$ точки x такая, что $U_0 \subset K(x, \delta/n)$ и из того, что $U_0 \bigcap G_\mu \neq \emptyset$ следует $G_\mu \subset K(x, \delta/n)$.

Из того, что $x_\mu \in G_\mu$, можно оценить расстояние между x и a_μ

$$\rho(x, a_\mu) \leq \rho(x, x_\mu) + \rho(x_\mu, a_\mu) < \frac{1}{n}\delta + 2\frac{\delta}{2} \leq \delta + \frac{1}{n}\delta.$$

Из того, что $x \in \bigcup_{i=1}^n B(a_i; \delta/2)$ и

$$x_\mu \in G_\mu \subset K(x, \delta/n) \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i; \delta/2) \subset A,$$

следует, что существует $a \in M_\delta$ такое, что $\rho(x_\mu; a) \leq \delta/2$, т.е., что $\rho(x_\mu, M_\delta) \leq \delta/2$.

Если $n \to \infty$, то можем оценить: $\rho(x, a_\mu) < \delta$. Так как $\{G_\mu\}$ – локально конечное покрытие, то в окрестности U_0 точки x существует конечное число множеств $G_{\mu_1}, ..., G_{\mu_n}$. Из этого следует, что $\tau_{\mu_i}(x) > 0, i = 1, 2, ..., n$ и $\tau_\mu(x) = 0$ для любого другого μ. Таким образом

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i}(x) F(a_{\mu_i}), \tau_{\mu_i}(x) > 0, i = 1, 2, ..., n,$$

и из определения $\tau_{\mu_i}(x)$ следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i}(x) = 1$. Так как $\rho(x, a_{\mu_i}) < \delta$, получаем $h(F(x), F(a_{\mu_i})) < \varepsilon' + w$, а учитывая, что X – линейное нормированное пространство

$$h(\overline{F}(x), F(x)) = h(\sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i}), F(x))$$

$$= max\{\rho_*(\sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i}), F(x)), \rho_*(F(x), \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i}))\}$$

$$= max\{ \sup_{c_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i})} \rho(c_i, F(x)), \sup_{d \in F(x)} \rho(d, \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i}))\}$$

$$= max\{ \sup_{c_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i})} \inf_{d \in F(x)} \|c_i - d\|, \sup_{d \in F(x)} \inf_{c_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} F(a_{\mu_i}))} \|c_i - d\|\}$$

$$= max\{ \sup_{c_i \in F(a_{\mu_i})} \inf_{d \in F(x)} \| \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} c_i - d\|,$$

$$\sup_{d \in F(x)} \inf_{c_i \in F(a_{\mu_i}))} \| \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} c_i - d\|\}$$

$$= max\{ \sup_{c_i \in F(a_{\mu_i})} \inf_{d \in F(x)} \| \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} c_i - \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} d\|,$$

$$\sup_{d \in F(x)} \inf_{c_i \in F(a_{\mu_i}))} \| \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} c_i - \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} d\|\}$$

$$\leq max\{ \sup_{c_i \in F(a_{\mu_i})} \inf_{d \in F(x)} \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} \|c_i - d\|, \sup_{d \in F(x)} \inf_{c_i \in F(a_{\mu_i}))} \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} \|c_i - d\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} max\{ \sup_{c_i \in F(a_{\mu_i})} \inf_{d \in F(x)} \|c_i - d\|, \sup_{d \in F(x)} \inf_{c_i \in F(a_{\mu_i}))} \|c_i - d\|\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} h(F(a_{\mu_i}), F(x))) < \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} (\varepsilon' + w)$$

$$= (\varepsilon' + w) \sum_{i=1}^{n} \tau_{\mu_i} = \varepsilon' + w \leq w'.$$

Получаем $h(\overline{F}(x), F(x)) \leq w'$.

Замечание 1. В условиях Теоремы 2, если мультиотображение F имеет выпуклые значения, то и мультиотображение $\overline{F}$ также имеет выпуклые значения. Это вытекает из конструкции мультиотображения $\overline{F}$ и из того факта, что выпуклая линейная комбинация выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Теорема 3. *Пусть K – непустое компактное и выпуклое подмножество линейного нормированного пространства X. Для любого w-непрерывного многозначного отображения $F : K \to Cb(K)$ с выпуклыми значениями и для любого $w' > w$ существует точка $x^* \in K$ такая, что $\rho(x^*, F(x^*)) \leq 2w'$.*

Доказательство. Так как множество K компактно, то w-непрерывное мультиотображение F по Теореме 1 является $2w$-равномерно непрерывным. Согласно Теореме 2 для $2w$-равномерно непрерывного многозначного отображения при $w' > w$ существует $2w'$-аппроксимация $\overline{F}$. Мультиотображение $\overline{F}$ непрерывно и $\overline{F} : K \to Cb(K)$, а так как K – выпуклое множество, то $\overline{F}(K) \subset convF(K) \subset K$. Как указано выше $\overline{F}$ имеет выпуклые значения. Следовательно, по теореме Гликсберга-Ки Фана о неподвижной точке (см. [3]) существует точка $x^* \in K$ такая, что $x^* \in \overline{F}(x^*)$. Из определения аппроксимации следует, что $\rho(x^*, F(x^*)) \leq 2w'$.

Определение 6. Назовем точку $x \in X$ w-неподвижной точкой многозначного отображения F, если $\rho(x, F(X)) < w$.

Таким образом, Теорема 2 утверждает существование $2w'$-неподвижной точки.

2. Аппроксимативный подход к w-полунепрерывным сверху многозначным отображениям

Пусть (X, ρ) и (Y, σ) метрические пространства и $F : X \to C(Y)$ – многозначное отображение. Метрику в пространстве X обозначим через ρ, а в пространстве Y – через σ.

Определение 7. Пусть задано $w > 0$. Многозначное отображение F называется w-полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in X$ такого, что $\rho(x_0, x) < \delta$, выполнено $F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x_0))$.

Определение 8. Многозначное отображение F назовем w-полунепрерывным сверху, если оно w-полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Теорема 4. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и Y – конечномерное евклидово пространство. Для всякого w-полунепрерывного сверху многозначного отображения $F : X \to Kv(Y)$ (то есть, имеющего выпуклые компактные значения) и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_{\varepsilon+w} : X \to Y$ такое, что:*

(i) для каждого $x \in X$ найдется $x' \in X$ такое, что $\rho(x, x') < \varepsilon + w$ и

$$f_{\varepsilon+w}(x) \cup F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x'));$$

(ii) $f_{\varepsilon+w}(X) \subset coF(X)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. для каждого $x \in X$ найдется $\delta(x) \in (0, w + \varepsilon)$ такое, что $F(B_{\delta(x)}(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x))$. Для $\eta(x) = \frac{1}{4}\delta(x)$ рассмотрим покрытие $\{V_j\}_{j\in J}$. Пусть $\{p_j\}_{j\in J}$ – соответствующее разбиение единицы.

Выбирая для каждого индекса $j \in J$ произвольную точку $y_j \in F(V_j)$, определим отображение $f_{\varepsilon+w} : X \to Y$ равенством

$$f_{\varepsilon+w}(x) = \sum_{j\in J} p_j(x) y_j$$

Отображение f_ε является искомым. Действительно, пусть $x \in X$ принадлежит всем членам семейства $\{V_j\}_{j=1}^n$ из покрытия $\{V_j\}_{j\in J}$. Каждое V_j, $j = 1, .., n$ вписано в некоторый шар $B_{\eta(x_j)}(x_j)$ поэтому $x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_{\eta(x_j)}(x_j)$. Пусть $k, 1 \leq k \leq n$, таково, что $\eta_k = \max_{1\leq j\leq n}(\eta(x_j))$. Возьмем $x' = x_k$, тогда $x_j \in B_{\eta_k}(x)$ и, следовательно, $x_j \in B_{2\eta_k}(x')$ для всех $j = 1, .., n$. Тогда $B_{\eta(x_j)}(x_j) \subset B_{4\eta_k}(x'), j = 1, ..n$. Но тогда мы получаем

$$y_j \in F(V_j) \subset F(B_{\eta(x_j)}(x_j)) \subset F(B_{4\eta k}(x')) \subset U_{\varepsilon w+}(F(x'))$$

для всех $j = 1, .., n$, а так как множество $U_{\varepsilon+w}F(x'))$ выпукло, то $f_{\varepsilon+w}(x) \in U_{\varepsilon+w}(F(X'))$. Поскольку $x \in V_j, j = 1, .., n$, мы получаем также, что $F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x'))$.

Определение 9. Непрерывное однозначное отображение $f_{\varepsilon+w}$, существование которого доказано в предыдущей теореме, назовем $(\varepsilon + w)$-аппроксимацией многозначного отображения F.

Применим $(\varepsilon + w)$-аппроксимации к исследованию w-неподвижных точек w-полунепрерывных сверху многозначных отображений.

Теорема 5. *Пусть M – непустое, компактное и выпуклое подмножество конечномерного линейного пространства X. Для любого w-полунепрерывного сверху многозначного отображения $F : M \to Kv(M)$ с выпуклыми значениями и для любого $w' > w$ существует $3w'$-неподвижная точка $x^* \in K$.*

Доказательство. По предыдущей теореме для отображения F найдется отображение $f_{\varepsilon+w}$ такое, что для каждого $x \in X$ существует $x' \in X$ такой, что $\rho x(x, x') < \varepsilon + w$ и $f_{\varepsilon+w}(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x'))$. Отображение $f_{\varepsilon+w}$ - непрерывное и $f_{\varepsilon+w} : K \to K$, следовательно по теореме Брауэра существует неподвижная точка x_0 такая, что $f_{\varepsilon+w}(x_0) = x_0$.

Рассмотрим последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$ и соответствующую последовательность функций $f_{\varepsilon_k+w}(x)$. Для каждого ε_k найдется неподвижная точка x_k такая, что

$$f_{\varepsilon_k+w}(x_k) = x_k$$

и существует x'_k такой, что $\rho(x_k, x'_k) < \varepsilon_k + w$ и

$$x_k = f_{\varepsilon_k+w}(x_k) \subset U_{\varepsilon_k+w}(F(x'_k)).$$

Рассмотрим полученную последовательность точек $\{x_k\}$. Так как K - компакт, можем без ограничения общности считать, что эта последовательность сходится. Пусть $x_k \to x^*$. Тогда существует точка $x^{*'}$ такая, что $\rho(x^*, x^{*'}) < w$ и $x^* \subset U_w(F(x^{*'}))$, то есть $x^{*'} \in U_{3w'}(F(x^{*'}))$ или $\rho(x^{*'}, F(x^{*'})) < 3w'$. То есть точка $x^{*'}$ является искомой.

3. W-непрерывные снизу многозначные отображения и критерий w-непрерывности по метрике Хаусдорфа.

Пусть X и Y – метрические пространства. Рассмотрим многозначное отображение $F : X \multimap Y$ с компактными значениями. Для точки $y \in Y$ обозначим через $U_r(y)$ окрестность точки y радиуса r.. Метрику в пространстве X обозначим через ρ, а в пространстве Y – через σ. Метрика Хаусдорфа на множестве непустых компактных подмножеств в пространстве Y обозначается через h.

Введем новое

Определение 10. Пусть задано $w > 0$. Назовем многозначное отображение F w-полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in X$ такого, что $\rho(x_0, x) < \delta$, выполнено $F(x_0) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x))$.

Теорема 6. *Многозначное отображение w-непрерывно в метрике Хаусдорфа в точке x_0, тогда и только тогда, когда оно w-полунепрерывно сверху и w-полунепрерывно снизу в этой точке.*

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть отображение F - w-полунепрерывно сверху и w-полунепрерывно снизу, то есть, выполнены следующие условия:

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x : \rho(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x_0)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x : \rho(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow F(x_0) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x)$$

Выберем $\delta = max\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $x : \rho(x, x_0) < \delta$ выполнены оба этих условия.

Требуется доказать, что $h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon + w$.

Так как $F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x_0)$, то $\sigma(a, F(x_0)) < \varepsilon + w$ для всех $a \in F(x)$, значит $\sigma_*(F(x), F(x_0)) = \sup\limits_{a \in F(x)} \sigma(a, F(x_0)) < \varepsilon + w$.

Аналогично, так как $F(x_0) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x)$, то $\sigma(b, F(x)) < \varepsilon + w$ для всех $b \in F(x_0)$, значит $\sigma_*(F(x_0), F(x)) = \sup\limits_{b \in F(x_0)} \sigma(b, F(x)) < \varepsilon + w$.

Следовательно,

$$h(F(x), F(x_0)) = max\{\sigma_*(F(x), F(x_0)), \sigma_*(F(x_0), F(x)) < \varepsilon + w.$$

2. Пусть отображение является w-непрерывным в метрике Хаусдорфа в точке x_0. Докажем, что оно w-полунепрерывно сверху и w-полунепрерывно снизу.

Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению непрерывности в метрике Хаусдорфа существует $\delta > 0$ такое, что из $\rho(x, x_0) < \delta$ следует

$$h(F(x), F(x_0)) = max\{\sigma_*(F(x), F(x_0)), \sigma_*(F(x_0), F(x)) < \varepsilon + w.$$

Следовательно,

$$\sigma_*(F(x), F(x_0)) < \varepsilon + w \Rightarrow$$
$$\forall a \in F(x)[\sigma(a, F(x_0)) < \varepsilon + w] \Rightarrow$$
$$F(x) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x_0)),$$

то есть отображение является w-полунепрерывным сверху.

Аналогично,

$$\sigma_*(F(x_0), F(x)) < \varepsilon + w \Rightarrow$$
$$\forall b \in F(x_0)[\sigma(b, F(x)) < \varepsilon + w] \Rightarrow$$
$$F(x_0) \subset U_{\varepsilon+w}(F(x))$$

то есть отображение является w-полунепрерывным снизу.

Список литературы

[1] Bula I. *On the stability of the Bohl-Brouwer-Schauder theorem* // Nonlinear Anal.: TMA, 1996.- Vol. 26, No. 11.- P. 1859-1868.

[2] Bula I. *W-upper semicontinuous multivalued mappings and Kakutani theorem* // Fifth Symposium on Nonlinear Analysis, Poland, Torun, 10-14 IX 2007.- Torun: J.Schauder Center for Nonlinear Studies, N. Copernicus Univ.- 2007.- P.11.

[3] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис О.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*// М.: КомКнига, 2005.- 216 с.

[4] Борсук К. *Теория ретрактов* // М.: Мир, 1971.- 291 с.

Гликлих Нина Юрьевна, Россия, Воронеж, Воронежский государственный университет

E-mail: nin-gl@yandex.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 519.233.22, 519.233.24 MSC2000: 62F10, 62G32

С.И. Гуров

О ВЕРОЯТНОСТИ 0-СОБЫТИЯ

В работе предлагаются и обосновываются ненулевая точечная и интервальная оценки вероятности 0-события (ни разу не наблюдавшегося в серии испытаний по схеме Бернулли). Для случая 0-события даётся классификация выборок по объёму.

Nonzero point and interval probability estimates for an 0-event (an event never before observed in a Bernoulli tests series) are proposed and validated in the paper. A classification of samples by volume for the case of a 0-event is provided.

Введение. Постановка проблемы

Рассматривается оценивание неслучайной, но неизвестной вероятности p осуществления некоторого случайного события X в единичном испытании. При этом в $n>0$ испытаниях по схеме Бернулли случайная величина числа успехов $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ будет иметь биномиальное распределение

$$Bi_m(n,\, p) \;=\; \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}\,, \quad p \in \Theta\,,$$

где $\Theta = (0,1)$ — пространство изменения параметра p (открытый одномерный интервал).

Точечная оценка $\widehat{p}_{ml}$ максимального правдоподобия величины p даётся «классической формулой» (последнее равенство) для вычисления вероятностей, предложенной ещё в XVII в:

$$\widehat{p}_{ml} \;=\; \arg\max_{p \,\in\, \overline{\Theta}} L(p,\, x) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; \frac{m}{n}\,. \tag{1}$$

Здесь

- $L(p,\, x) = L(p \mid m,\, n) = p^m(1-p)^{n-m}$ — функция правдоподобия для биномиальной статистической модели, где $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ — выборка, полученная в результате проведения n элементарных независимых экспериментов по наблюдению события X, $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, причём в x имеется m значений 1 и $n-m$ значений 0 (как обычно, 1 означает наблюдение, а 0 — непоявление события в данном эксперименте);
- $\overline{\Theta} = [0,1]$ — замыкание множества Θ.

Данная оценка несмещенной, эффективной и состоятельной. Несмещенная функция оценки её дисперсии (см. [22, Пример 17.9]) есть

$$\frac{m\,(n-m)}{n^3}\,. \tag{2}$$

При $m=0$ говорят, что имеет место *0-событие* (см., например, [20, п. 4.5.4]). Точнее, под 0-событием мы будем понимать само случайное событие X, ни разу не наблюдавшееся в серии экспериментов по схеме Бернулли (а не факт получения нулевой выборки, как в [14]). В том случае формула (1) даёт нулевую точечную оценку вероятности наблюдения X, а формула (2) — нулевое оценочное значение её дисперсии. Всё это приводит к тому, что на практике оценка $\widehat{p}=0$ часто неприемлема.

В данной работе, являющийся развитием [14], предлагается и обосновывается ненулевая точечная оценка 0-события.

1. Известные оценки

1.1. **Частотный подход. Доверительное оценивание.** В случае 0-события классические методы частотного подхода к решению задач математической статистики [5, с. 107, Таблица 5.2], [20, п. 4.5.4, (4.26)] определяют нижнюю границу $p^-(n)$ доверительного интервала при коэффициенте доверия η как нулевую, а верхнюю $p^+(n)$ — как решение (относительно x) уравнения

$$I_x(1,n) \,=\, \eta\,.$$

Здесь $I_x(\cdot,\cdot)$ — отношение неполной B(бетта)-функции Эйлера к полной B-функции с соответствующими параметрами:

$$I_x(a,b) \,=\, \frac{1}{B(a,b)} \int\limits_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\,,$$

$$B(a,b) \,=\, \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \,=\, \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция). Для практических целей обычно полагают $\eta = 0.95$; другие значения (0.99 или 0.90) используются значительно реже, в зависимости от конкретной практической ситуации. Таким образом, имеем

$$I_x(1,n) \,=\, n\int\limits_0^x (1-t)^{n-1}dt \,=\, 1-(1-x)^n \,=\, \eta\,,$$

откуда

$$p^+(n) \,=\, 1-\sqrt[n]{1-\eta}\,. \tag{3}$$

Так, при $\eta = 0.95$ получаем $p^+(10) = 0,2589$ и $p^+(100) = 0,0295$.Для $n > 50$ можно считать $p^+(n) \approx 3/n$.

На практике использование $p^+(n)$ в качестве точечной оценки p будет оправданным, если наступление события X влечёт серьёзные последствия, требующих соответствующей «подстраховки» (например, при оценке различных рисков). В противном случае такая, дающая завышенное значение вероятности, оценка приводит к тому, что с близкой к 1 достоверностью будем иметь $p \leqslant p^+$. Однако от точечной оценки не требуется, чтобы отклонение её значения от истинного было односторонним почти всегда.

1.2. **Бейесовский подход.** При использования бейесовского подхода к решению статистических задач встаёт вопрос о конкретизации априорного распределения.

Будем рассматривать наиболее интересную ситуацию отсутствия результатов аналогичных экспериментов, проводимых ранее, т. е. когда использование того или иного метода восстановления априорного распределения на их основе (эмпирический бейесовский подход) невозможно. В этих случаях обычно прибегают к закону недостаточного основания Лапласа, который устанавливает, что если ничего не известно о параметре и он изменяется на конечном интервале, то в качестве априорного распределения принимают равномерное.

Априорное распределение будем, как принято, выбирать из семейства сопряженных априорных распределений [17] относительно биномиальной статистической модели, которое составляют плотности B-распределений (или распределений Бернулли)

$$Be_p(a,\, b) \,=\, \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1} \tag{4}$$

с параметрами $a,\, b > 0$. Равномерное распределение $U(0,1)$ на интервале $(0,1)$ есть B-распределение с параметрами $a = b = 1$. Поскольку функция правдоподобия 0-события есть $L(p \mid 0,\, n) \,=\, (1-p)^n$, то плотность вероятности апостериорного распределения будет $f(p)_{a\_post} \,=\, Be_p(1,\, n{+}1) \,=\, (n{+}1)(1{-}p)^n \propto L(p \mid 0,\, n){\cdot}U(0,1)$. Математическое ожидание полученного апостериорного распределения, как известно, есть

$$\mu \,=\, (n+1)\int\limits_0^1 p\,(1-p)^n\,dp \,=\, \frac{I_1(2,n+1)}{n+2} \,=\, \frac{1}{n+2}\,, \qquad (5)$$

а медиана — $med = 1 - 1/\sqrt[n]{2}$.

Бейесовскую точечную оценку определяемой величины обычно полагают равной математическому ожиданию или медиане апостериорного распределения, как доставляющие минимумы среднеквадратических потерь и среднего отклонения соответственно. Таким образом, имеем две оценки

$$\widehat{p}_{B^U_\mu}(n) \,=\, \frac{1}{n+2} \quad \text{и} \quad \widehat{p}_{B^U_{med}}(n) \,=\, 1 - \sqrt[n]{0.5}\,. \qquad (6)$$

Оценка $\widehat{p}_{B^U_\mu}(n)$ отражает т.н. закон следования Лапласа [29]. Поскольку $1 - \sqrt[n]{0.5} \to \ln 2/n$ при $n \to \infty$, то $\widehat{p}_{B_{med}}(n) \simeq 1/(1,443\,n)$. Отметим, что оценка по медиане более робастна [28]. Ценным качеством бейесовских оценок является их независимость от дополнительного понятия доверительной вероятности.

В любом случае ясно, что для не слишком малых n обе приведённые оценки являются завышенными, поскольку основаны на предположении о равномерном априорном распределении p на интервале $(0,1)$, мало, при данном условии, согласующимся с фактом 0-события.

2. Оценка $\widehat{p}_0$

0-событие имеет место, кода в результате проведения n элементарных экспериментов по наблюдению события X получают *0-выборку* $x^0 \,=\, (0,\,\ldots\,,0)$ длины $n \geqslant 1$. Считаем, что любая другая информация о событии X отсутствует и не может быть дополнительно получена.

Далее для оценки вероятности p появления X в единичном эксперименте будет использоваться понятие коэффициента доверия $\eta \in (0,1)$. Пусть $\widehat{p}$ — выбранная оценка вероятности p события X, а $\mathsf{P}(n,\widehat{p})$ — вероятность некоторого события, связанного с наблюдённым 0-событием, и на основании которого делаются те или иные выводы, относительно X. Будем считать значение $\mathsf{P} \,=\, \mathsf{P}(n,\widehat{p})$ превосходящим выбранный коэффициент доверия:

$$\mathsf{P} \,\geqslant\, \eta\,. \qquad (7)$$

При этом будет иметь место непривычная зависимость $\mathsf{P}(n,\widehat{p}) \,\to\, 1$ при $\widehat{p} \,\to\, 0$, что связано с нулевой оценкой p по (1). Поэтому здесь коэффициент доверия (не будем менять терминологию) выражает не степень достоверности некоторого события, а степень «уступки», на которую мы можем пойти для получения оценки, уклоняющийся от теоретически истинного, но неприемлемого для нас значения. В силу этого, интерес будет представлять оценка, максимально возможная при данных предположениях (наиболее удалённая от 0).

Построим две оценки вероятности 0-события, свободные от указанных выше недостатков и основанные на разных подходах.

2.1. **Оценка** $\widehat{p}_\eta$**.** При истинном значении оцениваемой вероятности p вероятность P осуществившегося 0-события есть $\mathsf{P} \,=\, (1-p)^n$. По (7) полагаем

$$\mathsf{P} \,=\, (1-p)^n \,\geqslant\, \eta\,,$$

откуда

$$p \,\leqslant\, \widehat{p}_\eta \,=\, 1 - \sqrt[n]{\eta} \,\simeq\, \frac{\ln(1/\eta)}{n}\,.$$

2.2. **Оценка $\widehat{p}_r$.** Мы будем говорить, что некоторое случайное событие X, наблюдаемое в единичном эксперименте по схеме Бернулли с вероятностью $p \in (0,1)$, определяет случайный процесс $\mathfrak{X}_p$ с дискретным временем, который и порождает выборку x^0 как реализацию этого процесса.

Идея получения оценки $\widehat{p}_r(n)$ состоит в замене рассмотрения реализации x^0 процесса $\mathfrak{X}_p$ некоторой другой его реализацией x^1, которая содержит хотя бы одно значение 1.

Построим требуемую реализацию x^1. Рассмотрим процесс $\mathfrak{X}_q$ определяемый вероятностью q наблюдения события X в единичном эксперименте по схеме Бернулли и x^1 — реализация указанного процесса. Пусть объём выборки x^1 есть $N \geqslant 1$, из которых $M \geqslant 1$ значений нулевые. Далее воспользуемся оценкой (1). Определим допустимые значения M и N из условия достоверности равенства $p = q$ не менее η.

Для решения поставленной задачи воспользуемся точным критерием Фишера сравнения вероятностей, лежащих в основе двух биномиальных распределений [20, п. 4.6.7]. Метод основан на анализе т.н. таблиц 2×2. В нашем случае имеем таблицу

0	n	n
M	N-M	N
M	N-M+n	N+n

(8)

Применение данного критерия вызвано тем, что использования общего критерия анализа 2×2 таблиц возможно лишь при достаточно больших значениях элементов таблицы, что в нашем случае заведомо не имеет места, поскольку одно из таких значений нулевое.

Вероятность $\mathsf{P} = \mathsf{P}(N, M; n)$ того, что таблица порождена одним значением вероятности, будет равна

$$\mathsf{P} = \frac{n!\,N!\,M!\,(N-M+n)!}{(N+n)!} \cdot \frac{1}{n!\,M!\,(N-M)!} = \frac{N!\,(N-M+n)!}{(N-M)!\,(N+n)!} = $$

$$= \frac{\binom{N}{M}}{\binom{N+n}{M}} = \frac{\binom{N+n-M}{n}}{\binom{N+n}{n}}. \qquad (9)$$

Известна (см., например, [8]) асимптотика

$$\frac{\binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}} \sim \exp\Big\{-\frac{s\,k}{n} - \frac{s^2k + sk^2}{2\,n^2}\Big\},$$

справедливая при $s + k = o(n^{3/4})$ и $n \to \infty$. В нашем случае это даёт

$$\mathsf{P} = \frac{\binom{(N+n)-n}{M}}{\binom{N+n}{M}} \sim \exp\Big\{-\frac{n\,M}{N+n}\Big(1 + \frac{M+n}{N+n}\Big)\Big\}$$

с сохранением условия представления (как легко показать, для $P \to \max$ должно выполняться $M^2 = o(N)$, откуда и $n + M = o((N+n)^{3/2})$ при $N \to \infty$, $n = const$). Тогда по (7) имеем

$$-\frac{n\,M}{N+n}\Big(1 + \frac{M+n}{N+n}\Big) \lesssim \ln\eta\,,$$

а полагая по (1), что $\widehat{p}_r = \dfrac{M}{N}$ и считая $N \gg 1$, получим

$$n\,\widehat{p}_r\,(1 + \widehat{p}_r) \gtrsim \ln\frac{1}{\eta}\,. \qquad (10)$$

Отсюда, пренебрегая величиной $\widehat{p}_r^{\,2}$, окончательно получим $\widehat{p}_r \simeq \dfrac{\ln(1/\eta)}{n} = \widehat{p}_\eta$.

Таким образом обе построенные оценки практически совпадают. Данную оценку обозначим $\widehat{p}_0$:

$$\widehat{p}_0(n) = 1 - \sqrt[n]{\eta} \simeq \frac{\ln(1/\eta)}{n} \simeq \frac{1-\eta^2}{2\,\eta\,n} \simeq \frac{1-\eta}{\eta\,n}\,; \qquad (11)$$

её и предлагается принимать как точечную оценку вероятности 0-события. Приведённые асимптотики (перечисленные в порядке понижения точности с завышением оценки) справедливы для практических значений η и не слишком малых n.

Несколько более грубые рассуждения, основанные на фиксации определённого значения N, приводят, как следствие $\mathsf{P} \to \max$, к

$$M \;=\; 1\,. \tag{12}$$

Тогда $\mathsf{P} \;=\; N/(N+n)$, по (7) имеем

$$N \;=\; \left]\frac{\eta\, n}{1-\eta}\right[\tag{13}$$

и по (1) сразу получаем $p \leqslant \widehat{p} \;=\; M/N \;=\; (1-\eta)/(\eta\, n)$, что совпадает с (11).

Очевидно, для реальных значений η и $n > 3$

$$\widehat{p}_0(n) \;<\; \widehat{p}_{B^U_{med}}(n) \;<\; \widehat{p}_{B^U_{\mu}}(n) \;<\; p^+(n)\,.$$

3. Интервальное согласованное оценивание

Полученная точечная оценка $\widehat{p}_0$ позволяют дать интервальную оценку p на основе принципа согласованности [12, 13]. Данный принцип, основанный идее Э. Лемана [24, Гл. 4, п. 2, Пример 2.7], позволяет в рамках бейесовского подхода конкретизировать априорное распределение оцениваемого параметра. Метод ориентирован именно на малые вероятности событий.

По принципу согласованности априорное распределение выбираться, в частности, из условия совпадения бейесовской и частотной точечных оценок определяемого параметра. При этом получаемое априорное распределение $f_{a\_priori}(p) = Be_p(1, b)$ (где b — некоторый параметр) в большей степени, чем равномерное распределение, согласуется с наблюдённым 0-событием. Далее, апостериорное распределение есть $f_{a\_post}(p) = Be_p(1, b+n)$ и верхняя граница p_c^+ доверительного интервала $(0,\, p_c^+)$ для оцениваемой вероятности p есть решение уравнения

$$I_x(1,\, n+b-1) \;=\; \eta\,.$$

По принципу согласованности, параметр b определяется из условия $\widehat{p} = 1/N = 1/(b{+}n{+}1)$, и, таким образом, $b = N - n - 1$. Тогда уравнение для определения $x = \widehat{p}_c^{\,+}$ принимает вид

$$I_x(1,\, 1/\widehat{p} - 2) \;=\; \eta \quad \text{или} \quad I_x(1,\, N-2) \;=\; \eta \tag{14}$$

и в последнем случае значение N берётся из (13).

Например, при $\eta \;=\; 0.95$ и $n \;=\; 10$ имеем $N \;=\; 190$, $\widehat{p}_0 \;=\; 0.0052$. Уравнение (14) конкретизируется как $I_x(1,\, 188) = 0.95$, откуда по Таблице 5.2 из [5] получим $\widehat{p}_c^{\,+} \approx 0,016$. Для сравнения: классические методы для данных параметров M и N дают доверительный интервал $(0;\, 0,024)$.

4. Случай малой выборки

Предложенная оценка $\widehat{p}_0$ интуитивно кажется слишком заниженной для малых значениях n. Построим оценку $\widehat{p}(n)$ для этого случая.

При совсем малых n факт 0-события не противоречит предположению о достаточно больших значениях вероятности p. Поэтому оправданным представляется следующий подход. Для некоторой N-элементной выборки с M единичными значениями найдём по (9) вероятность $\mathsf{P}(N, M; n)$ того, что таблица (8) порождена одним значением вероятности, осредним оценку M/N в соответствии с введённым вероятностным распределением на выборках, и данное среднее значение

$$\widehat{p}_N(n) \;=\; \frac{\sum\limits_{M=0}^{N} \frac{M}{N} \cdot \mathsf{P}(N, M; n)}{\sum\limits_{M=0}^{N} \mathsf{P}(N, M; n)} \tag{15}$$

будем принимать за искомую оценку для данного $N \geqslant 1$.

Пользуясь, например, методом математической индукции, элементарно показывается, что

$$\sum_{M=0}^{N} \mathsf{P}(N,M;n) \;=\; \sum_{M=0}^{N} \frac{\binom{N}{M}}{\binom{N+n}{M}} \;=\; \sum_{M=0}^{N} \frac{N!\,(N-M+n)!}{(N-M)!\,(N+n!)} \;=\; \frac{N+n+1}{n+1}\,,$$

и знаменатель (15) определён. Для числителя аналогично показывается, что

$$\sum_{M=0}^{N} \frac{M}{N}\cdot P(N,M;n) \;=\; \sum_{M=1}^{N} \frac{M}{N}\cdot \frac{N!\,(N-M+n)!}{(N-M)!\,(N+n!)} \;=\; \frac{N+n+1}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Отсюда

$$\widehat{p}_N(n) \;=\; \frac{1}{n+2} \;=\; \widehat{p}_{B_\mu}(n)$$

(и приятной неожиданностью оказывается независимость $\widehat{p}_N(n)$ от N, освобождая нас от необходимости определять N или брать ещё одно осреднение по его значениям).

Полученный результат заставляет сделать вывод, что при малых значениях n обоснованной точечной оценкой вероятности 0-события является бейесовская оценка по математическому ожиданию при равномерном априорном распределении.

Интересно заметить, что формулу (5) можно проинтерпретировать как вычисление среднего значения вероятности p при распределении $Be_p(1,\, n+1)$, выражающем, в рамках фидуциального фишеровского подхода [3, 4, 34], степень уверенности в равенстве текущего значения p действительному значению вероятности 0-события. Кроме того, элементарно показывается, что при $n \ll N$ справедлива асимптотика

$$\mathsf{P}(N,M;n) \;=\; \frac{\binom{N}{M}}{\binom{N+n}{M}} \;\sim\; \left(1-\frac{M}{N}\right)^n.$$

Таким образом, (15) оказывается дискретным аналогом (5), что и объясняет совпадение оценок $\widehat{p}_N(n)$ и $\widehat{p}_{B_\mu^U}(n)$, а также $\widehat{p}_\eta$ и $\widehat{p}_r$.

При "средних", не слишком малых и не слишком больших n представляется в качестве априорного распределения использовать ступенчатую функцию, учитывающую не все возможные значения p, а лишь те, что с достоверностью η не противоречат предположению о равенстве текущего значения p действительному значению вероятности 0-события:

$$f_{a\_priori}(p) \;=\; \begin{cases} 1/\widehat{p}_\eta, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant \widehat{p}_\eta\,, \\ 0, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

В итоге получаем (ср. с (5)) оценку $\widehat{p}_{B_\eta}(n)$:

$$\widehat{p}_{B_\eta}(n) \;=\; \frac{1}{(n+2)\cdot\widehat{p}_\eta}\, I_{\widehat{p}_\eta}(2, n+1)\,, \qquad \text{где } \widehat{p}_\eta \;=\; 1-\sqrt[n]{\eta}\,. \tag{16}$$

Например, при $\eta = 0.95$ имеем $\widehat{p}_{B_\eta}(10) = 0.0272$ и $\widehat{p}_{B_\eta}(20) = 0.0259$.

Отметим, что значения неполной B-функции для представляющих интерес значений параметров в нашем случае по таблицам (например, [5]) не определяются. При этом возможно использование формулы

$$I_x(2, n+1) \;=\; \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k\, x^k (1-x)^{n+2-k}$$

(где значения слагаемых быстро убывают с ростом k).

5. Когда какую оценку использовать?

Нас мало. Нас, может быть, трое...

Борис Пастернак.

Нас много. Нас, может быть, четверо.

Андрей Вознесенский.

Сразу укажем, что мы не рассматриваем случаи, когда ясны принципы (точнее, желательность более вероятного отклонения) выбора точечной оценки в данной предметной области исследования: здесь всё зависит от того, насколько желательным или нежелательным является появление данного редкого события.

Если указанные принципы отсутствуют, то для ответа на поставленный в заголовке вопрос необходимо определиться, что понимать под «малой выборкой».

Разные авторы по-разному определяют это понятие: выборку считают малой, если её объём не превосходит 200 [21], или 50 [32], или 30 [10], или 10–20 [23], или 10–15 [27], или «меньше расчетного числа, определенного при помощи специальной номограммы достаточно больших чисел» [25], или если наблюдается «факт отсутствия устойчивости информативных свойств и статистических характеристик» [31]. Часто вообще не определяют это понятие. В БСЭ имеется статья «Малые выборки» [26], но в специализированной энциклопедии [7] аналогичной статьи нет.

Наша точка зрения была высказана в [11]: выборка считается малой, если при её обработке методами, основанными на группировке наблюдений и аппроксимационными методами, нельзя достичь заданных точности и достоверности. Для случая 0-события данное положение требуется конкретизировать, а именно, указать, при каких значениях n использовать оценку $\widehat{p}_{B^U_\mu}(n)$, и при каких — $\widehat{p}_0(n)$. Понятно, что абсолютно объективных критериев такого выбора существовать не может. Мы, однако, предложим указанное разбиение, основанное на статистической достоверности результатов.

5.1. **Нижняя граница.** Прежде всего, кажется ясным, что при совсем малых значениях n никаких статистических выводов делать вообще нельзя. Заметим, что при $n < 4$ имеем $\widehat{p}_{B_{med}}(n) < \widehat{p}_{B^U_\mu}(n)$ и обратное отношение при бо́льших n. Указанное значение представляется естественной границей для отделения понятия «малая выборка» от случая недостаточности данных для любых статистических выводов. Таким образом считаем, что при $1 \leqslant n \leqslant 3$ можно только констатировать факт 0-события при данном числе испытаний.

Аналогичный вывод сделан в работе [16]: *Один из основных вопросов математической статистики: какова должна быть минимально необходимая информация для получения требуемой достоверности результата. ... . Если подразумевать под условиями отсутствие каких-либо ограничений по точности конечного результата статистического анализа, то ответ на поставленный вопрос дал Р. Фишер [30, 33]. Минимальное число образцов не может быть меньше 4. В противном случае, неизбежно возникает систематическая ошибка (смещение). Наличие смещения — первый признак отсутствия достаточности статистики [24]. Ряд авторов подтверждал вывод Фишера.* Добавим от себя — ср. с процитированным выше пассажем из [31].

Также при проверке гипотезы о значении отношения ξ наблюдаемых абсолютных частот a и b на основе χ^2-критерия со статистической надёжностью 95% требуется (см., например, [20, (4.33)])

$$\widehat{\chi}^2 \,=\, \frac{(\xi a - b)^2}{\xi(a+b)} \,<\, \chi^2 \,=\, 3.841\,.$$

При определении равенства вероятностей, порождающих выборки как реализации случайных процессов, полагаем $\xi = 1$, что приводит к соотношению $|a - b| < 3.841$. Поскольку применение данного критерия предполагает $0 < a \leqslant b$, вместо 0-события рассматриваем противоположное ему *полное событие*, для которого $b = n$. Таким образом, для того, чтобы с указанной надёжностью считать выборку с a значениями 1 другой реализацией того же случайного процесса, что и породивший нулевую выборку $x^0 = (0, \ldots, 0)$ той же длины, необходимо, чтобы значение $n - a$ не превосходило 3[1]. Таким образом, различие может быть статистически определено лишь при длине выборки $4 \leqslant n$.

5.2. **Верхняя граница.** Верхнюю границу для малой выборки в случае 0-события естественно установить равной N по (13) при $n = 1$. Это значение практически совпадает с

[1]Интересно, что граничное значение 3 (т.н. «бонгартовская тройка») часто возникает в комбинаторных исследованиях на неслучайность событий [6, 18, 19].

условием $\widehat{p}_{B^U_\mu}(n) < 1 - \eta$ для того же значения достоверности η. Меньшие значения n не дают возможности статистически достоверно определить совпадение вероятностей единичных событий, связанных с данными выборками.

При $\eta = 0.95$ для искомой границы получаем значение $n = 19$. Заметим, что оно влечёт $\widehat{p}_{B^U_\mu}(n) \approx 5\%$. Отметим, что на практике значение 5% часто принимают за границу «редкого события» (см., например, [2]).

В результате предлагается следующая классификация 0-выборок по объёму с указанием точечной оценки $\widehat{p}$ вероятности 0-события.

n	Тип 0-выборки, $\widehat{p}$
$1, 2, 3$	никаких оценок дать нельзя
от 4 до 19	«малая» 0-выборка, $\widehat{p} = \widehat{p}_{B^U_\mu}(n)$
более 20	«большая» 0-выборка, $\widehat{p} = \widehat{p}_0(n)$

Резкий скачок значения предложенной оценки при переходе от «малой» выборки к «большой» вызван экстремальностью самого исследуемого понятия: появляется возможность с достаточной достоверностью статистически фиксировать совпадение или несовпадение вероятностей единичных событий, определяющих выборки по схеме Бернулли. В малых выборках осуществление 0-события представляется вполне возможным даже при p, не обязательно близких к 0, в то время как в больших выборках оно с необходимостью означает либо крайне малую величину p, либо вообще невозможность события X.

Автор выражает глубокую признательность Ю.И. Журавлёву за неизменную поддержку и В.Е. Бенингу за ценные консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00405-а, 10-01-00131-а, 10-07-00150-а) и компании *Intel Corporation*.

Список литературы

[1] Surname Name1 Name2 *Title of book* // Publisher – 2007. – V.18, N.2. – c.1362-1392.

[2] Бейли Н. Математика в биологии и медицине. — Электронный ресурс http://www.biometrica.tomsk.ru/beili_2_2.htm

[3] Бернштейн С.Н. *О «доверительных» вероятностях Фишера* /С.Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Том IV. Теория вероятностей и математическая статистика (1911-1946). — М.: Наука, 1964. — С. 386–393.

[4] Большев Л.Н. *Комментарий к работе С.Н. Бернштейна «О "доверительных" вероятностях Фишера»* / С.Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Том IV. Теория вероятностей и математическая статистика (1911-1946). — М.: Наука, 1964. — С. 566–569.

[5] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. *Таблицы математической статистики.* — М.: Наука, 1983.

[6] Бонгард М.М. *Проблема узнавания.* — М.: Наука, 1967.

[7] *Вероятность и математическая статистика.* Энциклопедия. — М.: Научное изд-во Большая Российская энциклопедия, 1999.

[8] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Задачи и упражения по дискретной математике.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[9] Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И. *Малая выборка.* — М.: Статистика, 1978.

[10] Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика.* — М.: Высшая школа, 1977.

[11] Гуров С.И. *Оценка надёжности классифицирующих алгоритмов.* — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002 г.

[12] Гуров С.И. *Принцип согласованности и бейесовское интервальное оценивание* // Таврический вестник информатики и математики, 2003, Вып. 2. — С. 14-27.

[13] Гуров С.И. *Интервальное оценивание на основе принципа согласованности* // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика», № 14 (74), вып. 9, 2008. — С. 77-93.

[14] Гуров С.И. *Оценка вероятности ни разу не наблюдённого события* // Таврический вестник информатики и математики, 2009, Вып. 2. — С. 15–20.

[15] Гуров С.И. *Точечная оценка вероятности 0-события* / Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция. Владимирская обл., г. Суздаль, 21-26 сен-тября 2009 г.: Сборник докладов. — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 22–25.

[16] Гусев А.В., Лидский Э.А., Мироненко О.В. *Малые выборки при оценке работоспособности и надежности электронных компонентов.* Часть I // Chip news — Инженерная микроэлектроника, 2002, № 1, — С. 52–56. (См. также электронный ресурс http://www.chipinfo.ru/literature/chipnews/about.html.)

[17] Де Гроот М. *Оптимальные статистические решения.* — М.: Мир, 1974.

[18] Донской В.И., Башта А.И. *Дискретные модели принятия решений при неполной информации.* — Симферополь: Таврия, 1992.

[19] Закревский А.Д. *Логика распознвания.* — М.: Едиториал УРСС, 2003.

[20] Закс Л. *Статистическое оценивание.* — М.: Статистика, 1976.

[21] Кендал М., Стюарт А. *Теория распределений.* — М.: Наука, 1966.

[22] Кендал М., Стюарт А. *Статистические выводы и связи.* — М.: Наука, 1973.

[23] Кремер Н.Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика.* — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

[24] Леман Э. *Теория точечного оценивания.* — М.: Наука, 1991.

[25] *Методы статистического анализа и обработка малого числа наблюдений при контроле качества и надежности приборов и машин.* — Л.: Изд. ЛДНТП, 1974.

[26] Прохоров Ю. В. *Малая выборка* / БСЭ. — М.: Сов. энциклопедия, 1969–1978.

[27] Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. *Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.* — М.: Наука, 1965.

[28] Смоляк С.А., Титаренко Б.П. *Устойчивые методы оценивания*: (Статистическая обработка неоднородных совкупностей). — М.: Статистика, 1980.

[29] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её прилжения*, т. 1–2. — М.: Мир, 1984.

[30] Фишер Р. *Статистические методы для исследователей.* — М.: Гостехиздат, 1958.

[31] Фурсов В.А. *Идентификация моделей систем формирования изображений по малому числу наблюдений.* — Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 1998.

[32] Шор Я.Б. *Статистические выводы анализа и контроля надежности и качества.* — М.: Сов. радио, 1962.

[33] Fisher R.A. *On the mathematical foundations of theoretical statistics* // Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, 1921, v. 222.

[34] Fisher R.A. *The fiducial argument in statistical inference* // Annals of Eugenics, Vol. 5, 1935. — С. 391–398.

Гуров Сергей Исаевич, Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМиК

E-mail: sgur@cs.msu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2010

УДК 519.833 MSC2000: 27.47.19

В.И. Жуковский, Ю.Н. Житенева

ЗАДАЧА О СОКРАЩЕНИИ РАСХОДОВ НА ВООРУЖЕНИЕ

Предлагается математическая модель возможного варианта задачи о сокращении расходов на вооружение двух конфликтующих стран (в виде бескоалиционной многошаговой позиционной игры двух лиц). Найден явный вид равновесного по Нэшу решения.

In this paper proposed the mathematical model of possible variant for problem about the reduction defence expenditure of two conflicting countries. The model presented in the form of non-cooperative multistep positioning two-player game. In this game the Nash equilibrium is founded in the explicit form.

1. Математическая модель

Рассмотрим некоторую конфликтную ситуацию, в которой могут оказаться две соседние страны (да и не только соседние). Условно их обозначим как 1-я и 2-я страны. Пусть $x_1(k)$ – средства на вооружение, истраченные 1-ой страной к моменту времени $t = k$, а $x_2(k)$ – затраты на вооружение 2-ой страны в это же время.

Ставится задача сокращения затрат на вооружение в обеих странах за два года ($k = 0, 1, 2$) с учетом следующих трех обстоятельств.

Во-первых, первая страна вооружается, опасаясь потенциальной угрозы со стороны второй страны, которая, в свою очередь, зная о росте затрат на вооружение первой страны, также увеличивает свои расходы на вооружение. При этом каждая страна в начале текущего года увеличивает свои затраты пропорционально уровню затрат другой страны. Коэффициенты пропорциональности для 1-ой и 2-ой стран соответственно равны $\alpha = const > 0$ и $\beta = const > 0$. Например, для первой страны это требование означает, что расходы $x_1(k+1) - x_1(k)$ на $(k+1)$-ый год увеличиваются на $\alpha x_2(k)$ по сравнению с k-ым годом и составят

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha x_2(k),\ x_1(0) = x_{10}.$$

Аналогично, для второй страны расходы на вооружение за $(k+1)$-ый год составят

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \beta x_1(k),\ x_2(0) = x_{20}.$$

При этом предполагаем, что начальные значения затрат обеих стран на вооружение $x^0 = (x_{10}, x_{20})$ им известны.

Во-вторых, предполагаем, что чем выше уровень расходов на вооружение страны, тем меньше планируемые затраты на вооружение этой страны в текущем году (с коэффицентом пропорциональности для первой страны $\gamma = const > 0$, для второй $\delta = const > 0$). С учетом предыдущего, расходы на вооружение в $(k+1)$-м году составят для первой страны

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha x_2(k) - \gamma x_1(k) = (1-\gamma)x_1(k) + \alpha x_2(k),$$

для второй страны

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \beta x_1(k) - \delta x_2(k) = (1-\delta)x_2(k) + \beta x_1(k).$$

В-третьих, будем учитывать расходы каждой из стран, связанные с ростом и (или) сокращением ее вооруженности (сюда, например, входят проекты по разработке и созданию новых видов вооружения, захоронение и уничтожение имеющихся боеприпасов, рост или сокращение численности вооруженных сил и т.д.). Обозначим указанные затраты для i-ой страны ($i = 1, 2$) в момент времени $t = k$ ($k = 0, 1$) через u_i. Тогда затраты на вооружение в $(k+1)$-м году составят для первой страны

$$x_1(k+1) = (1-\gamma)x_1(k) + \alpha x_2(k) + u_1,$$

для второй страны

$$x_2(k+1) = \beta x_1(k) + (1-\delta)x_2(k) + u_2.$$

Наконец, будем иметь в виду, что расходы u_i в момент времени $t = k$ зависят от выделенных средств $x_i(k)$, что приводит к использованию позиционных управляющих воздействий (стратегий) i-ой страны, именно $u_i = u_i(k, x)$ ($i = 1, 2$), где $x = (x_1, x_2)$. Тогда реализации $u_i[k] = u_i(k, x(k))$ ($i = 1, 2$; $k = 0, 1$).

Таким образом, динамика (изменение во времени) взаимоотношений двух стран описывается системой из двух разностных (двушаговых) уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-\gamma)x_1(k) + \alpha x_2(k) + u_1,\ x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(k+1) = \beta x_1(k) + (1-\delta)x_2(k) + u_2,\ x_2(0) = x_{20}\ (k = 0, 1). \end{cases} \tag{1}$$

Тогда множество стратегий i-го игрока (руководства i-ой страны) в момент времени $t = k$ ($k = 0, 1$) имеет вид

$$\mathbf{U}_i(k) = \{U_i(k) \div u_i(k, x) | u_i(k, x) \geq 0\};\ (i = 1, 2).$$

множество стратегий i-го игрока на весь период игры

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i(0) \times \mathbf{U}_i(1) = \{U_i = (U_i(0), U_i(1)) | U_i(k) \in \mathbf{U}_i(k),\ k = 0, 1\}.$$

Будем использовать также множество ситуаций $U = (U_1, U_2)$, именно,

$$U \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2.$$

Перейдем к построению *функций выигрыша* игроков. Каждый i-ый участник
($i = 1, 2$) стремится так выбрать свою стратегию $U_i \in \mathbf{U}_i$, $U_i = (U_i(0), U_i(1))$,
$U_i(k) \in \mathbf{U}_i(k)$, чтобы
–*во-первых*, насколько это возможно, уменьшить свои затраты на вооружение в момент времени k=2, т.е. стремится к минимизации $x_i^2(2)$ или (что эквивалентно) к максимизации $[-x_i^2(2)]$,
–*во-вторых*, уменьшить свои текущие затраты на рост вооруженности, что сводится к максимизации $\Big(-\sum\limits_{k=0}^{1} u_i^2[k]\Big)$, где $u_i[k] = u_i(k, x_1(k), x_2(k))$, а $x(k) = (x_1(k), x_2(k))$– решение системы (1) при выбранных стратегиях $U_i \div (u_i(0, x), u_i(1, x))$ ($i = 1, 2$).

Оба требования можно свести к стремлению i-го игрока выбором своей стратегии $U_i \in \mathbf{U}_i$ увеличить, насколько это возможно, свой выигрыш – значение *функции выигрыша* игрока i

$$F_i(U, x_0) = -x_i^2(2) - \sum_{k=0}^{1} u_i^2[k]\ (i = 1, 2). \tag{2}$$

Упорядоченный набор

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma \div (1), \{\mathbf{U}_i\}_{i=1,2}, \{F_i(U, x_0) \div (2)\}_{i=1,2} \rangle \tag{3}$$

образует *двухшаговую бескоалиционную позиционную игру двух лиц* (с порядковыми номерами игроков 1 и 2).

В качестве принципа оптимальности игры (3) используем концепцию равновесности по Нэшу. Именно, ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathbf{U}$ является равновесной но Нэшу в игре (3), если

$$\max_{U_1 \in \mathbf{U}_1} F_1(U_1, U_2^e, x_0) = F_1(U^e, x_0),$$
$$\max_{U_2 \in \mathbf{U}_2} F_2(U_1^e, U_2, x_0) = F_2(U^e, x_0).$$

2. Построение равновесия по Нэшу

Здесь следуем алгоритму, предложенному в [1].

Этап 1 ($k=2$). Построим функции

$$V_i^{(2)}(x) = -x_i^2 \;\; \forall x_i \in \mathbb{R} \; (i=1,2).$$

Этап 2 ($k=1$). Находим

$$V_1^{(1)}(x) = \max_{u_1}\{-u_1^2 - [(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1]^2\}.$$

Пусть

$$\varphi_1^{(1)}(u_1) = -u_1^2 - [(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1]^2,$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi_1^{(1)}(u_1)}{\partial u_1}\bigg|_{u_1^e(1,x)} = -2u_1^e(1,x) - 2[(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1^e(1,x)] = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}(u_1)}{\partial u_1^2}\bigg|_{u_1^e(1,x)} = -4 < 0.$$

Отсюда получим

$$u_1^e(1,x) = -\frac{1}{2}[(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2].$$

Аналогично определяем

$$u_2^e(1,x) = -\frac{1}{2}[\beta x_1 + (1-\delta)x_2].$$

Тогда

$$\begin{aligned}V_1^{(1)}(x) &= -[u_1^e(1,x)]^2 - [(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1^e(1,x)]^2 = \\ &= -2[u_1^e(1,x)]^2 = -\tfrac{1}{2}[(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2]^2.\end{aligned}$$

Поступая аналогично, получим

$$V_2^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}[\beta x_1 + (1-\delta)x_2]^2.$$

Этап 3 ($k=0$). Составим функцию

$$\begin{aligned}&V_1^{(0)}(x) = \max_{u_1}\{-u_1^2 - \tfrac{1}{2}[(1-\gamma)((1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1) + \\ &+\alpha(\beta x_1 + (1-\delta)x_2 + u_2^e(0,x))]^2\} = \max_{u_1}\varphi_0^{(1)}(u_1) = \varphi_0^{(1)}(u_1^e(0,x)).\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi_0^{(1)}(u_1)}{\partial u_1}\bigg|_{u^e(0,x)} = -2u_1^e(0,x) - (1-\gamma)\{(1-\gamma)[(1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1^e(0,x)] + \\ &+\alpha[\beta x_1 + (1-\delta)x_2 + u_2^e(0,x)]\} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \varphi_0^{(1)}(u_1)}{\partial u_1^2}\bigg|_{u^e(0,x)} = -2 - (1-\gamma)^2 < 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) получим равенство

$$[2 + (1-\gamma)^2]u_1^e(0,x) + \alpha(1-\gamma)u_2^e(0,x) = -(1-\gamma)\{[(1-\gamma)^2 + \alpha\beta]x_1 + \alpha[2-\gamma-\delta]x_2\}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&V_2^{(0)}(x) = \max_{u_2}\varphi_0^{(2)}(u_2) = \max_{u_2}\{-u_2^2 - \tfrac{1}{2}[\beta((1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1^e(0,x)) + \\ &+(1-\delta)(\beta x_1 + (1-\delta)x_2 + u_2)]^2\} = \varphi_0^{(2)}(u_2^e(0,x)).\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi_0^{(2)}(u_2)}{\partial u_2}\bigg|_{u^e(0,x)} = -2u_2^e(0,x) - (1-\delta)\{\beta((1-\gamma)x_1 + \alpha x_2 + u_1^e(0,x)) + \\ &+(1-\delta)(\beta x_1 + (1-\delta)x_2 + u_2^e(0,x))\} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \varphi_0^{(2)}(u_2)}{\partial u_2^2}\bigg|_{u^e(0,x)} = -2 - (1-\delta)^2 < 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) следует равенство

$$\beta(1-\delta)u_1^e(0,x) + [2 + (1-\delta)^2]u_2^e(0,x) = -(1-\delta)\{\beta[2-\gamma-\delta]x_1 + [\alpha\beta + (1-\delta)^2]x_2\}.$$

Таким образом, $u_i^e(0,x)$ $(i=1,2)$ является решением следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \left[\frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma\right]u_1^e(0,x)+\alpha u_2^e(0,x)=-[(1-\gamma)^2+\alpha\beta]x_1-\alpha[2-\gamma-\delta]x_2, \\ \beta u_1^e(0,x)+\left[\frac{2}{1-\delta}+1-\delta\right]u_2^e(0,x)=-\beta[2-\gamma-\delta]x_1-[\alpha\beta+(1-\delta)^2]x_2. \end{cases}$$

Для этой системы предполагаем, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma & \alpha \\ \beta & \frac{2}{1-\delta}+1-\delta \end{vmatrix} = \\ &= \left[\frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma\right]\left[\frac{2}{1-\delta}+1-\delta\right]-\alpha\beta\neq 0. \end{aligned}$$

В этом случае

$$u_1^e(0,x)=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ u_2^e(0,x)=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -[(1-\gamma)^2+\alpha\beta]x_1-\alpha[2-\gamma-\delta]x_2 & \alpha \\ -\beta[2-\gamma-\delta]x_1-[\alpha\beta+(1-\delta)^2]x_2 & \frac{2}{1-\delta}+1-\delta \end{vmatrix} = \\ &= \left[\alpha\beta[2-\gamma-\delta]-\left(\frac{2}{1-\delta}+1-\delta\right)[(1-\gamma)^2+\alpha\beta]\right]x_1+ \\ &+\left[\alpha[\alpha\beta+(1-\delta)^2]-\left(\frac{2}{1-\delta}+1-\delta\right)\alpha[2-\gamma-\delta]\right]x_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma & -[(1-\gamma)^2+\alpha\beta]x_1-\alpha[2-\gamma-\delta]x_2 \\ \beta & -\beta[2-\gamma-\delta]x_1-[\alpha\beta+(1-\delta)^2]x_2 \end{vmatrix} = \\ &= \left[\beta[(1-\gamma)^2+\alpha\beta]-\left(\frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma\right)\beta[2-\gamma-\delta]\right]x_1+ \\ &+\left[\alpha\beta[2-\gamma-\delta]-\left(\frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma\right)[\alpha\beta+(1-\delta)^2]\right]x_2. \end{aligned}$$

Из (4), (5) получаем

$$V_1^{(0)}(x)=-\frac{(1-\gamma)^2+2}{(1-\gamma)^2}[u_1^e(0,x)]^2,$$

а, согласно (6), (7), имеем

$$V_2^{(0)}(x)=-\frac{(1-\delta)^2+2}{(1-\delta)^2}[u_2^e(0,x)]^2.$$

Например, при

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{2},$$

будем иметь

$$\Delta=20,\ u_i^e(0,x)=-2(x_1+x_2),\ V_i^{(0)}(x)=-\frac{9}{100}(x_1+x_2)^2\ (i=1,2).$$

В этом случае затраты на вооружение каждой из стран $I_i(U^e,x_0)=-0.09(x_{10}+x_{20})^2$ $(i=1,2)$ (при равновесной по Нэшу ситуации U^e и любых выбранных неотрицательных начальных условиях x_{10} и x_{20}). График каждой из функций $I_i(U^e,x_0)$ $(i=1,2)$ представляет собой поверхность, полученную при сечении параболического цилиндра первым октантом (рис. 1).

Итак, в разделе 2 получили

Утверждение. Пусть

$$\Delta=\left[\frac{2}{1-\gamma}+1-\gamma\right]\left[\frac{2}{1-\delta}+1-\delta\right]-\alpha\beta\neq 0.$$

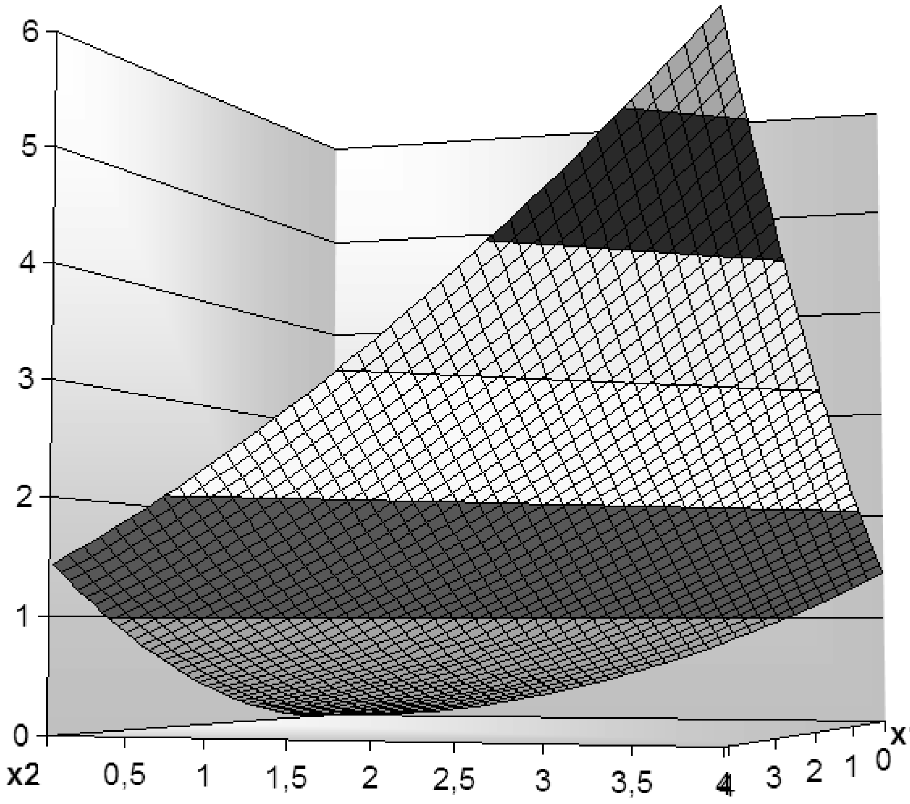


Рис. 1

Тогда ситуация равновесия по Нэшу игры (3) имеет вид $U^e = (U_1^e, U_2^e)$, где $U_i^e \div (u_i^e(0,x), u_i^e(1,x(1)))$ $(i = 1,2)$ определены следующим образом:

$$u_1^e(0,x) = \frac{1}{\Delta}\Big(\Big[\alpha\beta[2-\gamma-\delta] - \Big(\tfrac{2}{1-\delta} + 1 - \delta\Big)[(1-\gamma)^2 + \alpha\beta]\Big]x_1 +$$
$$+\Big[\alpha[\alpha\beta + (1-\delta)^2] - \Big(\tfrac{2}{1-\delta} + 1 - \delta\Big)\alpha[2-\gamma-\delta]\Big]x_2\Big),$$
$$u_2^e(0,x) = \frac{1}{\Delta}\Big(\Big[\beta[(1-\gamma)^2 + \alpha\beta] - \Big(\tfrac{2}{1-\gamma} + 1 - \gamma\Big)\beta[2-\gamma-\delta]\Big]x_1 +$$
$$+\Big[\alpha\beta[2-\gamma-\delta] - \Big(\tfrac{2}{1-\gamma} + 1 - \gamma\Big)[\alpha\beta + (1-\delta)^2]\Big]x_2\Big),$$
$$u_1^e(1,x(1)) = -\tfrac{1}{2}[(1-\gamma)x_1(1) + \alpha x_2(1)],$$
$$u_2^e(1,x(1)) = -\tfrac{1}{2}[\beta x_1(1) + (1-\delta)x_2(1)],$$

причем

$$x_1(1) = (1-\gamma)x_{10} + \alpha x_{20} + u_1^e(0, x_{10}, x_{20}),$$
$$x_2(1) = \beta x_{10} + (1-\delta)x_{20} + u_2^e(0, x_{10}, x_{20}),$$

а равновесные выигрыши игроков при любом выборе начальной позиции (x_{10}, x_{20}), $x_{i0} \geq 0$ $(i = 1,2)$, можно представить в виде

$$F_1(U^e, x_0) = -\tfrac{(1-\gamma)^2+2}{(1-\gamma)^2}[u_1^e(0, x_{10}, x_{20})]^2,$$
$$F_2(U^e, x_0) = -\tfrac{(1-\delta)^2+2}{(1-\delta)^2}[u_2^e(0, x_{10}, x_{20})]^2.$$

Список литературы

[1] *Жуковский В.И., Золотарев В.В. Равновесие в многошаговой игре* // Spectral and Evolution Problems. – 2009. – V.19. P.50-55.

Жуковский Владислав Иосифович, Житенева Юлия Николаевна,
Россия, Московская обл., г. Орехово-Зуево, филиал ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности"в г. Орехово-Зуево

E-mail: ulya_zhiteneva@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.957 MSC2000: 35K59

А.В. Звягин

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе вводится понятие корректной разрешимости для нелинейных уравнений, являющееся аналогом понятия корректной разрешимости Адамара - Тихонова для линейных уравнений, даны критерии корректной разрешимости нелинейных уравнений, и, на примере начально-краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения, продемонстрировано применение одного из критериев к проблеме корректной разрешимости этой начально-краевой задачи.

In the work the concept of the correct solvability for the nonlinear equations is entered. It's analogue of the concept of correct resolvability of Hadamard - Tikhonov for the linear equations. Criteria of the correct solvability for the nonlinear equations are given. Application of one of criteria is shown on the example of the correct solvability for initial boundary value problem for the quasilinear parabolic equation.

Введение

Хорошо известно понятие корректной (Адамара - Тихонова) разрешимости линейных уравнений (см., например, [5], [6], [7]). В настоящей работе предпринята попытка построить аналог этого понятия для нелинейных уравнений. В последней части рассмотрена начально-краевая задача для квазилинейного параболического уравнения и показано, что при наличии априорной оценки решений этой задачи, она является корректно разрешимой в смысле определений этой статьи.

1. Критерии корректной разрешимости нелинейных уравнений

Пусть X, Y — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ — отображение.

Определение 1. Пусть $y \in Y$ — фиксированный элемент. Будем говорить, что нелинейное уравнение

$$f(x) = y \tag{1}$$

корректно разрешимо, если для любой открытой окрестности U множества решений уравнения (1) в X существует открытая окрестность V точки y в Y такая, что для любого $y' \in V$ множество решений уравнения

$$f(x) = y'$$

содержится в U

Таким образом, если уравнение (1) корректно разрешимо и пространства X и Y метрические, то при "близких"значениях правых частей множество решений соответствующего уравнения в каком–то смысле "близко"к множеству решений исходного уравнения.

Установление того факта, что уравнение корректно разрешимо представляет интерес для исследования задач, описываемых этим уравнением. Дело в том, что в исследованиях, как правило, вначале устанавливается факт разрешимости уравнения (теорема существования решений), а затем применяются различные приближенные методы нахождения решений. При этом, конечно, хотелось бы быть уверенными, что при "малых"изменениях правых частей уравнений, мало меняется (в каком–то смысле) множество решений. Это и гарантирует понятие корректной разрешимости уравнений.

Разумеется, привести какие–то критерии корректной разрешимости нелинейных уравнений в столь общей ситуации, как в определении 1, трудно. Но добавив некоторые условия на отображение f, можно уже получить первые критерии корректной разрешимости уравнений.

Нам потребуется следующее понятие:

Определение 2. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется замкнутым, если образ любого замкнутого множества из X замкнут в Y.

Теорема 1. *Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и y — произвольная точка пространства Y. Для того, чтобы уравнение*

$$f(x) = y \tag{2}$$

было корректно разрешимым, достаточно, чтобы отображение f было замкнутым.

Доказательство. Пусть отображение $f\colon X \to Y$ замкнуто и U — открытая окрестность полного прообраза $f^{-1}(y)$, который представляет собой множество решений уравнения (2). Множество $X \backslash U$ замкнуто в X и так как отображение f замкнуто, то множество $f(X \backslash U)$ также замкнуто в Y и не содержит точку y. Тогда дополнение $W = Y \backslash f(X \backslash U)$ открыто и $y \in W$. Следовательно, найдется такая открытая окрестность V точки y, что $V \subseteq W$ (в качестве такой окрестности можно взять и само W). Поэтому $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \backslash f(X \backslash U)) \subseteq X \backslash (X \backslash U) = U$.

Теорема 1 допускает некоторое дополнение. Для его формулировки напомним определение нормального пространства.

Но вначале первая аксиома отделимости: для любых двух различных точек x и y топологического пространства X существует окрестность O_x точки x, не содержащая точку y, и окрестность O_y точки y, не содержащая точку x. Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются *T_1–пространствами.*

Далее, топологическое пространство X называется *нормальным пространством*, если оно является T_1–пространством и любые два замкнутых множества в нем имеют непересекающиеся окрестности.

Отметим, что все метрические пространства являются нормальными.

Теорема 2. *Пусть X, Y — топологические пространства, X, кроме того, нормальное пространство и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Если уравнение*

$$f(x) = y \tag{3}$$

корректно разрешимо для любого $y \in Y$, то f — замкнутое отображение.

Доказательство. Корректная разрешимость уравнения (3) для любого $y \in Y$ означает, что для любой точки $y \in Y$ и любой открытой окрестности U множества $f^{-1}(y)$ найдется открытая окрестность V точки y такая, что $f^{-1}(V) \subseteq U$. Покажем, что f — замкнутое отображение, то есть что $f(Z)$ замкнуто в Y для любого замкнутого множества Z в X. Предположим противное, то есть что существует предельная точка y множества $f(Z)$, не принадлежащая этому множеству, то есть $f^{-1}(y) \bigcap Z = \emptyset$. Так как пространство X нормально, а множества f^{-1} и Z — замкнуты, то существует открытая окрестность U множества $f^{-1}(y)$ такая, что $U \bigcap Z = \emptyset$. Но по условию найдется открытая окрестность V точки y такая, что $f^{-1}(V) \subseteq U$ и значит y не является предельной точкой множества $f(Z)$, поскольку точка y имеет окрестность V, не пересекающуюся с этим множеством. Таким образом $f(Z)$ содержит все свои предельные точки и следовательно, оно замкнуто.

В связи с установленными фактами представляет интерес в каких–то терминах гарантировать условие замкнутости отображения.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется собственным, если прообраз каждого компакта из Y является компактом в X.

Замечание 1. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ является собственным тогда и только тогда,когда прообраз каждой сходящейся последовательности в Y содержит сходящуюся подпоследовательность в X.

Теорема 3. *Пусть X, Y — метрические пространства. Тогда непрерывное собственное отображение $f\colon X \to Y$ является замкнутым отображением.*

Доказательство. Пусть Z — произвольное замкнутое множество в X. Покажем, что $f(Z)$ замкнуто в Y. Пусть y — предельная точка для $f(Z)$. Это означает, что существует последовательность $y_n = f(z_n)$, $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к y. Тогда множество $K = \{y \bigcup y_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ является компактом в Y. Следовательно, $f^{-1}(K)$ есть компакт в X. Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится в $f^{-1}(K)$. Поэтому существует ее подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$, сходящаяся к некоторому элементу $z \in Z$. В силу непрерывности отображения f имеем $y = f(z)$, то есть $y \in f(Z)$ и замкнутость множества $f(Z)$ установлена.

Таким образом, уравнение

$$f(x) = y,$$

где f — собственное отображение, а пространства X и Y — метрические, также корректно разрешимо. Отметим, что если X — компакт, а X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, то каждое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является собственным. В самом деле, пусть K — компакт в Y. Тогда K — замкнутое множество и, в силу непрерывности отображения f, множество $f^{-1}(K)$ — замкнуто в X. Но каждое замкнутое подмножество компактного пространства является компактом.

Однако, иногда приходится рассматривать отображения и на не компактных множествах, а исследовать разрешимость и корректную разрешимость соответствующего уравнения надо. Например, задача существования корня у многочлена с комплексными коэффициентами приводит к рассмотрению уравнения на пространстве $\mathbb{R}^2$. В этом случае установление собственности соответствующего отображения помогает решить задачу.

2. Корректная разрешимость начально-краевой задачи квазилинейного параболического уравнения

Ниже доказывается, что начально-краевая задача для параболического квазилинейного уравнения при наличии априорной оценки является корректно разрешимой.

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть Т $>$ 0 - произвольное число, Q_T= $(0, T) \times \Omega$.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + g(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}) = h(t, x) \qquad (4)$$

где $(t, x) \in Q_T$ и $a_{ij}(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n})$ - непрерывно по всем переменным.

$$v(t, x) = 0, \quad (0 < t \leqslant T, x \in \partial\Omega) \qquad (5)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad v_0 \mid_{\partial\Omega} = 0 \qquad (6)$$

Запишем задачу (4)-(6) в виде операторного уравнения. Для этого положим

$$E = W_p^{2,1}(Q_T), F = L_p(Q_T) \times W_p^{2-2/p}(\Omega) \times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T),$$

где $S_T = (0, T) \times \partial\Omega$, p $>$ n+1 и определим отображения $f, k, l : E \to F$ равенствами:

$$f(u) = (\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, u\mid_{t=0}, u\mid_{S_T})$$

$$k(u) = (g(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), v_0, 0)$$

$$l(u)=(\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+g(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}),u\mid_{t=0},u\mid_{S_T})$$

Теперь заметим, что задача (4)-(6) эквивалентна операторному уравнению:

$$f(u)+k(u)=h, \text{где } u\in E.$$

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $k:E\to F$ компактное отображение, M - ограниченное, замкнутое подмножество пространства E и $f:M\to F$ - собственное отображение. Тогда $g=f+k:M\to F$ также собственное отображение.*

Доказательство. В силу замечания 1 достаточно показать, что $\{x_n=g^{-1}(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, если последовательность $\{y_n\}$ сходится к некоторому элементу y_0. Поскольку k - компактное отображение, то из последовательности $\{k(x_n)\}$ можно выделить сходяшуюся к некоторому элементу z_0 подпоследовательность $\{k(x_{n_i})\}$. Тогда последовательность $\{f(x_{n_i})\}$ сходится к элементу y_0-z_0 и поэтому $\{x_{n_i}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. □

Теорема 4. *Пусть $p>n+1$. Тогда отображение l является собственным на ограниченных замкнутых подмножествах пространства $W_p^{2,1}(Q_T)$.*

Доказательство. Представим отображение l в виде суммы $l=f+k$. Сначала покажем, что f - собственное отображение на ограниченном замкнутом подмножестве M пространства $W_p^{2,1}(Q_T)$.

Пусть $N\subseteq L_p(Q_T)\times W_p^{2-2/p}(\Omega)\times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$ - компакт. Проверим, что $f^{-1}(N)\cap M$ также компакт в $M\subseteq W_p^{2,1}(Q_T)$. Пусть $\{u_k\}$ - произвольная последовательность из $f^{-1}(N)$. Без ограниченоя общности можно считать, что последовательность $y_k=f(u_k), k=1,2,...,$ сходится к некоторому элементу y_0. Поскольку $W_p^{2,1}(Q_T)$ компактно вложено в $W_p^{1,0}(Q_T)$ и последовательность $\{u_k\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_p}\}$ сходящуюся по норме пространства $W_p^{1,0}(Q_T)$ к некоторому элементу $u_0\in W_p^{1,0}(Q_T)$. Нетрудно проверить, что тогда последовательность

$$z_{k_p}=(\frac{\partial u_{k_p}}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u_{k_p}}{\partial x_i\partial x_j},u_{k_p}\mid_{t=0},u_{k_p}\mid_{S_T}),$$

p=1,2,..., сходится также к элементу $y_0\in F=L_p(Q_T)\times W_p^{2-2/p}(\Omega)\times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$.

Действительно:

$$||(\frac{\partial u_k}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_k}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j},u_k\mid_{t=0},u_k\mid_{S_T})-(\frac{\partial u_k}{\partial t}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j},u_k\mid_{t=0},u_k\mid_{S_T})||_F=$$

$$=||\frac{\partial u_k}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_k}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}-(\frac{\partial u_k}{\partial t}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j})||_{L_p(Q_T)}\le$$

$$\le||(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_k}{\partial x_n})-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n}))\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}||_{L_p(Q_T)}\le$$

$$\le||\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_k}{\partial x_n})-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})||_{C(\overline{Q}_T)}||\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}||_{L_p(Q_T)},$$

где $C(\overline{Q}_T)$ - пространство непрерывных функций на $\overline{Q}_T$, а C_1,C_2 - некоторые константы.

Из того что p>n+1 можно считать $u_0, \dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}$ - непрерывными функциями. А так как $u_k \to u_0$ по норме $W_p^{1,0}(Q_T) \subset C(Q_T)$ и a_{ij} - непрерывен по всем переменным, получаем:

$$||\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_k}{\partial x_n}) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})||_{W_p^{1,0}(Q_T)} \to 0.$$

Следовательно z_{k_p} сходится к элементу $y_0 \in F$.

Но оператор

$$Au = (\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x_1},...,\frac{\partial u_0}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, u\,|_{t=0}, u\,|_{S_T})$$

является изоморфизмом пространств $W_p^{2,1}(Q_T)$ и $L_p(Q_T)\times W_p^{2-2/p}(\Omega)\times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$. Следовательно, $u_{k_p} = A^{-1}(z_{k_p})$ является сходящейся подпоследовательностью в $W_p^{2,1}(Q_T)$. Это и означает, что $f^{-1}(N)$ - компакт. Таким образом $f|_M : M \to L_p(Q_T) \times W_p^{2-2/p}(\Omega) \times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$ - собственное отображение.

Отображение $k : W_p^{2,1}(Q_T) \to L_p(Q_T) \times W_p^{2-2/p}(\Omega) \times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$ можно представить в виде композиции $k = b \circ i$, где $i : W_p^{2,1}(Q_T) \to W_p^{1,0}(Q_T)$ - естественное вложение (т.е. $i(u) = u$), а $b : W_p^{1,0}(Q_T) \to L_p(Q_T) \times W_p^{2-2/p}(\Omega) \times W_p^{2-2/p,1-1/(2p)}(S_T)$ определяется равенством $b(u) = (g(t,x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}), v_0, 0)$. Т.к. i - компактно, b - ограниченное отображение , то k также компактное отображение.

Тогда по лемме 1 отображение l также будет собственным на множестве M.

Лемма 2. *Пусть $f : E \to F$ собственное на кажном замкнутом ограниченном подмножестве $M \subseteq E$ отображение. Предположим, что имеет место оценка*

$$||u||_E \leq C(||f(u)||_F) \tag{7}$$

где $C : R_+ \to R_+$ - функция, ограниченная на ограниченных подмножествах из R_+ (R_+ - множество неотрицательных вещественных чисел). Тогда f собственное отображение на всем пространстве E.

Доказательство. Пусть $C \in F$ - компакт. Тогда C - ограниченное подмножество пространства F. Из (7) следует, что $f^{-1}(C)$ также ограниченное множество. Пусть B - замкнутый шар пространства E, содержащий $f^{-1}(C)$. Поскольку сужение $f|_B$ - собственное отображение и $f^{-1}(C) = (f|_B)^{-1}(C)$, то $f^{-1}(C)$ - компакт в E.

Из теорем 1, 3, 4 и леммы 2 мы получаем:

Теорема 5. *Начально-краевая задача* (4)-(6) *для параболического квазилинейного уравнения при наличии априорной оценки является корректно разрешимой.*

Замечание 2. Построения априорных оценок решений начально-краевых задач для параболических квазилинейних уравнений можно найти, например, в работах [1], [2], [3], [4].

Список литературы

[1] Ладыженская О.А. //Тр. Моск. Мат. Общ. – 1958. – т.7

[2] Соболевский П.Е. // ДАН УРСР – 1961. – N.12.

[3] Крылов Н.В. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка* // URSS – 1985. – с.376.

[4] Олейник О.А., Кружков С.Н. *Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными* // УМН – 1961. – N.51(93):2 – с.164–166.

[5] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* // М.:Наука. – 1981. – с.512.

[6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решений некорректных задач* // М.:Наука. – 1974.

[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* // М.:Наука. – 1977.

Звягин Андрей Викторович, Россия, Воронеж, Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.95, 517.984 MSC2000: 35Q53, 34A55

М.Ю. Игнатьев

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ

В работе исследуется смешанная задача для уравнения КдФ на полуоси с неоднородными интегрируемыми краевыми условиями. Для указанной задачи указаны достаточные условия разрешимости и предложена процедура решения, основанная на идеях метода обратной спектральной задачи.

Введение

В работе изучается следующая смешанная задача:

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad x > 0, t > 0, \tag{1}$$

$$q(0,t) = a, \quad q_{xx}(0,t) = b, \tag{2}$$

$$q(x,0) = q_0(x), \tag{3}$$

где a, b - заданные вещественные константы.

Уравнение Кортевега-де Фриза (1) относится к уравнениям, интегрируемым при помощи метода обратной задачи рассеяния [12]. Смешанные задачи для таких уравнений как объект исследования появляются в ряде работ еще в середине 1970-х годов (см., например [1], где впервые рассмотрена смешанная задача для уравнения КдФ). Оказалось, что такие задачи существенно сложнее задачи Коши на оси, которая решалась при помощи классического варианта МОЗР. Хотя в дальнейшем в изучении смешанных задач для интегрируемых уравнений был достигнут заметный прогресс (см. [8], [9], [10] и цитированную там литературу), следует отметить, что в случае общих краевых условий идеи метода обратной спектральной задачи срабатывают лишь частично: получающиеся процедуры решения содержат шаги, связанные с решением нелинейных задач.

В 1987 году в работе [2] была высказана идея рассматривать краевые и смешанные задачи с краевыми условиями специального вида, которые в дальнейшем стали называть интегрируемыми. Краевые задачи с интегрируемыми краевыми условиями сохраняют многие признаки интегрируемости характерные для задачи Коши (например, задачи с однородными интегрируемыми краевыми условиями допускают бесконечные серии законов сохранения). В течение нескольких последующих лет был решен целый ряд интегрируемых краевых задач (см., например, [3], [4]). Отметим, что во всех исследованных тогда задачах уравнения допускали пространственную симметрию $x \to -x$, что не имеет места для уравнения (1).

Вопрос об интегрируемых граничных условиях для уравнения КдФ (1) был решен в середине 1990-х годов [6]: оказалось, что интегрируемыми являются условия вида (2) и только они. В работе [7] были описаны солитонные и конечнозонные решения краевой задачи (1), (2). В дальнейших работах [Kh], [8] исследовалась задача вида (1)-(3) на полуоси $x < 0$, однако полного решения задачи до сих пор получено не было. Важно также отметить, что в задаче (1)-(3) ситуация существенным образом зависит как от значений параметров a, b, так и от того, на какой из полуосей $x < 0$ или $x > 0$ ставится задача. Так, известно [11], что корректная постановка смешанной задачи для уравнения КдФ на полуоси $x > 0$ включает одно краевое условие, а на полуоси $x < 0$ - два. Последнее означает, в частности, что задача (1)-(3) является переопределенной и весьма важным и нетривиальным оказывается вопрос описания таких $q_0(x)$, для которых задача разрешима.

1. Решение смешанной задачи

Построим по числам a, b из (2) функцию

$$f(\lambda) = 16\lambda^3 - (12a^2 - 4b)\lambda - 2a(2a^2 - b). \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $a > 0, b < 0$. В этом случае поведение $f(\lambda)$ может быть схематически представлено графиком, приведенном на рисунке 1.

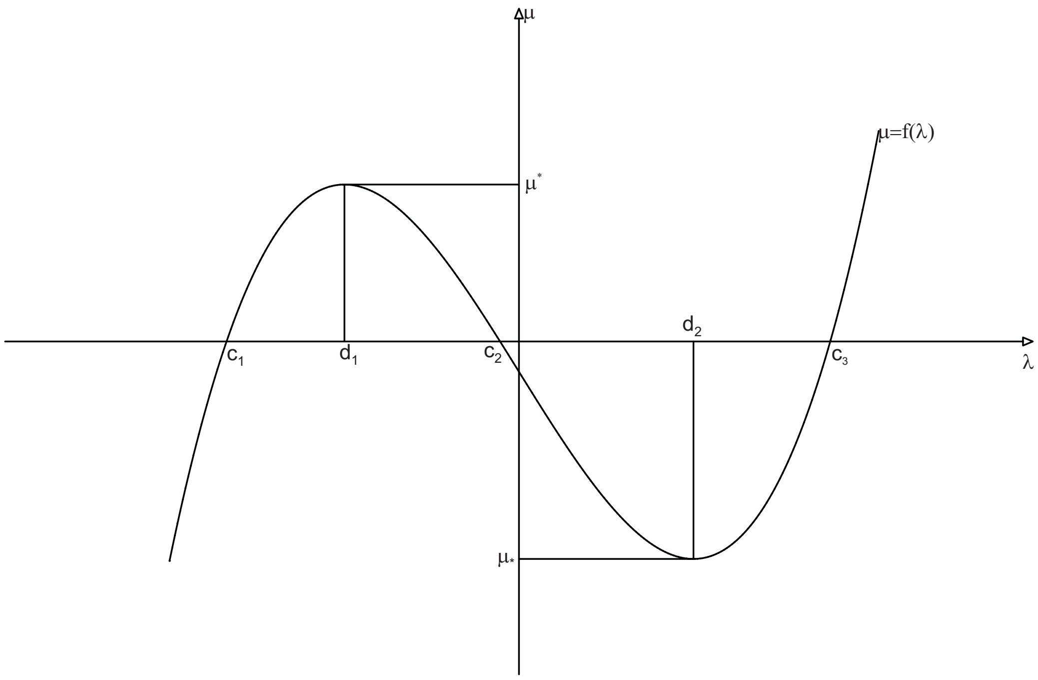


Рис. 1

Рассмотрим при вещественных λ уравнение $f(z) = f(\lambda)$, через $e_j(\lambda), j = \overline{1,3}$ обозначим его корни. Договоримся, что в случае, когда все они вещественны, их нумерация идет по возрастанию.

Введем в рассмотрение оператор L_0 как оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом $q_0(x)$ и условием Дирихле в точке $x = 0$. Обозначим через $m_0(\lambda)$ функцию Вейля–Титчмарша для L_0, через $\varphi(\lambda)$ обозначим функцию

$$\varphi(\lambda) = -q_0'(0) + (4\lambda + 2a)m_0(\lambda). \quad (5)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.
1) $q_0(\cdot) \in C^2[0, \infty)$ и $q_0(0) = a$;
2) L_0 полуограничен снизу;
3) $m_0(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = c_2$ полюс;
4) $m_0(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $\lambda = d_1$ и выполнено равенство $\varphi(\lambda) = \varphi(e_1(\lambda))$, $\lambda \in (d_1, d_1 + \varepsilon)$.

Пусть для $\sqrt{f(\lambda)}$ выбрана ветвь, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus ([c_1, c_2] \cup [c_3, \infty))$ и такая, что $\sqrt{f(\lambda + i0)} > 0$ при $\lambda \in (c_3, \infty)$. Определим функцию $N_0(\cdot)$ равенством:

$$N_0\left(\sqrt{f(\lambda)}\right) = \varphi(\lambda). \quad (6)$$

Лемма 1. *При выполнении условий 1)-4) функция $N_0(\cdot)$, задаваемая (6) является функцией Вейля–Марченко некоторого оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $p(\cdot) \in \mu^* - \delta + \tilde{B}$, $\delta > 0$.*

Всюду далее $p(t)$ - потенциал оператора из утверждения леммы 1. Обозначим через $N(\tau, k)$ функцию Вейля-Марченко для этого оператора с условием Дирихле в точке $t = \tau$.

Теорема 1. *Пусть $m(t,\lambda)$ - функция, определяемая равенством:*

$$m(t,\lambda) := \frac{1}{4\lambda+2a}\left[N\left(t,\sqrt{f(\lambda)}\right) - w(t)\right], \tag{7}$$

где $w(t)$ - решение задачи Коши:

$$\dot{w} + w^2 = p(t), w(0) = -q_0'(0). \tag{8}$$

Тогда $m(t,\lambda)$ является функцией Вейля–Титчмарша оператора Штурма–Лиувилля, потенциал которого $q(x,t)$ является решением задачи (1)-(3).

Итак, при выполнении условий 1)-4) задача (1)-(3) имеет решение, причем это решение может быть найдено последовательным выполнением следующих шагов:
1. подсчет $N_0(k)$ по формуле (6);
2. решение обратной задачи Штурма-Лиувилля: восстановление потенциала $p(t)$ по функции Вейля–Марченко $N_0(k)$;
3. подсчет для каждого t функции Вейля-Марченко $N(t,k)$;
4. подсчет $m(t,\lambda)$ по формуле (7);
5. решение обратной задачи Штурма-Лиувилля: восстановление потенциала $q(x,t)$ по функции Вейля–Титчмарша $m(t,\lambda)$.

Подобно классической схеме МОЗР, предлагаемая процедура состоит из шагов, представляющих собой подсчет по явным формулам, и шагов, состоящих в решении обратных спектральных задач, которое сводится, в свою очередь, к решению некоторых линейных уравнений.

Отметим, что условия 3), 4) содержат весьма жесткие ограничения на функцию $m_0(\lambda)$, что является отражением переопределенности задачи (1)-(3). Приведем явный способ построения функций $m_0(\lambda)$, гарантированно являющихся функциями Вейля–Титчмарша операторов, для которых выполнены условия 1)-4).

Теорема 2. *Пусть $\eta(\xi)$ – ограниченная неубывающая функция. Определим*

$$n_0(k) = ik + \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{d\eta(\xi)}{\xi - ik}, \quad n(k) := n_0\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\right),$$

где $\alpha > 0$, $\alpha^2 < \mu^*$, $0 < \beta < \infty$ и

$$m_0(\lambda) = \frac{1}{4\lambda+2a}\left[n\left(\sqrt{f(\lambda)}\right) + q_0'(0)\right].$$

Тогда $m_0(\lambda)$ - функция Вейля–Титчмарша оператора L_0, удовлетворяющего условиям 1)-4).

Дополнение. О потенциалах класса $\tilde{B}$

Напомним вкратце некоторые факты об операторах с потенциалами класса $\tilde{B}$, введенных и подробно изученных в ряде работ В.А. Марченко и Д.С. Лундиной (см. [13] и цитированные работы). Класс $\tilde{B}$ определяется как замыкание множества безотражательных потенциалов в топологии равномерной сходимости на компактах. Для наших целей, однако, удобнее спектральная характеризация операторов с такими потенциалами.

Рассмотрим на оси $t \in (-\infty,\infty)$ уравнение Штурма–Лиувилля с вещественным потенциалом $p(t)$:

$$\ell y := -\ddot{y} + p(t)y = \mu y.$$

Пусть

$$\psi_1(t,\mu) = C(t,\mu) + M_1(\mu)S(t,\mu),$$

$$\psi_2(t,\mu) = C(t,\mu) + M_2(\mu)S(t,\mu)$$

суть решения Вейля на правой и левой полуосях соответственно, и пусть $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ – соответствующие функции Вейля–Титчмарша. Определим функцию:

$$N(k) = \begin{cases} M_1(k^2), & Imk > 0, \\ M_2(k^2), & Imk < 0, \end{cases}$$

которую будем называть *функцией Вейля–Марченко.*

Предложение 1. *$p(t) \in \tilde{B}$ тогда и только тогда, когда соответствующая функция Вейля–Марченко голоморфна вне некоторого отрезка мнимой оси.*

Предложение 2. *Функция $n(k)$ является функцией Вейля–Марченко некоторого оператора с потенциалом класса $\tilde{B}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление вида:*

$$n(k) = ik + \int\limits_{-\alpha}^{\beta} \frac{d\eta(\xi)}{\xi - ik}$$

с конечными α, β и ограниченной неубывающей функцией $\eta(\xi)$.

Как было сказано выше, класс $\tilde{B}$ содержит все безотражательные потенциалы. Класс $\tilde{B}+\mathbb{R}$ содержит все быстроубывающие потенциалы с финитным коэффициентом отражения. Конечнозонные потенциалы также принадлежат классу $\tilde{B}+\mathbb{R}$.

Список литературы

[1] Moses H E *A solution of the Korteweg-de Vries equation in a half-space bounded by a wall* // J. Math. Phys. – 1976. – V.17, N.1. – p.73-75.

[2] Склянин Е К 1987 *Граничные условия для интегрируемых уравнений* // Функц. анализ и прил.–1987.– Т.21, N.2. – с.86-87.

[3] Бикбаев Р Ф, Тарасов В О *Неоднородная краевая задача на полуоси и на отрезке для уравнения Sine-Gordon*// Алгебра и анализ – 1991. – Т.3, N.4. – с.78–92.

[4] Bikbaev R F, Tarasov V O *Initial boundary value problem for the nonlinear Schroedinger equation* // J. Phys. A: Math. General – 1991. – V. 24 – p.2507-–2516.

[5] Хабибуллин И Т *Начально-краевая задача для уравнения КдФ на полуоси с однородными краевыми условиями* // Теор. мат. физ. – 2002. – Т.130, N.1. – с.31–53.

[6] Adler V, Gurel B, Gurses M and Habibullin I *Boundary conditions for integrable equations* // J. Phys. A – 1997 – V.30, N.10 – p.3505–3513.

[7] Адлер В Э, Хабибуллин И Т, Шабат А Б *Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси* Теор. мат. физ. – 1997 – Т. 110, N.1 – с.78–90.

[8] Fokas A S *Integrable Nonlinear Evolution Equations on the Half-Line* // Comm. Math. Phys. – 2002 – V.230. – p.1–39.

[9] Fokas A S, Its A R and Sung L Y *The Nonlinear Schroedinger Equation on the Half-Line* // Nonlinearity – 2005 – V.18 – p.1771–1822.

[10] Boutet de Monvel A, Fokas A S and Shepelsky D 2006 *Integrable Nonlinear Evolution Equations on a Finite Interval* // Comm. Math. Physics – 2006 – V.263 – p.1–133

[11] Фаминский А В *Смешанная задача для уравнения Кортевега-де Фриза* // Матем. сб. – 1999 – Т.190, N.6. – с.903-–935.

[12] Захаров В Е, Манаков С В, Новиков С П, Питаевский Л П *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* // М.:Наука – 1980.

[13] Marchenko V A *The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data.* In: *What is integrability?* // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg – 1991 – p.273–318.

Игнатьев Михаил Юрьевич, Россия, Саратов, Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: IgnatievMU@info.sgu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.9 MSC2000: 35B35

Н.С. Калужина

ТЕОРЕМА БЁРЛИНГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Generalization of Beurling's theorem was obtained for functions from homogeneous spaces with nonempty discrete spectrum. The question about stability of solution of Cauchy problem for heat conduction equation is considered also.

Получено обобщение теоремы Бёрлинга для функций из однородного пространства, имеющих непустой дискретный спектр. Также рассматривается вопрос о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

1. Введение

Пусть G - компактно-порожденная локально-компактная абелева группа, $\hat{G}$ - двойственная группа унитарных непрерывных характеров группы G. Через $L^p(G)$, $p \in [1,\infty)$, обозначим банахово пространство измеримых и суммируемых (относительно меры Хаара) со степенью $p \in [1,\infty)$ (существенно ограниченных при $p=\infty$) комплексных функций, определенных на группе G. Нормы в этих пространствах имеют вид: $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x(s)|^p\, ds\right)^{1/p}$, $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{g\in G} |x(g)|, p=\infty$.
Отметим, что $L^1(G)$ является коммутативной банаховой алгеброй со свёрткой функций в качестве умножения. Через $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(g)\gamma(-g)dg$, $\gamma \in \hat{G}$, обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Рассматриваются замкнутые подпространства $C_b(G)$, $C_{b,u}(G)$ пространства $L^\infty(G)$ соответственно непрерывных и равномерно непрерывных функций. Через $S^p(G)$, где $p \in [1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [1] измеримых локально суммируемых со степенью p функций, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{s\in G}\left(\int\limits_V |x(s+g)|^p\, dg\right)^{1/p}$, где V - некоторая компактная окрестность нуля группы G. Отметим, что пространство $S^p(G)$ не зависит от выбора V и соответствующие нормы эквивалентны. Для компактной группы G имеет место равенство $S^p(G) = L^p(G)$.

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(G)$ комплексных функций, определенных на группе G, называется **однородным пространством функций**, если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{F}$ содержит пространство $C_{b,u}(G)$ и содержится в пространстве $S^1(G)$, причем вложения $C_{b,u}(G) \subset \mathcal{F}(G) \subset S^1(G)$ непрерывны;
(2) в $\mathcal{F}$ определена и ограничена группа $S(g)$, $g \in G$, операторов сдвигов функций $(S(g)x)(s) = x(s+g)$, $s, g \in G$, $x \in \mathcal{F}$;
(3) для любых функций $f \in L^1(G)$, $x \in \mathcal{F}$ их свёртка
$$(f * x)(g) = \int\limits_G f(\tau)x(g-\tau)d\tau = \int\limits_G f(\tau)\,(S(-\tau)x)\,(g)d\tau \qquad (1)$$
принадлежит $\mathcal{F}$ и $\|f * x\| \le \|f\|_1 \|x\|$;
(4) $\hat{G} \subset \mathcal{F}(G)$;

(5) $\varphi x \in \mathcal{F}(G)$ для любой $x \in \mathcal{F}(G)$ и любой функции $\varphi \in C_b(G)$ с компактным носителем supp φ, причем $\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|_\infty \|x\|$.

Ясно, что банаховы пространства $C_{b,u}(G)$, $C_b(G)$, $L^\infty(G)$, $S^p(G)$, $p \in [1, \infty)$, являются однородными пространствами.
Все основные результаты получены для группы G вида $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где k, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{K}$ - компактная группа. Заметим, что всякая компактно-порожденная локально компактная абелева группа изоморфна группе указанного вида. В дальнейшем символом $\mathcal{F}$ обозначается однородное пространство функций.
Любое однородное пространство $\mathcal{F}(G)$ является банаховым $L^1(G)$-модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (1) и эта структура ассоциирована с представлением группой сдвигов функций $S : G \to End\,\mathcal{F}(G)$ ($End\mathcal{F}(G)$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов на $\mathcal{F}(G)$). Из свойства 1 определения 1 следует невырожденность $L^1(G)$-модуля $\mathcal{F}(G)$.

2. Спектр Бёрлинга и основные теоремы

Пусть X - комплексное банахово пространство и End X - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Будем считать, что X является невырожденным банаховым $L^1(G)$-модулем(см. [2] и [3]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным представлением $T : G \to EndX$ (используется обозначение (X, T)). Важно следующее понятие (см. [4]).

Определение 2. **Спектром Бёрлинга** вектора x из банахова $L^1(G)$-модуля (X, T) называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(X, T)$ характеров из группы $\hat{G}$, являющееся дополнением к множеству $\{\gamma \in \hat{G} | \exists f \in L^1(G) : \hat{f}(\gamma) \neq 0, fx = 0\}$, или, что эквивалентно, $\Lambda(x) = \{\gamma \in \hat{G} | fx \neq 0, \forall f \in L^1(G), \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$.

Для случая $G = \mathbb{R}$ в статье [5] было дано следующее понятие спектра функций из $L^\infty(\mathbb{R})$.

Определение 3. **Спектром функции** $x \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется множество $\Lambda(x)$, состоящее из таких чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которых функция (характер) $e_{\lambda_0}(t) = exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$, содержится в L^1-замкнутом подпространстве, порожденном сдвигами функции x.

Заметим, что это определение 2 эквивалентно определению 3 для функций из $L^\infty(\mathbb{R})$.

Определение 4. Пусть Ω - некоторое направленное множество. Направленность функций (x_α), $\alpha \in \Omega$ из однородного пространства $\mathcal{F}(G)$ называется **c-сходящейся** к функции $x_0 \in \mathcal{F}(G)$, если она ограничена и $\lim \|\varphi(x_\alpha - x_0)\| = 0$, для любой функции $\varphi \in C_{b,u}(G)$ с компактным носителем.

Если, к тому же, $\lim \|x_\alpha\| = \|x_0\|$, то направленность (x_α) называется **узко сходящейся** к x_0.

Введем следующий класс функций (см. [6]).

Определение 5. Пусть Ω - некоторое направленное множество и $\gamma \in \hat{G}$. Ограниченная направленность (f_α), $\alpha \in \Omega$, функций из алгебры $L^1(G)$ называется **γ - направленностью**, если выполнены условия: 1) $\hat{f}_\alpha(\gamma) = 1$ для всех $\alpha \in \Omega$; 2) $\lim f_\alpha * f = 0$, для любой функции $f \in L^1(G)$ с $\hat{f}(\gamma) = 0$.

Дадим теперь понятие дискретного спектра функции $x \in \mathcal{F}(G)$.

Определение 6. Характер $\gamma_0 \in \hat{G}$ отнесем к **дискретному спектру** $\Lambda_d(x)$ вектора x из банахова $L^1(G)$-модуля (X, T), если существует γ_0-направленность (f_α) из алгебры $L^1(G)$, для которой $\overline{\lim} \|f_\alpha * x\| > 0$.

"Следующим результатом в спектральном синтезе был оригинальный и действительно поразительный результат Бёрлинга"(цитата из [3]).

Теорема 1 (Бёрлинг [5]). *Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ и $x \neq 0$. Тогда существует число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и последовательность (x_n) линейных комбинаций сдвигов функции x, которая узко сходится к функции (характеру) e_{λ_0}.*

В статье [7] П. Кусис установил ошибочность работы С. Годемана [8], в которой была предпринята попытка доказать теорему Бёрлинга для функций из $L^{\infty}(\mathbb{R})$, а также заметил, что она перестает быть верной для функций из $C_b(\mathbb{R})$, и указал схему построения соответствующего примера. Обобщение теоремы Бёрлинга на функционалы из сопряженных пространств к некоторым классам полупростых коммутативных банаховых алгебр было получено Н. Домаром [9]. Им же было введено понятие "узкого"спектра функционалов. Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где k, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{K}$ - компактная группа, и пусть функция x принадлежит однородному пространству $\mathcal{F}(G)$, а характер $\gamma_0 \in \hat{G}$ принадлежит дискретному спектру $\Lambda_d(x)$ функции x. Тогда существует направленность (x_α), составленная из линейных комбинаций сдвигов функции x, которая $c-$сходится к характеру γ_0.*

3. Стабилизация решений параболических уравнений

Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \in \{C_b(\mathbb{R}^n), S^p(\mathbb{R}^n)\}$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $U_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \triangle U, \\ U(0,x) = U_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

где $\triangle U = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ - время. Через $U = U(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, обозначется решение задачи (2).

В классе единственности решение задачи (2), построенное по начальной функции $U_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, задается интегралом Пуассона (см. [10]):

$$U(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_t(x-\xi) U_0(\xi) d\xi, \; t > 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \; d\xi = d\xi_1 ... d\xi_n. \tag{3}$$

Здесь $f_t(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ - функция Грина и $|x| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$.

Семейство функций (f_t), $t > 0$, направленное по возрастанию времени t, является 0-направленностью. Равенство (3) можно записать в виде $U(t,x) = (f_t * U_0)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

В случае, когда начальная функция $U_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ имеет равномерное предельное среднее, вопрос о стабилизации решения $U(t,x)$, при $t \to \infty$, решен в работе [10]. Если же функция U_0 не имеет равномерного предельного среднего, но $0 \in \Lambda_d(U_0)$, существует c-предел $\lim\limits_{t\to\infty} (f_t * U_0)(x) = \varphi(x) \neq 0$, где $x \in K$ - компакт из $\mathbb{R}^n$, функция $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Получен следующий результат касательно свойств предельной функции φ .

Теорема 3. *Пусть $U_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ - начальная функция задачи (2) и $0 \in \Lambda_d(U_0)$. Тогда решение задачи $U(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, c-сходится при $t \to \infty$, к функции $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ со свойством $\Lambda(\varphi) = \{0\}$.*

Список литературы

[1] *Костин А. В.* К теории функциональных пространств Степанова./ А. В. Костин, В. А. Костин. - Воронеж.: Изд–во ВГУ, 2007.

[2] *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов/ А. Г. Баскаков// СМФН - 2004. - № 9. - P.3–151.

[3] *Хьюитт Э.* Абстрактный гармонический анализ./ Э. Хьюитт, К. Росс. - М.: Мир, 1975. - Т. 2.

[4] *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов./ А. Г. Баскаков. - Воронеж.: Изд-во ВГУ, 1987.

[5] *Beurling A.* Un theoreme sur les fonctions borness et uniformement continues sur l'axe reel/ A. Beurling// Acta Math. - 1945. - № 77. - P.127–136.

[6] *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал// Известия РАН, серия математика - 2005. - № 69:3. - P.3–54.

[7] *Koosis P.* On the spectral analysis of bounded functions/ P. Koosis// Pacific Journal of Mathematics. - 1966. - № 16. - P. 121–128.

[8] *Godement S.* Theorems tauberiens et theorie spectrale/ S. Godement// Annales de l'Ecole Normal Superieure. - 1947. - № 64. - P. 119–138.

[9] *Domar Y.* Some results on norrow spectral analysis/ Y. Domar// Math. Scand. - 1967. - № 20. - P. 5–18.

[10] *Репников В. Д.* О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений/ В. Д. Репников// Доклады Академии наук СССР. - 1964. - № 3. - Т. 157. - с.532–535.

Калужина Наталья Сергеевна, Россия, Воронеж, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, Университетская площадь, 1

E-mail: Kaluzhina_N_S@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 519.872 MSC2000: 90B22

А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ЗЕНИТНО-РАКЕТНОГО КОМПЛЕКСА С ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СТРЕЛЬБЫ

Рассматривается СМО типа M/G/2/0 с ограниченным временем пребывания заявки в системе. Одна заявка в системе обслуживается сразу двумя линиями. В случае появления ещё одной заявки линии обслуживают заявки раздельно. Найдены вероятностные характеристики системы в стационарном режиме.

A queueing system of type M/G/2/0 is considered. An only customer in service engages both servers. Two customers are served separately. There is a limit on service time. The equilibrium probabilities of the system are obtained in the paper.

1. Постановка задачи

Два орудия "обслуживают" поток летящих бомбардировщиков (простейший, с интенсивностью λ). Время нахождения самолёта над зоной обслуживания — случайная величина γ, распределённая по экспоненциальному закону с параметром μ. Время "обслуживания" самолёта i-м орудием — непрерывная случайная величина ω_i с интенсивностью $\mu_i(x)$, $\quad i = 1, 2$.

Правила обслуживания. Поступившая заявка (бомбардировщик) начинает обслуживаться немедленно двумя линиями (орудиями). Если в момент поступления очередной заявки в системе на обслуживании находится одна заявка, то одна из линий переключается на обслуживании новой заявки, при этом, если времена обслуживания текущей заявки были одинаковы, то переключается первая линия, если же времена обслуживания заявки были разными, то переключается линия, имевшая большее время обслуживания. Заявка, поступившая в момент, когда в системе обслуживаются две заявки, теряется (самолёт беспрепятственно пролетает зону обслуживания). Если одна из двух обслуживаемых заявок уходит из системы либо в результате окончания обслуживания (самолёт сбит), либо в результате истечения времени γ её пребывания в зоне обслуживания (самолёт вылетел невредимым из зоны обстрела), то ведущая её линия переключается на помощь для обслуживания оставшейся в системе заявки.

2. Исследование

Система уравнений. Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, описывающий эволюцию системы. СМО может находиться в одном из 4-х состояний (см. рис). Введём функции:

$$p_k(t) := \mathbb{P}\{\xi(t) = k\},\ k = \overline{0,3}$$

$$Q_1(t,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 1,\ \omega_1 < x\}, \quad q_1(t,x) := \frac{\partial Q_1(t,x)}{\partial x}$$

$$Q_2(t,x,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2,\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, \quad q_2(t,x,y) := \frac{\partial^2 Q_2(t,x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$Q_3(t,x,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 3,\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, \quad q_3(t,x,y) := \frac{\partial^2 Q_3(t,x,y)}{\partial x \partial y}$$

Поскольку система имеет конечное число сообщающихся состояний, существует стационарный режим (при $t \to \infty$). Обозначим соответствующие предельные величины: $q_1(t,x) \to g_1(x)$; $q_k(t,x,y) \to g_k(x,y), k = 2,3$; $p_k(t) \to p_k,\ k = \overline{0,3}$.

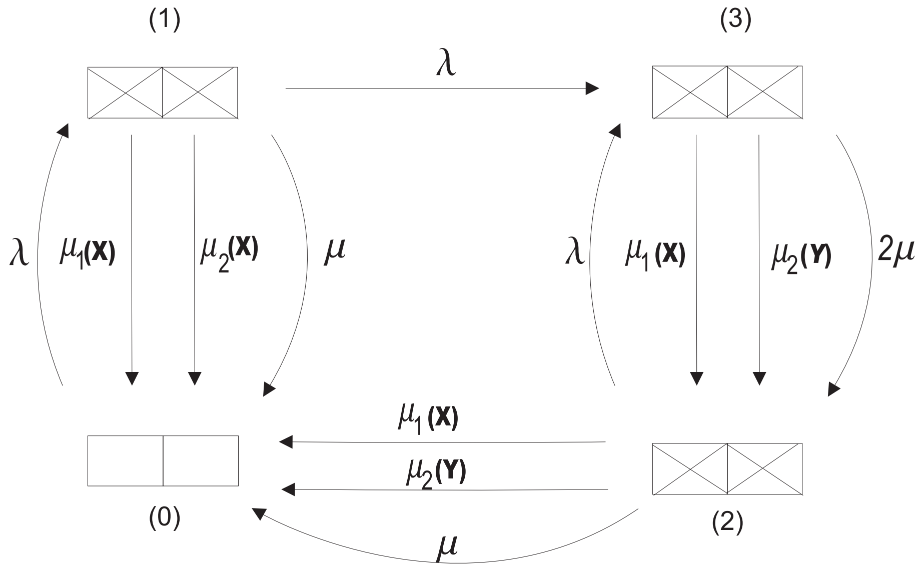


Рис. 1. Диаграмма переходов системы

Составлена следующая система интегро – дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$\lambda p_0 = \int\limits_0^\infty g_1(x)(\mu_1(x)+\mu_2(x))\,dx + \mu(p_1+p_2) + \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_2(x,y)(\mu_1(x)+\mu_2(y))\,dy,$$

$$g_1'(x) + (\lambda+\mu+\mu_1(x)+\mu_2(x))g_1(x) = 0, \quad g_1(0) = \lambda p_0,$$

$$\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} + (\lambda+\mu+\mu_1(x)+\mu_2(y))g_2(x,y) = 0,$$

$$g_2(x,0) = \int\limits_0^\infty g_3(x,y)(\mu+\mu_2(y))\,dy, \qquad g_2(0,y) = \int\limits_0^\infty g_3(x,y)(\mu+\mu_1(x))\,dx$$

$$\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} + (2\mu+\mu_1(x)+\mu_2(y))g_3(x,y) = 0,$$

$$g_3(x,0) = \lambda \int\limits_x^\infty g_2(x,y)\,dy, \qquad g_3(0,y) = \lambda g_1(y) + \lambda \int\limits_y^\infty g_2(x,y)\,dx.$$

3. Основные результаты

Авторам удалось найти вероятностные характеристики системы в стационарном режиме в случае, когда одна из интенсивностей постоянна, скажем $\mu_2(x) = \mu_2 = \mathrm{const}$. В этом случае система сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных стационарных вероятностей $p_k, k = 0,1,2,3$ и чисел $A = \int_0^\infty g_2(0,y)\,dy$ и $B = \int_0^\infty g_3(0,y)\,dy$:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \lambda p_0 \Phi_1^*(\beta_1),\\
p_2 &= \lambda(\mu+\mu_2)A\Phi_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1) + (\mu+\mu_2)B\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + A\Phi_1^*(\beta_1),\\
p_3 &= \lambda A\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + B\Phi_1^*(\beta_2),\\
A &= \lambda A(f_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + \mu\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2)) + B(f_1^*(\beta_2) + \mu\Phi_1^*(\beta_2)),\\
B &= \lambda p_1 + \lambda^2(\mu+\mu_2)A\Phi_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1) + \lambda(\mu+\mu_2)B\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2),\\
\lambda p_0 &= \lambda p_0 f_1^*(\beta_1) + \lambda(\mu+\mu_2)f_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1)A+\\
&+B(\mu+\mu_2)f_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + Af_1^*(\beta_1) + (\mu+\mu_2)(p_1+p_2),\\
p_0 &+ p_1 + p_2 + p_3 = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\Phi_1(x)$ – функция надёжности, $f_1(x)$ – плотность непрерывной случайной величины ω_1, $\beta_1 = \lambda + \mu + \mu_2$, $\beta_2 = 2\mu + \mu_2$, Φ_1^* и f_1^* – преобразования Лапласа функций $\Phi_1(x)$ и $f_1(x)$ соответственно, а преобразования F^{**} и F^{***} определяются так:

$$F^{**}(s,t) := \int_0^\infty e^{-sy}dy \int_0^\infty e^{-tx}F(x+y)\,dx,\ F^{***}(s,t,u) := \int_0^\infty e^{-sz}dz \int_0^\infty e^{-ty}dy \int_0^\infty e^{-ux}F(x+y+z)\,dx.$$

Полученная система линейных уравнений избыточна. Первые 6 уравнений линейно зависимы, поэтому при решении любое из них можно отбросить и использовать в дальнейшем для проверки результата.

Вероятность потери заявки в стационарном режиме равна, очевидно, p_3.

В случае, когда и $\mu_1(x) = \mu_1 = \mathrm{const}$ стационарные вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 легко определяются из так называемой системы уравнений равновесия (СУР), выписываемой из диаграммы "по стрелкам":

$$p_0 = \frac{\beta(\beta+\mu)}{\beta^2 + (\lambda+\mu)\beta + \lambda\mu + \lambda^2}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\beta}p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda^2}{\beta(\lambda+\beta)}p_0, \quad p_3 = \frac{\lambda^2}{\beta(\mu+\beta)}p_0.$$

Здесь $\beta = \mu + \mu_1 + \mu_2$. Это решение совпадает, как можно убедиться после некоторых выкладок, с решением системы (1).

Список литературы

[1] Овчаров Л.А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания.* // М.: Машиностроение – 1969. – 324 с.

[2] Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. *Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем.* // Киев: Выща школа – 1987. – 246 с.

[3] Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания* // М.: Изд-во РУДН – 1995. — 529 с.

[4] Коваленко А.И., Смолич В.П. *Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками.* // Динамические системы. – 2000. – Вып.16 – с. 137-142.

[5] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование системы массового обслуживания M/G/1/1.* // Ученые записки ТНУ – серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика" – 2002. – т.15(52) – №2. – с. 40-42.

[6] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование надёжности однолинейной системы с потерями требований.* // ТВИМ – ТНУ – 2003. – №2.

[7] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование системы M/D/1 с одной орбитой.* // ТВИМ. – ТНУ – 2004. – №2.

[8] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование надёжности трёхэлементной системы с приоритетным обслуживанием двумя наладчиками.* // ТВИМ. – ТНУ – 2007. – №1. – с.49-57.

[9] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование трёхэлементной СМО с отказами, обслуживаемой двумя наладчиками.* // Спектральные и эволюционные задачи. – Симферополь – 2007. – т.17. (КРОМШ)

[10] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Стационарные характеристики системы с поочерёдным обслуживанием заявок двумя линиями.* // Динамические системы. – ТНУ, 2008. – Вып. 24 – с. 69-82.

[11] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Анализ надёжности трёхэлементной иерархической системы, обслуживаемой двумя наладчиками* // Таврический нац. ун-т. – Симферополь – 2007. – 15с. – Библиогр.: 4 назв. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 03.01.08, № 14 - Ук'2008.

[12] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. *Исследование надежности однолинейной системы, обслуживающей два потока заявок, с конечной очередью.* // ТВИМ. – ТНУ – 2009. – №2 – с. 63-70.

Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П., Украина, Симферополь, Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, факультет математики и информатики, кафедра математического анализа

E-mail: svp54@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.944   MSC2000: 35D99

В.А. Корнеев

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ С РАЗРЫВНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Рассмотрена задача Коши для уравнения первого порядка в дивергентной форме с разрывным начальным условием. Задача сведена к задаче Коши с непрерывным решением для уравнения Гамильтона-Якоби. К этой задаче был применен метод сингулярных характеристик, разработанный А.А.Меликяном. Для случая когда Гамильтониан представляет собой полином третьей степени от искомой функции получено полное решение задачи.

An initial-value (Cauchy) problem for a first-order divergent-type partial differential equation with discontinuous initial condition is considered. The problem is reduced to the Cauchy problem with continuous solution for the Hamilton-Jacobi equation. This problem has been solved by the singular characteristic method proposed by A.A.Melikyan. A complete closed-form solution of the problem is obtained for the case where the Hamiltonian is a polynomial of degree 3 of the desired function.

Введение

Во многих задачах о распространении волн рассматривается непрерывное распределение какого-либо вещества или некоторое состояние среды. В одномерном случае (плоские течения), полагая переменную x координатой времени, а переменную y - пространственной координатой, можно определить плотность $v(x, y)$ на единицу длины и расход $q(x, y)$ в единицу времени. Определим скорость течения $w(x, y)$ равенством $w = q/v$. Предполагая, что исследуемое вещество сохраняется, можно считать, что скорость изменения его полного количества в любом интервале $y_1 > y > y_2$ должна компенсироваться суммарным потоком через сечения y_1, y_2, т.е.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{y_2}^{y_1} v(x, y)dy + q(x, y_1) - q(x, y_2) = 0.$$

Если $v(x, y)$ имеет непрерывные производные, то можно перейти к пределу $y_1 \to y_2$ и получить закон сохранения

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Простейшая задача о распространении волн получается в том случае, когда, исходя из теоретических или эмпирических соображений, можно постулировать некоторую функциональную связь между q и v. Если эту связь записать в виде $q = \varphi(v)$, то получаем закон сохранения в следующем виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

В газовой динамике ([1, с. 9], [2, с. 13]) уравнение (1) применяется для приближенного построения разрывных решений течения идеального газа, лишенного вязкости и теплопроводности.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00418)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi(v)}{\partial y} = f_1(x,y,v), \quad x \geq x_0, \\ v(x_0,y) = \psi_1(y), \quad x,y \in R^1, \quad f_1(x,y,v),\, \varphi(v) \in C^\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\psi_1(y)$ - ограниченная кусочно-гладкая функция. Если $f_1(x,y,v) \equiv 0$, это уравнение согласно вышеизложенному носит название закона сохранения, а также транспортного уравнения. Если свободный член $f_1(x,y,v)$ не зависит от v, то его можно рассматривать как внешний источник, возбуждающий волны ([2, с. 68]). Большое количество физических задач, приводящих к задаче (2) и ее обобщениям, рассмотрено в [2, с. 32-34], [3].

В данной работе полагаем, что $f_1(x,y,v)$ не зависит от v. Тогда можно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \varphi(\dfrac{\partial u}{\partial y}) = f(x,y), \\ u(x_0,y) = \psi(y), \quad x,y \in R^1, \quad f(x,y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} f_1(x,y)dy, \quad \psi(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \psi_1(y)dy, \end{cases} \tag{3}$$

дифференцируя решение которой по координате y можно получить решение задачи (2). Здесь значение y_0 выбирается любым из интервала гладкости $\psi_1(y)$. Функция $\psi(y)$ - непрерывная негладкая функция. Задача (3) представляет собой краевую задачу для уравнения Гамильтона-Якоби, возникающую в теории управления, механике, физике. В теории управления уравнение из (3) составляет основу динамического программирования и называется основным уравнением или уравнением Беллмана-Айзекса. Для широкого класса задач [4], [5] была доказана идентичность обобщенного (вязкого) решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби и функции оптимального результата задачи (функции Беллмана-Айзекса, цены игры). Поэтому, метод сингулярных характеристик ([6]) применим для решения задачи (3) .

В данной работе построено обобщенное решение начальной задачи (3) для случая кубической функции φ и кусочно-линейной выпуклой вверх функцией ψ с изломом в начале координат.

1. Определение вязкого решения.

Рассмотрение неавтономных задач управления и дифференциальных игр приводит к краевой задаче

$$\begin{cases} H(x,S(x),p) = 0,\ p = \partial S/\partial x = S_x,\ x \in \Omega \subset R^n, \\ S(x) = w(x),\ x \in M \subset \partial\Omega,\ x,p \in R^n, \end{cases} \tag{4}$$

в которой функция H и множество M имеют вид

$$\begin{cases} H = p_1 + H^*(x_1,\ldots,x_n,\, S,\, p_2,\ldots,p_n), \\ M = \{x \in R^n :\ x_1 = c_1 = const\} \end{cases} \tag{5}$$

Множество Ω представляет собой полупространство (или слой) справа или слева от множества M. Функции H^*, w непрерывны по своим переменным на множествах $\Omega \times R^n$ и M соответственно. Уравнение $H = 0$ из (4) с функцией H вида из (5) обычно называют уравнением Гамильтона-Якоби. Задача (4) может не иметь классического решения $S(x) \in C^1(\Omega)$, даже при наличии гладкости функций H и w.

Задача (4),(5) называется начальной (терминальной), если

$$\Omega = \{x \in R^n : x_1 > c_1\}\ (\{x \in R^n : x_1 < c_1\}). \tag{6}$$

Приведем одно из определений вязкого решения для краевой задачи (4),(5).

Определение 1. Непрерывная функция $S : \Omega \to R^1$ называется обобщенным решением начальной задачи (4)-(6), если для любой пробной функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$ в точках локального минимума (максимума) разности $S(x) - \varphi(x)$, справедливо неравенство

$$H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \geq 0 \quad (H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \leq 0). \tag{7}$$

В случае терминальной задачи неравенства (7) противоположны.

Для задачи (4)-(6) при достаточно общих предположениях доказано в [5] существование и единственность вязкого решения.

2. Метод характеристик. Сингулярные многообразия.

Для локального построения классического решения задачи (4) методом характеристик достаточно существования вторых производных у функций $S(x), H(x, S, p)$ ([7, с. 114]). Тогда построение классического решения задачи (4) сводится к интегрированию системы регулярных характеристик

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - pH_S. \tag{8}$$

В окрестности точек, в которых функции S, H не обладают указанными свойствами гладкости, упомянутая процедура построения решения, вообще говоря, не работоспособна.

Определение 2. Регулярной точкой обобщенного решения уравнения (4) будем называть любую внутреннюю точку x^0 области Ω определения решения $S(x)$, в окрестности D которой функция $S(x)$ дифференцируема и удовлетворяет основному уравнению $H(x, S(x), p) = 0$ из (4) с дважды дифференцируемой $H(x, S, p)$ в окрестности точки $(x^0, S(x^0), p^0) \in R^{2n+1}$, $p^0 = S_x(x^0)$. Все точки, не являющиеся регулярными, назовем сингулярными. Сингулярное множество (поверхность, линия, многообразие) состоит из сингулярных точек ([6, с. 57]).

Согласно терминологии дифференциальных игр сингулярные множества классифицируются по характеру поведения регулярных характеристик и степени гладкости функций $S(x), H(x, S, p)$ в их окрестности. Приведем кратко эту классификацию для начальной задачи.

Рассеивающая поверхность. С обеих сторон подходят регулярные характеристики, $S(x) \notin C^1$.

Эквивокальная поверхность. Регулярные характеристики с одной стороны подходят, а с другой отходят, $S(x) \notin C^1$. Для $H \in C^1$ характеристики отходят с касанием.

Поверхность переключения. Схожая с эквивокальной, но $S(x) \in C^1$, $H \notin C^1$.

Универсальная поверхность. Регулярные характеристики отходят в обе стороны, $S(x) \in C^1$ и $H(x, S, p) \notin C^1$.

Фокальная поверхность. Схожая с универсальной, $S(x) \notin C^1$. При $H \in C^1$ характеристики отходят от поверхности с касанием. Если фокальная поверхность вырождается в точку, получаем вершину интегральной воронки.

В точках сингулярной поверхности, на которой обобщенное решение – негладкое, выполнены следующие условия ([6, с. 60]).

Лемма. *Пусть $S(x)$ – обобщенное решение задачи (4), (5), представимое в окрестности D сингулярной поверхности Γ равенством*

$$S(x) = min\left[S^+(x),\ S^-(x)\right] \quad S^+(x), S^-(x) \in C^1(D). \tag{9}$$

Тогда на поверхности Γ для проверочной функции $h(\tau)$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &h(\tau) = H(x, S(x), p^+(1+\tau)/2 + p^-(1-\tau)/2) \leq 0, \ |\tau| \leq 1, \ x \in \Gamma, \\ &p^s = \partial S^s/\partial x, \ s = +, -, \quad h(-1) = h(1) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В случае, когда задача (4),(5) – терминальная или вязкое решение $S(x)$ представимо в виде $S(x) = max\,[S^+(x),\ S^-(x)]$, неравенство (10) меняет знак.

Доказательство. Для доказательства Леммы достаточно в (7) в качестве пробной функции взять $\varphi(x) = S^+(1+\tau)/2 + S^-(1-\tau)/2$.

3. Постановка задачи. Общий вид функции $h(\tau)$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$v_x + \varphi_y(v) = f, \quad x \geq 0, \quad \varphi(v) = av^3 + bv^2 + cv + d; \quad x, y \in R^1, \tag{11}$$

$$v(0,y) = \psi_1(y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0 \\ \rho_2 & y < 0. \end{cases} \tag{12}$$

для различных значений параметров a, b, c, d, e, f.

Если положить $\rho_1 = e - 1$, $\rho_2 = e + 1$, то следуя процедуре, описанной во введении, получаем соответствующую начальную задачу Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} &H = p + \varphi(q) - fy = 0,\ \varphi(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d;\ S(0,y) = -|y| + ey, \\ &p = \partial S/\partial x,\ q = \partial S/\partial y, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

У Уизема в [2, с. 47-58], описано два вида сингулярностей типичных для решения задачи (11), (12) для случая, когда $a = 0$, $b = 0$, $f = 0$.

Первый вид сингулярности соответствовал значениям параметров $\rho_1 > \rho_2$. Выходящие из начала координат две характеристики с двумя различными граничными условиями образовывали пространство между ними, которое заполнялось веером характеристик.

Для значений $\rho_2 > \rho_1$ возникал второй вид сингулярности – ударная волна, происходило опрокидывание волны, характеристики пересекались.

Этим особенностям соответствуют вершина интегральной воронки (вырожденный случай фокальной поверхности) и рассеивающая поверхность. Задача (13) соответствует случаю $\rho_2 > \rho_1$. При $a \neq 0$ и $f \neq 0$ возникают новые особенности.

Функция $S(0,y)$ из (13) представима в виде $S(0,y) = min\,[y(1-e), y(1+e)]$. Следует ожидать, поэтому, что в окрестности особых поверхностей функция $S(x,y)$ представима в виде (9). Построение решения подтвердило это предположение.

Применяя Лемму к задаче (13) непосредственным вычислением можно убедиться, что функция $h(\tau)$ из (10) имеет вид

$$h(\tau) = (\tau^2 - 1)(q^+ - q^-)^2(\,a\tau\,(q^+ - q^-) + 3\,a\,(q^+ + q^-) + 2\,b)/8, \qquad |\tau| \leq 1. \tag{14}$$

4. Первичное решение. Рассеивающая поверхность.

Уравнения регулярных характеристик (8) для задачи (13) имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = H_p = 1, \quad \dot{y} = H_q = \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \\ &\dot{p} = -H_x = 0, \quad \dot{q} = -H_y = f, \quad \dot{S} = pH_p + qH_q. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь параметром дифференцирования можно считать координату x. Используя равенства (13) и дифференцируя функцию $S(0,y)$, получаем начальные условия для системы (15) в произвольной точке $(0, y_0)$ оси y:

$$x = 0, \quad y = y_0, \quad p = -\varphi(q_0) + fy_0, \quad q = -sgn\,y_0 + e, \quad S = -|y_0| + ey_0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что все регулярные характеристики задачи (15) – кубические параболы на плоскости x, y

$$y_{xak}(x) = a(x^3 - x_0^3)f^2 + (b + 3aq_0)(x^2 - x_0^2)f + (2\,bq_0 + 3\,aq_0^2 + c)(x - x_0) + y_0.$$

Начальные значения (16) выделяют в окрестности границы – оси y, – два семейства парабол: верхнее и нижнее со значениями $q_0 = e - 1$, $q_0 = 1 + e$ соответственно

$$\left.\begin{aligned} y_{xak1}(x) &= a\,(\,x^3 - x_0^3\,)\,f^2 + (\,b - 3a + 3\,ae)\,(\,x^2 - x_0^2\,)\,f + \\ &\quad + (c - 6\,ae + 3\,a\,e^2 + 3a + 2\,b\,e - 2\,b)(\,x - x_0\,) + y_0\,, \\ y_{\,xak2}\,(x) &= a\,(x^3 - x_0^3)\,f^2 + (b + 3\,a + 3\,ae)(x^2 - x_0^2)f + \\ &\quad + (c + 6\,ae + 3\,ae^2 + 3\,a + 2\,b\,e + 2\,b)(x - x_0) + y_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Интегрируя систему (15) для $y_0 > 0$ и $y_0 < 0$ получаем функцию, называемую первичным решением задачи (13)

$$\left.\begin{aligned} &S(x,y) = min\,[S_1(x,y),\ S_2(x,y)]\,,\\ &S_i(x,y) = -af^3x^4/4 - (b/3 + q_{0i}\,a)f^2x^3 - (3q_{0i}^2a + c + 2q_{0i}b)fx^2/2 -\\ &\qquad\qquad -(d + bq_{0i}^2 + aq_{0i}^3 + cq_{0i})x + fxy + q_{0i}\,y, \quad q_{0i} = e + (-1)^i. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Далее укажем область, в которой решение 18) представляет *обобщенное* решение задачи (13). Равенство $S = S_1$ $(S = S_2)$ имеет место выше (ниже) кубической параболы, которую определяет условие непрерывности $S_1 = S_2$:

$$y_{disp} = a\,f^2x^3 + (3\,a\,e + b)\,x^2f + (2\,b\,e + 3\,a\,e^2 + c + a)\,x. \tag{19}$$

Для рассеивающей поверхности (19) справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &q^+ = q_1 = e - 1 + fx, \qquad q^- = q_2 = e + 1 + f\,x\,,\\ &h(\tau) = \ (\tau^2 - 1)(-\,a\tau\,+ 3\,a\,f\,x + 3\,a\,e +\,b), \qquad |\tau| \le 1. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Из соотношений (20) и Леммы следует, что необходимым условием существования рассеивающей поверхности служит условие

$$-|a| + 3\,a\,f\,x + 3\,a\,e +\,b \ge 0. \tag{21}$$

Заметим, что обращение в ноль левой части неравенства (21) происходит в точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2), абсциссы которых задаются соотношениями

$$x_i = -\,\frac{3\,ae + a(-1)^i + b}{3af}\,, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

а ординаты вычисляются из (19). В этих точках происходит касание параболы (19) одной из характеристик первичного решения. Переход рассеивающей поверхности в другой тип особенности происходит в этих точках.

Рис.1 поясняет построение рассеивающей поверхности для $a > 0, f > 0$.

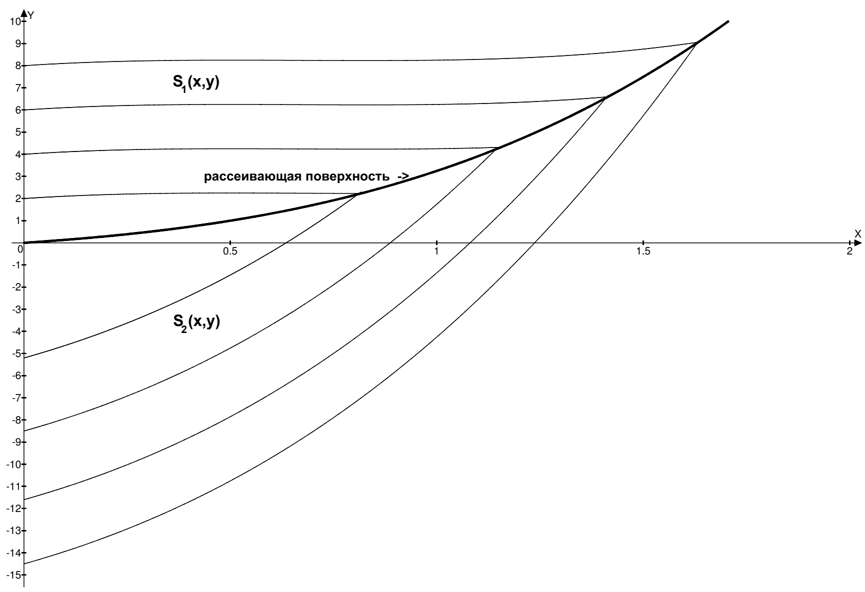


Рис. 1. $a = 1,\, b = 1 - 3\,e = -1/2,\ \ c = d = 0,\, e = 1/2,\, f = 1$

Построение проведено для значений $a = 1, b = 1 - 3e = -1/2, c = 0, d = 0, e = -1/2, f = 1$. Жирная кривая представляет собой рассеивающую поверхность, делящую полуплоскость $(x, y), x > 0$ на две области, в каждой из которых решение дается функциями $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$ как указано на рисунке. Тонкими линиями изображены регулярные характеристики.

Из формул (22) следует, что $x_2 - x_1 = -2/(3f)$. Поскольку $x_1 \neq x_2$ для любых $a \neq 0$ и $f \neq 0$ рассеивающая поверхность не может переходить в фокальную поверхность или в интегральную воронку и наоборот. Отсюда следует, что условие одностороннего касания в точках (x_1, y_1) при $a > 0$ и $f < 0$, (x_2, y_2) при $a < 0$ и $f > 0$ выделяет из всех упомянутых выше особых поверхностей эквивокальную поверхность.

5. Построение эквивокальной поверхности.

На эквивокальной поверхности в общем случае выполнены три необходимых условия в виде равенств – само уравнение (4), условие касания, условие непрерывности

$$H(x, u, p) = 0, \quad \left\langle H_p, p - \partial S^+/\partial x \right\rangle = 0, \quad F_1(x, S) \equiv S - S^+(x) = 0.$$

Здесь $S^+(x)$ – гладкая функция, совпадающая с решением по ту из сторон поверхности, где регулярные характеристики не касаются поверхности. В работах [6, с. 156], [8] показано, что в общем случае (4) эквивокальная поверхность (линия) в случае $H \in C^1$ может быть построена интегрированием системы сингулярных характеристик:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - pH_S - \frac{\{\{H, F_1\}, H\}}{\{\{F_1, H\}, F_1\}} \left(p - \frac{\partial S^+}{\partial x} \right), \\ &F_1(x, S) \equiv S - S^+(x), \quad \{F, H\} = \langle F_x + pF_s, H_p \rangle - \langle H_x + pH_s, F_p \rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

Построим эквивокальную поверхность при $a > 0$, $f < 0$ из точки (x_1, y_1) для случая $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Тогда $b = a(1 - 3e)$, $S^+(x) = S_2(x, y)$ и эквивокальная кривая определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \varphi_q, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{f(6aq + 2a - 6ae + 3fx + 3e + 3 - 3q)}{2a(3q + 1 - 3e)}, \\ &x = x_1 = 0, \qquad y = y_1 = 0, \qquad q = q(x_1) = e - 1 + fx_1 = e - 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Уравнение $\dot{x} = H_p = 1$ и уравнения для p, S здесь опущены, т.к. после интегрирования уравнений (24) значение p находится из равенства $H = 0$, а величина S находится из (23) после определения остальных переменных.

При $a = 1$ задача (24) допускает аналитическое решение

$$y_{eq}(x) = f^2x^3/4 + x^2f + (1 + c - 3e^2 + 2e)x, \quad q_{eq}(x) = e - 1 - f\,x/2.$$

и проверочная функция $h(\tau)$ для эквивокальной поверхности имеет вид

$$h(\tau) = (\tau^2 - 1)(2 + 3fx/2)^3(1 - \tau)/8; \qquad h(\tau) \equiv 0 \quad \text{при} \qquad x = x_m = -4/3f.$$

Эквивокальная поверхность заканчивается в точке x_m, y_m касания эквивокальной поверхности характеристикой из нижнего семейства парабол.

Построение эквивокальной поверхности и вязкого решения для описанного случая $a > 0$ и $f < 0$ поясняет рис.2.

Построение проведено для значений

$$a = 1, b = 1 - 3e = -1/2, c = 0, d = 0, e = -1/2, f = -1.$$

Жирной сплошной линией изображена эквивокальная поверхность. Жирными пунктирными линиями изображены регулярные характеристики, которые вместе с эквивокальной поверхностью ограничивают область, в которой строится семейство характеристик $y_{eqx}(x, \xi)$ согласно уравнениям (15) касательное к эквивокальной поверхности. Решение в этой части области обозначим $S_3(x, y)$. В двух оставшихся областях решение дается функциями $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$ как указано на рисунке. Тонкими линиями изображены характеристики. В той части области, прилегающей к эквивокальной

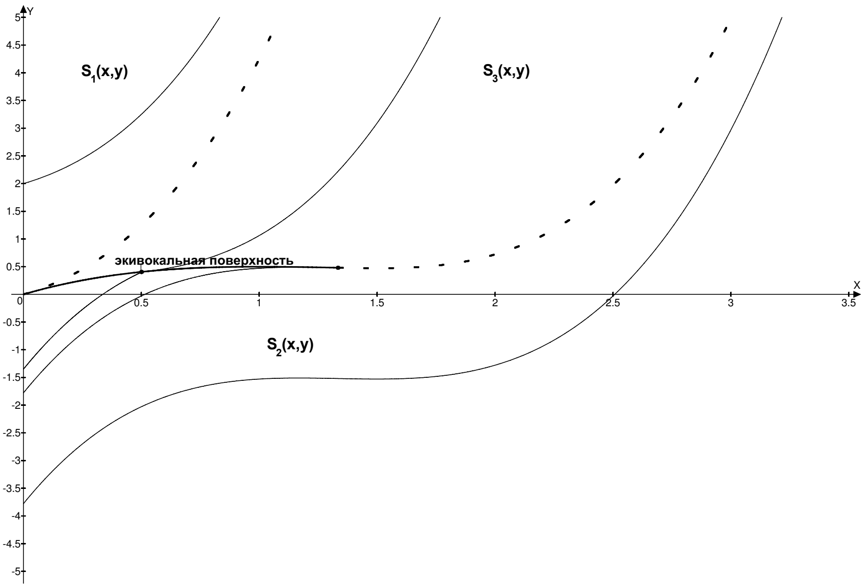


Рис. 2. $a=1$, b=1-3 e=-1/2, c=d=0, e=1/2, f=-1

кривой и из которой регулярные характеристики приходят на эквивокальную кривую, функция вязкого решения $S(x,y)$ совпадает с функцией $S_2(x,y)$.

6. Отсутствие фокальной поверхности

В точке (x_m, y_m) характеристики касаются сингулярной кривой сверху и снизу, предполагаем, что далее имеет место фокальный тип поверхности.

Обозначим через $S^{(1)}(x,y)$, $S^{(2)}(x,y)$ значения искомой $S(x,y)$ выше и ниже фокальной кривой соответственно.

На фокальной кривой должно быть выполнено условие касания с обеих сторон поверхности

$$g(x,y) = S^{(1)}(x,y) - S^{(2)}(x,y) = 0.$$

Выписывание этих условий совместно с равенствами $H=0$ по обе стороны поверхности $g(x,y)$ приводит к системе уравнений относительно векторов (p_1, q_1), (p_2, q_2), $(p_i = \partial S^{(i)}/\partial x,\ q_i = \partial S^{(i)}/\partial y,\ i=1,2)$

$$p_1 + \varphi(q_1) - fy = 0; \quad p_2 + \varphi(q_2) - fy = 0,$$

$$p_1 - p_2 + (q_1 - q_2)\varphi_q(q_i) = 0, \qquad \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \quad i = 1,2.$$

Решение этой системы возможно лишь при $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$. Это означает, что фокальная поверхность отсутствует.

В точке (x_m, y_m) заканчиваются сингулярные особенности и для $x > x_m$ имеем регулярное решение $S(x,y) = S_2(x,y)$. Здесь не принималось во внимание условие $b = a - 3\,ae$, т.е. фокальная поверхность отсутствует не только как продолжение эквивокальной поверхности, но и вообще в этой задаче.

Выводы

В работе [2] для задачи (2) с $f_1(x,y,v) \equiv 0$ и квадратичной функцией $\varphi(y)$ рассматривались граничные условия

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0 \\ \rho_2 & y < 0. \end{cases}$$

для $\rho_1 < \rho_2$ и $\rho_1 > \rho_2$. В первом случае происходило опрокидывание волны и характеристики пересекались. Во втором случае выходящие из начала координат две характеристики с двумя различными граничными условиями оставляли образовывали пространство между ними, которое заполнялось веером характеристик.

В данной работе рассмотрена задача с граничными условиями, соответствующими случаю $\rho_1 < \rho_2$. Поверхности пересечения характеристик (ударной волне) в работе [2] соответствует рассеивающая поверхность данной работы. Кроме рассеивающей поверхности была получена эквивокальная поверхность. Показано, что фокальная поверхность не существует. Интегральная воронка или веер характеристик в данной задаче не возникли из-за соответствующих граничных условий. Из решения задачи следует, что для наличия эквивокальной поверхности недостаточно рассмотрения функции $\varphi(v)$ квадратичной по v, а в случае кубической зависимости функции $\varphi(v)$ от v необходимо также, чтобы величина $f \neq 0$, т.е. необходим внешний источник волн. Подробности построения вязкого решения для данной задачи изложены в работе [10]. Аналогичная методика построения вязкого решения применялась в работах [11], [12].

Список литературы

[1] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнения и их приложения к газовой динамике.* // М.: Наука, 1968, 592 с.

[2] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* // М.: Мир, 1977, 624 с.

[3] Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* //М.: Наука, 1989, 336 с.

[4] Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби.* // М.: Наука, 1991, 216 с.

[5] Lions, P.-L. and Souganidis, P.E. *Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Bellman's and Isaacs' Equations* // SIAM Journal of Control and Optimization. Vol.23, No 4.1985, pp. 566-583.

[6] Melikyan,A.A. *Generalized Characteristics of First Order PDEs. Applications in Optimal Control and Differential Games*// Boston: Birkhauser, 1998, 320 p.

[7] Курант Р. *Уравнения с частными производными.*// М.: Мир, 1964, 830 с.

[8] Меликян А.А. *Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка* // Докл. РАН, т.82, N 2,1996, с. 203-217.

[9] Меликян А.А. *О построении слабых разрывов в задачах оптимального управления и дифференциальных игр* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. N 1, с. 45-50.

[10] Корнеев В.А. *Построение обобщенного решения уравнения в дивергентной форме методом характеристик* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. No 12. С. 1664-1673.

[11] Корнеев В.А., Меликян А.А. *Построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби методом характеристик.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. N 6, с. 168-177.

[12] Корнеев В.А. *Численное построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N 1, с. 92-98.

Корнеев В.А., Россия, Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН *E-mail:* korneev@ipmnet.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 519.8

В.А. Матвеев

УТОЧНЁННОЕ ПО КОНУСУ РЕШЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ БЕЗ ПОБОЧНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ

Рассматривается дифференциальная игровая задача Г, которая представлена в [1, с.21 - 25], именно,

$$\Gamma = \langle N, \Sigma, \{X_i\}_{i\in N}, \{J_i\}_{i\in N}\}\rangle. \tag{1}$$

Здесь $N = \{1, ..., N\}$ множество игроков. Управляемая динамическая система Σ, изменение во времени $t \in [t_0, t_1]$ в которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений и начальными условиями

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{N} B_i(t)u_i, \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Элементы матриц $A(t), B(t)$ предполагаются непрерывными. В (2-3) представлено изменение фазового вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ под воздействием управления $u = (u_1, ..., u_N)$. Управляющие воздействия (стратегии) i-го игрока отождествляется с функциям $u_i = u_i(t, x) = Q_i(t)x$, где элементы $n_i \times n$ матрицы $Q_i(t)$ предполагаются непрерывными для $t \in [t_0, t_1]$. Множество его стратегий

$$U_i = \{u_i = Q_i(t)x | Q_i(t) \in C_{n_i\times n}[t_0, t_1]\}, i \in N.$$

Далее используются ситуации

$$u = (u_1, \ldots, u_N) \in U = U_1 \times \ldots \times U_N. \tag{4}$$

Игра развивается следующим образом. Каждый из игроков выбирает и использует свою стратегию $u_i = Q_i(t)x \in U_i, i \in N$. В результате складывается ситуация $(u_1, \ldots, u_N) \in U = (U_1, \ldots, U_N)$. Фазовый вектор $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ находится как решение задачи (2-3). На наборах $(x(t), u_1, \ldots, u_N)$ задана функция выигрыша i-го игрока, определённая квадратичным функционалом

$$J_i(u, t_0, x_0) = x(t_1)C_i x(t_1) + \int_0^1 (u(t)D_i u(t) + x(t)G_i x(t))dt, \quad i \in N. \tag{5}$$

На содержательном уровне цель игроков состоит в совместном выборе своих стратегий, при котором окончательный исход (выигрыш) каждого игрока будет возможно большим. Учитывая (2-5), игра (1) называется дифференциальной позиционной линейно - квадратичной игрой N лиц [1, с.24].

Будем рассматривать кооперативный вариант игры (1), при котором игроки могут договариваться между собой о совместном выборе ситуации $u \in U$. Часто такие модели возникают в задачах, когда побочные платежи запрещены самими правилами игры. Например, в задачах преследования убегающего группой догоняющих, где функция выигрыша преследователя есть "его"расстояние (в момент окончания игры) до убегающего, передача части выигрыша (части расстояния) от одного преследователя к другому просто невозможно. Далее рассматривается кооперативная игра без побочных платежей.

Перейдём к нетривиальной задаче определения оптимального решения в кооперативной игровой задаче (1). Формально дифференциальную позиционную линейно - квадратичную игру N лиц (1) можно рассматривать как многокритериальную задачу с векторной функцией выигрыша [2,3]. Именно, определяется дифференциальная позиционная линейно - квадратичная многокритериальная задача

$$Z = \langle \Sigma, U, J \rangle. \tag{6}$$

Здесь управляемая динамическая система Σ представлена в (2-3). Управляющим воздействием в задаче (1) является ситуация из игры (1) и множество ситуаций U представлено в (4). Векторная функция выигрышей

$$J(u, x_0, t_0) = (J_1(u, x_0, t_0), \ldots, J_N(u, x_0, t_0)), \tag{7}$$

компоненты которой приведены в (5). Формальное сходство позволяет использовать принципы оптимальности от многокритериальной дифференциальной задачи (6) для дифференциальной кооперативной игровой задаче (1).

Один из достаточно общих подходов к определению решения в многокритериальной задаче основан на концепции конусной оптимальности [4, 5]. Отметим, что основные понятия, связанные с конусом и их свойствами в конечномерных евклидовых пространствах приведены в [6, с.235-273]. Будем рассматривать выпуклый, острый конус в R^N. Часто рассматривается многогранный (полиэдральный) конус в конечномерном евклидовом пространстве, который можно задать квадратной матрицей, именно,

$$K = \{f \in R^N | Af \geq 0_N\}/\{0_N\}. \tag{8}$$

Полагаем, что элементы матрицы являются неотрицательными, а сама матрица невырожденной. Это гарантирует то, что соответствующий конус в (8) будет выпуклым, острыми и его размерность совпадает с размерностью критериального пространства R^N. Конус порождает в векторном пространстве бинарное отношение $\geq_k$ по правилу

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K. \tag{9}$$

Известно, что если конус в (8) является выпуклым, острым и не содержит начало координат, то он определяет отношение строго порядка инвариантное относительно линейного положительного преобразования в R^N. Верно и обратное утверждение. Такой конус называют конусом доминирования в R^N, $N \geq 1$. Стандартным образом строгий порядок (9) в R^N при заданном конусе определяет оптимальное (максимальное, минимальное) по конусу решение в многокритериальной задаче. Используем приведённый выше подход к определению решения в дифференциальной кооперативной игре N лиц без побочных платежей (1).

Пусть конус определён невырожденной квадратной матрицей порядка N, элементы которой неотрицательны (8). Ситуация $u*$ $\in$ U называется оптимальной по конусу Kв задаче (1), если $\forall u \in U$ выполнено условие $J(u*) - J(u) \notin K$. Если при этом $R^N_> \subseteq K(-R^N_> \subseteq K)$, то оптимальное решение называется максимальным по конусу (минимальным по конусу).

Оптимальное по конусу K решение является достаточно общим в задаче (1). Действительно, такое решение, как частный случай, включает оптимальное по Парето (по Слейтеру) решение в задаче (1), которое будет конусным решением с конусом доминирования

$$R^N_+ = \{x \in R^N | x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N\}/\{0_N\}$$

$$(R^N_> = \{x \in R^N | x_i > 0, i = 1, \ldots N\}).$$

Оптимальных по конусу решений может быть много. Тогда уточнение по конусу можно применить несколько раз, последовательно уточняя (улучшая) решение. Соответствующий подход можно представить в матричной форме [5, с.172-175]. Рассмотрим следующую бесконечную последовательность квадратных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц

$$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, i \in N. \tag{10}$$

Все элементы стохастической матрицы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1. По последовательности матриц построим новую последовательность

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2A_1 = A_2B_1, B_3 = A_3A_2A_1 = A_3B_2 \ldots, B_n = A_nA_{n-1}\ldots A_1, \ldots, n \in N. \tag{11}$$

Каждая матрица из последовательности (11) будет определять многогранный конус аналогично (8). Обозначим конусы этой последовательности, как K_i,$i \in N$. Полученная последовательность конусов позволит построить уточнённое по конусу решение многокритериальной задачи (1).

Теорема 1. *Пусть матрицы $A_i, i \in N$, из последовательности (10) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда для любого натурального n*
а) матрица из последовательности (11) является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;
б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;
в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений задачи (1) имеет место включение $X_n^* \supset X_{n+1}^*$.

Каждая матрица B_i, $i \in N$ из последовательности (11) является стохастической и для них верны условия теоремы Фробениуса [5, с.с.354-355]. У каждой такой матрицы максимальное собственное значение $\lambda_i = 1$. Каждому собственному значению однозначно можно выбрать левый собственный вектор

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}), \sum_{i=1}^{m} a_i^{(n)} = 1, a_i^{(n)} > 0. \tag{12}$$

Учитывая вышеизложенное, для последовательности матриц (11) верно

Теорема 2. *Пусть матрицы A_i, $i \in N$, из последовательности (10) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда существует предел последовательности матриц (11), т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_1 = A_0.$$

Матрица A_0 является положительной, вырожденной с рангом равным 1, все строки матрицы равны

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}), \sum_{i=1}^{m} a_i^{(0)} = 1, a_i^{(0)} > 0.$$

где левый собственный вектор $a^{(n)}$ из (12).

Последнее утверждение является основанием для уточнения оптимального решения в задаче (1).

Определение 1. Рассматривается многокритериальная задача (1) и последовательность неотрицательных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц (10). Пусть набор чисел

$$a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}), \sum_{i=1}^{m} a_i^{(0)} = 1, a_i^{(0)} > 0$$

представляет строку предельной матрицы A_0 из теоремы 2. Тогда ситуацию

$$x* \in argmax(a_1^{(0)} J_1(u) + a_2^{(0)} J_2(u) + \ldots + a_N^{(0)} f_N(u)) \tag{13}$$

будем называть уточнённым по последовательности конусов (10) оптимальным (максимальным) решением дифференциальной игровой задачи (1).

Если в определении уточнения оптимального по конусу решения в дифференциальной игровой задаче (1) проводится по последовательности многогранных конусов, определённых степенями неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической матрицы , то полученное решение будем называть уточнённым по конусу решением многокритериальной задачи (1).

Рассмотрим кооперативный подход к формированию решения в дифференциальной игровой задаче (1). Уточнённое по конусу решение может быть определено из многогранного конуса, выбор которого устраивает всех игроков. Игроки должны сделать свой выбор из учёта своих интересов, которые представлены соответствующим функционалом (5) из векторной функции выигрыша (7), именно $J(u, x_0, t_0) = (J_1(u, x_0, t_0), \ldots, J_N(u, x_0, t_0))$. В тоже время интересы игроков требуется согласовать, предложив им пойти на снижение своего индивидуального выигрыша в обмен на выработку общего коллективного решения. $J(u, x_0, t_0) = (J_1(u, x_0, t_0), \ldots, J_N(u, x_0, t_0))$.

Каждый игрок $i \in N$ выбирает ситуацию, что доставляет наибольшее значение его функции выигрыша $J_i(u, x_0, t_0)$, т.е.$J_i(u^{i*}, x_0, t_0) \geq J_i(u, x_0, t_0), \forall u \in U$. В этой ситуации свои (не лучшие) выигрыши получают и все остальные игроки. Получается набор из N выигрышей всех игроков $J(u^{i*}, x_0, t_0) = (J_1(u^{i*}, x_0, t_0), \ldots, J_N(u^{i*}, x_0, t_0))$. Считаем, что все выигрыши положительны. Если это не так, то общим преобразованием, делаем все значения выигрышей положительными. Обозначим $M_i = (J_1(u^{i*}, x_0, t_0) + \ldots + J_N(u^{i*}, x_0, t_0))$ и получим набор из N положительных чисел, в сумме равных единице $(J_1(u^{i*}, x_0, t_0)/M_i, \ldots, J_N(u^{i*}, x_0, t_0)/M_i)$.

Аналогичным образом каждый игрок $i \in N$ определяет свой набор из положительных чисел, в сумме равных единице. Поставим набор чисел игрока $i \in N$ в i-ую строку матрицы . По построению эта квадратная матрица A порядка N является стохастической и она определяет конус доминирования K. По рецептам теоремы 2 многогранный конус доминирования K (стохастическая матрица A) позволяет определить уточнённое по конусу оптимальное решение. Уточнённым решение в кооперативной дифференциальной игре является оптимальное по конусу решение в соответствующей многокритериальной задаче и конус доминирования есть предельный многогранный конус K_0, из теоремы 2. Отметим, что этот конус определяется предельной матрицей A_0.

Полученное уточнённое по конусу решение можно считать решением исходной кооперативной игрой без побочных платежей. Действительно, такое решение выгодно каждому игроку, т.к. исходным пунктом кооперативного решения являются ситуации, наилучшие этому игроку. На втором этапе совместно выбирается компромиссное решение, которое обосновано существом рассматриваемой задачи (матрицей), а не личным предпочтением игрока.

Рассмотрим модельный пример кооперативной игры двух лиц без побочных платежей. Динамическая управляемая система представлена дифференциальным уравнением и начальным условием из [5, с.338], именно,

$$\dot{x} = u(t), \tag{14}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{15}$$

Здесь $x \in R, u \in R, t \in [0, 1]$. Заданы функционалы -выигрыши первого и второго игроков

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}x^2(1), \tag{16}$$

$$J_2 = 2\int_0^1 u^2 dt + x^2(1). \tag{17}$$

На содержательном уровне цель игры состоит в выборе такого управления, что доставляет возможно меньшее значение одновременно двум функционалам (16) и (17).

По предложенной выше схеме рассмотрим динамическую задачу минимизации (14), (15), (16) для первого игрока. Используя методы динамического программирования, находим оптимальное управление первого игрока, которое является постоянным $u^{1*} = -0,5x_0$. Функционал (16) принимает значение $J_1^{1*} = 0,25x_0^2$. При таком управлении $u^{1*} = -0,5x_0$ другой функционал (17) достигает $J_2^1 = 0,75x_0^2$.

Аналогично решается динамическая задача минимизации (14), (15), (17) для второго игрока. В этом случае оптимальное управление является постоянным $u^{2*} = -1/3x_0$. Функционал (17) принимает значение $J_2^{2*} = 2/3x_0^2$. Значение функционал (16) будет $J_1^2 = 5/18x_0^2$. Полученная информация позволяет определить стохастическую матрицу A, именно,

$$A = \begin{pmatrix} J_1^{1*}/M_1 & J_2^1/M_1 \\ J_1^2/M_2 & J_2^{2*}/M_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $M_1 = J_1^{1*} + J_2^1 = x_0^2$ и $M_2 = J_1^2 + J_2^{2*} = 17/18x_0^2$.

Матрица A определяет двухгранный конус K аналогично(8). Уточнение проводится по последовательности конусов, определяемых степенями матрица A. Предельная матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 20/71 & 51/71 \\ 20/71 & 51/71 \end{pmatrix}.$$

где $c = (20/71, 51/71)$ собственный вектор матрицы A, относящийся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$. Матрице A_0 соответствует конус K_0, аналогично (8).

Решением кооперативной дифференциальной игры двух лиц без побочных платежей (14 - 17) является оптимальное по предельному конусу решение двухкритериальной динамической задачи, определяемой условиями (14 - 17).

Оптимальное управление по конусу K_0 в последней двухкритериальной задаче находится как решение динамической задачи, аналогичной динамической задачи для первого (второго) игрока в данном примере. Отличие в целевом функционале, который в последнем случае равен

$$J = 112/173 \int_0^1 u^2 dt + 61/173 x^2(1).$$

Оптимальное управление находится по методам динамического программирования. Оно будет постоянным $u** = -61/173x_0$. В этом случае выигрыши игроков, представленные функционалами (16) и (17) будут $J** = (J_1^{**}, J_2^{**}) = (0,271726; 0,667780)$. Значения функционалов представлено с точностью до $\varepsilon = 0,000001$.

Список литературы

[1] Жуковский В.И. Кооперативные мгры при неопределённости и их приложения. М: Эдиториал УРСС, 1999.

[2] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

[3] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. -М.: Физматлит, 2002.

[4] Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Journal of optimization theory and application. 1974. V. 14, №3. - P.319-377.

[5] Матвеев В. А. Исследование оптимальности по конусу в многокритериальной задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ.k 2009. № 4. С.169-176.

[6] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1967.

[7] Гантмахер ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967.

[8] Пантелеев В.И.,Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. Москва: Высшая школа, 2003.

Матвеев В.А., 180000, Россия, Псков, Псковский государственный педагогический университет, физико - математический факультет, пл. Ленина, 2

E-mail: `matveev176@rambler.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.983.23 MSC2000: 47A60

А.Р. Миротин

К МНОГОМЕРНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ГЕНЕРАТОРОВ ПОЛУГРУПП

Уточняется основная теорема принадлежащего автору многомерного функционального исчисления генераторов сильно непрерывных полугрупп, основанного на классе функций Бернштейна нескольких переменных, и дается условие голоморфности полугрупп, порождаемых возникающими в исчислении операторами (подчиненных полугрупп).

Введение

Важность функциональных (операторных) исчислений обусловлена прежде всего тем, что они позволяют использовать при изучении операторов аппарат теории функций. Одномерное функциональное исчисление Бохнера-Филлипса имеет дело с функциями Бернштейна от генераторов сильно непрерывных полугрупп операторов (см., например, [1] – [3]). Оно находит также важные применения в теории случайных процессов. Основы многомерного исчисления были заложены автором в [4] – [6]. В данной заметке уточняется основная теорема из [6] и дается достаточное условие голоморфности полугрупп, порождаемых операторами, возникающими в построенном исчислении (подчиненных полугрупп).

1. Постановки

Для формулировки результатов напомним необходимые понятия и факты из [6].

Определение 1. Будем говорить, что неположительная функция $\psi \in C^\infty((-\infty;0)^n)$ *принадлежит классу* $\mathcal{T}_n$ (или *является функцией Бернштейна n переменных*), если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (функция из $C^\infty((-\infty;0)^n)$ называется *абсолютно монотонной,* если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

Последнее условие на ψ равносильно тому, что $\partial^\alpha\psi \geq 0$ для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$.

Очевидно, что $\mathcal{T}_n$ есть конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр.

Известно [6], что каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ допускает интегральное представление (ниже точкой мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n_+$)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (e^{s\cdot u} - 1)d\mu(u), \ (s \in (-\infty;0)^n) \tag{1}$$

где $c_0 = \psi(-0) := \lim\limits_{s\to -0}\psi(s)$, а c_1 из $\mathbb{R}^n_+$ и положительная мера μ на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ определяются по функции ψ однозначно. Более того, функция ψ голоморфно продолжается по формуле (1) в область $\{s \in \mathbb{C}^n | \mathrm{Re}(s) < 0\}$, и продолжение непрерывно в замыкании этой области.

Всюду ниже через $T_1, \ldots, T_n$ будут обозначаться попарно коммутирующие однопараметрические C_0-полугруппы (т. е. сильно непрерывные на $\mathbb{R}_+$ полугруппы) в комплексном банаховом пространстве X, удовлетворяющие условию $||T_j(t)|| \leq M \quad (t \geq 0; j = 1, \ldots, n; M = \mathrm{const} \geq 1)$. Через A_j обозначим генератор полугруппы T_j с областью определения $D(A_j)$ и положим $A = (A_1, \ldots, A_n)$. Далее коммутирование операторов $A_1, \ldots, A_n$ означает коммутирование соответствующих полугрупп. Через $\mathrm{Gen}(X)$ мы будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных C_0-полугрупп в X, а через I – единичный оператор в X.

Операторнозначная функция $T(u) := T_1(u_1)\dots T_n(u_n))$ $(u \in \mathbb{R}^n_+)$ является C_0-n-параметрической полугруппой, а потому линейное многообразие $D(A) := \cap_{j=1}^n D(A_j)$ плотно в X ([7], с. 98 – 99).

Определение 2. Определим значение функции ψ из $\mathcal{T}_n$ вида (1) на наборе $A = (A_1,\dots,A_n)$ при $x \in D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0x + c_1 \cdot Ax + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (T(u) - I)xd\mu(u),$$

где $c_1 \cdot Ax := \sum_{j=1}^n c_1^j A_j x$.

Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n, t \geq 0$. Тогда функция $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$ будет абсолютно монотонной на $(-\infty;0)^n$. Очевидно также, что $g_t(s) \leq 1$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна-Уиддера (см., например, [8], с. 281) существует такая единственная ограниченная положительная мера ν_t на $\mathbb{R}^n_+$, что при $s \in (-\infty;0)^n$

$$g_t(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{s\cdot u}d\nu_t(u) = (\mathcal{L}\nu_t)(-s), \tag{2}$$

где $\mathcal{L}$ обозначает n-мерное преобразование Лапласа.

Определение 3. Используя обозначения, введенные выше, положим $(x \in X)$

$$g_t(A)x = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T(u)xd\nu_t(u) \tag{3}$$

(интеграл понимается в смысле Бохнера).

Очевидно, что $||g_t(A)|| \leq M^n e^{t\psi(-0)} \leq M^n$. Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$, то ν_t образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому $g(A) : t \mapsto g_t(A)$ есть равномерно ограниченная полугруппа операторов на X. В частности, $g(A)$ есть C_0-полугруппа (в одномерном случае она называется *полугруппой, подчиненной полугруппе* T; терминология восходит к теории вероятностей, см. [9], §X.7).

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Замыкание оператора $\psi(A)$ существует и является генератором полугруппы $g(A)$ класса C_0, определенной формулой* (3).

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай, когда $\partial\psi(-0)/\partial s_j \neq \infty$ при всех $j = 1,\dots,n$, и покажем, что генератор полугруппы $g(A)$ совпадает с $\psi(A)$ на $D(A)$. Предположим сначала, что $c_0(= \psi(-0)) = 0$. Дифференцируя (2), получаем

$$\partial\psi(s)/\partial s_j \cdot g_t(s) = \mathcal{L}(t^{-1}u_j d\nu_t(u))(-s),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = \lim_{t\to+0} \mathcal{L}(t^{-1}u_j d\nu_t(u))(-s), \qquad j = 1,\dots,n.$$

С другой стороны, из (1) вытекает, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = c_1^j + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{s\cdot u}u_j d\mu(u) = \mathcal{L}(c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u))(-s),$$

где ε_0 есть мера Дирака на $\mathbb{R}^n$, сосредоточенная в нуле. Следовательно, по теореме непрерывности для преобразования Лапласа (см., например, [10], с. 530, теорема 3) имеем при $t \to +0$

$$t^{-1}u_j d\nu_t(u) \to c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где сходимость понимается в узкой топологии. Далее,

$$\frac{g_t(A)x - x}{t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (T(u) - I)xt^{-1}d\nu_t(u) \qquad (x \in D(A)). \tag{5}$$

Пусть, как выше, $B_j(u_j) = T_j(u_j) - I$. Если мы для x из $D(A)$ положим $u_j^{-1}B_j(u_j)x = A_j x$ при $u = 0$, то функция $u \mapsto u_j^{-1}B_j(u_j)x$ будет ограниченной и непрерывной на $\mathbb{R}^n_+$. В силу (4) имеем теперь при $t \to +0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_j(u_j)xt^{-1}d\nu_t(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}u_j d\nu_t(u) \longrightarrow$$

$$c_1^j A_j x + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_j(u_j)xd\mu(u);$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_i(u_i)B_j(u_j)xt^{-1}d\nu_t(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_i(u_i)(u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}d\nu_t(u) \longrightarrow$$

$$c_1^j B_i(0)A_j x + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_i(u_i)B_j(u_j)xd\mu(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_i(u_i)B_j(u_j)xd\mu(u),$$

и так далее. Поэтому, используя (5) и тождество ($B_i(u_i)$ коммутируют)

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^n B_j(u_j) + \sum_{i,j=1}^n B_i(u_i)B_j(u_j) + \cdots + B_1(u_1)\ldots B_n(u_n),$$

имеем при $x \in D(A)$

$$\lim_{t\to+0} \frac{g_t(A)x - x}{t} = c_1 \cdot Ax + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (T(u)x - x)d\mu(u) = \psi(A)x.$$

Если же $c_0 = \psi(-0) < 0$, то все сводится к предыдущему случаю, поскольку $\psi(s) = c_0 + \psi_0(s)$, где $\psi_0 \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_0(-0) = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. не будем исключать равенства $\partial\psi(-0)/\partial s_j = \infty$ для некоторых j. Пусть $\epsilon \in \mathbb{R}^n_+$, причем все $\epsilon_j > 0$, и пусть $\psi_\epsilon(s) := \psi(s - \epsilon), s \in (-\infty; 0)^n$. Тогда $\partial\psi_\epsilon(-0)/\partial s_j = \partial\psi(-\epsilon)/\partial s_j \neq \infty$ при всех j, причем ψ_ϵ принадлежит $\mathcal{T}_n$ и имеет интегральное представление

$$\psi_\epsilon(s) = c_0 + c_1 \cdot (s - \epsilon) + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (e^{(s-\epsilon)\cdot u} - 1)d\mu(u) =$$

$$\psi(-\epsilon) + c_1 \cdot s + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (e^{s\cdot u} - 1)e^{-\epsilon\cdot u}d\mu(u).$$

Поскольку

$$g_{\epsilon t}(s) := e^{t\psi_\epsilon(s)} = g_t(s - \epsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{s\cdot u}e^{-\epsilon\cdot u}d\nu_t(u),$$

то по доказанному выше генератор C_0-полугруппы

$$g_{\epsilon t}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T(u)e^{-\epsilon\cdot u}d\nu_t(u) \tag{6}$$

совпадает на $D(A)$ с $\psi_\epsilon(A)$. Обозначим его G_ϵ. Заметим, что при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x - \psi_\epsilon(A)x = (c_0 - \psi(-\epsilon))x + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus\{0\}} (T(u) - I)x(1 - e^{-\epsilon\cdot u})d\mu(u),$$

а потому

$$\|\psi(A)x - \psi_\epsilon(A)x\| \le (|c_0 - \psi(-\epsilon)| + (M^n + 1) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus\{0\}} (1 - e^{-\epsilon\cdot u})d\mu(u))\|x\|. \qquad (7)$$

Используя теорему Б. Леви, получаем из (7), что при $\epsilon \downarrow +0$

$$\psi_\epsilon(A)x \to \psi(A)x \qquad (x \in D(A)).$$

Неравенство (7) показывает также, что оператор $\psi(A) - \psi_\epsilon(A)$ продолжается с $D(A)$ до некоторого ограниченного оператора F_ϵ на X. Оператор G_ϵ замкнут, значит, замкнут и оператор $G_\epsilon + F_\epsilon$, являющийся расширением оператора $\psi(A)$. Следовательно, оператор $\psi(A)$ допускает замыкание, которое мы временно обозначим $\psi(A)^-$. При этом $D(A)$ является ядром оператора $\psi(A)^-$ в смысле [11] (т. е. существенной областью). Из (6) получаем, что $g_{\epsilon t}(A)$ сходится по норме к $g_t(A)$ $\quad(\epsilon \to +0)$ равномерно по t на любом конечном интервале, поскольку при $0 \le t \le b$

$$\|g_t(A) - g_{\epsilon t}(A)\| \le \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|T(u)\|(1 - e^{-\epsilon\cdot u})d\nu_t(u) \le$$

$$M^n \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} d\nu_t(u) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\epsilon\cdot u} d\nu_t(u) \right) = M^n(e^{t\psi(-0)} - e^{t\psi(-\epsilon)}) \le$$

$$M^n(e^{t(\psi(-0)-\psi(-\epsilon))} - 1) \le M^n(e^{b(\psi(-0)-\psi(-\epsilon))} - 1).$$

Кроме того, $\|g_{\epsilon t}(A)\| \le M^n$. Поэтому, если G есть генератор полугруппы $g(A)$, то $R(\lambda, G_\epsilon) \to R(\lambda, G)$ сильно при $\mathrm{Re}\lambda > 0$ $\quad(\epsilon \to +0)$ (см., например, [12], с. 373, теорема 2). С другой стороны, фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Если $S_\epsilon := G_\epsilon + F_\epsilon$, то λ будет регулярной точкой для S_ϵ в силу теоремы IX.2.1 из [11]. Так как $U_\lambda := \psi(A)^- - \lambda I \subset S_\epsilon - \lambda I$, то $U_\lambda^{-1} \subset R(\lambda, S_\epsilon)$. Используя ограниченность резольвенты $R(\lambda, S_\epsilon)$ и замкнутость U_λ^{-1}, выводим, что образ X_1 оператора U_λ замкнут в X. Теперь покажем, что $R(\lambda, G_\epsilon)x \to U_\lambda^{-1}x$ при $x \in X_1$ $\quad(\epsilon \downarrow +0)$. В самом деле, поскольку $\|g_{\epsilon t}(A)\| \le M^n$, то $\|R(\lambda, \psi_\epsilon(A))\| \le M^n/\mathrm{Re}\lambda$. Следовательно, для x из X_1, таких, что $U_\lambda^{-1}x \in D(A)$, имеем при $\epsilon \downarrow +0$

$$R(\lambda, G_\epsilon)x - U_\lambda^{-1}x = R(\lambda, G_\epsilon)(\psi_\epsilon(A) - \psi_\epsilon(A)^-)U_\lambda^{-1}x \to 0.$$

Но множество таких x плотно в X_1, и осталось применить принцип равномерной ограниченности. Таким образом, $R(\lambda, G)x = U_\lambda^{-1}x$ при всех $x \in X_1$, а потому $\psi(A)^- \subset G$. Покажем, что здесь имеет место равенство. Поскольку операторы $g_t(A)$ коммутируют с $T_k(s)$, то, как легко проверить, $g_t(A) : D(A_k) \to D(A_k)$, а потому и $g_t(A) : D(A) \to D(A)$. Отсюда следует, что $D(A)$ есть существенная область для генератора G (см. [13], следствие 3.1.7). С другой стороны, $D(A)$ есть существенная область для оператора $\psi(A)^-$, причем сужения операторов $\psi(A)^-$ и G на $D(A)$ совпадают с $\psi(A)$. Поэтому $\psi(A)^- = G$, что и завершает доказательство.

Предыдущая теорема мотивирует окончательный вариант основного определения.

Определение 4. Под *значением функции* ψ из $\mathcal{T}_n$ на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ коммутирующих операторов из $\mathrm{Gen}(X)$ будем понимать генератор полугруппы $g(A)$. Это значение мы далее обозначаем $\psi(A)$. Возникающее функциональное исчисление будем называть *многомерным исчислением Бохнера-Филлипса*, или *$\mathcal{T}_n$-исчислением.*

Укажем условия, при которых оператор $\psi(A)$ порождает голоморфную полугруппу.

Теорема 2. *Предположим, что полугруппы T_j сжимающие и удовлетворяют условию*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\lim_{t\to+0}}\|I - T_j(t)\| < 2.$$

Тогда для любой функции ψ из $\mathcal{T}_n$ оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $c_0(= \psi(0)) = 0$. Положим $b_j = \overline{\lim}_{t\to+0}\|I - T_j(t)\|$ и выберем $\epsilon > 0$ таким, что $\sum_{j=1}^{n} b_j + \epsilon < 2$. Найдется такое $\delta > 0$, что $\|I - T_j(t)\| < b_j + \epsilon/n$ при всех $j = 1, \dots, n; t \in [0;\delta)$.

Далее, из тождества

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^{n} T_1(u_1)\dots T_{j-1}(u_{j-1})(T_j(u_j) - I)$$

следует, что

$$\|I - T(u)\| \le \sum_{j=1}^{n} \|I - T_j(u_j)\|,$$

а потому при $u \in [0;\delta)^n$ справедливо неравенство $\|I - T(u)\| \le \sum_{j=1}^{n} b_j + \epsilon$. Значит, если $x \in X, \|x\| \le 1$, то

$$\|(I - g_t(A))x\| \le \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u)\|x\| \le$$

$$\le \int\limits_{[0;\delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus[0;\delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} b_j + \epsilon + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus[0;\delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u).$$

То есть

$$\|I - g_t(A)\| \le \sum_{j=1}^{n} b_j + \epsilon + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus[0;\delta)^n} \|I - T(u)\| d\nu_t(u). \tag{8}$$

Заметим теперь, что направленность мер ν_t узко сходится к мере Дирака δ_0 при $t \to +0$. В самом деле, преобразование Лапласа $\mathcal{L}\nu_t(s) = e^{t\psi(s)}$ непрерывно в точке $s = 0$ и $\mathcal{L}\nu_t(s) \to 1 = \mathcal{L}\delta_0(s)$ при $t \to +0$. Поэтому узкая сходимость вытекает из уже упоминавшейся теоремы непрерывности для многомерного преобразования Лапласа [10]. Но так как полугруппы T_j, будучи голоморфными (они удовлетворяют неравенству $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}\|I - T_j(t)\| < 2$), становятся равномерно непрерывными, ограниченная функция $u \mapsto \|I - T(u)\|$ непрерывна на $\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n$. Следовательно, переходя в (8) к верхнему пределу при $t \to +0$, получим

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\|I - g_t(A)\| \le \sum_{j=1}^{n} b_j + \epsilon < 2.$$

В силу известного свойства сильно непрерывных полугрупп (см., например, [14], следствие 2.5.7) отсюда следует голоморфность полугруппы $g(A)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть пространство X равномерно выпукло, T_1 – голоморфная полугруппа сжатий в X, и (если $n > 1$) операторы $A_2, \dots, A_n$ ограничены. Тогда для любой функции ψ из $\mathcal{T}_n$ оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы сжатий.*

Доказательство. Условие теоремы выполнено, поскольку $\overline{\lim}_{t\to+0}\|I - T_1(t)\| < 2$ (см., например, [14], следствие 2.5.8), а при $j > 1$ справедливы равенства $\lim_{t\to+0} \|I - T_j(t)\| = 0$.

Из предыдущего следствия вытекает положительный ответ на вопрос из [1] для равномерно выпуклых пространств.

Следствие 2. *Пусть пространство X равномерно выпукло. Если T – голоморфная полугруппа сжатий в X с генератором A, то для любой функции ψ из $\mathcal{T}_1$ оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы сжатий.*

Список литературы

[1] Kishimoto A., Robinson D. *Subordinate semigroups and order properties.* //J. Austral. Math. Soc. (Series A) - 1981. - Vol. 31. – P. 59 - 76.

[2] Berg C. at al. *Generation of generators of holomorphic semigroups.* // J. Austral. Math. Soc. (Series A) – 1993. – Vol. 55. – P. 246 - 269.

[3] Carasso A. S., T. Kato. *On subordinated holomorphic semigroups.* // Trans. Am. Math. Soc. –1991. – Vol. 327. – P. 867 - 878.

[4] Миротин А. Р. *Действие функций класса Шенберга $\mathcal{T}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры.* // Мат. заметки. – 1997. – Т. 61, N 4. – С. 630 - 633.

[5] Миротин А. Р. *Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры.*, II // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64, N 3. – С. 423 - 430.

[6] Миротин А.Р. *Многомерное $\mathcal{T}$-исчисление от генераторов C_0-полугрупп.* // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, N 2. – С. 142 - 170.

[7] Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы* // ИЛ, М. – 1962.

[8] Ахиезер Н. И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* // Физматгиз, М. – 1961.

[9] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.* // Мир, М., 1984.

[10] Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах.* // Наука, М. – 1977.

[11] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* // Мир, М. – 1972.

[12] Иосида К. *Функциональный анализ.* // Мир, М. – 1967.

[13] Браттели У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* // Мир, М. – 1982.

[14] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* // Springer-Verlag, N. Y. – 1983.

Миротин Адольф Рувимович, 246000, Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, математический факультет, Советская, 104

E-mail: amirotin@yandex.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.927.25 MSC2000: 34L10

В.С. Рыхлов

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ОДНОМ ЛУЧЕ[1]

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка, порожденный однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и двухточечными краевыми условиями специальной структуры с l условиями только в нуле ($1 \le l \le n-1$). Предполагается, что корни характеристического уравнения лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Найдено достаточное условие m-кратной полноты системы корневых функций при $m \le n-l$ в пространстве $L_2[0,1]$. Показана точность полученного результата.

Введение

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y \equiv \sum_{0\le s+k\le n} p_{sk}(x)\lambda^s y^{(k)}, \qquad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_j(y,\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $p_{n-k}(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{n-k} p_{sk}(x)\lambda^\nu$, $p_{sk}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{jk}(\lambda), b_{jk}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2) рассмотрим краевые условия

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

не содержащие параметра λ.

При изучении спектральных свойств несамосопряженного пучка $L(\lambda)$ одной из основных задач является задача исследования свойств его корневых (собственных и присоединенных) функций. Весьма важными являются вопросы о возможности разложения функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям, в частности, вопросы полноты корневых функций в $L_2[0,1]$. Напомним некоторые определения из [1]– [2].

Определение 1. Число λ_0 называется *собственным значением (с.з.)* пучка $L(\lambda)$, если существует функция $y_0(x) \not\equiv 0$ в области определения $L(\lambda)$ такая, что $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Функция $y_0(x)$ называется *собственной функцией (с.ф.)* пучка $L(\lambda)$, соответствующей с.з. λ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1).

Определение 2. Пусть λ_0 есть с.з. пучка $L(\lambda)$, а $y_{00}(x)$ — соответствующая с.ф.. Система функций $y_{01}(x), y_{02}(x), \ldots, y_{0l}(x)$ называется *системой функций, присоединенных к с.ф.* $y_{00}(x)$, если эти функции являются решениями следующих задач

$$L(\lambda_0)y_{0q} + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial\lambda}y_{0q-1} + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q L(\lambda_0)}{\partial\lambda^q}y_{00} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, l.$$

Здесь $\frac{\partial^k L(\lambda_0)}{\partial\lambda^k}\left(:= \frac{\partial^k L(\lambda)}{\partial\lambda^k}|_{\lambda=\lambda_0}\right)$ обозначает пучок, порожденный дифференциальным выражением $\frac{\partial^k \ell(y,\lambda_0)}{\partial\lambda^k}$ и краевыми условиями $\frac{\partial^k U_j(y,\lambda_0)}{\partial\lambda^k} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$.

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. пучка $L(\lambda)$. Предполагаем, что множество Λ счетно.

Определение 3. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$ и $y_{00}, y_{01}, \ldots, y_{0l}$ есть система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.), соответствующая с.з. λ_0. Обозначим

$$y_{sq} = \left(\frac{\partial^s}{\partial t^s}e^{\lambda_0 t}\left(y_{0q} + \frac{t}{1!}y_{0q-1} + \cdots + \frac{t^q}{q!}y_{00}\right)\right)\Bigg|_{t=0}, \; s = \overline{0, n-1}, \; q = \overline{0, l}.$$

Для $0 < m \le n$ система вектор-функций $\tilde{y}_q = (y_{0q}, y_{1q}, \ldots, y_{m-1q})^T$, $q = \overline{0, l}$, называется *производной (по Келдышу) m-цепочкой, соответствующей системе с.п.ф.* $y_{00}, y_{01}, \ldots, y_{0l}$.

Пусть $Y := \{y_k\}$ есть множество всех с.п.ф. или, по-другому, корневых функций пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 4. Система Y корневых функций пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$.

Определение 5. Дефектом данной системы векторов в гильбертовом пространстве называется размерность ортогонального дополнения к линейной оболочке этой системы.

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$.

Эта задача актуальна только для нерегулярных ([2, с. 66–67], [3]) пучков операторов $L(\lambda)$ (или вырожденных, как их иногда называют) с "плохим" поведением функции Грина при $|\lambda| \to \infty$ (например, экспоненциальный рост в секторах раствора не меньше π). При "хорошем" поведении функции Грина (например, степенная ограниченность при $|\lambda| \to \infty$ на некоторых лучах) эта задача уже решена в [3]– [4].

Основополагающей по этой проблеме является работа [5], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка $[0,1]$, а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [6] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в [7] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [8]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения (1) был рассмотрен в [9]– [10]. В работах [3]– [4], относящихся к общему виду (1)–(2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы корневых функций в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте корневых функций пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце), проведено в [11]– [12].

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте корневых функций еще не исследовался. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный однородным дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk}\in\mathbb{C}, \quad p_{0n}\neq 0, \tag{4}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями специальной структуры

$$\begin{aligned} &U_i^0(y,\lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s\alpha_{isk}y^{(k)}(0) = 0,\ i=\overline{1,l},\\ &U_i^0(y,\lambda) := \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \lambda^s\alpha_{isk}y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \lambda^s\beta_{isk}y^{(k)}(1) = 0,\ i=\overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda,\alpha_{isk},\beta_{isk}\in\mathbb{C}$, $\varkappa_{i0},\varkappa_{i1}\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $1\le l\le n-1$.

Отметим, что краевые условия (5) в случае $2l<n$ не являются полураспадающими.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно дифференциального выражения $\ell_0(y,\lambda)$, а именно, что корни $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ его характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n. \tag{6}$$

Для рассматриваемого пучка (4)–(5) с условием (6) не выполняются основные предположения [11, с. 60], а именно, что существует прямая d, проходящая через начало координат, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n-l$, а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

Однократная полнота корневых функций для частного случая пучка (4)–(5) при $l=n-1$ в предположении (6) исследована в [13].

Для формулировки результатов введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n};$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k,\ i=\overline{l+1,n},\ j=\overline{l+1,n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0},\varkappa_{i1}\},\ i=\overline{l+1,n}; \quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n\ge 0,\\ 0, & \text{если } n<0.\end{cases}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие* (6) *и*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^l\neq 0,\ \det(a_{ij})_{i,j=1}^n\neq 0,\ \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n\neq 0,$$

то система корневых функций пучка (4)–(5) *m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m\le n-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. В [11, с. 72–77] (см. также [12, с. 58–62]) сформулирована теорема об $(n-l+1)$-кратной неполноте системы корневых функций частного случая пучка вида (4)–(5), краевые условия которых являются полураспадающимися и не зависят от параметра λ. Но доказательство этой теоремы по мнению автора настоящей статьи недостаточно убедительно. В [14]– [15] при $l=n-1$ и $m=n-l+1(=2)$ получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (4)–(5) m-кратно не полны в $L_2[0,1]$ и имеют бесконечный дефект.

В случае $l = 1$ из теоремы 1 получаем $(n-1)$-кратную полноту корневых функций в $L_2[0,1]$. Что же касается n-кратной полноты, то оказывается справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие* (6), $l = 1$ *и* $a_{11} \neq 0$, *то система корневых функций пучка* (4)–(5) n*-кратно неполна в* $L_2[0,1]$ *с бесконечным дефектом.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этих теорем. Схема доказательства теоремы 1 соответствует схеме доказательства теорем 2.1, 2.2 и 2.3 из [11] или [12]. Центральную роль в доказательстве играет лемма 1 об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем разделе. Доказательство теоремы 2 опирается на лемму 2, которая является следствием утверждения 2.3 из [11].

1. Обозначения, предварительные утверждения и лемма об оценке

Функции $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (ф.с.р.) $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$.

Ненулевые собственные значения (с.з.) $\lambda_k \neq 0$, $k = 1,2,\ldots$, пучка (4)–(5) являются нулями целой функции $\Delta(\lambda) := \det\bigl(U_i^0(y_j(x,\lambda),\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n$. Несмотря на то, что $\Delta(0) = 0$, число $\lambda_0 = 0$ может быть с.з., а может и не быть.

Обозначим через $\Phi_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки в случае $l+1 \le i \le n$ строкой $y_1(x,\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda)$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left(\frac{\partial^k \Phi_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^k},\ldots,\frac{\partial^k\bigl(\lambda^{m-1}\Phi_i(x,\lambda)\bigr)}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{7}$$

где $i = \overline{l+1,n}$, $k = \overline{0,s}$, $m \in \{1,\ldots,n\}$, $\nu = 1,2,\ldots$, являются производными по Келдышу m-цепочками для корневых функций, соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\Theta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{8}$$

где $h(x) = \bigl(h_1(x),\ldots,h_m(x)\bigr)^T \in L_2^m[0,1]$.

Перепишем (8) в виде

$$\Theta_i(\lambda) = \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{9}$$

где $\Delta_i(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки строкой

$$u_{n+11}(\lambda), u_{n+12}(\lambda), \ldots, u_{n+1n}(\lambda),$$

где

$$u_{n+1k}(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m h_j(x)\lambda^{j-1} y_k(x,\lambda)\,dx.$$

Следующие два предложения потребуются нам в дальнейшем. Их доказательство можно найти, например, в [12, с.48–49].

Предложение 1. *Функции* $\Phi_{l+1}(x,\lambda),\ldots,\Phi_n(x,\lambda)$ *являются линейно-независимыми решениями уравнения* $\ell_0(y,\lambda) = 0$, *удовлетворяющими первым* l *условиям (5) в точке* 0.

Предложение 2. *Функции* $\Theta_i(\lambda)$ *не зависят от выбора ф.с.р. уравнения* $\ell_0(y,\lambda) = 0$.

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+ = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in \Big[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\Big] \bigcup \Big[\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, 2\pi\Big)\Big\},$$

$$\Pi_\varepsilon^- = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in \Big[\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\Big]\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве полноты. Доказательство ее можно найти в [16].

Лемма 1. *Если*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^l \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n \neq 0, \tag{10}$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ *и* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i1}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

а если

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0, \tag{11}$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ *и* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}}, \quad i = \overline{l+1, n}.$$

Следствие 1. *Если выполняются условия* (10)–(11) *и* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^\pm$*, то при* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad i = \overline{l+1, n}, \tag{12}$$

где $\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}$.

2. Доказательство теоремы о кратной полноте корневых функций

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам. Тогда на основании предложения 2 и того факта, что столбцы (7), где $i = \overline{l+1, n}$, $k = \overline{0, s}$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, являются производными m-цепочками для корневых функций, соответствующих с.з. λ_ν, которые являются нулями $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$, из (8)–(9) следует, что $\Theta_i(\lambda)$ есть целая функция и все ее особенности устранимы. Согласно оценкам (12) и теореме Лиувилля, $\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m-2-\varkappa_i$ при $m-2-\varkappa_i \ge 0$, которые можно записать в виде

$$\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{0i}\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{1i}\big) + \dots + \big(\bar{h}, \zeta_{m-2-\varkappa_i i}\big),$$

а при $m-2-\varkappa_i < 0$

$$\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В дефектном подпространстве производных m-цепочек выберем подпространство $\mathfrak{H}$, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{ki}(x)$, $k = \overline{0, m-2-\varkappa_i}$, $i = \overline{l+1, n}$. Пусть теперь $\bar{h} \in \mathfrak{H}$. Тогда $\Theta_i(\lambda) \equiv 0$ и, значит,

$$\Delta_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)h_j(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1, n}. \tag{13}$$

Так как в силу предложения 1 система функций $\Phi_{l+1}, \dots, \Phi_n$ является системой линейно-независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющих первым l краевым условиям (5), то из (13) следует тождество

$$\int\limits_0^1 y(x,\lambda) \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} h_j(x)\,dx \equiv 0 \tag{14}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющего первым l краевым условиям (5). Но эти решения находятся в виде

$$y(x,\lambda) = \gamma_1 e^{\lambda\omega_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \dots + \gamma_n e^{\lambda\omega_n x}, \tag{15}$$

если удовлетворить первые l условий (5). Следовательно, приходим к следующей линейной однородной системе l уравнений для нахождения γ_j

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = \overline{1,l}. \tag{16}$$

Систему (16) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\gamma_j = -\sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}\gamma_j, \quad i = \overline{1,l}. \tag{17}$$

Если в правой части взять любые $\gamma_{l+1},\dots,\gamma_n$, то из (17) в силу того, что по условию теоремы $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{l} \neq 0$, можно однозначно определить $\gamma_1,\dots,\gamma_l$. Следовательно, для любого $m \le n-l$ существует такая ф.с.р. $(\gamma_1^i,\gamma_2^i,\dots,\gamma_n^i)^T$, $i=\overline{1,n-l}$, системы (16), что

$$\Gamma_m = \begin{vmatrix} \gamma_{n-m+1}^1 & \gamma_{n-m+2}^1 & \cdots & \gamma_n^1 \\ \hdotsfor{4} \\ \gamma_{n-m+1}^m & \gamma_{n-m+2}^m & \cdots & \gamma_n^m \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

На основании (14)–(15) для такой ф.с.р. $(\gamma_1^i,\gamma_2^i,\dots,\gamma_n^i)^T$, $i = \overline{1,n-l}$, справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x} \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1} h_k(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{1,n-l}. \tag{19}$$

Покажем, что из этих $n-l$ тождеств следует, что $h_k = 0$ при $k=\overline{1,m}$. Будем следовать схеме рассуждений [11, с. 77–80] (см. также [12, с. 63–64]). Разложим $e^{\lambda\omega_j x}$ в ряд

$$e^{\lambda\omega_j x} = 1 + \lambda\omega_j x + \frac{(\lambda\omega_j x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda\omega_j x)^N}{N!} + \dots,$$

подставим в (19), представим левые части (19) в виде ряда по степеням λ и приравняем к нулю коэффициенты. Тогда при любом натуральном $N \ge N_0$, где N_0 — достаточно большое число, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^i \omega_j^N}{N!} \int_0^1 h_1(x)x^N\,dx + \dots + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j^i \omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx = 0, \ i = \overline{1,n-l}. \tag{20}$$

Это линейная алгебраическая система относительно m неизвестных

$$\int_0^1 h_1(x)x^N\,dx, \ \int_0^1 h_2(x)x^{N-1}\,dx, \ \dots, \ \int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx.$$

Возьмем первые m уравнений в (20) и рассмотрим соответствующую систему с квадратной матрицей

$$D_N^m = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n \gamma_j^1 \frac{\omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^n \gamma_j^1 \frac{\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \cdots & \sum_{j=1}^n \gamma_j^1 \frac{\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \hdotsfor{4} \\ \sum_{j=1}^n \gamma_j^m \frac{\omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^n \gamma_j^m \frac{\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \cdots & \sum_{j=1}^n \gamma_j^m \frac{\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le n} \begin{vmatrix} \gamma_{j_1}^1 \frac{\omega_{j_1}^N}{N!} & \gamma_{j_2}^1 \frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!} & \cdots & \gamma_{j_m}^1 \frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \hdotsfor{4} \\ \gamma_{j_1}^m \frac{\omega_{j_1}^N}{N!} & \gamma_{j_2}^m \frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!} & \cdots & \gamma_{j_m}^m \frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le n} \frac{\omega_{j_1}^N}{N!} \frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!} \cdots \frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \begin{vmatrix} \gamma_{j_1}^1 & \gamma_{j_2}^1 & \cdots & \gamma_{j_m}^1 \\ \hdotsfor{4} \\ \gamma_{j_1}^m & \gamma_{j_2}^m & \cdots & \gamma_{j_m}^m \end{vmatrix}.$$

Отсюда, из (6) и из (18) можно заключить, что слагаемое, соответствующее $j_1 = n-m+1$, $j_2 = n-m+2$, $\dots$, $j_m = n$, при N достаточно большом мажорирует сумму всех других слагаемых, то есть имеет место равенство

$$D_N^m = \frac{\omega_{n-m+1}^N}{N!}\frac{\omega_{n-m+2}^{N-1}}{(N-1)!}\dots\frac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\Gamma_m\big(1+o(1)\big),$$

где $o(1)\to 0$ при $N\to\infty$. Следовательно, при $N\ge N_0$ получим $D_N^m\ne 0$. Тогда из системы (20) будем иметь при $N\ge N_0$

$$\int\limits_0^1 h_1(x)x^N\,dx = \int\limits_0^1 h_2(x)x^{N-1}\,dx = \ \dots, \ = \int\limits_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx = 0.$$

А отсюда следует, что $h_k=0$ при $k=\overline{1,m}$ и, тем самым, теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы о кратной неполноте корневых функций

Докажем теперь теорему 2. Покажем, что при выполнении условия (6) в случае $l=1$ и $a_{11}\ne 0$ система корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно неполна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект. Для этого построим бесконечномерное подпространство $\mathfrak{N}$ вектор-функций $\bar h=(\bar h_1,\dots\bar h_n)^T\in L_2^n[0,1]$, ортогональных в $L_2^n[0,1]$ системе вектор-функций

$$Y_i(x,\lambda)=\big(y_i(x,\lambda),\lambda y_i(x,\lambda),\dots,\lambda^{n-1}y_i(x,\lambda)\big)^T,\quad i=\overline{1,n-1} \tag{21}$$

при всех $\lambda\in\mathbb{C}$, где

$$y_i(x,\lambda)=\sum_{j=1}^n\gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x},\quad i=\overline{1,n-1},$$

а $(\gamma_1^i,\gamma_2^i,\dots,\gamma_n^i)^T$, $i=\overline{1,n-1}$, — ф.с.р. системы (16), которая при $l=1$ состоит из одного уравнения. Нетрудно видеть, что в таком случае $\mathfrak{N}$ входило бы в дефектное подпространство системы производных n-цепочек, соответствующих корневым функциям пучка $L_0(\lambda)$.

Далее потребуется лемма, которая является частным случаем утверждения 2.3 [11, с. 73–74].

Лемма 2. *Если функции $h_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,1]$ до $(i-1)$-го порядка, обращаются в нуль вместе этими производными на $\left[\frac{\omega_1}{\omega_n},1\right]\cup\{0\}$ и удовлетворяет системе из $n-1$-го уравнения*

$$\left\{\begin{array}{lllll}\gamma_1^1\frac{\omega_n}{\omega_1}\tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right) & + \ \gamma_2^1\frac{\omega_n}{\omega_2}\tilde h_2\left(\frac{\omega_n}{\omega_2}x\right) & +\dots+ & \gamma_n^1\tilde h_n(x) & =0,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_1^{n-1}\frac{\omega_n}{\omega_1}\tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right) & + \ \gamma_2^{n-1}\frac{\omega_n}{\omega_2}\tilde h_2\left(\frac{\omega_n}{\omega_2}x\right) & +\dots+ & \gamma_n^{n-1}\tilde h_n(x) & =0,\end{array}\right. \tag{22}$$

где $x\in\left[0,\frac{\omega_1}{\omega_n}\right]$ и

$$\tilde h_k(x)=h_1(x)-\frac{1}{\omega_k}h_2'(x)+\dots+\left(-\frac{1}{\omega_k}\right)^{n-1}h_n^{(n-1)}(x),\quad k=\overline{1,n},$$

то вектор-функция $\bar h(x)=\big(\bar h_1(x),\dots\bar h_n(x)\big)^T$ ортогональна в $L_2[0,1]$ вектор-функциям (21) при всех $\lambda\in\mathbb{C}$.

Так как в силу (18)

$$\begin{vmatrix}\gamma_2^1\frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \gamma_{n-1}^1\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} & \gamma_n^1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_2^{n-1}\frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \gamma_{n-1}^{n-1}\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} & \gamma_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\omega_n}{\omega_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\begin{vmatrix}\gamma_2^1 & \dots & \gamma_{n-1}^1 & \gamma_n^1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_2^{n-1} & \dots & \gamma_{n-1}^{n-1} & \gamma_n^{n-1}\end{vmatrix}=\frac{\omega_n}{\omega_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\Gamma_{n-1}\ne 0,$$

то из системы (22) можно выразить функции $\tilde h_2, \tilde h_3, \ldots, \tilde h_n$:

$$\begin{cases} \tilde h_2\left(\frac{\omega_n}{\omega_2}x\right) & = & d_2 & \tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right), \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \tilde h_{n-1}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}x\right) & = & d_{n-1} & \tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right), \\ \tilde h_n(x) & = & d_n & \tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right), \end{cases} \tag{23}$$

где $x \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_n}\right]$, а $d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ — некоторые числа, которые определяются однозначно.

Делаем в первом равенстве соотношений (23) замену $\frac{\omega_n}{\omega_2}x = t$, во втором — $\frac{\omega_n}{\omega_3}x = t$ и так далее, в $(n-2)$-м — $\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}x = t$, в $(n-1)$-м — просто меняем x на t. В результате получим

$$\begin{cases} \tilde h_2(t) & = & d_2 & \tilde h_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}t\right), & t \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_2}\right], \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \tilde h_{n-1}(t) & = & d_{n-1} & \tilde h_1\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_1}t\right), & t \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_{n-1}}\right], \\ \tilde h_n(t) & = & d_n & \tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}t\right), & t \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_n}\right]. \end{cases}$$

Но так как $\tilde h_j(t) = 0$ при $t \in \left[\frac{\omega_1}{\omega_n}, 1\right]$, то окончательно получим, возвращаясь к переменной x,

$$\begin{cases} \tilde h_1(x) & = & d_1\, \tilde h_1(x), \\ \tilde h_2(x) & = & d_2\, \tilde h_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}x\right), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \tilde h_n(x) & = & d_n\, \tilde h_1\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}x\right), \end{cases} \tag{24}$$

где $x \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_n}\right]$ и $d_1 = 1$.

Возьмем произвольную непрерывную функцию $\tilde h_1(x)$, обращающуюся в ноль на отрезке $\left[\frac{\omega_1}{\omega_n}, 1\right]$ и в 0, такую, что

$$\int\limits_0^{\frac{\omega_1}{\omega_n}} x^s \tilde h_1(x)\, dx = 0, \quad s = \overline{0, n-2}. \tag{25}$$

Из (24) однозначно найдем функции $\tilde h_2(x), \ldots, \tilde h_{n-1}(x), \tilde h_n(x)$, при $x \in \left[0, \frac{\omega_1}{\omega_n}\right]$ и положим $\tilde h_j(x) = 0$ при $x \in \left[\frac{\omega_1}{\omega_n}, 1\right]$. Таким образом, $\tilde h_j(x)$ будут также непрерывными функциями, обращающимися в нуль на отрезке $\left[\frac{\omega_1}{\omega_n}, 1\right]$ и в 0.

Далее, из системы

$$\begin{cases} \tilde h_1(x) = h_1(x) - \frac{1}{\omega_1}h_2'(x) + \cdots + \left(-\frac{1}{\omega_1}\right)^{n-1} h_n^{(n-1)}(x), \\ \dotfill \\ \tilde h_n(x) = h_1(x) - \frac{1}{\omega_n}h_2'(x) + \cdots + \left(-\frac{1}{\omega_n}\right)^{n-1} h_n^{(n-1)}(x), \end{cases}$$

определитель которой, очевидно, отличен от нуля, найдем функции $h_1(x), h_2'(x), \ldots, h_n^{(n-1)}(x)$. Очевидно, что при некоторых однозначно определяемых коэффициентах η_{jk} выполняются равенства

$$\begin{array}{lcl} h_1(x) & = & \eta_{11}\tilde h_1(x) + \cdots + \eta_{1n}\tilde h_n(x), \\ h_2'(x) & = & \eta_{21}\tilde h_1(x) + \cdots + \eta_{2n}\tilde h_n(x), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ h_n^{(n-1)}(x) & = & \eta_{n1}\tilde h_1(x) + \cdots + \eta_{nn}\tilde h_n(x). \end{array} \tag{26}$$

Отсюда видно, что функции $h_1(x), h_2'(x), \ldots, h_n^{(n-1)}(x)$ будут также непрерывными функциями, обращающимися в нуль на отрезке $\left[\frac{\omega_1}{\omega_n}, 1\right]$ и в 0.

Возьмем в качестве $h_j(x)$ функции

$$h_j(x) = \frac{1}{(j-2)!}\int\limits_0^x (x-\xi)^{j-2} h_j^{(j-1)}(\xi)\,d\xi, \quad j=\overline{2,n}. \tag{27}$$

По построению, очевидно, что векторы $h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)^T$ образуют бесконечномерное подпространство в $L_2[0,1]$. Покажем, что так построенные функции $h_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяют предположениям леммы 2. Очевидно, в доказательстве нуждается лишь тот факт, что функции $h_j(x)$ и их производные до $(j-1)$-го порядка обращаются в ноль при $x\in\left[\frac{\omega_1}{\omega_n},1\right]$. Проверим это непосредственно.

В силу свойств (24)– (27) будем иметь при $x\in\left[\frac{\omega_1}{\omega_n},1\right]$ и $k=\overline{1,j-1}$, $j=\overline{2,n}$

$$(j-k-1)!h_j^{(k-1)}(x) = \int\limits_0^x (x-\xi)^{j-k-1} h_j^{(j-1)}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\omega_1}{\omega_n}} (x-\xi)^{j-k-1} h_j^{(j-1)}(\xi)\,d\xi = \sum_{s=0}^{j-k-1} C_{j-k-1}^s (-1)^s x^{j-k-1-s} \sum_{i=1}^n \eta_{ji} \int\limits_0^{\frac{\omega_1}{\omega_n}} \xi^s \tilde{h}_i(\xi)\,d\xi =$$

$$= \sum_{s=0}^{j-k-1} C_{j-k-1}^s (-1)^s x^{j-k-1-s} \sum_{i=1}^n \eta_{ji} d_i \int\limits_0^{\frac{\omega_1}{\omega_n}} \xi^s \tilde{h}_1\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\xi\right) d\xi =$$

$$= \sum_{s=0}^{j-k-1} C_{j-k-1}^s (-1)^s x^{j-k-1-s} \sum_{i=1}^n \eta_{ji} d_i \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^{s+1} \int\limits_0^{\frac{\omega_i}{\omega_n}} \tau^s \tilde{h}_1(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=0}^{j-k-1} C_{j-k-1}^s (-1)^s x^{j-k-1-s} \sum_{i=1}^n \eta_{ji} d_i \left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^{s+1} \int\limits_0^{\frac{\omega_1}{\omega_n}} \tau^s \tilde{h}_1(\tau)\,d\tau = 0,$$

так как в интеграле будет $s\in\{0,\ldots,j-k-1\}\subset\{0,\ldots,n-2\}$. Таким образом, $h_j^{(k-1)}(x)=0$ при $x\in\left[\frac{\omega_1}{\omega_n},1\right]$, $k=\overline{1,j}$, $j=\overline{2,n}$.

Следовательно, в силу леммы 2 множество всех таких вектор-функций $\bar{h}(x) = \left(\bar{h}_1(x),\ldots,\bar{h}_n(x)\right)^T$ образует бесконечномерное подпространство $\mathfrak{N}$, ортогональное в $L_2^n[0,1]$ системе вектор-функций (21) при всех $\lambda\in\mathbb{C}$.

Тем самым, теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Келдыш М.В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов*// УМН. – 1971. – Т.26, №4. – С.15–41.

[2] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*// М.: Наука. – 1969.

[3] Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. Тр. семин. им. И.Г. Петровского*// – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1983. – №9. – С.190–229.

[4] Gasymov M.G., Magerramov A.M. *О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов*// Докл. АН Азерб. ССР. – 1974. – Т.30, №12. – С.9–12.

[5] Келдыш М.В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*// Докл. АН СССР. – 1951. – Т.77, №1. – С.11–14.

[6] Хромов А.П. *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Дис. …докт. физ.-мат. наук*// Новосибирск. – 1973 – 242 с.

[7] Шкаликов А.А. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями*// Функц. анализ. – 1976. – Т.10, №4. – С.69–80.

[8] Хромов А.П.*О порождающих функциях вольтерровых операторов*// Матем. сборник. – 1977. – Т.102(144), №3. – С.457–472.

[9] Freiling G. *Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel*// Math. Z. – 1984. – V.188, N1. – P.55–68.

[10] Тихомиров С.А. *Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук*// Саратов. – 1987. – 126 с.

[11] Вагабов А.И. *Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения. Дис. ... докт. физ.-мат. наук*// Москва. – 1988. – 201 с.

[12] Вагабов А.И. *Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов*// Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. – 1994. – 160 с.

[13] Рыхлов В.С. *О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*// Изв. вузов. Математика. – 2009. – №6. – С.42–53.

[14] Рыхлов В.С. *О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных диференциальных операторов. Математика. Механика: Сб. науч.тр.*// Саратов: Изв. Сарат. ун-та. – 2001. – Вып.3. – С.114–117.

[15] Рыхлов В.С. *О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче. Доклады Российской академии естественных наук*// Саратов: Изд-во Сарат. госуд. техн. ун-та. – 2004. – №4. – С.72–79.

[16] Рыхлов В.С. *О кратной полноте корневых функций одного класса пучков диференциальных операторов*// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Том.10, Вып.2. – С.

Рыхлов Виктор Сергеевич, 410012, Россия, Саратов, Саратовский госуниверситет, механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики, Астраханская, 83

E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.962.8 MSC2000: 47B36, 47E05

С.А. Симонов

ФОРМУЛЫ ТИПА ВЕЙЛЯ-ТИТЧМАРША ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛАМИ ВИГНЕРА-ФОН НЕЙМАНА И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Рассмотрены дискретный оператор Шредингера и обыкновенный дифференциальный оператор Шредингера на полуоси с потенциалами Вигнера-фон Неймана. Приведены результаты о формулах типа Вейля-Титчмарша для спектральной плотности. Также приведены результаты о поведении спектральной плотности операторов вблизи критических значений спектрального параметра, возникающих внутри абсолютно непрерывного спектра.

Discrete Schrödinger operator and ordinary differential Schrödinger operator on the half-line with Wigner-von Neumann potentials are considered. Results concerning Weyl-Titchmarsh type formulas for the spectral density are stated. Results on the behavior of the spectral density of the operators near critical values of the spectral parameter inside the absolutely continuous spectrum are also stated.

Введение

В данной работе рассматривается две схожих задачи для дискретного оператора Шредингера и обыкновенного оператора Шредингера с фоновым периодическим потенциалом. Из теории субординации [1], [4] известно, что для матриц Якоби и для дифференциальных операторов второго порядка асимптотика обобщенных собственных векторов связана со спектральными свойствами оператора. Более того, в случае дифференциального оператора Шредингера на полуоси с суммируемым потенциалом классическая формула Вейля-Титчмарша (Кодаиры) ([9], Глава 5, [5]) устанавливает связь между коэффициентами в асимптотике решения спектрального уравнения, удовлетворяющего граничному условию, и спектральной плотностью оператора. В случае дискретного оператора Шредингера с суммируемым потенциалом аналогичная формула связывает коэффициенты в асимптотике ортогональных полиномов, ассоциированных с оператором, и спектральную плотность. В настоящей работе мы рассмотрим операторы Шредингера с потенциалом Вигнера-фон Неймана. Такие потенциалы замечательны тем, что дают простой пример операторов, абсолютно непрерывный спектр которых может содержать собственные значения. В непрерывном случае рассматривается потенциал $q_{WN}(x)$ вида

$$q_{WN}(x) := \frac{c\sin(2\omega x+\delta)}{x+1} + q_1(x), \tag{1}$$

где $q_1 \in L_1(\mathbb{R}_+)$, а в дискретном случае потенциал $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ вида

$$b_n = \frac{c\sin(2\omega n+\delta)}{n} + q_n, \tag{2}$$

где $\{q_n\}_{n=1}^\infty \in l^1$. В обоих случаях добавление такого потенциала к свободному оператору приводит к появлению внутри абсолютно непрерывного спектра критических (резонансных) точек, в которых и возможно появление собственного значения. Положение этих точек определяется частотой ω. В критических точках меняется асимптотика обобщенных собственных векторов [6], и это не может не отразиться на спектральной плотности, которая при определенных условиях имеет ноль степенного вида. В данной работе мы сформулируем соответствующие результаты для двух рассматриваемых моделей. Доказательства будут содержаться в работах [3] и [8]. Для получения таких результатов требуются аналоги формул Вейля-Титчмарша для операторов Шредингера с потенциалами Вигнера-фон Неймана (так как эти потенциалы не суммируемы). Эти утверждения содержатся в работах [2] и [7]. Мы приведем их формулировки.

Результаты

Рассмотрим сначала дискретный случай. Дискретный оператор Шредингера - это матрица Якоби $\mathcal{J}$ с единичными весами и диагональю $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то есть, оператор, действующий на вектора $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ по правилу

$$(\mathcal{J}u)_1 := b_1 u_1 + u_2,$$
$$(\mathcal{J}u)_n := u_{n-1} + b_n u_n + u_{n+1},\ n \geq 2.$$

Относительно стандартного базиса в l^2 оператор $\mathcal{J}$ имеет матричное представление вида

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & b_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Спектр $\mathcal{J}$ состоит из отрезка $[-2;2]$ и собственных значений вне этого отрезка. Частота ω порождает две резонансные точки $\pm 2\cos\omega$. Спектр $\mathcal{J}$ на интервалах $(-2;2)\backslash\{\pm 2\cos\omega\}$ является чисто абсолютно непрерывным. Ортогональные полиномы $P_n(\lambda)$ ассоциированные с $\mathcal{J}$ определяются рекуррентным соотношением

$$P_1(\lambda) := 1, P_2(\lambda) := \lambda - b_1,$$
$$P_{n+1}(\lambda) := (\lambda - b_n)P_n(\lambda) - P_{n-1}(\lambda),\ n \geq 2.$$

Вместо параметра λ в формулировках удобно пользоваться параметром z, связанным с λ соотношениями

$$\lambda = z + \frac{1}{z},\ z = \frac{\lambda - i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}.$$

Формула типа Вейля-Титчмарша для $\mathcal{J}$ дается следующей теоремой [2] (мы обозначаем символом $\mathbb{T}$ единичную окружность в комплексной плоскости).

Теорема 1. *Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана формулой (2) и выполняются условия*

$$\omega \notin \pi\mathbb{Z} \text{ и } \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1.$$

Для любого $z \in \mathbb{T}\backslash\{1, -1, e^{\pm i\omega}, -e^{\pm i\omega}\}$ существует такое $F(z)$, что ортогональные полиномы P_n, ассоциированные с $\mathcal{J}$, имеют следующую асимптотику:

$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{zF(z)}{1-z^2} \cdot \frac{1}{z^n} + \frac{\overline{zF(z)}}{z^2-1} \cdot z^n + o(1) \text{ при } n \to \infty.$$

Функция F непрерывна в $\mathbb{T}\backslash\{1, -1, e^{\pm i\omega}, -e^{\pm i\omega}\}$ и не обращается в ноль на этом множестве. Для почти всех $\lambda \in (-2;2)$ спектральная плотность $\mathcal{J}$ равна

$$\rho'(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi \left|F\left(\frac{\lambda - i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}\right)\right|^2} \tag{3}$$

(формула типа Вейля-Титчмарша).

Основываясь на формуле (3), мы сводим анализ поведения спектральной плотности к асимптотическому анализу ортогональных полиномов. Исследуя характер изменения типа асимптотики при приближении к критической точке по оси λ, мы можем установить поведение спектральной плотности. Ответ дается следующей теоремой [3].

Теорема 2. *Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана формулой (2) и выполняются условия*

$$\omega \notin \pi\mathbb{Z} \text{ и } \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1.$$

Пусть

$$\lambda_{cr} \in \{-2\cos\omega, 2\cos\omega\}.$$

Если $\{P_n(\lambda_{cr})\}_{n=1}^{\infty}$ *не является субординационным решением спектрального уравнения, то спектральная плотность оператора* $\mathcal{J}$ *имеет следующую асимптотику:*

$$\rho'(\lambda) \sim c_{cr}^{+} \cdot |\lambda - \lambda_{cr}|^{\frac{|c|}{2|\sin\omega|}} \text{ при } \lambda \to \lambda_{cr} + 0,$$

$$\rho'(\lambda) \sim c_{cr}^{-} \cdot |\lambda - \lambda_{cr}|^{\frac{|c|}{2|\sin\omega|}} \text{ при } \lambda \to \lambda_{cr} - 0$$

с некоторыми положительными константами c_{cr}^{+} *и* c_{cr}^{-}*.*

Как мы видим, в абсолютно непрерывном спектре оператора возникает псевдолакуна (=ноль спектральной плотности), если в критической точке полиномы не являются субординационным решением спектрального уравнения.

Непрерывный случай

Рассмотрим теперь непрерывный случай. Пусть q - периодическая функция с периодом a и $q_1 \in L_1(0;a)$. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\alpha$ на $\mathbb{R}_+$

$$\mathcal{L}_\alpha := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + q_{WN}(x),$$

где потенциал $q_{WN}(x)$ задан формулой (1), с граничным условием

$$\psi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0.$$

Абсолютно непрерывный спектр такого оператора совпадает со спектром $\sigma(\mathcal{L}_{per})$ периодического оператора на всей оси

$$\mathcal{L}_{per} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x).$$

Спектр $\mathcal{L}_{per}$ состоит из зон,

$$\sigma(\mathcal{L}_{per}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} ([\lambda_{2n};\mu_{2n}] \cup [\mu_{2n+1};\lambda_{2n+1}]),$$

где

$$\lambda_0 < \mu_0 \le \mu_1 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \mu_2 \le \mu_3 < \lambda_3 \le \lambda_4 < ...$$

Частота ω в потенциале порождает по две критические точки в каждой спектральной зоне, $\nu_{n,+}$ и $\nu_{n,-}$, $n \ge 0$, определенные условиями

$$\begin{aligned} k(\nu_{n,+}) &= \pi\left(n + 1 - \left\{\tfrac{a\omega}{\pi}\right\}\right), \\ k(\nu_{n,-}) &= \pi\left(n + \left\{\tfrac{a\omega}{\pi}\right\}\right), \end{aligned}$$

где $k(\lambda)$ - квазиимпульс для оператора $\mathcal{L}_{per}$. Пусть $\psi_+(x,\lambda)$ и $\psi_-(x,\lambda)$ - решения Блоха для $\mathcal{L}_{per}$, а $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &-\varphi_\alpha''(x,\lambda) + (q(x) + q_{WN}(x))\varphi_\alpha(x,\lambda) = \lambda\varphi_\alpha(x,\lambda), \\ &\varphi_\alpha(0,\lambda) = \sin\alpha, \\ &\varphi_\alpha'(0,\lambda) = \cos\alpha. \end{aligned}$$

В критических точках асимптотика решения $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ меняет свой тип. Формула Вейля-Титчмарша для $\mathcal{L}_\alpha$ дается следующей теоремой [7]. Будем под $W(\psi_+(\lambda),\psi_-(\lambda))$ понимать вронскиан решений Блоха $\psi_+(x,\lambda)$ и $\psi_-(x,\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть* $\frac{2a\omega}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ *и* $q_1 \in L_1(\mathbb{R}_+)$*. Для всех*

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{per}) \backslash \{\nu_{n,+}, \nu_{n,-}, n \ge 0\}$$

существует такое $A_\alpha(\lambda)$*, что*

$$\varphi_\alpha(x,\lambda) = A_\alpha(\lambda)\psi_-(x,\lambda) + \overline{A_\alpha(\lambda)}\psi_+(x,\lambda) + o(1) \text{ при } x \to \infty$$

и для почти всех $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{per})$

$$\rho_\alpha'(\lambda) = \frac{1}{2\pi|W(\psi_+(\lambda),\psi_-(\lambda))||A_\alpha(\lambda)|^2} \quad (4)$$

(формула типа Вейля-Титчмарша).

С помощью формулы (4) мы сводим исследование свойств спектральной плотности оператора к анализу асимптотического поведения решения $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ при приближении параметра λ к критическому значению. В результате мы получаем следующую теорему [8].

Теорема 4. *Пусть* $\frac{2a\omega}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ *и* $q_1 \in L_1(\mathbb{R}_+)$. *Для каждого* n *существуют такие* $c^+_{n,+}, c^-_{n,+}, \beta_{n,+}$, *что если* $\varphi_\alpha(x,\nu_{n,+})$ *не является субординационным решением спектрального уравнения для оператора* $\mathcal{L}_\alpha$, *то*

$$\rho'(\lambda) \sim c^+_{n,+}|\lambda-\nu_{n,+}|^{\beta_{n,+}} \text{ при } \lambda \to \nu_{n,+}+0,$$

$$\rho'(\lambda) \sim c^-_{n,+}|\lambda-\nu_{n,+}|^{\beta_{n,+}} \text{ при } \lambda \to \nu_{n,+}-0,$$

и, соответственно, существуют такие $c^+_{n,-}, c^-_{n,-}, \beta_{n,-}$, *что если* $\varphi_\alpha(x,\nu_{n,-})$ *не является субординационным решением спектрального уравнения для оператора* $\mathcal{L}_\alpha$, *то*

$$\rho'(\lambda) \sim c^+_{n,-}|\lambda-\nu_{n,-}|^{\beta_{n,-}} \text{ при } \lambda \to \nu_{n,-}+0,$$

$$\rho'(\lambda) \sim c^-_{n,-}|\lambda-\nu_{n,-}|^{\beta_{n,-}} \text{ при } \lambda \to \nu_{n,-}-0.$$

Таким образом, вообще говоря, в каждой спектральной зоне имеется по две псевдолакуны, обусловленные добавлением потенциала Вигнера-фон Неймана к периодическому оператору Шредингера. При этом для каждой критической точки λ_{cr} существует такое значение граничного параметра α_{cr}, при котором решение $\varphi_{\alpha_{cr}}(x,\lambda_{cr})$ окажется субординационным, и нуля спектральной плотности не появляется.

Список литературы

[1] Gilbert D.J., Pearson D.B. *On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators* // Journal of mathematical analysis and applications – 1987. – V.128, N.1. – c.30-56.

[2] Janas J., Simonov S. *Weyl-Titchmarsh type formula for discrete Schrödinger operator with Wigner-von Neumann potential* // Submitted to Studia Mathematica.

[3] Janas J., Simonov S. *Zeros of the spectral density of the discrete Schrödinger operator with Wigner-von Neumann potential* // In preparation.

[4] Khan S., Pearson D.B. *Subordinacy and spectral theory for infinite matrices* // Helvetica Physica Acta – 1992. – V.65, N.4. – c.505-527.

[5] Kodaira K. *The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices* // American Journal of Mathematics – 1949. – V.71, N.4. – c.921-945.

[6] Kurasov P., Naboko S. *Wigner-von Neumann perturbations of a periodic potential: spectral singularities in bands* // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society – 2007. – V.142, N.01. – c.161-183.

[7] Kurasov P., Simonov S. *Weyl-Titchmarsh type formula for periodic Schrödinger operator with Wigner-von Neumann potential* // Submitted to Opuskula Mathematica.

[8] Naboko S., Simonov S. *Zeros of the spectral density of the periodic Schrödinger operator with Wigner-von Neumann potential* // In preparation.

[9] Titchmarsh E.C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part I* // Clarendon Press. Oxford – 1946.

Симонов Сергей Александрович, Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Государственный Университет

E-mail: sergey_simonov@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 551.466.8

А.А. Слепышев, В.О. Подрыга

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ НА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В приближении Буссинеска исследуются нелинейные эффекты при распространении свободных внутренних волн в стратифицированной жидкости при учете турбулентной вязкости. Определяется эйлерова скорость среднего течения, индуцированного волной за счет нелинейности и скорость стоксова дрейфа. Находится декремент пространственного затухания волны на турбулентности. Показано, что при учете турбулентной вязкости вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа отлична от нуля.

1. Постановка задачи

Одним из факторов, обеспечивающих сток энергии внутренних волн, является диссипация последних на мелкомасштабной турбулентности. Параметризацию воздействия турбулентности на внутренние волны проводят через введение коэффициентов турбулентного обмена. Нашей задачей будет исследование воздействия мелкомасштабной турбулентности на внутренние волны. Данная задача решалась в линейной постановке в работах [1–3], там находился декремент затухания волны со временем. В настоящей работе исследуется пространственное затухание волны на турбулентной области, определяется декремент пространственного затухания волны, определяется скорость стоксова дрейфа частиц жидкости из-за нелинейности. Вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа при учете турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля и будет определяться в данной работе. Для замыкания напряжений Рейнольдса используется гипотеза Сент–Гелли [3] с введением коэффициентов турбулентной вязкости. Будут также определяться средние эйлеровы течения, индуцированные волной за счет нелинейности.

Рассматриваются свободные внутренние волны в приближении Буссинеска в стратифицированном море при постоянной частоте Брента–Вяйсяля. Коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости полагаются постоянными. Уравнения гидродинамики для волновых возмущений двух компонент скорости течения u_1, u_3, плотности ρ, давления P запишем в приближении Буссинеска:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_1}{\partial x_i}=-\frac{\partial P}{\rho_0\partial x_1}+K_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+K_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2},\\ \frac{\partial u_3}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_3}{\partial x_i}=-\frac{\partial P}{\rho_0\partial x_3}+K_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+K_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-g\frac{\rho}{\rho_0},\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}+u_3\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести, x_1 — горизонтальная координата, x_3 — вертикальная координата, ось OX_3 направлена вверх, $\rho_0(x_3)$ — невозмущенная средняя плотность, K_i — коэффициенты турбулентной вязкости ($i = 1,\, 3$).

В качестве граничных условий на свободной поверхности используем кинематическое и динамическое условие [2]:

$$
\begin{aligned}
&-P+\rho_0 g\xi+2K_3\rho_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\\
&K_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+K_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{d\xi}{dt}=u_3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Первые два условия определяют отсутствие нормальных и тангенциальных напряжений. На дне примем условие прилипания:

$$
u_3(-H)=0,\quad u_1(-H)=0. \tag{3}
$$

Исходную систему уравнений (1) будем решать в виде асимптотических рядов:

$$
\Psi=\sum_{n=1}\varepsilon^n\Psi_n(\xi,\tau,z,\theta),\quad \rho=\sum_{n=1}\varepsilon^n\rho_n(\xi,\tau,z,\theta), \tag{4}
$$

где $\Psi(x_1,x_3,t)$ — функция тока, которая определяет поле волновых скоростей ($\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}$ — горизонтальная скорость, $-\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}$ — вертикальная скорость), ε — крутизна волны, $\tau=\varepsilon^2 t$, $\xi=\varepsilon(x-C_g t)$ (C_g — групповая скорость в линейном приближении). Здесь θ — быстрая, ξ и τ — медленные переменные, θ — фаза волны. Волновое число и частота определяются по формулам: $k=\theta_x$, $\omega=-\theta_t$. Решение линейного приближения ищем в виде:

$$
\Psi_1=A\varphi_1 e^{i\theta}+\text{к.с.},\quad \rho_1=An_1e^{i\theta}+\text{к.с.} \tag{5}
$$

Здесь к.с. — комплексно сопряженные слагаемые. Функция $\varphi_1(x_3)$ удовлетворяет уравнению:

$$
\begin{aligned}
i\omega\left[k^2\left(k^2K_1\varphi_1-\frac{d}{dx_3}\left(K_3\frac{d\varphi_1}{dx_3}\right)\right)+\frac{d}{dx_3}\left(-k^2K_1\frac{d\varphi_1}{dx_3}+\frac{d}{dx_3}\left(K_3\frac{d^2\varphi_1}{dx_3{}^2}\right)\right)\right]=\\
=\omega^2\left(-k^2+\frac{d^2}{dx_3{}^2}\right)\varphi_1-\frac{gk^2}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx_3}\varphi_1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Граничные условия для функции $\varphi_1(x_3)$:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x_3=0:\quad \frac{gk}{\omega}\varphi_1-\frac{\omega}{k}\frac{d\varphi_1}{dx_3}-ikK_1\frac{d\varphi_1}{dx_3}+ik^{-1}\frac{d}{dx_3}\left(K_3\frac{d^2\varphi_1}{dx_3{}^2}\right)-2iK_3k\frac{d\varphi_1}{dx_3}=0,\\
&\qquad K_3\frac{d^2\varphi_1}{dx_3{}^2}+K_1k^2\varphi_1=0\\
&\text{при } x_3=-H:\quad \varphi_1=\frac{d\varphi_1}{dx_3}=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Усредняя исходные уравнения движения (1) по периоду волны в предельном случае слабонелинейной плоской волны, когда масштаб огибающей существенно больше масштаба затухания волны получим следующее уравнение для неосциллирующей поправки к функции тока:

$$
\frac{d^2}{dx_3{}^2}\left(K_3\frac{d^2C}{dx_3{}^2}\right)=kiA_0^2\frac{d}{dx_3}\left(\left(-k^2+\frac{d^2}{dx_3{}^2}\right)(\varphi_1\varphi_1^*)\right)+\text{к.с.} \tag{8}
$$

Отсюда следует, что $C=c(x_3)A_0^2$, функция $c(x_3)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$
\frac{d^2}{dx_3{}^2}\left(K_3\frac{d^2c}{dx_3{}^2}\right)=ki\frac{d}{dx_3}\left(\left(-k^2+\frac{d^2}{dx_3{}^2}\right)(\varphi_1\varphi_1^*)\right)+\text{к.с.} \tag{9}
$$

Граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x_3=0:\quad \frac{d}{dx_3}\left(K_3\frac{d^2c}{dx_3{}^2}\right)=ik\varphi_1^*\frac{d^2\varphi_1}{dx_3{}^2}+\text{к.с.}\\
&\qquad \frac{d^2c}{dx_3{}^2}=0\\
&\text{при } x_3=-H:\quad \frac{dc}{dx_3}=c=0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Среднее течение, индуцированное волной, находится по формуле:

$$U_{in} = A_0^2\ \frac{dc}{dx_3} \tag{11}$$

Нормирующий множитель A_0 определялся из условия нормировки:

$$A_0 = Ae^{-k_i x_1} = \frac{\max\ \xi_0\ \omega}{2\ |k|\ \max\ |\varphi_1|} \tag{12}$$

Здесь $\max \xi_0$ — максимальная амплитуда вертикальных смещений в волне, $k_i = Im(k)$. Ниже определим скорость стоксова дрейфа частиц жидкости за счет нелинейности. Скорость стоксова дрейфа определяется по формуле:

$$\vec{u_s} = \overline{\left(\int\limits_0^t \vec{u}(\bar{x}, t')dt'\ \nabla\right) \vec{u}\ (\bar{x}, t')} \tag{13}$$

Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из эйлеровой скорости индуцированного течения и скорости стоксова дрейфа: $U_{ss} = U_{in} + U_s$.

2. Результаты расчетов

Краевая задача (6), (7) решалась аналитически при постоянной частоте Брента–Вяйсяля 5 цикл/ч и постоянных коэффициентах турбулентной вязкости $K_1 = 10^{-3}$ м^2/с, $K_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2/с. На рисунках 1, 2 показана зависимость частоты волны от действительной и мнимой части волнового числа для первой (сплошная линия) и второй (прерывистая линия) мод.

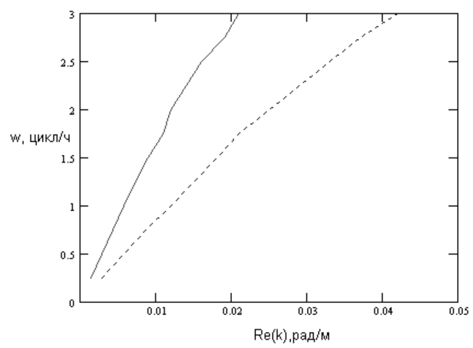


Рис. 1

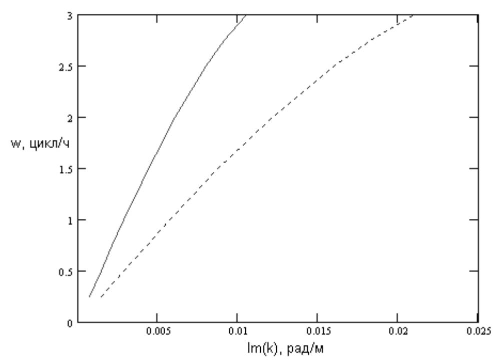


Рис. 2

Мнимая часть волнового числа равна декременту пространственного затухания волны на турбулентности. На рисунках 3, 4 показаны вертикальные профили среднего течения, индуцированного волной и суммарной скорости дрейфа частиц жидкости для внутренних волн первой моды с периодом 1 час при max $\xi_0 = 0{,}5$ м. Определяющий вклад в горизонтальный перенос вносит эйлерова скорость индуцированного течения U_{in}. Скорость стоксова дрейфа существенна только в окрестности дна. На рисунках 5, 6 представлены профили вертикальной составляющей скорости стоксова дрейфа для первой (рис. 5) и второй мод (рис. 6) при той же амплитуде волны и периоде в 1 час. В целом, у второй моды эта скорость выше. Уменьшение глубины моря также приводит к возрастанию скорости стоксова дрейфа и эйлеровой скорости индуцированного среднего течения при неизменной амплитуде и частоте волны.

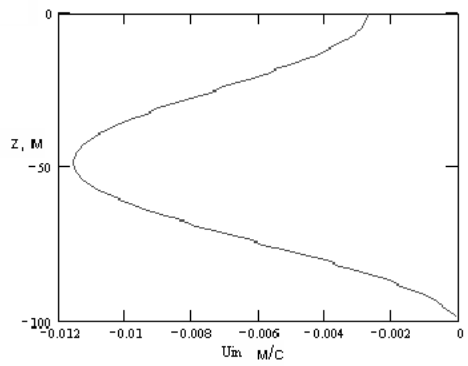


Рис. 3

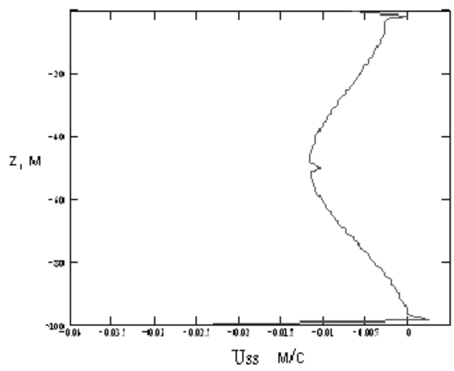


Рис. 4

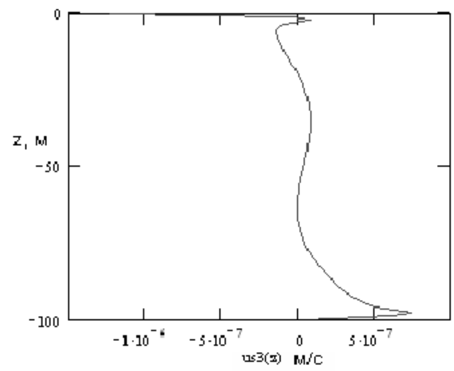


Рис. 5

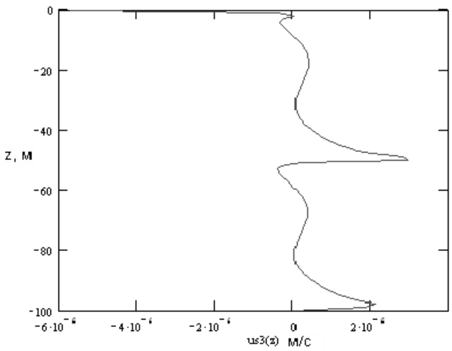


Рис. 6

Выводы

1. Декремент пространственного затухания волны на турбулентности выше у второй моды, чем у первой и растет с ростом частоты волны.
2. Вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа при учете турбулентной вязкости отлична от нуля и у второй моды выше, чем у первой и возрастает с уменьшением глубины.
3. Определяющий вклад в волновой массоперенос дает эйлерова скорость индуцированного среднего течения. Скорость стоксова дрейфа существенна у дна.

Список литературы

[1] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане.— М.: Мир, 1981.— Ч. 1.— 478 с.

[2] Черкесов Л.В. Гидродинамика волн.— Киев: Наукова Думка, 1980.— 259 с.

[3] Слепышев А.А., Носова А.В. Транспорт наносов внутренними волнами // Доповіді Національної Академії наук України, 2007.— №9.— С. 95-100.

[4] Saint-Guily B. Sur la theorie des courants marins induits par le vent.— "Ann. Inst. Oceanogr. 1956.— 33, №1.— 217 с.

А.А. Слепышев, В.О. Подрыга, 99001, Украина, г. Севастополь, Черноморский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет: Компьютерная математика, ул. Героев Севастополя, 7

E-mail: `pvictoria@list.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2009

УДК 517.98 MSC2000: 47D06

В.М. Статкевич

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Предложена краевая задача с существенно бесконечномерным оператором. Доказано существование и единственность решения, найдена явная формула.

Boundary-value problem with essentially infinite-dimensional operator is proposed. The existence and uniqueness of solutions are proved, the exact formula is given.

Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $B_C(H)$ — банахово пространство самосопряженных линейных операторов на H, J — конус неотрицательных линейных функционалов на $B_C(H)$. Множество $D \subset B_C(H)$ — почти компактное (в соответствии с [1]), если для всех $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset B_C(H)$, $n \in \mathbb{N}$, $d \in (0, +\infty)$, такое что $K + Q_{n,d}$ является ε-сетью для D, где $Q_{n,d}$ — множество операторов из $B_C(H)$, ранг которых меньше или равен n, а норма меньше или равна d.

Зафиксируем $R > 0$; множество Z функций класса $C^2(H)$, носители которых принадлежат шару $B_R = \{x \in H | \, \|x\| \leqslant R\}$, u'' равномерно непрерывна на H, а множество $\{u''(x) | x \in B_R\}$ является почти компактным, замкнем по норме $\sup\limits_{x \in B_R} |u(x)|$, полученное замыкание обозначим через X. Пусть $j \in J$ — ненулевой функционал такой, что все операторы конечного ранга принадлежат его ядру. Тогда существенно бесконечномерный эллиптический оператор задается как $L : Z \ni u(x) \mapsto \frac{1}{2} j(u''(x)) \in X$ [2]. Он допускает замыкание A, порождающее (C_0)-полугруппу сжатий в пространстве X, которая является мультипликативной и нильпотентной [2, 3].

Класс поверхностей в H, представимых в виде $S = \{x \in H | g(x) = 1\}$, где $g \in Z$ и $\inf\limits_{x \in S} \|g'(x)\| > 0$, обозначим через Y. Открытая ограниченная область $G \subset H$ с границей S класса Y — L-выпуклая (в соответствии с [4]), если $\forall x \in S_\varepsilon \cap G : \; g(x) > 1$ и $\sup\limits_{x \in S} (Lg)(x) < 0$, где S_ε — ε-окрестность S. Множество $Z(G)$ функций класса $C^2(G)$, у которых $u''(x)$ равномерно непрерывна на G, а множество $\{u''(x) | x \in G\}$ является почти компактным, замкнем по норме $\sup\limits_{x \in G} |u(x)|$, полученное замыкание обозначим через $X(G)$. Для всех $u \in Z$ выполнено $u|_G \in Z(G)$, а ввиду замкнутости множества $X(G)$ для всех $u \in X$ выполнено $u|_G \in X(G)$. Зададим оператор $L_G : Z(G) \to X(G)$ формулой $(L_G u)(x) = \frac{1}{2} j(u''(x))$. Он допускает замыкание A_G.

Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты, соответствующая римановой метрике, индуцированной на поверхности S ее вложением в H. Оператору $\nabla^2 u(x) : T_x S \to T_x S$ сопоставим оператор $\nabla^2 u(x) \oplus 0$, определенный на $H = T_x S \oplus (T_x S)^\perp$. Множество функций на поверхности S, у которых $\nabla^2 u$ (здесь и далее подразумеваем $\nabla^2 u(x) \oplus 0$) существует и равномерно непрерывна на S и множество $\{\nabla^2 u(x) | x \in S\}$ является почти компактным, замкнем по норме $\sup\limits_{x \in S} |u(x)|$, полученное замыкание обозначим через $X(S)$.

Наложим на поверхность S класса Y дополнительные условия: $g(x) \in Z$, g''' равномерно непрерывна на H, а множество $\{(g'(\cdot), \xi)''(y) | \xi \in H, \; \|\xi\| \leqslant 1, \; y \in S\}$ является почти компактным. Пусть $\varphi \in X(S)$. В [4] доказано, что существует, и притом единственная функция $\theta(x)$ на $\bar{G}$, (называемая фундаментальной функцией области G) для которой $\theta(x) > 0$ на G, $\theta(x) = 0$ на S, $\theta|_G \in X(G)$, $\theta'(x)$ существует и равномерно непрерывна на $\bar{G}$ и $A_G(\theta|_G) = -1$; а также существует, и притом единственная функция v на $\bar{G}$ такая, что $v|_G \in X(G)$ и $A_G(v|_G) = 0$, $v|_S = \varphi$, определяемая формулой $v(x) = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$, где $\bar{\varphi}$

— произвольное продолжение φ на H. В [4] доказано, что задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} A_G(u|_G) = f & (f \in X(G)) \\ u|_S = \varphi & (\varphi \in X(S)) \end{cases}, \tag{1}$$

где $u \in C(\bar{G})$, $u|_G \in D(A_G)$ имеет, и притом единственное решение, а также указан способ нахождения решения.

Лемма 1. *Пусть* $g \in C^1([0,\infty])$, $\bar{f}$ *— продолжение* f *на* H, $F(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} g(t)(T(t)\bar{f})(x)dt$. *Тогда* $F|_G \in D(A_G)$ *и* $A_G(F(x)|_G) = -g(0)f(x) - \int\limits_0^{\theta(x)} g'(t)(T(t)\bar{f})(x)|_G dt$.

Доказательство. Ввиду плотности $D(A_G)$ в $X(G)$ достаточно рассмотреть $f \in D(A_G)$. Выберем последовательности: $\{u_n\} \subset Z(G)$ такую, что $u_n \to \theta|_G$ и $Lu_n \to -1$ при $n \to \infty$; $\{f_n\} \subset Z(G)$ такую, что $f_n \to f$ и $L_G f_n \to A_G f$ при $n \to \infty$. $\{\bar{u}_n\}$ и $\{\bar{f}_n\}$ — соответствующие продолжения на H. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{F}_n(x,h) &= \bar{F}_n(x+h) - \bar{F}_n(x) = \\ &= \int\limits_0^{\bar{u}_n(x+h)} g(t)(T(t)\bar{f}_n)(x+h)dt - \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)(T(t)\bar{f}_n)(x)dt = \\ &= g(t)(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)\bar{u}_n'(x)h + \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)\frac{d}{dx}(T(t)\bar{f}_n)(x)hdt + d_1 + d_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $d_1 = \int\limits_{\bar{u}_n(x)}^{\bar{u}_n(x+h)} g(t)(T(t)\bar{f}_n)(x+h)dt - g(t)(T(\bar{u}_n)\bar{f}_n)(x)\bar{u}_n'(x)h$, $d_2 = \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)T(t)(\bar{f}_n(x+h) - \bar{f}_n(x) - \frac{d}{dx}(T(t)\bar{f}_n)(x)h)dt$. Первые два слагаемых формулы (2) линейны относительно h, а d_1 и d_2 есть $o(\|h\|)$. Тогда:

$$\bar{F}_n'(x) = g(t)(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)\bar{u}_n'(x) + \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)\frac{d}{dx}(T(t)\bar{f}_n)(x)dt,$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n''(x)h = (&\frac{d}{dx}g(u(x))(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x), h)\bar{u}_n'(x) + g(u(x))(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)\bar{u}_n''(x)h + \\ &+ g(u(x))\frac{d}{dx}(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)(\bar{u}_n'(x), h) + \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)\frac{d^2}{dx^2}(T(t)\bar{f}_n)(x)hdt. \end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые последней формулы есть операторы ранга не выше 2, непосредственная проверка показывает, что $\bar{F}_n \in Z$.

$$(L\bar{F}_n)(x) = g(\bar{u}_n(x))(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)(L\bar{u}_n)(x) + \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g(t)(LT(t)\bar{f}_n)(x)dt.$$

Так как $AT(t) = \frac{dT(t)}{dt}$, то применяя к второму слагаемому формулу интегрирования по частям, получим:

$$(L\bar{F}_n)(x) = g(\bar{u}_n(x))(T(\bar{u}_n(x))\bar{f}_n)(x)((L\bar{u}_n)(x) + 1) - g(0)\bar{f}_n(x) - \int\limits_0^{\bar{u}_n(x)} g'(t)(T(t)\bar{f}_n)(x)dt.$$

Поскольку $\bar{F}_n \in Z$, то $F_n|_G \in Z(G)$; предельный переход завершает доказательство леммы. □

Замечание 1. Задача (1) имеет, и притом единственное, решение, задаваемое в явном виде формулой:

$$u(x) = -\int\limits_0^{\theta(x)} g(t)(T(t)\bar{f})(x)dt + (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$$

(существование и единственность решения следует из [4], а лемма 1 позволяет проверить явную формулу).

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} P_n(A_G)(u|_G) = A_G^n(u|_G) + a_1 A_G^{n-1}(u|_G) + \ldots + a_n u|_G = f & (f \in X(G)) \\ A_G^l(u|_S) = \varphi_l,\ l = 0, \ldots, n-1 & (\varphi_l \in X(S)) \end{cases}, \tag{3}$$

где $u \in C(\bar{G})$, $u|_G \in D(A_G)$. Обозначим через $\bar{\varphi}_l$ продолжение φ_l на H.

Пусть P_n имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратности $\mu_1, \ldots, \mu_k$ соответственно, $\mu_1 + \ldots + \mu_k = n$. Введем вектор $s(t) = (e^{-\lambda_1 t}, \ldots, t^{\mu_1 - 1}e^{-\lambda_1 t}, \ldots, e^{-\lambda_k t}, \ldots, t^{\mu_k - 1}e^{-\lambda_k t})$ и блочную матрицу размерности n: $V = [V_1 \ldots V_k]$, где l-й блок, имеющий n строк и μ_l столбцов, является нижнетреугольным: $V_l = [\frac{d^j((-\lambda_l)^i)}{d(-\lambda_l)_j}]_{i=0\ldots n-1}^{j=0\ldots\mu_l-1}$. Если $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 1$, то такая матрица является матрицей Вандермонда, потому в общем случае такую матрицу называют обобщенной матрицей Вандермонда (например, [5]), в англоязычной литературе (например, [6]) встречается термин "конфлюэнтная матрица Вандермонда". Определитель такой матрицы ненулевой [5]:

$$\det V = \prod_{1 \leqslant l \leqslant k} 0!1! \ldots (\mu_k - 1)! \prod_{1 \leqslant i < l \leqslant k} (\lambda_l - \lambda_i)^{\mu_l \mu_i}.$$

Теорема 1. *Пусть* V_l^{-1}, $l = 0, \ldots, n-1$ *— l-ый столбец обратной матрицы* V^{-1}. *Тогда задача* (3) *имеет, и притом единственное решение, задаваемое в явном виде формулой:*

$$u(x) = (-1)^n \int\limits_0^{\theta(x)} (V_{n-1}^{-1}, s(t))(T(t)\bar{f})(x)dt + \sum_{l=0}^{n-1} (V_l^{-1}, s(\theta(x)))(T(\theta(x))\bar{\varphi}_l)(x).$$

Доказательство. Существование и единственность решения доказываем по индукции, базу индукции доказывает замечание 1. Пусть многочлен $P_{n+1}(t)$ имеет корень λ, тогда он представим в виде $P_{n+1}(t) = (t-\lambda)\hat{P}_{n+1}(t)$, где $\hat{P}_{n+1}(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + \ldots + p_n$, $\deg \hat{P}_{n+1}(t) = n$. Умножив каждое краевое условие задачи (3) на соответствующий коэффициент $\hat{P}_{n+1}(t)$ и сложив, а также обозначив $v = \hat{P}_{n+1}(A_G)u$, получим:

$$\begin{cases} (A_G - \lambda)(v|_G) = f \\ v|_S = \varphi_n + p_1\varphi_{n-1} + \ldots + p_n\varphi_0. \end{cases}$$

Согласно замечанию 1, решение такой краевой задачи существует и единственно, что и доказывает существование и единственность решения.

Пусть u_f — решение задачи (3) при $\varphi_l = 0$, $l = 0, \ldots, n-1$. Ищем u_f в таком виде: $u_f(x) = -\int\limits_0^{\theta(x)} g(t)(T(t)\bar{f})(x)dt$, где $g \in C^n([0, \infty])$. Тогда задачу (3) можно свести (используя формулу леммы 1) к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} g^{(n)}(t) - a_1 g^{(n-1)}(t) + \ldots + (-1)^n a_n g(t) = 0 \\ g(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0 \\ g^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1} \end{cases},$$

решая которую, получим $g(t) = (-1)^{n-1}(V_{n-1}^{-1}, s(t))$, где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Решение u_r задачи (3) при $f = 0$, $\varphi_l = 0$, $l = 0, \ldots, n-1$, $l \neq r$ ищем в таком виде: $u_r = g(\theta(x)) \cdot (T(\theta(x))\bar{\varphi}_r)(x)$. Тогда задача (3) аналогичным образом сводится к задаче Коши.

Решение задачи (3) в общем виде задается формулой $u = u_f + u_1 + \ldots + u_{n-1}$, что и доказывает теорему.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.В. Богданскому за постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Богданский Ю.В. *Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1977. – 29, №6. – С. 781-784.

[2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1989. – 41, №5. – С. 584-590.

[3] Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L. *Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator / (Suppl. to chapters IV, V): Yu.L. Dalecky, S.V. Fomin. Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* – Kluwer Acad. Publ., 1991. – P. 309–322.

[4] Богданский Ю.В. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором* // Укр. мат. журнал. – 1994. – т.46, №7. – С. 803-808.

[5] Тарасов И.С. *Задача обращения матрицы Вронского* // Изв. вузов Матем. – 1981. – №8. – С. 80-82.

[6] U. Luther, K.Rost. *Matrix Exponentials and Inversion of Confluent Vandermonde Matrices* // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2004. – Vol. 18. – P. 91-100.

Статкевич Виталий Михайлович, Украина, Киев, НТУУ "КПИ", ННК "ИПСА"

E-mail: `mstatckevich@yahoo.com`

Proceeding of the International Conference

XX Crimean Autumn Mathematical School (KROMSH-2009)

MSC2000: 76, 35, 28

S. Dostoglou

STATISTICAL MECHANICS FOR FLUID FLOWS

Statistical hydrodynamics is presented in the context of Gibbsian statistical mechanics. The theory is further developed for isotropic flows and a number of results are presented. Some remarks on the connection of this approach with the initial Maxwell/Reynolds approach are made in conclusion.

Introduction

The statistical approach to the hydrodynamic equations can probably be traced to Maxwell's paper [M]. There, Maxwell uses a space-average to decompose the velocity of each molecule of a system into

$$u(t,x)+\xi(t), \tag{1}$$

the mean velocity at a point in space and the agitation velocity of a molecule. Maxwell defines u, rather vaguely, as the

> "mean values ... in the immediate neighborhood of a given point,"

see [M], p. 67. He then goes on to show how, under a sequence of assumptions, the kinetic theory equations are averaged to yield the Navier-Stokes system of equations for u in (1), see [M], formula (128). Note that, in this process, only after ξ is integrated against some x-dependent density function $f(x,\xi)$ it has the same dependence as u.

Reynolds in [R], while trying to explain why LU/ν is a criterion for turbulence, makes two important remarks. First, that the

> "mean component-velocity (u) of all the molecules in the immediate neighbourhood of a point, say P, can only be the mean component-velocity of all the molecules in some space (S) enclosing P,"

see [R], p. 126. Second, that a new space-averaging process can be repeated to decompose u into

$$\overline{u}(t,x)+u'(t,x), \tag{2}$$

[R], p. 125. The Navier-Stokes equations are now averaged to show that $\overline{u}$ and u' solve the Reynolds system of equations. Note that in the Reynolds process both $\overline{u}$ and u' have the same dependence.

Of course, the Maxwell approach for gases, especially as it relates to thermodynamical macroquantities, was interpreted by Gibbs [G] (via Boltzmann [B]) in terms of ensemble averages, i.e. measures μ on the phase space $\Gamma=\mathbb{R}^{6n}$ of n particles. And instead of the kinetic theory equations, the only equation used is the Liouville (continuity) equation for the preservation of probability with respect to the time dependent vector field v_t of the equations of motion:

$$\partial_t\mu_t+\nabla\cdot(v_t\mu_t)=0, \text{ on } \mathcal{P}(\mathbb{R}^{6n}), \tag{3}$$

which is a shorthand for

$$\int_0^T\int \left(\ \partial_t\phi(t,\vec{q},\vec{p})+\nabla\phi(t,\vec{q},\vec{p})\cdot v_t(\vec{q},\vec{p})\ \right)\mu_t(d\vec{q},d\vec{p})\ dt=0. \tag{4}$$

Repeating for measures what is often the argument for density functions, see for example [S], §1-4, for

$$pr:\quad \Gamma\to\mathbb{R}^3,\quad (\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_n,\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n)\mapsto\vec{q}_1, \tag{5}$$

$$\rho_t(dq) = (pr)_{\#}\mu_t(dq), \tag{6}$$

$$u(t,x) = \frac{d(pr)_{\#}(p_1\mu_t)(dq)}{d(pr)_{\#}\mu_t(dq)}, \tag{7}$$

the Liouville equation (3) yields the conservation equations of fluid mechanics on $\mathbb{R}^3$,

$$\partial_t\rho_t + \nabla\cdot(u\mu_t) = 0, \text{ on } \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \text{ now.} \tag{8}$$

And for p_i one of the components of $p \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int (\partial_t\phi(t,q)p_i + \nabla\phi(t,q)p_i \cdot v_t(\vec{q},\vec{p})) \mu_t(d\vec{q},d\vec{p})\ dt \\ &= \int_0^T \int \Big(\partial_t\phi(t,q)p_i + \nabla\phi(t,\vec{q})p_i p + \phi(t,\vec{q})\vec{Q}_1 \Big) \mu_t(d\vec{q},d\vec{p})\ dt \\ &= \int_0^T \int \partial_t\phi(t,q)u(t,q)\rho_t(dq)\ dt + \int_0^T \int \nabla\phi(t,\vec{q})p_i p\mu_t(d\vec{q},d\vec{p})\ dt \\ &\quad + \int_0^T \int \phi(t,\vec{q})\vec{Q}_1\ \mu_t(d\vec{q},d\vec{p})\ dt, \end{aligned} \tag{9}$$

for $\vec{Q}_1$ the first three components of v_t. And, after rewriting p as $p = u + S$,

$$\partial_t(u\rho_t) + \nabla(u\rho\cdot u) = -\div\ \tau + \text{Force Term}, \tag{10}$$

for τ matrix with entries S_iS_j.

This is a non-phenomenological way of deducing the conservation equations. For constant ρ, and if Stokes's condition is satisfied, this gives the Navier-Stokes equations for time-dependent solenoidal vector fields on $\mathbb{R}^3$, cf. [S]:

$$\partial_t u + Au + B(u,u) = 0. \tag{11}$$

It would appear then that in the Gibbs picture the Maxwell averaging process corresponds to taking marginals of the ensemble measure μ as it flows via the Liouville equation. At this point, if the Reynolds principle were to be followed, one should average again, but in the framework of Gibbs: A measure on the new phase space should be flowed with respect to the new equation of motion, i.e. with respect to the Navier-Stokes vector field in infinite dimensions, and marginals should be taken with respect to this family of measures. (Note that infinite dimensionality shows up not because of some limit on the number of particles, but because of changing from particles into positions.)

For this, consider a measure μ on a space X of vector fields, divergence free if the Navier-Stokes vector field $\overrightarrow{NS}$ is used, and its time evolution equation

$$\partial_t\mu_t + \nabla\cdot(\overrightarrow{NS}\mu_t) = 0. \tag{12}$$

Indeed, Hopf in [H] was first to consider such measures on some space of vector fields and its time evolution under the assumption of preservation of probability with respect to the Navier-Stokes flow.

Now some of the main results of the statistical theory of turbulence show that, in infinite dimensions, this equation can be solved, see [F], [VF], and the next section here. I.e. there exist measures μ_t agreeing with the initial measure at the beginning of time and such that

$$\int_0^T \int_X (< u, \partial_t w > + < Au, w > + < B(u,u), w >)\,\mu_t(du)\ dt = 0, \tag{13}$$

for any solenoidal in x test function $w = w(t,x)$.

To repeat the step displayed as (5), for each x use the map

$$x \mapsto \int u(x)\mu(du) \tag{14}$$

mimicking "integration over all velocities, for fixed position." More precisely, use

$$< \int u(x)\mu(du), \phi >_2 = \int < u, \phi >_2 \mu(du) \tag{15}$$

to define this integration, and set

$$\overline{u}(t,x) := \int u(x)\mu_t(du), \tag{16}$$

see [F], §8. For these averages, equation (12) gives, cf. [F] formula (8.8),

$$\int_0^T < \overline{u}, \partial_t w > + < A\overline{u}, w > + < B(\overline{u},\overline{u}), w > dt = \int_0^T < \partial_j \overline{u_i' u'}, w > dt \tag{17}$$

for

$$u = \overline{u} + u'. \tag{18}$$

In the Maxwellian framework the agitations u' corresponded to heat. Now they represent the turbulent eddies.

The discussion so far is summarized in the following table:

Averaging process		1st average		2nd average	
space average	kinetic theory	$\xrightarrow{Maxwell}$	N-S eqns	$\xrightarrow{Reynolds}$	Reynolds eqns
measure average	Liouville	$\xrightarrow{marginal}$	N-S eqns	$\xrightarrow{marginal}$	Reynolds eqns

1. Homogeneous Turbulence

In the period between Gibbs and Hopf, the statistical approach to turbulence (with very loosely defined averaging process) adopted the conditions of statistical homogeneity and isotropy, see [T], as a simplification and as a result of observations.

Kolmogorov [K] emphasized that velocity fields should be treated as random variables and introduced local statistical homogeneity and isotropy, both in space and time. (In what might be considered as a way to perform both steps of the averaging process, both $u(x_0)$ and the agitation $u(x) - u(x_0)$ are random variables for each x_0 in space.) At the same time, [K] adopts the Reynolds formula for energy dissipation replacing the u' by the increments $u(x) - u(x_0)$, and emphasizes the physical significance of the length $\nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$.

It is easy to show that homogeneity and the evolution equation imply that the mean $\overline{u}$ of the flow is constant in time (and, of course, in space). Assuming this constant to be 0, the Navier-Stokes equations become the equations for the agitations u', and therefore the usual formulas used for energy dissipation hold.

2. Mathematical setting

For $r < -3/2$, define $H^0(r)$ to be the space of vector fields with finite $(0,r)$-norm:

$$\|\mathbf{u}\|_{0,r}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^r |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \tag{19}$$

and define $\mathcal{H}^0(r)$ to be the space of solenoidal vector fields in $H^0(r)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{20}$$

For $\mathbf{u}$ in $H^0(r)$ let $T_{\mathbf{h}}$ be the translation operation defined, weakly, by

$$T_{\mathbf{h}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{h}). \tag{21}$$

A measure μ defined on $\mathcal{B}(H^0(r))$ is called **homogeneous** if it is translation invariant:

$$\int\limits_{H^0(r)} f(T_{\mathbf{h}}\mathbf{u})\ \mu(d\mathbf{u}) = \int\limits_{H^0(r)} f(\mathbf{u})\ \mu(d\mathbf{u}), \tag{22}$$

for any μ-integrable f on $H^0(r)$ and for all $\mathbf{h}$ in $\mathbb{R}^3$.

In addition, isotropic flows should have statistical properties invariant under rotations of the coordinate system. For ω belonging to the group $O(3)$ of all orthogonal matrices (with $\det\omega = \pm 1$), define its action on vector fields by

$$(R_\omega\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \omega\mathbf{u}(\omega^{-1}\mathbf{x}). \tag{23}$$

A measure μ on $H^0(r)$ is called **isotropic** if it is invariant under rotations: For all ω in $O(3)$,

$$\int\limits_{H^0(r)} f(R_\omega\mathbf{u})\ \mu(d\mathbf{u}) = \int\limits_{H^0(r)} f(\mathbf{u})\ \mu(d\mathbf{u}) \tag{24}$$

for any μ-integrable f on $H^0(r)$.

3. Existence

Given homogeneous probability measure μ on $\mathcal{B}(\mathcal{H}^0(r))$ possessing finite energy density, a homogeneous statistical solution of the Navier-Stokes equations with initial condition μ is a probability measure P on $\mathcal{B}(L^2(0,T;\mathcal{H}^0(r)))$ such that P is homogeneous in x, P is supported by weak solutions of the Navier-Stokes equations on $[0,T]$, $\gamma_0(P) = \mu$ for γ_0 evaluation at the beginning of time, and P satisfies the energy inequality on average. The main result of [VF], Chapter VII, then reads as follows:

Theorem 1. *Given μ homogeneous measure on $\mathcal{H}$ with finite energy density,*

$$\int\limits_{\mathcal{H}} |u|^2(x)\ \mu(du) < \infty, \tag{25}$$

there exists homogeneous statistical solution of the Navier-Stokes equations P with initial condition μ.

For isotropic and homogeneous statistical solutions only add in this definition that P is homogeneous and isotropic in x. Then the main result in [DFK] is that

Theorem 2. *Given μ homogeneous & isotropic measure on $\mathcal{H}$ with finite energy density,*

$$\int\limits_{\mathcal{H}} |u|^2(x)\ \mu(du) < \infty, \tag{26}$$

there exists homogeneous & isotropic statistical solution of the Navier-Stokes equations P with initial condition μ.

Such solutions were produced as the weak limit of homogeneous and isotropic measures P_l supported by solutions of a Galerkin approximation of the deterministic Navier-Stokes equations.

4. The longitudinal correlation of isotropic flows

As an example of how the rigorous approach to statistical hydrodynamics can be applied to turbulence theory, consider the longitudinal correlation in isotropic flows. For $\vec{e}_L$ unit vector, h a positive number, and u_L the projection of u on $\vec{e}_L$, the longitudinal correlation function of an isotropic and homogeneous measure μ is

$$B_{LL}(h) = \int u_L(x+h\mathbf{e}_L)u_L(x)\mu(du), \quad h \in \mathbb{R}^+. \tag{27}$$

It describes the correlation of the components of velocity field along the direction of the given $\mathbf{e}_L$ and, via isotropy, determines all components of the velocity correlation

$$B_{ij}(x') = \int u_i(x+x')u_j(x)\mu(du), \quad x' \in \mathbb{R}^3. \tag{28}$$

It has long been argued that turbulent isotropic flows should satisfy

$$B_{LL}(h) > 0. \tag{29}$$

However, in [DGM-S] the following is provided:

Theorem 3. *There is μ Gaussian, homogeneous, isotropic measure on $\mathcal{H}^0(r)$ with*

$$\int |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \ \mu(d\mathbf{u}) < \infty \tag{30}$$

and longitudinal correlation function which satisfies

$$B_{LL}(h) < 0. \tag{31}$$

In addition, as shown in [DG], the Galerkin correlations are continuous in t, and as shown in [DK] the initial conditions of the Galerkin correlations approximate the correlation of μ. Therefore for some t-interval the Galerkin approximations of the statistical solutions continue to have negative longitudinal correlation.

5. Reynolds averaging

It is natural to consider the relation of this approach to statistical hydrodynamics with the initial argument of Reynolds, in particular the Reynolds definition of space averages. For homogeneous measures, a connection is provided in [AD]:

Theorem 4. *Suppose μ is homogeneous with decaying correlations (28). Then*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R(x)|} \int\limits_{B_R(x)} u(y)\ dy = \int\limits_{\mathcal{X}} u(x)\ d\mu(u) \tag{32}$$

for μ-almost all u and almost all x in $\mathbb{R}^3$.

Closer to Reynolds's ideas, the proof in [AD] can be adopted to show:

Theorem 5. *Assume μ homogeneous measure and that*

$$\int u(x)\ \mu(du) = 0, \tag{33}$$

and that the correlations satisfy $|B_{ij}(h)| < \epsilon$ for $|h| > A$. Then for $R > 0$ large enough

$$\overline{u}_R(x) := \frac{1}{|B_R(x)|} \int\limits_{B_R(x)} u(y)\ dy, \tag{34}$$

satisfies

$$\int \overline{u}_R^2(x)\ \mu(du) \le \frac{A}{R} + \epsilon. \tag{35}$$

Proof. The argument in the 1-dimensional case is as follows: Define

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{R}\int\limits_0^R u(x+h)\ dh, \tag{36}$$

observe that it is well defined for all x, and calculate, cf. [Kh]:

$$\begin{aligned} \int \overline{u}^2(x)\ \mu(du) &= \frac{1}{R}\frac{1}{R}\int \int\limits_0^R u(x+h)\ dh \int\limits_0^R u(x+h')\ dh'\ \mu(du) = \\ &= \frac{1}{R}\frac{1}{R}\int\limits_0^R\int\limits_0^R \int u(x+h)u(x+h')\ \mu(du)\ dh\ dh' = \frac{1}{R}\frac{1}{R}\int\limits_0^R\int\limits_0^R R(h-h')\ dh\ dh'. \end{aligned} \tag{37}$$

Assume now that $|B(h-h')| < \epsilon$ is small for $|h-h'| > A$. Then

$$\frac{1}{R}\frac{1}{R}\int_0^R\int_0^R B(h-h')\,dh\,dh' = \frac{1}{R}\frac{1}{R}\int_0^R\left(\int_0^A B(h-h')\,dh + \int_A^R \epsilon\,dh\right)\,dh' \le \frac{A}{R}+\epsilon. \tag{38}$$

□

References

[AD] Androulakis G.; Dostoglou S. *Space averages and homogeneous fluid flows*, Mathematical Physics Electronic Journal, **10**, No. 4, 2004

[B] Boltzmann, L. *Lectures on gas theory* Translated by S.G. Brush. University of California Press, 1964

[DG] Dostoglou S., Gastler, R. R. *On the longitudinal correlation function of isotropic flows*, August 2009, Preprint.

[DGM-S] Dostoglou, S.; Gastler, G.G.; Montgomery-Smith, S.J. *Negative longitudinal correlation for isotropic flows* December 2009. Submitted.

[DK] Dostoglou S., Kahl J.D. *Approximation of homogeneous measures in the 2-Wasserstein metric* Math. Phys. Electron. J. **15**, No. 1.

[DFK] Dostoglou, S.; Fursikov, A. V.; Kahl, J. D. *Homogeneous and isotropic statistical solutions of the Navier-Stokes equations.* Math. Phys. Electron. J. 12 (2006), Paper 2, 33 pp. (electronic).

[F] Foias, C. *Statistical study of Navier-Stokes equations. I, II.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 48 (1972), 219–348 (1973); ibid. 49 (1973), 9–123.

[G] Gibbs, J.W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics* 1902.

[H] Hopf, Eberhard *Statistical hydromechanics and functional calculus.* J. Rational Mech. Anal. 1, (1952). 87–123.

[Kh] Khinchin, A. I. *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics.* Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1949.

[K] Kolmogorov, A.N. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers.* C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **30**, (1941). 301–305.

[M] Maxwell, J. C. *On the Dynamical Theory of Gases* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. **157**, (1867), pp. 49-88

[R] Reynolds, O. *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion* Philosophical Transactions of the Royal Society, 1895, 535–577.

[S] Shinbrot, M. *Lectures on Fluid Mechanics* Gordon & Breach, 1973

[T] Taylor G. I. *Statistical Theory of Turbulence* Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 151, No. 873 (Sep. 2, 1935), pp. 421-444

[VF] Vishik, M.I. and A.V. Fursikov: *Mathematical problems of statistical hydromechanics.* Kluwer, 1988.

Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, 65211, U.S.A.

E-mail: `dostoglous@missouri.edu`

Proceedings of the International Conference

Crimean Autumn Mathematical School–Symposium 2009

УДК: 517.929 MSC2000: 34K05

N.B. Konyukhova

SINGULAR PROBLEMS FOR SYSTEMS OF NONLINEAR FUNCTIONAL–DIFFERENTIAL EQUATIONS

A brief survey of some of author's results on the above topic is given in a revised and complemented form including some new examples both model and arising in the applications. We present a rather simple approach to the statement and analysis of singular problems for a system of n nonlinear functional–differential equations (FDEs) with (non–)Volterra operator and (non)summable singularity at infinity. We pose a singular Cauchy problem (CP) with the limit initial data at infinity or a problem without initial data (e.g., with the requirement of a solution's boundedness). Sufficient conditions for univalent solvability of the problem are formulated as well as for the existence of k–parameter set of solutions ($1 \le k \le n$). FDEs under consideration include (generalized) ordinary differential equations (ODEs), differential–delay equations and integro–differential equations (IDEs).

Introduction

A brief review of some results of [1]– [4] is given. We consider singular problems for a system of n nonlinear FDEs containing a (non–)Volterra operator satisfying the Russell conditions [5] in the right–hand side. The system of FDEs is defined almost everywhere (a.e.) on the semi–infinite interval and has a (non)summable singularity at infinity. We pose a singular CP with given limit initial data at infinity or a problem without initial data (e.g., with a requirement of a solution's boundedness). The sufficient conditions for univalent solvability of the problem are formulated as well as for the existence of k–parameter set of solutions ($1 \le k \le n$). In particular the results are needed for correct statement of singular boundary value problems (BVPs) for FDEs: the dimension of the set of solutions satisfying given conditions at infinity should be coordinated with the number of conditions posed at the other points of the considered interval. Thus we have the unification of some results concerning singular problems for systems of nonlinear (generalized) ODEs, differential–delay equations, IDEs, etc. For systems of nonsingular FDEs described in more general operator form, a rather complex and abstract theory is presented in [6] where the corresponding analogous unification takes place. Examples for singular (non)linear FDEs with non–Volterra operators, discussed in given paper (both model and arising in the applications) mostly are new and important.

Notation: a_0, T_0 are fixed real numbers, $a_0 > 0$; $I_T = [T, \infty)$, $T \ge T_0$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $|\cdot|$ is a norm in $\mathbb{K}^n$ or associated matrix norm in the linear space $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$ of $n \times n$–matrices; $\Omega_n(a) = \{x : x \in \mathbb{K}^n,\ |x| \le a\}$, $a > 0$; $C_n(I_T)$ is the Banach space of bounded continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$, with the norm $|\xi|_C = |\xi|_{C_n(I_T)} = \sup\limits_{t \in I_T} |\xi(t)|$;

$$S_n(\eta(t), \omega) = \{\xi(t) :\ \xi \in C_n(I_T),\ |\xi - \eta|_C \le \omega\}, \quad \omega > 0,$$

is a closed ball in $C_n(I_T)$ by the radius ω with the center in $\eta(t)$, $\eta \in C_n(I_T)$; $S_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} S_n(0, \omega)$; $L_n^\infty(I_T)$ is the Banach space of essentially bounded Lebesgue–measurable functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$, with the norm

$$|\xi|_\infty = |\xi|_{L_n^\infty(I_T)} = \inf_{\mu(N)=0} \sup_{I_T \setminus N} |\xi(t)| = \mathrm{vraisup}_{t \in I_T} |\xi(t)|,$$

where μ is the Lebesgue measure; $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$ is the class of locally absolutely continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$; $\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ is the class of x–Lipschitz functions $f(t, x)$, $f : I_{T_0} \times G_n \to \mathbb{K}^n$ ($G_n \in \{\Omega_n(a_0), \mathbb{K}^n\}$), where $f(\cdot, x)$ is continuous $\forall x \in G_n$ and on any set

$\Omega_n(a) \subseteq G_n$ $(a > 0)$ $f(t, \cdot)$ satisfies the Lipschitz condition uniformly with respect to $t \in I_{T_0}$ with a constant $L_f = L_f(a) > 0$;

$$\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_{n,a_0} \cup \mathrm{Lip}_n(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$$

is a decomposition of the function class Lip_n on three subsets:

1) $\mathrm{Lip}_{n,a_0} = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \Omega_n(a_0))$ with $L_f = L_f(a_0) > 0\}$;

2) $\mathrm{Lip}_n(a) = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbb{K}^n)$ and $\sup\limits_{a>0} L_f(a) = \infty$ for any choice of $L_f(a) > 0$ in $I_{T_0} \times \Omega_n(a)\}$;

3) $\widetilde{\mathrm{Lip}}_n = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbb{K}^n)$ and $\forall a > 0$ there exist $L_f(a) > 0$ in $I_{T_0} \times \Omega_n(a)$ such that $L_f = \sup\limits_{a>0} L_f(a) < \infty\}$;
in addition, a subset $\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$ is distinguished where
$\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon) = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ and $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon$, T_ε $(\delta_\varepsilon > 0$, $\Omega_n(\delta_\varepsilon) \subseteq G_n$, $T_\varepsilon \geq T_0)$ such that in the region $I_{T_\varepsilon} \times \Omega_n(\delta_\varepsilon)$ we can choose $L_f = L_f(\delta_\varepsilon) = \varepsilon\}$.

In general, in what follows the integration is in the Lebesgue sense.

1. Statement of the problems and preliminary remarks

We consider a system of n nonlinear FDEs on a semi–infinite interval in the form:

$$x'(t) = A(t)x(t) + M(t)(FNx)(t) + g(t) \quad \text{a.e. on } I_T. \tag{1}$$

Here, in general, the left end of I_T $(T \geq T_0)$ is variable and defined in the theorems; $x : I_T \to \mathbb{K}^n$, $g : I_{T_0} \to \mathbb{K}^n$, $A, M : I_{T_0} \to \mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$, the entries of $A(t)$, $M(t)$ and $g(t)$ are locally summable functions; N is a local Nemytskii operator (LNO), $N : C_n(I_{T_0}) \to C_n(I_{T_0})$,

$$(\mathbf{H1}) \qquad (Nx)(t) = (N_f x)(t) \equiv f(t, x(t)), \quad f \in \mathrm{Lip}_n, \quad f(t,0) \equiv 0; \tag{2}$$

$F : C_n(I_T) \to L_n^\infty(I_T)$, $(FNx)(t) = (F \circ f(\cdot, x(\cdot))(t)$, where a mapping F, generally speaking nonlinear, nonlocal and depending on a choice of T, satisfies conditions [5]:

$$(\mathbf{H2}) \qquad F(0) = 0, \quad |F(\xi) - F(\tilde{\xi})|_\infty \leq |\xi - \tilde{\xi}|_C \quad \forall \xi, \tilde{\xi} \in C_n(I_T). \tag{3}$$

Because I_T is a semi–infinite interval, we say that Eq.(1) is singular and F is a singular operator. We look for the bounded solutions of Eq.(1) belonging to the class $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$. More exactly, we consider the following singular CPs with the limit initial data at infinity or the problems without initial data.

Problem 1 (without initial data). For Eq.(1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$, lying in the ball

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| \leq \omega, \quad \omega > 0, \tag{4}$$

where ω is a certain finite, in general variable and depending on T magnitude $(0 < \omega_{\min}(T) \leq \omega(T) \leq \omega_{\max}(T) < \infty)$ determined in the theorems.

For the globally defined functions $f(t,x)$ $(f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n \cup \mathrm{Lip}_n(a))$, a more general condition of a solution's boundedness on I_T may be formulated.

Problem 2 (without initial data). For Eq.(1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$, satisfying the boundedness condition:

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| < \infty. \tag{5}$$

Problem 3 (without initial data). For Eq.(1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$, such that

$$\exists \lim_{t \to \infty} x(t) : \qquad |\lim_{t \to \infty} x(t)| < \infty. \tag{6}$$

The posed below Problems 4 and 5 are singular CPs with given limit initial data at infinity; in addition Problem 5 is regarded also as accompanying to Problem 3 a limit singular problem with free parameters.

Problem 4 (singular CP at infinity). For Eq.(1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, satisfying condition

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{7}$$

Problem 5 (either a singular CP at infinity or a problem with free parameters associated with Problem 3). Let $M^{(k)}$ be a given k–dimensional manifold embedded in $\mathbb{K}^n$: $M^{(k)} \subseteq G_n$, $0 \le k \le n$, and let c_∞ be a constant n–vector, belonging to this manifold. For Eq.(1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, satisfying condition

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c_\infty, \qquad c_\infty \in M^{(k)}. \tag{8}$$

Thus either c_∞ is a fixed point in G_n $(k = 0)$ so that Problem 5 is a singular CP or c_∞ is a vector with k arbitrary components $(1 \le k \le n)$ so that Problem 5 defines a k–parameter set of solutions to Problem 3.

For each above problem to Eq.(1), we would like to formulate an equivalent operator equation

$$x(t) = (V(x))(t), \quad t \ge T, \tag{9}$$

where $V : C_n(I_T) \to C_n(I_T)$, in order to adapt the contraction mapping principle (see, e.g., [10], Chapter 8) for solving it. The obtained results depend on a type of singular point at infinity and on the mapping F properties.

First, extending a concept of Volterra operator [6] on singular FDEs under consideration, we introduce

Definition 1. Let $\widetilde{T}$ $(\widetilde{T} \ge T_0)$ be fixed and let a mapping F, $F : C_n(I_{\widetilde{T}}) \to L_n^\infty(I_{\widetilde{T}})$, be given. We say that F is a singular Volterra operator (SVO) iff $\forall T \ge \widetilde{T}$ and $\forall \xi_1, \xi_2 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$ from an equality $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ on I_T follows

$$(F\xi_1)(t) = (F\xi_2)(t) \quad \text{ a.e. on } I_T;$$

otherwise F is a singular non–Volterra operator.

Remark 1. The simplest SVOs are the following: 1) F is an embedding $C_n(I_{T_0})$ into $L_n^\infty(I_{T_0})$, i.e., $F(\xi) \equiv \xi \quad \forall \xi \in C_n(I_{T_0})$; 2) F is a generalized LNO, i.e., $(F\xi)(t) \equiv (N_\varphi \xi)(t) \equiv \varphi(t, \xi(t))$, $\xi \in C_n(I_{T_0})$, $\varphi : C_n(I_{T_0}) \to L_n^\infty(I_{T_0})$. For Eq.(1), we have: 1) if F is an embedding $C_n(I_{T_0})$ into $L_n^\infty(I_{T_0})$ and entries of $A(t)$, $M(t)$ and $g(t)$ are (piecewise) continuous functions on I_{T_0}, then (1) is a system of ODEs; 2) if F is a generalized LNO, then (1) is a system of generalized ODEs; 3) when $(F\xi)(t) \equiv \xi(h(t))$, $h : I_{T_0} \to I_{T_0+\tau}$, $\tau \ge 0$, then there is a system of differential–delay equations; 4) when F is an integral operator, then there is a system of IDEs, etc.

For a concept of (non–)summable singularity at infinity to Eq.(1), let us introduce the values

$$I_A(T) = \int_T^\infty |A(t)|dt, \quad I_M(T) = \int_T^\infty |M(t)|dt, \quad I_g(T) = \Big|\int_T^\infty g(t)dt\Big|, \quad T \ge T_0. \tag{10}$$

Definition 2. We say that Eq.(1) has **a summable singularity at infinity** iff the inequalities

$$\textbf{(H3)} \qquad I_A(T_0) < \infty, \qquad I_M(T_0) < \infty, \qquad I_g(T_0) < \infty \tag{11}$$

are valid; otherwise Eq.(1) has **a nonsummable singularity at infinity**.

Remark 2. The inequalities (11) are analogous to the Carathéodory–type conditions for generalized ODEs (see, e.g., [7], Chapter II). When integration in the Riemann sense is possible, the improper integral with $g(t)$ may be convergent conditionally and nonconvergent absolutely (hence the corresponding Lebesgue integral doesn't converge); then the relations (11) become similar to the Kudryavtsev conditions for ODEs (see [8]).

2. FDEs with a summable singularity at infinity

For Eq.(1), when (H1)–(H3) are fulfilled, we consider Problem 5 (with $k = 0$ or $k = n$) and replace this problem by equivalent functional–integral Eq.(9) with the operator

$$(V(x))(t) = c_\infty - \int_t^\infty [A(s)x(s) + M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq T. \tag{12}$$

We fix q $(0 < q < 1)$ and ω $(\omega > 0, \Omega_n(\omega) \subseteq G_n)$ and choose $T = \widetilde{T}$ $(\widetilde{T} \geq T_0)$ such that the inequalities

$$I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T}) \leq q/2, \qquad I_g(\widetilde{T}) \leq \omega(1-q)/2 \tag{13}$$

are valid where in general $L_f = L_f(\omega) > 0$.

If F is SVO, then due to (H3) we can choose beforehand the value of $\widetilde{T}$ to realize the inequalities (13). If F is a singular non–Volterra operator, then inequalities (13) are also assumed to be fulfilled (e.g., by means of a choice of entering FDEs parameters or due to a determination of F a posteriori on the fixed interval $I_{\widetilde{T}}$, etc.).

Further, for fixed c_∞ satisfying restriction

$$|c_\infty| \leq \omega/2, \tag{14}$$

we consider the operator (12) on the closed ball $S_n(c_\infty, \omega/2)$ in the Banach space $C_n(I_T)$.

On this ball, for each mapping F satisfying (H2) and $\forall x, \tilde{x} \in S_n(c_\infty, \omega/2)$, we get:

$$|V(x) - c_\infty|_C \leq I_A(\widetilde{T})\Big(|x - c_\infty|_C + |c_\infty|\Big) +$$
$$+ I_M(\widetilde{T})\Big(|FNx - FNc_\infty|_\infty + |FNc_\infty|_\infty\Big) + I_g(\widetilde{T}) \leq$$
$$\leq I_A(\widetilde{T})\Big(|x - c_\infty|_C + |c_\infty|\Big) + I_M(\widetilde{T})\Big(|Nx - Nc_\infty|_C + |Nc_\infty|_C\Big) + I_g(\widetilde{T}) \leq$$
$$\leq \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|x - c_\infty|_C + \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|c_\infty| + I_g(\widetilde{T}) \leq$$
$$\leq (q/2)\omega/2 + (q/2)\omega/2 + (1-q)\omega/2 = \omega/2;$$
$$|V(x) - V(\tilde{x})|_C \leq \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|x - \tilde{x}|_C \leq (q/2)|x - \tilde{x}|_C.$$

Then operator V maps the ball $S_n(c_\infty, \omega/2)$ into itself and V is a contraction. As the result, the contraction mapping theorem gives

Theorem 1. *Let the hypotheses* (H1) *and* (H3) *be fulfilled and let for a chosen q, $0 < q < 1$, the values ω, c_∞ and $T = \widetilde{T}$ be defined as above. Then for any given mapping F satisfying* (H2) *there exists a unique fixed point $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in S_n(c_\infty, \omega/2)$, of the mapping V defined by* (12)*; it can be specified as the limit*

$$\widehat{x} = \lim_{k\to\infty} V^k(x_0)$$

for any starting x_0, $|x_0 - c_\infty|_C \leq \omega/2$, and, for the rate of convergence, we have the estimate

$$|V^k(x_0) - \widehat{x}|_C \leq [(q/2)^k/(1 - q/2)]|V(x_0) - x_0|_C.$$

A global convergence of successive approximations to $\widehat{x}$ (i.e., $\forall x_0 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$) occurs when: 1) $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ so that $L_f > 0$ is independent of ω constant; 2) $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ and F is SVO but in this case a choice of $\widetilde{T}$ a posteriori depends on a choice of x_0 determining in turn a choice of ω, $\omega \geq 2\max[|x_0 - c_\infty|_C, I_g(\widetilde{T})/(1-q)]$, and $L_f = L_f(\omega)$ to satisfy (13).

The function $\widehat{x}(t)$ defined by Theorem 1, is a solution to Problem 1 because

$$|\widehat{x}|_C \leq |\widehat{x} - c_\infty|_C + |c_\infty| \leq \omega.$$

Moreover the equations (9) and (12) and the inequalities (13) and (14) imply the estimates:

$$|\widehat{x} - c_\infty|_C \leq \Big[\Big(I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big)|c_\infty| + I_g(\widetilde{T})\Big]/(1 - q/2),$$

$$\sup_{t \geq T}|\widehat{x}(t) - c_\infty| \leq \Big[I_A(T) + L_f I_M(T)\Big]\omega + I_g(T) \quad \forall T \geq \widetilde{T},$$

and, if F is SVO, then the independent of ω estimate is valid:

$$\sup_{t\geq T} |\widehat{x}(t) - c_\infty| \leq \Big[\Big(I_A(T) + L_f I_M(T)\Big)|c_\infty| + I_g(T)\Big]/(1-q/2) \quad \forall T \geq \widetilde{T}.$$

Considering Problem 5 with $k = 0$ and taking into account these estimates, we obtain

Theorem 2. *Let the hypothesis of Theorem 1 be satisfied. Then, for fixed value of c_∞, the function $\widehat{x}(t, c_\infty)$ defined by Theorem 1 is a solution to Problem 5 as a singular CP at infinity (with the condition* (8) *as the limit initial data); moreover if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or F is SVO, then there is no solution to Problem 5 other than $\widehat{x}(t, c_\infty)$.*

Examining Problem 5 with $k = n$ as the accompanying to Problem 3 and taking into account the above estimates, we get

Corollary 1. *Let the hypothesis of Theorem 1 be satisfied. Then Problem 3 has the n–parameter set of solutions $\widehat{x}(t, c_\infty)$ lying in the ball $S_n(\omega)$; moreover when either $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ and F is SVO, then there is no set of solutions to Problem 3 (and Problem 2) other than $\widehat{x}(t, c_\infty)$ given by Theorem 1.*

Example 1. Let us consider the following singular CP for linear IDE with non–Volterra operator and integrable singularity at infinity:

$$x'(t) = b\exp(-\mu t)\int_0^\infty \exp(-\nu s)x(s)ds + c\exp(-\mu t), \quad t \geq 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = c_\infty. \tag{15}$$

Here μ, ν, b, c and c_∞ are the parameters, $\mu > 0$, $\nu > 0$, and

$$m_0 = b/(\mu+\nu) + \mu \neq 0. \tag{16}$$

Then for each fixed c_∞, singular CP (15) has a unique solution

$$x(t, c_\infty) = c_\infty - [(c + bc_\infty/\nu)/m_0]\exp(-\mu t), \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Considered problem is relating to Problem 5. In our notation we obtain: $n = 1$, $T = \widetilde{T} = 0$; $A(t) \equiv 0$, $M(t) = (b/\nu)\exp(-\mu t)$, $g(t) = c\exp(-\mu t)$; $f(t,x) \equiv x$, $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_1$, $L_f = 1$;

$$(FNx)(t) \equiv (Fx)(t) \equiv \nu\textstyle\int_0^\infty \exp(-\nu s)x(s)ds;$$

$$I_A(t) = 0, \quad I_M(t) = (|b|/\nu)\textstyle\int_t^\infty \exp(-\mu s)ds = [|b|/(\mu\nu)]\exp(-\mu t),$$

$$I_g(t) = |c|\textstyle\int_t^\infty \exp(-\mu s)ds = (|c|/\mu)\exp(-\mu t), \quad t \geq 0.$$

For fixed q, $0 < q < 1$, we suppose

$$I_M(0) = |b|/(\mu\nu) \leq q/2, \quad I_g(0) = |c|/\mu \leq \omega(1-q)/2. \tag{18}$$

It easily to check that $m_0 > 0$ for any b satisfying (18) so that (16) is fulfilled. In order to satisfy (18) for $I_g(0)$ a priori, we take $\omega \geq \omega_q = 2|c|/[\mu(1-q)]$ and suppose $|c_\infty| \leq \omega/2$. Then on the ball $S(c_\infty, \omega/2)$ the singular CP (15) is equivalent to the integral equation

$$x(t, c_\infty) = c_\infty - b\int_t^\infty \exp(-\mu\tau)d\tau \int_0^\infty \exp(-\nu s)x(s)ds - c\int_t^\infty \exp(-\mu\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \tag{19}$$

and (17) satisfies (19).

For the solution $\widehat{x}(t, c_\infty)$ of Eq.(19), constructed as in Theorem 1 we have the estimate $|\widehat{x} - c_\infty|_C \leq (|c| + |bc_\infty|/\nu)/[\mu(1-q/2)]$. Let us check it for the exact solution (17) using (18):

$$|x - c_\infty|_C \leq \Big(|c| + |bc_\infty|/\nu\Big)/\Big(\mu[1 + b/((\mu+\nu)\mu)]\Big) \leq \Big(|c| + |bc_\infty|/\nu\Big)/$$
$$/\Big(\mu[1 - q\nu/(2(\mu+\nu))]\Big) \leq (|c| + |bc_\infty|/\nu)/[\mu(1-q/2)].$$

Note that there are no restrictions to c and c_∞ as ω may be chosen arbitrary large. However due to (18) we have a restriction to b (for fixed values of μ and ν). At least with such constraint the singular CP at infinity (15) has a unique solution for any fixed c and c_∞. For more general values of b, we don't give the answer concerning solution (17): it is a "cost"for the contraction maple principle.

Example 2. Let us consider the following singular CP for nonlinear IDE with non–Volterra operator and integrable singularity at infinity:

$$x'(t) = -b\exp(-\mu t)\int\limits_0^\infty \exp(-\nu s)x^2(s)ds - c\exp(-\mu t), \quad t \geq 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{20}$$

Here b, c, μ and ν are positive parameters, and

$$P = 4cb/[\mu^2(2\mu+\nu)] < 1. \tag{21}$$

Then the singular CP (20) has exactly two solutions,

$$x_\pm(t) = d_\pm \exp(-\mu t), \quad t \geq 0, \tag{22}$$

where $d_+ > d_- > 0$,

$$d_\pm = \mu(2\mu+\nu)\Big(1 \pm \sqrt{1 - 4cb/[\mu^2(2\mu+\nu)]}\Big)/(2b). \tag{23}$$

Considered problem is relating to Problem 4. In our notation we get: $n = 1$, $\widetilde{T} = T = 0$; $A(t) \equiv 0$, $M(t) = -(b/\nu)\exp(-\mu t)$, $g(t) = -c\exp(-\mu t)$; $f(t,x) \equiv x^2$, $f \in \mathrm{Lip}_1(\omega)$, $L_f = L_f(\omega) = 2\omega$;

$$(FNx)(t) \equiv (Fx^2)(t) \equiv \nu\textstyle\int_0^\infty \exp(-\nu s)x^2(s)ds;$$

$$I_A(t) \equiv 0, \quad I_M(t) = (b/\nu)\textstyle\int_t^\infty \exp(-\mu s)ds = [b/(\mu\nu)]\exp(-\mu t),$$

$$I_g(t) = c\textstyle\int_t^\infty \exp(-\mu s)ds = (c/\mu)\exp(-\mu t), \quad t \geq 0.$$

For fixed q, $0 < q < 1$, we suppose

$$I_M(0) = b/(\mu\nu) \leq q/(2\omega), \quad I_g(0) = c/\mu \leq \omega(1-q). \tag{24}$$

Due to (24), the inequality (21) is valid because

$$P \leq 2q(1-q)\nu/(2\mu+\nu) < 2q(1-q) \leq 1/2.$$

In order to satisfy (24) for $I_g(0)$ a priori, we take $\omega \geq \omega_q = c/[\mu(1-q)]$. Then on the ball $S_1(\omega)$ singular CP (20) is equivalent to the integral equation

$$x(t) = b\int\limits_t^\infty \exp(-\mu\tau)d\tau \int\limits_0^\infty \exp(-\nu s)x^2(s)ds + c\int\limits_t^\infty \exp(-\mu\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

and (22) are the solutions to (25) where $d_\pm$ are defined by (23).

For the solution $\widehat{x}(t)$ of Eq.(25), constructed as in Theorem 1, we have the estimate $|\widehat{x}|_C \leq c/[\mu(1-q)] \leq \omega$. Then we obtain that $\widehat{x}(t) \equiv x_-(t) = d_-\exp(-\mu t)$, $t \geq 0$, because

$$\begin{gathered} d_- = [\mu(2\mu+\nu)/(2b)]\Big[1 - \sqrt{1 - 4bc/[\mu^2(2\mu+\nu)]}\Big] = \\ = (2c/\mu)\Big[1 + \sqrt{1 - 4bc/[\mu^2(2\mu+\nu)]}\Big]^{-1} \leq (2c/\mu)\Big[2 - 4bc/[\mu^2(2\mu+\nu)]\Big]^{-1} \leq \\ \leq (c/\mu)[1 - q(1-q)\nu/(2\mu+\nu)]^{-1} \leq c/[\mu(1-q)] = \omega_q \leq \omega, \end{gathered}$$

and, on the other hand,

$$d_+ \geq \mu(2\mu+\nu)/(2b) \geq \omega(2\mu/\nu+1)/q > \omega \geq c/[\mu(1-q)] = \omega_q,$$

so that $x_+(t)$ doesn't belong to the ball $S_1(\omega)$ for all $t \geq 0$.

Thus with the restrictions (24) $x_-(t)$ is a unique solution to Problem 1 but there are two solutions $x_\pm(t)$ to Problems 2 and 3 (F is the non–Volterra operator and $f \notin \widetilde{\mathrm{Lip}_1}$!).

Example 3. The following singular CP for linear differential–delay equation arises from the actuarial mathematics model connected with the problem of the ruin probability estimation for the insurance company investing its capital in the bonds (see [11] and references therein):

$$\delta'(x) = -\lambda(r+1)\Big[\delta(x) - \delta\Big((r+1)x + c\Big)\Big], \quad x \geq 0, \quad \lim_{x\to\infty}\delta(x) = 1. \tag{26}$$

Here λ, r and c are positive parameters; $\delta(x)$ is a survival probability of the insurance company on the infinite time interval, x is the initial reserve of the company capital; the magnitudes r,

$1/\lambda$ and c characterize respectively a rate investment return, a mean value of the claims and a mount of the bonus ($0 < r < 1$). It is interesting to look for the positive solutions to this problem not equal to identic and satisfying restrictions $0 < \delta(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

We search for the solutions in the form

$$\delta(x) = 1 - \mu(x) \exp\Big(-\lambda((r+1)x + c)\Big), \tag{27}$$

where $\mu(x)$ is a positive unknown function, $0 < \mu(0)\exp(-\lambda c) < 1$.

For $\mu(x)$, we obtain the following singular CP for linear differential–delay equation with the integrable singularity at infinity:

$$\mu'(x) = \lambda(r+1)\exp\Big(-\lambda(r+1)(c+rx)\Big)\mu\Big((r+1)x + c\Big), \quad x \geq 0, \quad \lim_{x\to\infty}\mu(x) = \mu_\infty,$$

where $\mu_\infty > 0$ is a free parameter.

Further, setting $y(x) = \mu(x) - \mu_\infty$, we obtain the singular CP at infinity with the parameter $\mu_\infty > 0$:

$$y'(x) = \lambda(r+1)\exp\Big(-\lambda(r+1)(c+rx)\Big)\Big[y\Big((r+1)x+c\Big) + \mu_\infty\Big], \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0. \tag{29}$$

The singular CP (28), (29) is a particular case of Problem 4. In our notation, x plays a role of an independent "time"variable, $n = 1$, $\widetilde{T} = \widetilde{X} = 0$; $A(x) \equiv 0$, $M(x) = \lambda(r+1)\exp\Big(-\lambda(r+1)c\Big)\exp\Big(-\lambda(r+1)rx\Big)$, $g(x) = \mu_\infty M(x)$; $f(x,y) \equiv y$, $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_1$, $L_f = 1$;

$$(FNy)(x) \equiv (Fy)(x) \equiv y\Big((r+1)x + c\Big);$$

$$I_A(x) \equiv 0, \quad I_M(x) = \lambda(r+1)\exp\Big(-\lambda(r+1)c\Big)\textstyle\int_x^\infty \exp\Big(-\lambda(r+1)rs\Big)ds =$$

$$= \exp\Big(-\lambda(r+1)(c+rx)\Big)/r, \qquad I_g(x) = \mu_\infty I_M(x), \qquad x \geq 0.$$

For fixed q, $0 < q < 1$, we suppose

$$I_M(0) = \exp\Big(-\lambda(r+1)c\Big)/r \leq q < 1, \quad I_g(0) = \mu_\infty I_M(0) \leq q\mu_\infty \leq \omega(1-q). \tag{30}$$

We put $\omega \geq \omega_q = \mu_\infty q/(1-q)$ to satisfy (30) for $I_g(0)$ a priori and consider on the ball $S_1(\omega)$ the integral equation equivalent to the singular CP (28), (29):

$$y(x) = -\exp\Big(-\lambda(r+1)c\Big)\Big[\lambda(r+1)\int\limits_x^\infty \exp\Big(-\lambda(r+1)rs\Big)y\Big((r+1)s+c\Big)ds +$$

$$+\mu_\infty \exp\Big(-\lambda(r+1)rx\Big)/r\Big], \qquad x \geq 0. \tag{31}$$

Hence the singular CP (28), (29) has a unique solution at least when (30) is fulfilled (there is no restriction to μ_∞ as ω may be chosen arbitrary large).

As a result, we obtain that there exists one–parameter set of solutions to problem (26) in the form (27) at least when $\exp\Big(-\lambda(r+1)c\Big)/r < 1$. In particular, due to a method of successive approximations for Eq.(31), as the second iteration we obtain

$$\delta(x) \approx 1 - \mu_\infty \exp(-\lambda c)\exp\Big(-\lambda(r+1)x\Big)\Big[1 - \exp\Big(-\lambda(r+1)(rx+c)\Big)/r\Big], \quad x \geq 0,$$

and, as the third one we have $\delta(x) \approx 1 - \mu_\infty\exp(-\lambda c)\exp\Big(-\lambda(r+1)x\Big)\Big[1 - \exp\Big(-\lambda(r+1)(rx+c)\Big)/r + \exp\Big(-\lambda(r+1)(r+2)(rx+c)\Big)/[r^2(r+2)]\Big]$, $x \geq 0$.

In detail the singular problem formulated in [11] is assumed to be investigated separately.

3. FDEs with a nonsummable singularity at infinity

In [9], it has been demonstrated on the example for ODE with a nonintegrable singularity that the Carathéodory–type conditions, i.e., the restrictions to a growth of given functions with respect to t, generally speaking cannot provide an existence of a solution to singular CP with the limit initial data in a nonsummable singular point. It implies different approach to this case.

3.1. **Auxiliary magnitudes and preliminary hypotheses.** For Eq.(1) with **a nonsummable singularity at infinity**, we select a general linear equation

$$x' = A(t)x \quad \text{a.e. on } I_{T_0}, \tag{32}$$

and subject its solutions to one from the following hypotheses:

(H4) All nontrivial solutions of Eq.(32) are unbounded as $t \to \infty$.

(H5) There is no solution of Eq.(32) tending to zero as $t \to \infty$ other than $x(t) \equiv 0$.

(H6) The hypothesis (H5) is valid and moreover the matrix $A(t)$ has (a.e. on I_{T_0}) a constant nontrivial k–dimensional kernel, $1 \le k \le n$, generating in $\mathbb{K}^n$ a k–dimensional subspace independent of t.

Let $\Phi_A(t)$ be a fundamental matrix to Eq.(32) and $U_A(t,s)$ be the Cauchy matrix, i.e., $U_A(t,s) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(s)$. We define the following auxiliary magnitudes:

$$J_M(t) = \int_t^\infty |U_A(t,s)M(s)|ds, \qquad J_g(t) = \Big|\int_t^\infty U_A(t,s)g(s)ds\Big|, \qquad t \ge T_0; \tag{33}$$

$$\widehat{J}_M(T) = \sup_{t\in I_T} J_M(t), \qquad \widehat{J}_g(T) = \sup_{t\in I_T} J_g(t), \qquad T \ge T_0. \tag{34}$$

Suppose that at least

$$(\mathbf{H7}) \qquad \widehat{J}_M(T_0) < \infty, \qquad \widehat{J}_g(T_0) < \infty. \tag{35}$$

For FDEs with **a nonsummable singularity at infinity**, as it may be assumed, the requirements (35) replace the Carathéodory–type conditions (11) in more simple and natural form.

For a statement and study of singular CPs with the limit initial data at infinity, we need the following additional conditions (a single or both):

$$(\mathbf{H8}) \qquad \lim_{t\to\infty} J_g(t) = 0; \tag{36}$$

$$(\mathbf{H9}) \qquad \lim_{t\to\infty} J_M(t) = 0. \tag{37}$$

3.2. **The existence (and uniqueness) theorems.** Let (H1) and (H7) be valid and let q, ω, $\widetilde{T}$ ($0<q<1$, $\omega>0$, $\Omega_n(\omega)\subseteq G_n$, $\widetilde{T}\ge T_0$) and the values (33), (34) be such that the relations

$$\widehat{J}_M(\widetilde{T}) = \sup_{t\in I_{\widetilde{T}}} J_M(t) \le q/L_f, \tag{38}$$

$$\widehat{J}_g(\widetilde{T}) = \sup_{t\in I_{\widetilde{T}}} J_g(t) \le \omega(1-q) \tag{39}$$

hold where $L_f = L_f(\omega) > 0$. In particular a choice of ω, $\widetilde{T}$ and L_f may be subjected to the following conditions (with the further requirements (36) or/and (37) when it is necessary):

(i) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$, then we put $L_f = \varepsilon$, $\omega = \delta_\varepsilon$ and $\widetilde{T} = T_\varepsilon$ where $\varepsilon : \varepsilon\widehat{J}_M(T_0) \le q$, so that the relation (38) holds; if the inequality (39) is not valid, then we suppose that the limit condition (36) is satisfied so that (39) holds for a suitable choice of $\widetilde{T} > T_\varepsilon$;

(ii) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,a_0}$, then we fix q, ω and $\widetilde{T}$ ($0<q<1$, $0<\omega\le a_0$, $\widetilde{T}\ge T_0$) and put $L_f = L_f(\omega) \le L_f(a_0)$; if for any choice of these values the inequality (38) is not valid, then we assume that the limit condition (37) is fulfilled so that (38) can be satisfied due to a suitable choice of $\widetilde{T}$; in addition, if (39) is not valid, then we assume that (36) is fulfilled to choose a new $\widetilde{T} \in I_{T_0}$;

(iii) if $f \in \mathrm{Lip}_n(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$, then we fix $q : 0 < q < 1$, and ω:

$$\omega \geq \omega_q = \widehat{J}_g(T_0)/(1-q), \tag{40}$$

and put $L_f = L_f(\omega)$; due to (40) the relation (39) holds $\forall \widetilde{T} \geq T_0$, but if for any admissible values of L_f and $\widetilde{T}$ the inequality (38) is not satisfied, then we introduce the requirement (37) to choose a new $\widetilde{T} \in I_{T_0}$.

Remark 3. If the hypotheses (H8) and (H9) are fulfilled and F is SVO, then the cases (i), (ii) and (iii) can be indistinguishable (by analogy with the Carathéodory–type Theorems 1 and 2): for any fixed $\omega > 0$ ($\Omega_n(\omega) \subseteq G_n$), we choose $\widetilde{T}$ ($\widetilde{T} \geq T_0$) such that the relations (38) and (39) are valid. For the case of non–Volterra operator F, the inequalities (38) and (39) are also assumed to be fulfilled (e.g., due to a choice of entering FDEs parameters or due to determination of F a posteriori on the interval $I_{\widetilde{T}}$).

Let the indicated requirements be fulfilled. Let us take in $C_n(I_{\widetilde{T}})$ a closed ball by the radius ω: $S_n(\omega) = \{x(t) : x \in C_n(I_{\widetilde{T}}),\ |x|_C \leq \omega\}$. On this ball, we consider the mapping V, V: $C_n(I_{\widetilde{T}}) \to C_n(I_{\widetilde{T}})$, defined as follows:

$$(V(x))(t) = -\int_t^\infty U_A(t,s)[M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq \widetilde{T}. \tag{41}$$

If $\widehat{x}(t)$ is a fixed point of the mapping (41), then $\widehat{x} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$ and satisfies Eq.(1).

Then for each fixed F satisfying (H2) and $\forall x, \tilde{x} \in S_n(\omega)$, we get:

$$\begin{gathered}|V(x)|_C \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|FNx|_\infty + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|Nx|_C + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq \\ \leq L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|x|_C + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq q\omega + (1-q)\omega = \omega,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}|V(x) - V(\tilde{x})|_C \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|FNx - FN\tilde{x}|_\infty \leq \\ \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|Nx - N\tilde{x}|_C \leq L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|x - \tilde{x}|_C \leq q|x - \tilde{x}|_C.\end{gathered}$$

Theorem 3. *Let* (H1) *and* (H7) *be fulfilled and let for a chosen q, $0 < q < 1$, the values ω and $T = \widetilde{T}$ be defined as above. Then for any given mapping F satisfying* (H2) *there exists a unique fixed point $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in S_n(\omega)$, of the mapping V defined by* (41)*; it can be specified as the limit*

$$\widehat{x} = \lim_{k\to\infty} V^k(x_0)$$

for any starting point x_0, $|x_0|_C \leq \omega$, and, for the rate of convergence, we have the estimate

$$|V^k(x_0) - \widehat{x}|_C \leq [q^k/(1-q)]|V(x_0) - x_0|_C.$$

A global convergence of successive approximations to $\widehat{x}$ (i.e., $\forall x_0 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$) occurs when: 1) $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ so that $L_f > 0$ is independent of ω constant; 2) $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$, F is SVO and (H9) *holds but in this case a choice of $\widetilde{T}$ a posteriori depends on a choice of x_0 determining in turn a choice of ω, $\omega \geq \max\{|x_0|_C, \omega_q\}$, and $L_f = L_f(\omega)$ to satisfy* (38), (39).

For the function $\widehat{x}(t)$, defined by Theorem 3, the additional estimates follow from Eqs.(9), (41):

$$|\widehat{x}|_C \leq \widehat{J}_g(\widetilde{T})/(1-q), \quad \sup_{t\geq T}|\widehat{x}(t)| \leq \widehat{J}_g(T) + L_f\widehat{J}_M(T)\omega \qquad \forall T \geq \widetilde{T},$$

and, if F is SVO, then independent of ω estimate is valid:

$$\sup_{t\geq T}|\widehat{x}(t)| \leq \widehat{J}_g(T)/(1-q) \qquad \forall T \geq \widetilde{T}.$$

Using these estimates, we obtain

Corollary 2. *Let the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then for the constructed function $\widehat{x}(t)$, $\widehat{x} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$, the following assertions are true: 1) $\widehat{x}(t)$ is a solution to Problem 1; 2) when either* (H8) *holds and F is SVO or* (H8) *and* (H9) *hold, then $\widehat{x}(t)$ is a solution to Problem 4 as a singular CP at infinity; 3) if F is (generalized) LNO then: if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ then $\widehat{x}(t)$ exists in the large on $[T_0, \infty)$ while if $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ then $\widehat{x}(t)$ is uniquely extendible to the* *left as long as it remains bounded (at least to* $\widetilde{T}_0 \geq T_0$ *such that* $\widehat{J}_M(\widetilde{T}_0) \leq q_0/L_f(\omega_{q_0})$ *where* $q_0 : q_0/L_f(\omega_{q_0}) = \sup\limits_{0<q<1} q/L_f(\omega_q)$*); 4)* $\widehat{x}(t) \equiv 0$ *on* $I_{\widetilde{T}}$ *iff* $g(t) = 0$ *a.e. on* $I_{\widetilde{T}}$*.*

For Eq.(1), we use the method of variation of parameters to obtain the general functional–integral equation

$$x(t) = \Phi_A(t)p - \int_t^\infty U_A(t,s)[M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq \widetilde{T},$$

where p is a vector of arbitrary constants, $p \in \mathbb{K}^n$. Comparing this equation with Eq.(9) where V is given by (41), we obtain

Theorem 4. *Let* (H4) *be valid and let otherwise the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then for any given mapping* F *satisfying* (H2)*, Problem 1 is equivalent, on the function class* $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$*, to the operator Eq.*(9) *where* V *is defined by* (41) *so that Problem 1 has a unique solution* $\widehat{x}(t)$ *defined by Theorem 3. Moreover the following statements are valid: 1)* $\widehat{x}(t)$ *is a unique solution to Problem 4 (singular CP) when either* F *is SVO and* (H8) *holds or* (H8) *and* (H9) *are valid and* $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$*; 2)* $\widehat{x}(t)$ *is a unique solution to Problem 2 (a unique bounded solution to Eq.*(1)*) when either* $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ *or* $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$*,* F *is SVO and* (H9) *is true.*

Theorem 5. *Let* (H5) *and* (H8) *be valid and let otherwise the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then for any given* F *satisfying* (H2)*, if only either* (H9) *holds or* F *is SVO, Problem 4 (singular CP) is equivalent, on the function class* $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$*, to the operator Eq.*(9) *with* V *defined by* (41)*. Moreover there is no solution to Problem 4 other than* $\widehat{x}(t)$ *defined by Theorem 3 when either* F *is SVO or* $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ *and* (H9) *is valid; otherwise* $\widehat{x}(t)$ *is at least a unique solution to Problem 4 lying in the fixed ball* $S_n(\omega)$*.*

Corollary 3. *If* $A(t) \equiv 0$*, then Theorem 5 turns into the Carathéodory–type theorem.*

Remark 4. Theorem 5 includes the existence and uniqueness theorem of [5] relating to singular CP for a system of FDEs with Volterra operator and limit initial data at a finite singular point of a pole–type.

Example 4. Let us consider the following singular problem for linear FDE with a non–Volterra operator and nonintegrable singularity at infinity:

$$x'(t) = ax(t)/t + bx(1)/t + d/t^3, \quad 1 \leq t < \infty, \tag{42}$$

$$\exists \lim_{t\to\infty} x(t) : \quad |\lim_{t\to\infty} x(t)| < \infty. \tag{43}$$

Here a, b and d are the real parameters, $a + b \neq 0$. For $t \geq 1$, the general solution to Eq.(42) is given by the formulas:

$$x(t,c) = ct^a - [d/(a+2)]/t^2 - b[c(a+2) - d]/[(a+b)(a+2)], \ a \neq 0 \wedge a \neq -2; \tag{44}$$

$$x(t,c) = c + b(c - d/2)\ln t - d/(2t^2), \quad a = 0; \tag{45}$$

$$x(t,c) = c/t^2 + d(\ln t)/t^2 + cb/(2-b), \quad a = -2, \tag{46}$$

where c is an arbitrary constant. For $a \geq 0$, the singular problem (42), (43) has a unique solution:

$$x(t) = d[b/(a+b) - 1/t^2]/(a+2), \quad a > 0; \tag{47}$$

$$x(t) = (d/2)(1 - 1/t^2), \quad a = 0; \tag{48}$$

for $a < 0$, there is one–parameter set of solutions defined by the formulas (44) and (46).

Considered problem is relating to Problem 3 (and Problem 2). For $a > 0$, in our notation we obtain: $n = 1$, $T = \widetilde{T} = 1$; $A(t) = a/t$, $M(t) = b/t$, $g(t) = d/t^3$; $f(t,x) \equiv x$, $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_1$, $L_f = 1$; $(FNx)(t) \equiv (Fx)(t) \equiv x(1)$,

$$J_M(t) = \int_t^\infty (|b|t^a/s^{a+1})ds \equiv |b|/a, \quad J_g(t) = \int_t^\infty (|d|t^a/s^{a+3})ds = |d|/[t^2(a+2)], \quad t \geq 1.$$

For fixed q, $0 < q < 1$, we suppose

$$J_M(1) = |b|/a \leq q, \qquad J_g(1) = |d|/(a+2) \leq \omega(1-q). \tag{49}$$

It is easily to check that $a+b>0$ for any b satisfying (49). In order to satisfy (49) for $J_g(1)$ a priori, we take $\omega \ge \omega_q = |d|/[(a+2)(1-q)]$. Then on the ball $S_1(\omega)$ the singular problem (42), (43) is equivalent to the functional–integral equation

$$x(t) = -\int_t^{\infty} (t/s)^a [bx(1)/s + d/s^3] ds, \quad t \ge 1, \tag{50}$$

which has the exact solution (47).

For the solution $\widehat{x}(t)$ of Eq.(50), constructed as in Theorem 3 we have the estimate $\widehat{x}|_C \le |d|/[(a+2)(1-q)] = \omega_q$. Let us check it for the exact solution (47) using (49):

$$|x|_C \le |b||d|/[(a+b)(a+2)] \le [|b|/a]|d|/[(1-q)(a+2)] \le q\omega_q < \omega_q.$$

Note that there is no restriction to d as ω may be chosen arbitrary large. However, due to (49), we have a restriction to b (for fixed $a>0$).

Also it should be noted that although $\lim_{t\to\infty} J_g(t) = 0$ we obtain $\lim_{t\to\infty} x(t) = db/[(a+b)(a+2)] \ne 0$ (F is the non–Volterra operator and $J_M(t) \not\to 0$ as $t \to \infty$!).

For $a=0$, we have the equation $x'(t) = bx(1)/t + d/t^3$, $t \ge 1$, with a unique bounded solution (48) but we cannot use the above theorems because $J_M(1) = |b| \int_1^\infty ds/s = \infty$.

At last, if $a<0$ then the conditions of the above theorems are not satisfied (for this case, see, e.g., the results of [2]).

Example 5. Let us consider the following singular CP for linear IDE with non–Volterra operator and nonintegrable singularity at infinity (cf. Example 1):

$$x'(t) = ax(t) + b\exp(-\mu t)\int_0^{\infty} \exp(-\nu s)x(s)ds + c\exp(-\mu t), \ \ t \ge 0, \ \ \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{51}$$

Here a, b, μ, ν and c are the parameters, $a>0$, $\mu>0$ and $\nu>0$, and

$$m_a = b/(\mu+\nu) + a + \mu \ne 0. \tag{52}$$

Then singular CP (51) has a unique solution

$$x(t) = -(c/m_a)\exp(-\mu t), \quad t \ge 0. \tag{53}$$

Considered problem is relating to Problem 4. In our notation we obtain: $n=1$, $\widetilde{T}=0$; $A(t)\equiv a$, $M(t) = (b/\nu)\exp(-\mu t)$, $g(t) = c\exp(-\mu t)$; $f(t,x)\equiv x$, $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_1$, $L_f = 1$;

$$(FNx)(t) \equiv (Fx)(t) \equiv \nu\int_0^\infty \exp(-\nu s)x(s)ds;$$

$$J_M(t) = (|b|/\nu)\int_t^\infty \exp(a(t-s))\exp(-\mu s)ds = [|b|/((a+\mu)\nu)]\exp(-\mu t),$$

$$J_g(t) = |c|\int_t^\infty \exp(a(t-s))\exp(-\mu s)ds = [|c|/(a+\mu)]\exp(-\mu t), \quad t \ge 0.$$

For fixed q, $0<q<1$, we suppose

$$J_M(0) = |b|/[(a+\mu)\nu] \le q, \qquad J_g(0) = |c|/(a+\mu) \le \omega(1-q). \tag{54}$$

Then $m_a>0$ for any b satisfying (54) so that (52) holds. In order to satisfy (54) for $J_g(0)$ a priori, we take $\omega \ge \omega_q = |c|/[(a+\mu)(1-q)]$. Then on the ball $S_1(\omega)$ the singular CP (51) is equivalent to the integral equation

$$\begin{aligned} x(t) = -b\int_t^\infty \exp\left((a(t-\tau)\right)\exp\left(-\mu\tau\right)d\tau \int_0^\infty \exp\left(-\nu s\right)x(s)ds- \\ -c\int_t^\infty \exp\left((a(t-\tau)\right)\exp\left(-\mu\tau\right)d\tau, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{55}$$

which has the exact solution (53).

For the solution $\widehat{x}(t)$ to Eq.(55), constructed as in Theorem 3, we have the estimate $|\widehat{x}|_C \le |c|/[(a+\mu)(1-q)] = \omega_q$ that also is correct for the exact solution (53) if only (54) are true:

$$|x|_C = |c|/[\mu+a+b/(\mu+\nu)] \le |c|/\Big((\mu+a)[1-q\nu/(\mu+\nu)]\Big) \le |c|/[(\mu+a)(1-q)] = \omega_q.$$

There is no restriction to c as ω may be chosen arbitrary large, but due to (54) we obtain a restriction to b (for fixed positive a, μ and ν). At least with such constraint the function (53) is a unique solution to the singular CP (51).

Note that $\widehat{x}(t) \to 0$ as $t \to \infty$ although F is the non–Volterra operator because there are $J_g(t) \to 0$ and $J_M(t) \to 0$ as $t \to \infty$!

Example 6. Let us consider the following singular CP for nonlinear IDE with non–Volterra operator and nonintegrable singularity at infinity (cf. Example 2):

$$x'(t) = ax(t) - b\exp(-\mu t)\int\limits_0^\infty \exp(-\nu s)x^2(s)ds - c\exp(-\mu t),\ \ t \geq 0,\ \ \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{56}$$

Here a, b, c, μ and ν are the positive parameters, and

$$P = 4cb/[(\mu+a)^2(2\mu+\nu)] < 1. \tag{57}$$

Then the singular CP (56) has exactly two solutions,

$$x_\pm(t) = d_\pm \exp(-\mu t), \quad t \geq 0, \tag{58}$$

where $d_+ > d_- > 0$,

$$d_\pm = [(\mu+a)(2\mu+\nu)/(2b)]\Big(1 \pm \sqrt{1 - 4cb/[(\mu+a)^2(2\mu+\nu)]}\Big). \tag{59}$$

Considered problem is relating to Problem 4. In our notation we get: $n = 1$, $\widetilde{T} = 0$; $A(t) \equiv a$, $M(t) = -(b/\nu)\exp(-\mu t)$, $g(t) = -c\exp(-\mu t)$; $f(t,x) \equiv x^2$, $f \in \mathrm{Lip}_1(\omega)$, $L_f = L_f(\omega) = 2\omega$;

$$(FNx)(t) \equiv (Fx^2)(t) \equiv \nu\int_0^\infty \exp(-\nu s)x^2(s)ds;$$

$$J_M(t) = (b/\nu)\int_t^\infty \exp(a(t-s))\exp(-\mu s)ds = \Big(b/[(a+\mu)\nu]\Big)\exp(-\mu t),$$

$$J_g(t) = c\int_t^\infty \exp(a(t-s))\exp(-\mu s)ds = [c/(a+\mu)]\exp(-\mu t), \quad t \geq 0.$$

For fixed q, $0 < q < 1$, we suppose

$$J_M(0) = b/[(a+\mu)\nu] \leq q/(2\omega), \qquad J_g(0) = c/(a+\mu) \leq \omega(1-q). \tag{60}$$

Then (57) is valid because

$$P \leq 2q(1-q)\nu/(2\mu+\nu) \leq 2q(1-q) \leq 1/2.$$

In order to satisfy (60) for $J_g(0)$ a priori, we take $\omega \geq \omega_q = c/[(a+\mu)(1-q)]$. Then on the ball $S_1(\omega)$ the singular CP (56) is equivalent to the integral equation

$$\begin{aligned} x(t) = b\int_t^\infty \exp\left(a(t-\tau)\right)\exp\left(-\mu\tau\right)d\tau \int_0^\infty \exp\left(-\nu s\right)x^2(s)ds + \\ +c\int_t^\infty \exp\left(a(t-\tau)\right)\exp\left(-\mu\tau\right)d\tau, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{61}$$

which has two exact solutions (58) where $d_\pm$ are defined by (59).

For the solution $\widehat{x}(t)$ of Eq.(61), constructed as in Theorem 3, we have the estimate $|\widehat{x}|_C \leq c/[(a+\mu)(1-q)] = \omega_q$. Then $\widehat{x}(t) \equiv x_-(t)$, because

$$\begin{aligned} d_- = [(\mu+a)(2\mu+\nu)/(2b)]\Big[1 - \sqrt{1 - 4bc/[(\mu+a)^2(2\mu+\nu)]}\Big] = \\ = [2c/(\mu+a)]\Big[1 + \sqrt{1 - 4bc/[(\mu+a)^2(2\mu+\nu)]}\Big]^{-1} \leq \\ \leq [2c/(\mu+a)]\Big[2 - 4bc/[(\mu+a)^2(2\mu+\nu)]\Big]^{-1} \leq \\ \leq [c/(\mu+a)][1 - q(1-q)\nu/(2\mu+\nu)]^{-1} \leq c/[(\mu+a)(1-q)] = \omega_q \leq \omega, \end{aligned}$$

and on the other hand,

$$d_+ \geq (\mu+a)(2\mu+\nu)/(2b) \geq 2\omega(\mu+a)(2\mu+\nu)/[2q(\mu+a)\nu] = \omega(2\mu/\nu+1)/q > \omega \geq \omega_q,$$

so that $x_+(t)$ doesn't belong to the ball $S_1(\omega)$ $\forall t \geq 0$.

Thus, with the restrictions (60), $x_-(t)$ is a unique solution of Problem 1 for any fixed $\omega \geq \omega_q$ but there are two solutions $x_\pm(t)$ to Problems 4 and 2 (F is the non–Volterra operator and $f \notin \widetilde{\mathrm{Lip}}_1$!).

3.3. **The existence of parametric set of solutions to Problem 3.** In what follows we assume that the hypotheses (H6), (H8) and (H9) are satisfied and we consider Problem 5 (and its association with Problem 3) where by $M^{(k)}$ we keep in mind the k–dimensional subspace in $\mathbb{K}^n$ generated by the constant kernel of $A(t)$.

We fix q and ω $(0 < q < 1,\ \omega > 0,\ \Omega_n(\omega) \subseteq G_n)$ and choose $\widetilde{T}$ $(\widetilde{T} \geq T_0)$ to satisfy the inequalities

$$\widehat{J}_M(\widetilde{T}) = \sup_{t \in I_{\widetilde{T}}} J_M(t) \leq q/(2L_f), \tag{62}$$

$$\widehat{J}_g(\widetilde{T}) = \sup_{t \in I_{\widetilde{T}}} J_g(t) \leq \omega(1-q)/2, \tag{63}$$

where $L_f = L_f(\omega) > 0$. Let c_∞ be a constant vector belonging to a contraction of the kernel of $A(t)$ on the domain $\Omega_n(\omega/2)$:

$$c_\infty : \quad A(t)c_\infty = 0 \quad \text{a.e. on } I_{T_0}, \quad |c_\infty| \leq \omega/2. \tag{64}$$

Considering Problem 5 with $T = \widetilde{T}$ and setting

$$y = x - c_\infty, \qquad y + c_\infty \in G_n, \tag{65}$$

for $y(t)$, we obtain the singular CP with the parameters which can be written in the form:

$$\begin{gathered} y'(t) = A(t)y(t) + M(t)[(FN(y+c_\infty))(t) - (FNc_\infty)(t)]+ \\ +M(t)(FNc_\infty)(t) + g(t) \quad \text{a.e. on } I_{\widetilde{T}}, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \end{gathered} \tag{66}$$

We take in $C_n(I_{\widetilde{T}})$ a closed ball $S_n(\omega/2)$ and on this ball we consider the mapping V, V: $C_n(I_{\widetilde{T}}) \to C_n(I_{\widetilde{T}})$, defined as follows

$$\begin{gathered} (V(y))(t) = -\int_t^\infty U_A(t,s)\Big[M(s)\Big((FN(y+c_\infty))(s) - (FNc_\infty)(s)\Big)+ \\ +M(s)(FNc_\infty)(s) + g(s)\Big]ds, \qquad t \geq \widetilde{T}. \end{gathered} \tag{67}$$

We introduce the operator equation

$$y(t) = (V(y))(t), \qquad t \geq \widetilde{T}, \tag{68}$$

and considering (66) as independent singular CP with the parameters, we obtain (by analogy with the previous theorems)

Theorem 6. *Let the hypotheses* (H5), (H8) *and* (H9) *be fulfilled and let for fixed q and ω $(0 < q < 1,\ \omega > 0,\ \Omega_n(\omega) \subseteq G_n)$ the value $\widetilde{T} = T$ $(\widetilde{T} \geq T_0)$ be defined as above so that the inequalities* (62) *and* (63) *are valid; let c_∞ be a fixed constant vector belonging to the domain $\Omega_n(\omega/2)$. Then: 1) for any given F satisfying* (H2)*, the singular CP* (66) *is equivalent to the operator Eq.*(68) *where V is defined by* (67)*; 2) Eq.*(68)*, where V is defined by* (67)*, has a unique solution $\widehat{y}(t)$ belonging to the ball $S_n(\omega/2)$; it can be specified as the limit*

$$\widehat{y} = \lim_{k\to\infty} V^k(y_0),$$

for any starting point y_0, $|y_0|_C \leq \omega/2$, and, for the rate of convergence, we have the estimate

$$|V^k(y_0) - \widehat{y}|_C \leq [(q/2)^k/(1-q/2)]|V(y_0) - y_0|_C;$$

3) if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or F is SVO then the function $\widehat{y}(t)$, $\widehat{y} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$, is a unique solution to the singular CP (66)*.*

Returning to Eq.(1) and taking into account the replacement (65), we obtain

Theorem 7. *Let the hypothesis* (H6) *be valid and let c_∞ be a fixed vector satisfying relations* (64)*; otherwise let the hypothesis of Theorem 6 be satisfied. Then for any given F satisfying* (H2) *Problem 5 (singular CP) has a solution $\widehat{x}(t,c_\infty)=\widehat{y}(t,c_\infty)+c_\infty$ where $\widehat{y}(t,c_\infty)$ is a solution of the singular CP* (66) *constructed by Theorem 6, and the following estimates are valid:*

$$|\widehat{x}|_C \le \omega, \quad |\widehat{x}-c_\infty|_C \le [L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|c_\infty| + \widehat{J}_g(\widetilde{T})]/(1-q/2),$$

$$\sup_{t\ge T} |\widehat{x}(t)-c_\infty| \le L_f \widehat{J}_M(T)\omega + \widehat{J}_g(T) \qquad \forall T \ge \widetilde{T},$$

and if F is SVO then we have also the estimate

$$\sup_{t\ge T} |\widehat{x}(t)-c_\infty| \le [L_f \widehat{J}_M(T)|c_\infty| + \widehat{J}_g(T)]/(1-q/2) \quad \forall T \ge \widetilde{T};$$

if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or F is SVO, then the function $\widehat{x}(t,c_\infty)$ is a unique solution to Problem 5 as a singular CP.

Corollary 4. *Let the hypothesis of Theorem 7 be satisfied. Then for any given F satisfying* (H2)*, there exists k–parameter set of solutions $\widehat{x}(t,c_\infty)$ to Problem 3 lying in the ball $S_n(\omega)$ where the vector of parameters c_∞ (the limit vector for the set of solutions) is subjected to the conditions* (64)*. When either $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ and F is SVO then there is no set of solutions to Problem 3 (and Problem 2) other than constructed by Theorem 7.*

Remark 5. Different theorems on the existence of n–parameter set of the bounded solutions to Eq.(1) (a stable case) are obtained in [2]. For the existence of k–parameter set of bounded solutions ($1 \le k \le n$), which values form in a phase space a k–dimensional stable initial manifold (a conditionally stable case), the corresponding theorems for Eq.(1) with a Volterra operator are given in [12]. The indicated theorems of [2] and [12] can be extended on more wide class of FDEs by the methods of the present paper.

Example 7. Let us consider singular BVP for a vector system of m nonlinear second–order ODEs arising in some problems of nonlinear physics (see, e.g., [16], [17] and references therein):

$$y'' + \frac{N-1}{r} y' = f(y), \qquad 0<r<\infty, \tag{69}$$

$$|\lim_{r\to 0+} y(r)| < \infty, \qquad \lim_{r\to 0+} r y'(r) = 0, \tag{70}$$

$$\lim_{r\to\infty} y(r) = y_s, \qquad \lim_{r\to\infty} y'(r) = 0. \tag{71}$$

Here $N \ge 2$, $y, y_s \in \mathbb{K}^m$ ($m \ge 1$), $f(y) \in \mathrm{Lip}_m(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_m$, $f(y_s)=0$, the partial derivatives $\partial f_i/\partial y_j$ ($i,j=1,\dots,m$) exist at least in the vicinity of the point y_s, and $(\partial f/\partial y)(y_s) \ne 0$ where $\partial f/\partial y = (\partial f_i/\partial y_j)_{i,j=1,\dots,m}$ is the Jacoby matrix.

We would like to formulate the sufficient conditions for correct statement of the singular nonlinear BVP (69)–(71) with respect to required number of equivalent boundary conditions in the nonsingular points.

First, we replace (70) by equivalent limit conditions

$$\lim_{r\to 0+} y(r) = y_0, \qquad \lim_{r\to 0+} r y'(r) = 0, \tag{72}$$

where y_0 ($y_0 \in \mathbb{K}^m$) is a vector with unknown parameters. From (69) and (72), introducing the new variables $x_1 = y$, $x_2 = ry'$, we obtain a local singular nonlinear CP with the parameters:

$$r x' = Bx + r^2 \widehat{f}(x), \quad 0 < r \le r_0, \quad \lim_{r\to 0+} x(r) = x_0. \tag{73}$$

Here $x=(x_1,x_2)^T$, $x \in \mathbb{K}^{2m}$ (index ^{T} means a transposition), $x_0 = (y_0, 0_m)^T$, $\widehat{f}(x) = (0_m, f(x_1))^T$, $B \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^{2m})$,

$$B = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & E_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & -(N-2)E_{m\times m} \end{pmatrix},$$

where 0_m is a trivial m–vector and $0_{m\times m}$ (resp., $E_{m\times m}$) is a trivial (resp., identity) $m\times m$–matrix.

Now we introduce a new independent variable $t = -\ln r$ $(r = \exp(-t))$ and from (73) we obtain equivalent singular nonlinear CP at infinity:

$$\dot{x} = -Bx - \exp(-2t)\widehat{f}(x), \quad T \le t < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0. \tag{74}$$

In our notation we obtain: $n = 2m$, $A(t) \equiv A_0 = -B$, $\lambda_j(A_0) = 0$, $\lambda_{j+m}(A_0) = N - 2 \ge 0$, $j = 1, \dots, m$, where $\lambda_j(A_0)$ are the eigenvalues of the matrix A_0, $U(t,s) = \exp\Big(A_0(t-s)\Big)$; $M(t) = -\exp(-2t)E_{2m\times 2m}$, $g(t) \equiv 0$; $FNx \equiv Nx = \widehat{f}(x)$, $\widehat{f}(x) \in \mathrm{Lip}_{2m}(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_{2m}$. We remark that the equation $x' = A_0 x$, $t \ge T$, has no nontrivial solution tending to zero as $t \to \infty$, and $A_0 x_0 = 0$ so that x_0 belongs to the m–dimensional kernel of the matrix $A_0 = -B$.

Thus according to Theorem 7, the singular CP (74) has a unique solution for each fixed x_0, and due to Corollary 4 and above replacement of the variables, we obtain that in the vicinity of zero the initial singular nonlinear CP (69), (70) has m–parameter set of solutions $y(r, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{K}^m$.

As a corollary, singular nonlinear BVP (69)–(71) is correctly posed with respect to the required number of boundary conditions in the vicinities of both ends of the singular interval iff singular nonlinear CP at infinity (69), (71) has also m–parameter set of solutions. It is valid, e.g., if the Jacoby matrix $(\partial f/\partial y)(y_s)$ has no eigenvalues on the nonpositive real axis. Then for limit autonomous system $y'' = f(y)$, $t \ge T$, the pair $(y, y') = (y_s, 0)$, as a point in the $2m$–dimensional phase space, is a hyperbolic equilibrium point (a saddle point) with the m–dimensional stable separatrix surface. It is equivalent to the statement that a local singular nonlinear CP at infinity (69), (71) has m–parameter set of solutions.

Concluding remarks

Singular CPs for systems of nonlinear ODEs with singularities have been studied earlier in detail (see, e.g., [13]– [15] and references therein). It is possible to specify the numerous applications of above–mentioned results for nonlinear ODEs to correct statement, approximation and analytic–numerical study of singular nonlinear CPs and BVPs, including those arising in the models of hydromechanics, cosmology, astrophysics, quantum mechanics, etc. (for the recent applications of some results of [13], see, e.g., [16]– [19]).

Besides the purely mathematical interest in extending the theory of singular CPs on wide enough class of FDEs, the development of this topic is stimulated by the problems of quantum mechanics (in particular, by singular problems for the Schrödinger IDEs describing the bound states or scattering of elementary particles in the field of a nonlocal potential, see, e.g., [20], [21]) and by the recent singular problems for IDEs and differential–delay equations arising in modern models of actuarial and financial mathematics (see, e.g., [11], [19] and references therein). Some history of the problem see in [2], [3].

The work was supported by RFBR, project No. 08–01–00139.

References

[1] Konyukhova, N.B. *Existence and uniqueness of solutions of singular Cauchy problems for systems of nonlinear functional differential equations*// Dokl. AN SSSR. – 1987. – Vol.295, No.4. – P.798–801 [Soviet Math. Dokl. – 1988.– Vol.36, No.1. – P.126–128].

[2] Konyukhova, N.B.*Singular Cauchy problems for some systems of nonlinear functional–differential equations*// Differents. Uravn. – 1995. – Vol.31, No.8. – P.1340–1347 [Diff. Eq. – 1995. – Vol.31, No.8. – P.1286–1293].

[3] Konyukhova, N.B. *Singular Cauchy problems and problems without initial data for nonlinear systems of functional–differential equations*// Uchenye zapiski natsional'nogo Tavricheskogo Universiteta im. V.I.Vernadskogo. Matematika. Mekhanika. Informatika i Kibernetika (Learning Notations of National Taurida V.I.Vernadsky University. Mathematics. Mechanics. Computer Science and Cybernetics). – 2002. – Vol.15(54), No.1. – P.136–141.

[4] Konyukhova, N.B. *On a solvability of singular Cauchy problems for functional–differential equations with a (non)summable singularity and (non–)Volterra operator*// Spectral and Evolution Problems: Proc. of the Sixteenth Crimean Autumn Math. School–Symposium/ Group of authors;

Kopachevsky, N.D. and Orlov, I.V. – Eds. – Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University. – 2006. – Vol.16. – P.159–167.

[5] Russell, D.L. *Numerical solution of singular initial value problems*// SIAM J. Numer. Analys. – 1970. – Vol.7, No.3.– P.399–417.

[6] Azbelev, N.V., Maksimov, V.P. and Rakhmatulina, L.F. *Introduction to the Theory of Functional–Differential Equations*// Moscow: Nauka. – 1991 [in Russian].

[7] Coddington, E.A. and Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*// New York–Toronto–London: McGraw–Hill Book Co., Inc. – 1955.

[8] Kudryavtsev, L.D. *Stabilization problems for ordinary differential equations*// Differents. Uravn. – 1993. – Vol.29, No.12. – P.2056–2078 [Diff. Eq. – 1993. – Vol.29, No.12. – P.1789–1810].

[9] Chechik, V.A. *The investigation to systems of ordinary differential equations with a singularity*// Trudy Moskov. Matem. Obsch. – 1959. – Vol.8. – P.155–197 [in Russian].

[10] Trenogin, V.A. *Functional Analysis*// Moscow: Nauka. – 1980 [in Russian].

[11] Belkina, T.A. and Konyukhova, N.B. *On the ruin probability in an insurance model with regard for investment*// Obozrenie Prikladnoi i Promyshlennoi Matematiki (Surveys on Applied and Industrial Mathematics). – 2009. – Vol.16, No.6. – P.1022–1023 [in Russian].

[12] Konyukhova, N.B. *On the existence of stable initial manifolds for systems of nonlinear functional–differential equations*// Dokl. AN SSSR. – 1989. – Vol.306, No.3. – P.535–540 [Soviet Math. Dokl. – 1989. – Vol.39, No.3. – P.519–523].

[13] Konyukhova, N.B. *Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential equations*// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1983. – Vol.23, No.3. – P.629–645 [U.S.S.R. Comput. Maths Math. Phys. – 1983. – Vol.23, No.3. – P.72–82].

[14] Werner, T. *The Cauchy–Nicoletti problem with poles*// Georgian Math. J. – 1995. – Vol.2, No.2. – P.211–224.

[15] Konyukhova, N.B. *Singular Cauchy problems for singularly perturbed systems of nonlinear ordinary differential equations*// I. – Differents. Uravn. – 1996. – Vol.32, No.1. – P.52–61 [Diff. Eq. – 1996. – Vol.32, No.1. – P.54–63]; II. – Differents. Uravn. – 1996. – Vol.32, No.4. – P.491–500 [Diff. Eq. – 1996. – Vol.32, No.4. – P.491–500].

[16] Lima, P.M., Konyukhova, N.B., Sukov, A.I. and Chemetov, N.V. *Analytical–numerical investigation of bubble–type solutions of nonlinear singular problems*// J. Comput. Appl. Math. (Elsevier Science). – 2006. – Vol.189. – P.260–273.

[17] Konyukhova, N.B., Lima, P.M., Morgado, M.L. and Soloviev, M.B. *Bubbles and droplets in nonlinear physics models: analysis and numerical simulation of singular nonlinear boundary value problem*// Comput. Math. Math. Phys. – 2008.– V.48, No.11. – P.2018–2058 (Pleiades Publishing, Ltd., 2008).

[18] Voronov, N.A., Dyshko, A.L. and Konyukhova, N.B. *On the stability of a self–similar spherical bubble of a scalar Higgs field in the de Sitter space*// Yadernaya Fizika. – 2005. – Vol.68, No.7. – P.1268–1276 [Physics of Atomic Nuclei. – 2005. – Vol.68, No.7. – P.1218–1226].

[19] Belkina, T.A., Konyukhova, N.B. and Kurkina, A.O. *Optimal investment problem in the dynamic insurance models: II. Cramer–Lundberg model with the exponential claims*// Obozrenie Prikladnoi i Promyshlennoi Matematiki (Surveys on Applied and Industrial Mathematics). – 2010. – Vol.17, No.1. – P.3–23 [in Russian].

[20] Yamaguchi, Y. *Two–nuclear problem when the potential is nonlocal but separable. I* // Phys. Rev. – 1954. – Vol.95, No.6. – P.1628–1634.

[21] Gareev, F.A. et al. *Numerical solution of eigenvalue problems for integro–differential equations in nuclear theory*// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1977. – Vol.17, No.2. – P.407–419 [U.S.S.R. Comput. Maths Math. Phys. – 1977. – Vol.17, No.2. – P.116–128].

Konyukhova N.B., 119333 Russia, Moscow GSP-1, Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, ul.Vavilova, 40

E-mail: `nadja@ccas`

Proceeding of the International Conference

XX Crimean Autumn Mathematical School (KROMSH-2009)

УДК: 517.977 MSC2010: 93D05

V.M. Marchenko

STABILITY ANALYSIS OF DAD SYSTEMS

The paper deals with asymptotic stability analysis of linear stationary hybrid differential-difference systems

Introduction

The study of real-life physical processes encounters no only differential (dynamic) but also algebraic (functional) relations. Such processes are described by differential-algebraic systems (some equations of them are differential, the other – difference, with some variable being continues, the other – piecewise continuous). Historically, to the best author's knowledge, such systems are known in russian literature as hybrid once [1]- [3]. It should be noted that the term "hybrid systems"is overloaded (see, e.g. [1]- [7] and references therein). Nowadays, especially in English-language publications, the term "hybrid"refers primarily to discrete-continuous systems or systems with logical variables. From our point of view, hybridity, generally speaking, means that the nature of the process under study or the methods for its description and analysis are inhomogeneous.

In the paper, we consider differential-algebraic time-delay (DAD) systems to which, in particular, some standard types of discrete-continuous and systems with retarded argument of neutral type can be reduced (the section 2: Motivation). Such systems can be qualified as hybrid difference-differential systems or quite regular differential-algebraic systems with delay which, in turn, is a special case of descriptor (singular, implicit) systems with after-effect (for the history, entire collection and application see, e.g. [1]- [18] and references therein).

Our analysis is devoted to the problem of stability of DAD systems in comparing with the corresponding one for delay neutral type systems. It should be noted that various stability notions have been extensively investigated for neutral type delay systems in the last decade by many authors (see, e.g. [8], [10], [12] and references therein).

1. The motivation: examples of DAD systems

Consider a linear neutral type time-delay equation

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_1x(t-h) + d\dot{x}(t-h), t \geq 0, \tag{1}$$

its more general form

$$\frac{d}{dt}(x(t) - dx(t-h)) = ax(t) + a_1x(t-h), t \geq 0, \tag{2}$$

and a hybrid discrete-continuous system of the form

$$\dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y[k], t \in [kh, (k+1)h), \tag{3}$$

$$y[k] = a_{21}x(kh) + a_{22}y[k-1],\ k = 0, 1, ... \tag{4}$$

$$x(0) = x_0,\ y[-1] = y_0. \tag{5}$$

Here $a, a_1, d, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, h$ are given real numbers, $d \neq 0, h > 0$; $y[k]$ denotes a function of integer k; the initial data x_0, y_0 are real numbers.

The objects (1)–(4) have usually been considered separately. Below we propose an unified approach to study them by reducing to delay algebraic differential (DAD) systems.

First of all, observe that there are various approaches to the initial-valued problem:

$$x(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-h, 0], \tag{6}$$

where φ is usually of class C^1; some approaches require that

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + a_1\varphi(-h) + d\dot{\varphi}(-h), \tag{7}$$

the other do not, and what is more, admit jump discontinuities of function φ. Theoretically, we may consider an initial-valued problem of the form

$$x(\tau) = \varphi(\tau),\ \dot{x}(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in [-h, 0],\ x(+0) = x_0, \tag{8}$$

where ψ need not be the derivative of φ. The similar observation was made [19, p.169] while reducing a second order time-delay equation to a system of equations of the first order.

To expand the set of solutions we may consider (2) as (1). Another way, for this, is to reduce time-delay systems (1), (2) to DAD systems.

Let us turn to Equation (1) with the initial conditions (6). To transform this equation to a DAD system introduce real $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ by

$$a_{22} = d, a_{11} + a_{12} = a, a_{11}a_{22} = -a_1, \tag{9}$$

and denote

$$x_1(t) = x(t) - a_{22}x(t-h),\ x_2(t) = x(t),\ t \geq 0. \tag{10}$$

By (1), we have

$\dot{x_1}(t) = \dot{x}(t) - d\dot{x}(t-h) = ax(t) + a_1x(t-h) = (a_{11} + a_{12})x(t) - a_{11}a_{22}x(t-h) = a_{11}(x(t) - a_{22}x(t-h)) + a_{12}x(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$,

and, taking into account the first equation in (10), we obtain a DAD system of the form

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \tag{11}$$

$$x_2(t) = x_1(t) + a_{22}x_2(t-h),\ t \geq 0, \tag{12}$$

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-h, 0), \tag{13}$$

where

$x_{10} = \varphi(0) - d\varphi(-h),\ \dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + a_1\varphi(-h) + d\dot{\varphi}(-h)$

that implies

$\dot{x_2}(-0) = \dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + a_1\varphi(-h) + d\dot{\varphi}(-h) = (a_{11} + a_{12})\varphi(0) - a_{11}a_{22}\varphi(-h) + a_{22}\dot{\varphi}(-h) = a_{11}(\varphi(0) - a_{22}\varphi(-h)) + a_{12}\varphi(0) + a_{22}\dot{\varphi}(-h) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) + a_{22}\dot{x_2}(-h) = \dot{x_2}(+0)$

and, by (12), function x_t, $t \geq 0$, is differentiable.

If we apply such a technique to Equation (2) with initial conditions (8), where $\psi = \dot{\varphi}$, then we obtain more general statement of initial-valued problem

$$x_1(0) = x_{10} = x_0,\ x_2(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-h, 0), \tag{14}$$

where function φ is admitted to be of more general class than C^1.

Now, turning back to System (3)- (5), denote

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y[k] \end{bmatrix},\ \text{for } t \in [kh, (k+1)h),\ k = 0, 1, \ldots,$$

where

$x(kh) = e^{a_{11}(kh-(k-1)h)}x(kh-h) + \int_{kh-h}^{kh} e^{a_{11}(kh-\tau)}a_{12}y[k-1]d\tau = e^{a_{11}h}x(kh-h) + \int_0^h e^{a_{11}(h-s)}ds\, a_{12}\, y[k-1],\ k = 0, 1, \ldots,$

and initial conditions are given by

$$x(0) = x(0+) = x_0, \tag{15}$$

$$\tilde{y}(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-a_{11}h}\left(x_0 - \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}a_{12}y_0 d\tau\right) \\ y_0 \end{bmatrix},\quad \tau \in [-h, 0) \tag{16}$$

It is not difficult to see that System (3)–(5) can be represented as a DAD system of the form:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}\tilde{y}(t), \quad \tilde{y}(t) = A_{22}\tilde{y}(t-h),\ t \geq 0,$$

with $A_{12} = \left[\begin{array}{cc} 0 & a_{12} \end{array}\right]$, $A_{22} = \left[\begin{array}{cc} e^{a_{11}h} & \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau\, a_{12} \\ a_{21}e^{a_{11}h} & a_{22} + a_{21}\int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau\, a_{12} \end{array}\right]$, $A_{11} = a_{11}$ and the initial conditions are given by (15), (16).
We believe that examples from above provide the motivation for futher consideration of DAD systems, investigating sampled systems, in particular.

2. Preliminaries

As a general form of linear non-stationary DAD systems with control, consider the following hybrid functional-differential model of control systems with after-effect:

$$\dot{x}_1(t) = \int_{-h}^{0} d_s A_{11}(t,s)x_1(t+s) + \int_{-h}^{0} d_s A_{12}(t,s)x_2(t+s)$$
$$+ \int_{-h}^{0} d_s B_1(t,s)u(t+s),\ \tau \in [-h, 0), \tag{17}$$
$$x_2(t) = \int_{-h}^{0} d_s A_{21}(t,s)x_1(t+s) + \int_{-h}^{0} d_s A_{22}(t,s)x_2(t+s)$$
$$+ \int_{-h}^{0} d_s B_2(t,s)u(t+s),\ \tau \in [-h, 0), \tag{18}$$

where $A_{11}(t,s)$, $A_{12}(t,s)$, $B_1(t,s)$, $A_{21}(t,s)$, $A_{22}(t,s)$, $B_2(t,s)$ are matrix functions of bounded variation with respect to s on $[-h, 0]$, $var_{[-\varepsilon,0]}A_{22}(t,\cdot) \to 0$ as $\varepsilon \to +0$, h is a positive number, and $u(\cdot)$ is a control function.

Remark 6. Taking into account $2-D$ system approach grounds, consider system (17), (18) in more symmetric form, putting $x_2(t+h)$ in the left side of (18).
If the measure in (17), (18) is discrete and concentrated in points $s = -h_j$, $j = 0, 1, \ldots, l$; $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_l = h$ then we obtain the DAD system with concentrated delays

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=0}^{l}(A_{11j}(t)x_1(t-h_j) + A_{12j}(t)x_2(t-h_j)$$
$$+B_{1j}(t)u(t-h_j)), \tag{19}$$
$$x_2(t) = \sum_{j=0}^{l}\left(A_{21j}(t)x_1(t-h_j) + A_{22j}(t)x_2(t-h_j) + B_{2j}(t)u(t-h_j)\right),\ t \geq t_0, \tag{20}$$

where
$x_1(t_0+0) = x_1(t_0) = x_{10},\ x_1(\tau) = \varphi(\tau),\ x_2(\tau) = \psi(\tau),\ u(\tau) = \xi(\tau),\ \tau \in [t_0 - h_1, t_0)$;
$A_{11j}(t) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$; $A_{12j}(t) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2}$; $B_{1j}(t) \in \mathbb{R}^{n_1\times r}$; $A_{21j}(t) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_1}$; $A_{22j}(t) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $A_{220} = 0$; $B_{2j}(t) \in \mathbb{R}^{n_2\times r}$; $j = 0, 1, \ldots, l$; $t \geq t_0$; $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{n_1})$, $\psi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{n_2})$, $\xi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^r)$, $x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$ (PC means piecewise continuous).
Systems (17), (18) and (19), (20) are examples of descriptor systems with after-effect, and have more general form than in [19], [20], and to the best of our knowledge, there is no complete theory concerning their solution properties.

Let

$$h_j = jh,\ \ j = 0, 1, \ldots, l;\ h > 0, \tag{21}$$

and h be given. Then we have [15]

Theorem 1. *There exists a unique solution*

$$x_i(t) = x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, \psi, \xi, u),\ i = 1, 2,$$

of System (19)–(21) with a piecewise continuous control $u(\cdot)$. It can be given by the formula (variation-of-constants formula):

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{l} \int_{t_0}^{t} (X_{i1}^*(t, \tau + jh)B_{1j}(\tau + jh)$$
$$+ X_{i2}^*(t, \tau + jh)B_{2j}(\tau + jh))u(\tau)d\tau$$
$$+ \sum_{j=0}^{T_t} \sum_{k=j-l}^{j} Z_i^*(t, t - kh)B_{2j-k}(t - kh)u(t - jh) \tag{22}$$
$$+ x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, \psi, \xi, 0),$$

where $i = 1, 2$; $T_t = [\frac{t-t_0}{h}]$, $t \geq t_0$; $\sum_{k=j}^{\nu}(...) = 0$ for $j > \nu$; the matrix functions $X_{i1}^*(\cdot,\cdot)$, $X_{i2}^*(\cdot,\cdot)$, and $Z_i^*(\cdot,\cdot)$ are solutions of the adjoint system with reverse time:

$$\frac{\partial X_{i1}^*(t,\ \tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=0}^{l} (X_{i1}^*(t,\ \tau + jh)A_{11j}(\tau + jh) + X_{i2}^*(t,\ \tau + jh)A_{21j}(\tau + jh)) = 0,\ \tau \leq t, \tag{23}$$

$$\tau + jh \neq t - kh, \quad j = 0,\ ...,\ l, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ T_t;$$

$$X_{i2}^*(t,\ \tau) = \sum_{j=0}^{l} (X_{i1}^*(t,\ \tau + jh)A_{12j}(\tau + jh) + X_{i2}^*(t,\ \tau + jh)A_{22j}(\tau + jh)) = 0,\ \tau \leq t; \tag{24}$$

$$X_{i1}^*(t,\ t - kh - 0) - X_{i1}^*(t,\ t - kh + 0) =$$
$$\sum_{j=k-l}^{k} Z_i^*(t, t - jh)A_{21k-j}(t - jh); \tag{25}$$

$$Z_i^*(t, t - kh) = \sum_{j=k-l}^{k} Z_i^*(t, t - jh)A_{22k-j}(t - jh); \tag{26}$$

$k = 1, 2, ..., T_t$;
with boundary conditions of the form:

$$X_{i1}^*(t, \tau) = 0,\ X_{i2}^*(t, \tau) = 0,\ Z_i^*(t, \tau) = 0,\ \tau > t; \tag{27}$$

$i = 1, 2$;

$$X_{11}^*(t, t - 0) = I_{n_1},\ \ Z_1^*(t, t) = 0, \tag{28}$$

$$X_{21}^*(t, t - 0) = A_{210}(t),\ \ Z_2^*(t, t) = I_{n_2}. \tag{29}$$

Here and throughout the following, the symbol I_k stands for the identity k by k matrix.

Remark 7. The functions $x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, \psi, \xi, 0)$, $i = 1, 2$, in (22) are expressed as follows
$x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, \psi, \xi, 0) = X_{i1}^*(t, t_0 - 0)x_{10}$
$+ \sum_{j=0}^{l} \int_{t_0-jh}^{t_0} (X_{i1}^*(t, \tau + jh)A_{11j}(\tau + jh)\varphi(\tau) + X_{i2}^*(t, \tau$
$+ jh)A_{21j}(\tau + jh)\varphi(\tau) + X_{i1}^*(t, \tau + jh)A_{12j}(\tau + jh)\psi(\tau)$
$+ X_{i2}^*(t, \tau + jh)A_{22j}(\tau + jh)\psi(\tau) + X_{i1}^*(t, \tau + jh)B_{1j}(\tau$
$+ jh)\xi(\tau) + X_{i2}^*(t, \tau + jh)b_{2j}(\tau + jh)\xi(\tau) + \sum_{j=T_t+1}^{T_t+l} Z_i^*(t, t$
$- kh)(A_{21j-k}(t - kh)\varphi(t - jh) + A_{22j-k}(t - kh)\psi(t - jh)$
$+ B_{2j-k}(t - kh)\xi(t - jh),\ t \geq t_0.$

Remark 8. For the stationary case of the system under consideration the matrix functions in (23)–(29) can be taken as $X_{i1}^*(t, \tau) = X_{i1}^*(t-\tau)$, $X_{i2}^*(t, \tau) = X_{i2}^*(t-\tau)$, $Z_i^*(t, t-kh) = Z_i^*(t-kh)$, and formula (22 is simplified.

3. Stability

In this section, we investigate the problem of stability of stationary DAD systems (19)–(21), i.e. the system with constant matrix coefficients:

$$\begin{aligned} A_{11j}(t) = A_{11j},\, A_{12j}(t) = A_{12j},\, A_{21j}(t) = \\ A_{21j},\, A_{22j}(t) = A_{22j}, B_{1j}(t) = 0, \\ B_{2j}(t) = 0,\, j = 0, 1, ..., l;\, t_0 = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Following the classical statement of the problem of stability (see, e.g., [19]) for time-delay systems we give definitions of stability of DAD systems.

Definition 1. The zero solution, i.e. the solution which is zero for $t > 0$, of system (19),(20) is said to be:

i) stable (in Lyapunov sense) if, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ of system (19),(20), satisfying

$$|x_{10}| + \|\varphi\|_{PC} + \|\psi\|_{PC} + \|\ \xi\|_{PC} \le \delta \tag{31}$$

will also satisfy

$$\max_{0 \le t < +\infty} (\|x_{1t}\|_{PC} + \|x_{2t}\|_{PC}) \le \varepsilon, \tag{32}$$

where $x_{1t}(\tau) = x_1(t+\tau)$, $x_{2t}(\tau) = x_2(t+\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$;

ii) asymptotically stable (in Lyapunov sense) if it is stable and every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ of the system will also satisfy the relation

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} x_2(t) = 0; \tag{33}$$

iii) exponentially stable if there are positive numbers M and α such that every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ satisfies the inequality

$$\begin{aligned} \max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|\} \le M(|x_{10}| + \|\varphi\|_{PC} + \\ \|\psi\|_{PC} + \|\ \xi\|_{PC})e^{-\alpha t},\, t \ge 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Here $|\cdot|$ and $\|\cdot\|$ stand for norm in $\mathbb{R}^n$ and $PC([-h, 0], \mathbb{R}^q)$ respectively.

Remark 9. If in the definition above we estimate the solution part $x_1(\cdot)$, it goes about stability with respect to x_1. Similarly, the stability with respect to x_2 can be defined.

Using the method due originally to Euler, we attempt to find a solution of the form

$$x_1(t) = e^{\varphi\lambda t}c_1,\, x_2(t) = e^{\varphi\lambda t}c_2, \tag{35}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$, $c_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $c_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$, and $|c_1| + |c_2| \ne 0$.

Then λ, c_1 and c_2 must satisfy the equation $\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - \sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{11j} & -\sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{12j} \\ -\sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{21j} & I_{n_2} - \sum_{j=1}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{22j} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

If the solution of this algebraic system is to be nontrivial λ must be a root of the characteristic equation of system (19),(20): $\det \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - \sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{11j} & -\sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{12j} \\ -\sum_{j=0}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{21j} & I_{n_2} - \sum_{j=1}^{l} e^{-\lambda h_j} A_{22j} \end{bmatrix}$

$$= \Delta(\lambda) = 0. \tag{36}$$

Definition 2. The roots (complex, in general) of the characteristic equation (36) will be called the characteristic roots (values) of System (19),(20).

Theorem 2. *The condition that all characteristic roots must have non-positive real parts is necessary for each kind of stability considered in Definition 1.*

Proof. It is clear from (35). □

Theorem 3. *The condition*

$$Re\,\lambda < 0 \tag{37}$$

for $\lambda \in \mathbb{C}$ *such that* $\Delta(\lambda) = 0$ *is necessary for both asymptotic and exponential stability of System (19),(20).*

Proof. It follows from (35). □

In sequel we concentrate on the simplest DAD system

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \tag{38}$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h), \tag{39}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_1(+0) = x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ x_2(\tau) = \psi(\tau),\, \tau \in [-h, 0), \end{aligned} \tag{40}$$

where $A_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\psi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{n_2})$.

We regard an absolutely continuous function $x_1(\cdot)$ and a piecewise continuous function $x_2(\cdot)$ as a solution of System (38)–(40) if it satisfies the initial conditions (40), it satisfies the equation (39) for $t \geq 0$ and Equation (38) almost everywhere (a. e.) for $t \geq 0$. If Equation (38) is satisfied for all $t \geq 0$ with right-hand value at $t = 0$ then we consider the solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ as a strong solution of the system.

By Theorem 1 and Remark 3, the solution $x_1(t) = x_1(t, x_{10}, \psi)$, $x_2(t) = x_2(t, x_{10}, \psi)$ of System (38)–(40) can be computed by

$$x_1(t) = X_{11}^*(t-0)x_{10} + \int_0^h X_{12}^*(t-\tau)A_{22}\psi(\tau - h)d\tau, \tag{41}$$

$$x_2(t) = X_{21}^*(t-0)x_{10} + \int_0^h X_{22}^*(t-\tau)A_{22}\psi(\tau - h)d\tau + \tag{42}$$

$$+ Z_2^*[T_t]A_{22}\psi(t - T_t h - h),\, t \geq 0, \tag{43}$$

where $T_t = [\frac{t}{h}]$ and the matrix functions $X_{i1}^*(\cdot)$, $X_{i2}^*(\cdot)$, and $Z_i^*(\cdot)$ are solutions of the adjoint system:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{i1}^*(t) = X_{i1}^*(t)A_{11} + X_{i2}^*(t)A_{21}, \\ t \in (jh, (j+1)h),\, j = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{44}$$

$$X_{i2}^*(t) = X_{i1}^*(t)A_{12} + X_{i2}^*(t-h)A_{22},\, t \geq 0, \tag{45}$$

$$X_{i1}^*(kh+0) - X_{i1}^*(kh-0) = Z_i^*[k]A_{21}, \tag{46}$$

$$Z_i^*[k] = Z_i^*[k-1]A_{22},\, k = 1, ..., T_t, \tag{47}$$

with initial conditions of the form

$$\begin{aligned} X_{11}^*(0) = X_{11}^*(+0) = I_{n_1},\, Z_1^*[0] = 0, \\ X_{12}^*(\tau) = 0,\, \tau < 0; \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} X_{21}^*(0) = X_{21}^*(+0) = A_{21},\, Z_2^*[0] = I_{n_2}, \\ X_{22}^*(\tau) = 0,\, \tau < 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Remark 10. It is not difficult to check that $X_{11}^*(t)$ and $X_{12}^*(t) - X_{12}^*(t-h)A_{22}$ are continuous for $t \geq 0$.

Remark 11. The matrix M is a Schur matrix if its eigenvalues belong to the open unit disc in $\mathbb{C}$.

Theorem 4. *If System (38)–(40) is asymptotically stable then all roots of the equation*

$$\det(I_{n_2} - e^{-\lambda h}A_{22}) = 0 \tag{50}$$

have negative real parts, i. e. A_{22} *is a Schur matrix.*

Proof. Take the initial conditions (40) as follows

$$x_{10} = 0 \in \mathbb{R}^{n_1},\ \psi(\tau) = \begin{cases} I_{n_2},\ \tau = -h, \\ 0,\ \tau \in (-h, 0). \end{cases}$$

Then, by (41)–(43), the corresponding solution of (38)–(40) takes the form

$$x_1(t) \equiv 0,\ t \geq 0,\ x_2(\tau) = \begin{cases} (A_{22})^{k+1},\ \tau = kh, \\ 0,\ \tau \neq kh,\ k = 0, 1, ... \end{cases}$$

It follows from here that all characteristic values of A_{22} must be in in the open unit disc in $\mathbb{C}$. This finishes the proof. □

Remark 12. Let $\rho(A_{22})$ be the spectral radius of A_{22}, i. e. $\rho(A_{22}) = \max_i |\lambda_i(A_{22})|$, where $\lambda_i(A_{22})$ denotes $i-$th eigenvalue of A_{22}. Then an alternative formulation of Theorem 4 is if System (38)–(40) is asymptotically stable then the spectral radius $\rho(A_{22}) < 1$.

Remark 13. In some cases, it is possible to reduce DAD system to a delay neutral type system, for example, if A_{12} or A_{21} is nonsingular. As an example, consider the case $n_1 = n_2$ $A_{21}A_{11} = A_{11}A_{21}$, $A_{22}A_{12} = A_{12}A_{22}$ and we consider strong solutions of System (38)–(40). Then we have:

i) $\frac{d}{dt}(x_2(t) - A_{22}x_2(t-h)) \underset{(39)}{=} A_{21}\dot{x}_1(t) \underset{(38)}{=} = A_{21}(A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)) = A_{11}A_{21}x_1(t) + A_{21}A_{12}x_2(t) \underset{(39)}{=} (A_{11} + A_{21}A_{12}x_2(t) - A_{11}A_{22}x_2(t-h),\ t > 0$;

ii) $\dot{x}_1(t) - A_{22}\dot{x}_1(t-h) \underset{(38)}{=} A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) - A_{22}A_{11}x_1(t-h) - A_{22}A_{12}x_2(t-h) = A_{12}(x_2(t) - A_{22}x_2(t-h)) + A_{11}x_1(t) - A_{22}A_{11}x_1(t-h) \underset{(39)}{=} A_{11} + A_{12}A_{21}x_1(t) - A_{22}A_{11}x_1(t-h),\ t > h$.

It follows from here that the problem of stability of strong solutions of System (38)–(40) can be investigated, in some particular cases, independently for $x_1(\cdot)$ and $x_2(\cdot)$, by using a technique developed for time-delay neutral type systems.

Observe that the solution considered in the proof of Theorem 4 is not a strong solution of System (38)–(40).

Theorem 5. *The condition $\rho(A_{22}) < 1$, where $\rho(A_{22}$ is the spectral radius of A_{22} is necessary for the asymptotic stability with respect to x_2 of System (38)–(40).*

Proof. It follows from the proof of Theorem 4. □

Theorem 6. *If*

i) the spectral radius $\rho(A_{22}) < 1$,

ii) all characteristic roots of of System (38)–(40) have negative real parts,

then the solutions $X^*_{i1}(t)$, $X^*_{i2}(t)$, $i = 1, 2$, are exponentially decreasing for $t \geq 0$.

Proof. Let $()^T$ denotes transposition. If we transpose (44)–(47) and differentiate Equation (45), using (44), we obtain a delay neutral type system of the form

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} (X^*_{i1})^T(t) \\ (X^*_{i2})^T(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (X^*_{i1})^T(t-h) \\ (X^*_{i2})^T(t-h) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A^T_{11} & A^T_{21} \\ A^T_{12}A^T_{11} & A^T_{12}A^T_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (X^*_{i1})^T(t) \\ (X^*_{i2})^T(t) \end{bmatrix} \tag{51}$$

with initial conditions of the form

$$\begin{bmatrix} (X^*_{11})^T(0) \\ (X^*_{12})^T(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ A^T_{12} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} (X^*_{11})^T(\tau) \\ (X^*_{12})^T(\tau) \end{bmatrix} = 0,\quad \tau < 0; \tag{52}$$

$$\begin{bmatrix} (X^*_{21})^T(0) \\ (X^*_{22})^T(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T_{21} \\ A^T_{12}A^T_{21} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} (X^*_{21})^T(\tau) \\ (X^*_{22})^T(\tau) \end{bmatrix} = 0,\quad \tau < 0; \tag{53}$$

and

$$\begin{aligned}(X_{21}^*)^T(kh+0)-(X_{21}^*)^T(kh-0)&=A_{21}^TZ_2^*[k]\\&=A_{21}^T(A_{22}^T)^k,\end{aligned}\tag{54}$$

$$\begin{aligned}&(X_{22}^*)^T(kh+0)-A_{22}^TX_{22}^*)^T(kh+0))-\\&(X_{22}^*)^T(kh-0)-A_{22}^TX_{22}^*)^T(kh-0))\\&=A_{12}^T(X_{21}^*)^T(kh+0)-X_{21}^*)^T(kh-0))\\&=A_{12}^TA_{21}^T(A_{22}^T)^k,\end{aligned}\tag{55}$$

$k=0,1,...$

Let us first consider the initial-valued problem (52) for Equation (51) and $i=1$. The functions $(X_{11}^*)^T(\cdot)$, $(X_{12}^*)^T(\cdot\cdot)$ are solutions of delay neutral type Equation (51) and following [19] we can apply the Laplace transformation. Taking into account that, in such a case, function $(X_{11}^*)^T(t)$ is continuous for $t\geq 0$, then, for Laplace transforms $(\check{X}_{11}^*)^T(s)$, $(\check{X}_{12}^*)^T(s)$ of matrix functions $(X_{11}^*)^T(t)$, $(X_{12}^*)^T(t)$ we obtain:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(\check{X}_{11}^*)^T(s)\\(\check{X}_{12}^*)^T(s)\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -A_{12}^TA_{11}^T & s(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)-A_{12}^TA_{21}^T\end{bmatrix}^{-1}\\&\begin{bmatrix}I_{n_1}\\A_{12}^T\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\A_{12}^T&I_{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\-A_{12}^T&I_{n_2}\end{bmatrix}\right.\\&\left.\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -A_{12}^TA_{11}^T & s(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)-A_{12}^TA_{21}^T\end{bmatrix}\right)^{-1}\\&\begin{bmatrix}I_{n_1}\\A_{12}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -sA_{12}^T & s(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)\end{bmatrix}^{-1}\\&\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\-A_{12}^T&I_{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_1}\\A_{12}^T\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -A_{12}^T & I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T\end{bmatrix}^{-1}\\&\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\0&\frac{1}{s}I_{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\-A_{12}^T&I_{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_1}\\A_{12}^T\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -A_{12}^T & I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}I_{n_1}\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{56}$$

It follows from here that poles of (56) are the characteristic roots of System (38)–(40). For System (52) of neutral type, it is well-known [19] that neutral chain characteristic roots of large modulus have the form

$$\lambda=\lambda_{kj}=\frac{1}{h}(\log|\nu_j|+i\arg\nu_j+2\pi k)+o(1),$$

where ν_j is a nonzero eigenvalue of matrix A_{22}^T.

By condition i) of the theorem, such characteristic roots are uniformly bounded away from the imaginary axis and, taking into account condition ii), there exists a positive α that all poles in (56) have real parts not greater than $-\alpha$, and function (56) is analytic for Re $s>-\alpha$. Taking into account the neutral type system expansions [19] into series of characteristic functions, it follows that functions $(X_{11}^*)^T(t)$, $(X_{12}^*)^T(t)$ are exponentially decreasing as $t\longrightarrow+\infty$.

Let us consider the Laplace transforms $(\check{X}_{21}^*)^T(s)$ and $(\check{X}_{22}^*)^T(s)$ of matrix functions $(X_{21}^*)^T(t)$ and $(X_{22}^*)^T(t)$ respectively. Taking into account jump discontinuities (54), (55), we obtain

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(\check{X}_{21}^*)^T(s)\\(\check{X}_{22}^*)^T(s)\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}sI_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T\\ -A_{12}^TA_{11}^T & s(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)-A_{12}^TA_{21}^T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_{21}^T(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)^{-1}\\A_{12}^TA_{21}^T(I_{n_2}-e^{-sh}A_{22}^T)^{-1}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{57}$$

It is not difficult to see that

$$\det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T A_{11}^T & s(I_{n_2} - e^{-sh} A_{22}^T) - A_{12}^T A_{21}^T \end{bmatrix} = s^{n_2} \Delta^*(s),$$

where

$$\Delta^*(s) = \det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} - e^{-sh} A_{22} \end{bmatrix}$$

is the characteristic quasi polynomial of System (38)–(40). It seems that (57) may have unstable poles but, using similar transformations as in (56), we can present (57) in the form

$$\begin{bmatrix} (\check{X}_{21}^*)^T(s) \\ (\check{X}_{22}^*)^T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & I_{n_2} - e^{-sh} A_{22}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21}^T (I_{n_2} - e^{-sh} A_{22}^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

By the same arguments as in case of $X_{11}^*(\cdot)$, $X_{12}^*(\cdot)$, it follows that functions $X_{21}^*(\cdot)$, $X_{22}^*(\cdot)$ are exponentially decreasing. The proof is complete. □

Remark 14. As we can see in the proof of Theorem 4, it is not possible to directly use the Laplace transformation to DAD systems but we can do it to the adjoint system solutions $X_{i1}^*(\cdot)$, $X_{i2}^*(\cdot)$, $i = 1, 2$.

Now we can state the main result

Theorem 7. *The following statements are equivalent:*

i) A_{22} is a Schur matrix and all characteristic roots of of System (38)–(40) have negative real parts, i. e. Re $\lambda < 0$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\Delta^*(\lambda) = 0$;

ii) System (38)–(40)is asymptotically stable;

iii) System (38)–(40)is exponentially stable.

Proof. Let us prove implication $i) \Rightarrow ii)$. By Theorem 6, the functions $X_{i1}^*(\cdot)$, $X_{i2}^*(\cdot)$ are exponentially decreasing that, by variation-of-constants formula, implies exponential decreasing of the functions in right-side of (41), (42). Let us consider the function (43). For $t \in [kh, (k+1)h)$, $k = 0, 1, ...$ we have

$$\begin{aligned} &|Z_2^*[T_t] A_{22} \psi(t - T_t h - h)| = |A_{22}^{k+1} \psi(t - T_t h - h)| \\ &\le M(\rho(A_{22}))^{k+1} \|\psi\|_{PC} \le M \|\psi\|_{PC}\, e^{(k+1)\log \rho A_{22}} \\ &\underset{\rho(A_{22})<1}{\le} \quad M \|\psi\|_{PC}\, e^{-\log(\rho(A_{22})^{-1})\ t} \le M_1\, e^{-\alpha\, t} \end{aligned}$$

for some positive M, M_1, α. It follows from above, by (41), (42) that System (38)–(40) is exponentially stable. The implication $ii) \Rightarrow iii)$ is obvious and the last one $iii) \Rightarrow i)$ follows from Theorem 3 and Theorem 5. This finishes the proof. □

4. Concluding Remarks

In the paper, a detailed analysis of the simplest DAD system and its relation to neutral type time-delay systems has been done. We present an example of DAD system solution which can not be obtained by using the Laplace transformation. It follows that standard time-delay system stability methods can not be directly applied to the investigation of stability of DAD systems. Then, basing on adjoint system solutions, we give a DAD system analogue of variation-of-constants formula. The solutions of the adjoint system are studied by using the Laplace transformation. The results obtained are applied to the investigation of asymptotic and exponential stability of DAD systems. In this connection, especially in scalar case, one can find some alternative considerations in [7], [8], [17] but the main distinction is the use of variation-of-constants formula and adjoint system solutions.

Notice that, using the direct method (DM) of [21] or, alternatively, a matrix pencil method of [17] one can obtained delay-dependent stability results for DAD systems.

In a similar way, it is possible to consider more general DAD systems with using more general variation-of-constants formulae.

In the abstract system control theory an object under consideration is usually described by "input-output"map and in this framework some other stability notions such as BIBO and

L_p−stability are widely used. The investigation of such notions for DAD systems seems very interesting but this is the subject of another paper.

Acknowledgements

The work is supported in parts by Bialystok Technical University (Project S/WI/1/08).

References

[1] Kirillova, F.M. and S. Streltsov S. *Necessary optimality conditions for hybrid systems* // Upravlyaemye sistemy. – 1975. – V.14.– P. 24–26 [in Russian].

[2] Akhundov, A. *Controllability of the linear hybrid systems* // Upravlyaemye sistemy. – 1975. – V.14.– P. 4–10 [in Russian].

[3] Trofimchuk, T.S. *Controllability of systems unsolved with respect to derivative* // Upravlyaemye sistemy. – 1980. – V.20.– P. 74–82 [in Russian].

[4] Gertler, J.J., Cruz, J.B. and Peshkin, M. (Editors). *Automatic Control in the Service of Mankind* // Prepr. 13th World Congr. IFAC. – 1996. – V.J.– P. 275–311; 473–476.

[5] De la Sen, M. *The reachability and observability of hybrid mulitrate sampling linear systems* // Computer Math. Applic. – 1996. – V.3.– P. 109–122.

[6] Baker, C.T.H., Paul,C.A. and Tian, H. *Differential-algebraic equations with after-effect* // J. Comput. and Appl. Math. – 2002. – V.140.– P. 63–80.

[7] Fridman, F. *Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach* // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – V.273.– P. 24–44.

[8] Loiseau, J.-J., Cardelli, M. and Dusser, X. *Neutral-type time-delay systems that are not formally stable are not BIBO stable* // IMA J. Math. Control. Inform. – 2002. – V.19.– P. 217–227.

[9] Marchenko, V.M., Poddubnaya, O.N. *Representations of solutions for controlled hybrid systems* // Problems of Control and Informatics(Kiev). – 2002. – V.6.– P. 11–19 [in Russian].

[10] Gu, K., Kharitonov, V.L. and Chen, J. *Stability of Time-Delay Systems*// Birkhauser, Boston – Little, 2003.

[11] Domek, S. and Kashynski, R. (Editors). *Control Theory, Control Engineering, Modelling and Simulation* // IEEE Conf. MMAR'2004 (Blazejewko, Poland). – 2004. – V.1.

[12] Bonnet, C. and Partington, J. *H_∞ and BIBO stabilization of delay systems of neutral type* // Systems and Control Letters. – 2004. – V.52.– P. 283–288.

[13] A. A. Scheglova, A.A. *Observability of generate linear hybrid systems with constant coefficients* // Automatica and Telemekhanika. – 2004. – No.11.– P. 86–101 [in Russian].

[14] Marchenko, V.M. and Poddubnaya, O.N. *Relative controllability of stationary hybrid systems* // Proc. IEEE Met. and Mod. Autom. Rob. (MMAR 2004, Miedzyzdroje,Poland). – 2004. – P. 267–272.

[15] Marchenko, V.M. and Poddubnaya, O.N. *Solution representations and relative controllability of linear differential algebraic systems with several delays* // Doklady Mathematical Sciences. – 2005. – V.72.– No.2.– P. 824–828.

[16] Marchenko, V.M. and Poddubnaya, O.N., and Zaczkiewicz, Z. *To the observability of linear differential-algebraic systems with delays* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2006. – V.751.– No.8.– P. 1387–1392.

[17] Niculescu, S.I., Fu, P. and Chen, J. *On the stability of linear delay-differential algebraic systems: Exact conditions via matrix pencil solutions* // Proc. of the 45th IEEE CDC (San Diego, USA, Dec. 13–15). – 2006. – P. 834–839.

[18] Marchenko, V.M. *DAD systems of control and observation and open problems* // Intern. J.: Mathematical Manuscripts. – 2007. – V.1.– P. 111–125.

[19] Bellman, R. and Cooke, K.L. *Differential-Difference Equations*// Academic Press, New York – London, 1963.

[20] Hale, J.K. and Lunel, S.M. *Introduction to Functional Differential Equations*// Springer-Verlag, New York, 1993.

[21] Olgac, N. and Sipahi, R. *A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems* // Automatica. – 2004. – V.40.– P. 847–853.

Marchenko Vladimir Matveyevich, 15-875, Poland, Bialystok, Bialystok Unioversity of Technology, ul.Wiejska 45; 220050, Belarus, Minsk, Belarusian Technological University, ul.Sverdlova 13a

E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Proceeding of the International Conference

Crimean Autumn Mathematical School – Symposium 2009

УДК 517.986 MSC2000: 47D06

M.Yu. Romanova

LYAPUNOV'S EQUATION AND KREIN'S THEOREM FOR GROUP OF OPERATORS

The necessary and sufficient conditions of hyperbolicity of group operators are obtained using operator Lyapunov's equation constructing by group generator.

Let $\mathcal{H}$ be complex Hilbert space, and $End\mathcal{H}$ - algebra of linear bounded operators in $\mathcal{H}$.

Definition 1. The continuous semigroup (group) of operators $T : \mathbb{R}_+(\mathbb{R}) = [0, \infty] \to End\mathcal{H}$, i.e.$C_0$-semigroup, is called *hyperbolic* if $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, where $\sigma(T(1))$ - spectrum of operator $T(1)$ and $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ - unit circle.

This notion is important because often the hyperbolicity of semigroup (group) is equivalent to the existence of an exponentional dichotomy for the solutions of the associated differential equation $\dot{x} = Ax$. It is well known from Daleckii and Krein [1], that the existence of an exponential dichotomy can be characterized in terms of operator A. Let's formulate the theorem of Daleckij and Krein, which gives the condition of exponential dichotomy for operator.

Theorem. *In order for an operator $A \in End\mathcal{H}$ to be hyperbolic (e-dichotomic)it is necessary and sufficient that it be uniformly W-dissipative with respect to an indefinite Hermitian operator*

$$Re(WA) \ll 0 \tag{1}$$

Any operator W satisfying condition (1) is invertible and such that the subspace H_- is uniformly W-positive and the subspace H_+ is uniformly W-negative. An operator W can be chosen so that these subspaces are W-orthogonal.

There were efforts to apply Daleckii and Krein's theorem to semigroups [2], [3],they failed. But this result can be applied to group of operators. And it will given an example which shows, that this theorem is failed for semigroups.

At first let us discuss Lyapunov's equation

$$\mathcal{L}_A(X) = A^*X + XA = F \in End\mathcal{H}, \tag{2}$$

which is under consideration in algebra End$\mathcal{H}$. It is assumed, that operator $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is generator of hyperbolic semigroup $T : \mathbb{R}_+ \to$End$\mathcal{H}$.

The *solution* of equation (2) is operator $W \in$End$\mathcal{H}$ satisfying conditions:

1) $Wx \in D(A^*)$; 2) $A^*Wx + WAx = Fx$ for all $x \in D(A)$.

Let's formulate Krein's theorem, it is necessary and sufficient condition of hyperbolicity of group operators .

Theorem. *The C_0-group $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{H}$ is hyperbolic if and only if there are uniformly negatively definite operators $F \ll 0, F_* \ll 0$ from algebra $End\mathcal{H}$ such, that equation (2) and equation*

$$AX + XA^* = F_* \tag{3}$$

have respectively self-adjoint solutions $W, W_* \in End\mathcal{H}$. In addition, if semigroup T is hyperbolic, then for each uniformly negatively definite operators $F \in End_*\mathcal{H}$, $F_* \in End\mathcal{H}$ equations (2) *and(3) have unique solutions $W \in End\mathcal{H}_*$, $W_* \in End\mathcal{H}$. These operators are invertible and can be obtained by integral formulas*

$$\begin{aligned} Wx = -\int_0^\infty G_A(t)^*(t)FG(A)(t)xdt + \int_{-\infty}^0 G_A(t)^*FG(t)xdt = \\ = \int_0^\infty T(t)^*P_{int}^*FP_{int}T(t)xdt - \int_0^\infty T(t)^*P_{out}^*FP_{out}T(-t)xdt, x \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$W_*x = -\int_0^\infty G_A(t)(t)F_*G_A(t)^*xdt + \int_{-\infty}^0 G_A(t)F_*G_A(t)^*xdt, x \in H. \tag{5}$$

Subspaces $\mathcal{H}_{int}$ u $\mathcal{H}_{out}$ are respectively W-positive and W-negative, and they are mutually W-orthogonal (terminology is taken from [1]).

Example. Let $\mathcal{H}$ be infinite-dimensional Hilbert space, A be generator of semigroup $T : \mathbb{R}_+ \to$ End$\mathcal{H}$ of compact operators and semigroup T is hyperbolic. Such semigroup is continuous in uniform operator topology for $t > 0$ [4]. That's why operator functions from formulas (4),(5) are continuous in uniformly operator topology for $t > 0$, and their ranges are compact operators. Therefore operators W and W_* are compact and not invertible. Any negatively definite operator $A = A^* : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ with compact resolvent can be more concrete example.

This example shows that Krein's theorem can not be applied to semigroup of operators. In spite of example 1, there are classes of semigroups for which analog of theorem exists.

Definition 2. Operator $B \in$ End$\mathcal{H}$ is said to be *correct* (or *uniformly injective*), if condition holds $\alpha(B) = \inf\limits_{\|x\|=1} \|Bx\| > 0$.

Definition 3. C_0-Semigroup $T : \mathbb{R}_+ \to$End$\mathcal{H}$ is said to be *semigroup of correct operators*, if operator $T(1)$ is correct operator.

Semigroup $T : \mathbb{R}_+ \to$ End$\mathcal{H}$ is said to be semigroup of *surjective operators* if operator $T(1)$ surjective.

The formulated theorem holds true for semigroup of correct operators and semigroup of surjective operators.

References

[1] Ju.L.Daleckii, M.G. Krein *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space* // AMS Bookstore – 2002.

[2] C.Chicone, Y.Latushkin *Hyperbolicity and dissipativity in Evolution equations*// Appl. Math. – 1995. – V.168 – c.95-106.

[3] C.Chicone, Y.Latushkin *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*// Amer. Math. Soc. – 1999.

[4] K.Engel, R.Nagel *One-parameter semigroups for linear evolution equations*// Springer, Heidelbelrg, Berlin, New York – 1999.

Voronezh State University, Universitetskaya pl.,1, 394006, Voronezh, Russia

E-mail: maria.romanovaru@mail.ru

Proceeding of the International Conference

XX Crimean Autumn Mathematical School (KROMSH-2009)

УДК 517.518.4   MSC2000: 49J22

V.V. Ternovskii, M.M. Khapaev

RECONSTRUCTION OF PERIODIC FUNCTIONS WITH UNKNOWN PERIOD FROM NOISY FOURIER COEFFICIENTS

Предлагается вариационный метод восстановления периодической функции с неизвестным периодом по зашумленным коэффициентам Фурье. Составляется функционал, содержащий коэффициенты Фурье, который минимизируется, с учетом некорректности задачи, методом регуляризации А.Н. Тихонова. Ряд Фурье не привлекается, поэтому эффект Гиббса не возникает. Приводится пример функции, имеющей разрывы.

A variation method for reconstruction of periodic function with unknown period from noisy Fourier coefficients is offered. The functional with Fourier coefficients is constructed. As the problem is incorrect, the functional is minimized by means of Tikhonov regularization method. Fourier series are not used, therefore the Gibbs effect doesn't emerge. An example of a discontinuous function is given.

The problem of reconstructing a function from noisy Fourier coefficients, which is important for applications, is usually solved by directly summing the Fourier series with normalizing factors that improve the convergence of the series. To be more precise, instead of the Fourier series

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \tfrac{\pi k x}{l} + b_k \sin \tfrac{\pi k x}{l} \right) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \tfrac{\pi k x}{l}\, dx \\ b_k &= \tfrac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \tfrac{\pi k x}{l}\, dx \end{aligned} \tag{2}$$

the trigonometric series

$$\frac{\tilde{a}_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{a}_k \cos \frac{\pi k x}{l} + \tilde{b}_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right) \frac{1}{1 + k^2 \alpha} \tag{3}$$

is used, where the $\tilde{a}_k$ and $\tilde{b}_k$ are approximate Fourier coefficients, the exact period $2l$ is known, and α is a parameter of the same order of smallness as the error δ in the Fourier coefficients, that is,

$$\frac{(a_o - \tilde{a}_o)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \right) \leq \delta^2 \tag{4}$$

As is known, a function cannot be reconstructed by substituting the noisy coefficients $\tilde{a}_k$ and $\tilde{b}_k$ into the Fourier series (1). The series will diverge. At the same time, the trigonometric series (3) coincides with the required continuous function $f(x) \subseteq L^2[-l, l]$ with error $\varepsilon(\delta)$ tending to zero as $\delta \to 0$ [1].

Summing series (3) requires the knowledge of the exact period l, which restricts the application of this method to real-life problems, because experiments can give only finitely many coefficient values $\{\tilde{a_k}, \tilde{b_k}\}$ and an approximate value $\tilde{l}$ of the period.

We suggest a method for reconstructing a function without summing series (1) and not using the value of the period. A function $f(x)$ is reconstructed by solving the system (2) of Fredholm integral equations of the first kind, which reduces the Fourier expansion of the function to the solution of a system of ill-posed problems. This implies, in particular, that a small variation of the Fourier coefficients may result in an arbitrarily large change of the required function $f(x)$. If the total error δ in the coefficients is given, then the problem reduces to solving integral inequality (4). In the theory of ill-posed problems, the nonuniqueness of a solution to this inequality is removed by passing to the problem of minimizing an auxiliary functional (stabilizer) at the solutions.

The ill-posed problem (4) can be solved by using regularizing algorithms [1], which reduce it to minimizing the Tikhonov functional

$$M[f(x)] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx - \tilde{a}_o\right)^2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\tfrac{\pi k x}{l}\,dx - \tilde{a}_k\right)^2 + \left(\tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\tfrac{\pi k x}{l}\,dx - \tilde{b}_k\right)^2\right) \tag{5}$$

$$+\alpha\Omega[f(x)]$$

where $\Omega[f(x)]$ is a stabilizer. Such a problem is wellposed and has a unique solution [1]. Note that minimizing functional (5) by the direct method does not require any a priori information on the period $2l$. The period can be calculated by using the Parseval equality, provided that the function itself or an a priori information on its values at some points is known. Consider a simple example. Suppose given the Fourier coefficients of the function $f(x) = x$ and let $l = 2\pi$. Calculating the lefthand side of the Parseval equality

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

we obtain the approximate equality

$$26.31894506 \approx \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x^2 dx$$

which gives the period $2l$. Thus, given only the Fourier coefficients and an additional a priori information, we can find both the function $f(x)$ and the period with certain accuracy.

Let us apply the argument described above to reconstruct the following discontinuous function extended by periodicity over the entire X axis:

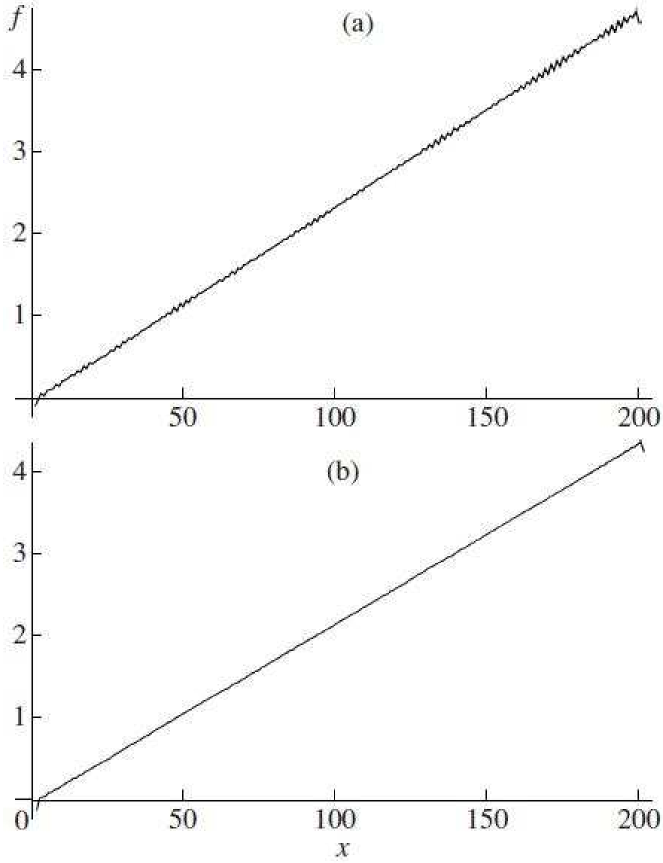
$$f(x) = x + \frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4} \tag{6}$$

We calculated the first two hundred coefficients (2) by the trapezoid quadrature formulas with the help of the computer mathematical system *Mathematica 6.0.* As is known, the summation of Fourier series (1) leads to the occurrence of the Gibbs effect at the boundary points $\frac{3\pi}{4}$ and $-\frac{3\pi}{4}$.

A lot of articles are devoted to the Gibbs effect. Let's note only a survey paper [2] in which various ways of struggle against this undesirable phenomenon are described.

The summation of trigonometric series (3) with weight coefficients distorts the function $f(x)$ while suppressing the Gibbs effect. With increasing α, the discontinuities of the function disappear.

The best results are achieved by minimizing the Tikhonov functional (4). In modeling, a piecewise constant and a piecewise linear approximation was used. The stabilizer was computed by the formula $\Omega = \sum_{k=1}^{200} y_k^2$, where the y_k are the required values of the function f(x) at the uniform grid points $x_k = \frac{(k-1)2l}{199}$ for $k = 1, 2, \ldots, 200$. The reconstructed function obtained after solving



Pic 1. A linear function reconstructed from 200 approximate Fourier coefficients with the use of piecewise constant interpolation at the functional values $M[f] = 0.00164408$ (a) and 0.00154159 (b).

the minimization problem (5) at $\alpha = 0$ in the class of piecewise constant functions has nothing in common with the initial function and oscillates from –400 to +400. When the regularization parameter is increased to $\alpha = 10^{-6}$, the reconstructed function approaches the initial one, as is shown in Fig. 1a. When the piecewise linear interpolation is used, oscillations inside the period disappear Fig. 1b. If the Fourier coefficients are calculated by Filon's quadrature formula and the behavior of the integrand is taken into account, then the sought function (6) is reconstructed with machine precision even for $\alpha = 0$. The Gibbs effect completely disappears even under the piecewise linear interpolation. For more complicated functions, it is expedient to use splines.

In conclusion, we mention that the method suggested in this paper is intended for recognizing functions with highly noisy Fourier coefficients. The accuracy and the very possibility of determination of the period of such functions depends on the amount of the available a priori information. Since the Parseval equality holds with large error, the period is calculated only approximately (up to an order of magnitude).

References

[1] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin *Solution Methods for Ill-Posed Problems* // Nauka Moscow – 1986.

[2] David Gottlieb and Chi-Wang Shu *On the Gubbs Phenomenon and its Resolution* // SIAM Rev. – 1997. – V.39, N.4. – p.644-668.

Ternovskii V.V., Khapaev M.M., Russia, Moscow, Lomonosov MSU, faculty of Computational Mathematics and Cybernetics

E-mail: Vladimir1961@hotmail.com

СОДЕРЖАНИЕ