

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1995

1.400 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Леонид Тишков



Μια άλλη εποχή (1973), του Kenneth Noland

ΑΥΤΟΣ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΣΩΣ ΠΡΟΚΑΛΕΣΕΙ ΜΕΡΙΚΑ ΕΙΡΩΝΙΚΑ σχόλια: «Μήπως είναι γυρισμένος ανάποδα;», «Θα μπορούσε να είναι ένα ωραίο σπορ πουκάμισο!», «Καλός είναι, αλλά θα τον προτιμούσα στο κόκκινο!». Ποιος θα μπορούσε να πει ότι αυτού του είδους οι αντιδράσεις δεν είναι δικαιολογημένες;

Ομολογουμένως, η αφηρημένη τέχνη αποτελεί αντικείμενο έντονων συζητήσεων. Όταν φαίνεται ότι ο δημιουργός εξερευνά το μέσο της καλλιτεχνικής έκφρασης μόνο για λογαριασμό του, έχουμε κάθε δικαίωμα να ρωτήσουμε: «Ποιος είναι ο λόγος;». Το ίδιο ερώτημα τίθεται μερικές φορές στους ερευνητές των καθαρών μαθηματικών. Οι απαντήσεις είναι οι ίδιες:

Ανακύπτει ένα θεμελιώδες ερώτημα: Από πού προέρχεται η ανάγκη για αφαίρεση; Η αναγνώριση του αφηρημένου μπορεί να διδαχθεί ή είναι έμφυτη; Ίσως έχετε σχεδιάσει σκαριφήματα που εσείς οι ίδιοι τα βρίσκετε όμορφα. Μπορεί να μην εικονίζουν τίποτε, αλλά να σας αρέσουν. Μήπως το «Μια άλλη εποχή» είναι ένα τέτοιο πρόχειρο σχεδιάσμα; Κι αν είναι, τότε μέσα σε ποια όρια εκτιμούμε την αφηρημένη

ζωγραφική —τη δική μας και των άλλων; Και ποιων τα αφηρημένα σχέδια εκτίθενται στα μουσεία;

Αυτό που φαίνεται ότι εκτιμούμε στην αφηρημένη τέχνη είναι η μορφή, η σύνθεση, η ισορροπία —ιδιότητες για τις οποίες δύσκολα μπορούμε να μιλήσουμε. Ορισμένοι ίσως βρουν τον παραπάνω πίνακα υποβλητικό και κομψό. Ίσως σας θυμίζει το οδικό δίκτυο των πόλεων. Μάλιστα, μοιάζει κάπως με την πόλη όπου γεννήθηκε το *Quantum*, την Ουάσινγκτον: είναι μια πόλη με πολύ πράσινο και σχήμα ρομβοειδές, με τους άξονες των x και y (που περνούν από το Καπιτώλιο) να ξεκινούν σχεδόν από το κέντρο. Ίσως οι αναγνώστες που γοητεύονται από τον πίνακα ανακαλύψουν σ' αυτόν παραδείγματα χρυσής τομής, ή κάποια άλλη εξήγηση του σχεδίου.

Στο άρθρο της σελίδας 39 εξετάζουμε το ζήτημα της «κομψότητας» στα μαθηματικά. Όπως συμβαίνει και στην τέχνη, οι μαθηματικοί «την αναγνωρίζουν όταν την βλέπουν». Αν πάλι θέλετε να εξασκηθείτε στα εφαρμοσμένα μαθηματικά με αναφορά στα οδικά δίκτυα, διαβάστε το άρθρο «Το σχολικό λεωφορείο και οι λακκούβες», στη σελίδα 24.

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1995

ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

Μπορεί μερικές φορές οι χιονοδρόμοι να ονειρεύονται μια ζεστή φωτιά στη μέση του ταξιδιού τους, αλλά ο πλανήτης μας κρατάει τη θερμότητά του κρυμμένη μέσα του. Οι θερμοπίδακες και οι εκροές λάβας εμφανίζονται σχετικά σπάνια στην επιφάνεια της Γης. Δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε γιατί όλη αυτή η θερμότητα παραμένει κλεισμένη στο εσωτερικό του πλανήτη ή πώς διαφεύγει μερικές φορές μέσα από ρωγμές του φλοιού της Γης.

Ίσως όμως είναι δυσκολότερο να εξηγήσουμε από πού προέρχεται αυτή η θερμότητα. Στο άρθρο του «Παίρνοντας τη θερμοκρασία της Γης», ο Alexey Byalko διερευνά αυτό το ερώτημα και παράλληλα αποκαλύπτει ορισμένα ενδιαφέροντα στοιχεία για τη θερμική ιστορία της Γης και την εσωτερική δομή της. Σ' ένα συνοδευτικό άρθρο ο A.G.W. Cameron παρουσιάζει μια θεωρία για το σχηματισμό της μικρής αδελφής της Γης, της Σελήνης.

ΑΡΘΡΑ

- 4** Βαθιές αλήθειες
Παίρνοντας τη θερμοκρασία της Γης
Alexey Byalko
- 10** Μαθηματικές κορδέλες
Πηξίδες και κόμβοι
Alexey Sosinsky
- 18** Προσομοιωμένη δημιουργία
Όταν ένα σώμα συναντά ένα άλλο
A.G.W. Cameron
- 24** Τεχνάσματα
Το σχολικό λεωφορείο και οι λακκούβες
Thomas P. Dence

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- | | |
|--|--|
| 2 Ο κόσμος των κβάντων | 46 Μαθηματικές αναζητήσεις
<i>Γεωμετρία της παγόδας</i> |
| 17 Σπαζοκεφαλιές | 47 Μορφές στην επιστήμη
<i>Η κληρονομιά του Norbert Wiener</i> |
| 23 Πώς λύνεται; | 51 Κακοτοπιές
<i>Συνιστώσες της γνώσης</i> |
| 30 Συνέντευξη
<i>Ο Δημήτρης Χριστοδούλου μιλά στο ελληνικό Quantum</i> | 54 Γεγονότα
<i>Ολυμπιάδες</i> |
| 36 Καλειδοσκόπιο
<i>Διασχίζοντας το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα</i> | 58 Σας ενδιαφέρει; |
| 38 Στο εργαστήριο
<i>Ένας μαγικός μουσικός τύπος</i> | 59 Αλληλογραφία |
| 40 Σκέψεις
<i>Τι είναι η κομψότητα;</i> | 61 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις |
| 42 Στα πεδία της φυσικής
<i>Σχηματισμός νεφών</i> | 69 Παιχνιδότοπος
<i>Το παιχνίδι των τριάδων</i> |

Η αυταπόδεικτη αλήθεια

ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ ΟΙ ΙΔΕΕΣ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΤΟΣΟ ΑΥΤΟΝΟ-
ητες ώστε όχι μόνο αμελούμε να τις θέσουμε υπό
αμφισβήτηση, αλλά και αρνούμαστε να αναγνω-
ρίσουμε πως υπάρχουν ερωτήματα που συνδέονται
μαζί τους και στα οποία πρέπει να δοθεί απάντηση. Η νόη-
σή μας, αναγκασμένη να λαμβάνει άμεσες αποφάσεις σ'
έναν κόσμο επικίνδυνο, ανέπτυξε μέσω της εξέλιξης το τέ-
χνασμα να μη λειτουργεί με την πραγματικότητα αυτή καθ'
εαυτή αλλά με απλοποιημένα νοητικά μοντέλα. Η γλώσ-
σα, ένα από τα ισχυρότερα όργανα της ανθρώπινης πνευ-
ματικής εργαλειοθήκης, αποτελεί εξαιρετικό παράδειγμα. Η
λέξη «γάτα» είναι μια «ιδέα», ένα σημαίνον η λήψη του
οποίου από τον εγκέφαλο ενεργοποιεί μια εξαιρετικά περί-
πλοκη ακολουθία σκέψεων. Στη μεγαλύτερη έκτασή της,
αυτή η ακολουθία δεν αφορά κάποια συγκεκριμένη γάτα
αλλά μια γενική έννοια, την αφηρημένη ενσάρκωση των αι-
λουροειδών. Με αυτό το σημαίνον συνδέεται οτιδήποτε
αναμένουμε ότι μπορεί και ότι δεν μπορεί να κάνει μια γάτα.
Ασυνείδητα υποθέτουμε ότι κάθε πραγματική γάτα θα δια-
θέτει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Αυτό όμως μπορεί να προκαλέσει δυσκολίες. Λίγο μετά
το γάμο μας, η σύζυγός μου Anril έφτιαξε κρέπες, σαν
σπουδαία μαγείρισσα. Δεν μπορέσαμε βέβαια να τις φάμε
όλες, κι έτσι, όταν βγήκαμε το βράδυ, αφήσαμε όσες είχαν
περισσέψει πάνω στο τραπέζι. Όταν επιστρέψαμε στο σπίτι
διαπιστώσαμε ότι η γατούλα μας η Σάμυ δεν ταίριαζε, του-
λάχιστον ως προς ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό, με τη γενι-
κή ιδέα «γάτα». Η βουλημία για τις κρέπες δεν αποτελεί
γνώρισμα της αρχετυπικής γάτας. Βεβαίως, ουδείς από μας
είχε φροντίσει να ενημερώσει σχετικά τη Σάμυ.

Υποτίθεται ότι τα μαθηματικά είναι το άκρως λογικό, το
κατ' εξοχήν ορθολογικό αντικείμενο, στο οποίο οι αλήθειες
είναι πραγματικές και ουδείς τις αμφισβητεί. Θα φανταζό-
ταν κανείς ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχει χώρος για απο-
δοχή αναληθειών ως «πρόδηλων», και ότι σ' ένα οικοδόμη-
μα που εδράζεται τόσο στέρεα στα λογικά του θεμέλια δεν
θα υπάρχει έδαφος για παραδοχές που επιδέχονται αμφι-
σβήτηση.

Δεν είναι, έτσι, όμως.

Ο Ευκλείδης, ο οποίος περιέλαβε όλη την ελληνική γεω-
μετρία σ' ένα λογικό, αυτοσυνεπές σύστημα, ξεκίνησε δια-
τυπώνοντας ρητά τις παραδοχές στις οποίες βασιζόταν το
έργο του. Πολλές δεν επιδέχονται αμφισβήτηση, όπως ότι
όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Ωστόσο, μία από
αυτές αποτελεί εξαίρεση: η παραδοχή πως υπάρχουν παράλ-
ληλες γραμμές. Ο Ευκλείδης γνώριζε ότι αυτό το αίτημα θα
μπορούσε να μην αληθεύει. Εδώ και δύο χιλιάδες χρόνια,

σχεδόν όλοι πίστεψαν ότι με αυτό τον τρόπο ο Ευκλείδης
εισήγαγε ένα ψεγάδι σ' ένα κατά τα άλλα κομψό έργο.
Άλλοι είχαν τη γνώμη ότι η ύπαρξη παραλλήλων ήταν τόσο
οφθαλμοφανής που δεν χρειαζόταν καμία συζήτηση, ενώ
ορισμένοι θεώρησαν ότι πρέπει να υπάρχει κάποιος τρόπος
απόδειξης του αιτήματος με βάση τα υπόλοιπα αξιώματα.

Όλοι τους είχαν άδικο. Ο Ευκλείδης ήξερε τι ακριβώς
έκανε, αν και δεν είχε τη δυνατότητα να εξηγήσει πλήρως
γιατί το έκανε. Στην πραγματικότητα, η απόδειξη του σφάλ-
ματος υπήρχε πάντοτε για οποιονδήποτε κατανοούσε την
αληθινή φύση του προβλήματος. Στη σφαιρική γεωμετρία,
σε σχέση με την επίπεδη, η έννοια που αντιστοιχεί στην ευ-
θεία γραμμή είναι ο μέγιστος κύκλος. Η γεωμετρία των
μέγιστων κύκλων στις σφαίρες ικανοποιεί όλα τα αξιώμα-
τα του Ευκλείδη εκτός από εκείνο των παραλλήλων.
Οποιοδήποτε δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται υποχρεωτικά.

Δεν χρειάζεται να επιχειρηματολογήσουμε —όπως έκα-
ναν πολλοί όταν εισημάνθηκε αυτό το «άβολο» γεγονός—
για το ότι ένας μέγιστος κύκλος δεν είναι ευθεία γραμμή.
Το σημαντικό είναι ότι αν οι υπόλοιπες παραδοχές του Ευ-
κλείδη συνεπάγονται αναγκαστικά την ύπαρξη παραλλή-
λων που ουδέποτε τέμνονται, τότε το ίδιο επιχείρημα πρέπει
να συνεπάγεται και την ύπαρξη μέγιστων κύκλων που ο-
μοίως δεν τέμνονται ποτέ. Τέτοιοι κύκλοι, όμως, δεν υπάρ-
χουν.

Μια άλλη παραδοχή, την οποία θα έκαναν σχεδόν οι πά-
ντες, είναι ότι το όλο είναι πάντοτε μεγαλύτερο του μέρους.
Ο Georg Cantor παρατήρησε ότι αυτό δεν αληθεύει για το
σύνολο των ακεραίων αριθμών —με την έννοια ότι μπο-
ρούμε να αντιστοιχίσουμε τους ακεραίους αριθμούς 1, 2, 3,
4, ... έναν προς έναν, με το «μικρότερο» σύνολο των αρτίων
2, 4, 6, 8, ... Ο Cantor ανέπτυξε ακόμη πιο παράξενες συνέ-
πειες αυτής της ιδέας —για παράδειγμα, ότι μερικά άπειρα
είναι μεγαλύτερα από άλλα. Πολλοί βρήκαν τις ιδέες του
τόσο αντίθετες με τη διαίσθηση, ώστε δεν μπόρεσαν να τις
αποδεχθούν. Αυτό, όμως, σήμαινε απλώς ότι τους έλειπε η
φαντασία του Cantor.

Ο καθένας μπορεί να κατηγορηθεί για έλλειψη φαντα-
σίας, ακόμη και οι σπουδαιότεροι διανοητές. Ο David Hil-
bert —η φαντασία του οποίου ήταν επαρκής, και μάλιστα
αποδέχθηκε τις ιδέες του Cantor περιγράφοντάς τις σαν
«παράδεισο»— θέλησε να εδραιώσει τα μαθηματικά σε από-
λυτα στέρεα λογικά θεμέλια. Ακολούθησε λοιπόν τον Ευ-
κλείδη και διατύπωσε ένα ακριβές σύστημα αξιωμάτων. Το
σχέδιό του ήταν να αποδείξει ότι οι υποθέσεις αυτές ήταν
πλήρως αυτοσυνεπείς και δεν θα μπορούσαν ποτέ να οδη-
γήσουν σε λογική αντίφαση. Επινόησε επίσης ένα ερευνη-

τικό πρόγραμμα, με το οποίο, όπως πίστευε, θα πετύχαινε αυτό το στόχο. Ωστόσο, ένας νεότερος μαθηματικός, ο Kurt Gödel, απέδειξε ότι το πρόγραμμα του Hilbert δεν θα μπορούσε ποτέ να πετύχει. Υπάρχουν μαθηματικές αλήθειες που ούτε η θέση ούτε η άρνησή τους αποδεικνύεται αν χρησιμοποιηθούν οι φεραμαλιστικές μέθοδοι του Hilbert. Μια φεραμαλιστική απόδειξη ότι τα μαθηματικά δεν αντιφάσκουν με τον εαυτό τους δεν είναι δυνατό να υπάρξει.

Ο Gödel διέθετε τη φαντασία που χρειαζόταν για να συνειδητοποιήσει ότι ο Hilbert προσπαθούσε να κάνει τα μαθηματικά να «σηκώσουν τον εαυτό τους τραβώντας τα κορδόνια των παπουτσιών τους»· διέθετε τη φαντασία για να καταλάβει πόσο απίθανο ήταν αυτό, και να συλλάβει την ακριβή αιτία της αποτυχίας του. Η απόδειξή του βασίστηκε σ' ένα απλό λογικό παράδοξο· κατάφερε να κατασκευάσει την μαθηματική απόφαση με το νόημα «αυτό το θεώρημα δεν μπορεί να αποδειχθεί». Έτσι, αν μπορούμε να την αποδείξουμε, τότε είναι αληθής, πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να την αποδείξουμε· κι αν δεν μπορούμε να την αποδείξουμε, τότε είναι αληθής, άρα μπορούμε.

Όταν πολλοί άνθρωποι συμφωνούν σε κάτι, αλλά δεν μπορούν να αρθρώσουν ικανούς λόγους που να τους πείθουν πως αυτό είναι αληθές, τότε πιθανώς δεν γνωρίζουν για τι ακριβώς μιλούν. Όσο περισσότερο προσφεύγουν σε ισχυρισμούς πως αυτό είναι τάχα πρόδηλο, πασιφανές, πως η αναλήθειά του ανιτιθεται στον κοινό νου, τόσο πιο πιθανό είναι να σφάλουν.

Η «αυταπόδεικτη αλήθεια» γίνεται αποδεκτή εύκολα, ίσως όμως να μην είναι πάντοτε αληθινή.

Ian Stewart

Ο Ian Stewart είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Ουώρικ, στο Κόβεντρι της Αγγλίας. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα βρίσκονται στην περιοχή της μη γραμμικής δυναμικής και των εφαρμογών της. Έχει εκδώσει περισσότερα από 50 βιβλία και γράφει τη στήλη "Mathematical Recreations" του Scientific American. Στα ελληνικά κυκλοφορούν τα βιβλία του *Παίζει ο Θεός ζάρια*, και *Είναι ο Θεός γεωμέτρης*; από τις Εκδόσεις Κωσταράκη. Το ελληνικό Quantum τον ευχαριστεί για το κείμενό του, το οποίο δημοσιεύεται για πρώτη φορά, και αποκλειστικά, σ' αυτό.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντιπροσέλιον Εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ίδρυτικοί Διευθυντές Συνταξής

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντε (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Συνταξής στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μοντάνα

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Συνταξής στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Vladimir Dubrovsky, Επικουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων
Edward Lozansky

Σύμβουλοι Συνταξής

Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Κvant

Συμβουλευτική Επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT

James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντιλ, Λουιζιάνα

Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Προβιντενς, Ρόουντ Άιλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Αλέκος Μάραλης

Διευθυντής

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συντεράστηκαν οι κ.κ.:

Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, Μάκης Παπαχριστόπουλος -φυσικός, Κωνσταντίνα Μεργιά -φυσικός, Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης -μαθηματικός, Σπύρος Μακρας -μαθηματικός, Γιώργος Κυριακόπουλος και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια
Παντελής Μπουκαλας

Τυπογραφικές διορθώσεις
Π. Τσιούπουλος

Επιμέλεια έκδοσης
Γ. Ντράνος

Υπεύθυνη λογιστηρίου
Μαρία Μάραλη

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επικουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστημών Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επικουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθέσια, σελιδοποίηση
Κατοπτρο

Φιλμ, μοντάς
Γ. Κεραμάς

Εκτύπωση
Τετραχρωμία

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντουλακης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κατοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διεθνές περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.
Διαφημιστές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κατοπτρο,
Ισοφρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μεταδόση με οποιοδήποτε

ποιο μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δραχ.
Ετήσια συνδρομή: 7.500 δραχ. για ιδιώτες, 12.000 δραχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δραχ.

Παίρνοντας τη θερμοκρασία της Γης

Πόσο ζεστή είναι η καρδιά του πλανήτη μας;

Alexey Byalko

Ο ΦΛΟΙΟΣ ΤΗΣ ΓΗΣ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΤΟΣ. Όλοι γνωρίζουμε ότι μετατοπίζεται όποτε γίνεται σεισμός. Οι μετατοπίσεις αυτές είναι έντονες, αλλά τυχαίες και τοπικές, μολονότι κάποιοι σεισμοί προκαλούνται από την κατευθυνόμενη, μη τυχαία κίνηση των ηπείρων και του πυθμένα των ωκεανών.

Ο φυσικός μηχανισμός που οδηγεί στην κατευθυνόμενη κίνηση του φλοιού της Γης σχετίζεται με την απελευθέρωση της θερμότητας, η οποία έχει αποθηκευθεί στο εσωτερικό της Γης κατά τη διαδικασία σχηματισμού του πλανήτη μας. Σε τούτο το άρθρο πραγματευόμαστε τη θερμότητα του εσωτερικού της Γης, τη «θερμική» ιστορία της Γης και την εσωτερική δομή της.

Αναζητώντας τη γνώση

Τη δομή του εσωτερικού του πλανήτη μας τη γνωρίζουμε εν μέρει μέσω βαθιών φρεατίων. Τα φρεάτια ανοίγονται κυρίως για να εξορυχθεί πετρέλαιο και φωταέριο. Αλλά κι αν ακόμη ένα φρεάτιο έχει στερέψει, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε το εσωτερικό του πλανήτη.

Πώς δημιουργείται, όμως, ένα βαθύ φρεάτιο; Ένα γεωτρητικό διάλυμα (νερό με άλατα που προστίθενται για να αυξήσουν την πυκνότητά του) διοχετεύεται υπό υψηλή πίεση στον πυθμένα του φρεατίου, στο σημείο ακριβώς όπου ένα γεωτρήπανο περιστρέφεται για να σπάσει το πέτρωμα. Έτσι το υγρό ωθεί στην επιφάνεια τα θραύσματα που δημιουργεί το τρυπάνι.

Τι μας εμποδίζει, επομένως, να ανοίξουμε μια τρύπα ως το κέντρο της Γης; Έτσι θα μαθαίναμε κάποια πράγματα για την εσωτερική δομή του πλανήτη μας, ίσως μάλιστα ανακαλύπταμε και αρκετά άλλα χρήσιμα στοιχεία κατά τη διαδρομή. Δυστυχώς, αυτό είναι κατ' αρχήν αδύνατο. Ας δούμε γιατί δεν μπορούμε να διανοίξουμε ένα φρεάτιο με βάθος μεγαλύτερο από 15 km.

Πριν απ' όλα, όμως, ας αναφέρουμε μερικά στοιχεία θεωρίας. Όπως γνωρίζετε, οποιοδήποτε στερεό υλικό καταστέφεται αν οι τάσεις που εφαρμόζονται σ' αυτό γίνουν αρκετά μεγάλες. Υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη τάσης σ (δηλαδή δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας). Το ένα είναι η ομοιόμορφη τάση —μ' άλλα λόγια, η *συνήθης πίεση* P . Σύμφωνα με το νόμο του Pascal, αυτή η πίεση συμπίεζει την ύλη με δυνάμεις που είναι ίσες σε όλες τις διευθύνσεις. Γενικά, τίποτε δεν συμβαίνει ούτε στα υγρά ούτε στα στερεά που βρίσκονται υπό πίεση, εκτός από κάποια αύξηση στην πυκνότητά τους. Το άλλο είδος τάσης είναι η μη ομοιόμορφη *διατμητική* τάση. Όταν εφαρμόζεται διατμητική τάση σε υγρά, δημιουργεί ρεύματα με ταχύτητες που είναι περίπου ανάλογες με την τάση. Όταν εφαρμόζεται σε στερεά, αρχικά δεν προκαλεί τίποτε, καθώς όμως αυξάνεται, προκαλεί μικρές ρωγμές. Εν συνεχεία οι ρωγμές μεγαλώνουν, γεγονός που οδηγεί μερικές φορές στην καταστροφή του στερεού δείγματος· συνήθως όμως απλώς ελαττώνονται οι εξωτερι-

κές δυνάμεις. Η μέγιστη διατμητική τάση που μπορεί να δεχτεί ένα υλικό χωρίς να υποστεί ρωγμές ονομάζεται αντοχή του υλικού σ_{max} . Η αντοχή των πιο σκληρών, κρυσταλλικών πετρωμάτων του γήινου φλοιού δεν υπερβαίνει την τιμή $\sigma_{max} \cong 2-3 \cdot 10^8 \text{ Nt/m}^2$.

Ας επιστρέψουμε στο φρεάτιό μας. Για οποιοδήποτε βάθος H ξέρουμε ποια είναι η πίεση από το περιβάλλον πέτρωμα, $P_0 = \rho_0 g H$, όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα του πετρώματος —γενικά κυμαίνεται από 2,6 έως 2,9 gr/cm^3 . Ξέρουμε επίσης πόση είναι η πίεση του γεωτρητικού διαλύματος στον άξονα του φρεατίου, $P_1 = \rho_1 g H$. Θα ήταν θαυμάσιο αν μπορούσαμε να βρούμε ένα υγρό με πυκνότητα $\rho_1 = \rho_0$ που και χημικά σταθερό να είναι και να μην αλληλεπιδρά με το πέτρωμα (και επίσης να είναι αρκετά φτηνό). Δυστυχώς, οι δυνατότητες επιλογής υγρών είναι μάλλον περιορισμένες. Στην πραγματικότητα, το μόνο που διαθέτουμε είναι νερό, υδατικά διαλύματα αλάτων και αραιά αιωρήματα ορυκτών σε νερό, και δεν μπορούμε να αυξήσουμε την πυκνότητα ρ_1 περισσότερο από 1,5 gr/cm^3 περίπου. Βεβαίως, υπάρχουν υγρά με μεγαλύτερες πυκνότητες (για παράδειγμα, το θεικό οξύ, που η πυκνότητά του είναι 1,84 gr/cm^3)· επιπλέον δεν είναι όλα τόσο δραστικά όσο το θεικό οξύ. Η αναζήτηση, όμως, του «μαγικού υγρού», όπως περιγράφηκε παραπάνω, υπήρξε μάταιη.

Η διαφορά πίεσης μεταξύ του εσωτερικού του φρεατίου και του περιβάλλοντος τοιχώματος προκαλεί διατμη-



Tuux 13

τικές τάσεις στο πέτρωμα. Φυσικά, οι διατμητικές τάσεις ελαττώνονται με την απόσταση από το φρεάτιο· φτάνουν μάλιστα σε μια μέγιστη τιμή κοντά στο τοίχωμα του φρεατίου, ίση με $\sigma = 2/3(P_0 - P_v) = 2/3(\rho_0 - \rho_v)gH$. (Δεν μπορώ να σας αποδείξω στο άρθρο αυτό την ορθότητα του συντελεστή $2/3$ —η απόδειξη προϋποθέτει μια πιο πολύπλοκη διερεύνηση.)

Έτσι, στον πυθμένα ενός βαθιού φρεατίου οι διατμητικές τάσεις αρχίζουν να προσεγγίζουν το όριο της αντοχής σ_{max} του πετρώματος. Επομένως, ένα αρκετά βαθύ φρεάτιο καταρρέει υπό την πίεση του πετρώματος που το περιβάλλει. Το μέγιστο βάθος φρεατίου που μπορεί να διανοιχθεί σε γρανίτη ($\rho_0 = 2,7 \text{ gr/cm}^3$) βρίσκεται από τη σχέση

$$\Delta P \cong (\rho_0 - \rho_v)gH < \sigma_{max}, \text{ και είναι} \\ H < 10-15 \text{ km.}$$

Το βαθύτερο φρεάτιο στον κόσμο (στη ρωσική χερσόνησο Κόλα, πάνω από τη Φιλανδία,) φτάνει σε βάθος 12 km —περίπου το 0,2% της ακτίνας της Γης.

Όταν ανοίγονται φρεάτια πετρελαιίου ή τούνελ μέσα από τα βουνά, ανακαλύπτει κανείς πως η θερμοκρασία του πετρώματος αυξάνεται με το βάθος. Η αύξηση της θερμοκρασίας δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από την περιοχή όπου βρίσκεται το φρεάτιο ή το τούνελ (δεν είναι δε εύκολη η ακριβής μέτρησή της). Οι εποχικές μεταβολές της θερμοκρασίας παίζουν ρόλο σε μικρά βάθη. Επιπλέον, το ρεύμα θερμότητας δεν μεταφέρεται μόνο με αγωγιμότητα αλλά και με το νερό που ρέει αργά κατά μήκος των ρωγμών στο πέτρωμα. Στα μεγάλα βάθη, όταν το φρεάτιο εν μέρει καταρρέει, το πέτρωμα θερμαίνεται λίγο περισσότερο.

Αφού υπάρχει κάποιο όριο για το βάθος διάνοιξης, άμεσες μετρήσεις της θερμοκρασίας της Γης είναι δυνατές μόνο σ' ένα λεπτό επιφανειακό στρώμα. Κατά μέσο όρο, η αύξηση της θερμοκρασίας με το βάθος είναι $dT/dz = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K/m} = 30 \text{ K/km}$. Στην πραγματικότητα, οι κατά τόπους βαθμίδες θερμοκρασίας αποκλίνουν από αυτό τον μέσο όρο (που ονομάζεται γεωθερμική βαθμίδα). Είναι ελάχιστες σε παλιούς γρανίτες —για παράδειγμα, στα Ουράλια Όρη (γύρω στους 15 K/km)— και

μέγιστες σε ηφαιστειακά ενεργές περιοχές (έως 100 K/km).

Ροή θερμότητας q είναι η θερμική ισχύς που αναδύεται από τα βάθη της Γης μέσω εμβαδού ενός τετραγωνικού μέτρου της επιφάνειάς της. Ισούται με το γινόμενο του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κ και της βαθμίδας θερμοκρασίας: $q = \kappa dT/dz$. Αν η κύρια πηγή εσωτερικής θερμότητας βρίσκεται σε μεγάλο βάθος, προφανώς η ροή θερμότητας πρέπει να είναι σχεδόν σταθερή. Οι μετρήσεις, ωστόσο, δεν στηρίζουν μια τέτοια σταθερότητα της ροής θερμότητας.

Η αύξηση της θερμοκρασίας με το βάθος δεν ακολουθεί ακριβώς την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας —η ροή θερμότητας μεταβάλλεται μερικές φορές απροσδόκητα. Ο λόγος γι' αυτού του είδους τις αποκλίσεις είναι κατ' αρχήν κατανοητός. Φανταστείτε ότι κατά το παρελθόν σε κάποιο βάθος σημειώθηκε κάποια θραύση ή μετακίνηση των στρωμάτων, με αποτέλεσμα να ελαττωθούν οι τάσεις που είχαν συσσωρευθεί εκεί. Στη συνέχεια η θερμοκρασία γύρω από αυτή την περιοχή αυξήθηκε· όταν, λοιπόν, υπολογίζουμε τη ροή θερμότητας βρίσκουμε ότι δεν είναι σταθερή με το βάθος. Αποκλίσεις από τη μέση γεωθερμική βαθμίδα, που οφείλονται στη σημαντική κίνηση του φλοιού, διατηρούνται για πολύ χρόνο. Στην πραγματικότητα, αποτελούν ιστορικές καταγραφές των σεισμών του παρελθόντος.

Επίσης, έχουν γίνει μετρήσεις απότομων αλλαγών στη θερμοκρασία. Στις 7 Δεκεμβρίου 1988, οπότε έγινε ο τρομερός σεισμός στην Αρμενία, η θερμοκρασία στο βαθύ φρεάτιο της χερσονήσου Κόλα αυξήθηκε σε μερικά επίπεδα από 10 έως 15 βαθμούς. Ύστερα από λίγες μέρες επανήλθε στις προηγούμενες τιμές. Αυτό δείχνει ότι η μεταβολή προκλήθηκε από μερική εξάλειψη των τάσεων κοντά στα τοιχώματα του φρεατίου. Αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι το παράδειγμα αυτό αποσαφηνίζει τον ίδιο το μηχανισμό, δηλαδή ότι η αύξηση της θερμοκρασίας δεν καθορίζεται μόνο από τη ροή θερμότητας αλλά και από τις τάσεις που υπάρχουν στο πέτρωμα.

Έτσι, μόνο κατά προσέγγιση μπορούμε να εκτιμήσουμε τη ροή θερμότητας στη Γη, κάνοντας την υπόθεση

ότι είναι σταθερή με το βάθος σε κάθε περιοχή. Οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας των περισσότερο διαδεδομένων πετρωμάτων σε μεγάλα βάθη —του βασάλτη και του γρανίτη— είναι σχεδόν ίδιοι. Για τους υπολογισμούς μας θα θεωρήσουμε $\kappa = 3 \text{ watt/(m} \cdot \text{K)}$. Για να βρούμε τις ολικές θερμικές απώλειες της Γης —δηλαδή τη θερμική της ισχύ— πολλαπλασιάζουμε το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κ επί τη βαθμίδα θερμοκρασίας κοντά στην επιφάνεια, $dT/dz = 0,03 \text{ K/m}$, και επί την επιφάνεια της Γης. Ένας τέτοιος υπολογισμός της ολικής θερμικής ισχύος Q της Γης δίνει

$$Q = \frac{4\pi R^2 \kappa dT}{dz} \cong 5 \cdot 10^{13} \text{ watt,}$$

όπου R είναι η ακτίνα της Γης.

Μια ακριβέστερη άθροιση, που στηρίζεται σε γνωστά φρεάτια, δείχνει πως η θερμική ισχύς της Γης είναι ίση με $4,2 \cdot 10^{13} \text{ watt}$, όπου τα $1,1 \cdot 10^{13} \text{ watt}$ προέρχονται από τη ροή μέσω της επιφάνειας της ξηράς και τα $3,1 \cdot 10^{13} \text{ watt}$ από τη ροή μέσω του πυθμένα των ωκεανών. Οι συνεισφορές της ξηράς και των ωκεανών είναι προσεγγιστικά ανάλογες με τις επιφάνειές τους, γεγονός που σημαίνει πως οι πυκνότητες της ροής θερμότητας μέσω των ηπειρωτικών και ωκεάνιων φλοιών είναι ουσιαστικά ίσες.

Βεβαίως, η θερμοκρασία πρέπει να συνεχίζει να αυξάνεται με το βάθος, αφού η ροή θερμότητας από το εσωτερικό δεν μπορεί να χάνεται. Ορίστε, λοιπόν, ένας τρόπος για να μετρήσουμε θερμοκρασίες σε βάθη πολύ μεγαλύτερα από εκείνα των φρεατίων.

Διαμάντια και κιμπερίτες

Μερικές φορές πετρώματα που σχηματίστηκαν σε πολύ μεγάλο βάθος είναι δυνατό να βρεθούν στην επιφάνεια της Γης —διαμάντια, για παράδειγμα. Το διαμάντι αποτελείται από το χημικό στοιχείο άνθρακα, αλλά η κρυσταλλική του δομή διαφέρει από τις άλλες μορφές του άνθρακα —λόγου χάρη τον φυλλώδη γραφίτη ή τον άμορφο άνθρακα (λιθάνθρακας, αιθάλη). Η αιθάλη αποτελείται από διαφόρων μηκών αλυσίδες ατόμων άνθρακα με διπλούς δεσμούς ... = C = C = Ο γραφίτης αποτελείται από συνδεδεμένες επίπεδες δομές οι οποίες αποτελού-

νται από δακτυλίους βενζολίου του τύπου C_{60} . Μερικές φορές ο άνθρακας κρυσταλλώνεται στην ακόμη πιο εξωτική εικοσάεδρη δομή C_{60} που ονομάζεται φουλερένιο.¹ Στο διαμάντι, όμως, οι τέσσερις δεσμοί κάθε ατόμου άνθρακα κατευθύνονται προς τις κορυφές ενός τετραέδρου. Έτσι δημιουργείται η πιο συμπαγής μορφή που είναι δυνατό να πετύχουν τα άτομα του άνθρακα. Μπορείτε να μετατρέψετε γραφίτη σε διαμάντι, αλλά χρειάζεστε να παράγεται πίεσεις και θερμοκρασίες παρόμοιες μ' εκείνες που βρίσκονται σε βάθος τουλάχιστον 70 km.

Με ποιο τρόπο τα φυσικά διαμάντια καταλήγουν στην επιφάνεια της Γης; Μεταφέρονται προς τα πάνω από τα βάθη της Γης μέσω της μάλλον σπάνιας εκδίωξης ενός πετρώματος μικρής πυκνότητας που ονομάζεται κιμπερλίτης (από το Κίμπερλεϋ, στη Νότια Αφρική, όπου βρέθηκε ένα μεγάλο κοίτασμα διαμαντιών σε μια βαθιά, στενή φλέβα του ορυκτού αυτού). Τα διαμάντια δεν σχηματίζονται ταυτόχρονα με τους κιμπερλίτες, αλλά παρασύρονται από τη συνεχώς ανερχόμενη μάζα του κιμπερλίτη.

Εκτός από τα διαμάντια, και άλλα είδη ορυκτών βρίσκονται σε φλέβες

κιμπερλίτη. Τα ορυκτά αυτά δεν μπορούν να επιζήσουν για πολύ στο περιβάλλον του κιμπερλίτη όταν βρίσκεται σε υψηλές θερμοκρασίες. Ονομάζονται διεθνώς ξενόλιθοι, από τις ελληνικές λέξεις «ξένοι λίθοι». Η ορυκτολογική σύσταση και η δομή των ξενολιθών παρέχει στοιχεία για την κατάσταση του γήινου φλοιού σε μεγάλα βάθη. Η ύπαρξη των διαμαντιών μ' ας δίνει κάποιες πληροφορίες για το εσωτερικό της Γης, αφού δεν θα μπορούσαν να σχηματιστούν σε χαμηλές πιέσεις και θερμοκρασίες.

Όταν ένα ορυκτό συμπιέζεται, η κρυσταλλική δομή του μεταβάλλεται δραστικά σε μια ορισμένη πίεση. Οι κρίσιμες πιέσεις και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες για τα διάφορα ορυκτά είναι γνωστές από εργαστηριακές μετρήσεις. Κάθε ορυκτό έχει τη δική του ομάδα αλλαγών φάσης. Επιπλέον, αν δύο κόκκοι ορυκτών έρθουν σε στενή επαφή, η χημική σύσταση κάθε κόκκου αλλάζει με τρόπο που εξαρτάται από την πίεση και τη θερμοκρασία. Έτσι μπορούμε να καθορίσουμε τόσο την πίεση όσο και τη θερμοκρασία του μέσου όπου σχηματίστηκε ο ξενόλιθος. Αν ο ξενόλιθος αποτελείται από τη σύνθεση αρκετών κόκκων ορυκτού,

τότε προκύπτουν αρκετά ζεύγη τιμών πίεσης-θερμοκρασίας. Από τις τιμές της πίεσης, που προσδιορίζονται μ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να βρούμε το βάθος στο οποίο έγιναν οι διαδικασίες αυτές. Μερικές φορές οι ορυκτολόγοι έχουν τη δυνατότητα να καθορίσουν πόσο γρήγορα άλλαξε βάθος ένας ξενόλιθος —μπορούν δηλαδή να γράψουν τη βιογραφία του.

Στο Σχήμα 1 φαίνονται μετρήσεις της θερμοκρασίας και της πίεσης για μερικούς ξενόλιθους μαζί με τη μέση βαθμίδα θερμοκρασίας της Γης κοντά στην επιφάνειά της. Οι πιέσεις ξαναυπολογίζονται σε συνάρτηση με το βάθος στην άλλη κατακόρυφη κλίμακα. Όλα αυτά τα διαγράμματα $T-P$ έγιναν από ξενόλιθους που βρέθηκαν σε διάφορες περιοχές. Παρατηρήστε ότι ορισμένες καμπύλες είναι σχεδόν κλειστές. Αυτό σημαίνει ότι το πέτρωμα από το οποίο σχηματίστηκε ο ξενόλιθος πρώτα βυθίστηκε και κατόπιν άρχισε να ανέρχεται στην επιφάνεια.

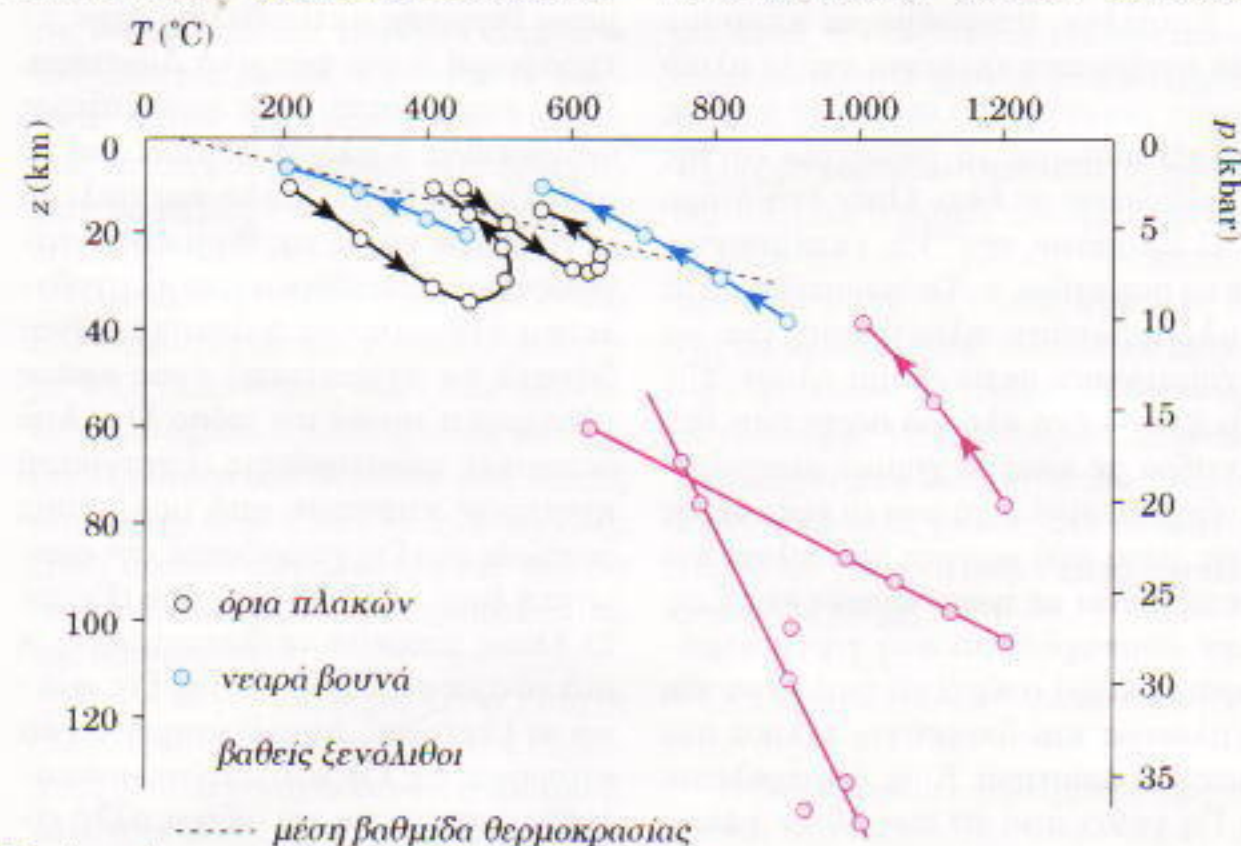
Τι προκαλεί τη ροή θερμότητας από τα έγκατα της Γης; Ποια είναι η πηγή ενέργειάς του;

Οι θερμικές πηγές της Γης

Μια από τις πηγές θερμότητας του εσωτερικού της Γης είναι η ραδιενέργεια. Τα πετρώματα περιέχουν ένα μικρό αλλά μετρήσιμο ποσόν ουρανίου. Το ποσόν αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στο γρανίτη, όπου φτάνει σε μερικά εκατομμυριοστά της μάζας του πετρώματος. Το ευρύτερα διαδεδομένο ισότοπο του ουρανίου, το ^{238}U , έχει την κύρια συμβολή στην πυρηνική θερμότητα που απελευθερώνεται στο πέτρωμα. Σε κάθε διάσπαση, από τον πυρήνα ενός ατόμου ουρανίου εκπέμπεται ένα σωματίδιο άλφα με ενέργεια 4,2 MeV. Το σωματίδιο σταματά αφού διανύσει μέσα στο πέτρωμα απόσταση περίπου 10^{-5} m, η δε ενέργειά του μεταφέρεται στο πέτρωμα θερμαίνοντάς το.

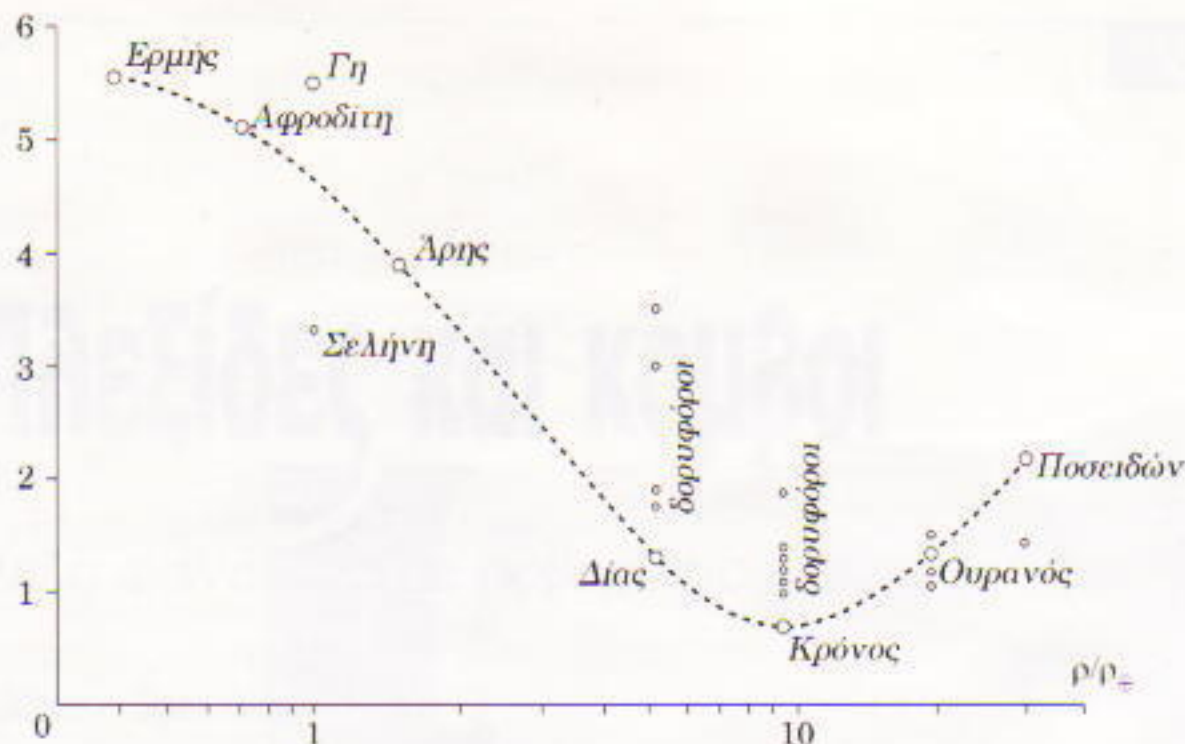
Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του ουρανίου 238 είναι $T_{238} = 4,47 \cdot 10^9$ χρόνια. Τα προϊόντα της διάσπασής του —ακόμη και το θόριο και το ράδιο που έχουν μακρά ζωή— διασπώνται ταχύτερα από το ουράνιο. Έτσι, αμέσως μετά την πρώτη διάσπαση α ο πυρήνας

1. Δείτε το άρθρο «Το κυνήγι των μαγικών σφαιρών» στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1994 του Quantum.



Σχήμα 1

Λύση της θερμοκρασίας με το βάθος, όπως μετρείται από τις ορυκτολογικές μεταβολές των ξενολιθών. Η δεύτερη κατακόρυφη κλίμακα απεικονίζει την πίεση. Τα βέλη στις καμπύλες δείχνουν πώς μεταβλήθηκε η πίεση και η θερμοκρασία με το χρόνο. Οι περισσότεροι ξενόλιθοι μετακινήθηκαν στην επιφάνεια (διαφορετικά δεν θα είχαν ανακαλυφθεί), αλλά ξενόλιθοι που βρέθηκαν κοντά στα όρια των ηπειρωτικών πλακών μαρτυρούν την εν συνεχεία καταβύθισή τους. Η μέση βαθμίδα θερμοκρασίας της Γης κοντά στην επιφάνειά της απεικονίζεται με τη διακεκομμένη γραμμή. Η καταβύθιση επέρχεται όταν οι βαθμίδες θερμοκρασίας είναι μικρές, η δε άνοδος στην επιφάνεια της Γης όταν οι βαθμίδες θερμοκρασίας είναι μεγάλες.



Σχήμα 3

Η μέση πυκνότητα των πλανητών στο ηλιακό σύστημα σε συνάρτηση με την απόστασή τους από τον Ήλιο. Η παρεμβολή που απεικονίζεται με τη διακεκομμένη καμπύλη αναφέρεται σε όλους τους πλανήτες εκτός από τη Γη και καταλήγει σε μια μη τετραγωνική αλλά ομαλή εξάρτηση. Αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα της Γης είναι μεγαλύτερη από εκείνη που αναλογεί στη θέση της πάνω στην καμπύλη ($4,7 \text{ gr/m}^3$), ενώ η πυκνότητα της Σελήνης είναι πολύ πιο μικρή.

στημονική άποψη σήμερα είναι πως ο πλανήτης μας έχει ιδιαίτερη ιστορία. Ο μόνος τρόπος να εξηγήσουμε τη σημερινή τροχιά της Σελήνης είναι να υποθέσουμε ότι ο πλανήτης μας και ο δορυφόρος του δημιουργήθηκαν ύστερα από μια γιγαντιαία σύγκρουση δύο πρωτοπλανητών στο μέγεθος περίπου της Αφροδίτης και του Άρη. Διαβάστε το άρθρο του A.G.W. Cameron σε τούτο το τεύχος και προσέξτε τις εικόνες μιας τέτοιας σύγκρουσης που προέκυψαν με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Την ιδέα αυτή την υποστηρίζει και ένα άλλο επιχείρημα. Κοιτάξτε το Σχήμα 3. Οι πυκνότητες όλων των πλανητών στο ηλιακό σύστημα (εκτός της Γης) βρίσκονται πάνω σε μια ομαλή καμπύλη, ενώ η πυκνότητα της Γης είναι αρκετά μεγαλύτερη απ' ό,τι θα «έπρεπε» σύμφωνα με την απόστασή της από τον Ήλιο.

Η εν λόγω υπόθεση είναι επίσης ελκυστική επειδή εξηγεί γιατί η Γη και η Αφροδίτη είναι τόσο διαφορετικές, παρότι οι μάζες τους είναι παρόμοιες. Εξαιτίας μιας καταστροφικής σύγκρουσης η Γη έλιωσε, ενώ η Αφροδίτη και οι άλλοι πλανήτες φαίνεται ότι σχηματίστηκαν από πολλαπλές συγκρούσεις πολύ μικρότερης κλίμακας. Αυτό σημαίνει ότι ο διαχωρισμός υλικού στο βαρυτικό πεδίο της Γης έγινε σε πολύ μεγάλο βάθος. Επίσης, οι υψη-

λές θερμοκρασίες απελευθέρωσαν νερό από το εσωτερικό, όπου μπορεί να υπάρχει σε κρυσταλλική μορφή. Γι' αυτό στη Γη έχουμε ωκεανούς, ενώ στην ατμόσφαιρα της Αφροδίτης απλώς ίχνη νερού.

Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε πόσο γρήγορα ψύχεται ένα θερμό σώμα όταν η θερμότητα διαδίδεται με αγωγιμότητα. Ο χρόνος ψύξης εξαρτάται από το μέγεθος R [m] του σώματος, τη θερμοχωρητικότητα του c_p [joule/(kg · K)], τη θερμική του αγωγιμότητα κ [joule/(m · sec · K)] και την πυκνότητά του ρ [kg/m³] (στις αγκύλες δίνονται οι διαστάσεις των συγκεκριμένων φυσικών μεγεθών). Μόνο ένας συνδυασμός των τεσσάρων μεγεθών καταλήγει στη διάσταση του χρόνου. Έτσι, ο τυπικός χρόνος που απαιτείται για να ψυχθεί ένα σώμα κατά μία τάξη μεγέθους είναι

$$\tau \cong \frac{c_p \rho}{\kappa} R^2 \text{ [sec].}$$

Βεβαίως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν κάνουμε έναν τέτοιο υπολογισμό για τη Γη, η σύσταση της οποίας μεταβάλλεται με το βάθος. Ας δοκιμάσουμε όμως:

$$\tau_{\oplus} \cong \frac{R_{\oplus}^2 c_p \rho}{\kappa} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ sec} \cong 10^{12} \text{ έτη.}$$

Καταλήγουμε σ' ένα αποτέλεσμα που δεν έχει νόημα: ο χρόνος αυτός εί-

ναι πολύ μεγαλύτερος από την ηλικία του ηλιακού συστήματος (4,6 δισεκατομμύρια έτη) και δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από την ηλικία του σύμπαντος (γύρω στα 10 δισεκατομμύρια έτη). Το παράδοξο δεν αίρεται ακόμη κι αν υπολογίσουμε τα θερμικά χαρακτηριστικά με μεγαλύτερη ακρίβεια. Αυτό σημαίνει ότι είτε το εσωτερικό της Γης είναι πολύ θερμό είτε οι αρχικές μας υποθέσεις είναι λανθασμένες.

Ας υποθέσουμε το πρώτο. Θα υπολογίσουμε το βάθος h ως το οποίο έχει ψυχθεί η Γη κατά τη διάρκεια της ύπαρξής της —έστω για $t_{\oplus} = 10^{17} \text{ sec} = 3$ δισεκατομμύρια έτη. Θα κάνουμε τον υπολογισμό ξαναχρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για το χρόνο ψύξης:

$$h = \sqrt{\frac{c_p \rho t_{\oplus}}{\kappa}} = 3 \cdot 10^5 \text{ m} = 300 \text{ km.}$$

Τριακόσια χιλιόμετρα αποτελούν το 4% της ακτίνας της Γης. Η εκτίμηση αυτή είναι περισσότερο ρεαλιστική. Έχει νόημα για την ψύξη αρχαίων ηπειρωτικών περιοχών, όπως η περιοχή της Καρελίας (η χερσόνησος Κόλα). Τα παλαιότερα πετρώματα στην περιοχή αυτή χρονολογούνται σε 3 δισεκατομμύρια χρόνια. Για τη Γη ως σύνολο, όμως, είναι λάθος να θεωρήσουμε ότι η θερμότητα μεταφέρθηκε μόνο από τα ανώτερα στρώματα βάθους 300 km, και ότι το εσωτερικό της Γης παρέμεινε τόσο θερμό όσο υπήρξε όταν σχηματίστηκε ο πλανήτης. Η ψύξη των εσωτερικών περιοχών της Γης έγινε διαφορετικά —όχι με θερμική αγωγιμότητα, αλλά με μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων. (Και συνεχίζει, σε μικρότερο βαθμό, μέχρι σήμερα.)

Εξαιτίας της θερμικής διαστολής, η πυκνότητα του πετρώματος εξαρτάται από τη θερμοκρασία: αυξάνεται καθώς το πέτρωμα ψύχεται. Έτσι η πυκνότητα των ανώτερων στρωμάτων του πετρώματος που έχουν ψυχθεί είναι μεγαλύτερη σε ορισμένες περιοχές από εκείνη των κατώτερων στρωμάτων με παρόμοια χημική σύσταση. Μια τέτοια κατανομή πυκνοτήτων στο βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ασταθής. Είναι ενεργειακά προτιμητέο τα ψυχρά πετρώματα να κατέρχονται, και τα θερμότερα, κατώτερα στρώματα να

Η συνέχεια στη σελ. 60 ⇨



Πλεξίδες και κόμβοι

Απλά φαινόμενα με σοβαρές συνέπειες

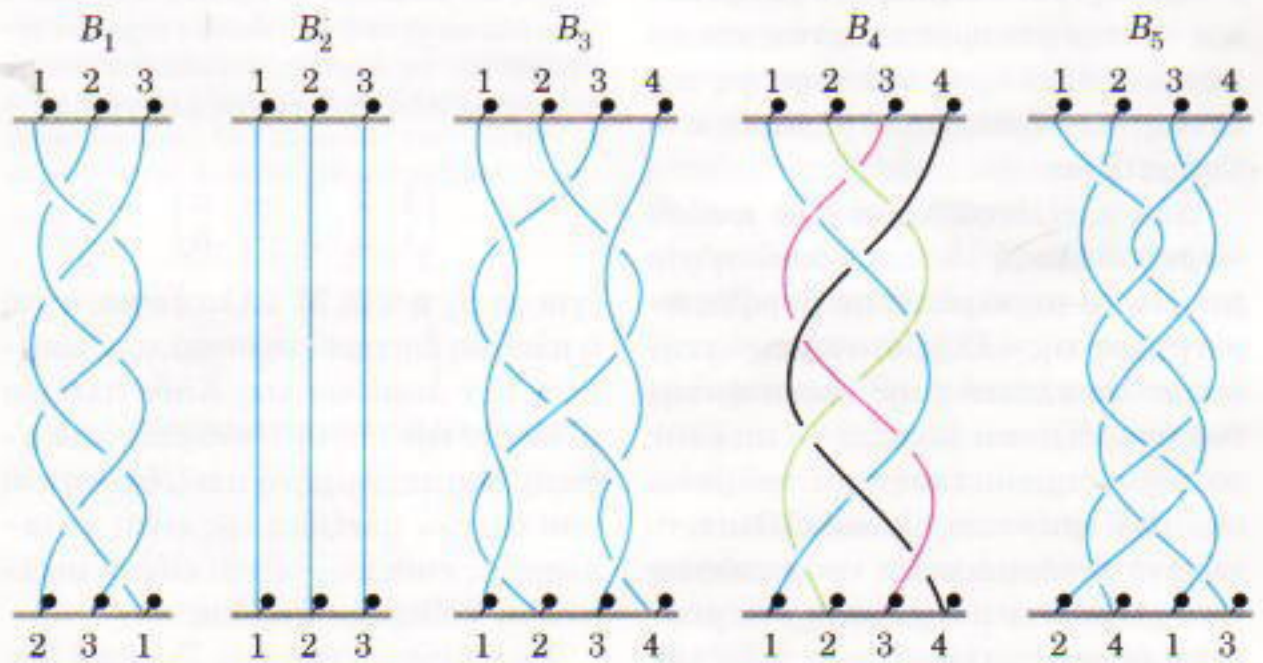
Alexey Sosinsky

ΠΛΕΞΙΔΕΣ ΚΑΙ ΚΟΜΒΟΙ —ΕΙΝΑΙ αυτά πραγματικά μαθηματικά; Ένας επιμελής μαθητής αποφοιτά από το λύκειο έχοντας συνήθως σχηματίσει την άποψη ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με αφηρημένες έννοιες, και ότι απλά αντικείμενα όπως οι πλεξίδες και οι κόμβοι δεν έχουν καμιά σχέση με τα μαθηματικά.

Αυτή η εντύπωση όμως είναι λανθασμένη. Στις μέρες μας οι μαθηματικοί δεν ασχολούνται μόνο με βαρυσήμαντα ζητήματα —τη θεωρία αριθμών, τους υπολογισμούς για τις διαστημικές πτήσεις ή τη μελέτη των ποιητικών μέτρων— αλλά και με πρακτικά καθημερινά θέματα, όπως τα οικονομικά ή η θεωρία των ουρών.

Και, επίσης, με τη θεωρία των πλεξίδων. Αυτή η πραγματική και ζωντανή θεωρία, που η απαρχή της ανάγεται στη δεκαετία του 1920, δεν είναι ακόμη πλήρης και οι εφαρμογές της δεν έχουν εξαντληθεί. Όσον αφορά την κομψότητά της, η θεωρία των πλεξίδων δεν είναι δεύτερο βιολί στην ορχήστρα των κλασικών μαθηματικών, τα οποία στην πραγματικότητα σταμάτησαν να μαθαίνουν νέες μελωδίες μετά τον 16ο και τον 17ο αιώνα —και τα οποία είναι το μοναδικό πεδίο μαθηματικών που διδάσκεται στα περισσότερα σχολεία.

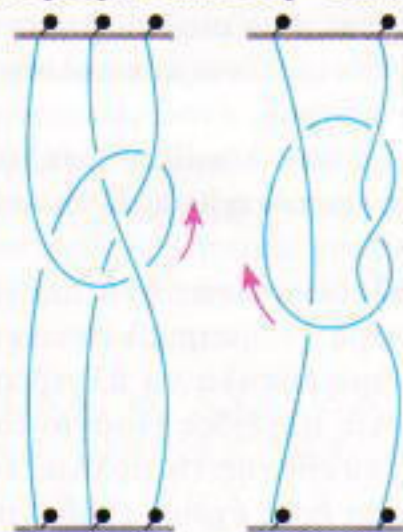
Θα αρχίσω την αφήγησή μου με παραδείγματα πλεξίδων (Σχήμα 1). Μπορούμε να φανταστούμε μια πλεξίδα ως εξής: καρφώνουμε δύο σειρές από n καρφιά στην πάνω και την



Σχήμα 1

Παραδείγματα πλεξίδων με τρεις και τέσσερις λαφίδες: B_1 —μία «κοριτσιίστικη πλεξίδα», B_2 —μία τετριμμένη πλεξίδα, B_3 —, B_4 —μία καθαρή πλεξίδα, B_5 —μία κυκλική πλεξίδα.

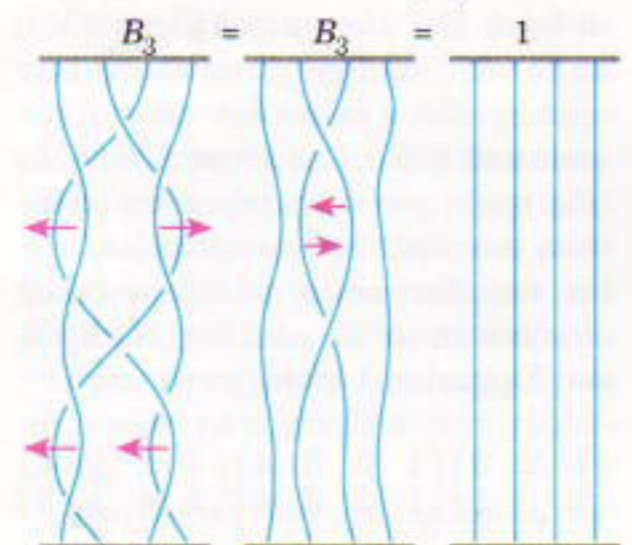
κάτω άκρη μιας κατακόρυφης πινακίδας (όπου το n μπορεί να είναι 1, 2, 3, ...) και καθένα από τα πάνω καρφιά συνδέεται μ' ένα από τα κάτω καρφιά με μία κλωστή. Οι κλωστές



Σχήμα 2

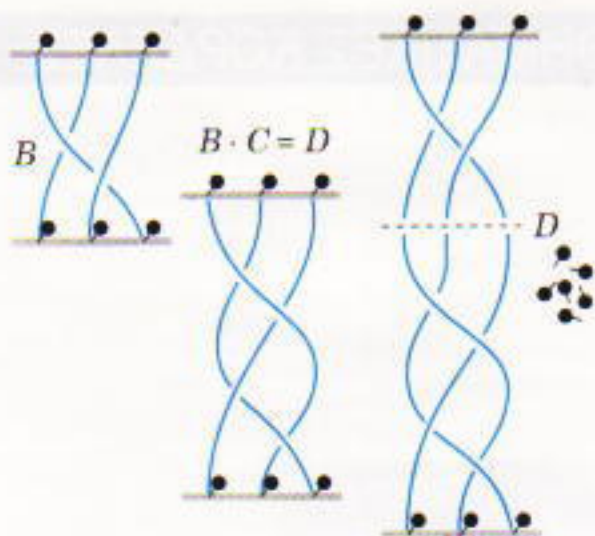
Αυτά τα αντικείμενα δεν είναι πλεξίδες (οι λαφίδες τους έχουν ανερχόμενα τμήματα).

δεν ενώνονται μεταξύ τους και κατευθύνονται πάντοτε προς τα κάτω



Σχήμα 3

Γεωμετρική απόδειξη ότι η B_3 είναι τετριμμένη πλεξίδα ($B_3 = 1$). Αν μετακινήσουμε τις λαφίδες της «οριζόντια», η πλεξίδα B_3 μετασχηματίζεται σε μια πλεξίδα με τέσσερις κατακόρυφες λαφίδες.



Σχήμα 4

Σύνθεση πλεξίδων. Η κορυφή της δεύτερης πλεξίδας έρχεται σε επαφή με το κάτω μέρος της πρώτης και ενώνονται οι αντίστοιχες λωρίδες.

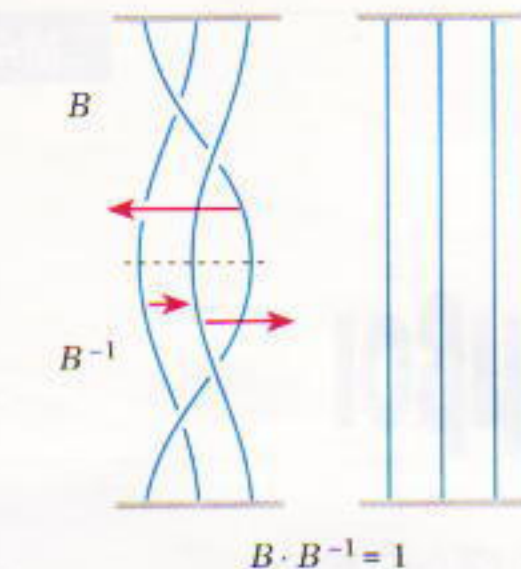
—δηλαδή, μια κλωστή δεν επιτρέπεται να στρίψει προς τα πάνω και να κατευθυνθεί προς την κορυφή της πινακίδας. Αυτά που βλέπετε στο Σχήμα 2 δεν είναι πλεξίδες.

Δύο πλεξίδες θεωρούνται *ισοδύναμες* (δηλαδή ίδιες) εφόσον η μία μπορεί να μετατραπεί σε ακριβές αντίγραφο της άλλης όταν μετακινήσουμε τις κλωστές της —που συνήθως ονομάζονται λωρίδες— έτσι ώστε το κάθε σημείο τους να παραμένει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Όταν το κάνετε αυτό, μπορείτε να τεντώσετε ή να μικρύνετε μια κλωστή, δεν μπορείτε όμως να την κόψετε ή να την κολλήσετε. Στο Σχήμα 3 βλέπετε ένα παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού.

Στο Σχήμα 1 οι πάνω άκρες των λωρίδων είναι αριθμημένες με τη συνηθισμένη σειρά —από αριστερά προς τα δεξιά. Στο κάτω μέρος βλέπετε και πάλι τους αριθμούς των λωρίδων —αλλά εδώ η σειρά δεν είναι αναγκαστικά η ίδια. Επομένως κάθε πλεξίδα ορίζει μια συγκεκριμένη μετάθεση των αριθμών των λωρίδων της. Για παράδειγμα, οι μεταθέσεις που συνδέονται με τις πλεξίδες B_1, B_2, B_3 του Σχήματος 1 είναι, αντίστοιχα,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο γραφίστας μας χρωμάτισε μία από τις πλεξίδες του Σχήματος 1, τη B_3 . Η ιδιότητα που διακρίνει αυτήν την πλεξίδα είναι ότι ορίζει την ταυτοτική μετάθεση



Σχήμα 5

Η αντίστροφη B^{-1} μιας πλεξίδας B . Αυτή προκύπτει ως κατοπτρική εικόνα της B ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κάτω βάση της B . Κάθε διπλό σημείο της πλεξίδας BB^{-1} έχει το κατοπτρικό του αντίγραφο, και μπορούμε να εξαλείψουμε διαδοχικά όλα αυτά τα ζεύγη διπλών σημείων τεντώνοντας τις λωρίδες, κινούμενοι από το κέντρο της πλεξίδας προς τις πλευρές της.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(για τη $B_1, n = 4$). Μ' άλλα λόγια, αυτή η πλεξίδα διατηρεί τη σειρά των αριθμών των λωρίδων της. Κάθε πλεξίδα μ' αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται *καθαρή*. Μια τετριμμένη πλεξίδα —αυτή που όλες οι πλεξίδες της είναι κατακόρυφες ευθείες— είναι ειδική περίπτωση καθαρής πλεξίδας.

Παρεμπιπτόντως, στο Σχήμα 1 δεν έχουμε μία αλλά δύο τετριμμένες πλεξίδες. Δύο; Πραγματικά, είναι δύο: η πλεξίδα B_3 είναι τετριμμένη επειδή μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε (βλ. Σχήμα 3) σε πλεξίδα με τέσσερις κατακόρυφες λωρίδες.

Υπάρχει ένα άλλο είδος πλεξίδας που πρέπει να το αναφέρουμε ξεχωρά από τις καθαρές πλεξίδες και το οποίο είναι, από μια άποψη, το ακριβώς αντίθετο. Είναι οι *κυκλικές*. Αυτές, εξ ορισμού, αναδιατάσσουν τους αριθμούς των λωρίδων κυκλικά, όπως για παράδειγμα η $B_5: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Η πλεξίδα είναι ένα από τα απλούστερα γεωμετρικά αντικείμενα. Μπορούμε εύκολα να αλγεβροποιήσουμε τις πλεξίδες εισάγοντας μια πράξη σύνθεσης (ή πολλαπλασιασμού) για όσες έχουν το ίδιο πλήθος λωρίδων. Αυτό είναι εξαιρετικά απλό (βλ. Σχήμα 4): φέρνουμε το τέλος μιας πλεξίδας στην αρχή της άλλης, ενώ-

νομε τις αντίστοιχες λωρίδες και αφαιρούμε τα άχρηστα πλέον καρφιά (την κάτω σειρά της πάνω πλεξίδας και την πάνω σειρά της κάτω). Από πολλές απόψεις, αυτή η πράξη είναι παρόμοια με τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό αριθμών. Ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$B_1(B_2B_3) = (B_1B_2)B_3.$$

Υπάρχει το ανάλογο της μονάδας —η τετριμμένη πλεξίδα (η B_2 στο Σχήμα 1 για $n = 3$)— που συμβολίζεται με το 1, και για την οποία ισχύει

$$1 \cdot B = B \cdot 1 = B$$

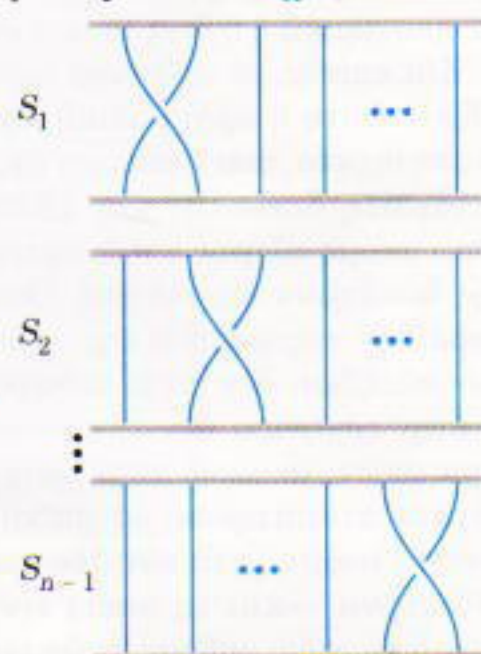
για κάθε πλεξίδα B . Μπορούμε επίσης να βρούμε το ανάλογο της πράξης της διαίρεσης: κάθε πλεξίδα B έχει μια *αντίστροφη πλεξίδα* B^{-1} τέτοια ώστε

$$B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = 1.$$

Αυτό δεν είναι προφανές, και καλώς τους αναγνώστες να ανακαλύψουν έναν τρόπο με τον οποίο να κατασκευάζεται η αντίστροφη μιας δεδομένης πλεξίδας. Αν δεν το καταφέρατε, δείτε την απάντηση στο Σχήμα 5.

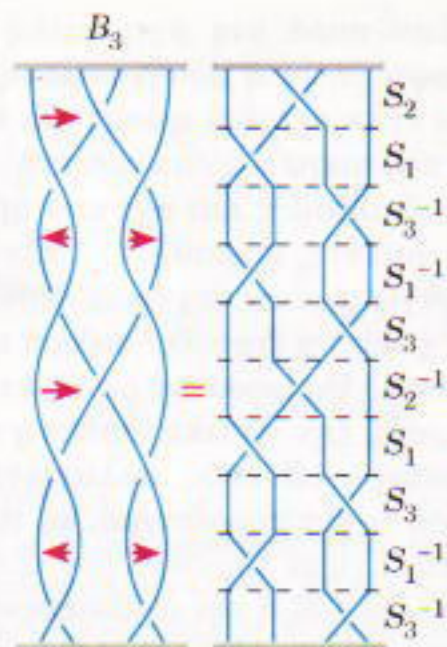
Η σύνθεση των πλεξίδων όμως δεν είναι *ανιμεταθετική*: η BC μπορεί να μην ισούται με την CB (ένα παράδειγμα δίνεται στη συνέχεια).

Η αλγεβρική δομή που προκύπτει —ονομάζεται *ομάδα πλεξίδων με n λωρίδες*— δεν είναι πολύ απλή, αλλά έχει ερευνηθεί ενδελεχώς. Θα ξεκί-



Σχήμα 6

Στοιχειώδεις πλεξίδες. Η i -οστή στοιχειώδης πλεξίδα S_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$) αποτελείται από $n - 2$ κατακόρυφες λωρίδες και δύο διασταυρούμενες —την i -οστή και την $(i + 1)$ -οστή. Αυτές διασταυρώνονται σ' ένα σημείο και η i -οστή λωρίδα περνάει πάνω από την $(i + 1)$ -οστή.



Σχήμα 7.

Αναπαράσταση της πλεξίδας B_3 συναρτήσει των στοιχειωδών πλεξίδων S_1, S_2, S_3 και των αντιστρόφων τους. Αν μετακινήσουμε ελαφρά τις λωρίδες, όλα τα διπλά σημεία μετακινούνται σε διαφορετικά επίπεδα. Τότε, μπορούμε να συναγάγουμε έναν αλγεβρικό τύπο για τη B_3 διαβάζοντας απλώς το σχήμα: $B_3 = S_2 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1}$.

νήσουμε τη δική μας μελέτη των ιδιοτήτων της. Για το σκοπό μας θα χρησιμοποιήσουμε τις στοιχειώδεις πλεξίδες S_1, S_2, \dots, S_{n-1} με n λωρίδες (Σχήμα 6).

Αποδεικνύεται ότι κάθε πλεξίδα μπορεί να αναπαρασταθεί ως σύνθεση στοιχειωδών πλεξίδων και των αντιστρόφων τους. Για παράδειγμα, είναι φανερό ότι

$$B_1 = S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1}.$$

Επίσης

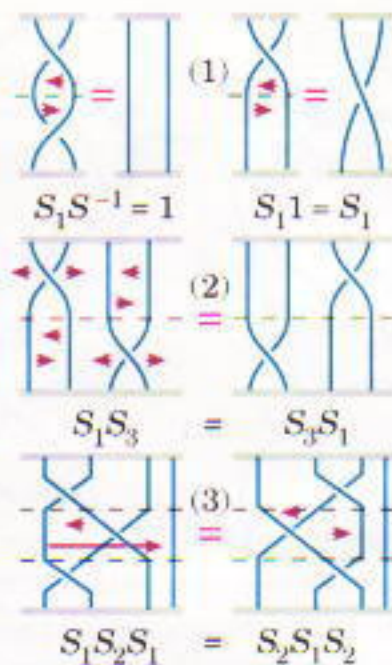
$$B_3 = S_2 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1}.$$

Οι σχέσεις αυτές γίνονται προφανείς αν μετακινήσουμε ελαφρά τις λωρίδες της B_3 έτσι ώστε να μεταφερθούν λίγο χαμηλότερα τα τέσσερα διπλά σημεία που βρίσκονται στο δεξιό μέρος της (Σχήμα 7).

Άσκηση 1. Εκφράστε τις πλεξίδες B_4 και B_5 του Σχήματος 1 ως συνθέσεις των στοιχειωδών πλεξίδων S_1, S_2, S_3 και των αντιστρόφων τους.

Ο αλγεβρικός συμβολισμός στη θεωρία των πλεξίδων μάς επιτρέπει, όπως και στην αναλυτική γεωμετρία, να αντικαταστήσουμε τους γεωμετρικούς συλλογισμούς με τελείως μηχανικούς υπολογισμούς που βασίζονται στις επόμενες ταυτότητες.

1. Τετριμμένες σχέσεις:



Σχήμα 8

Αποδείξεις των βασικών σχέσεων της θεωρίας των πλεξίδων. (1) τετριμμένες σχέσεις (για πλεξίδες με δύο λωρίδες), (2) ασθενής αντιμεταθετικότητα (για πλεξίδες με τέσσερις λωρίδες), (3) σχέσεις πλεξίδων (για τέσσερις λωρίδες). Οι αποδείξεις για πλεξίδες με περισσότερες λωρίδες είναι παρόμοιες.

$$S_i S_i^{-1} = S_i^{-1} S_i = 1, \\ S_i^{-1} \cdot 1 = 1 \cdot S_i = S_i \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - 1).$$

2. Ασθενής αντιμεταθετικότητα:

$$S_i S_j = S_j S_i \text{ όταν } |i - j| \geq 2 \\ (i, j = 1, 2, 3, \dots, n - 1).$$

3. Σχέσεις πλεξίδων:

$$S_i S_{i-1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - 2).$$

Οι σχέσεις αυτές είναι σχεδόν αυταπόδεικτες (Σχήμα 8). Μπορούμε μάλιστα να τις χρησιμοποιήσουμε για να συναγάγουμε άλλες σχέσεις—για παράδειγμα, την επόμενη γενικότερη μορφή της ασθενούς αντιμεταθετικότητας.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι $S_i^u S_j^v = S_j^v S_i^u$ για κάθε $u, v \in \{1, -1\}$, $|i - j| \geq 2$.

Ας εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα: την απόδειξη της σχέσης $B_3 = 1$ (που αιτιολογήσαμε γεωμετρικά στο Σχήμα 3) με άμεσο υπολογισμό. Έχουμε

$$B_3 = S_2 (S_1 S_3^{-1}) S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 (S_3 S_1^{-1}) S_3^{-1} \\ = S_2 S_3^{-1} (S_1 S_1^{-1}) S_3 S_2^{-1} (S_1 S_1^{-1}) (S_3 S_3^{-1}) \\ = S_2 S_3^{-1} \cdot 1 \cdot S_3 S_2^{-1} \cdot 1 \cdot 1 \\ = S_2 (S_3^{-1} S_3) S_2^{-1} \\ = S_2 S_2^{-1} = 1.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε στην αρχή την ασθενή μεταθετικότητα, οπότε στη συνέχεια τα πάντα απαλείφθηκαν «από μόνα τους» (χάρη στις τετριμμένες σχέσεις).

Άσκησης

3. Αποδείξτε τις ταυτότητες

$$S_1^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1} = S_2^{-1} S_1^{-1} S_2^{-1},$$

$$S_1 S_2 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} = S_3 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_2.$$

4. Αποδείξτε ότι $S_1 S_2 \neq S_2 S_1$ για $n \geq 3$.

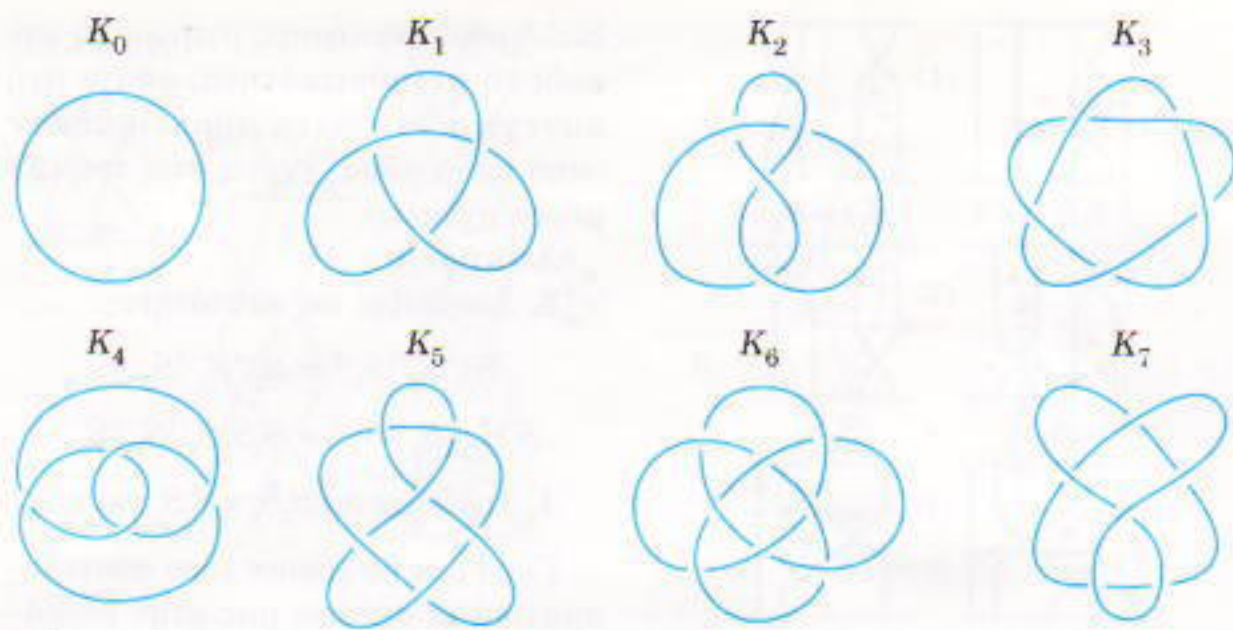
Γιατί μας βοήθησαν τόσο αποτελεσματικά οι σχέσεις μας στην επίλυση της άσκησης 3 (όπως επίσης και στις υπόλοιπες ασκήσεις); Μήπως αυτό συμβαίνει επειδή έτυχε να επιλέξω τα κατάλληλα προβλήματα, ή επειδή κρύβεται μια συγκεκριμένη κανονικότητα πίσω από αυτήν την αποτελεσματικότητα; Μ' άλλα λόγια, οι σχέσεις 1 έως 3 επαρκούν για να αποδείξουμε όλες τις ισότητες στη θεωρία των πλεξίδων;

Αποδεικνύεται ότι η απάντηση είναι καταφατική. Ο δημιουργός της θεωρίας των πλεξίδων, ο γερμανός μαθηματικός Emil Artin, απέδειξε το 1936 ότι κάθε ισότητα στη θεωρία των πλεξίδων προκύπτει από τις σχέσεις 1-3. Αυτό το αξιοπρόσεκτο θεώρημα μας επιτρέπει να επιλύσουμε ένα θεμελιώδες πρόβλημα της θεωρίας των πλεξίδων—το πρόβλημα της ταξινόμησης. Δηλαδή, είναι δυνατό να δώσουμε έναν (άπειρο) κατάλογο πλεξίδων (χωρίς επαναλήψεις) και έναν αλγόριθμο που αντιστοιχίζει κάθε πλεξίδα με τον αριθμό της στον κατάλογο.

Οι αποδείξεις αυτών των γεγονότων δεν είναι στοιχειώδεις, και ως εκ τούτου δεν πρόκειται να προχωρήσω εδώ σ' αυτές. Θέλω απλώς να επισημάνω ότι επιτρέπουν να μετασχηματιστεί η γεωμετρική θεωρία των πλεξίδων σε υπολογιστική επιστήμη, στο πλαίσιο της οποίας κάθε συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί, κατ' αρχήν, να απαντηθεί με τη βοήθεια ενός υπολογιστή.

Μπορώ σχεδόν να ακούσω τον σκεπτικιστή αναγνώστη να αναρωτιέται: «Και λοιπόν; Γιατί χρειάζεται να απαντήσουμε σε αυτά τα συγκεκριμένα ερωτήματα;»

Το ζήτημα είναι ότι η θεωρία των πλεξίδων βρίσκει πλήθος εφαρμογές



Σχήμα 9

Παραδείγματα κόμβων: K_0 —τετριμμένος κόμβος, K_1 —τριφύλλι, K_2 —κόμβος-οκτάρι, K_3 —κόμβος S_7 , K_4 —, K_5 —χωρίς όνομα, K_6 —τουρμπάνι, K_7 —.

στα μαθηματικά και σε άλλα πεδία. Εδώ θα επεκταθώ σε μία μόνο εφαρμογή, που την εκτιμώ ιδιαίτερα: την εφαρμογή της στη θεωρία των κόμβων.

Ας αρχίσουμε με μερικά παραδείγματα κόμβων (Σχήμα 9). Ένας κόμβος είναι μια κλειστή καμπύλη στο χώρο, ομαλή ή πολυγωνική, την οποία μπορούμε να συστρέψουμε και να πλέξουμε μ' όποιον τρόπο θέλουμε. Μας βοηθά να φανταζόμαστε ότι ο κόμβος αποτελείται από μια λεπτή, ευλύγιστη και εύκολα επιμηκύνσιμη κλωστή. Δύο κόμβοι θεωρούνται ίδιοι (ισοδύναμοι) αν ο ένας μετατρέπεται σε ακριβές αντίγραφο του άλλου όταν μετακινούμε, κάμπουμε, επιμηκύνουμε και συστέλλουμε την κλωστή χωρίς να την κόβουμε. Ένα

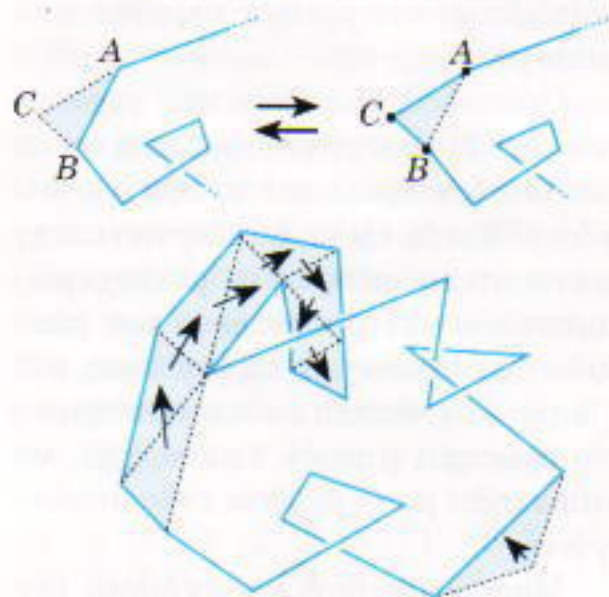
σημαντικό είδος κόμβου (δεν είναι πάντως γνήσιος κόμβος) είναι ο τετριμμένος κόμβος —ο συνηθισμένος κύκλος (K_0 στο Σχήμα 9). Στην πραγματικότητα, υπάρχουν δύο εικόνες του τετριμμένου κόμβου σ' αυτό το Σχήμα: ο κόμβος K_7 είναι επίσης τετριμμένος —μπορούμε εύκολα να τον ξεμπλέξουμε και να τον μετατρέψουμε σ' έναν μεγάλο κύκλο (δοκιμάστε να το κάνετε με το μυαλό σας ή χρησιμοποιώντας μολύβι και γομολάστιχα!). Και επιπλέον, υπάρχει ένα ακόμη ζεύγος ισοδύναμων κόμβων στο Σχήμα 9.

Άσκηση 5. Εντοπίστε δύο μη τετριμμένους ισοδύναμους κόμβους στο Σχήμα 9.

Οι μαθηματικοί προτιμούν έναν ακριβή ορισμό της ισοδυναμίας δύο

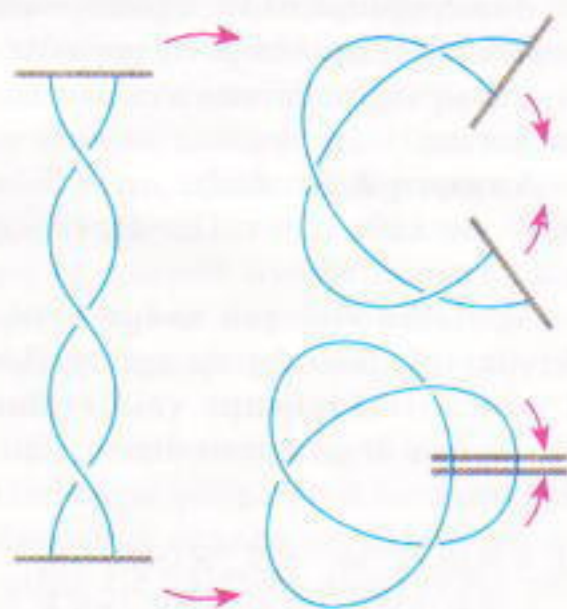
κόμβων παρά μια σχηματική περιγραφή όπως η προηγούμενη. Θα δώσω έναν σχετικό ορισμό για κόμβους που αποτελούνται από πολυγωνικές διαδρομές και όχι από ομαλά στρεφόμενες καμπύλες. (Έτσι θα αποφύγω μερικές τεχνικές λεπτομέρειες χωρίς να ζημιωθεί σοβαρά η γενικότητα.) Θα ορίσουμε ως *στοιχειώδη πράξη* την αντικατάσταση ενός τμήματος AB ενός πολυγωνικού κόμβου —για παράδειγμα, το τμήμα AB στο Σχήμα 10— από δύο τμήματα AC και CB , ή την αντίστροφη μετάβαση από το ACB στο AB , η οποία εκτελείται υπό τον όρο ότι ο κόμβος δεν περιέχει εσωτερικά σημεία του τριγώνου ABC . Δύο κόμβοι είναι *ισοδύναμοι* όταν υπάρχει μια πεπεραμένη ακολουθία στοιχειωδών πράξεων που μετατρέπει τον έναν στον άλλο (Σχήμα 10). Μελετώντας το Σχήμα 10 θα καταλάβετε εύκολα ότι αυτός ο ορισμός είναι πραγματικά κατάλληλος για τη σχηματική περιγραφή που δώσαμε προηγουμένως.

Όπως ακριβώς και με τις πλεξίδες, μπορούμε να θέσουμε το πρόβλημα της ταξινόμησης και για τους κόμβους: πρέπει να δημιουργήσουμε έναν (άπειρο) κατάλογο κόμβων (χωρίς επαναλήψεις) και έναν αλγόριθμο που αντιστοιχίζει κάθε κόμβο με τον αριθμό του στον κατάλογο. Αν και αυτό το πρόβλημα έχει θεωρητικά λυθεί, η λύση του είναι τόσο περίπλοκη, ώστε στην πράξη δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Είναι δυνατό να



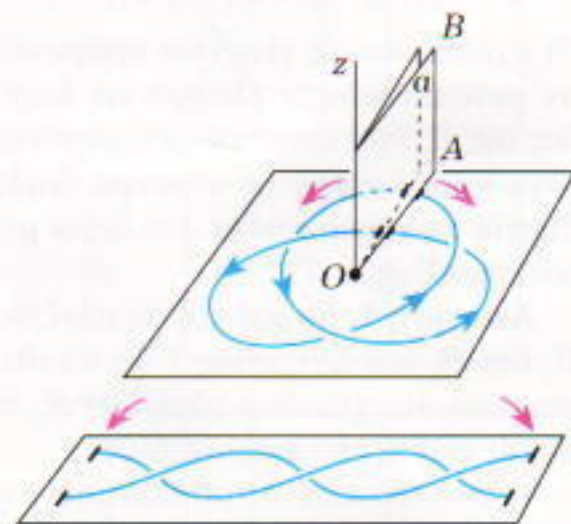
Σχήμα 10

Στοιχειώδεις πράξεις σ' έναν κόμβο. Το τμήμα AB αντικαθίσταται από μια διαδρομή δύο τμημάτων ACB , με την προϋπόθεση ότι ο κόμβος δεν τέμνει το τρίγωνο ABC . Μια ακολουθία τέτοιων πράξεων επιτρέπει την παραμόρφωση του κόμβου.



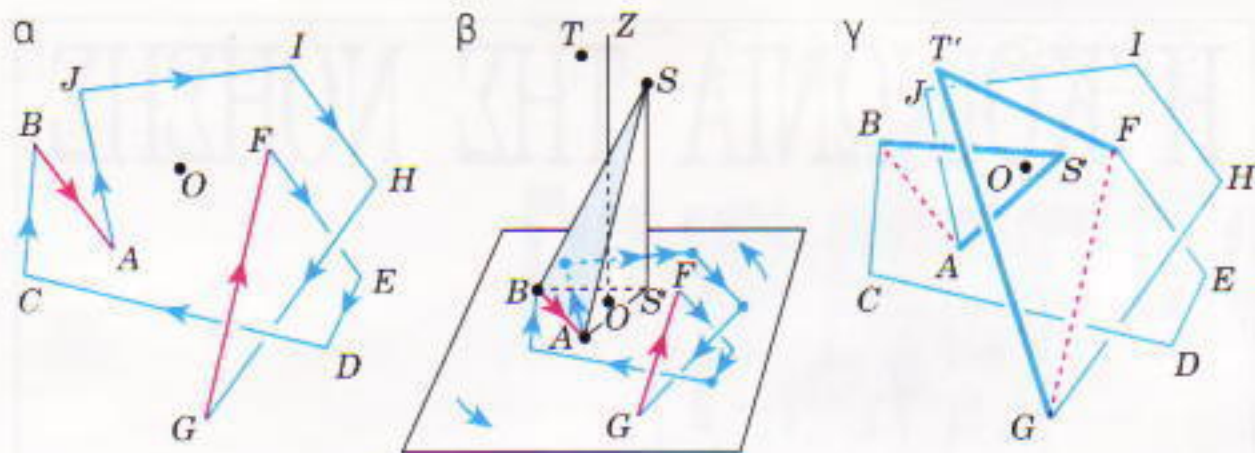
Σχήμα 11

Κλείσιμο μιας πλεξίδας. Ενώνοντας τα άκρα μιας πολύ απλής πλεξίδας, δημιουργούμε έναν κόμβο (τριφύλλι).



Σχήμα 12

Ξετύλιγμα ενός θετικού κόμβου για τη δημιουργία μιας πλεξίδας. Το κατακόρυφο ημιεπίπεδο a διπλασιάζεται, και έπειτα ανοίγει όπως ένα βιβλίο. Ο κόμβος ξετυλίγεται τότε και δημιουργείται μια πλεξίδα. Αυτή η πράξη αντιστρέφει το κλείσιμο της πλεξίδας που παρουσιάσαμε στο Σχήμα 11.



Σχήμα 13

Μετατροπή ενός κόμβου σε θετικό. (α) Το διάγραμμα ενός κόμβου με δύο αρνητικά τμήματα ως προς το σημείο O — τα AB και FG . (β) Το τέχνασμα του Alexander — η αντικατάσταση του αρνητικού τμήματος AB με την πολυγωνική διαδρομή ASB — μειώνει κατά ένα το πλήθος των αρνητικών τμημάτων. (γ) Εφαρμόζοντας το τέχνασμα του Alexander δύο φορές μετατρέπουμε τον $ABCDEFGHIJA$ σε θετικό (ως προς το σημείο O) κόμβο.

αναχθεί αυτό το πρόβλημα στο ήδη επιλυμένο πρόβλημα της ταξινόμησης των πλεξίδων; Η επόμενη ιδέα είναι υπαινικτική.

Παίρνουμε μια πλεξίδα, την κάμπουμε και ενώνουμε τα άκρα της (Σχήμα 11). Παίρνουμε έναν κόμβο. Αναρωτιέται όμως κανείς, ένα τέτοιο κλείσιμο μιας πλεξίδας δημιουργεί πάντοτε κόμβο;

Ασκήσεις

6. Σχεδιάστε το κλείσιμο των πλεξίδων B_1 και B_2 (Σχήμα 1). Πόσες καμπύλες δημιουργούμε σε κάθε περίπτωση; Περιγράψτε τις καμπύλες που το κλείσιμό τους δημιουργεί μια καμπύλη — δηλαδή έναν κόμβο.

7. Βρείτε μια πλεξίδα που το κλείσιμό της είναι ο κόμβος (α) K_1 , (β) K_3 , (γ) K_4 , (δ) K_2 (βλ. Σχήμα 9).

Έτσι μια ορισμένη κατηγορία πλεξίδων (συγκεκριμένα, οι κυκλικές πλεξίδες, όπως θα έχουν καταλάβει οι αναγνώστες που έλυσαν την άσκηση 6) δημιουργούν κόμβους με το κλείσιμό τους. Είναι όμως δυνατό να δημιουργήσουμε όλους τους κόμβους μ' αυτόν τον τρόπο; Αποδεικνύεται πως η απάντηση είναι ναι!

Ο αξιολόγος αμερικανός μαθηματικός James W. Alexander, ένας από τους πρώτους ερευνητές των κόμβων, απέδειξε το 1925 ότι *κάθε κόμβος προέρχεται από το κλείσιμο μιας συγκεκριμένης πλεξίδας*. Αντί να αποδείξω λεπτομερώς την πρόταση θα παρουσιάσω τις δύο κύριες τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη.

1. *Ξετύλιγμα*. Σχεδιάστε έναν κόμβο, επιλέξτε μια διεύθυνση σ' αυ-

τόν και θεωρήστε ένα σημείο O που δεν ανήκει στον κόμβο (Σχήμα 12). Θα ονομάζουμε *θετικό* ένα τμήμα του κόμβου (ως προς το O) όταν η διεύθυνσή του, όπως φαίνεται από το O , είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 13α όλα τα τμήματα του κόμβου εκτός από τα AB και FG είναι θετικά. Ένας κόμβος θα ονομάζεται *θετικός* (ως προς το O) όταν όλα του τα τμήματα είναι θετικά. Είναι εύκολο να βρούμε την πλεξίδα που δημιουργεί με το κλείσιμό της έναν θετικό κόμβο — κόβουμε απλώς τον κόμβο σε οποιοδήποτε σημείο του και τον ξετυλίγουμε όπως βλέπουμε στο Σχήμα 12.

2. *Το τέχνασμα του Alexander*. Τα αρνητικά τμήματα ενός κόμβου (Σχήμα 13β, 13γ) αντικαθίστανται από ζεύγη θετικών τμημάτων που περιβάλλουν το σημείο O . Αφού αφαιρέσουμε όλα τα αρνητικά τμήματα, εφαρμόζουμε την πρώτη τεχνική.¹

Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε κόμβος δημιουργείται από το κλείσιμο μιας συγκεκριμένης πλεξίδας. Οι πλεξίδες όμως είναι δυνατό να ταξινομηθούν. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός για να ταξινομήσουμε τους κόμβους; Δυστυχώς, όχι. Το πρόβλημα είναι ότι το κλείσιμο διαφορετικών πλεξίδων δεν δίνει πάντοτε διαφορετικούς κόμβους. Για παρά-

1. Ένας δόσμος αναγνώστης θα υποστηρίξει ότι ένας κόμβος μπορεί να περιέχει τμήματα που δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά. Μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία μετακινώντας ελαφρά τα «προβληματικά» τμήματα.



Σχήμα 14

Το κλείσιμο αυτής της πλεξίδας δημιουργεί επίσης έναν κόμβο «τριφύλλι» (συγκρίνετε με το Σχήμα 11). Επιβεβαιώστε το!

δειγμα, η πλεξίδα τριών λωρίδων του Σχήματος 14 διαφέρει από την πλεξίδα δύο λωρίδων του Σχήματος 11, αλλά το κλείσιμο και των δύο είναι ένα «τριφύλλι» (επαληθεύστε το!).

Επομένως, η προσπάθεια αναγωγής της ταξινόμησης των κόμβων στην ταξινόμηση των πλεξίδων αποτυγχάνει. Το θεώρημα του Alexander όμως είναι το πρώτο μόνο βήμα μιας πολύπλοκης αλυσίδας σκέψεων που συνδέει τους ωραιότερους κατοίκους του τρισδιάστατου χώρου: τις πλεξίδες και τους κόμβους.

Ολοκληρώνοντας, θα προσπαθήσω ν' απαντήσω στο ερώτημα «Γιατί τα χρειαζόμαστε όλα αυτά;» — για χάρη των αναγνώστών που δεν πιστεύουν ότι η κομψότητα *αυτή καθ' εαυτήν* είναι επαρκής λόγος μελέτης ενός αντικειμένου. Ως ένα βαθμό, η απάντηση βρίσκεται στην ίδια την ιστορία που αφορά τη δημιουργία της θεωρίας των πλεξίδων και των κόμβων.

Η θεωρία των πλεξίδων επινοήθηκε τη δεκαετία του 1920 από τον νεαρό γερμανό αλγεβριστή E. Artin έπειτα από παραγγελία μιας υφαντουργίας. Όπως θα λέγαμε σήμερα, ο Artin ήταν ένας σύμβουλος επιχειρήσεων.

Οι πηγές της θεωρίας των κόμβων είναι ακόμη παλαιότερες, και οι ενδιαφέρουσες περιστάσεις υπό τις οποίες δημιουργήθηκε έχουν σχεδόν ξεχαστεί. Η συστηματική μελέτη της θεωρίας των κόμβων ξεκίνησε από τον μεγάλο βρετανό μαθηματικό και φυσικό William Thomson, το λόρδο Kelvin. Ο Thomson κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση μεταφέρεται μέσω κυμάτων, ενώ αργότερα είχε μια ακόμη πιο παράτολμη ιδέα: τα αλληλεπιδρώντα σωματίδια είναι επίσης κύματα, αλλά επειδή τα σωματίδια (άτομα) είναι πολύ μικρά ενώ τα κύματα έχουν μεγάλο μήκος, τα άτομα-

κύματα κλείνουν τον εαυτό τους μέσα σ' έναν μικρό χώρο. Έτσι σχηματίζουν μικρούς κόμβους οι οποίοι συλλαμβάνουν όλες τις φυσικές και χημικές ιδιότητες που σχετίζονται με το άτομο κωδικοποιημένες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που «δένεται» ένας κόμβος. Ο Thomson και οι μαθητές του άρχισαν να εξερευνούν τους κόμβους, ξεκινώντας από τη συστηματική τους ταξινόμηση με την καταγραφή τους σε ειδικούς πίνακες.

Οι μαθηματικοί του 20ού αιώνα πήραν στα χέρια τους τη σκυτάλη της διερεύνησης των κόμβων όχι αποβλέποντας σε κάποιο οικονομικό κέρδος αλλά επειδή τους προσέλκυσε η καθαρή κομψότητα του θέματος. Οι λεπτές αναλλοιώτες που δημιουργήσαν (σχεδιάζουμε να τους αφιερώσουμε ειδικό άρθρο σε επόμενο τεύχος) επέτρεψαν μια σημαντική πρόοδο στη θεωρία των κόμβων. Για πολλά χρόνια, όμως, το πεδίο παρέμενε στα ειρηνικά μετόπισθεν των μαθηματικών, γνωστό κατά κύριο λόγο μόνο σε ειδικούς της τοπολογίας.

Εν τω μεταξύ, η θεωρία των πλεξίδων βρήκε σοβαρότατες εφαρμογές —για παράδειγμα, στη μιγαδική ανάλυση, τη μηχανική και τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων.

Δεν είναι πολύς καιρός που, μετά τις εργασίες των άγγλων μαθηματικών John Conway και V. Jones, των ρώσων V. Turayev και A. Reshetikhin και του αμερικανού L. Kauffman, αποκαλύφθηκαν απρόσμενες και βαθιές συνδέσεις ανάμεσα στη θεωρία των πλεξίδων και των κόμβων, την αφηρημένη άλγεβρα, και τη φυσική. Τα ειρηνικά μετόπισθεν αναστατώθηκαν. Και πάλι η φυσική! Και μάλιστα δεν εμπλέκονται μόνον οι κλασικοί κλάδοι της (η στατιστική φυσική, για παράδειγμα, ένα μοντέλο του ... πάγου!) αλλά και η σύγχρονη κβαντική θεωρία. Και η ιδέα της κωδικοποίησης χημικής πληροφορίας σε μικρούς κόμβους (και πλεξίδες!) επανεμφανίζεται στη μοριακή βιολογία κατά την πορεία αποκωδικοποίησης των αμινοξέων και στη μελέτη του DNA. Και, ποιος ξέρει, ίσως κάτι κρύβεται στην παλιά ιδέα του λόρδου Kelvin...

Η ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ



Σελ.: 584,
14 × 21 εκ.,
Α / Μ, 7.500 δρχ.

MARVIN MINSKY



Καθηγητής στο MIT,
Πρόεδρος της Αμερικανικής
Ενώσης Τεχνητής Νοημοσύνης,
Μέλος της Ακαδημίας
Επιστημών των ΗΠΑ

Ο Marvin Minsky, ένας από τους «πατέρες» της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και συνιδρυτής του Εργαστηρίου Τεχνητής Νοημοσύνης στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέτης, δίνει μια επαναστατική απάντηση για το πώς λειτουργεί η νόηση. Τη θεωρεί ως μια «κοινωνία» που αποτελείται από μικρότερα συστατικά τα οποία από μόνα τους είναι α-νόητα. Το βιβλίο του μοιάζει μ' ένα διανοητικό παζλ· κάθε σελίδα του είναι και ένα κομμάτι του παιχνιδιού. Στο τέλος του αναδύεται σαν μωσαϊκό ιδεών μια ενοποιημένη θεωρία της νόησης.

• «Ένα κολάζ διαφορετικών ιδεών που αφήνει άναυδο τον αναγνώστη· το βιβλίο είναι γεμάτο ευφυΐα και εύστοχους αφορισμούς.»

—**Douglas Hofstadter**, συγγραφέας του βιβλίου *Gödel, Escher, Bach*

• «270 καταπληκτικά, πρωτότυπα κείμενα...» —**Isaac Asimov**

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ *κάτοπτρο*

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

Για να περνά η ώρα

Σ26

Γράμματα σε ψηφία. Αντικαταστήσαμε όλα τα γράμματα μιας λέξης με την αριθμητική τους σειρά στο αλφάβητο και προέκυψε ο αριθμός 12111121. Ποια ήταν η αρχική λέξη; (A. Savin)



Σ27

Ψηφία σε αριθμούς. Λύστε τον αριθμητικό γρίφο που παρουσιάζει τον πολλαπλασιασμό ενός τετραψήφιου αριθμού με τον εαυτό του. (L. Mochalov)

Σ28

Πρόβλημα σκιών. Γνωρίζουμε από τις αναφορές των αμερικανών αστροναυτών ότι οι σκιές στη Σελήνη είναι σκοτεινότερες απ' ό,τι στη Γη. Γιατί συμβαίνει αυτό; (S. Krotov)

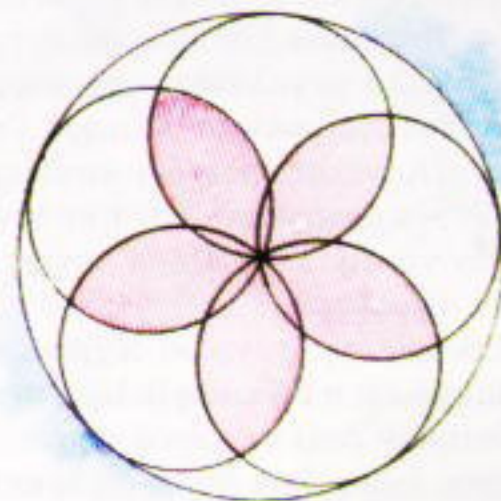


Σ29

Χρωματισμός ενός πλαισίου. Ένα πλέγμα που αποτελείται από 6×2 τετράγωνα έχει 21 κόμβους. Είναι δυνατό να χρωματίσουμε τους κόμβους με δύο χρώματα έτσι ώστε να μην υπάρχει καμία τετράδα κόμβων του ίδιου χρώματος που να σχηματίζουν ορθογώνιο;

Σ30

Ροδοειδής και περιφέρεια. Σχεδιάζουμε κύκλους της ίδιας ακτίνας που διέρχονται από το κέντρο ενός κύκλου διπλάσιας ακτίνας, σχηματίζοντας μια «ροδοειδή καμπύλη» (με ροζ χρώμα στο σχήμα). Ποιο από τα δύο είναι μεγαλύτερο — το μήκος της ροδοειδούς που σχηματίζεται από τους μικρούς κύκλους ή το μήκος της περιφέρειας του μεγάλου κύκλου; (V. Proizvolov)



Όταν ένα σώμα συναντά ένα άλλο

Η θεωρία της «γιγαντιαίας πρόσκρουσης» για το σχηματισμό της Σελήνης

A.G.W. Cameron

Η ΣΕΛΗΝΗ ΕΧΕΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΕΙ Αντικείμενο θαυμασμού και μερικές φορές λατρείας σε ολόκληρη την ιστορία του ανθρώπινου γένους, καταγραμμένη ή όχι. Οι προσπάθειες να διατυπωθούν επιστημονικές θεωρίες που να ερμηνεύουν το σχηματισμό της Σελήνης δεν αποτελούν γνώρισμα του αιώνα μας. Οι πρώτοι θεωρητικοί αντιμετώπισαν την προέλευση της Σελήνης ως ένα πρόβλημα εντελώς ξεχωριστό από τα γενικά ερωτήματα για την προέλευση του ηλιακού συστήματος, και μόνο τα τελευταία χρόνια ο σχηματισμός της Σελήνης θεωρήθηκε στοιχείο της ευρύτερης διαδικασίας της συγκέντρωσης των πλανητών.

Οι παλαιότερες θεωρίες για το σχηματισμό της Σελήνης μπορεί να διαχωριστούν σε τρεις γενικούς τύπους. Η θεωρία της *διάσπασης* δέχτηκε αξιωματικά ότι η Γη στρεφόταν γύρω από τον άξονά της τόσο γρήγορα που παραμορφώθηκε στο σχήμα ενός αχλαδιού, και ότι τότε η ύλη στη στενότερη άκρη διαχωρίστηκε από το υπόλοιπο του πλανήτη και τέθηκε σε τροχιά γύρω από αυτόν. Ένα τέτοιο σύστημα, όμως, εμφάνιζε πολύ μεγαλύτερη στροφορμή απ' ό,τι το πραγματικό σύστημα Γη-Σελήνη. Κανένας όμως δεν κατάφερε να βρει ένα μηχανισμό ώστε η εν λόγω θεωρία να απαλλαγεί από την επιπλέον στροφορμή.

Η θεωρία της *συνόδου* δέχτηκε αξιωματικά ότι η Γη και η Σελήνη σχηματίστηκαν μαζί σε κοινή τροχιά. Η Σελήνη, όμως, έχει σύσταση αρκετά

διαφορετική από τη σύσταση της Γης, περιέχει πάρα πολύ λίγο μεταλλικό σίδηρο, και ουδείς μπορούσε να φανταστεί ένα μηχανισμό συσσώρευσης μέσω του οποίου ο περισσότερος μεταλλικός σίδηρος θα συγκεντρωνόταν σ' ένα μόνο από τα δύο σώματα.

Κατά τη θεωρία της *σύλληψης* η Σελήνη σχηματίστηκε κάπου αλλού στο ηλιακό σύστημα, και περιφερόμενη βρέθηκε κοντά στη Γη, η οποία και τη συνέλαβε βαρυτικά. Αλλά και πάλι, ουδείς μπορούσε να καταλάβει πώς ένα πλανητικό σώμα, που θα μπορούσε να σχηματιστεί κάπου αλλού, ήταν τόσο διαφορετικό από τους άλλους γήινους πλανήτες, ώστε να μη διαθέτει τον σημαντικό πυρήνα από σίδηρο. Όσοι προσπάθησαν να κατανοήσουν την ουράνια μηχανική της σύλληψης αντιμετώπισαν αξεπέραστες δυσκολίες.

Αυτή ήταν η κατάσταση στις αρχές της δεκαετίας του 1960, όταν η κυβέρνηση των ΗΠΑ δημιούργησε το πρόγραμμα Apollo, σκοπός του οποίου ήταν να προσεδαφιστούν άνθρωποι στη Σελήνη και να επιστρέψουν ασφαλώς στη Γη. Υπήρξαν αρκετά διαφορετικά κίνητρα για την απόφαση αυτή, το επιστημονικό κίνητρο όμως ήταν να καθοριστεί ποια από τις παραπάνω τρεις θεωρίες ήταν ορθή.

Κατά τη διάρκεια του προγράμματος Apollo ένας ψυχίατρος, ο Ian Mitroff, στο Πανεπιστήμιο του Πίτσμπουργκ, έπαιρνε συνεχώς συνεντεύξεις από τους «επιστήμονες της Σελήνης» για να προσδιορίσει τις τρέχουσες απόψεις τους για την προέλευση της Σελήνης,

ελπίζοντας ότι θα γινόταν μάρτυρας μιας τέλει παρουσίας του τρόπου που λειτουργεί η επιστημονική μέθοδος: θα συλλέγονταν δεδομένα από την ανάλυση σεληνιακών δειγμάτων και από τις μετρήσεις οργάνων που θα τοποθετούνταν στην επιφάνεια της Σελήνης, και στη συνέχεια οι επιστήμονες, ως λογικοί άνθρωποι, θα άλλαζαν άποψη και θα συνέκλιναν προς τη σωστή θεωρία.

Αλλά δεν έγινε έτσι. Ενώσω συγκεντρώνονταν τα δεδομένα, ο Mitroff παρατήρησε πως οι απόψεις δεν άλλαζαν. Δεν σημειώθηκε σύγκλιση. Ο Mitroff έγραψε τότε ένα βιβλίο όπου ισχυριζόταν πως οι «επιστήμονες της σεληνης» είναι ιδιαίτερα ισχυρογνώμονες και ανίκανοι να ανταποκριθούν στις επιστημονικές ενδείξεις. Αλλά ούτε κι αυτός μάς υπέδειξε ποια από τις θεωρίες ήταν η σωστή.

Το λάθος του Mitroff ήταν ότι υπέθεσε πως η σωστή θεωρία για το σχηματισμό της Σελήνης έπρεπε να είναι μία από τις τρεις κλασικές θεωρίες. Το σωστό θα ήταν να υπήρχε και μια τέταρτη εκδοχή: «καμία από τις παραπάνω θεωρίες δεν είναι σωστή». Όλες οι αντιρρήσεις για τις τρεις θεωρίες που είχαν εκφραστεί πριν από το πρόγραμμα Apollo παρέμειναν ακλόνητες, ενώ με τα πάμπολλα νέα δεδομένα, προστέθηκαν και νέες. Οι «επιστήμονες της Σελήνης» παρέμειναν απογοητευμένοι, και η προέλευση της Σελήνης παρέμεινε ένα μυστήριο.

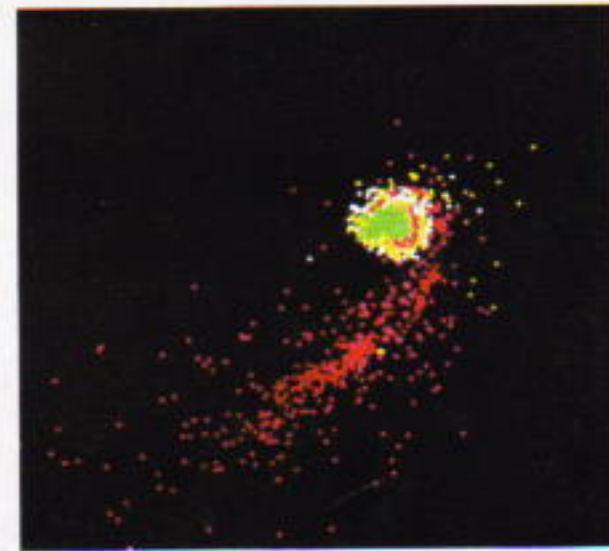
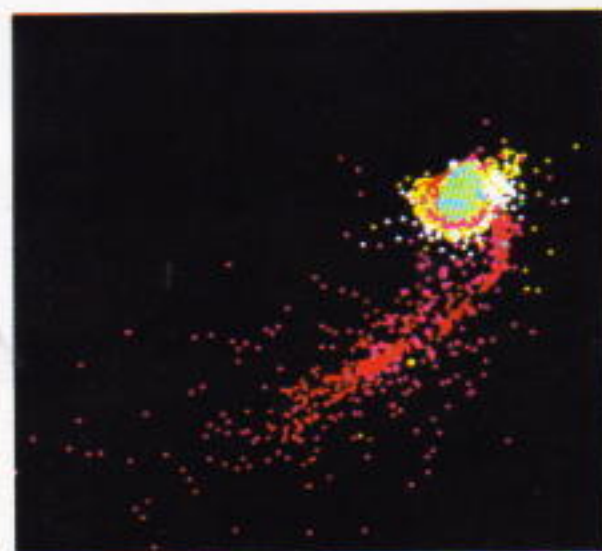
Στα επόμενα χρόνια ο χειμαρρός δεδομένων από τα όργανα που βρίσκο-



νταν στη Σελήνη κόπασε, και ο ρυθμός ανάλυσης των σεληνιακών δειγμάτων μειωνόταν συνεχώς. Το 1984 έγινε ένα συνέδριο για την προέλευση της Σελήνης στην Κόνα, τη νήσο της Χαβάης. Οι οργανωτές του συνεδρίου ανακάλυψαν πως από τα άρθρα που είχαν υποβληθεί ένας εντυπωσιακός αριθμός τους υποστήριζε την άποψη πως η Σελήνη σχηματίστηκε ύστερα από σύγκρουση της Γης με ένα άλλο πλανητικό σώμα, τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο και ο πλανήτης Άρης. Επρόκειτο για τη θεωρία της γιγαντιαίας πρόσκρουσης.

Η γιγαντιαία πρόσκρουση

Όπως συχνά συμβαίνει όταν αναπτύσσεται μια νέα θεωρία, οι βασικές ιδέες της θεωρίας της γιγαντιαίας πρόσκρουσης είχαν διατυπωθεί αρχικά είτε λανθασμένα είτε ανεπαρκώς. Στα μέσα της δεκαετίας του 1970 αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα δύο ιδέες που αποτέλεσαν πρόδρομο της εν λόγω θεωρίας. Στο Πλανητικό Επιστημονικό Ινστιτούτο στο Τάκσον, στην Αριζόνα, ο William Hartmann και ο Donald Davis μελετούσαν συστηματικά τη θεωρία της πλανητικής συγκέντρωσης και διαπίστωσαν πως όσο αυξανόταν το μέγεθος των πλανητικών σωμάτων, προέκυπτε μια ευρεία κατανομή μεγεθών, όπου ένα μόνο σώμα είχε το μεγαλύτερο μέγεθος, και το πλήθος των σωμάτων αυξανόταν ενόσω το μέγεθός τους ελατιωνόταν. Όταν το μεγαλύτερο σώμα αποκτούσε μάζα συγκρίσιμη με της Γης, διαπίστωσαν ότι συγκρούσεις μαζί της θα μετέτρεπαν σε αέριο το προσκρούον σώμα. Πρότειναν λοιπόν την ιδέα ότι μια μεγάλη σύγκρουση με τη Γη θα μπορούσε να εξαερώσει μια τεράστια ποσότητα πετρώματος· το υλικό αυτό θα εκτοξευόταν ψηλά πάνω από το σημείο της σύγκρουσης και πιθανώς ένα μεγάλο μέρος του θα μπορούσε να τεθεί σε τροχιά και να συμπυκνωθεί σχηματίζοντας τη Σελήνη. Δεν διέθεταν όμως κάποια σαφή μέθοδο για να εισαγάγουν τη στροφορμή του συστήματος Γη-Σελήνη στην υπόθεσή τους, διότι όταν η Γη και η Σελήνη βρίσκονται κοντά σε κοινή τροχιά, το μεγαλύτερο μέρος της στροφορμής Γης-Σελήνης πρέπει να περιλαμβάνεται στην περιστροφή της Γης.



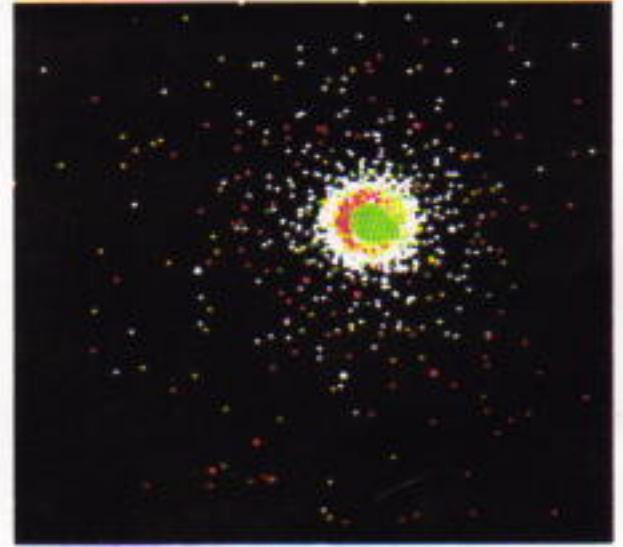
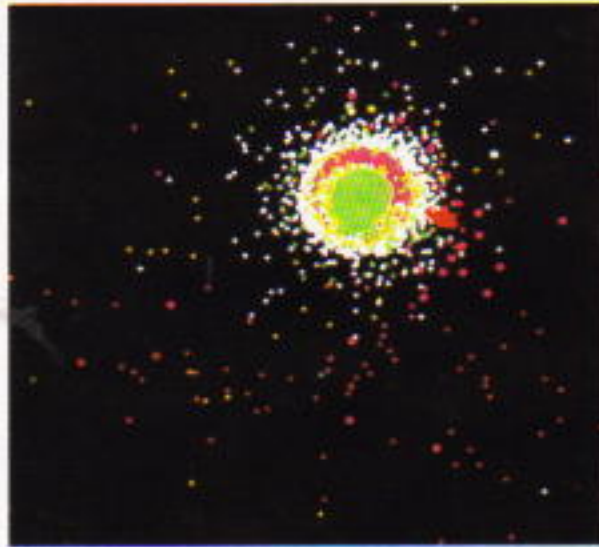
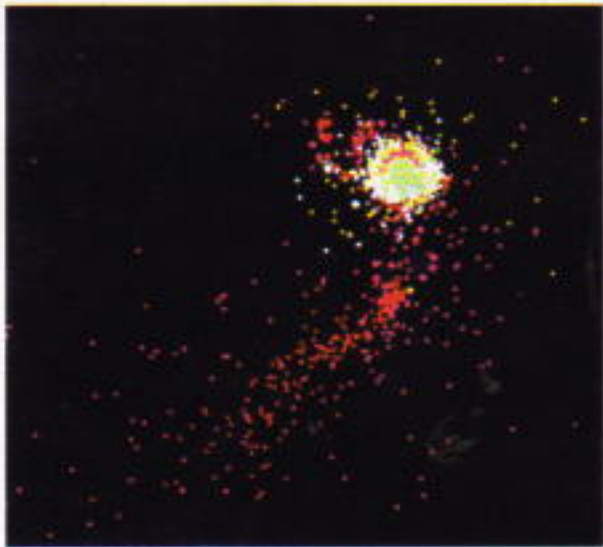
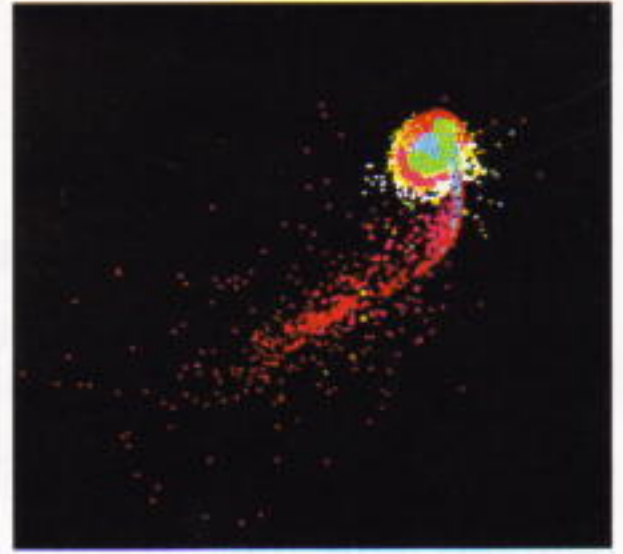
Εν τω μεταξύ, στο Καίμπριτζ της Μασσαχουσέττης, ο William Ward κι εγώ αναζητούσαμε έναν τρόπο να εντάξουμε τη στροφορμή του συστήματος Γη-Σελήνη στην ιδιοπεριστροφή της Γης. Υποθέσαμε, λοιπόν, πως ένα συμπαγές σώμα (αυτό που προκαλεί τη σύγκρουση) χτύπησε στη Γη εφαπτομενικά στον ισημερινό της με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής. Η μάζα του προσκρούοντος σώματος έπρεπε να είναι παρόμοια με τη μάζα του Άρη (αυτή είναι η ελάχιστη μάζα, διότι αν το σημείο πρόσκρουσης είναι πιο κοντά στο κέντρο της Γης, απαιτείται μεγαλύτερη μάζα).

Ήταν επίσης προφανές για μας ότι κατά τη σύγκρουση έπρεπε να δημιουργηθεί ένα τεράστιο νέφος από μείγμα υλικών του προσκρούοντος σώματος και της Γης. Ως εκ τούτου το κέντρο μάζας του έπρεπε να κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής και ίσως μικρότερη και από την τροχιακή ταχύτητα. Προϋποθέσαμε πως οι βαθμίδες πίεσης θα προκαλούσαν εκτόνωση του νέφους, και υποθέσαμε ότι μ' αυτόν τον τρόπο ένα μέρος του νέφους θα επιταχυνόταν σε κυκλική κίνηση, επιτρέποντας έτσι να συμπυκνωθεί η Σελήνη και να τεθεί σε τροχιά (η μάζα της Σελήνης ισούται

περίπου με το ένα όγδοο της μάζας του Άρη).

Η θεώρηση αυτή ερμήνευε αυτομάτως τη στροφορμή του συστήματος Γη-Σελήνη διά της ιδιοπεριστροφής της Γης και της κίνησης του νέφους. Αργότερα όμως πληροφορηθήκαμε πως οι βαθμίδες πίεσης των αερίων είναι πολύ λιγότερο αποτελεσματικές απ' ό,τι είχαμε υποθέσει, και πως οι βαρυτικές ροπές παίζουν καθοριστικό ρόλο, γεγονός που το είχαμε αγνοήσει.

Εκείνη την εποχή δεν φαινόταν ότι οι ιδέες αυτές είχαν κάνει ιδιαίτερη εντύπωση σε όσους ασχολούνταν με την επιστήμη των πλανητών. Αυτό όμως ήταν παραπλανητικό. Όπως διαπιστώσαμε, όταν οργανωνόταν το συνέδριο στην Κόνα, υποβλήθηκαν πολλά άρθρα που αναφέρονταν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο στην ιδέα της γιγαντιαίας πρόσκρουσης. Το συνέδριο στην Κόνα αποτέλεσε έναν θρίαμβο των ιδεών έναντι της ύλης, αφού στην πραγματικότητα είχε κοινοποιηθεί πολύ μικρό μέρος ποσοτικής μελέτης που αφορούσε τη θεωρία της γιγαντιαίας πρόσκρουσης. Όλοι επιθυμούσαν διακαώς να βρουν κάποια εναλλακτική λύση στις τρεις κλασικές θεωρίες, και δεν έβλεπαν με ιδιαίτερα κριτικό μάτι τις λεπτομέρειες. Έφυγα από το συνέ-



δριο με την πεποίθηση πως το επόμενο βήμα πρέπει να είναι η αριθμητική προσομοίωση της γιγαντιαίας πρόσκρουσης μέσω υπερυπολογιστών.

Υδροδυναμική ομαλών σωματιδίων

Μια προσομοίωση της γιγαντιαίας πρόσκρουσης (ή οποιασδήποτε άλλης σημαντικής έκρηξης) απαιτεί έναν υπολογιστικό κώδικα που να χειρίζεται προβλήματα υδροδυναμικής —την κίνηση ρευστών που υπόκεινται σε εξωτερικές δυνάμεις, όπως οι βαθμίδες βαρύτητας και πίεσης. Ο παραδοσιακός τρόπος για να γίνει ένας τέτοιος υπολογισμός είναι να διαιρεθεί ο χώρος σ' ένα διακριτό σύνολο διαμερισμάτων (μερικές φορές ονομάζεται δίκτυο) και να ακολουθηθεί η κίνηση του ρευστού μέσα από το δίκτυο σαν να επενεργούσαν πάνω του οι εξωτερικές δυνάμεις. Σε μια γιγαντιαία πρόσκρουση οι πιέσεις είναι τόσο υψηλές και η ενέργεια που απελευθερώνεται τόσο μεγάλη ώστε όλο το υλικό συμπεριφέρεται σαν ρευστό. Ό,τι υλικό ρέει εκτός του δικτύου χάνεται.

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί μια διαφορετική θεώρηση για την αριθμητική υδροδυναμική, η λεγόμενη υδροδυναμική ομαλών (ή

Στάδια της προσομοίωσης σε υπολογιστή της σύγκρουσης δύο πρωτοπλανητών, η οποία οδηγεί στο σχηματισμό της σημερινής Γης και Σελήνης. Ο λόγος μαζών στόχου-προσκρούοντος σώματος είναι 8 προς 2, και η συνολική μάζα ξεπερνά λίγο τη σημερινή συνολική μάζα Γης και Σελήνης. Η αρχική στροφορμή ισούται με 1,433 της σημερινής στροφορμής του συστήματος Γη-Σελήνη ($3,5 \cdot 10^{31} \text{ kg m}^2 / \text{sec}$). Η σύγκρουση ξεκίνησε με μηδενική ταχύτητα στο άπειρο, έτσι ώστε η σύγκρουση να γίνει με την ταχύτητα διαφυγής. Έλλειμμα μάζας και ορμής υπάρχει λόγω των μικρών θραυσμάτων που διαφεύγουν από το σύστημα.

Κάθε σώμα αντιπροσωπεύτηκε από 5.000 αλληλεπιδρώντα ομαλά σωματίδια. Εξαιτίας της διαφοράς στη μάζα, τα σωματίδια του στόχου είναι περίπου δύο φορές μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του προσκρούοντος σώματος, οπότε μπορείτε να παρακολουθήσετε την ιστορία τους. Οι πρωτοπλανήτες έχουν πυρήνες από σίδηρο και περιβάλλονται από πέτρωμα με λόγο μαζών κοντά σ' εκείνον που δίνεται από τις φυσικές περιεκτικότητες των στοιχείων που ενυπάρχουν. Οι αρχικές επιφανειακές θερμοκρασίες και των δύο συγκρουόμενων σωμάτων θεωρήθηκαν ίσες με 2.000 K. Η θερμοκρασία αυτή είναι αρκετά υψηλή για να αντιπροσωπεύσει ρεαλιστικά την ιστορία μιας σύγκρουσης που οδηγεί σε συγκέντρωση και αρκετά χαμηλή για να εμποδίσει την εξαέρωση της ύλης από την επιφάνεια. Μετά τη σύγκρουση, όποτε εμφανίζεται πολύ θερμό πέτρωμα σε μια περιοχή της επιφάνειας, το νέφος του πετρώματος σχηματίζει μια υδροστατική ατμόσφαιρα γύρω από το σώμα.

Στα σχήματα χρησιμοποιείται περιορισμένος αριθμός χρωμάτων: για το πέτρωμα, η μικρότερη εσωτερική ενέργεια (ή θερμοκρασία) απεικονίζεται με βαθύ κόκκινο· καθώς αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια, τα χρώματα αλλάζουν σε ανοιχτό κόκκινο ή ροζ, κίτρινο και λευκό. Πρώτα απεικονίζονται τα σημεία του πετρώματος και κατόπιν τα σημεία του σιδήρου, έτσι ώστε να υπερτίθενται των σημείων του πετρώματος. Για το σίδηρο η χαμηλότερη εσωτερική ενέργεια είναι σκούρα μπλε, και καθώς αυξάνεται τα χρώματα αλλάζουν σε ανοιχτό μπλε, σκούρο πράσινο και ανοιχτό πράσινο. Ένα γενικό φαινόμενο προς παρατήρηση είναι ότι όπου η σύγκρουση αφήνει στην επιφάνεια πέτρωμα υψηλής εσωτερικής ενέργειας, εμφανίζονται λευκά σωματίδια που απομακρύνονται από την περιοχή. Αυτά είναι τα σωματίδια νέφους του πετρώματος, τα οποία σχηματίζουν την εκτεταμένη ατμόσφαιρα γύρω από το σύστημα.

Το συνολικό χρονικό διάστημα από την πρώτη ως την τελευταία εικόνα είναι περίπου 2,5 ημέρες. (Πρόκειται για σημερινές γήινες ημέρες —στην πραγματικότητα η περιστροφή της Γης ήταν πολύ ταχύτερη στην αντίστοιχη στιγμή της δημιουργίας.) Αμέσως μετά τη σύγκρουση η μέση απόσταση από τη Γη είναι μόνο λίγες γήινες ακτίνες· στη συνέχεια η Σελήνη μετακινήθηκε σταδιακά στη σημερινή της απόσταση και ταυτόχρονα η περιστροφή της Γης επιβραδύνθηκε.

ομαλοποιημένων) σωματιδίων. Στη θεώρηση αυτή το υλικό διαχωρίζεται σε σφαιρικά σωματίδια που επικαλύ-

πτουν το ένα το άλλο. Η κατανομή πυκνότητας σ' ένα σωματίδιο μοιάζει σχηματικά με μια καμπάνα —σχεδόν

επίπεδη κοντά στο κέντρο και ραγδαία φθίνουσα σε ορισμένη απόσταση από το κέντρο. Καθώς μεταβάλλεται η πυκνότητα του υλικού, ο βαθμός επικάλυψης των σωματιδίων αλλάζει αντιστοίχως, αλλά η συλλογή των σωματιδίων διατηρεί κατά καλή προσέγγιση σχεδόν «επίπεδη» πυκνότητα. Στη θεώρηση αυτή τα ίδια τα σωματίδια κινούνται υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων.

Αποτελέσματα

Υπάρχει ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα σε όλες τις καινούργιες προσομοιώσεις. Στη σύγκρουση, το προσκρούον σώμα (που είναι αυτό με τη μικρότερη μάζα) παραμορφώνεται και επιμηκύνεται. Το μεγαλύτερο μέρος του, το οποίο συμπεριλαμβάνει ουσιαστικά όλο τον σίδηρο της κεντρικής περιοχής του, μένει πάνω στην Πρωτογή, και ο σίδηρος εισχωρεί μέσα από τον πετρώδη μανδύα της Πρωτογής. Το πετρώδες τμήμα του προσκρούοντος σώματος τινάζεται πολύ μακριά από το σημείο πρόσκρουσης, και έχει την τάση να τίθεται σε τροχιά γύρω από την Πρωτογή με τη μορφή ανεξάρτητων σωματιδίων (και μερικές φορές με τη μορφή σμηνών σωματιδίων).

Ωστόσο, ο σίδηρος του πυρήνα του προσκρούοντος σώματος αρχικά συγκεντρώνεται σ' έναν μικρό σχετικά όγκο στη μια πλευρά του πυρήνα της Πρωτογής, σχηματίζοντας μια περιστρεφόμενη ράβδο σιδήρου στο εσωτερικό της Πρωτογής. Η εν λόγω ράβδος μπορεί να ασκήσει ισχυρή ροπή στα σμήνη των σωματιδίων της Πρωτογής που υπερίπτανται, ιδιαίτερα σ' εκείνο το τμήμα τους που τελικά τίθεται σε τροχιά.

Για το πέτρωμα, η εσωτερική ενέργεια των σωματιδίων απεικονίζεται με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών χρωμάτων· το ίδιο ισχύει και για τον σίδηρο. Έχω διαπιστώσει πως αυτό είναι πολύ περισσότερο χρήσιμο από τα πολλά χρώματα σε ψευδοσυνεχή κατανομή. Ο σίδηρος απεικονίζεται πάνω από το πέτρωμα για να φανεί η συμπεριφορά του. Το λευκό χρησιμοποιείται για τις μεγαλύτερες εσωτερικές ενέργειες των σωματιδίων του πετρώματος. Ήταν πολύ εντυπωσιακό να παρατηρείς στην οθόνη ότι, όπου μια σύγκρουση είχε θερμάνει το υλικό της επιφάνειας

του πλανητικού σώματος, ένα νέφος λευκών σωματιδίων υπωνόταν πάνω από την επιφάνεια και εξαπλωνόταν ώστε να περιβάλλει το πλανητικό σώμα. Ακόμη μεγαλύτεροι επιμηκείς σχηματισμοί του προσκρούοντος σώματος περιβάλλονταν από νέφος λευκών σωματιδίων μετά τη σύγκρουση.

Επειδή τα σωματίδια του προσκρούοντος σώματος απεικονίστηκαν με μικρότερες ακτίνες, μπορούσε κανείς να δει ότι τα περισσότερα από τα σωματίδια (και η πλειονότητα της μάζας) στο λευκό νέφος προέρχονταν αρχικά από το προσκρούον σώμα. Προφανώς, όταν η πλανητική επιφάνεια θερμάνθηκε από το πέτρωμα του προσκρούοντος σώματος που έπεσε πάνω της, τα σωματίδια του προσκρούοντος σώματος θα είχαν την τάση να είναι πάνω από τα σωματίδια της Πρωτογής, και γι' αυτό θα ήταν τα πρώτα που θα εξατμίζονταν. Το λευκό νέφος ήταν πάντοτε πυκνότερο κοντά στην πλανητική επιφάνεια και αραιώνει καθώς μεγάλωνε η απόστασή του από αυτή, όπως θα περίμενε κανείς για μια ατμόσφαιρα. Το φαινόμενο αυτό, βεβαίως, απείχε πολύ από εκείνο που είχαμε παρατηρήσει σε προηγούμενους υπολογισμούς μας, διότι μπορούσαμε να προσομοιώσουμε κατάλληλα την εξαέρωση των σωματιδίων και το σχηματισμό ατμόσφαιρας.

Οι τελικές καταστάσεις της Πρωτογής που ακολουθούσαν όλες τις συγκρούσεις ήταν εντυπωσιακά όμοιες. Για το λόγο αυτό είναι επαρκές να δείξουμε τα αποτελέσματα μιας και μόνο περίπτωσης. Επέλεξα να δείξω εκείνα για τα οποία ο λόγος της μάζας της Πρωτογής προς τη μάζα του προσκρούοντος σώματος είναι 8 : 2.

Σχόλια

Καταλήγουμε λοιπόν σε μια καινούργια και αρκετά απλή εικόνα των συνεπειών μιας γιγαντιαίας πρόσκρουσης. Όποτε η επιφάνεια της Πρωτογής υφίσταται βίαια σύγκρουση, παράγεται ένα πολύ θερμό μάγμα. Από τη θερμή επιφάνεια εξαερώνεται το πέτρωμα και σχηματίζει μια ευρύτερη θερμή ατμόσφαιρα γύρω από την Πρωτογή. Η μέση θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 4.000 K σε απόσταση οκτώ περίπου γήινων ακτίνων, και μεγαλύ-

τερη από 2.000 K σε απόσταση είκοσι γήινων ακτίνων. Η περιγραφή αυτή ισχύει σχεδόν για κάθε γιγαντιαία πρόσκρουση που περιλαμβάνει ένα προσπίπτον σώμα με μάζα τουλάχιστον το ένα δέκατο της μάζας της Γης.

Μια υποψήφια για το σχηματισμό της Σελήνης γιγαντιαία πρόσκρουση πρέπει να διαθέτει επίσης τουλάχιστον τη σημερινή τιμή της στροφορμής του συστήματος Γη-Σελήνη, γεγονός που θέτει περιορισμούς στο προσκρούον σώμα. Η μάζα του πρέπει να ισούται τουλάχιστον με το 14% της μάζας της Γης, ώστε η Γη να δεσμεύσει τον πυρήνα σιδήρου του, και να μην παραμείνει πολύς σίδηρος στη Σελήνη. Εκτός από αυτόν τον περιορισμό, όμως, από τις σημερινές προσομοιώσεις φαίνεται πως οποιαδήποτε απόκλιση στη σχέση μάζας μεταξύ Πρωτογής και προσπίπτοντος σώματος μπορεί να δημιουργήσει ένα πολλά υποσχόμενο σύνολο συνθηκών.

Πώς όμως εξελίσσονται όλα αυτά τα σενάρια καθώς περνάει ο χρόνος; Ο υπολογιστικός κώδικας στα μοντέλα αυτά δεν επιτρέπει την παραγωγή και διάδοση ακτινοβολίας. Ο λόγος για την παράλειψη αυτή είναι ότι ο χρόνος που περιλαμβάνεται στις προσομοιώσεις είναι μόνο μερικές ώρες ή μια-δυο μέρες. Στην πραγματικότητα τα σενάρια πρέπει να οδηγούν στην ψύξη της ατμόσφαιρας και στη δημιουργία συσσωματώσεων δύστηκτων υλικών σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις μέσα στην ατμόσφαιρα.

Το μόνο σενάριο που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ισχυρό υπό αυτές τις συνθήκες είναι εκείνο στο οποίο η περισσότερη ύλη της Σελήνης προέρχεται από το τμήμα του προσκρούοντος σώματος που λόγω ροπής τίθεται σε τροχιά μεγάλης ακτίνας γύρω από τη Γη. Μερικοί γεωχημικοί εξέφρασαν την αγωνία τους στη σκέψη ότι πρέπει να αποδεχθούν ένα τέτοιο σενάριο.

Ο σχηματισμός της Σελήνης λόγω μετασύγκρουσης μιας γιγαντιαίας πρόσκρουσης παραμένει υπόθεση. Στην εργασία μας επικεντρωθήκαμε στα εσωτερικά φαινόμενα μιας γιγαντιαίας πρόσκρουσης πάνω στην Πρωτογή. Έχω την εντύπωση, όμως, πως η κατανόηση της εξέλιξης του εξωτερικού περιβάλλοντος αποτελεί την πιο ενδιαφέρουσα πρόκληση. ■

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M26

Τομή παραβολών. Δύο διαφορετικά δευτεροβάθμια πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$, με μοναδιαίο συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου, ικανοποιούν την ισότητα $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

(A. Perlin)

M27

Βαθμολογία ασφαλείας. Οκτώ ομάδες μπάσκετ αγωνίζονται για να προκριθούν στην τελική τετράδα. (Κάθε ζευγάρι ομάδων αγωνίζεται μία μόνο φορά: ο νικητής παίρνει δύο βαθμούς και ο ηττημένος κανέναν, ενώ στην ισοπαλία οι δύο ομάδες κερδίζουν από έναν βαθμό.) Ποια είναι η ελάχιστη βαθμολογία που εξασφαλίζει την πρόκριση στην τετράδα; (S. Khodjijev)

M28

Υποσύνολα μαφιόζων. Ο καθένας από ένα άπειρο σύνολο κακοποιών καταδιώκει κάποιον άλλο. Αποδείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα άπειρο υποσύνολο κακοποιών από τους οποίους ουδείς καταδιώκει κάποιον που ανήκει σε αυτό σύνολο.

(V. Ufnarovsky)

M29

Αριθμοί γύρω από δεκάγωνα. Γράφουμε έναν θετικό ακέραιο σε κάθε μία από τις είκοσι κορυφές δύο κανονικών δεκαγώνων έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών γύρω από κάθε δεκάγωνο να είναι 99. Αποδείξτε ότι είναι δυνατό να επιλέξουμε ένα πλήθος διαδοχικών κορυφών σε κάθε δεκάγωνο (ίσως μία κορυφή, αλλά όχι όλες) έτσι ώστε να είναι ίσα τα δύο αθροίσματα των αριθ-

μών που σημειώνονται σε αυτές. (S. Berlov)

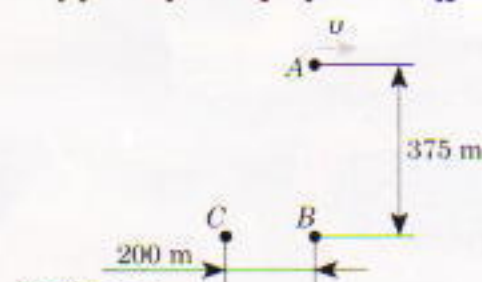
M30

Τι δεν πρόσεξε ο Ναπολέων.¹ (α) Κατασκευάζουμε τρία ισόπλευρα τρίγωνα ABC_1 , BCA_1 και CAB_1 εξωτερικά ενός τυχαίου τριγώνου ABC . Ονομάζουμε C_2 , A_2 και B_2 τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AA_2 , BB_2 και CC_2 διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (β) Αποδείξτε την ίδια πρόταση αντικαθιστώντας τα ισόπλευρα τρίγωνα με οποιαδήποτε όμοια ισοσκελή τρίγωνα ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 , με βάσεις AB , BC και CA . (N. Sedrakian, S. Tkachov)

Φυσική

Φ26

Αυτοκίνητο σε πάγο. Λόγω του μικρού συντελεστή τριβής, ένα αυτοκίνητο δεν μπορεί να κινηθεί σε δρόμο καλυμμένο με πάγο με επιτάχυνση



Σχήμα 1

που να υπερβαίνει την τιμή $\gamma = 0,5 \text{ m/sec}^2$. Σύμφωνα με τους κανονισμούς ενός διαγωνισμού, το αυτοκίνητο πρέπει να πάει όσο το δυνατόν συντομότερα από το σημείο A στο σημείο B, που βρίσκεται σε κάθετη διεύθυνση ως προς την αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου (Σχήμα 1). Ποιος είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος χρόνος για να

1. Γιατί αναφέρουμε τον Ναπολέοντα; Διαβάστε τη σελίδα 51 στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1994 του Quantum.

γίνει αυτό, αν η απόσταση $AB = 375 \text{ m}$ και η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου έχει μέτρο $v = 10 \text{ m/sec}$; Ποια είναι η τροχιά του αυτοκινήτου; Απαντήστε στις ίδιες ερωτήσεις για την περίπτωση κατά την οποία ο τερματισμός γίνεται στο σημείο C, με $BC = 200 \text{ m}$. (A. Korotkov, E. Yunosov)

Φ27

Δορυφόρος του Ήλιου. Υπολογίστε την ελάχιστη περίοδο περιφοράς ενός διαστημοπλοίου γύρω από τον Ήλιο με δεδομένο ότι η φαινόμενη διάμετρος του Ήλιου από τη Γη είναι $\alpha = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. (M. Gavrilov)

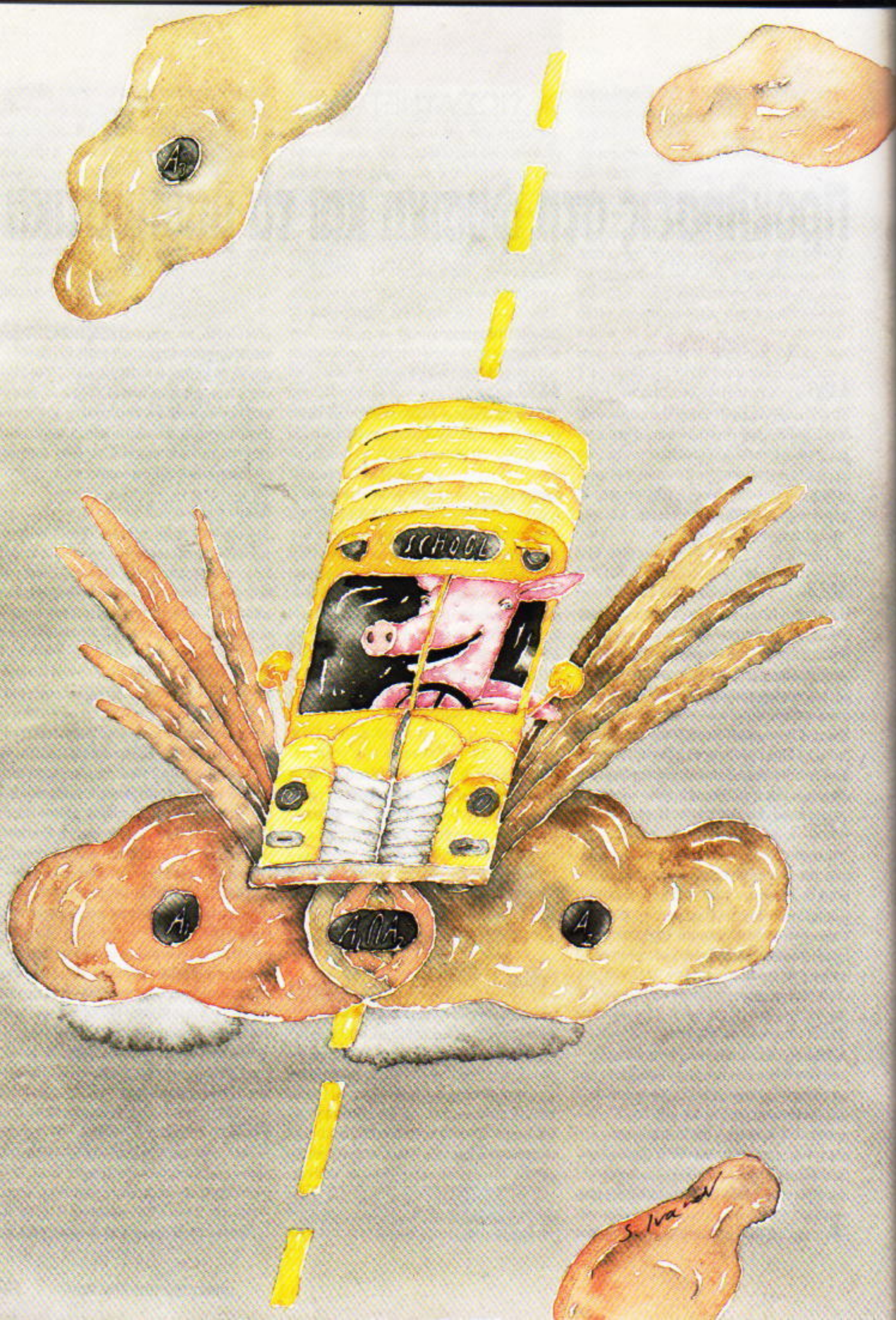
Φ28

Σ' έναν μακρινό πλανήτη. Η επιφάνεια ενός πλανήτη χωρίς ζωή είναι καλυμμένη με παχύ στρώμα παγωμένου ανθρακικού οξέος. Προτείνεται ότι μπορεί να δημιουργηθεί ατμόσφαιρα σε αυτόν τον πλανήτη που να αποτελείται από καθαρό οξυγόνο μέσω μιας διαδικασίας διάσπασης του ανθρακικού οξέος σε άνθρακα και οξυγόνο. Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί αν ο ρυθμός διάσπασης είναι 10^6 mole ανά δευτερόλεπτο, και η πίεση που πρέπει να επιτευχθεί είναι $P = 0,2 \text{ atm}$; Θεωρήστε ότι η θερμοκρασία κοντά στην επιφάνεια του πλανήτη είναι $T = 200 \text{ K}$, και σ' αυτή τη θερμοκρασία η εξατμίσση του ανθρακικού οξέος μπορεί να αγνοηθεί. Η μάζα του πλανήτη είναι $M = 7,5 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ (σχεδόν ίση με τη μάζα της Σελήνης) και η ακτίνα του $r = 1.750 \text{ km}$. (D. Mogilevtsev)

Φ29

Πλαίσιο σε μαγνητικό πεδίο. Πλαίσιο σε σχήμα Π με ίσες πλευρές από λεπτό σύρμα κρέμεται ελεύθερα από

Η συνέχεια στη σελ. 60 ⇔



SCHOOL

A

A

A

S. Ivanov

Το σχολικό λεωφορείο και οι λακκούβες

Μια εφαρμογή του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού

Thomas P. Dence

ΑΣ ΞΕΚΙΝΗΣΟΥΜΕ Μ' ΕΝΑ ΑΡΚΕΤΑ γνωστό πρόβλημα. Ακόμη και αν το έχετε ήδη συναντήσει αξίζει να το επαναλάβουμε.

Ας υποθέσουμε ότι ζείτε στη Μικρόπολη. Η πόλη έχει δύο δρόμους με διεύθυνση Ανατολή-Δύση και τρεις που ακολουθούν τη διεύθυνση Βορρά-Νότιου. Στο Σχήμα 1 βλέπετε έναν χάρτη της Μικρόπολης. Φυσικά, μπορεί να υπάρχουν και άλλοι δρόμοι που να οδηγούν προς την πόλη ή να φεύγουν από αυτήν. Εμείς πάντως ενδιαφερόμαστε μόνο για τους δρόμους του Σχήματος 1, επειδή αυτούς χρησιμοποιείτε για να πάτε σχολείο.



Σχήμα 1

Ζείτε στο σημείο Α και ακολουθώντας κάποιους δρόμους πρέπει να φτάσετε στο σχολείο που βρίσκεται στο Β. Το ερώτημα είναι πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορείτε να χρησιμοποιήσετε. Στην πραγματικότητα είναι δυνατό να ακολουθήσετε άπειρο πλήθος διαφορετικών διαδρομών στρεφόμενοι απλώς γύρω από ένα τετράγωνο όσες φορές θέλετε. Ωστόσο, δεν θα εξετάσουμε αυτές τις επαναλαμβανόμενες διαδρομές γιατί θέλουμε έναν περίπατο το δυνατόν συντομότερο.

Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τρεις μόνο αποδεκτές διαδρομές.

Μπορούμε να τις καταγράψουμε σημειώνοντας την κατεύθυνση στην οποία στρίβετε σε κάθε διασταύρωση (περιλαμβάνοντας και τη διασταύρωση στο Α). Οι τρεις δυνατές διαδρομές είναι

Διαδρομή 1: βόρεια, ανατολικά, ανατολικά

Διαδρομή 2: ανατολικά, βόρεια, ανατολικά

Διαδρομή 3: ανατολικά, ανατολικά, βόρεια.

Πριν συνεχίσετε να διαβάζετε προσπαθήστε να λύσετε τις επόμενες ασκήσεις.

Άσκηση 1. Βρείτε το πλήθος των συντομότερων δυνατών διαδρομών για τα Σχήματα 2 και 3.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εξετάζουμε μια μεγαλύτερη πόλη, τη Μεσόπολη. Ο χάρτης της παρουσιάζεται στο Σχήμα 4. Η ερώτηση είναι και πάλι: πόσες (το δυνατόν συντομότερες) διαδρομές υπάρχουν από το Α έως το Β; Εδώ η περίπτωση είναι λίγο



Σχήμα 4

δυσκολότερη. Πρώτα πρώτα, και επειδή η Μεσόπολη είναι μεγαλύτερη από τη Μικρόπολη, ας αρχίσουμε να παίρνουμε το λεωφορείο για να πάμε από το Α στο Β αντί να περπατάμε. Και δεύτερον, ας γενικεύσουμε την προηγούμενη επιχειρηματολογία μας και ας σταματήσουμε να απαριθμούμε διαδρομές στην τύχη.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι στη Μεσόπολη η μικρότερη δυνατή διαδρομή αποτελείται από επτά ακριβώς τμήματα δρόμων και ότι το λεωφορείο πρέπει να στρίψει τρεις φορές ανατολικά και τέσσερις φορές βόρεια. Μπορούμε επομένως να απαριθμήσουμε τις δυνατές διαδρομές προς το σχολείο με βάση τη σειρά αυτών των στροφών. Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουμε τις τρεις από αυτές ανατολικές, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις θα είναι βορινές. Υπάρχει όμως ένας τύπος για τέτοια προβλήματα. Η απάντηση είναι απλώς ο διωνυμικός συντελεστής $C(7, 3) = \binom{7}{3} = 35$. (Προσπαθήστε να βρείτε και τις 35 δυνατότητες —είναι μια καλή εξάσκηση για να διατηρηθείτε σε φόρμα!)

Άσκηση 2. Να συναγάγετε μια

σχέση για το πλήθος των διαδρομών ελάχιστου μήκους προς το σχολείο σε μια πόλη με πλάτος m και μήκος n τετράγωνα.

Παρακάμψεις

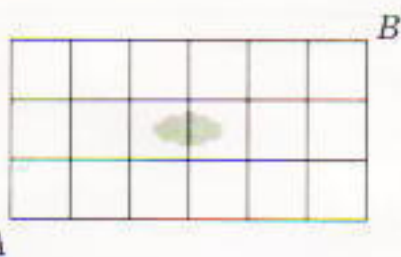
Ας εξετάσουμε τώρα μια άλλη περίπτωση, την Παλαιόπολη (Σχήμα 5). Είναι μια πόλη διαστάσεων 6×3 , δηλαδή έχει πλάτος 6 τετράγωνα και μήκος 3. Το χαρακτηριστικό της είναι ότι υπάρχει μια μεγάλη λακκούβα στη μέση ενός δρόμου απ' όπου το σχολικό λεωφορείο δεν μπορεί να περάσει. Όπως και πριν, θέλουμε να



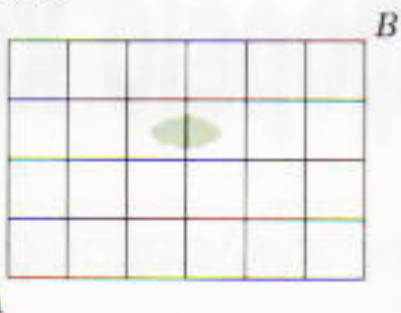
Σχήμα 5

απαριθμήσουμε το πλήθος των διαδρομών ελάχιστου μήκους από την κάτω αριστερά γωνία (σημείο A) έως την πάνω δεξιά γωνία (σημείο B). Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε απαριθμώντας όλες τις διαδρομές (περιλαμβάνοντας και αυτές που περνούν από τη λακκούβα) και αφαιρώντας από το αποτέλεσμα τις διαδρομές που περνούν απ' αυτήν. Η άσκηση 2 μας έχει δώσει ήδη την απάντηση για το πλήθος των διαδρομών πρώτου είδους. Είναι $C(9, 3) = \binom{9}{3} = 84$. Για να απαριθμήσουμε τις διαδρομές που περνούν από τη λακκούβα, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε αυτές που οδηγούν από το A έως το C. Και πάλι μέσω της άσκησης 2, βρίσκουμε ότι το πλήθος τους είναι $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$. Παρομοίως, το πλήθος των διαδρομών από το C έως το B που περνούν από τη λακκούβα ισούται με το πλήθος των διαδρομών από το D έως το B και είναι $\binom{3}{1} = 3$.

Άρα, το γινόμενο $\binom{5}{3} \binom{3}{1} = 30$ μας δίνει το πλήθος των διαδρομών από το A έως το B που χρησιμοποιούν το τμήμα CD. Επομένως το πλήθος των διαδρομών που αποφεύγουν το τμήμα CD είναι η διαφορά $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} \binom{3}{1} = 54$.



Σχήμα 6



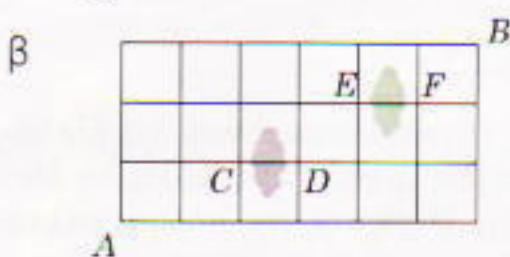
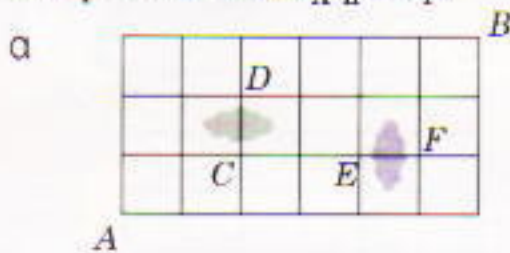
Σχήμα 7

Επισημαίνουμε ότι αυτός ο τρόπος απαρίθμησης μπορεί να εφαρμοστεί ανεξάρτητα από το ποιο κομμάτι δρόμου είναι αποκλεισμένο —είτε βρίσκεται σε δρόμο με διεύθυνση από το Βορρά προς το Νότο είτε από τα ανατολικά προς τα δυτικά —, αν και το αποτέλεσμα μπορεί να είναι διαφορετικό σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 3. Βρείτε το πλήθος των διαδρομών από το A έως το B που αποφεύγουν τις λακκούβες στα Σχήματα 6 και 7.

Νεροποντές

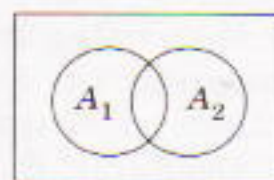
Η γειτονική Μοσχόπολη βρίσκεται δίπλα σ' ένα χείμαρρο και έπειτα από κάθε δυνατή βροχή οι δρόμοι της γεμίζουν λακκούβες. Στο Σχήμα 8α βλέπετε την πόλη έπειτα από μια καταιγίδα με δύο τμήματα δρόμων αποκλεισμένα από δύο μεγάλες λακκούβες. Οι ζημιές στο αποχετευτικό σύστημα διορθώθηκαν αλλά ύστερα από μια καινούργια βροχή εμφανίστηκαν δύο νέες λακκούβες —αυτές που βλέπετε στο Σχήμα 8β.



Σχήμα 8

Ποιες είναι τώρα οι καλές διαδρομές για το λεωφορείο μας; Παρατη-

ρούμε ότι οι διαδρομές από το A έως το B ανήκουν σε τέσσερις ξεχωριστές κατηγορίες. Διαδρομές που δεν περνούν από καμία λακκούβα, διαδρομές που περνούν μόνο από την πρώτη, αυτές που περνούν μόνο από τη δεύτερη, και όσες περνούν και από τις δύο (πράγμα που μπορεί να συμβεί στο Σχήμα 8β αλλά όχι στο 8α). Καθώς το λεωφορείο μας ξεκινά το ταξίδι του σε αυτήν την πιο περίπλοκη κατάσταση, χρειαζόμαστε μια γενικότερη μέθοδο απαρίθμησης των διαδρομών. Σε αυτό το σημείο αρχίζουμε να εισάγουμε ορολογία από το θεώρημα εγκλεισμού-αποκλεισμού. Υπενθυμίζουμε ότι το συγκεκριμένο θεώρημα μας δίνει το πλήθος των στοιχείων της πεπερασμένης ένωσης πεπερασμένων συνόλων. Κατ' αρχάς, αν έχουμε δύο σύνολα —ας πούμε, A_1 και A_2 —, τότε το πλήθος των στοιχείων στην ένωσή τους $|A_1 \cup A_2|$ δίνεται από το $|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Συνήθως, απεικονίζουμε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Venn του Σχήματος 9.



Σχήμα 9

Άσκηση 4. Αποδείξτε την παραπάνω σχέση που μας δίνει το πλήθος στοιχείων της ένωσης δύο συνόλων.

Για ένα διάγραμμα Venn τριών συνόλων ($n = 3$) το θεώρημα εγκλεισμού-αποκλεισμού μας δίνει

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Μπορείτε, για παράδειγμα, να επαληθεύσετε ότι αν ένα στοιχείο ανήκει σε δύο ακριβώς από τα σύνολα A_1, A_2, A_3 απαριθμείται μία ακριβώς φορά στην προηγούμενη παράσταση. Τι συμβαίνει με τα στοιχεία που ανήκουν σ' ένα μόνο σύνολο; Με αυτά που ανήκουν και στα τρία;

Το αποτέλεσμα γενικεύεται για $n \geq 2$ σύνολα (και επομένως για περισσότερο πολύπλοκα διαγράμματα Venn), όπου το πλήθος των στοιχείων στην ένωση των συνόλων είναι συνάρτηση της πληθικότητας της ένω-

σης όλων των συνδυασμών k αυτών των συνόλων —όπου το k διατρέχει όλες τις τιμές από το 1 έως το n . Συγκεκριμένα, αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι n τυχαία σύνολα, τότε

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| \\ & - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \\ & \cap A_n| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ας επανέλθουμε στο πρόβλημα με τις λακκούβες του Σχήματος 8. Αν ορίσουμε τα τρία σύνολα U, A_1, A_2 ως

U = όλες οι διαδρομές από το A έως το B ,
 A_1 = όλες οι διαδρομές από το A έως το B που περνούν από το CD ,
 A_2 = όλες οι διαδρομές από το A έως το B που περνούν από το EF ,

τότε τα A_1, A_2 είναι γνήσια υποσύνολα του U και, στο Σχήμα 8α, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ενώ στο Σχήμα 8β, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Βάσει του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 2$), το πλήθος των καλών διαδρομών N από το A έως το B δίνεται από την έκφραση

$$|U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

Στην περίπτωση του Σχήματος 8α έχουμε

$$N = \binom{9}{3} - \binom{3}{1}\binom{5}{1} - \binom{5}{1}\binom{3}{1} = 138,$$

ενώ στο Σχήμα 8β το πλήθος των καλών διαδρομών είναι

$$\begin{aligned} N &= \binom{9}{3} - \binom{3}{1}\binom{5}{2} - \binom{6}{2}\binom{2}{1} \\ & + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 120. \end{aligned}$$

Από τον τελευταίο όρο διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 12 διαδρομές από το A έως το B που διέρχονται και από το CD και από το EF . Καθεμία απ' αυτές έχει ήδη μετρηθεί δύο φορές, αφού ανήκει και στο A_1 και στο A_2 .

Περισσότερες λακκούβες

Θα παρουσιάσουμε πληρέστερα τη μέθοδο μ' ένα τελευταίο παράδειγμα (Σχήμα 10). Σε αυτή την περίπτωση



Σχήμα 10

έχουμε πέντε τμήματα δρόμων (αριθμημένα από 1 έως 5) που είναι αποκλεισμένα, και ορίζουμε, αντίστοιχα, πέντε σύνολα A_i :

A_i = {όλες οι διαδρομές από το A έως το B που διέρχονται από το i -στό τμήμα}

όπου $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Μια διαδρομή είναι δυνατό να διέρχεται από τέσσερα το πολύ από αυτά τα αποκλεισμένα τμήματα. Ειδικά, τα σύνολα $A_1 \cap A_3 \cap A_5$ και $A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5$ δεν είναι κενά, και έχουμε ότι

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = 8$$

και

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| =$$

$$\binom{2}{1}\binom{0}{0}\binom{2}{0}\binom{0}{0}\binom{2}{1} = 4.$$

Βάσει του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού το πλήθος των καλών διαδρομών N από το A έως το B δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} N &= |U| - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & + \sum_{i,j,k,l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \end{aligned}$$

Οι υπολογισμοί για το κάθε άθροισμα δίνουν

$$\begin{aligned} \sum |A_i| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \\ &= \binom{2}{1}\binom{7}{3} + \binom{3}{1}\binom{6}{2} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} \\ & + \binom{6}{2}\binom{3}{1} + \binom{7}{3}\binom{2}{1} = 270, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum |A_i \cap A_j| &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5| \\ & + |A_4 \cap A_5| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \binom{2}{1}\binom{6}{2} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} \\ & + \binom{2}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{3}{1} \\ & + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{2}\binom{2}{1} + \binom{6}{2}\binom{2}{1} \\ & = 177 \end{aligned}$$

(αφού $A_3 \cap A_4 = \emptyset$),

$$\begin{aligned} \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| \\ & + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| \\ & + (\text{όλοι οι άλλοι όροι είναι μηδενικοί}) \\ &= \binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} \\ & + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{2}{1} \\ & + \binom{3}{1}\binom{2}{1} = 58 \end{aligned}$$

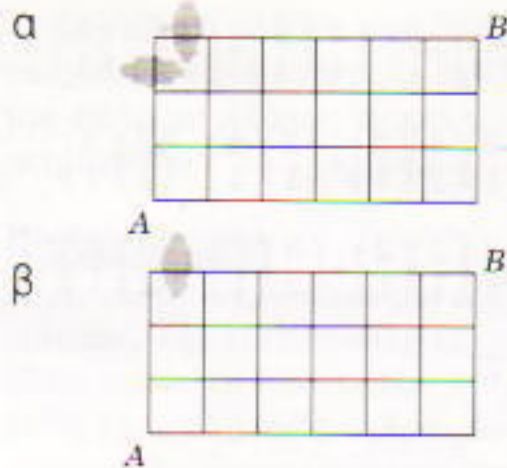
και

$$\begin{aligned} \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| \\ & + (\text{άλλοι όροι που είναι μηδενικοί}) \\ &= \binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} = 8. \end{aligned}$$

Επομένως, το πλήθος των καλών διαδρομών N από το A έως το B είναι

$$N = \binom{10}{4} - 270 + 177 - 58 + 8 = 67.$$

Καταλήγοντας, επισημαίνουμε ότι αυτή η μέθοδος, παρότι ιδιαίτερα επίπονη όταν έχουμε πολλά τμήματα, σε μερικές περιπτώσεις μας προσφέρει τη δυνατότητα να κάνουμε από την αρχή απλοποιήσεις. Αυτό συμβαίνει κάθε φορά που δεν χρειάζεται να εξετάσουμε κάποιο δρόμο CD με λακκούβα επειδή η προσπάθεια σε αυτόν εμποδίζεται από άλλους δρόμους με λακκούβες. Στο Σχήμα 11α έχουμε δύο δρόμους με λακκούβες και στο Σχήμα 11β μόνο έναν. Τα δύο σχή-

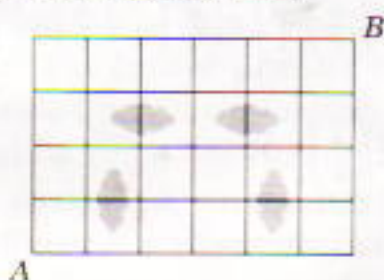


Σχήμα 11

ματα ωστόσο είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι έχουμε και στα δύο τα ίδια ακριβώς σύνολα καλών διαδρομών από το Α έως το Β.

Ίσως διασκεδάσετε ανακαλύπτοντας και άλλα τεχνάσματα απαρίθμησης στις επόμενες ασκήσεις.

Άσκηση 5. Προσδιορίστε το πλήθος των καλών διαδρομών από το Α έως το Β στο Σχήμα 12.

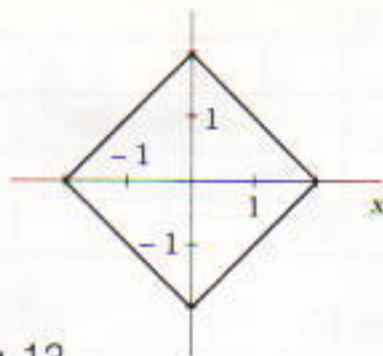


Σχήμα 12

Αυτά τα διαγράμματα που μοιάζουν με πλέγματα μας προσφέρουν το πλαίσιο για ποικίλες ενδιαφέρουσες προεκτάσεις. Έτσι, είναι δυνατό να αναπτύξουμε μια λογική συνάρτηση απόστασης, ή μετρική, από την οποία προκύπτει μια πλούσια γεωμετρία. Για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων (x_1, y_1) , (x_2, y_2) του επιπέδου μπορεί να δοθεί από την απόσταση μέσω σχολικού λεωφορείου $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Το όνομα αυτό είναι κατάλληλο επειδή οι αποστάσεις μετριοούνται απλώς από τα ανατολικά στα δυτικά και από τα νότια στα βόρεια. Το σύνολο των σημείων που απέχουν δύο μονάδες από την αρχή των αξόνων δεν είναι τώρα κύκλος αλλά τετράγωνο (Σχήμα 13).

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας την απόσταση μέσω σχολικού λεωφορείου, σχεδιάστε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ ισούται με 4. Πρόκειται για μια «έλλειψη».

Τελειώνοντας, ας δούμε ένα ακό-



Σχήμα 13

μη παράδειγμα εφαρμογής της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού που προέρχεται από το πεδίο της θεωρίας αριθμών. Εδώ θα συναντήσουμε μια από τις κλασικές συναρτήσεις των μαθηματικών: τη συνάρτηση ϕ του Euler που ορίζεται ως το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n και είναι σχετικά πρώτοι ως προς n . Αρχίζουμε γράφοντας την κανονική ανάλυση του n σε πρώτους παράγοντες:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m},$$

όπου οι $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ είναι πρώτοι, και οι a_1, a_2, \dots, a_m είναι θετικοί ακέραιοι. Θέτουμε $U = \{1, 2, \dots, n\}$, και για κάθε ακέραιο i , $1 \leq i \leq m$, ορίζουμε ως A_i το υποσύνολο των ακεραίων πολλαπλασίων του p_i που ανήκουν στο U . Κάθε A_i περιέχει n/p_i στοιχεία. Αν αφαιρέσουμε από το U όλα αυτά τα στοιχεία —αν δηλαδή σχηματίσουμε το σύνολο

$$U - \bigcup_{i=1}^m A_i$$

—τότε το πλήθος στοιχείων αυτού του συνόλου δεν είναι υποχρεωτικά

$$n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i},$$

αφού στο παραπάνω άθροισμα προσμετράμε δύο φορές τα κοινά στοιχεία των A_i και A_j . Πρέπει λοιπόν να κάνουμε μια πρόσθεση στο νέο λογαριασμό μας —

$$n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j}$$

—για να συνυπολογίσουμε την πιθανόν μη κενή τομή των A_i και A_j . Όμως, μ' αυτόν τον τρόπο είναι πιθανό να απαριθμούμε μερικά στοιχεία πολλές φορές —και συγκεκριμένα, όσα είναι κοινά πολλαπλάσια τριών διαφορετικών πρώτων p_i, p_j, p_k . Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος $|S|$ των στοιχείων του συνόλου S

(των στοιχείων του U που είναι πρώτοι ως προς n) προσεγγίζεται από το

$$|U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|,$$

ή, ισοδύναμα, από το

$$n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{n}{p_i p_j p_k}.$$

Η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού μας επιτρέπει να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο καταλήγοντας στο

$$n - \sum \frac{n}{p_i} + \sum \frac{n}{p_i p_j} + \dots + \sum \frac{n(-1)^m}{p_i p_j \dots p_m}.$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα, με $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Έχουμε ότι

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots, 60\}$$

$$A_2 = \{3, 6, 9, 12, \dots, 60\}$$

$$A_3 = \{5, 10, 15, 20, \dots, 60\}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} |S| &= |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &= 60 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 60 - (30 + 20 + 12) \\ &\quad + (10 + 6 + 4) - 2 = 16. \end{aligned}$$

Πράγματι, για τον αριθμό 60,

$$S = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\},$$

και επομένως $|S| = 16 = \phi(60)$.

Άσκηση 7. Βρείτε τα $\phi(50)$, $\phi(105)$, $\phi(210)$.

Σας αποχαιρετώ με μια τελευταία άσκηση. Το αντικείμενό της είναι παρόμοιο με αυτό των προηγούμενων ασκήσεων, αλλά η μέθοδος επίλυσης είναι διαφορετική. Στην βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται «ανακατάταξη».

Άσκηση 8. Η κυρία Ιωάννα πήρε χριστουγεννιάτικες κάρτες από τους τέσσερις γιους της. Αφού τις διάβασε, τις τοποθέτησε ξανά μέσα στους φακέλους —κατά λάθος όμως τις ανακάτωσε. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να είχε τοποθετήσει τις κάρτες έτσι ώστε να μπουνε όλες σε λαθεμένο φάκελο; ●

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 61

Η γοητεία της επιστημονικής βαρύτητας

Ο Δημήτρης Χριστοδούλου μιλά στο Quantum

Τις πρώτες μέρες του καινούργιου χρόνου ένας συμπατριώτης μας, από τα μεγαλύτερα ονόματα της παγκόσμιας επιστημονικής κοινότητας, ο Δημήτρης Χριστοδούλου, βρέθηκε στην Αθήνα, κοντά στους γονείς και τους φίλους του. Στο παιρικό του σπίτι, κάπου στο Παγκράτι, τον επισκέφτηκε και μίλησε μαζί του ο Γιώργος Ευαγγελόπουλος. Η συνέντευξη που ακολουθεί είναι το ευτυχές αποτέλεσμα εκείνης της συνάντησης.

Ερ.: Κύριε καθηγητά, υπήρξατε ένας ιδιαίτερα προικισμένος μαθητής, με εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθηματικά και τη φυσική, ένα «παιδί-θαύμα». Πότε αντιληφθήκατε αυτή την «άνεσή» σας με τις φυσικές επιστήμες και πώς αντιμετωπίσατε την αναντιστοιχία που υπήρχε ανάμεσα στις γνώσεις που πρόσφερε το σχολείο και τις δικές σας αναζητήσεις;

Απ.: Το ότι είχα μια ιδιαίτερη «ευχέρεια» στις φυσικές επιστήμες το ανακάλυψα όταν ήμουν περίπου 14 ετών. Αρχισα τότε αμέσως να διαβάζω τα σχολικά βιβλία μαθηματικών και φυσικής των επόμενων τάξεων, φροντίζοντας να μην αφήνω καθόλου κενά. Στη συνέχεια μελέτησα και πανεπιστημιακά βιβλία, τα οποία επέλεγα ο ίδιος από τα βιβλιοπωλεία που επισκεπτόμουν. Θυμάμαι, λοιπόν, ότι διάβασα το βιβλίο του Kompaneys, που περιέχει συνοπτικά όλες τις βασικές γνώσεις της κλασικής φυσικής, όπως και πολλά βιβλία μαθηματικών και φυσικής από τη σειρά του Schaum. Έτσι ήρθα σε μια πρώτη επαφή με τον διαφορετικό

και ολοκληρωτικό λογισμό, τις συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής, τις σειρές Fourier κ.λπ. Από τα ελληνικά πανεπιστημιακά συγγράμματα διάβασα τα βιβλία του Δασκαλόπουλου, τέως καθηγητή στο ΕΜΠ.

Ερ.: Στην κοινότητα των θεωρητικών φυσικών είχε μεγάλη απήχηση η εργασία που δημοσιεύσατε το 1970, με τίτλο «Αντιστρεπτοί και μη αντιστρεπτοί μετασχηματισμοί στη φυσική των μελανών οπών», διότι άνοιξε κατευθύνσεις σκέψης που καρποφόρησαν με το θεώρημα εμβαδού του Hawking για τις μελανές οπές. Συγκεκριμένα, η μελέτη σας αποτέλεσε πρόδρομο της εργασίας του Jacob Bekenstein "Black Holes and the Second Law" (Μελανές οπές και ο δεύτερος νόμος), όπου πρωτοδημοσιεύθηκε η υπόθεση ότι το εμβαδόν του ορίζοντα των γεγονότων μιας μελανής οπής είναι το μέτρο της εντροπίας της. Ο Kip Thorne, στο βιβλίο του Black Holes and Time Warps (Μελανές οπές και στρεβλώσεις του χρόνου), αναφέρει ότι στην εν λόγω εργασία σας παρατηρήσατε πως οι εξισώσεις που περιγράφουν αρ-

Ο Δημήτρης Χριστοδούλου γεννήθηκε πριν από 42 χρόνια στην Αθήνα. Όταν ήταν μαθητής του πρώτου εξαμήνου της Β' λυκείου έφυγε για τις ΗΠΑ, όπου στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον πήρε, το 1970, το μάστερ στη φυσική, χάρη στην εργασία του "Reversible and irreversible transformations in black hole physics". Το 1971, σε ηλικία μόλις 19 ετών, απέκτησε το διδακτορικό του στον ίδιο κλάδο, με τη μελέτη του "Investigations in gravitational collapse and the physics of black holes", που την εκπόνησε υπό την επίβλεψη του καθηγητή John Archibald Wheeler. Με την πρώτη από τις προαναφερθείσες δημοσιεύσεις του άνοιξε κατευθύνσεις σκέψης, που καρποφόρησαν με το θεώρημα εμβαδού του Stephen Hawking για τις μελανές οπές.

Στη συνέχεια έγινε υπότροφος ερευνητής στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Καλιφόρνιας (CalTec), καθηγητής στο Πανεπιστήμιο των Αθηνών, επισκέπτης ερευνητής στο CERN της Γενεύης και στο Διεθνές Κέντρο Θεωρητικής Φυσικής στην Τεργέστη, υπότροφος Humboldt στο Ινστιτούτο Max Planck στο Μόναχο, ενώ το 1982 έγινε έκτακτο μέλος του ονομαστού Μαθηματικού Ινστιτούτου Courant στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης. Στο Πανεπιστήμιο του Σιρακίουσ δίδαξε ως επίκουρος καθηγητής από το 1983 ως το 1985 και ως τακτικός από το 1985 ως το 1987. Το 1988 επέστρεψε

στο Ινστιτούτο Courant ως τακτικός καθηγητής. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 έως σήμερα παράγγαγε πολλά και σημαντικώ-



τητα αποτελέσματα πάνω σε αυστηρώς μαθηματικά προβλήματα της γενικής σχετικότητας. Καρπός της συνεργασίας του με τον Sergiu Kleinerman στο πρόβλημα της ύπαρξης καθολικών λύσεων των εξισώσεων Αϊνστάιν με ασθενή αρχικά δεδομένα υπήρξε το βιβλίο *The Global Non-Linear Stability of the Minkowski Space* (Η καθολική μη γραμμική ευστάθεια του χώρου Minkowski), που θεωρήθηκε ως μία από τις σημαντικότερες εργασίες των δύο τελευταίων δεκαετιών στο χώρο της μαθηματικής φυσικής.

Τον Σεπτέμβριο του 1992 εξελέγη τακτικός καθηγητής στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου του Πρίνστον. Τον Ιούνιο του 1993 τιμήθηκε με το περίφημο βραβείο MacArthur, που απονέμεται κάθε χρόνο σε προσωπικότητες των γραμμάτων, των επιστημών και των τεχνών οι οποίες ακολούθησαν «ιδιαιτερές» και μάλλον μοναχικές πορείες και δεν εντάχθηκαν σε οργανωμένα και συνήθως αδρά χρηματοδοτούμενα ερευνητικά προγράμματα. Πριν του απονεμηθεί αυτό το βραβείο, είχε τιμηθεί με το «μετάλλιο Otto Hahn στη μαθηματική φυσική» (1980), και το «βραβείο Βασίλη Ξανθόπουλου για την αστροφυσική και τη γενική σχετικότητα» (1991).

γές μεταβολές στις ιδιότητες των μελανών οπών μοιάζουν με τις εξισώσεις της θερμοδυναμικής, πλην όμως, παρότι η ομοιότητα είναι αξιοσημείωτη, δεν υπήρχε τότε κανένας λόγος ώστε να σκεφτείτε ότι πρόκειται για κάτι περισσότερο από σύμπτωση. Πώς οδηγηθήκατε σε τόσο σημαντικά συμπεράσματα στην πρώτη κιόλας επιστημονική σας εργασία και πώς την αξιολογείτε τόσα χρόνια μετά;

Απ.: Είναι δύσκολο να απαντήσω, διότι το παρελθόν το βλέπει κανείς μέσα από το φίλτρο του παρόντος και των τωρινών του γνώσεων. Πρέπει όμως να τονίσω ότι πιστεύω στην «ενότητα» που πρέπει να έχει η φυσική. Το γεγονός ότι στη φυσική των μελανών οπών εμφανίζονται και πάλι οι έννοιες της θερμοδυναμικής, αποδεικνύει πως η εν λόγω «ενότητα» υπάρχει· άλλωστε, η ίδια η έννοια της μελανής οπής ενέχει το στοιχείο της μη αντιστρεπτότητας —γίνεται λόγος για μελανή και όχι, λόγου χάρη, για λευκή οπή. Υπάρχει λοιπόν η μη αντιστρεπτότητα στην έννοια της μελανής οπής, όπως υπάρχει και στην έννοια της εντροπίας. Το εντυπωσιακό όμως είναι ότι εμφανίζονται θερμοδυναμικές έννοιες και σ' αυτό τον τομέα της φυσικής, ο οποίος, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται άσχετος με το αρχικό πεδίο εφαρμογής της θερμοδυναμικής, που ήταν η φυσική των ρευστών. Τα όσα είπατε για τη σχέση της δικής μου εργασίας με την εργασία του Bekenstein είναι πολύ σωστά. Είχα φτιάσει στα πρόθυρα, ας πούμε, της αναγνώρισης της «σχέσης» που βρήκε ο Bekenstein· μάλιστα, χρησιμοποιώντας τους όρους των «αντιστρεπτών» και «μη αντιστρεπτών» μετασχηματισμών στη φυσική των μελανών οπών, ήθελα να επιστήσω την προσοχή του κοινού στην υπάρχουσα αναλογία με έννοιες της θερμοδυναμικής. Φυσικά, η σκέψη ότι το εμβαδόν του ορίζοντα της μελανής οπής είναι μέτρο της εντροπίας της ανήκει οπωσδήποτε στον Bekenstein. Όπως γνωρίζετε, ο Hawking αρνήθηκε αρχικά να δεχτεί την ορθότητα της εργασίας του Bekenstein, στη συνέχεια όμως πείστηκε γι' αυτήν. Ο αρχικός δισταγμός του οφειλόταν στο ότι σκέφτηκε πως, αν οι μελανές οπές είχαν εντροπία, θα είχαν και θερμοκρασία και επομένως θα έπρεπε να εκπέμπουν ακτινοβολία. Αλλά από τον ίδιο τους τον ορισμό υποτίθεται ότι οι μελανές οπές δεν εκπέμπουν τίποτε. Τελικά, ο ίδιος ο Hawking απέδειξε ότι η μελανή οπή όντως ακτινοβολεί, και ότι η ακτινοβολία αυτή έχει το φάσμα θερμού μέλανος σώματος. Επομένως, όσον αφορά τη φυσική των μελανών οπών, για να είμαστε ιστορικά ακριβείς, οφείλουμε να ομιλούμε για «θερμοκρασία Bekenstein» και για «ακτινοβολία Hawking».

Ερ.: Παρά το εντυπωσιακό ξεκίνημα που κάνατε ως θεωρητικός φυσικός, από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 στρέψατε το ενδιαφέρον σας στα αυστηρώς μαθηματικά προβλήματα της γενικής σχετικότητας. Όταν στις αρχές του 1980

διατυπώσατε τα «θεωρήματα ώθησης», εκπλήξατε και τους πλέον εξέχοντες μαθηματικούς σχετιστικές. Στη συνέχεια παραγάγατε και άλλα μαθηματικά αποτελέσματα, τα οποία γνωρίζω ότι θεωρείτε πολύ σημαντικότερα της προαναφερθείσας εργασίας σας. Κατά τον νομπελίστα καθηγητή S. Chandrasekhar, πετύχατε διότι μπορέσατε να συνδυάσετε τη γεωμετρική διαίσθηση που έχετε αποκτήσει από τη γενική σχετικότητα με βαθιά αποτελέσματα της ανάλυσης. Θα ήθελα να σας ρωτήσω ποιοι λόγοι σας οδήγησαν σ' αυτή τη



στροφή σας στα μαθηματικά, όταν μάλιστα δεν σας λείπει η διαίσθηση του φυσικού, όπως φάνηκε από την πρώτη κιόλας εργασία σας;

Απ.: Πρέπει να πω εδώ ότι οφείλω κάποια πράγματα στην ερευνητική ομάδα του Ινστιτούτου Max Planck του Μονάχου, της οποίας ήμουν μέλος από το 1975 έως το 1980. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο J. Ehlers, μαθητής του Jordan. Ο Ehlers, καιίτοι φυσικός, έτρεφε μεγάλη εκτίμηση για τα μαθηματικά και έστρεψε την προσοχή της ομάδας στο να ερευνηθεί το πρόβλημα της βαρυτικής ακτινοβολίας του διπλού αστέρα, δηλαδή το περίφημο «πρόβλημα των δύο σωμάτων», μέσω της μελέτης των εξισώσεων του Αϊνστάιν. Ένα τέτοιο σύστημα δι-

πλού αστέρα νετρονίων, το μόνο γνωστό τότε (διότι σήμερα ξέρουμε πως υπάρχουν κι άλλα τέτοια συστήματα), παρακολούθησε ο Joseph Taylor του Πρίνστον επί είκοσι χρόνια περίπου, και κατόρθωσε να βρει πόση ενέργεια χάνει το σύστημα σε ακτινοβολία βαρύτητας. Αυτό το πέτυχε υπολογίζοντας την αλλαγή της περιόδου περιφοράς του συστήματος, δεδομένου ότι αυτή μικραίνει επειδή το σύστημα χάνει ενέργεια σε κύματα βαρύτητας. Για τη συγκεκριμένη εργασία του ο Taylor τιμήθηκε το 1993 με το βραβείο Νόμπελ στη Φυσική. Το πρόβλημα δεν βρήκε την πλήρη λύση του με την επιτυχία του Taylor, αλλά παρουσιάζει και περαιτέρω ενδιαφέρον. Ενώ στο σύστημα του Taylor τα δύο άστρα δεν είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο, σε άλλους γαλαξίες υπάρχουν συστήματα στα οποία τα αντίστοιχα άστρα βρίσκονται πολύ κοντύτερα μεταξύ τους, και επίκειται συγχώνευσή τους! Αυτό είναι σημαντικό, αν αναλογιστεί κανείς ότι μια τέτοια συγχώνευση γίνεται σε κάθε γαλαξία περίπου κάθε 10.000 χρόνια, και διαρκεί κλάσματα του δευτερολέπτου. Για να γίνει η συγχώνευση από τη στιγμή που δημιουργείται ένα τέτοιο σύστημα περνούν περίπου 100.000.000 χρόνια. Επομένως, για να έχουμε την πιθανότητα να βλέπουμε ένα τέτοιο φαινόμενο μία φορά το χρόνο, πρέπει να παρατηρούμε ένα τεράστιο μέρος του σύμπαντος, τόσο μεγάλο ώστε να περιέχει περίπου 10.000 γαλαξίες. Τα βαρυτικά κύματα που προκύπτουν από την εν λόγω συγχώνευση είναι πολύ ισχυρά και έχουμε τη δυνατότητα να τα εντοπίσουμε μέσω πειραμάτων, όπως είναι

το αμερικανικό LIGO και το ευρωπαϊκό VIRGO. Επανερχομαι στο ερώτημά σας για τα μαθηματικά, για να τονίσω ότι η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος της συγχώνευσης των δύο άστρων παραμένει μακριά από τις δυνατότητές μας και ανήκει στο μέλλον. Το γιατί θα το εξηγήσω αμέσως. Η συγχώνευση δύο μελανών οπών, στην οποία παράγονται και τα ισχυρότερα δυνατά βαρυτικά κύματα, αποτελεί μια απλούστερη περίπτωση του προβλήματος, η οποία όμως παραμένει αρκετά δύσκολη. Πιο σωστά, πρόκειται για το αντίστοιχο στη γενική θεωρία της σχετικότητας του «προβλήματος των δύο σωμάτων» της νευτώνειας μηχανικής, και μάλιστα στην πιο «καθαρή» του μορφή, δεδομένου ότι η μελανή οπή είναι καθορισμένη, εφόσον κάποιος δώσει τη μάζα της και την ιδιοστροφομή της. Υπάρχουν βέβαια και δύο πρόσθετες παράμετροι, η κινητική ενέργεια και η τροχιακή στροφομή της αρχικής προσέγγισης, όμως, όπως βλέπετε, πρόκειται για πρόβλημα με πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η φυσική θέτει μερικές φορές κάποια προβλήματα που τα μαθηματικά ενδέχεται να τα λύσουν και έπειτα από χίλια χρόνια. Για να φτάσουμε όμως ως εκεί, πρέπει στο ενδιάμεσο διάστημα να λύσουμε κάποια απλούστερα προβλήματα, όπως σωστά τονίζει ο Ehlers. Επειδή δεν ήταν ο ίδιος μαθηματικός, με έφερε σε επαφή με την Yvonne Choquet Bruhat, η οποία ζούσε στο Παρίσι, και της οποίας οι εργασίες είχαν οδηγήσει σε μια «τοπική» λύση του «προβλήματος της ώθησης»: η δική μου εργασία στο ίδιο πρόβλημα αποτέλεσε «επέκταση» της εν λόγω λύσης. Εκείνη την εποχή κατάλαβα ότι εκείνο που προείχε σε σημασία ήταν το να μελετήσουμε την ευστάθεια Minkowski και συγκεκριμένα πρώτα να αποδείξουμε ότι αρχικά δεδομένα που ήταν κοντά στη λύση Minkowski στον επίπεδο χωρόχρονο της ειδικής σχετικότητας οδηγούν σε καθολικές λύσεις των εξισώσεων του Αϊνστάιν και κατόπιν να μελετήσουμε την ασυμπτωματική συμπεριφορά αυτών των λύσεων. Έτσι, ο Ehlers με βοήθησε να βρω ένα πρόβλημα φυσικής, το οποίο παρουσιάζει μεγάλο μαθηματικό ενδιαφέρον και επιπλέον έχει σχέση με το πείραμα (παρατήρηση) —δεδομένου ότι το σπουδαιότερο σημείο «επαφής» της γενικής σχετικότητας με το πείραμα είναι μέχρι σήμερα η μελέτη της κίνησης των διπλών αστέρων. Το μαθηματικό μέρος του προβλήματος αφορά στην ύπαρξη καθολικών λύσεων των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, και ιδίως των υπερβολικών, που είναι πιο γνωστές από την περίπτωση των ελλειπτικών.

Ερ.: Μέχρι τώρα γνωρίζαμε ότι τα μαθηματικά προσφέρουν εννοιολογικά εργαλεία στη φυσική. Σήμερα, όμως, μπορούμε να κάνουμε λόγο και για φυσική μαθηματική επιστήμη: ως σκεφτούμε τις εργασίες των Atiyah και Donaldson, στις οποίες οι εν λόγω μαθηματικοί χρησιμοποίησαν τις γνωστές από τη φυσική «θεωρίες βαθμίδας» για να επιλύσουν δύσκολα τοπολογικά προβλήματα, τις μελέτες του Edward Witten στη «μαθηματική θεωρία των χορδών», την εργασία του Vaughan F. R. Jones, με την οποία επιτεύχθηκε η ένωση δύο τελείως διαφορετικών κλάδων, της «θεωρίας των κόμβων» και της στατιστικής μηχανικής, κ.λπ. Πώς βλέπετε εσείς να διαμορφώνεται η σχέση των επιστημών της φυσικής και των μαθηματικών σήμερα;

Απ.: Μ' έχει απασχολήσει πολλές φορές το θέμα των σχέσεων της φυσικής και των μαθηματικών, διότι οι εργασίες μου βρίσκονται συνήθως στο μεταίχμιο των δύο κλάδων. Σε ορισμένες περιόδους σκέφτομαι πάνω σε «καθαρά», «αφηρημένα» μαθηματικά, ενώ σε άλλες ασχολούμαι μόνο με τη φυσική. Πρέπει να πω ότι τα μαθηματικά διαφέρουν αρκετά από τη φυσική, κατά πρώτον επειδή υπάρχει σ' αυτά μια, ας πούμε, καλλιτεχνική διάσταση. Διαφέρουν επίσης διότι υπάρχουν και μαθηματικά τα οποία δεν φαίνεται να έχουν σχέση με τη φυσική, όπως είναι π.χ. το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, που ανήκει στη Θεωρία αριθμών (ενδέχεται όμως ακόμη κι αυτή η διαπίστωση ν' αποδειχθεί λανθασμένη στο μέλλον!). Γι' αυτό το τμήμα των μαθηματικών δεν νομιμοποιούμαι να μιλήσω, αφού δεν είμαι ειδικός, εκτιμώ όμως ιδιαίτερα τη σημασία του για τη συνολική πρόοδο της επιστήμης και του πολιτισμού μας. Όσον αφορά το άλλο τμήμα, με το οποίο και έχω ασχοληθεί, δηλαδή αυτό που έχει σχέση με τη φυσική, πρέπει να πω πως είναι καταπληκτικό το ότι μας επιτρέπει μια τέτοια απόλυτη σύνδεση των δύο επιστημών. Τα μαθηματικά αποτελούν ένα ορυχείο από το οποίο ο θεωρητικός φυσικός θα αντλήσει έννοιες και πρότυπα, όπως συνέβη π.χ. με τον Αϊνστάιν, ο οποίος χρησιμοποίησε τη ρημάνεια γεωμετρία στη θεμελίωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Εκείνο που τονίζεται λιγότερο συχνά είναι ότι αφού οι θεωρητικοί φυσικοί διατυπώσουν τους νόμους, «επιστρέφουν» και πάλι στα μαθηματικά για να «συνδέσουν» αυτούς τους νόμους με το πείραμα. Πώς όμως θα καταστεί δυνατή η «σύγκριση» των νόμων με αποτελέσματα του πειράματος; Είναι σαφές ότι μόνον οι λύσεις των εξισώσεων στις οποίες διατυπώνονται οι νόμοι συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα, και όχι οι ίδιες οι εξισώσεις. Κατά την επίλυση των εξισώσεων, τα μαθηματικά «επανερχονται» έχοντας έναν νέο ρόλο, εντελώς διαφορετικό. Στην περίπτωση της εργασίας του Νεύτωνα, για παράδειγμα, μιλάμε για επιστημονική επανάσταση διότι έχουμε (1) διατύπωση των νόμων (μαθηματική), (2) επίλυση των εξισώσεων των εν λόγω νόμων (επίσης μαθηματική) και (3) πειραματική ή παρατηρησιακή επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

Τα μαθηματικά τα οποία αρκούν για τη διατύπωση των νόμων δεν αρκούν πάντοτε και για την επίλυση των σχετικών εξισώσεων. Η εργασία, λοιπόν, που γίνεται στο δεύτερο στάδιο αποτελεί συχνά αφετηρία επινόησης καινούργιων μαθηματικών, και έτσι προάγεται η έρευνα. Η επίλυση λόγου χάρη του «προβλήματος των τριών σωμάτων», που τέθηκε από τον Νεύτωνα, οδήγησε στις χαμιλτωνιανές μεθόδους, οι οποίες με τη σειρά τους εμφάνισαν μια καινούργια δομή που δεν ήταν προφανής από την αρχή. Τελικά, η χαμιλτωνιανή μηχανική αποτέλεσε την «αφετηρία» για τη θεμελίωση της κβαντικής θεωρίας.

Σωστά επίσης αναφερθήκατε και στην αντίστροφη πορεία, δηλαδή τη χρήση θεωριών της φυσικής, όπως είναι οι «θεωρίες βαθμίδας», για την επίλυση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων. Αλλωστε και ο Αρχιμήδης ακολούθησε και τις δύο πορείες. Δουλεύοντας αντίστροφα με βάση το κέντρο βάρος των σωμάτων είχε υπολογίσει τον όγκο της σφαίρας και την επιφάνειά της παραβολής. Ένας απ' αυτούς που τον «μιμείται» σήμερα, και τον οποίο εκτιμώ ιδιαί-

τερα, είναι ο Donaldson, τον οποίο μνημονεύσατε. Οφείλω βεβαίως να τονίσω πως αυτό μπορεί να γίνει ευκολότερα σήμερα, οπότε η φυσική έχει προχωρήσει αρκετά, ενώ δεν ήταν δυνατό στο παρελθόν, οπότε τα μαθηματικά εξελίσσονταν ταχύτερα και προηγούνταν της φυσικής.

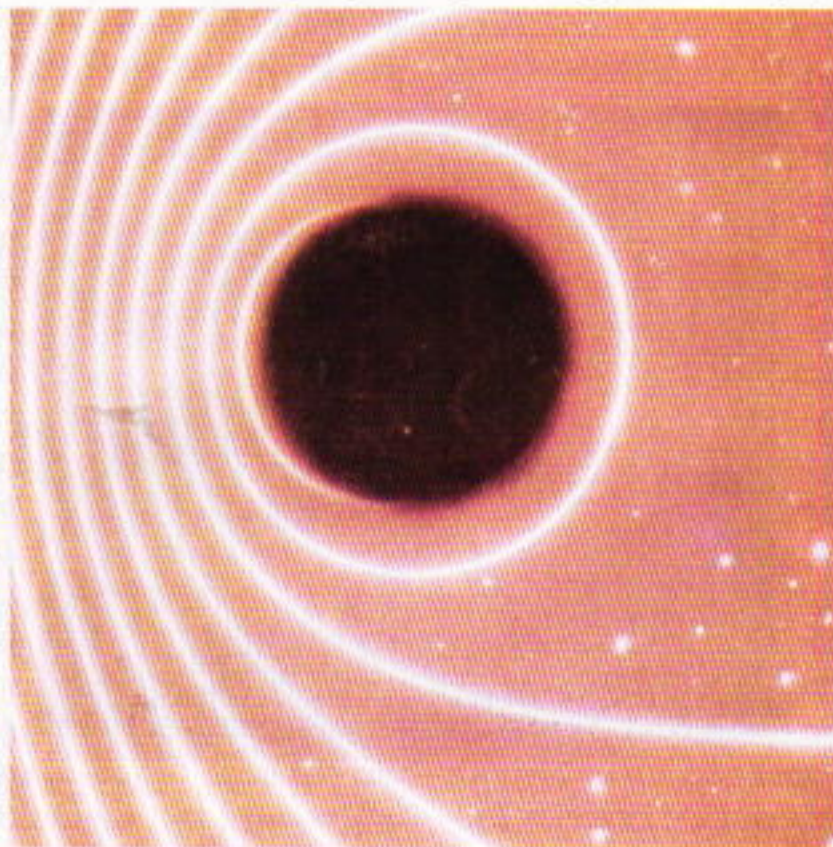
Ερ.: Σήμερα πολλοί από τους καλύτερους μαθηματικούς φυσικούς ασχολούνται με την μαθηματική θεμελίωση της «θεωρίας των χορδών». Εσείς, χωρίς να θεωρείται, φυσικά, υποχρεωτική μια τέτοια επιλογή, πώς και δεν ασχοληθήκατε με τις «χορδές»;

Απ.: Νομίζω απλώς ότι το θέμα αυτό δεν είναι φλέγον.

Ασχολούνται δηλαδή μ' ένα πρόβλημα το οποίο, κατά τη γνώμη μου, δεν είναι το πρόβλημα της σήμερα. Αν εξετάσουμε το πώς άρχισε η επιστήμη, βλέπουμε ότι άρχισε με την ενασχόληση με συγκεκριμένα προβλήματα, στα οποία θα έπρεπε να δοθεί γρήγορα κάποια λύση. Λόγου χάρη, ο Αρχιμήδης ξεκίνησε τις μελέτες του από τη στατική και την υδροστατική, ενώ κατά το Μεσαίωνα, ο Γαλιλαίος ασχολήθηκε με κάποια απλά προβλήματα της κίνησης των σωμάτων. Σήμερα πολλοί προβάλλουν το επιχείρημα ότι υπάρχουν προβλήματα, όπως όσα σχετίζονται με την ανθρωπινή νόηση και τη συνείδηση, τα οποία είναι ασυγκρίτως σπουδαιότερα από τις «ανόητες» απορίες για το πώς πέφτουν τα βλήματα ή πώς ισορροπούν τα σώματα σ' ένα υγρό. Ουδείς αντιλέγει σ' αυτή την αξιολόγηση των ανοιχτών ερευνητικών προβλημάτων. Για μένα όμως, όπως και για αρκετούς άλλους, ένα από τα αποφασιστικά κριτήρια για την επιλογή του αντικειμένου της έρευνας είναι οι υπάρχουσες πιθανότητες επιτυχίας.

Η επιστήμη πρέπει να προχωρεί χωρίς κενά. Πρέπει να προχωρεί εξασφαλίζοντας σταθερά υπόβαθρα. Το πρόβλημα π.χ. της κίνησης των δύο σωμάτων είναι πολύ απλό, αλλά είναι ένα πρόβλημα στο οποίο μπορεί να δοθεί πλήρης απάντηση: την έδωσε ο Νεύτων, όπως πολύ παλαιότερα έπραξε και ο Αρχιμήδης με το πρόβλημα των στερεών σωμάτων μέσα στα υγρά. Επιστήμη κάνουμε όταν μπορούμε να δώσουμε την απάντηση και την εξήγηση σε κάθε λεπτομέρεια, τόσο του προβλήματος όσο και της λύσης του. Το πρόβλημα της κβάντωσης της βαρύτητας δεν παρουσιάζει για μένα ενδιαφέρον, και τώρα που έχω μεγαλύτερη πείρα και μετωμένη σκέψη, θα θεωρούσα τυχόν ενασχόλησή μου μ' αυτό χάσιμο χρόνου! Αλλωστε δεν μπορούμε να έχουμε έλεγχο, μέσω πειράματος, οποιασδήποτε σχευικής θεωρίας, αφού αυτή θα αφορά «συνθήκες» που επικράτησαν κατά την αρχή του σύμπαντος. Υπάρχουν άλλα προβλήματα τα οποία είναι ασυγκρίτως σημαντικότερα και πιο επείγοντα για μας σήμερα, όπως το πρόβλημα της δομής των νουκλεονίων ή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Για το τελευταίο πρόβλη-

μα έχει προταθεί βέβαια μια θεωρία, η θεωρία της κβαντικής χρωμοδυναμικής, όμως από κει και πέρα δεν έγινε καμιά μαθηματική επεξεργασία ώστε να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων, οι οποίες θα μας αποδείξουν αν η θεωρία είναι όντως σωστή. Εκεί χρειάζεται να επιλύσουμε το πρόβλημα του «περιορισμού» των κουάρκ, τα οποία δεν υπάρχουν ελεύθερα, αλλά βρίσκονται πάντοτε σε ουδέτερους σχηματισμούς, και κατόπιν να εξηγήσουμε γιατί οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι βραχέος βεληνεκούς. Τούτη τη στιγμή βρισκόμαστε πολύ μακριά από τη λύση αυτού του προβλήματος. Υφίστανται όμως και πιο απλά, αλλά εξίσου σημα-



Αναπαράσταση της καμπύλωσης ακτίνων φωτός από το βαρυτικό πεδίο μιας μελανής οπής. (Scientific American, Μάρτιος 1993.)

νικά, προβλήματα, όπως το πρόβλημα του γιατί υπάρχουν οι τρεις συνηθισμένες καταστάσεις της ύλης, η στερεά, η υγρή και η αέρια. Οι νόμοι του προβλήματος αυτού είναι γνωστοί, είναι οι νόμοι της κβαντομηχανικής. Αν προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα στο πλαίσιο της κβαντικής στατιστικής μηχανικής, θα διαπιστώσουμε ότι και αυτή ακόμη η διατύπωσή του είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Αν επιχειρήσουμε το ίδιο στο πλαίσιο της κλασικής στατιστικής μηχανικής οδηγούμαστε σε μια απλούστευση του προβλήματος: βρισκόμαστε ενώπιον ενός ολοκληρώματος, του οποίου όμως ουδείς κατόρθωσε να επιλύσει έστω και την απλούστερη υποπερίπτωση. Αυτή η πιο απλή

υποπερίπτωση αποτελεί το πρόβλημα της «δομής πυκνότητας διάταξης των σφαιρών», που το πρωτοδιατύπωσε ο Kerner και παρέμεινε άλυτο επί τετρακόσια χρόνια. Ένας μαθηματικός του Μπέρκλεϋ, ο Wu Yi Hsiang, ανακοίνωσε ότι το έλυσε, και έγινε πανζουρλισμός. Δυστυχώς, η απόδειξή του ήταν εντελώς λανθασμένη.

Ερ.: Ποιοι είναι οι κύριοι στόχοι του βιβλίου που γράψατε από κοινού με τον Sergiu Kleinerman, και το οποίο θεωρήθηκε σταθμός στην επιστημονική σας πορεία;

Απ.: Το ερέθισμα για ν' ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα δόθηκε, όπως προανέφερα, από τον Ehlers. Ήταν ένα πρόβλημα που μου ετέθη γύρω στο 1979, δηλαδή δέκα χρόνια προτού λυθεί, και πάνω στο οποίο άρχισα να εργάζομαι σοβαρά το 1984. Επομένως πρόκειται για προϊόν εργασίας πέντε ετών (1984-1989), κατά τα οποία ασχολιόμουν συνεχώς και αποκλειστικά με αυτό το πρόβλημα. Το βιβλίο είναι αρκετά ογκώδες, αριθμεί πάνω από 500 σελίδες, οι βασικές ιδέες του όμως είναι απλές. Δύο είναι οι κύριες ιδέες: η πρώτη, αφορά τη σχέση της συμμετρίας με τους νόμους διατήρησης. Στην περίπτωση της γενικής σχετικότητας αυτή η ιδέα παίρνει νέα μορφή. Το πρόβλημα ήταν πώς θα εφαρμόσουμε εδώ αυτή την ιδέα, δεδομένου ότι σ' έναν γενικό χωρόχρονο δεν υπάρχουν συμμετρίες. Εφόσον δεν υπάρχουν συμμετρίες, δεν μπορούμε να «κατασκευάσουμε» ποσότητες που διατηρούνται. Μπορούμε όμως να «κατασκευά-

σουμε» ποσότητες, που η αύξησή τους θα βρίσκεται υπό έλεγχο. Η δεύτερη ιδέα αφορά τον τρόπο «κατασκευής» όχι συμμετριών, αλλά —για να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικούς όρους— μιας ομάδας που θα δρα με ασυμπτωτικές ισομετρίες. Σε μια τέτοια αρκετά μεγάλη ομάδα, οι ποσότητες που αντιστοιχούν σ' αυτήν, να μην δεν διατηρούνται, πλην όμως η αύξησή τους τελεί υπό έλεγχο, διότι ο ρυθμός της φράσσεται από την ίδια την ποσότητα της οποίας μετρούμε την αύξηση. Στη γεωμετρική κατασκευή των ασυμπτωτικών ισομετριών χρησιμοποιείται ένα «καθολικό αναλλοίωτο» (αναλλοίωτο του χωρόχρονου στο άπειρο), το οποίο είχα «βρει» το 1989.

Ερ.: Το 1991 δημοσιεύσατε στο μεγάλο κύρου επιστημονικό περιοδικό *Physical Review Letters* τη δυσκολότατη μαθηματική εργασία σας "Nonlinear Nature of Gravitation and Gravitational Wave Experiments" (Η μη γραμμική φύση της βαρύτητας και πειράματα βαρυτικών κυμάτων). Η εργασία αυτή μάς αποκάλυψε μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα ιδιότητα των βαρυτικών κυμάτων που διευκολύνει την προσπάθειά μας να τα ανιχνεύσουμε. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Thorne ισχυρίζεται πως η εργασία σας, πρώτον, μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη φύση της βαρύτητας, και δεύτερον, έχει συγκεκριμένα πρακτικά αποτελέσματα. Θα μπορούσατε να μας εξηγήσετε τι ακριβώς εννοεί ο Thorne;

Απ.: Η εργασία μου φαίνεται δύσκολη επειδή είναι πυκνογραμμένη, και τούτο διότι το εν λόγω περιοδικό δεν παραχωρεί περισσότερες από τέσσερις σελίδες για κάθε εργασία· επιπλέον, βασίζεται στο βιβλίο που γράψαμε με τον Kleinerman και επομένως συμπυκνώνει θέματα που η ανάπτυξή τους απαιτεί πολύ περισσότερες σελίδες. Το θέμα της είναι ότι η σχετικιστική βαρύτητα έχει μια μη γραμμική υπόσταση, η οποία εμφανίζεται ακόμη και σε άπειρες αποστάσεις από την πηγή των κυμάτων, παρότι το πλάτος των κυμάτων φθίνει αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση από αυτή. Τούτο συμβαίνει επειδή υπάρχει ένα μη γραμμικό μέρος του βαρυτικού κύματος, το οποίο φθίνει ακριβώς με τον ίδιο νόμο, και άρα ο λόγος τού μη γραμμικού προς το γραμμικό είναι ανεξάρτητος της αποστάσεως από την πηγή.

Βεβαίως γνωρίζαμε από την αρχή ότι η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μη γραμμική θεωρία για τη βαρύτητα, και αυτό οφείλεται στο ότι ο τανυστής καμπυλότητας του Riemann αποτελεί μια μη γραμμική έκφραση της μετρικής. Εγώ λοιπόν απέδειξα ότι, αντισθέτως, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, διότι ενώ οι εξισώσεις απλοποιούνται και δεν έχουν όλη τη μη γραμμικότητα που έχουν όταν βρισκόμαστε κοντά στην πηγή, δεν απλοποιούνται σε τέτοιο βαθμό ώστε να γίνουν απολύτως γραμμικές! Δηλαδή παραμένει μια μη γραμμικότητα ακόμη και στο άπειρο. Σημαντικό είναι επίσης το γεγονός ότι η ύπαρξη αυτής της μη γραμμικότητας της βαρύτητας έχει την εξής ιδιαίτερη συνέπεια: Είναι γνω-

στό ότι αν πάνω στην επιφάνεια της Γης έχουμε τρία εκκρεμή, οι σφαίρες τους κινούνται ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο, αφού στο επίπεδο αυτό δεν επενεργούν δυνάμεις· αν το πείραμα γίνει στο Διάστημα, τότε θα κινηθούν ελεύθερα και προς την τρίτη, την κατακόρυφη διεύθυνση. Μέχρι τώρα πίστευαν πως, όταν «έρθει» ένα κύμα βαρύτητας, οι δύο από τις τρεις σφαίρες—παρατηρούμε πάντοτε τις σχετικές κινήσεις των δύο ως προς την τρίτη— θα εκτελέσουν μια κίνηση, η στιγμιαία επιτάχυνση στην οποία έχει να κάνει με το μέγεθος της καμπυλότητας του χωρόχρονου στην περιοχή όπου βρίσκονται οι σφαίρες, αλλά ότι, μόλις «περάσει» το κύμα, ή, πιο σωστά, η κάθε ταλάντωση, οι σφαίρες θα επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις. Έτσι λέει η



γραμμική θεωρία. Αυτό όμως καθιστά εξαιρετικά δύσκολο το να μετρήσει κανείς τη μετατόπιση αυτή, η οποία είναι πολύ μικρή, επειδή οι πηγές των κυμάτων βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη. Δηλαδή, δεν είναι μικρή επειδή είναι από τη φύση της μικρή· αν η πηγή ήταν εδώ, κοντά μας, η μετατόπιση των σφαιρών θα ήταν μεγάλη.

Όπως τόνισα και πριν, πηγή κυμάτων είναι η συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων ή δύο μελανών οπών, φαινόμενο το οποίο συμβαίνει μία φορά το χρόνο, και μόνο αν εξετάσουμε μια σφαιρική περιοχή του σύμπαντος με κέντρο τη Γη που να έχει ακτίνα 100.000.000 ετών φωτός. Επομένως, όταν αυτά τα κύματα άρχιζαν το ταξίδι τους προς εμάς είχαν μεγάλο πλάτος, αλλά αφού διέσχισαν 100.000.000 έτη φωτός, το πλάτος τους έγινε πάρα πολύ μικρό, δηλαδή της τάξης του 10^{-21} . Η μετατόπιση των σφαιρών των εκκρεμών όχι μόνο είναι πολύ μικρή, αλλά επιπλέον διαρκεί μόνο όσο διαρκεί η περίοδος του κύματος, η οποία είναι η μισή από την περίοδο περιφοράς των αστέρων, με άλλα λόγια, περίπου μισό χιλιοστό του δευτερολέπτου. Άρα, στο μισό χιλιοστό του δευτερολέπτου πρέπει να μετρηθεί μια απόσταση με ακρίβεια 10^{-21} . Φαίνεται σχεδόν αδύνατον. Όμως η μη γραμμικότητα της βαρύτητας, η οποία υπάρχει και σε άπειρες αποστάσεις, δίνει το εξής αποτέλεσμα: αφού περάσει το κύμα, οι σφαίρες επανέρχονται μεν σε ηρεμία σε σχέση με την κεντρική σφαίρα, αλλά όχι στις αρχικές τους θέσεις. Υπάρχει δηλαδή μια μόνιμη μετατόπιση, μια μετατόπιση η οποία παραμένει και είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με τη μέγιστη στιγμιαία μετατόπιση των σφαιρών. Αυτή η διαπίστωση έχει τις εξής δύο συνέπειες: Πρώτον, ίσως προσφέρει νέες δυνατότητες για την ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων στην περίπτωση που μπορούμε να έχουμε ένα σύστημα μαζών οι οποίες να παραμένουν ανεπηρέαστες από σεισμικούς θορύβους για αρκετό διάστημα, ώστε να μπορούμε να εκμεταλλευθούμε αυτή τη μόνιμη μετατόπιση. Δεύτερον, από θεωρητική πλευρά είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι ο λόγος της μόνιμης μετατόπισης προς τη μέγιστη στιγμιαία είναι σχεδόν 1, άσχετα με το πόσο σχετικιστικό είναι το σύστημα των διπλών αστέρων ή των πολλαπλών αστέρων που

αποτελούν την πηγή των κυμάτων. Δηλαδή, ακόμη και αν έχουμε ένα σύστημα λευκών νάνων, αντί αστέρων νετρονίων ή μελανών οπών, ισχύει το ίδιο. Το μόνο που διαφέρει είναι ο χρόνος ο οποίος χρειάζεται για να ολοκληρωθεί αυτή η μόνιμη μετατόπιση. Σ' ένα σύστημα δύο αστέρων νετρονίων ο εν λόγω χρόνος είναι ένα πολύ μικρό κλάσμα του δευτερολέπτου, αλλά σ' ένα σύστημα λευκών νάνων είναι χιλιάδες χρόνια. Και σ' αυτή την περίπτωση, από πρακτική άποψη είναι αδύνατο να έχουμε ένα σύστημα μαζών το οποίο θα είναι απομονωμένο από σεισμικές δονήσεις επί δεκάδες χιλιάδες χρόνια. Στη μελέτη αυτού του φαινομένου οδηγήθηκα ως εξής: Είχα βρει το καθολικό αναλλοίωτο για το οποίο σας μίλησα στην προηγούμενη ερώτηση, αλλά δεν γνώριζα τη φυσική του ερμηνεία. Την τελευταία την αντιλήφθηκα όταν, διαβάζοντας τυχαία για το σχεδιαζόμενο πείραμα LIGO, διαπίστωνα ότι οι συντάκτες του άρθρου σκέπτονται στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας.

Ερ.: Το 1993 σας απονεμήθηκε το σπουδαίο βραβείο MacArthur. Αυτό σημαίνει ότι θα σας δοθούν συνολικά 260.000 δολάρια σε διάρκεια πέντε χρόνων, ώστε να συνεχίσετε απερίσπαστος από τα προβλήματα της καθημερινότητας το ερευνητικό σας πρόγραμμα. Θά' θελα λοιπόν να σας ρωτήσω πόσο ελεύθερη είναι σήμερα η έρευνα. Πώς αξιολογούνται και επιλέγονται τα προγράμματα που θα χρηματοδοτηθούν; Πιστεύετε ότι μπορεί σήμερα κάποιος να ακολουθήσει τη δική του ξεχωριστή ερευνητική πορεία, αν δεν διαθέτει, όχι μόνο εξαιρετικό ταλέντο, αλλά και την αναγκαία οικονομική υποστήριξη;

Απ.: Πρέπει να πω ότι διαφέρουν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για την έρευνα, π.χ. στα μαθηματικά ή τη θεωρητική φυσική από τη μια πλευρά, και την πειραματική φυσική ή την παρατηρησιακή αστρονομία από την άλλη. Στη δεύτερη περίπτωση απαιτούνται μεγάλα ποσά, χωρίς τα οποία όλα μένουν στα σχέδια. Για μένα, που είμαι θεωρητικός, το πρόβλημα της χρηματοδότησης είναι ασυγκρίτως μικρότερης σημασίας απ' ό,τι για τους πειραματικούς. Επειδή όμως με ενδιαφέρει η πρόοδος της επιστήμης, και ειδικότερα πιστεύω ότι φυσική χωρίς πειράματα δεν γίνεται, αντιμετωπίζω με αγωνία τη σημερινή διστακτικότητα για τη χρηματοδότηση ορισμένων αξιολογών πειραμάτων. Για παράδειγμα, στο Στάνφορντ γίνεται ένα πείραμα μεγάλης σημασίας. Σκοπός του είναι η ανίχνευση της μαγνητικής υπόστασης του πεδίου βαρύτητας, η οποία εμφανίζεται μόνο στη σχετικότητα αφού η νευτώνεια θεωρία βαρύτητας αντιστοιχεί στην ηλεκτροστατική. Το φαινόμενο του σχετικιστικού πεδίου βαρύτητας που δημιουργείται από την ορμή, και ιδιαίτερα από την ιδιοτροφορμή της ύλης, είναι αντίστοιχο με τη μαγνητοστατική. Αυτό οδηγεί στο περίφημο φαινόμενο της «παράσυρσης των αδρανειακών συστημάτων», όπου έχουμε τη Γη να στρέφεται περί τον άξονά της και να «συμπαρασύρει» τα αδρανειακά συστήματα. Βέβαια αυτά δεν ακολουθούν ακριβώς με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η



γωνιακή ταχύτητα των αδρανειακών συστημάτων είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη της Γης, οπότε έχουμε ένα λόγο των δύο γωνιακών ταχυτήτων: γωνιακή ταχύτητα της «παράσυρσης» των αδρανειακών συστημάτων προς γωνιακή ταχύτητα της Γης. Ο λόγος αυτός είναι πολύ μικρός και έχει να κάνει με τη ροπή αδράνειας της Γης. Πρόκειται για ένα σχετικιστικό φαινόμενο το οποίο είναι κεφαλαιώδους σημασίας, διότι αφορά την αρχή του Mach, δηλαδή το απόλυτο ή μη της περιστροφής σε αντιδιαστολή προς την ισοταχή κίνηση σε ευθεία γραμμή.

Στο Στάνφορντ, λοιπόν, έχουν φτιάξει ένα μηχανήμα που αποτελείται από γυροσκόπια, τα οποία με τη σειρά τους έχουν έναν άξονα περιστροφής. Θα τοποθετήσουν τα γυροσκόπια σ' έναν τεχνητό δορυφόρο, ο οποίος θα τεθεί σε πολική τροχιά. Τότε, η «παράσυρση» των αδρανειακών συστημάτων θα οδηγήσει σε μετατόπιση αυτού του ίδιου του επιπέδου της τροχιάς, το οποίο θα γίνει και αυτό «συρόμενο». Για τεχνικούς λόγους, αυτό δεν μπορεί κάποιος να το δει, μπορεί όμως να παρατηρήσει κάτι άλλο. Ο άξονας περιστροφής του γυροσκοπίου θα υποστεί την μετατόπιση που προανέφερα, δηλαδή η περιστροφή της Γης θα τον «σέρνει» πίσω της, προκαλώντας όμως μια αργή περιστροφή του γύρω από τον δικό της άξονα. Το πείραμα, πάνω στο οποίο διάφοροι επιστήμονες έχουν δουλέψει περισσότερο από 25 χρόνια, είναι έτοιμο, και δεν απομένει παρά να τεθεί ο δορυφόρος σε τροχιά. Επειδή όμως θα κοστίσει περίπου 330.000 δολάρια, και βρισκόμαστε σε μια εποχή αναστολής των χρηματοδοτήσεων πολλών ερευνητικών προγραμμάτων, έστειλα ήδη μια επιστολή στον επικεφαλής της NASA, για να τον πείσω ότι το πείραμα έχει τεράστια σημασία και πρέπει να χρηματοδοτηθεί.

Ερ.: Τα τελευταία δύο χρόνια ασχολείστε με τη μελέτη μαθηματικών προβλημάτων της υδροδυναμικής στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας. Θα θέλατε να μας εξηγήσετε κάπως πιο αναλυτικά περί τίνος πρόκειται;

Απ.: Νομίζω ότι η υδροδυναμική έχει πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα, διότι ενώ οι νόμοι της είναι γνωστοί από αιώνες (λόγου χάρη στην περίπτωση των ιδεωδών ρευστών οι νόμοι είναι γνωστοί από την εποχή του Euler), εντούτοις δεν έχει γίνει μαθηματική επεξεργασία αυτών των προβλημάτων. Βεβαίως, χρειάζεται και η θερμοδυναμική ώστε να συμπληρωθούν οι νόμοι της υδροδυναμικής, αν και οι νόμοι της πρώτης δεν διατυπώθηκαν παρά μόνο στα μέσα του 19ου αιώνα. Υπάρχουν δύο κατηγορίες προβλημάτων. Από τη μια μεριά, εκείνα που έχουν να κάνουν με επιφανείες ασυνέχειας, όπως είναι τα κρουστικά κύματα και το «ελεύθερο» σύνορο ενός υγρού, δηλαδή τα αποκαλούμενα «προβλήματα των ελευθέρων συνόρων». Από την άλλη, υπάρχει το πρόβλημα του στροβιλισμού.

Η πρώτη μου εργασία σ' αυτά τα θέματα αφορά ένα απλο-

Η συνέχεια στη σελ. 60 ⇨

Διασχίζοντας το ηλ

«Τα πειράματα που περιέγραψα —τουλάχιστον αυτή είναι η
το φως, η ακτινοβολούμενη θερμότητα και το διο

ΟΣΟ ΚΑΙ ΑΝ ΑΚΟΥΓΕΤΑΙ ΠΑΡΑ-
δοξο, τα ηλεκτρομαγνητικά
κύματα ήταν γνωστά στην
ανθρωπότητα από τα παλαιό-
τατα χρόνια. Οι άνθρωποι ζεσταίνο-
νταν με θερμικές ακτίνες πολύ πριν
επινοηθεί ο όρος «υπέριυθη ακτινο-
βολία», και μαύριζαν από τον ήλιο
χωρίς να γνωρίζουν τίποτε για την
επίδραση των υπεριωδών ακτίνων
στο δέρμα. Εν τέλει, είχαν όραση! Δεν
έβλεπαν μόνο, αλλά έκαναν και πει-
ράματα θεωρώντας το φως κυματοει-
δή ουσία.

Η υποψία ότι όλες αυτές οι μορ-
φές ακτινοβολίας έχουν κοινό ηλε-
κτρομαγνητικό υπόβαθρο οδήγησε
στην ανάπτυξη μιας επιστημονικής
θεωρίας. Το 1865 ο James Clerk
Maxwell γενίκευσε τις ανακαλύψεις
των σπουδαίων προδρόμων του, και
κυρίως του Michael Faraday. Ο
Maxwell προέβλεψε, ανάμεσα σε άλ-
λα φαινόμενα, την ασύρματη μετά-
δοση των πληροφοριών.

Σήμερα, εκατόν τριάντα χρόνια
από τη δημιουργία της θεωρίας του
Maxwell, τα ηλεκτρομαγνητικά κύ-
ματα κάνουν πολλά περισσότερα από
το να μας μεταφέρουν τα σήματα του
ραδιοφώνου και της τηλεόρασης. Οι
άνθρωποι έμαθαν να παράγουν και
να λαμβάνουν ακτινοβολία σε όλες
τις περιοχές ενός εντυπωσιακά ευ-
ρέος ηλεκτρομαγνητικού φάσματος
—από ραδιοκύματα χαμηλής συχνό-
τητας έως ακτινοβολία γ. Αυτά τα
αόρατα κύματα —μικροκύματα, υπε-
ριώδεις ακτίνες, υπέρυθρες ακτίνες,
ακτίνες X— μας έδωσαν τη δυνατό-
τητα να «ακούσουμε» τις «συνομι-
λίες» μεταξύ ατόμων, μορίων,
άστρων και γαλαξιών οι οποίες μέχρι
πρότινος μας διέφευγαν. Φυσικά σε
τούτο το άρθρο μπορούμε να αναφερ-

θούμε ακροθιγώς σε μικρές μόνο πε-
ριοχές αυτού του τεράστιου ηλε-
κτρομαγνητικού φάσματος.

Προβλήματα

1. Μια ηλεκτρικά φορτισμένη
σφαίρα και ένας μόνιμος μαγνήτης
τοποθετούνται σε κοντινή απόσταση
μεταξύ τους. Υπάρχει ηλεκτρομα-
γνητικό πεδίο στον περιβάλλοντα
χώρο;

2. Γιατί οι κεραιές των αυτοκινή-
των είναι συνήθως κατακόρυφες;

3. Γιατί υπάρχουν οι λεγόμενες
τυφλές ζώνες για τις ραδιοεπικοινωνι-
ες βραχέων κυμάτων;

4. Γιατί οι ραδιοσταθμοί μακρών
και μεσαίων κυμάτων ακούγονται
σε μεγαλύτερες αποστάσεις τη νύχτα
απ' ό,τι την ημέρα;

5. Γιατί η ραδιοεπικοινωνία μ' ένα
υποβρύχιο δεν είναι δυνατή όσο αυτό
βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια
του νερού;

6. Για ποιο λόγο πρωτοχρησιμο-
ποιήθηκε ο ραδιοεντοπισμός στην
αστρονομία;

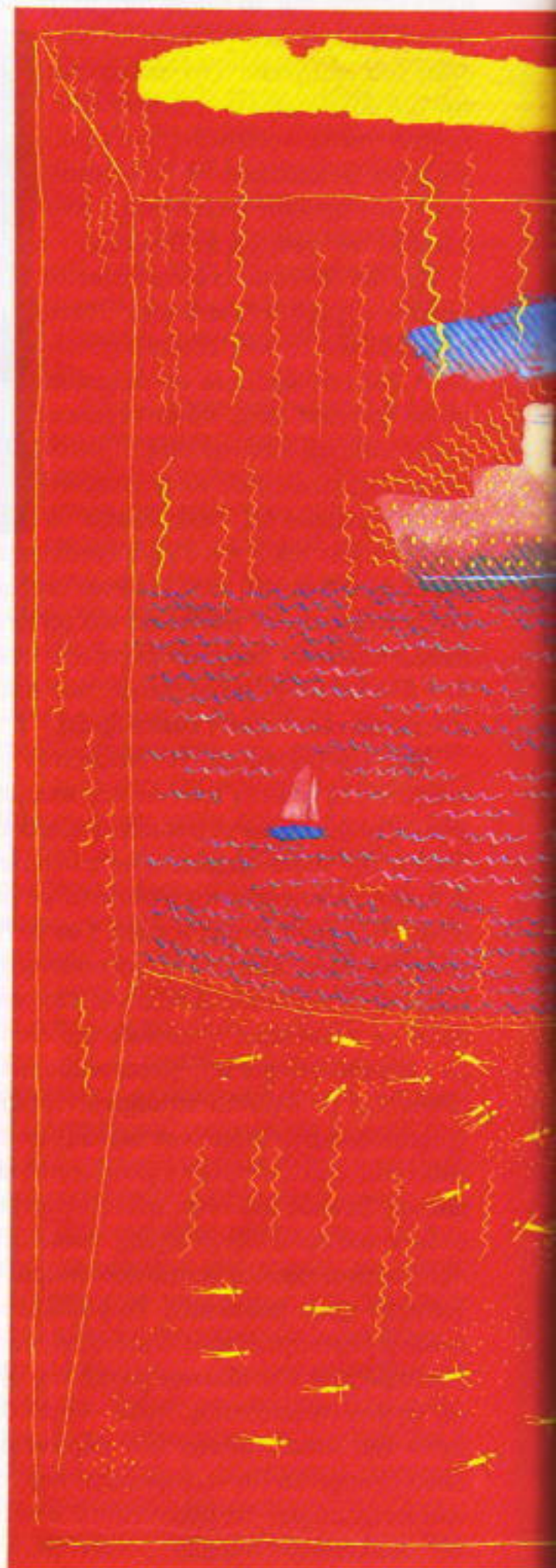
7. Γιατί η σταθερή λήψη των τη-
λεοπτικών σημάτων είναι δυνατή
μόνον όσο υπάρχει οπτική επαφή;

8. Γιατί οι θερμοκρασίες όλων των
σωμάτων σ' ένα μη θερμαινόμενο
κλειστό δωμάτιο φτάνουν στην ίδια
τιμή;

9. Ένα κομμάτι σίδηρο εκπέμπει
ερυθρό φως όταν είναι λευκοπυρω-
μένο;

10. Γιατί ένα γυάλινο πρίσμα δεν
είναι κατάλληλο για να μας δώσει το
φάσμα υπέρυθρης και υπεριώδους
ακτινοβολίας;

11. Στις φωτογραφίες από ανα-
γνωριστικά αεροπλάνα, η φυσική
βλάστηση μπορεί εύκολα να διακρι-
θεί από την τεχνητή που χρησιμο-



Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

προσωπική μου εντύπωση— δεν αφήνουν καμιά αμφιβολία ότι το δόμηνο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ισοδύναμα.»

—Heinrich Herz



ποιείται για καμουφλάζ· αυτό όμως είναι αδύνατο στην απευθείας παρατήρηση. Γιατί;

12. Γιατί το συνεχές φάσμα των ακτίνων X που εκπέμπεται από μια ομώνυμη λυχνία έχει ένα σαφές κάτω όριο μήκους κύματος;

13. Είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε με ακτινοβολία γ ραδιενεργών ουσιών τις ακτίνες X που χρησιμοποιούνται για να εντοπιστούν κατασκευαστικές ατέλειες;

Μικροπειραματισμοί

Παρατηρήστε τη λειτουργία μιας ηλεκτρικής σόμπας, η οποία περιλαμβάνει μια σπειροειδή αντίσταση και μια καλά γυαλισμένη κοίλη μεταλλική επιφάνεια. Τι ρόλο πιστεύετε ότι παίζει η συγκεκριμένη επιφάνεια;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

... σύμφωνα με τις απόψεις που επικρατούσαν πριν από τον Maxwell, τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία θα έπρεπε να εξαφανίζονται όταν έπαυε να υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα (διότι ήταν αποδεκτό ότι το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δεν προκαλούσε κανένα ανάλογο αποτέλεσμα).

... είναι λανθασμένη η διαδεδομένη άποψη πως ο Herz πραγματοποίησε τα πειράματά του για να επιβεβαιώσει τη θεωρία του Maxwell. Στην αρχή ο Herz ήταν μάλλον αντίθετος σε αυτή τη θεωρία και την αποδέχτηκε μόνον όταν οι ενδείξεις που συγκέντρωσε ο ίδιος ήταν αρκετές.

... η μετάβαση από τους ηλεκτρικούς λαμπτήρες με θερμαινόμενο νήμα από άνθρακα στους μοντέρνους λαμπτήρες με νήμα από βολφράμιο επέτρεψε να έχουμε μια αύξηση στη θερμοκρασία του νήματος

μόνο 400 K. Όμως, υπερτριπλασίασε την αναλογία της ενέργειας που εκπέμπεται στο ορατό μέρος του φάσματος —από 0,5% σε 1,6%.

... η υπέρυθη και η υπεριώδης ακτινοβολία, που είναι αόρατη για το ανθρώπινο μάτι, χρησιμοποιείται ευρέως από τα ζώα. Σε απόσταση μισού μέτρου, κάποια φίδια αισθάνονται αλλαγές στη θερμοκρασία της τάξης του ενός δεκάτου του βαθμού. Και οι μέλισσες «βλέπουν» την υπεριώδη ακτινοβολία που τους αποκαλύπτει τη θέση όπου υπάρχει το νέκταρ των λουλουδιών.

... η αρχή της ραδιοαστρονομίας σχετίζεται με την εργασία ενός μηχανικού των Εργαστηρίων Bell, του C. Yansky, ο οποίος το 1931 διηύθυνε πειράματα με μια περιστρεφόμενη κεραία για να μελετήσει τα παράσιτα που εμποδίζουν τις ραδιοεπικοινωνίες βραχέων κυμάτων. Ο θόρυβος που μελέτησε φαίνεται ότι προέρχεται από το κέντρο του γαλαξία μας.

... οι παραβολικές κεραίες των σύγχρονων ραδιοτηλεσκοπίων είναι εκπληκτικά ευαίσθητες. Υπορούν να εντοπίσουν ροή ενέργειας με πυκνότητα μικρότερη από 10^{-29} watt · sec / m².

... για να μελετήσουν ακτίνες γ υψηλής ενέργειας, οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν οπτικά τηλεσκόπια! Γιατί; Καθώς περνούν μέσα από την ατμόσφαιρα, αυτές οι ακτίνες παράγουν ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας. Τα εν λόγω ηλεκτρόνια εκπέμπουν ακτινοβολία Cherenkov, η οποία τελικά καταγράφεται από τα οπτικά τηλεσκόπια.

A. Leonovich

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 61

Ένας μαγικός μουσικός τύπος

Το κούρδισμα της κιθάρας για όσους δεν έχουν μουσικό αυτί

P. Mikheyev

ΓΙΑ ΝΑ ΠΩ ΤΗΝ ΑΛΗΘΕΙΑ, ΔΕΝ ΕΧΩ καλό μουσικό αυτί. Κάποιες φορές όμως μου αρέσει να γρατζουνάω την κιθάρα μου. Και το δυσκολότερο μέρος για μένα είναι πριν ακόμη αρχίσω να παίζω, όταν δηλαδή πρέπει να κουρδίσω το όργανο. Για να λύσω το πρόβλημα μια και καλή, πήρα ένα στυλό και κάθισα στο γραφείο μου. Και νά που η φυσική με βοήθησε! Αποδείχτηκε ότι το μόνο που πρέπει να κάνω είναι να βάζω αριθμούς σ' έναν συγκεκριμένο τύπο, να στρέφω τα κλειδιά της κιθάρας όσες φορές προκύπτει από τον τύπο, και... τίποτ' άλλο απ' το να απολαμβάνω τη μουσική.

Μετά την εισαγωγή αυτή, ας περάσουμε από τα λόγια στις πράξεις και ας παραγάγουμε τον μαγικό τύπο.

Κατ' αρχάς ας βρούμε την κυκλική συχνότητα μιας χορδής. Ας υποθέσουμε ότι οι θεμελιώδεις ταλαντώσεις, οι οποίες περιλαμβάνονται στο μισό μήκος κύματος (Σχήμα 1), παίζουν τον κύριο ρόλο. Προφανώς η κυκλική συχνότητα εξαρτάται από την τάση της χορδής F , το μήκος της L και τη μάζα της m . Χρησιμοποιώντας διαστασιακή ανάλυση, παίρνουμε τον τύπο

$$\omega = A \sqrt{\frac{F}{Lm}}$$

όπου A είναι ένας αδιάστατος συντελεστής (αποδείξτε εσείς ότι μόνον αυτός ο συνδυασμός των F , L και m έχει διαστάσεις κυκλικής συχνότητας). Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι η εξής:



Σχήμα 1

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{F}{Lm}}$$

Ας γράψουμε τώρα έναν τύπο για την τάση της χορδής. Όταν «οφίγγουμε» τη χορδή, τεντώνεται και παραμορφώνεται. Η δύναμη που αναπτύσσεται στο ελαστικό μέσον ισούται με

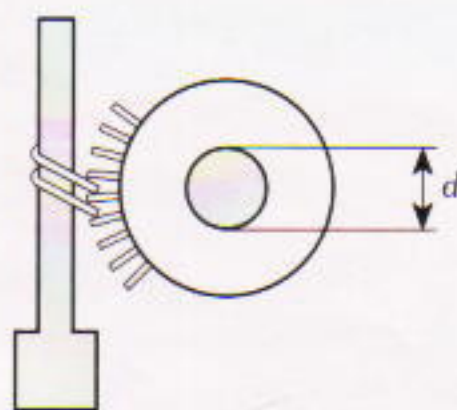
$$F = ES \frac{\Delta x}{L}$$

όπου Δx είναι η επιμήκυνση της χορδής, E το μέτρο του Young για το υλικό αυτό και S το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής της χορδής.* Εφόσον $m = \rho V = \rho SL$, η κυκλική συχνότητα θα ισούται με

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{E \Delta x}{\rho L^3}}$$

Πρέπει να σημειώσουμε αμέσως ένα κρίσιμο στοιχείο. Υποθέτοντας ότι $m = \rho SL$, περιοριζόμαστε σε συμπαγείς, ομογενείς χορδές —δηλαδή, την πρώτη και τη δεύτερη χορδή της κιθάρας. Οι άλλες χορδές έχουν πρόσθετη περιέλιξη ώστε η μάζα τους να είναι μεγαλύτερη.

Ας προχωρήσουμε τώρα στη διαδικασία τεντώματος της χορδής. Η χορδή είναι τυλιγμένη σ' έναν μεταλλικό κύλινδρο διαμέτρου d . Ο άξονας του κυλίνδρου συνδέεται μ' έναν οδοντωτό τροχό τον οποίο, μπορούμε να περιστρέψουμε με το κλειδί που είναι μηχανικά συνδεδεμένο με αυτόν (Σχήμα 2). Ας συμβολίσουμε με N το πλήθος των στροφών που εκτελεί ο κύλινδρος όταν τεντώνοντας τη χορδή, αυτή επιμηκύνεται κατά Δx . Τότε



Σχήμα 2

θα είναι $\Delta x = N\pi d$. Διαπιστώσα πειραματικά ότι μια πλήρης στροφή του κυλίνδρου αντιστοιχεί σε $a = 30$ πλήρεις στροφές του κλειδιού. Έτσι, για να περιστρέψουμε τον κύλινδρο N φορές, το κλειδί πρέπει να κάνει $n = Na$ πλήρεις στροφές. Συνεπώς, $\Delta x = n\pi d/a$. Εισάγοντας την τιμή αυτή στον τύπο της κυκλικής συχνότητας προκύπτει

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\pi E n d}{\rho L^3 a}}$$

Αφού η συχνότητα ταλάντωσης ν συνδέεται με την κυκλική συχνότητα ω μέσω της σχέσης $\nu = \omega/2\pi$, θα έχουμε

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi E n d}{\rho L^3 a}}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στον τύπο που περιγράφει τον αριθμό των στροφών του κλειδιού:

$$n = \frac{4\rho L^3 a \nu^2}{\pi E d} = B\nu^2,$$

όπου $B = 4\rho L^3 a / \pi E d$.

Ας υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς B . Αντικαθιστώντας $a = 30$, $\rho = 7.800 \text{ kg/m}^3$, $L = 0,7 \text{ m}$ (για την πρώτη χορδή), $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Nt/m}^2$, παίρνουμε $B = 10^{-4} \text{ sec}^2$. Έτσι, γνωρίζοντας τη συχνότητα του ήχου, μπο-

* Βλ. και το άρθρο «Η μεγάλη βουτιά» στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου του Quantum. (Σ.τ.ε.)

ρούμε να προσδιορίσουμε πόσες πλήρεις στροφές απαιτούνται για να κουρδίσουμε τη χορδή. Ας προσπαθήσουμε.

Η πρώτη χορδή πρέπει να κουρδιστεί στο μι πάνω από το μέσο ντο, ή από φυσική άποψη, στη συχνότητα $\nu = 300$ Hz. Αυτό αντιστοιχεί σε $n_1 = 9$ πλήρεις στροφές. Η δεύτερη χορδή παράγει το σι κάτω από το μέσο ντο ($\nu = 247$ Hz), και το κλειδί πρέπει να εκτελέσει $n_2 = 6,1$ πλήρεις στροφές.

Όλα φαίνονται υπέροχα, όμως με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κουρδίσουμε μόνο τις δύο πρώτες χορδές. Τι συμβαίνει με τις υπόλοιπες; Η φυσική μάς βοηθά και πάλι. Η λέξη «διακροτήμα» ίσως σας είναι ήδη οικεία από τα κεφάλαια της κυματικής. Για όσους από σας τη συναντούν πρώτη φορά, θα εξηγήσω εν συντομία τι σημαίνει.

Θεωρήστε ότι δύο κύματα ίσου πλάτους διαδίδονται σ' ένα μέσο κατά την ίδια κατεύθυνση, αλλά οι συχνότητές τους είναι λίγο διαφορετικές. Οι μετατοπίσεις που θα παραγάγουν σε κάποιο σημείο του μέσου θα περιγράφονται από τις συναρτήσεις $y_1 = A \sin \omega_1 t$ και $y_2 = A \sin \omega_2 t$.

Η συμβολή των δύο κυμάτων θα δώσει μια συνισταμένη κυματική δια-

ταραχή, η μετατόπιση της οποίας στο ίδιο σημείο του μέσου θα προκύπτει από την αρχή της επαλληλίας:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t,$$

ή

$$y = A_0 \sin \omega_m t,$$

όπου

$$A_0 = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Αφού $\omega_1 \approx \omega_2$, τότε το $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ έχει πολύ μικρή τιμή, που σημαίνει ότι το πλάτος A_0 του συνολικού κύματος μεταβάλλεται αργά με το χρόνο. Αυτό τονίζεται από τη διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα του Σχήματος 3.

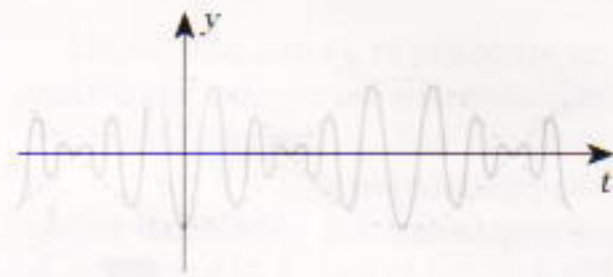
Αν τα δύο αρχικά κύματα είναι ήχοι με γειτονικές συχνότητες, μπορούμε ν' ακούσουμε την περιοδική αυξομείωση της έντασης του ήχου και αυτές οι αυξομειώσεις λέγονται διακροτήματα. Μέσω αυτών θα μπορέσουμε να κουρδίσουμε και τις υπόλοιπες χορδές. Είναι γνωστό πως ελεύθερη η δεύτερη χορδή πρέπει να έχει την ίδια συχνότητα με την τρίτη χορδή όταν την πιέζουμε με το δάχτυλο στο τέταρτο τιάστο. Χτυπώντας και τις δύο χορδές ταυτόχρονα, ακούμε τα διακροτήματα

εφόσον οι συχνότητές τους βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη. Αν είμαστε κοντά στο σωστό κούρδισμα, μπορούμε να μετρήσουμε το χρόνο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αυξομειώσεις του ήχου, την περίοδο των διακροτημάτων. Ας συμβολίσουμε αυτό το χρόνο με T . Τότε το σφάλμα στο κούρδισμα της χορδής είναι

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{T\nu_0},$$

όπου ν είναι η σωστή συχνότητα. Προφανώς, καθώς το $T \rightarrow \infty$, το σφάλμα γίνεται αμελητέο. Όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος των διακροτημάτων τόσο καλύτερο το κούρδισμα.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αυτή, μπορούμε να κουρδίσουμε όλες τις



Σχήμα 3

χορδές. Παραμένει, όμως, ακόμη μια ενοχλητική λεπτομέρεια: η χορδή δεν μπορεί να τεντωθεί πάρα πολύ, διότι θα σπάσει. Ποιο είναι το όριο θραύσης μιας χορδής; Υποθέστε ότι είναι κατασκευασμένη από κοινό ατσάλι. Η τάση που σπάζει αυτό το υλικό είναι $\sigma_{\max} = 5 \cdot 10^8$ Nt/m². Αφού

$$\sigma_{\max} = E \frac{\Delta x_{\max}}{L},$$

έπεται ότι

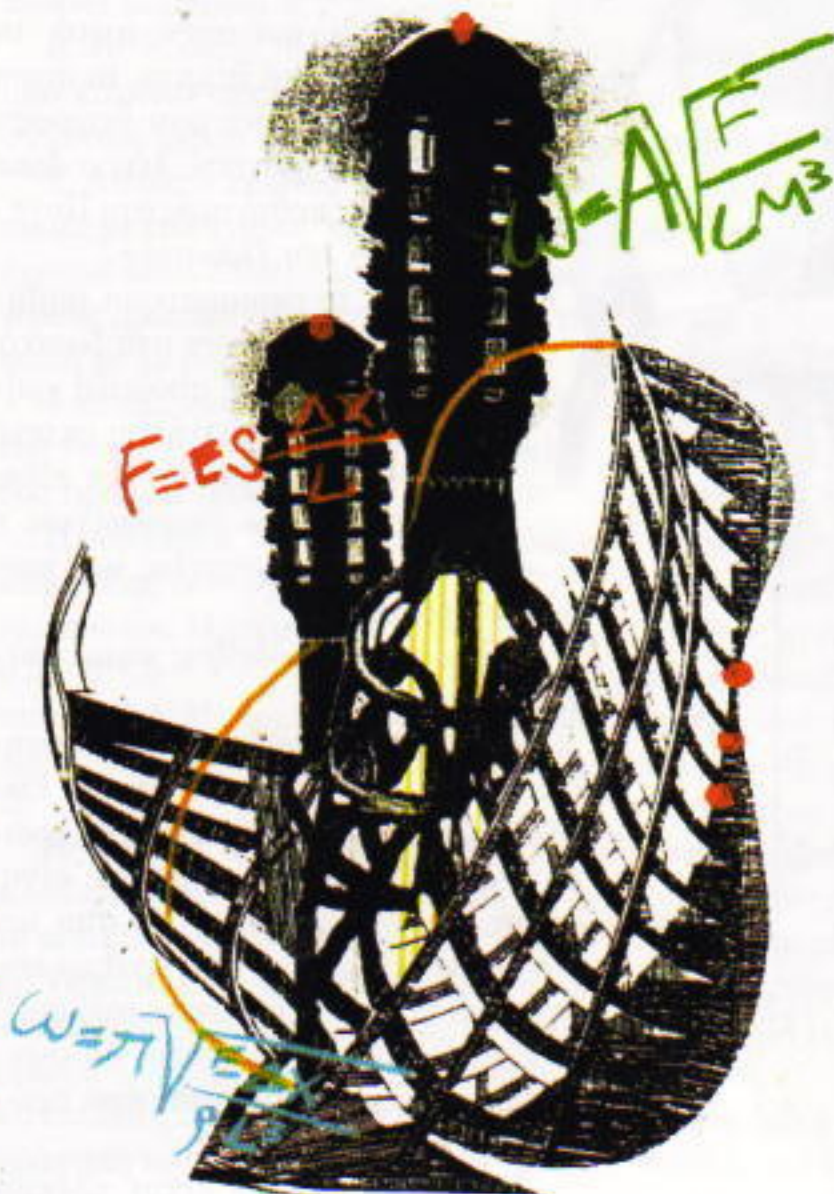
$$\Delta x_{\max} = \frac{\sigma_{\max} L}{E} = 2 \text{ mm}$$

—δηλαδή, το κλειδί πρέπει να κάνει τέσσερις πλήρεις στροφές για να πετύχουμε μέγιστη συχνότητα $\nu = 200$ Hz. Επειδή οι πραγματικές χορδές είναι φτιαγμένες από ειδικό κράμα, το όριο θραύσης τους είναι υψηλότερο. Αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε πειραματικά τεντώνοντας μια χορδή μέχρι να σπάσει. Οι υπολογισμοί γίνονται εύκολα με τον τύπο

$$\sigma_{\max} = \frac{\pi d E n}{La},$$

Σπάζοντας μερικές χορδές, βρήκα ότι η τιμή $\sigma_{\max} = 5 \cdot 10^9$ Nt/m², που είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από την τιμή για τις χορδές από κοινό ατσάλι.

Όπως διαπιστώνετε, μπορούμε να μάθουμε πολλά από μια κιθάρα εκτός από το να παίζουμε μουσική —μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να παραγάγουμε μερικά ενδιαφέροντα φυσικά φαινόμενα. Και το θέμα αυτό κάθε άλλο παρά έχει εξαντληθεί. Το πιο ενδιαφέρον μέρος βρίσκεται ακόμη μπροστά μας —μια διερεύνηση των ακουστικών ιδιοτήτων του παλλόμενου αντηχείου της κιθάρας. Ίσως η φυσική μπορεί να μας βοηθήσει και εκεί. Πιθανόν θα μπορούσε να προτείνει ακόμη και ένα άλλο σχήμα —ένα που θα παρήγαγε ήχους μαγευτικότερους από εκείνους οι οποίοι ξεχύνονται από τις κιθάρες που κληρονομήσαμε από τους παλαιότερους. ■



Τι είναι η κομψότητα;

Οι μαθηματικοί λένε: «Την αναγνωρίζω όταν τη βλέπω».

Julia Angwin

ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ, ΕΝΣΑΡ-
κωση της κομψότητας μπορεί να
θεωρηθεί ένας ελληνικός ναός.
Στη μόδα, ένα φόρεμα της Σανέλ.
Στα μαθηματικά, ο όρος χρησιμοποιεί-
ται για να περιγράψει τις καλύτερες,
τις συντομότερες αποδείξεις, εκείνες
που είναι οι πιο εμπνευσμένες και
ταυτόχρονα μπορούν να ερμηνεύσουν
περισσότερα.

Ο μαθηματικός Irving Karplansky
υπογραμμίζει ότι «μια κομψή απόδει-
ξη αποκαλύπτεται μπροστά στα μάτια
μας και μας γεμίζει ενθουσιασμό».

Αξεπέραστη είναι η κομψότητα
στις αποδείξεις του Carl Friedrich
Gauss, ο οποίος έζησε στην περίοδο
που ακολούθησε τη ραγδαία επέ-
κταση και ανάπτυξη των μαθη-
ματικών κατά τον 18ο αιώνα.
Σύμφωνα όμως με τον μαθημα-
τικό Harold Edwards, που μελε-
τά την ιστορία των μαθηματι-
κών, αυτός ο αιώνας δεν υπήρξε
περίοδος κομψότητας. Ο Gauss
ήταν αυτός που συγκέντρωσε και
ξεκαθάρισε κατά τον 19ο αιώνα το
έργο που είχε επιτευχθεί ως τότε.

«Ουδέποτε δημοσίευσε οτιδήποτε
πριν το τελειοποιήσει πλήρως», αναφέ-
ρει ο Edwards, καθηγητής στο Πανε-
πιστήμιο της Νέας Υόρκης.

Ο Gauss απογοήτευσε τους συναδέλ-
φους του επειδή δεν παρουσίαζε τις
αποδείξεις του όταν δεν ήταν ακόμη
τέλειες: θεωρούσε ότι ένας καθεδρικός
ναός είναι ολοκληρωμένος μόνο όταν
αφαιρεθεί και η τελευταία σκαλωσιά.
Το πιστεύω του ήταν *Pauca sed
matura* — «Λίγα αλλά ώριμα».

Σύμφωνα με τον σύγγρα μαθη-
ματικό Paul Erdős, οι κομψές
αποδείξεις από το Θεό. Η
είναι ότι ο
να βιβλίο που
λες τις άρι-
στες απο-
δείξεις και
ότι μερικές
φορές επι-

στελνονται
άποψη του
Θεός έχει έ-
περιέχει ό-

τρέπει σε κάποιον θνητό να κρυφοκοι-
τάξει μία από αυτές. «Δεν χρειάζεται
καν να πιστεύετε στο Θεό, χρειάζεται
απλώς να πιστεύετε στο βιβλίο», υπο-
στηρίζει ο Erdős. «Νά πώς νιώθετε:
"Πόσο ανόητος ήμουν που δεν το σκέ-
φτηκα μόνος μου".»

Μερικές φορές, όμως, όπως ισχύει
και για πολλά άλ-
λα πράγματα, η
κομψότητα είναι
απλώς θέμα γού-
στου.

«Μου αρέσουν αυτά τα
συνδυαστικά θέματα, τα οποία
οι συνάδελφοί μου θεωρούν
σπατάλη χρόνου», λέει ο John
Conway, καθηγητής στο Πανε-
πιστήμιο του Πρίνστον.

Πάντως, οι περισσότεροι μαθη-
ματικοί συμφωνούν στα βασικά:

1. Οποιαδήποτε απόδειξη χρη-
σιμοποιεί υπολογιστή για εκτενή
επεξεργασία αριθμών δεν είναι
κομψή (σχετικό παράδειγμα η
απόδειξη του θεωρήματος των τεσ-
σάρων χρωμάτων).

2. Οι κομψές αποδείξεις κατανοού-
νται εύκολα.

Το κλασικό παράδειγμα κομψότη-
τας είναι η σύντομη απόδειξη του Ευ-
κλείδη ότι υπάρχει άπειρο πλήθος πρώ-
των αριθμών. Πρώτος αριθμός είναι
αυτός που διαιρείται μόνον από τον
εαυτό του και από το 1. Οι αριθμοί που
δεν είναι πρώτοι διαφούνται από πρώ-
τους αριθμούς και ονομάζονται σύν-
θετοι, μια και συντίθενται από πρώ-
τους.

«Η απόδειξη αυτή είναι ηλικίας



2.300 ετών και όμως δεν υπάρχει καμία καλύτερη», μας λέει ο Karplansky, επίτιμος διευθυντής του Ινστιτούτου Έρευνας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Μπέρκλεϋ.

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι σύντομη και παρακάμπτει το γεγονός ότι δεν υπάρχει αριθμητικός τύπος που να καθορίζει αν ένας αριθμός είναι πρώτος. Χωρίς την απόδειξή του θα μπορούσε κάποιος να παλεύει μάταια με όλο και μεγαλύτερους πρώτους αριθμούς χωρίς να προσδιορίσει ποτέ ένα ανώτατο όριο. Ο Ευκλείδης υπέθεσε απλώς ότι υπάρχει ένας τελικός πρώτος αριθμός και απέδειξε ότι αυτή η υπόθεση μας οδηγεί σε αντίφαση. Ιδού η απόδειξη:

1. Ονομάζουμε Q τον μέγιστο πρώτο αριθμό.

2. Πολλαπλασιάζουμε τον Q με όλους τους μικρότερους πρώτους αριθμούς: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times Q$.

3. Έστω ότι P ισούται με αυτό το γινόμενο συν 1: $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times Q) + 1 = P$.

4. Το P δεν διαιρείται από κανέναν από τους αριθμούς 2, 3, 5, 7, ..., Q , διότι η διαίρεσή του με καθέναν από αυτούς αφήνει υπόλοιπο 1.

5. Το P , όμως, πρέπει να διαιρείται από κάποιον πρώτο αριθμό διότι είναι σύνθετος (αφού $P > Q$).

6. Αυτός ο πρώτος όμως πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το Q , αφού έχουμε αποκλείσει όλους τους μικρότερους πρώτους. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το βήμα 1.

7. Επομένως, η υπόθεση είναι ψευδής —πρέπει να υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών.

Πρόβλημα 1. Παρατηρήστε ότι ο Ευκλείδης δεν ισχυρίστηκε ότι ο P είναι πρώτος. Πραγματικά, αποδείξτε ότι ο $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$ διαιρείται από το 59. Μπορείτε να βρείτε έναν πρώτο διαιρέτη του $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1$;

Η γοητεία της απόδειξης του Ευκλείδη οφείλεται εν μέρει στο ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Πέρα από το ρόλο που παίζουν στην καθαρή θεωρία αριθμών, οι μεγάλοι πρώτοι αριθμοί χρησιμοποιούνται στην κατασκευή αλλά και την αποκρυπτογράφηση κρατικών κωδικών.

«Αν αυτό που αποδεικνύετε είναι

χρήσιμο ή θεμελιώδες και η απόδειξή σας είναι απλή, έχετε πετύχει κάτι σπουδαίο», τονίζει ο Conway. Μια σύντομη και περιεκτική απόδειξη ενός λιγότερο σημαντικού θεωρήματος, υποστηρίζει, δεν θα θεωρηθεί κομψή. Θα είναι απλώς χαριτωμένη ή ενδιαφέρουσα.

Το σπουδαιότερο όμως χαρακτηριστικό μιας κομψής απόδειξης είναι ότι σας αναγκάζει να σκεφτείτε, «Αχ! Τι ανόητος ήμουν να μην το σκεφτώ αυτό».

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε το πρόβλημα που έθεσε ο μαθηματικός Ron Graham. Θεωρήστε μια ακολουθία 101 διαφορετικών αριθμών διατεταγμένων σε οποιαδήποτε τυχαία σειρά. Ο Graham υποστηρίζει ότι μπορούμε να βρούμε σε αυτό το σύνολο μια γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα υπακολουθία 11 αριθμών.

Κατ' αρχάς, για να αποκτήσουμε μια αίσθηση του προβλήματος, ας θεωρήσουμε τους πρώτους 100 φυσικούς αριθμούς διατεταγμένους ως εξής:

91, 92, 93, ..., 100, 81, 82, 83, ..., 90, 71, 72, 73, ..., 80, ..., 1, 2, 3, ..., 10.

Αυτή είναι μια ακολουθία 100 αριθμών. Μπορούμε να επιλέξουμε έναν αριθμό από κάθε δεκάδα και να δημιουργήσουμε μια φθίνουσα υπακολουθία 10 αριθμών, όπως η 95, 85, 75, 65, 55, 45, 35, 25, 15, 5. Μπορείτε επίσης να επιλέξετε 10 αυξανόμενους αριθμούς. Όμως είναι αδύνατο να βρείτε μια αύξουσα ή μια φθίνουσα υπακολουθία 11 αριθμών.

Επομένως, μπορούμε να πιστέψουμε διαισθητικά πως όταν έχουμε 101 αριθμούς, θα υπάρχει μια τέτοια ακολουθία 11 αριθμών. Πώς γίνεται όμως να το αποδείξουμε; Η τετριμμένη προσέγγιση είναι να ελέγξουμε όλες τις περιπτώσεις. Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε ένα χαριτωμένο —ή μάλλον, κομψό— τέχνασμα.

Αντιστοιχίζουμε σε καθέναν από τους 101 αριθμούς $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{101}$ ένα ζεύγος ακεραίων (i_k, j_k) ως εξής: Έστω i_k το μήκος της μεγαλύτερης αύξουσας υπακολουθίας που καταλήγει στο A_k . Αν, για παράδειγμα, η ακολουθία είναι η $\langle 11, 3, 5, 1, 7, 2, \dots \rangle$ και $k = 6$, τότε η μεγαλύτερη αύξουσα υπακολουθία που καταλήγει στο $A_6 = 2$ είναι η $\langle 1, 2 \rangle$ και $i_6 = 2$.

Παρομοίως, έστω j_k το μήκος της μεγαλύτερης φθίνουσας υπακολουθίας που καταλήγει στο A_k . Στο παράδειγμά μας, αν $k = 6$, η μεγαλύτερη φθίνουσα ακολουθία που καταλήγει στο $A_6 = 2$ είναι $\langle 11, 5, 2 \rangle$ ή $\langle 11, 3, 2 \rangle$ ή $\langle 11, 7, 2 \rangle$. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις περιπτώσεις, $j_6 = 3$. Επομένως, όταν $k = 6$, έχουμε $A_k = (2, 3)$.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν δύο όμοια ζεύγη τέτοιων ακεραίων. Ας υποθέσουμε το αντίθετο: έστω ότι $(i_m, j_m) = (i_n, j_n)$ για κάποιους δείκτες m και n , όπου $n > m$. Αν, τώρα, $A_n > A_m$, τότε οπωσδήποτε $i_n > i_m$, επειδή διαφορετικά θα μπορούσαμε απλώς να προσαρτήσουμε το A_n στο τέλος μιας αύξουσας υπακολουθίας μήκους i_m . Παρομοίως, αν $A_n < A_m$ τότε $j_n > j_m$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλες οι τιμές των i_k και j_k είναι μεταξύ του 1 και του 10. Τότε θα είχαμε 100 ζεύγη. Όμως, έχουμε 101 ζεύγη, και επομένως η αρχή του Dirichlet* μάς εξασφαλίζει ότι κάποιο από τα ζεύγη πρέπει να περιέχει ένα 11. Το ζεύγος αυτό μας «υποδεικνύει» μια ζητούμενη υπακολουθία.

Πρόβλημα 2. Γενικεύστε το αποτέλεσμα για μια ακολουθία $n^2 + 1$ διαφορετικών αριθμών.

Πρόβλημα 3. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα που να μας δείχνει πως όταν οι 101 αριθμοί της ακολουθίας δεν είναι διαφορετικοί, το αποτέλεσμα δεν ισχύει.

Μη στενοχωρηθείτε αν οι αποδείξεις σας δεν είναι κομψές —οι περισσότερες αποδείξεις δεν είναι. Να θυμάστε όμως ότι πρέπει να έχετε τα μάτια σας ανοιχτά μήπως συναντήσετε απρόσμενα ένα απόσπασμα από το βιβλίο του Θεού.

Όπως λέει ο John Conway: «Μερικές φορές τα μαθηματικά μοιάζουν με μια περιπλάνηση σε άγνωστη πόλη. Περιδιαβαίνετε κάποιους δρόμους, ξαφνικά στρίβετε σε μια γωνία και η θέα αλλάζει —βλέπετε την ομορφιά όλου του τόπου».

* Βλ. τη σημείωση 3 του άρθρου «Προς την κορυφή του όρους Fermat-Euler» στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου του *Quantum*. (Σ.τ.ε.)

Σχηματισμός νεφών

«Νεφέλες αεικίνητες ας σηκωθούμε υγρές και αέρινες και μεγάλες
απ' το βαρύβροντο πατέρα μας Ωκεανό
στις κορυφές των βουνών υψηλά τις δεντρόφυτες.» —Αριστοφάνης

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΠΩΣ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ ΣΑΡΑ
ντα κυβικά μέτρα νερό να αιω-
ρούνται στον αέρα; Μα, μετα-
τρέποντάς τα σε σύννεφο! Φαι-
νεται σχεδόν αντίθετο στη διαίσθησή
μας ότι ο υγρός αέρας είναι λιγότερο
πυκνός από τον ξηρό και ότι μπορεί
να ίπταται πάνω απ' τα κεφάλια μας.
Το μαρτυρούν οι θύσανοι και οι σω-
ρείτες και οι μυριάδες άλλες μορφές
των νεφών που αιωρούνται στον ου-
ρανό. Η δημιουργία νεφών μάς απο-
καλύπτει ιδιότητες τόσο του περιβάλ-
λοντος όσο και των αερίων. Λόγου
χάρη, αν προσέξετε ότι οι δυτικές
πλαγιές των Βραχωδών Ορέων κα-
λύπτονται από πλούσια βλάστηση
ενώ οι ανατολικές είναι σχεδόν φα-
λακρές, θα μπορέσετε να συμπεράνε-
τε ότι τα αέρια ρεύματα έρχονται από
τα δυτικά, απ' τον Ειρηνικό Ωκεανό.*

Πέρυσι, μπήκα σ' ένα κατάστημα
παιχνιδιών για να αγοράσω ένα με-
γάλο μπαλόνι. Εκεί, λοιπόν, όχι μόνο
σου φουσκώνουν το μπαλόνι με αέ-
ριο ήλιο, αλλά επιπλέον σου τυπώ-
νουν πάνω του τη φράση που επιθυ-
μείς. Όταν με ρώτησαν τι ήθελα να
γράφει το μπαλόνι, έγραψα σ' ένα
χαρτί: $PV = nRT$. Η υπάλληλος εξε-
πλάγη και ρώτησε τι σήμαινε η εξί-
σωση. Αφού παραδέχτηκε ότι είχε δι-
δαχθεί χημεία στο γυμνάσιο, είχα την
ελπίδα ότι θα μπορούσα να της μάθω
το νόμο των ιδανικών αερίων όσο θα

έκανε τη δουλειά της. Τη ρώτησα,
λοιπόν, αν είχε αγοράσει ποτέ κανείς
ένα μπαλόνι κατά τη διάρκεια του
χειμώνα —και στην πολιτεία μας ο
χειμώνας είναι βαρύς— και είχε επι-
στρέψει λίγα λεπτά αργότερα δια-
μαρτυρόμενος ότι το μπαλόνι ήταν
τρύπιο. Είπε ότι πράγματι είχε συμ-
βεί κάτι τέτοιο μερικές φορές, αλλά
πάντοτε κατάφερνε να πείθει τον
πελάτη ότι το μπαλόνι θα ξαναφού-
σκωνε μόλις το πήγαινε στο σπίτι
του! Στην πραγματικότητα, ενώ δι-
καιολογιόταν στον δύσπιστο πελάτη,
το μπαλόνι φούσκωνε μπροστά στα
μάτια τους. Η μυστηριώδης εξίσωση
στο μπαλόνι μου ερμήνευσε ακριβώς
αυτό το φαινόμενο.

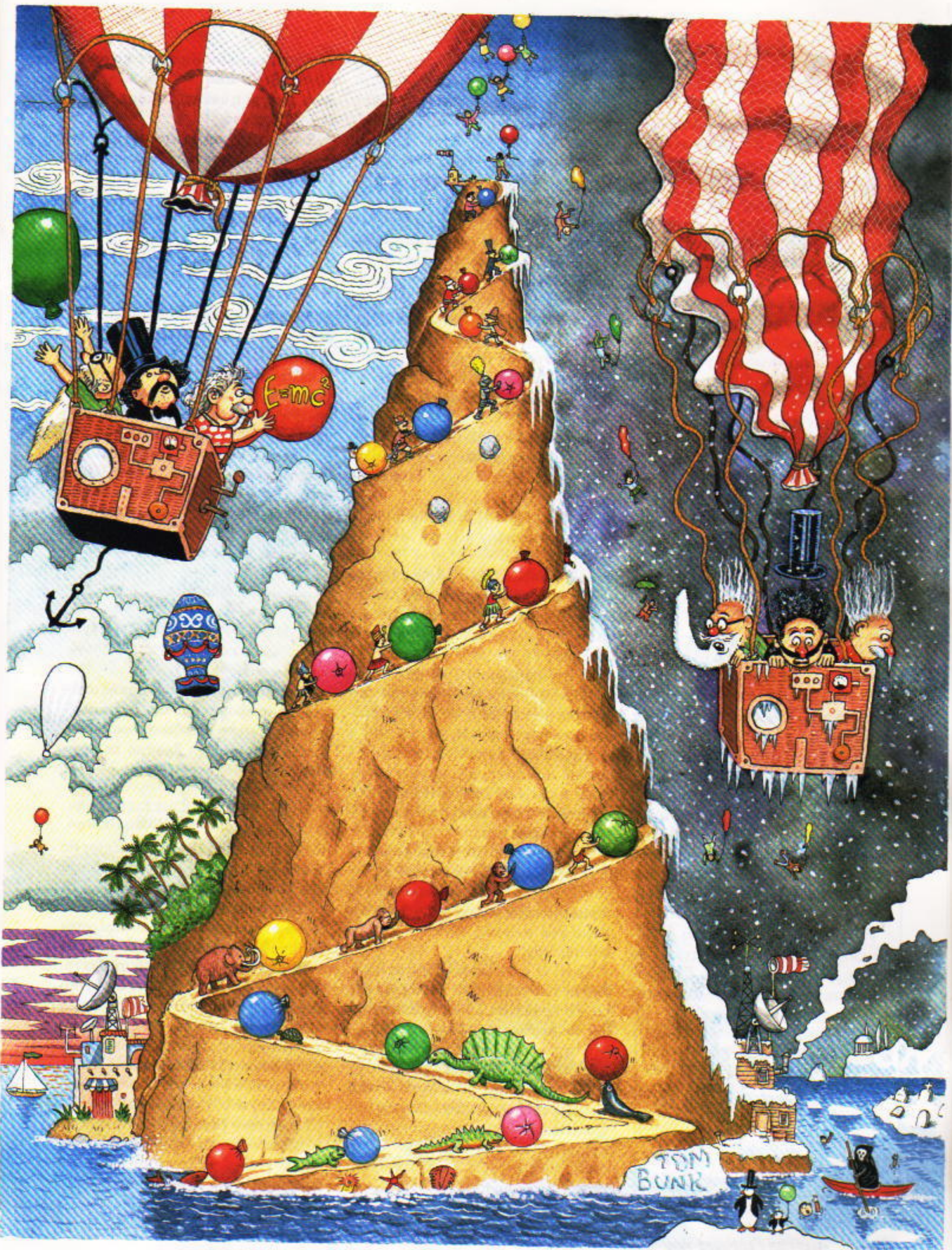
Ο νόμος των ιδανικών αερίων, $PV = nRT$, περιγράφει τη σχέση μεταξύ
των μακροσκοπικών ιδιοτήτων ενός
αερίου που περιέχεται σ' ένα δοχείο.
Στην εξίσωση, P είναι η πίεση του
αερίου, V ο όγκος του, T η θερμοκρα-
σία του σε βαθμούς Κέλβιν, n ο αριθ-
μός των mole του αερίου και R η πα-
γκόσμια σταθερά των αερίων. Στο
παράδειγμα του μπαλονιού, η πίεση
του αερίου διατηρείται σταθερή —ας
πούμε ίση με την ατμοσφαιρική πιέ-
ση. Η θερμοκρασία του αερίου είναι
ίση με τη θερμοκρασία του δωματίου.
Καθώς ο νέος ιδιοκτήτης του μπαλο-
νιού βγαίνει έξω στον κρύο χειμω-
νιάτικο αέρα, η θερμοκρασία του αε-
ρίου μέσα στο μπαλόνι ελαττώνεται.
Εφόσον η πίεση παραμένει η ίδια, η
ελάττωση της θερμοκρασίας ακολου-

θείται από αντίστοιχη ελάττωση του
όγκου, με αποτέλεσμα το μπαλόνι να
φαίνεται μισοφουσκωμένο. Ξανα-
μπαινοντας στο κατάστημα, το μπα-
λόνι θα ξαναφουσκώσει με μαγικό
τρόπο, αφού το αέριο θερμαίνεται.

Ένα δεύτερο παράδειγμα εφαρμο-
γής του νόμου των αερίων έχουμε
όταν φουσκώνουμε το λάστιχο ενός
ποδηλάτου. Στο παράδειγμα αυτό ο
όγκος του λάστιχου παραμένει στα-
θερός. Καθώς όλο και περισσότερος
αέρας εισέρχεται στο λάστιχο, η πιέ-
ση αυξάνεται, με αποτέλεσμα να αυ-
ξάνεται αντίστοιχα και η θερμοκρα-
σία του λάστιχου. Πιάστε το λάστιχο
και θα το διαπιστώσετε. Τα λάστιχα
των αυτοκινήτων το χειμώνα είναι
ελαφρώς ξεφουσκωμένα όταν ξεκι-
νάτε το ταξίδι σας, όμως είναι καλο-
φουσκωμένα όταν ζεσταθούν λόγω
της τριβής τους με το δρόμο και της
παραμόρφωσης των πλαϊνών τοιχω-
μάτων τους.

Ο νόμος των ιδανικών αερίων
μπορεί επίσης να βοηθήσει τους ανα-
γνώστες μας να καταλάβουν πώς
λειτουργεί μια χύτρα ταχύτητας, πώς
εισπνέουν τα πνευμόνια μας μέσω
των κινήσεων του διαφράγματος, και
πώς ένα αερόστατο ανέρχεται και
κατέρχεται μέσα στην ατμόσφαιρα.
Συχνά οι φυσικοί και οι μηχανικοί
περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός
αερίου μέσω ενός διαγράμματος $P - V$,
όπου στον άξονα y σημειώνονται
οι τιμές της πίεσης του αερίου και
στον άξονα x του όγκου του. Για πα-

* Βλ. και ερ. 3.17 στο βιβλίο *Το πανηγύρι της
φυσικής*, Εκδόσεις Κάτοπτρο. (Σ.τ.ε.)



TOM BUNK

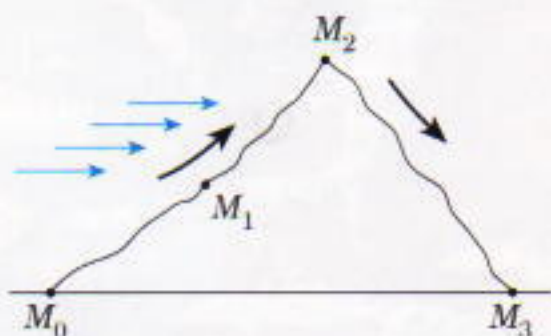
ράδειγμα, μια ισόθερμη μεταβολή σε διάγραμμα $P-V$ εκφράζεται από μια υπερβολή, εφόσον $PV = nRT = \text{σταθ.}$

Τέσσερις μεταβολές των ιδανικών αερίων παρουσιάζουν ειδικό ενδιαφέρον. Οι πρώτες τρεις συμβαίνουν υπό σταθερή θερμοκρασία (ισόθερμη), υπό σταθερό όγκο (ισόχωρη) και υπό σταθερή πίεση (ισοβαρής). Στην τέταρτη μεταβολή δεν προσφέρεται ή δεν αφαιρείται θερμότητα από το σύστημα. Αδιαβατική μεταβολή έχουμε όταν το αέριο εκτονώνεται ή συμπιέζεται πολύ γρήγορα —για παράδειγμα, όταν ηχητικά κύματα κινούνται μέσα σ' ένα δωμάτιο. Οι μεταβολές στην πίεση γίνονται τόσο γρήγορα ώστε κάθε μεταφορά θερμότητας μπορεί να αγνοηθεί. Αδιαβατική μεταβολή λαμβάνει χώρα και όταν το σύστημα είναι θερμικά μονωμένο από το περιβάλλον του. Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή μπορεί να εξελίσσεται πολύ αργά. Για παράδειγμα, ένα αέριο που βρίσκεται μέσα σε θερμικά μονωμένο κυλινδρικό δοχείο μπορεί να εκτονωθεί αδιαβατικά αν η δύναμη στο έμβολο μειώνεται σταδιακά.

Στις αδιαβατικές μεταβολές υπάρχει μια επιπλέον σχέση που συνδέει την πίεση και τον όγκο του αερίου: $PV^\gamma = \text{σταθ.}$, όπου γ είναι ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων του αερίου, και για διατομικά αέρια ισούται με 1,4.

Η σύντομη αυτή εισαγωγή μάς παρέχει το απαραίτητο υπόβαθρο για το πρόβλημα αυτού του μήνα που αφορά το σχηματισμό νεφών στην πλαγιά ενός βουνού. Το πρόβλημα βασίζεται σ' ένα πρόβλημα της 18ης Διεθνούς Ολυμπιάδας Φυσικής που διοργανώθηκε στην Ιένα της πρώην Ανατολικής Γερμανίας το 1987.

Ρεύμα υγρού αέρα κινείται «αδιαβατικά» κατά μήκος της πλαγιάς του βουνού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Στους μετεωρολογικούς σταθμούς



Σχήμα 1

M_0 και M_3 μετριοούνται ίσες ατμοσφαιρικές πιέσεις 100 kNt/m^2 . Στο σταθμό M_2 μετρείται πίεση 70 kNt/m^2 . Η θερμοκρασία του αέρα στον M_0 είναι 20°C .

Καθώς το ρεύμα αέρα ανέρχεται, αρχίζει να σχηματίζεται ένα σύννεφο στην τοποθεσία M_1 , όπου μετριέται πίεση $84,5 \text{ kNt/m}^2$.

Ποσότητα υγρού αέρα μάζας 2.000 kg ανά τετραγωνικό μέτρο, ανερχόμενη φτάνει την κορυφή του βουνού (M_2) έπειτα από 1.500 sec . Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού, $2,45 \text{ gr}$ νερού ανά χιλιόγραμμο αέρα κατακρημνίζονται ως βροχή.

Α. Υπολογίστε τη θερμοκρασία T_1 στο M_1 , όπου σχηματίζεται το σύννεφο.

Β. Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα μειώνεται γραμμικά με το ύψος, ποιο είναι το ύψος h_1 (M_1);

Γ. Ποια είναι η θερμοκρασία T_2 που μετριέται στην κορυφή του βουνού;

Δ. Υπολογίστε το ύψος της στήλης νερού που κατακρημνίζεται από το ρεύμα αέρα σε 3 ώρες, υποθέτοντας ομογενή βροχόπτωση ανάμεσα στους σταθμούς M_1 και M_2 .

Ε. Τι θερμοκρασία T_3 μετριέται στο σταθμό M_3 , στην άλλη πλευρά του βουνού; Συγκρίνετε τις ατμοσφαιρικές συνθήκες στον M_0 και τον M_3 .

Υποδείξεις: Υποθέστε ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από ιδανικό αέριο. Αγνοήστε την επίδραση των υδρατμών στην πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα.

Η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα για P_0 και T_0 στο σταθμό M_0 είναι $\rho_0 = 1,189 \text{ kg/m}^3$. Η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού, στο χώρο του νέφους, είναι $L = 2.500 \text{ kJoule/kg}$.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Απριλίου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

Καθρέφτης γεμάτος νερό

Σε προηγούμενο τεύχος είχαμε ζητήσει από τους αναγνώστες του Quantum να βρουν το είδωλο που σχηματίζεται από ένα κοίλο κάτοπτρο γεμάτο νερό. Το αντικείμενο τοποθετείται πάνω στον κύριο οπι-

κό άξονα του κατόπτρου σε απόσταση $d = 3R/2$ από την κορυφή του, όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας του κατόπτρου.

Ξεκινάμε χρησιμοποιώντας τον τύπο κατασκευαστών των φακών για να βρούμε την εστιακή απόσταση f_v του συγκλίνοντος φακού που σχηματίζεται από το νερό:

$$\frac{1}{f_v} = \frac{n-1}{R} = \frac{4/3-1}{R} = \frac{1}{3R}$$

Έτσι, $f_v = 3R$.

Μέθοδος Α. Χρησιμοποιούμε την ιδέα ότι η ολική εστιακή απόσταση ενός συνδυασμού οπτικών στοιχείων προκύπτει από το άθροισμα των αντιστρόφων των εστιακών αποστάσεων των στοιχείων. Στη σχετική εξίσωση, όμως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο φορές την εστιακή απόσταση του «φακού του νερού», διότι το φως περνά μέσα από το φακό, ανακλάται στο κάτοπτρο και στη συνέχεια περνά ξανά μέσα από το φακό. Ο τελικός τύπος είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{\text{ολ}}} &= \frac{1}{f_v} + \frac{1}{f_k} + \frac{1}{f_v} \\ &= \frac{1}{3R} + \frac{2}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{8}{3R} \end{aligned}$$

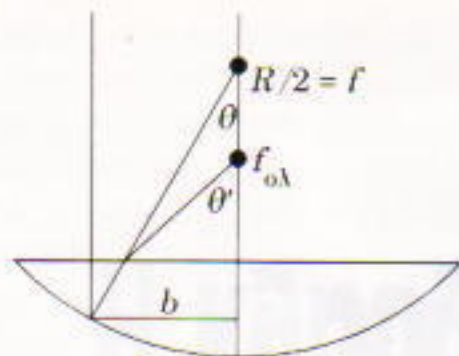
Την τιμή της ολικής εστιακής απόστασης μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στον τύπο των σφαιρικών κατόπτρων για να βρούμε τη θέση του ειδώλου:

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{f_{\text{ολ}}} - \frac{1}{d} = \frac{8}{3R} - \frac{2}{3R} = \frac{2}{R}$$

Επομένως το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση $d' = R/2$ από την κορυφή του κατόπτρου.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσετε ότι ένα κάτοπτρο συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο είτε βρίσκεται μέσα στον αέρα είτε στο νερό ή στο κενό. Αν παρεμβληθεί μια διαχωριστική επιφάνεια αέρα/νερού μπροστά από το κάτοπτρο, μικραίνει η εστιακή απόσταση του κατόπτρου ανάλογα με το λόγο των δεικτών διάθλασης. Έτσι, η ολική εστιακή απόσταση είναι $R/2n$, που συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε πιο πάνω.

Μέθοδος Β. Μια εναλλακτική μέθοδος για να βρούμε την εστιακή απόσταση του συστήματος νερό-κά-



Σχήμα 2

τοπτρο είναι να μελετήσουμε την πορεία μιας ακτίνας που κινείται παράλληλα στον οπτικό άξονα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 (οι γωνίες και το πάχος του νερού έχουν σχεδιαστεί μεγαλύτερα, ώστε το Σχήμα να καταστεί πιο ευανάγνωστο). Αν δεν υπήρχε το νερό, αυτή η ακτίνα μετά την ανάκλασή της θα περνούσε από την κύρια εστία του κατόπτρου. Όμως, εξαιτίας της διάθλασης της στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-νερού, η ακτίνα τέμνει τον οπτικό άξονα σε απόσταση $f_{ολ}$ από την κορυφή του κατόπτρου. Σύμφωνα με το νόμο του Snell, ισχύει:

$$\frac{4}{3} \eta \mu \theta = \eta \mu \theta'$$

Αγνοώντας το πάχος του νερού, γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\epsilon \phi \theta \cong \frac{b}{f}$$

και

$$\epsilon \phi \theta' \cong \frac{b}{f_{ολ}}$$

Επειδή οι γωνίες είναι πραγματικά πολύ μικρές, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση για μικρές: $\epsilon \phi \theta \cong \eta \mu \theta$ και $\epsilon \phi \theta' \cong \eta \mu \theta'$. Έτσι έχουμε

$$\frac{4b}{3f} \cong \frac{b}{f_{ολ}}$$

ή

$$f_{ολ} \cong \frac{3f}{4} = \frac{3R}{8}$$

Μέθοδος Γ. Η πάνω επιφάνεια του νερού σχηματίζει ένα φανταστικό είδωλο σε απόσταση

$$nd = \frac{4}{3} \frac{3R}{2} = 2R$$

πάνω από την επιφάνεια του νερού. Το είδωλο αυτό παίζει το ρόλο αντικειμένου για το κάτοπτρο (χωρίς το νερό). Χρησιμοποιώντας τον τύπο των σφαιρικών κατόπτρων με εστιακή απόσταση $f_a = R/2$ και $d = 2R$, παίρνουμε

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{2}{R} - \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

$$\text{ή } d' = 2R/3.$$

Το φως διαθλάται και επομένως σχηματίζεται ένα τελικό είδωλο σε απόσταση από την κορυφή του κατόπτρου

$$\frac{d'}{n} = \frac{3}{4} \frac{2R}{3} = \frac{R}{2}$$

Μέθοδος Δ. Τελικά μπορούμε να μελετήσουμε το σύστημα ως συνδυασμό ενός φακού από νερό, ενός κατόπτρου και ενός φακού από νερό βρίσκοντας το είδωλο που δημιουργείται από κάθε οπτικό στοιχείο και χρησιμοποιώντας το ως αντικείμενο (κάποιες φορές φανταστικό) για το επόμενο. Εφαρμόζοντας τον τύπο των φακών για το «φακό νερού» παίρνουμε

$$\frac{1}{d'_1} = \frac{1}{f_v} - \frac{1}{d_1} = \frac{1}{3R} - \frac{2}{3R} = -\frac{1}{3R}$$

Συνεπώς, το είδωλο είναι φανταστικό και βρίσκεται σε απόσταση $3R$ πάνω από την επιφάνεια του νερού.

Το είδωλο αυτό δρα ως αντικείμενο για το κάτοπτρο. Αγνοώντας το πάχος του νερού, η απόσταση του αντικειμένου για το κάτοπτρο είναι $d_2 = 3R$. Εφαρμόζοντας τον τύπο των σφαιρικών κατόπτρων, παίρνουμε

$$\frac{1}{d'_2} = \frac{1}{f_k} - \frac{1}{d_2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{3R} = \frac{5}{3R}$$

και το είδωλο βρίσκεται σε απόσταση $3R/5$ πάνω από την κορυφή του κατόπτρου.

Αφού αυτό το είδωλο βρίσκεται σε «λάθος» μεριά του «φακού νερού», η απόσταση του νέου αντικειμένου απ' το φακό είναι $d_3 = -3R/5$. Έτσι,

$$\frac{1}{d'_3} = \frac{1}{f_{ολ}} - \frac{1}{d_3} = \frac{1}{3R} - \frac{5}{3R} = \frac{2}{R}$$

και το τελικό είδωλο βρίσκεται στην ίδια απόσταση $R/2$ που βρήκαμε και με τις προηγούμενες μεθόδους. ■

QUANTUM

ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

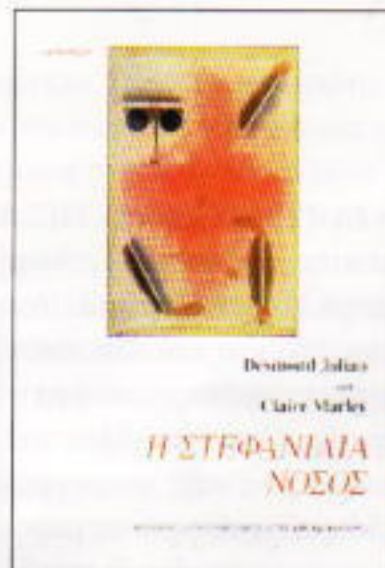
διαβάστε το

γίνετε και εσείς συντελεστής στην Quant-τική εξίσωση

**Desmond Julian
&
Claire Marley**

Η ΣΤΕΦΑΝΙΑΙΑ ΝΟΣΟΣ

Έκδοση του Oxford University Press



Πρόλογος στην ελληνική έκδοση:

Δ.Θ. ΚΡΕΜΑΣΤΙΝΟΣ

Υπουργός Υγείας και Πρόνοιας

Η στεφανιαία καρδιακή νόσος είναι η σημαντικότερη αιτία θανάτου και αναπηριών στη Δύση· ένας στους δώδεκα άνδρες πεθαίνουν απ' αυτή πριν την ηλικία των 65 ετών. Το βιβλίο αυτό εξηγεί έγκυρα και απλά πώς μπορεί να προφυλαχθεί κανείς από τη στεφανιαία νόσο, ποιοι θεωρείται ότι πάσχουν από αυτήν και γιατί, ποιες εξετάσεις και ποιες θεραπείες είναι απαραίτητες, ποια είναι τα επιτεύγματα της σύγχρονης χειρουργικής και ποια φάρμακα μπορούν να αντιμετωπίσουν τις περιπλοκές της νόσου, γιατί συμβαίνει το έμφραγμα και αν μπορεί να αποφευχθεί, ποιες είναι οι πιθανότητες να πεθάνει κανείς πριν ή μετά την εγχείρηση, αν είναι πιθανό να υπάρξει και άλλη καρδιακή προσβολή, κ.λπ. Απευθύνεται τόσο σ' αυτούς που ενδιαφέρονται για την καλή κατάσταση της υγείας τους και την έγκυρη πληροφόρηση, όσο στους πάσχοντες και τους οικείους τους.

Σελ.: 168, 2.900 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

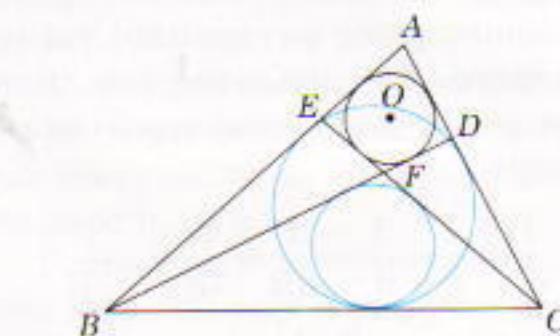
Γεωμετρία της παγόδας

Κλασικά προβλήματα μεγάλων Ιαπώνων γεωμετρών

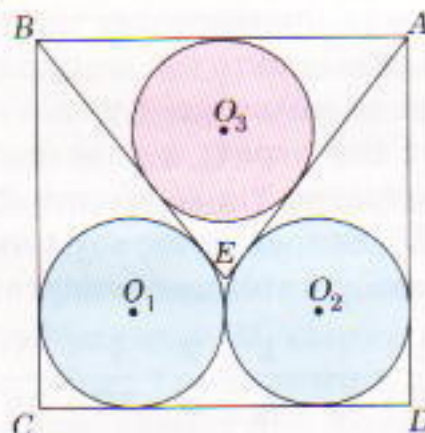
George Berzsenyi

ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΗΣ ΑΠΟΜΟΝΩΣΗΣ της, που περιλάμβανε το μεγαλύτερο τμήμα του 17ου, τον 18ο και τον 19ο αιώνα, η Ιαπωνία έγινε κέντρο ανάπτυξης της γεωμετρίας. Οι πάμπολλοι ταλαντούχοι γεωμέτρεις της κατέγραφαν τις ανακαλύψεις τους με τη μορφή πανέμορφα χρωματισμένων σχεδίων χαραγμένων σε ξύλινες πινακίδες, που τις προσέφεραν ως αναθήματα στους βωμούς και τους ναούς ή και τις κρεμούσαν κάτω από τις στέγες τους. Έχουν σωθεί πολλές πινακίδες ενώ άλλες είναι γνωστές μόνο από τις περιγραφές τους σε χειρόγραφα βιβλία ή σε βιβλία τυπωμένα με βάση ξυλόγλυπτα καλούπια που κατασκευάστηκαν αργότερα. Στα βιβλία παρουσιάζονται και οι λύσεις των προβλημάτων, ενώ στις παραδοσιακές πινακίδες υπάρχει συνήθως μόνο το τελικό αποτέλεσμα με τη μορφή της κομψής εικόνας και η έμμεση πρόκληση: «Δείτε αν μπορείτε να το αποδείξετε!»

Πρωτοέμαθα για τα γεωμετρικά προβλήματα (σαν γκάκου) των ιαπωνικών ναών το 1990, κατά το Πρώτο Διεθνές Συνέδριο της Παγκόσμιας Ομοσπονδίας Εθνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών (WFNMC) στο Πανεπιστήμιο του Ουώτερλου (στον Καναδά), όπου δόθηκε σε όλους τους συνέδρους αντιγραφο ενός νεοεκδομένου τότε βιβλίου αφιερωμένου στο θέμα. Πρόσφατα, στο Δεύτερο Διεθνές Συνέδριο της WFNMC (το 1994 στο Πότιτς της Βουλγαρίας), είχα την ευκαιρία να παρακολουθήσω μια πραγματικά εμπνευσμένη διάλεξη ενός από τους συγγραφείς



Σχήμα 1



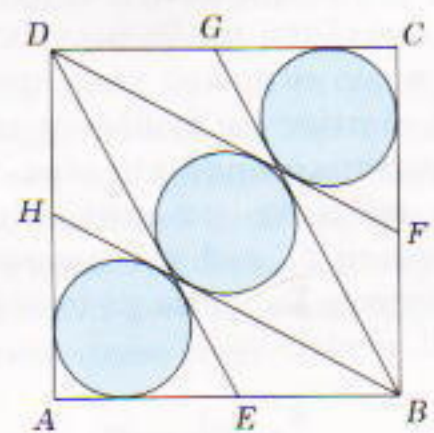
Σχήμα 2

εκείνου του βιβλίου, του Hidetosi Fukagawa. Τα προβλήματα που ακολουθούν βασίζονται στη διάλεξη του.

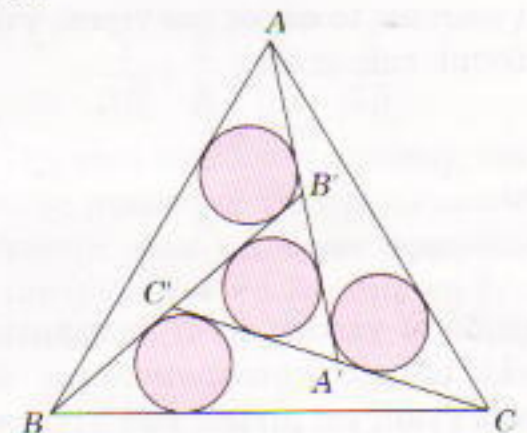
Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC και για κάθε κύκλο O εφαιτόμενο στις AB και AC , ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BFC και ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτονται στο ίδιο σημείο της πλευράς BC (Σχήμα 1).

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι αν οι κύκλοι O_1 και O_2 είναι ίσοι και εφάπτονται μεταξύ τους και στις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, τότε ο κύκλος O_3 έχει το ίδιο μέγεθος.

Πρόβλημα 3. Τρεις κύκλοι, ακτίνας r , έχουν εγγραφεί στο εσωτερικό ενός τετραγώνου βάσης a , με τον τρόπο



Σχήμα 3



Σχήμα 4

που βλέπετε στο Σχήμα 3. Προσδιορίστε το r συναρτήσει του a .

Πρόβλημα 4. Τέσσερις κύκλοι, ακτίνας r , έχουν εγγραφεί στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Προσδιορίστε το r συναρτήσει του a .

Για μια πληρέστερη εισαγωγή στα σαν γκάκου ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αγγλική έκδοση του υπέροχου έργου του Fukagawa *Japanese Temple Geometry Problems*, που έχει γραφεί με τη συνεργασία του Dan Pedoe και έχει εκδοθεί από το The Charles Babbage Research Center (PO Box 272, St. Norbert Postal Station, Winnipeg R3V 1L6, Canada). ■

Η κληρονομιά του Norbert Wiener

Μέρος II: Η κίνηση Brown και πέρα από αυτήν

ΤΟ 1919, Η ΖΩΗ ΤΟΥ NORBERT Wiener έπαψε να είναι νομαδική. Εργάστηκε για λίγους μήνες ως δημοσιογράφος στην *Boston Herald* αλλά απολύθηκε. Τελικά, έ- νας φίλος του πατέρα του, ο καθηγητής Osgood του Χάρβαρντ, μεσολάβησε και του εξασφάλισε δου- λειά στο MIT. Το 1919, η θέση αυτή δεν ήταν αξιό- λογη. Εκείνη την εποχή, το Μαθηματικό Τμήμα στο MIT ήταν καθαρά βοηθητι- κό στις άλλες επιστήμες, και το εκτιμούσαν μόνο για τη συμβολή του στο αναλυτικό πρόγραμμα του Τμήματος Μηχανι- κών. Είναι αξιοσημείωτο λοιπόν που το MIT προσέ- λαβε τον νεαρό Wiener, έναν άνθρωπο που η ως τότε εμπειρία του δεν τον



Ο Norbert Wiener το 1926.

συνιστούσε ως διδάσκοντα. Επιπλέ- ον, ακόμη και αν το MIT έψαχνε για άτομο με δυναμικότητα στην έρευνα στα καθαρά μαθηματικά, ο Norbert Wiener το 1919 δεν ήταν σοβαρός υποψήφιος. Είχε δημοσιεύσει δεκα- πέντε άρθρα πάνω στη λογική, τα οποία είχαν μείνει στην αφάνεια, και τίποτε απολύτως πάνω στα παραδο- σιακά μαθηματικά. Όμως, και ανε-

ξάρτητα από το αν η απόφαση του MIT να προσλάβει τον Wiener υπο- κινήθηκε από εξαιρετικές εμπιστευτι- κές πληροφορίες ή ήταν απλώς τυ- χαίο αποτέλεσμα του «μέσου», δεν

υπάρχει αμφιβολία πως η πρόσληψη του Wiener ήταν ένα ρίσκο από το οποίο βγήκαν κερδοσήμενες και οι δύο πλευρές. Ο Wiener έμεινε στο MIT έως τη συνταξιοδότησή του το 1960. Σ'αυτά τα χρόνια όχι μόνο έκανε διάσημο το μαθηματικό τμήμα του MIT, αλλά έπαιξε και κυρίαρχο ρόλο στη δημιουργία της κουλτούρας στην οποία το MIT οφείλει κατά μεγάλο μέρος το σημερινό του κύρος και τη φήμη του.

Στο MIT το παιδί-θαύμα άνθησε. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι ανακά- λυψε επιτέλους στα μαθηματικά την πραγματική του κλίση ή, ίσως, στην αίσθηση της ασφάλειας και της αυ- τοεκτίμησης που του προσέφερε η σταθερή δουλειά. Η μπορεί, απλώς,

στην ηλικία των 24 το πρώην παιδί- θαύμα να ολοκληρώθηκε ως προσω- πικότητα και να ήταν πλέον έτοιμο να γίνει ιδιοφυΐα. Όπως και νά 'χει, στα πρώτα δώδεκα χρόνια του στο MIT, ο Wiener έκανε τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις του στα καθαρά μαθηματικά: κατασκεύασε τη θεωρία της κίνησης Brown, δημιούργη- σε τα νέα θεμέλια της θεω- ρίας δυναμικού και επινόη- σε τη γενικευμένη αρμονική ανάλυση του.

Η ιστορία της κίνησης Brown παρουσιάζει αρκετές ενδιαφέρουσες εναλλαγές. Ονομάζεται έτσι προς τιμήν του Robert Brown, βοτα- νολόγου του 19ου αιώνα, ο οποίος ανέφερε ότι η γύρη και πολλά άλλα είδη ανόρ- γανων σωματίδιων εκτε- λούσαν, αιωρούμενα μέσα

στο νερό, μια παράξενη σπασμωδική κίνηση. Ο Brown απέρριψε μερικές αβασάνιστες ερμηνείες αυτής της κί- νησης, αν και συνεχιζόταν η έντονη διαμάχη για το κατά πόσον η μετα- κίνηση είχε βιολογική αιτία. Όμως, μια διάσημη εργασία του Αϊνστάιν¹

1. Στη σελίδα 17 του *Dynamical Theories of Brownian Motion* (Princeton University Press, 1967), ο Edward Nelson παρατηρεί: «Είναι λυ- πτό να διαπιστώνουμε ότι, παρά την επίπονη εργασία που είχε αφιερωθεί στη μελέτη της κί- νησης Brown, ο Αϊνστάιν αγνοούσε την ύπαρξη του φαινομένου. Το προσέβλεπε θεωρητικά και διατύπωσε μια ορθή ποσοτική θεωρία γι' αυτό». Παραθέτει μάλιστα την εξής δήλωση του Αϊν- στάιν: «Ο κύριος στόχος μου ... ήταν να ανα- καλύψω γεγονότα που θα εγγυώνταν όσο το δυνατόν περισσότερο την ύπαρξη ατόμων ορι- σμένου πεπερασμένου μεγέθους».

Το πρώτο μέρος του παρόντος αφιερώματος δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος (Ια- νουάριος/Φεβρουάριος 1995) του περιοδικού. Πρόκειται για ανατύπωση από το πρόγραμμα του Συμποσίου για τα Εκατό Χρόνια από τη Γέννηση του Norbert Wiener —διηρκεσε από τις 8 έως τις 14 Οκτωβρίου 1994—, το οποίο συντάχθηκε από το Τμήμα Μαθηματικών του MIT, με τη συμβολή του Tony Rothman.

το 1905 πάνω στο θέμα, εκτόξευσε την κίνηση Brown στη φυσική του 20ού αιώνα. Ο Αϊνστάιν έδειξε ότι ένα μοριακό μοντέλο του νερού (σε αντίθεση με ένα συνεχές) προβλέπει την ύπαρξη του φαινομένου που παρατήρησε ο Brown. Είναι ενδιαφέρον το ότι προέβλεψε την κίνηση Brown προτού μάθει για τις παρατηρήσεις του Brown.

Αφού είναι ουσιαστικά αδύνατο να επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα για το πλήθος των σωματιδίων που περιέχονται σε μια σταγόνα νερό, ο Αϊνστάιν υιοθέτησε μια στατιστική προσέγγιση και έδειξε ότι η εξέλιξη της κατανομής των σωματιδίων Brown καθορίζεται από την εξίσωση θερμότητας. Δηλαδή, η πυκνότητα των σωματιδίων σε κάθε σημείο ακολουθεί τον ίδιο φυσικό νόμο με τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο. Στην πραγματικότητα, από την οπτική γωνία της φυσικής, η περιγραφή του Αϊνστάιν στο σχετικό άρθρο του αδειάζει μαζί με το νερό της μπανιέρας και το μωρό. Ένας φυσικός δεν μπορεί να μιλάει για μία μοναδική *εξίσωση θερμότητας* που ταιριάζει σε όλες τις καταστάσεις περισσότερο απ' όσο μπορεί να μιλάει για μία μοναδική *εξίσωση κύματος* που ταιριάζει σε όλες τις καταστάσεις. Υπάρχουν σημαντικές σταθερές που εμφανίζονται σε κάθε φυσική εξίσωση. Για την κυματική εξίσωση, η θεμελιώδης φυσική σταθερά είναι η ταχύτητα του φωτός. Στην περίπτωση της εξίσωσης θερμότητας υπάρχει η *σταθερά διάχυσης*. Χάρη στον τύπο του Αϊνστάιν για τη σταθερά διάχυσης το άρθρο αυτό του 1905 έμεινε ιστορικό. Συγκεκριμένα, ο Αϊνστάιν εξέφρασε τη σταθερά διάχυσης ως λόγο αρκετών φυσικών ποσοτήτων, μία από τις οποίες ήταν ο αριθμός Avogadro.² Αποδεικνύεται ότι, με εξαίρεση τον αριθμό Avogadro, όλες αυτές οι ποσότητες, συμπεριλαμβανομένης της σταθεράς διάχυσης, ήταν γνωστές ή μετρήσιμες πειραματικά. Έτσι, ο τύπος του οδήγησε στον πρώτο ακριβή καθορι-

2. Ο αριθμός Avogadro είναι μια παγκόσμια σταθερά που εκφράζει το πλήθος των μορίων ενός αερίου ανά μονάδα όγκου υπό σταθερή πίεση. Μπορεί επίσης να οριστεί ως το πλήθος των ατόμων σ' ένα γραμμάριο υδρογόνου.

σμό του αριθμού Avogadro.

Αν αγνοήσουμε τη φυσική και αναλύσουμε το μοντέλο του Αϊνστάιν από καθαρά μαθηματική άποψη, αυτό που υποστήριζε ο Αϊνστάιν συνοψίζεται στους επόμενους τρεις ισχυρισμούς για τον τρόπο κίνησης των σωματιδίων Brown:

1. Τα σωματίδια Brown κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η συμπεριφορά τους σε δύο διαφορετικά χρονικά διαστήματα να είναι ανεξάρτητη. Επομένως, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε τη μελλοντική συμπεριφορά βάσει της προηγούμενης.

2. Ένα σωματίδιο είναι εξίσου πιθανό να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, και η απόσταση που διανύει ένα σωματίδιο Brown κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος είναι κατά μέσο όρο ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα αυτού του διαστήματος.

3. Οι τροχιές των σωματιδίων Brown είναι συνεχείς.

Με βάση τα καθιερωμένα αποτελέσματα της σύγχρονης θεωρίας των πιθανοτήτων, μπορούμε να συναγάγουμε από τις τρεις υποθέσεις του Αϊνστάιν το συμπέρασμα ότι η κατανομή των σωματιδίων Brown εξελίσσεται σύμφωνα με μια εξίσωση θερμότητας. (Η σημαντικότερη σταθερά διάχυσης καθορίζεται από τη σταθερά αναλογίας στον ισχυρισμό 2.) Φυσικά, το 1905, δεν είχε ακόμη δοθεί μια μαθηματικώς ικανοποιητική διατύπωση της θεωρίας πιθανοτήτων. Έτσι, η απόδειξη του Αϊνστάιν ήταν, από μαθηματική άποψη, μάλλον πρωτόγονη. Επιπλέον, στο μοντέλο του ήταν συνυφασμένη μια σημαντική μαθηματική πρόκληση: η *επιβεβαίωση ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια κατανομή στο χώρο των*

3. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1905 στο άρθρο του Αϊνστάιν. Πέντε χρόνια νωρίτερα, ο λαμπρός φοιτητής του H. Poincaré, ο L. Bachelier, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι τιμές στο χρηματιστήριο του Παρισιού ακολουθούσαν τροχιές που η κατανομή τους ικανοποιούσε τους ισχυρισμούς 1, 2, και 3. Μόνο κατά τη δεκαετία του 1970 η οικονομική θεωρία άρχισε να συγκλίνει σ' αυτό το θέμα με τα μαθηματικά και τη μηχανική. Το αποτέλεσμα ήταν μια πολύ πιο εξελιγμένη μέθοδος υπολογισμού του κινδύνου σε μεγάλες χρηματαγορές, που έχει γίνει ένα απαραίτητο εργαλείο για πιστωτικές,

τροχιών έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ισχυρισμοί 1, 2, και 3.³

Στις αρχές του αιώνα, η γαλλική σχολή της ανάλυσης αγωνιζόταν σκληρά να δημιουργήσει αυτό που σήμερα ονομάζουμε *θεωρία μέτρου* (δηλαδή, τη θεωρία με βάση την οποία αντιστοιχίζουμε όγκο σε σύνολα).⁴ Η γαλλική σχολή, ειδικά οι E. Borel και H. Lebesgue, αποδέσμευσαν τη θεωρία μέτρου από τις κλασικές πηγές της και έκαναν δυνατή την αντιμετώπιση του προβλήματος της αντιστοιχίας *πιθανοτήτων* σε υποσύνολα τροχιών. Όμως, παρά το πλήθος των υπέροχων επιτευγμάτων τους, ούτε ο Borel και ο Lebesgue, ούτε και οι μαθητές τους όπως οι P. Lévy, S. Banach, M. Fréchet και A.N. Kolmogorov κατόρθωσαν να μαθηματικοποιήσουν το μοντέλο του Αϊνστάιν για την κίνηση Brown. Όλοι τους γνώριζαν πολύ καλά το ουσιαστικό πρόβλημα, αλλά ουδείς κατάφερε να πετύχει την απαιτούμενη σύνθεση. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα έλυσε ο Wiener.

Εξετάζοντάς την εκ των υστέρων, η στρατηγική του Wiener φαίνεται κάπως απλοϊκή. Συγκεκριμένα, παρακάμπτει εντελώς τα ζητήματα στα οποία είχαν σκοντάψει περισσότερο πεπειραμένοι μαθηματικοί. Προσφέ-

επενδυτικές και εμπορικές εταιρείες. Τελικά, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο Bachelier, σε αντίθεση με τον Αϊνστάιν, αντιμετώπισε πραγματικά το πρόβλημα του υπολογισμού της πιθανότητας μη τετριμμένων γεγονότων που μπορεί να διατυπωθούν μόνο μέσα στο πλαίσιο του χώρου των τροχιών. Ο πρώτος φυσικός που ασχολήθηκε με τέτοια προβλήματα ήταν ο M. Smoluchowski, που χρησιμοποίησε ένα προσεγγιστικό σχήμα βασισμένο στους τυχαίους περιπάτους.

4. Πριν από τις προσπάθειές τους, η μοναδική διαθέσιμη θεωρία ήταν κατά βάση αυτή που είχε εισαγάγει ο Αρχιμήδης και επανανακαλύψει ο Fermat και ο Νεύτων, και την οποία μαθαίνει υποχρεωτικά σήμερα καθένας που ασχολείται με τον απειροστικό λογισμό. Φυσικά, η θεωρία αυτή είχε ενισχυθεί από τον Cauchy, τον Riemann και άλλους, αλλά εξακολουθούσε να έχει σοβαρά μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, μπορούσε να αποδειχθεί ότι το όλο ισούται με το άθροισμα των μερών του μόνο όταν το πλήθος των μερών ήταν πεπερασμένο. Επιπλέον, παρότι η θεωρία του Riemann ήταν απολύτως εξαιρετική στο πλαίσιο των πεπερασμένων διαστάσεων, δεν υπήρχε καμιά θεωρία για χώρους άπειρων διαστάσεων, όπως ο χώρος όλων των τροχιών Brown.

ροντάς μας μια υπέροχη επίδειξη της δύναμης της αισιοδοξίας, υποθέτει ότι η επιθυμητή αντιστοιχία των πιθανοτήτων είναι δυνατή και ρωτάει πώς θα είναι αυτή η αντιστοιχία σ' ένα έξυπνα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Αναποδογυρίζει λοιπόν το πρόβλημα και αποδεικνύει ότι η περιγραφή μέσω των συντεταγμένων οδηγεί στην ύπαρξη της επιθυμητής αντιστοιχίας. (Αυτή η γενική γραμμή συλλογισμού είναι οικεία σε οποιονδήποτε έχει λύσει ένα πρόβλημα λέγοντας «έστω x η λύση» και βρίσκοντας κατόπιν το x ως συνέπεια των ιδιοτήτων που πρέπει να έχει.) Ο Wiener κατάφερε να κόψει τον γόρδιο δεσμό, και η αντιστοιχία των πιθανοτήτων που πέτυχε στον «Διαφορικό Χώρο» φέρει έκτοτε το όνομά του: ονομάζεται *μέτρο Wiener*.

Θα ήταν δύσκολο να υπερβάλουμε ως προς τη σημασία του μέτρου Wiener. Αντιπροσωπεύει αυτό που σήμερα υποχρεωτικά θα ονομάζαμε *Παράδειγμα*. Η ύπαρξή του άνοιξε το δρόμο για ένα ορμητικό ρεύμα και οδήγησε τον Lévy, τον Kolmogorov και άλλους στη δημιουργία της θεωρίας των *στοχαστικών ανελίξεων*, και στη μετάβαση στη σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων. Επιπροσθέτως, το μέτρο Wiener είναι, σύμφωνα με μια έννοια που μπορεί να γίνει πολύ ακριβής, εξίσου καθολικό με την γκαουσιανή (ή κανονική) κατανομή στην ευθεία των πραγματικών: είναι η κατανομή που προκύπτει όποτε κάνει κανείς αλλαγή κλίμακας με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, σε τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο χώρο των τροχιών.⁵ Αυτή είναι η θεμελιώδης αιτία που το μέτρο Wiener εμφανίζεται κάθε φορά που μελετάμε ένα φαινόμενο το οποίο εμφανίζει τις ιδιότητες 1, 2 και 3. Είναι επίσης η αιτία που το μέτρο Wiener εμφανίζεται, ξανά και ξανά, σε μοντέλα καταστάσεων όπου παρατηρούμε το καθαρό αποτέλεσμα ενός τεράστιου πλήθους μικρότατων συμβολών που προέρχονται από αμοιβαία ανεξάρτητες πηγές

5. Η πλήρης κατανόηση αυτής της καθολικότητας επιτεύχθηκε μόνο στη δεκαετία του 1950, χάρη στη συμβολή των P. Lévy, R.H. Cameron, M. Donsker, P. Erdős, M. Kac, W.T. Martin και I.E. Segal.

—όπως συμβαίνει με την κίνηση ενός σωματιδίου γύρης, με τον χρηματιστηριακό δείκτη Dow Jones ή, όπως παρατήρησε ο ίδιος ο Wiener, με την παραμόρφωση ενός σήματος κατά τη μετάδοσή του από μια γραμμή με θόρυβο.

Αν και η ανάλυση της κίνησης Brown ήταν το κύριο επίτευγμα του Wiener αυτή την περίοδο, δεν ήταν και το μοναδικό. Σε σειρά άρθρων του από το 1923 έως το 1925, ο Wiener εξέτασε επίσης ένα θεμελιώδες πρόβλημα της θεωρίας της ηλεκτροστατικής. Το πρόβλημα ήταν να βρεθεί ποιο σχήμα μπορεί να έχει ένας ηλεκτρικός αγωγός ώστε να φέρει σταθερό φορτίο. Ο Zarembo είχε αποδείξει ότι κάποιοι συγκεκριμένοι αγωγοί με σχήμα βελόνας δεν έχουν τη δυνατότητα να φέρουν φορτίο —εκφορτίζονται στιγμιαία από την ακίδα. (Στο αντίστροφο φαινόμενο βασίζεται η λειτουργία του αλεξικέραυνου.) Ο Zarembo είχε επίσης αποδείξει ότι οι κωνικοί αγωγοί συγκρατούν το φορτίο τους. Στο μαθηματικό μοντέλο η στιγμιαία εκφόρτιση αντιστοιχεί σε μια απότομη αλλαγή —μια *ασυνέχεια* — του δυναμικού στην επιφάνεια που διαχωρίζει το χώρο μεταξύ του αγωγού και του μέσου που τον περιβάλλει. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό δυναμικό στον αγωγό, και η ισορροπία είναι ευσταθής (δεν υπάρχουν σπινθήρες) αν το δυναμικό μεταβάλλεται με *συνεχή* τρόπο κατά μήκος της διαχωριστικής επιφάνειας.

Ο Wiener περιέγραψε όλα τα σχήματα στα οποία εμφανίζεται η αστάθεια και καθιέρωσε ένα καινούργιο πλαίσιο για ολόκληρη τη θεωρία δυναμικού. Σε αντίθεση με πολλά μοντέλα της μαθηματικής φυσικής, απέδειξε ότι το δυναμικό σε ισορροπία είναι μαθηματικώς καλά ορισμένο, ανεξάρτητα από το αν ο αγωγός είναι σταθερός ή όχι. Κατόπιν διατύπωσε έναν εντελώς πρωτότυπο έλεγχο, γνωστό σήμερα ως *κριτήριο Wiener*, ο οποίος καθορίζει τα σημεία όπου το δυναμικό είναι ασυνεχές. Ένα βασικό βήμα στην προσέγγιση

6. Η ηλεκτροστατική χωρητικότητα ενός αγωγού μπορεί να οριστεί ως το συνολικό φορτίο που φέρει ο αγωγός σε ισορροπία όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ του αγωγού και του περιβάλλοντός του είναι σταθερή.

του Wiener ήταν η επέκταση μιας κλασικής έννοιας γνωστής ως ηλεκτροστατική χωρητικότητα⁶ σε τυχαίες επιφάνειες. Χρησιμοποίησε μια διαδικασία ανάλογη, αλλά πιο περίπλοκη, με αυτήν που επινόησε ο Lebesgue όταν αντιστοιχίσε όγκο σε περιοχές για τις οποίες δεν υπήρχε καμία κλασική έννοια όγκου. Πραγματικά, η χωρητικότητα του Wiener, αν και πιο λεπτή έννοια, συνδέεται στενά με τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για τα φράκταλ.⁷

Ένα ακόμη θέμα που ερεύνησε ο Wiener εκείνη την περίοδο ήταν αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεωρία κατανομών ή θεωρία γενικευμένων συναρτήσεων. Λίγο μετά την άφιξη του Wiener στο MIT, ο καθηγητής Jackson και άλλα μέλη του τμήματος των ηλεκτρολόγων μηχανικών του MIT τού ζήτησαν να αναπτύξει μια κατάλληλη θεμελίωση για το λογισμό Heaviside —μια μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων μέσω μετασχηματισμών Laplace και Fourier. Ο λογισμός Heaviside μετασχηματίζει μια διαφορική εξίσωση σε μια εξίσωση που αφορά πολλαπλασιασμό, όπως η $Ax = B$. Για να τη λύσουμε ως προς x , απλώς διαιρούμε: $x = B/A$. Η δυσκολία είναι ότι αυτός ο απλός τύπος για τη λύση πρέπει να μετασχηματιστεί ξανά σε μια έκφραση που θα έχει νόημα για την αρχική διαφορική εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να έχει νόημα ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Fourier-Laplace. Ο Wiener ανέλαβε να περιγράψει την αντιστοιχία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με τις πράξεις της παραγωγής και της ολοκλήρωσης. Ο Laurent Schwartz, ο πατέρας της θεωρίας των κατανομών, παραδέχτηκε ότι ο τρόπος που αντιμετώπισε το ζήτημα ο Wiener το 1926 βρισκόταν πολλά χρόνια μπροστά από τη μέθοδο οποιουδήποτε άλλου.

Όπως ακριβώς η φυσική της κίνη-

7. Υπάρχει μια περιέργη ειρωνεία που σχετίζεται με την εργασία του Wiener πάνω στη θεωρία δυναμικού. Συγκεκριμένα, όπως ανακάλυψε ο S. Kakutani στις αρχές της δεκαετίας του 1940, η θεωρία δυναμικού σχετίζεται με την κίνηση Brown με βαθείς και υπέροχους τρόπους. Ο Wiener δεν πρόσεξε καθόλου αυτήν την όμορφη και χρήσιμη σύνδεση με την προηγούμενη εργασία του.

σης Brown έδωσε στον Wiener το ερέθισμα για εντελώς καινούργια μαθηματικά, έτσι και το πρακτικό πρόβλημα της επεξεργασίας των ηλεκτρικών σημάτων τον οδήγησε σε μια βαθιά επέκταση της κλασικής ανάλυσης Fourier. Η μέθοδος Fourier συνίσταται στην ανάλυση ενός περιοδικού σήματος σε άθροισμα απλών αρμονικών κυμάτων. Η θεμελιώδης σχέση της ανάλυσης Fourier — ο τύπος του Parseval — μας λέει ότι η συνολική ενέργεια του σήματος σε κάθε περίοδο είναι το άθροισμα των ενεργειών των απλών του κυμάτων. Το σύνολο των συχνοτήτων που περιέχει αυτά τα πλάτη είναι γνωστό ως φάσμα του σήματος και αυτές οι συχνότητες αποτελούν ένα διακριτό σύνολο — τις αρμονικές μιας παλλόμενης χορδής. Υπάρχει ένας παρόμοιος θεμελιώδης τύπος, που τον οφείλουμε στον Plancherel, για την ανάλυση μη περιοδικών κυμάτων, ο οποίος μετράει τη συνολική ενέργεια στη διάρκεια όλου του χρόνου. Το φάσμα του σήματος εξαπλώνεται σε όλο το συνεχές των συχνοτήτων, και ο τύπος μετράει το ποσό της ενέργειας που συγκεντρώνεται σε δεδομένη περιοχή συχνοτήτων. Το πρόβλημα είναι ότι τα σήματα που εμφανίζονται στην πράξη στα ηλεκτρικά συστήματα δεν ταιριάζουν με το πλαίσιο καμίας από αυτές τις δύο θεωρίες. Τα σήματα δεν είναι περιοδικά και το φάσμα δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένη σειρά τιμών, επομένως οι σειρές Fourier είναι ανεπαρκείς. Από την άλλη πλευρά, η συνολική ενέργεια κατά τη διάρκεια μιας άπειρης περιόδου είναι άπειρη, οπότε η θεωρία του Plancherel δεν εφαρμόζεται. Ο Wiener ξεπέρασε τη δυσκολία μέσω αυτού που ονόμασε γενικευμένη αρμονική ανάλυση. Χρησιμοποίησε ως αφετηρία συγκεκριμένους αριθμούς αυτοσυσχέτισης, οι οποίοι συγκρίνουν το σήμα με το ίδιο σήμα με κάποια χρονική καθυστέρηση. Αυτό ήταν ακριβώς ό,τι μπορούσε να μετρηθεί πρακτικά. Αντί λοιπόν να ασχοληθεί με τη συνολική ενέργεια, ο Wiener θεώρησε τη μέση ενέργεια του σήματος στη διάρκεια μιας μεγάλης χρονικής περιόδου. Η θεωρία του ήταν αρκετά ευέλικτη ώστε να αντιμετωπίσει και τα περιοδικά σήματα

και τα σήματα που αποτελούνται από ένα συνεχές συχνοτήτων, όπως ο «λευκός θόρυβος».

Ένα από τα βασικά συστατικά της γενικευμένης αρμονικής ανάλυσης του Wiener ήταν η νέα μέθοδος του για τον υπολογισμό ορίων των μέσων τιμών. Το πρώτο βήμα ήταν η αναδιατύπωση του προβλήματος, ώστε να αναχθεί στον καθορισμό του πότε δύο σταθμισμένοι μέσοι όροι βρίσκονται πολύ κοντά. Το αναδιατυπωμένο πρόβλημα ταιρίαζε με το γενικό πλαίσιο της λεγόμενης θεωρίας Tauber — θεωρία στην οποία είχαν σημαντική συμβολή ο Hardy και ο Littlewood. Αντί όμως να χρησιμοποιήσει κάποιες βελτιώσεις στις τεχνικές των δασκάλων του, ο Wiener εισήγαγε μια νέα προσέγγιση με την οποία δεν έλυσε μόνο το δικό του πρόβλημα αλλά και αποσαφήνισε τον θεμελιώδη μηχανισμό όλων των προηγούμενων προβλημάτων αυτού του τύπου.⁸ Στη μονογραφία του γι' αυτό το θέμα ο Wiener παρουσιάζει τις ιδέες του δίνοντας και μια κομψή απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών, που αποτελεί μια από τις ωραιότερες εφαρμογές της ανάλυσης στη θεωρία αριθμών.

Με τη δημοσίευση της εργασίας του για τη γενικευμένη αρμονική ανάλυση και τα θεωρήματα Tauber, ήρθε επιτέλους η αναγνώριση για τον Wiener. Το 1932 έγινε τακτικός καθηγητής στο MIT με μισθό 6.000 δολάρια ετησίως. Τον επόμενο χρόνο έγινε μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των ΗΠΑ, και κέρδισε το βραβείο Bôcher, που απονέμεται κάθε πέντε χρόνια για την καλύτερη εργασία στην ανάλυση στις ΗΠΑ.

Η πνευματική δραστηριότητα του Wiener κάθε άλλο παρά εξαντλείται στις κύριες εργασίες του που περιγράψαμε. Κατά τη δεκαετία του 1930 συνέχισε την επέκταση της αρμονικής ανάλυσης, έχοντας πάντοτε κατά νουν τις ίδιες εφαρμογές στη μηχανική. Έγραψε μαζί με τον R.E.A.C. Paley ένα βιβλίο που άσκησε ιδιαίτερη επιρροή, και ένα πρωτοποριακό

8. Η εργασία του Wiener οδήγησε τον I.M. Gelfand στη διατύπωση μιας βαθιάς έννοιας φάσματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε οποιοδήποτε αλγεβρικό σύστημα.

άρθρο για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις μαζί με τον E. Hopf. Περιπλανήθηκε στο χώρο της κβαντομηχανικής μαζί με τον Max Born και ασχολήθηκε με την πενταδιάστατη σχετικότητα (θεωρία Kaluza-Klein) μαζί με τον Dirk Struik. Στα τέλη της δεκαετίας του 1930 συνέβαλε αποφασιστικά στη μαθηματική θεμελίωση της στατιστικής μηχανικής, επεκτείνοντας το εργοδικό θεώρημα του G.D. Birkhoff. Η εργασία του του 1938 «Το ομογενές Χάος», που αποσκοπεί στην κατανόηση των μη γραμμικών τυχαίων φαινομένων, βρήκε συνέχεια στη κατασκευαστική κβαντική θεωρία πεδίου με το όνομα «διάταξη του Wick».

Το τελευταίο μέρος του αφιερώματος θα καλύψει την εργασία του Wiener πάνω στον έλεγχο των αντιαεροπορικών πυρών κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου και τη διασημότερη προσφορά του — την κυβερνητική.

**ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ ΣΤΟ
ΕΠΙΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ**

Από 11 ετών και άνω
Russell Stannard
**ΧΙΛΙΑ ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΥΣΤΗΡΙΑ
ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ**



«Και σ' αυτό το βιβλίο διαφαίνεται ο ένθερμος ζήλος με τον οποίο ο Stannard εισάγει τους νεαρούς αναγνώστες στα μυστικά της φυσικής, με έναν τρόπο συναρπαστικό... Δροσερό ανάγνωσμα, γνήσια επιστήμη...» *Physics World*

Σελ.:165, 2.900 δρχ.

ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ

- **Ο χρόνος και ο χώρος του Θείου Αλβέρτου**
- **Οι μαύρες τρύπες και ο Θεός Αλβέρτος**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κάτοπτρο

ΟΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Χρησιμοποιείτε διανύσματα — αλλά πράγματι τα καταλαβαίνετε;

Boris Korsunsky

ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΟΥ ΕΜΠΕΙΡΙΑ (τόσο στη Ρωσία όσο και στις ΗΠΑ) έχω την πεποίθηση ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια των διανυσματικών φυσικών ποσοτήτων. Ιδιαίτερα δύσκολη γι' αυτούς είναι, η ιδέα των συνιστωσών. Το χειρότερο είναι ότι πολλοί μαθητές μαθαίνουν με ακρίβεια τη «διαδικασία επίλυσης» και μπορούν να λύνουν «τυπικά» προβλήματα που περιλαμβάνουν την έννοια των συνιστωσών διανυσμάτων, στην πραγματικότητα όμως δεν τα καταλαβαίνουν. Είναι περίεργο —έχω μιλήσει γι' αυτό το θέμα στο σχολείο μου με μαθητές που ακολουθούν είτε θεωρητική είτε θετική κατεύθυνση, και όλοι σχεδόν κάνουν τις ίδιες απλοϊκές ερωτήσεις!

Για να αποφευχθούν οι περιπτώσεις, στις οποίες καθηγητής και μαθητής είναι πεπεισμένοι ότι ο μαθητής κατανοεί όντως, την έννοια ενώ στην πραγματικότητα δεν την καταλαβαίνει, χρησιμοποιήσα ασυνήθιστα, «έξυπνα» προβλήματα τα οποία, όσον αφορά το μαθηματικό μέρος

τους, είναι βατά ακόμη και για ένα εισαγωγικό μάθημα φυσικής λυκείου. Συγχρόνως, είναι τόσο πλούσια σε ιδέες που ακόμη και φοιτητές πανεπιστημίου αντιμετωπίζουν δυσκολίες με πολλά απ' αυτά. Αν είστε σε θέση να λύσετε αυτά τα προβλήματα, μπορώ να είμαι σίγουρος

(πάνω-κάτω) ότι γνωρίζετε πραγματικά «πώς παίζεται το παιχνίδι». Σε τούτο το άρθρο, λοιπόν, προσφέρω κάποια παραδείγματα που είναι βέβαιο ότι θα απογοητεύσουν τους φίλους της άλγεβρας.

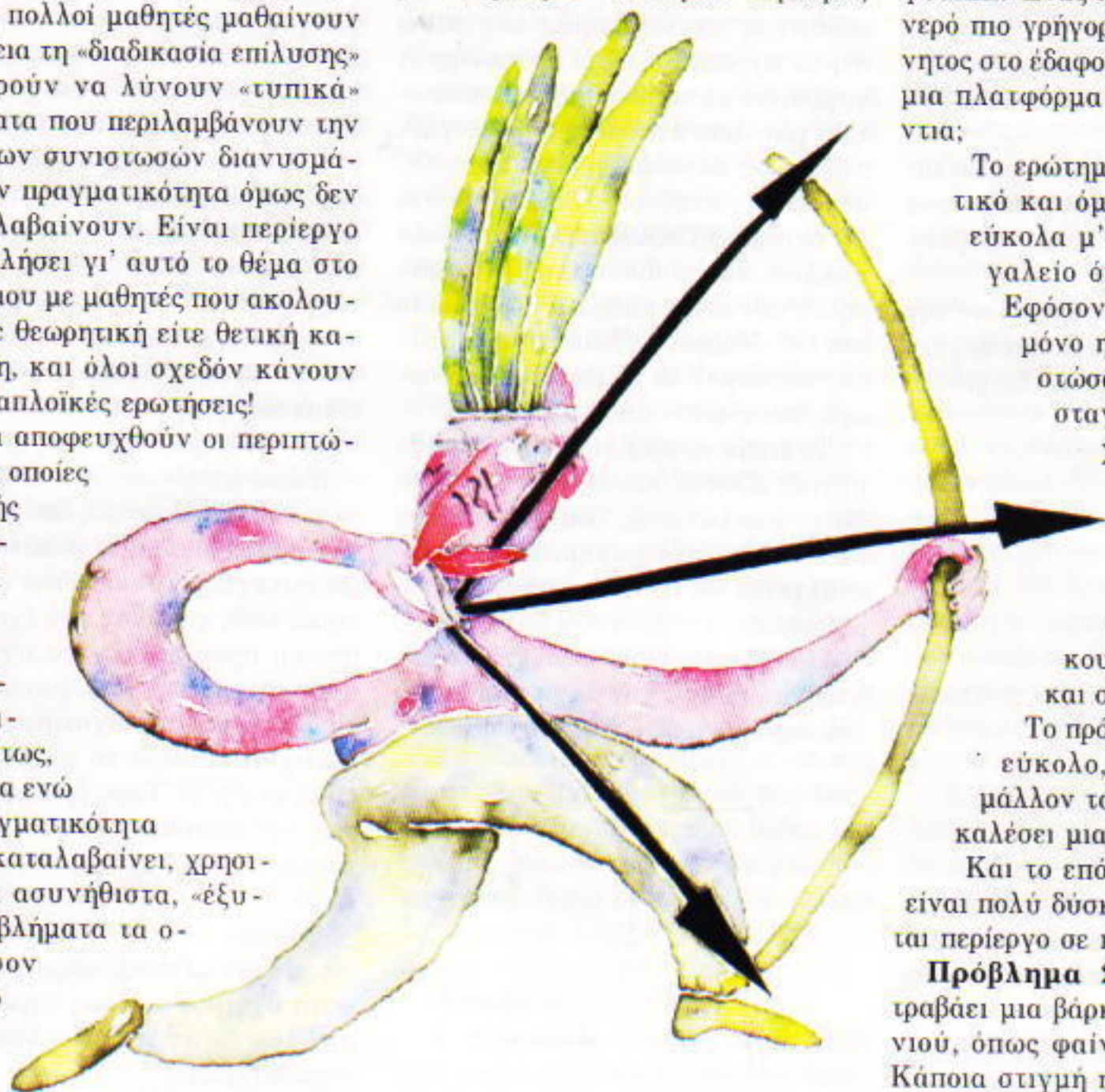
Πρόβλημα 1. Βρέχει (όμως δεν φυσάει). Ένας κουβάς θα γεμίσει με νερό πιο γρήγορα αν βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος ή αν τοποθετηθεί σε μια πλατφόρμα που κινείται οριζόντια;

Το ερώτημα είναι σαφώς ποιοτικό και όμως μπορεί να λυθεί εύκολα μ' ένα «ποσοτικό» εργαλείο όπως οι συνιστώσες. Εφόσον εδώ έχει σημασία μόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας των σταγόνων της βροχής, ο χρόνος που απαιτείται για να γεμίσει ο κουβάς δεν εξαρτάται από την οριζόντια ταχύτητα του κουβά· θα είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις.

Το πρόβλημα είναι σχετικά εύκολο, όμως μπορεί (και μάλλον τα κατάφερε) να προκαλέσει μια καλή συζήτηση.

Και το επόμενο πρόβλημα δεν είναι πολύ δύσκολο, ωστόσο φαίνεται περίεργο σε πολλούς μαθητές.

Πρόβλημα 2. Ένας άνθρωπος τραβάει μια βάρκα μέσω ενός σκοινιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Κάποια στιγμή η γωνία μεταξύ του σκοινιού και της ταχύτητας της βάρ-





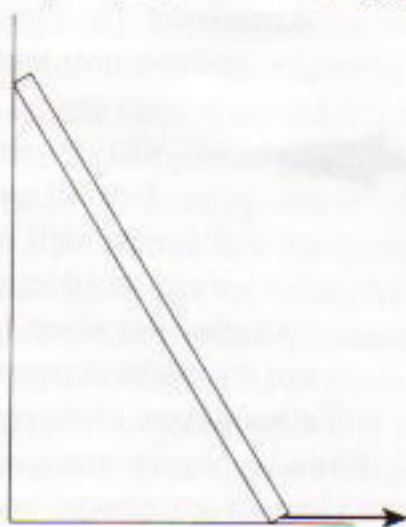
Σχήμα 1

κας είναι θ . (Ίσως πείτε: «Μα, πρώτα απ' όλα, αυτό είναι αδύνατο!» Είναι;) Το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας είναι u . Βρείτε το μέτρο u της ταχύτητας με την οποία ο άνθρωπος πρέπει να τραβεί το σκοινί τη στιγμή αυτή.

Και σε τούτο το πρόβλημα γίνεται χρήση της έννοιας των συνιστωσών. Η απάντηση είναι $u = v \cdot \sin \theta$. Αν καταλαβαίνετε την ουσία του προβλήματος, θα λέγατε ότι η συνιστώσα της ταχύτητας της βάρκας κατά μήκος του σκοινιού είναι ίση με την ταχύτητα του σκοινιού (υποθέτουμε ότι το σκοινί δεν έχει καμία ελαστικότητα —ειδάλλως το πρόβλημα θα ήταν άστοχο). Δυστυχώς, από την εμπειρία μου γνωρίζω ότι πολλοί μαθητές είναι απολύτως πεπεισμένοι πως για να μπορέσεις να ασχοληθείς με συνιστώσες σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, πρέπει να έχεις δύο κάθετους άξονες συντεταγμένων. Το πρόβλημα αυτό ξεκάθαρα λέει: «Όχι, δεν χρειάζεται».

Το επόμενο πρόβλημα φαίνεται διαφορετικό, στην πραγματικότητα όμως είναι παρόμοιο με το Πρόβλημα 2.

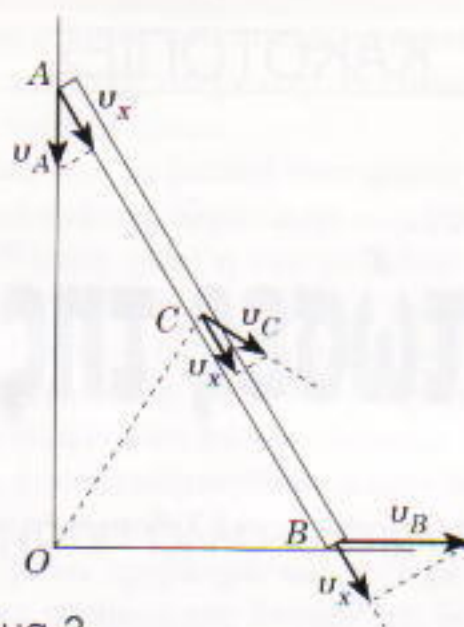
Πρόβλημα 3. Μια ράβδος που την ακουμπήσαμε σ' έναν τοίχο αρχίζει να γλιστρά προς τα κάτω (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Δίνεται η ταχύτητα του κάτω άκρου της ράβδου. Βρείτε γραφικά τις ταχύτητες του πάνω άκρου της ράβδου και του μέσου της.

Ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος (που ομολογουμένως είναι λίγο δυσκολότερο) φαίνεται στο Σχήμα 3.

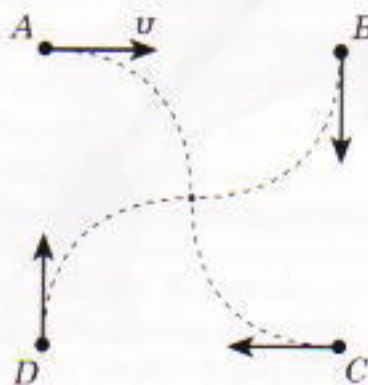


Σχήμα 3

Εφόσον η ράβδος είναι στερεό σώμα, οι συνιστώσες των ταχυτήτων όλων των σημείων της ράβδου κατά μήκος του άξονά της θα είναι ίδιες. (Ειδάλλως οι μεταξύ τους αποστάσεις θα άλλαζαν!) Αν γνωρίζουμε τη συνιστώσα ενός διανύσματος κατά μια συγκεκριμένη κατεύθυνση και την πραγματική κατεύθυνση του διανύσματος, μπορούμε εύκολα να βρούμε και το ίδιο το διάνυσμα. Η κατεύθυνση της ταχύτητας του πάνω άκρου της σκάλας είναι προφανής. Τι συμβαίνει με το μέσο της; Η γεωμετρία μάς λέει ότι όσο η ράβδος γλιστρά προς τα κάτω, η απόσταση OC παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο C κινείται πάνω σε τόξο κύκλου, και το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι κάθε στιγμή κάθετο στο OC . Μπορούμε λοιπόν να «κατασκευάσουμε» το αντίστοιχο διάνυσμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Το επόμενο πρόβλημα είναι πραγματικά έξυπνο, και είμαι βέβαιος ότι θα το απολαύσετε. (Εκτός αν είστε πολύ καλοί στα μαθηματικά, οπότε ενδέχεται να αντιμετωπίσετε προβλήματα!)

Πρόβλημα 4. Τέσσερα χελωνονιτζάκια, έτοιμα για μάχη, στέκονται στα σημεία A, B, C και D σχηματίζο-



Σχήμα 4

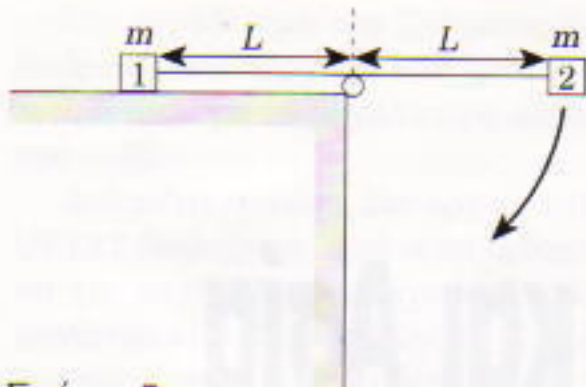
ντας ένα τετράγωνο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Την ίδια χρονική στιγμή αρχίζουν να κυνηγούν το ένα το άλλο: η ταχύτητα της χελώνας A (συγγνώμη, ποτέ δεν καταφέρνω να θυμηθώ τα υπέροχα ονόματά τους!) κατευθύνεται κάθε στιγμή προς τη χελώνα B , η ταχύτητα της οποίας, με τη σειρά της, κατευθύνεται προς τη χελώνα C , η οποία κυνηγά τη χελώνα D με τον ίδιο τρόπο. Και φυσικά η χελώνα D κυνηγά τη χελώνα A . Τα μέτρα των ταχυτήτων τους είναι ίδια: είναι επιπλέον σχεδόν προφανές ότι κινούμενες πάνω σε καμπύλες γραμμές, τελικά θα συναντηθούν στο κέντρο του αρχικού τετραγώνου $ABCD$. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι L και το μέτρο της ταχύτητας που έχει κάθε χελωνονιτζάκι είναι v ; (Ερώτηση-δώρο: ποιο είναι το νόημα ενός τέτοιου αγωνίσματος;)

Δεν είναι καταπληκτικό πρόβλημα; Φυσικά δεν μπορούμε να αναλύσουμε αυτές τις καμπύλες που ξεφεύγουν από τα όρια των απλών μαθηματικών. Αν εσείς μπορείτε, τόσο το χειρότερο —θα χάσετε όλη την πλάκα! Και η πλάκα είναι να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία της διάταξης. Κάθε χρονική στιγμή οι χελώνες σχηματίζουν ένα τετράγωνο που μειώνεται σε μέγεθος και ταυτόχρονα περιστρέφεται. Τι εξαισία κίνηση! Το κέντρο, όμως, του τετραγώνου προφανώς δεν κινείται. Και είναι ακριβώς εκεί όπου συναντώνται —το σημείο που μας ενδιαφέρει.

Τώρα μπαίνουν στο παιχνίδι οι συνιστώσες. Παρότι η διεύθυνση της ταχύτητας της κάθε χελώνας αλλάζει συνεχώς, η συνιστώσα της ταχύτητας κάθε χελώνας που έχει κατεύθυνση προς το κέντρο σχηματίζει κάθε στιγμή την ίδια γωνία (45°) με το διάνυσμα της ταχύτητας, και έτσι διατηρεί σταθερό το μέτρο της που είναι $v(\sqrt{2}/2)$. Τώρα βρίσκουμε άμεσα την απάντηση. Δεν είναι εκπληκτικό; (Η απάντηση είναι πράγματι L/v).

Φυσικά, οι συνιστώσες είναι χρήσιμες όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα σχετικά με τους νόμους κίνησης του Νεύτωνα. Νά δύο όμορφα παραδείγματα:

Πρόβλημα 5. Το σύστημα που



Σχήμα 5

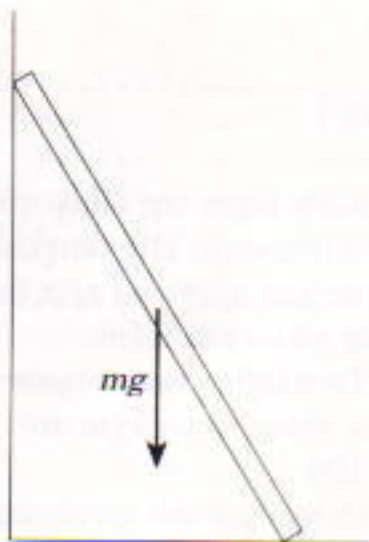
φαίνεται στο Σχήμα 5 μπορεί να κινείται ελεύθερα από κατάσταση ηρεμίας, χωρίς τριβές. Τι θα συμβεί πρώτα, το σώμα 1 θα χτυπήσει την τροχαλία ή το σώμα 2 θα χτυπήσει τον τοίχο;

Τι μπορούμε να κάνουμε εδώ; Η διεύθυνση και το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα 2 αλλάζουν συνεχώς! Είστε έτοιμοι για μερικές φρικτές ολοκληρώσεις; Προσπαθήστε πάλι, μπορώ να σας περιμένω!

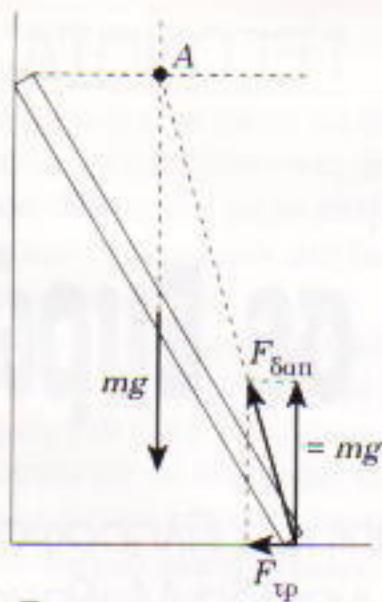
Το πρόβλημα αυτό δεν είναι και τόσο εύκολο, είναι επιπέδου ολυμπιάδων, η λύση του ωστόσο είναι εκπληκτικά σύντομη. Απλώς προσέξτε τις οριζόντιες συνιστώσες. Η τάση του νήματος (που είναι βεβαίως η ίδια και για τα δύο σώματα) είναι η μόνη που συμβάλλει στην οριζόντια επιτάχυνση των δύο σωμάτων. Φυσικά η οριζόντια συνιστώσα αυτής της δύναμης είναι μεγαλύτερη για το σώμα 1 κάθε χρονική στιγμή! Εφόσον τα δύο σώματα έχουν να διανύσουν την ίδια απόσταση, το σώμα 1 θα φτάσει πρώτο. (Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι πάντοτε μεγαλύτερη από αυτή του σώματος 2.)

Το επόμενο (και τελευταίο) πρόβλημα εισάγει την ιδέα της ροπής.

Πρόβλημα 6. Μια ομογενής ράβδος ακουμπά σ' έναν τοίχο όπως



Σχήμα 6



Σχήμα 7

φαίνεται στο Σχήμα 6. Με δεδομένο ότι ο τοίχος δεν παρουσιάζει τριβή και με δεδομένο το διάνυσμα που παριστάνει το βάρος της ράβδου, βρείτε γραφικά το διάνυσμα που αντιστοιχεί στη δύναμη της τριβής ανάμεσα στη ράβδο και στο δάπεδο. (Μπορεί το δάπεδο να μην παρουσιάζει επίσης τριβή;)

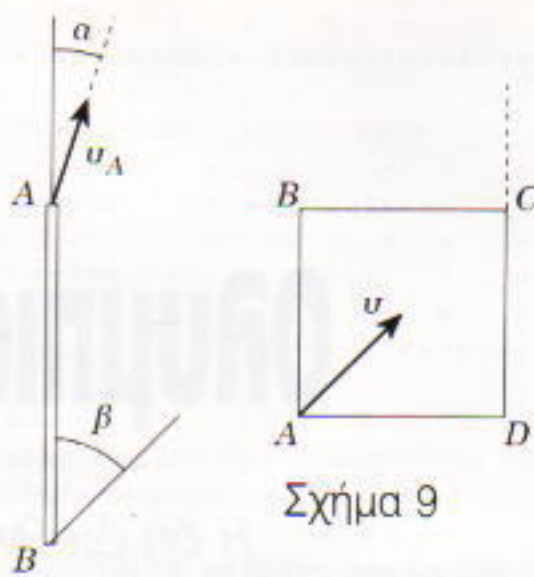
Η λύση, που φαίνεται στο Σχήμα 7, εμπεριέχει δύο σημαντικές ιδέες. Πρώτον, η συνολική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο πρέπει να είναι μηδενική. Δεύτερον, αφού η κάθετη δύναμη από τον τοίχο και το βάρος «περνούν» από το σημείο A, η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στη ράβδο πρέπει επίσης να περνά από το ίδιο σημείο!

Τώρα που γνωρίζουμε την κατεύθυνση αυτής της δύναμης, είναι η κατάλληλη στιγμή να θυμηθούμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της $F_{\delta\alpha\eta}$ είναι ίση με το βάρος της ράβδου (πράγμα που μας επιτρέπει να «κατασκευάσουμε» το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην κάθετη αντίδραση του δαπέδου). Με το διάνυσμα αυτό στη διάθεσή μας μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε την οριζόντια συνιστώσα του —η οποία δεν είναι παρά η άγνωστη δύναμη της τριβής!

Τα έξυπνα προβλήματα είναι και διασκεδαστικά, και συχνά μας βοηθούν να κατανοήσουμε σε βάθος μια έννοια. Θα σας αφήσω με μερικές ασκήσεις. Είμαι σίγουρος ότι τελικά θα περάσετε όμορφα μαζί τους!

Ασκήσεις

1. Μια ομάδα μυρμηγκία τραβάει ένα μικρό σπριτόξυλο. Κάποια στιγμή οι ταχύτητες των άκρων A και B



Σχήμα 8

Σχήμα 9

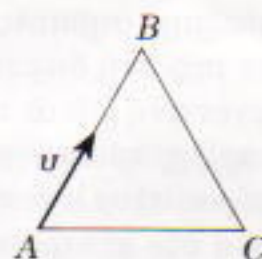
σχηματίζουν γωνίες α και β , αντίστοιχα, με τον άξονα του ξύλου (Σχήμα 8). Δίνεται το μέτρο της ταχύτητας του άκρου A. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του άκρου B.

2. Όταν τα μυρμηγκία τελειώνουν με το σπριτόξυλο, συνεχίζουν τη σκληρή δουλειά τους. Τώρα τραβούν ένα τετράγωνο κομμάτι από χαρτόνι ABCD. Κάποια στιγμή γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του A κατευθύνεται από το A στο C και έχει μέτρο u . Η ταχύτητα του C τη στιγμή αυτή έχει διεύθυνση τη CD (Σχήμα 9). Βρείτε τις ταχύτητες των B, C και D.

3. Όταν τα μυρμηγκία τελειώνουν αυτή την εργασία, κάνουν ένα διάλειμμα.

(Μπορείτε κι εσείς να κάνετε το ίδιο.) Αφού ξεκουραστούν, τραβούν ένα ισοσκελές τρίγωνο ABC από χαρτόνι (Σχήμα 10). Είναι γνωστό ότι κάποια στιγμή η ταχύτητα του A κατευθύνεται από το A στο B και έχει μέτρο u , ενώ η ταχύτητα του C έχει διεύθυνση την BC. Βρείτε τις ταχύτητες των B και C.

4. Γιατί είναι ευκολότερο να «βγάλουμε» ένα καρφί από τον τοίχο αν το περιστρέψουμε συνεχώς όσο το τραβάμε; (Υπόδειξη: σκεφτείτε τη συνιστώσα της δύναμης της τριβής, η οποία ενεργεί αντίθετα με τη δύναμη που ασκούμε τραβώντας.)



Σχήμα 10

Ο **Boris Korsunsky** διδάσκει στο Northfield Mount Hermon School, στο Νόρθφιλντ της Μασσαχουσέτης.

Ολυμπιάδες σε Ευρώπη και Ασία

Η 6η Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής στη Στοκχόλμη και η 35η Διεθνής Ολυμπιάδα Μαθηματικών στο Χονγκ Κονγκ

ΤΟ 1994 ΗΤΑΝ Η ΣΕΙΡΑ ΤΗΣ ΣΟΥΗΔΙΑΣ να οργανώσει τη Διεθνή Ολυμπιάδα Πληροφορικής (ΔΟΠ). Διαγωνιζόμενοι από 48 χώρες έμειναν επί μία εβδομάδα, από τις 3 έως τις 10 Ιουλίου, στο Βασιλικό Ινστιτούτο Τεχνολογίας, στη Στοκχόλμη, που φιλοξένησε τις εκδηλώσεις της Ολυμπιάδας του 1994.

Η εναρκτήρια τελετή άνοιξε με την παρέλαση των σημαίων των ομάδων και την παράδοση στον Yngve Lindberg, πρόεδρο της ΔΟΠ 1994, της επίσημης σημαίας των αγώνων από την περσινή διοργανώτρια χώρα, την Αργεντινή. Μετά τη λήξη της τελετής έναρξης το πρόγραμμα της πρώτης ημέρας ολοκληρώθηκε με μια περιήγηση στο κέντρο και τα κανάλια της Στοκχόλμης, της «Βενετίας του Βορρά».

Οι δύο επόμενες ημέρες ήταν αφιερωμένες στον πρώτο γύρο προγραμματιστικών ασκήσεων. Ακολούθησε μια μέρα ξεκούρασης και περιηγήσεων. Έγινε επίσκεψη στη μεγάλη σουηδική εταιρεία τηλεπικοινωνιών, την Ericsson, όπου δόθηκε μια επιστημονική διάλεξη για το μέλλον των τηλεπικοινωνιών και παρουσιάστηκαν ασυνήθιστα ρομπότ.

Στη συνέχεια, δεύτερος σταθμός μας ήταν ένα από τα σπουδαιότερα αξιοθέατα της Στοκχόλμης—η *Vasa*. Αυτό το πολεμικό πλοίο του 17ου αιώνα ανελκύστηκε το 1961, αφού είχε μείνει επί 330 χρόνια στο βυθό του λιμανιού. Το πλοίο είχε παραμείνει σχεδόν ανέπαφο λόγω της χαμηλής περιεκτικότητας του νερού της Βαλτικής σε οξυγόνο, και αποκαταστάθηκε πλήρως

στην αρχική του μορφή. Σήμερα αποτελεί έναν ζωντανό μάρτυρα της ναυπηγικής τέχνης και θαλάσσιας ζωής του 17ου αιώνα. Αυτή η γεμάτη έντονες εντυπώσεις μέρα έκλεισε μ' ένα σεμινάριο πάνω στο "Alias", ένα από τα περισσότερο εξελιγμένα εργαλεία λογισμικού για δημιουργία κινουμένων σχεδίων, για οπτικοποίηση και σχεδιασμό.

Ο δεύτερος γύρος του διαγωνισμού ήταν οργανωμένος όπως ακριβώς και ο πρώτος, τα προβλήματα όμως ήταν δυσκολότερα. Νικητής των νικητών, που απέσπασε το βραβείο για την υψηλότερη βαθμολογία συγκεντρώνοντας 195 βαθμούς, ήταν ο Victor Bargatchev από τη Ρωσία. Οι πρώτες επτά χώρες, η βαθμολογία τους και τα μετάλλια που συγκέντρωσαν ήταν οι εξής:

	Βαθμοί	Χρ.	Αρ.	Χάλ.
Ρωσία	617	3	1	-
Κίνα	558	3	-	1
Γερμανία	492	2	1	1
Ουγγαρία	475	2	-	1
ΗΠΑ	463	1	1	2
Τσεχία	450	1	2	1
Ρουμανία	444	1	2	1

Η απονομή των βραβείων έγινε με ιδιαίτερη λαμπρότητα, αφού πραγματοποιήθηκε στον ίδιο χώρο όπου απονέμονται κάθε χρόνο τα βραβεία Νόμπελ—στο πανέμορφο Δημαρχείο της Στοκχόλμης.

Οι τελετές έληξαν με την παρουσίαση του Ries Kock, του αρχηγού της ομάδας της Ολλανδίας, της χώρας που θα φιλοξενήσει την Ολυμπιάδα του 1995. Ο Ries έθεσε το θέμα του ιδιαί-

τερα μικρού ποσοστού συμμετοχής κοριτσιών στο διαγωνισμό—δεν ξεπερνούσε το 5%—και πρότεινε να αυξηθούν τα μέλη κάθε ομάδας από τέσσερα σε πέντε, με την προϋπόθεση ότι το ένα τουλάχιστον να είναι κορίτσι.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα θέματα της φετινής Ολυμπιάδας, η οποία άφησε τις καλύτερες εντυπώσεις για την άψογη οργάνωσή της και θα αποτελέσει ένα μέτρο σύγκρισης για όσες θα ακολουθήσουν.

Ημέρα 1η - πρόβλημα 1

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται ένα τρίγωνο που αποτελείται από αριθμούς. Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει το μεγαλύτερο άθροισμα των αριθμών από τους οποίους διέρχεται μια διαδρομή που ξεκινά από την κορυφή και καταλήγει κάπου στη βάση.

			7		
		3		8	
	8		1		0
	2	7		4	4
4	5	2	6	5	

Σχήμα 1

- Κάθε βήμα της διαδρομής μπορεί να κατευθύνεται είτε διαγωνίως προς τα κάτω και αριστερά είτε διαγωνίως προς τα κάτω και δεξιά.

- Το πλήθος των σειρών του τριγώνου είναι τουλάχιστον 1 και το πολύ 100.

- Οι αριθμοί του τριγώνου είναι μη αρνητικοί ακέραιοι γνήσια μικρότεροι του 100.

Στο παράδειγμα του Σχήματος 1 η διαδρομή που διέρχεται από τους 7, 3, 8, 7, 5 παράγει το μεγαλύτερο άθροισμα —30.

Δεδομένα εισόδου. Στο αρχείο INPUT.TXT διαβάζουμε πρώτα τα δεδομένα για το πλήθος των γραμμών του τριγώνου ενώ ακολουθούν οι γραμμές του τριγώνου. Στο παράδειγμά μας το INPUT.TXT έχει ως εξής:

```
5
7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

Δεδομένα εξόδου. Το μεγαλύτερο άθροισμα γράφεται ως ακέραιος στο αρχείο OUTPUT.TXT. Στο παράδειγμά μας αυτό το αρχείο θα περιέχει τον αριθμό 30.

Ημέρα 1η - πρόβλημα 2

Το Σχήμα 2 παρουσιάζει το χάρτη ενός κάστρου. Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει:

1. Το πλήθος των δωματίων του κάστρου.
2. Το μέγεθος σε μοναδιαία τετράγωνα του μεγαλύτερου δωματίου.
3. Ποιον τοίχο (που χωρίζει δύο υπάρχοντα δωμάτια) πρέπει να αφαιρέσουμε από το κάστρο για να δημιουργήσουμε το μεγαλύτερο δυνατόν δωμάτιο.

Το κάστρο διαιρείται σ' ένα πλέγμα μοναδιαίων τετραγώνων, αποτελούμενο από m σειρές και n στήλες ($m \leq 50, n \leq 50$). Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο μπορεί να περιέχει από κανέναν έως και τέσσερις τοίχους.

Δεδομένα εισόδου. Ο χάρτης είναι αποθηκευμένος στο αρχείο INPUT.TXT

```
1 2 3 4 5 6 7
*****
1*      *      *      *
****      *      *      *
2* *      *      *      *
* *****      *      *
3*      *      *      *
* *****      *      *
4* *      *      *
*****
```

B
Δ + Α
N

Σχήμα 2

Μια σειρά από * είναι ένας τοίχος.

με τη μορφή αριθμών —ένας για κάθε μοναδιαίο τετράγωνο.

Το αρχείο ξεκινά με το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων στη διεύθυνση Βορρά-Νότου και με το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων στη διεύθυνση Ανατολής-Δύσης.

- Στις επόμενες γραμμές κάθε μοναδιαίο τετράγωνο περιγράφεται από έναν αριθμό ($0 \leq p \leq 15$). Αυτός ο αριθμός ισούται με το άθροισμα των 1 (= τοίχος στα δυτικά), 2 (= τοίχος στο Βορρά), 4 (= τοίχος στα ανατολικά), 8 (= τοίχος στο Νότο). Οι εσωτερικοί τοίχοι ορίζονται δύο φορές —ένας τοίχος στο Νότο στην περιοχή 1,1 θα εμφανίζεται και ως τοίχος στο Βορρά στην περιοχή 2,1. Η περιοχή στη θέση 1,1 έχει έναν δυτικό, έναν βόρειο και έναν νότιο τοίχο, επομένως το άθροισμα είναι $1 + 2 + 8 = 11$.

- Το κάστρο έχει πάντοτε τουλάχιστον δύο δωμάτια.

Το INPUT.TXT για το παράδειγμά μας είναι:

```
4
7
11 6 11 6 3 10 6
7 9 6 13 5 15 5
1 10 12 7 13 7 5
13 11 10 8 10 12 13
```

Δεδομένα εξόδου. Στο αρχείο OUTPUT.TXT γράφονται σε τρεις γραμμές τα εξής:

1. Το πλήθος των δωματίων.
2. Το εμβαδόν του μεγαλύτερου δωματίου μετρημένο σε μοναδιαία τετράγωνα.
3. Μια υπόδειξη για το ποιος τοίχος από αυτούς που χωρίζουν δύο υπαρκτά δωμάτια πρέπει να απομακρυνθεί για να γίνει ένα δωμάτιο όσο το δυνατόν μεγαλύτερο (πρώτα τη σειρά, μετά τη στήλη του μοναδιαίου τετραγώνου που βρίσκεται δίπλα στον τοίχο και τέλος το σημείο του οριζοντα προς το οποίο βρίσκεται ο τοίχος). Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας τοίχοι, αρκεί όμως να επιλέξετε έναν («4 1 A» είναι μια από τις διάφορες δυνατότητες). Στο παράδειγμά μας:

5
9
4 1 A

Η τελευταία γραμμή αναφέρεται στην απομάκρυνση του τοίχου που

```
1 2 3 4 5 6 7
*****
1*      *      *      *
****      *      *      *
2* *      *      *      *
* *****      *      *
3*      *      *      *
* *****      *      *
4*->*      *      *
*****
```

Σχήμα 3

Απομάκρυνση του ανατολικού τοίχου του μοναδιαίου τετραγώνου 4,1.

σημειώνεται με το βέλος στο Σχήμα 3.

Ημέρα 1η - πρόβλημα 3

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται ένα τετράγωνο. Κάθε σειρά, κάθε στήλη και οι δύο διαγώνιοι μπορούν να διαβαστούν ως πενταψήφιοι πρώτοι αριθμοί. Διαβάζουμε τις σειρές από τα αριστερά προς τα δεξιά, τις στήλες από πάνω προς τα κάτω και τις δύο διαγωνίους από τα αριστερά προς τα δεξιά. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του αρχείου INPUT.TXT γράψτε ένα πρόγραμμα που θα κατασκευάζει τέτοια τετράγωνα.

```
1 1 3 5 1
3 3 2 0 3
3 0 3 2 3
1 4 0 3 3
3 3 3 1 1
```

Σχήμα 4

- Οι πρώτοι αριθμοί πρέπει να έχουν το ίδιο άθροισμα ψηφίων (στο Σχήμα 4 είναι 11).

- Το ψηφίο στην πάνω αριστερή γωνία του τετραγώνου είναι προκαθορισμένο (1 στο Σχήμα 4).

- Ένας πρώτος αριθμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές στο ίδιο τετράγωνο.

- Αν υπάρχουν διαφορετικές λύσεις, πρέπει να παρουσιαστούν όλες.

- Ένας πενταψήφιος πρώτος αριθμός δεν μπορεί να αρχίζει από μηδέν —δηλαδή, το 00003 δεν είναι πενταψήφιος πρώτος.

Δεδομένα εισόδου. Το πρόγραμμα διαβάζει τα δεδομένα από το αρχείο INPUT.TXT —πρώτα το άθροισμα των ψηφίων των πρώτων αριθμών και κατόπιν το ψηφίο στην πάνω αριστερή γωνία του τετραγώνου. Το αρχείο περιέχει δύο γραμμές. Θα υπάρχει πάντοτε λύση για τα δεδομένα που παρέχονται. Στο παράδειγμά μας:

Δεδομένα εξόδου. Στο αρχείο OUTPUT.TXT γράφονται πέντε γραμμές για κάθε λύση που θα βρεθεί, όπου η κάθε γραμμή αποτελείται από έναν πενταψήφιο πρώτο αριθμό. Το παραπάνω παράδειγμα έχει τρεις λύσεις, πράγμα που σημαίνει ότι το OUTPUT.TXT περιέχει τα εξής (οι κενές γραμμές ανάμεσα στις διαφορετικές λύσεις είναι προαιρετικές):

```

1 1 3 5 1
1 4 0 3 3
3 0 3 2 3
5 3 2 0 1
1 3 3 1 3

1 1 3 5 1
3 3 2 0 3
3 0 3 2 3
1 4 0 3 3
3 3 3 1 1

1 3 3 1 3
1 3 0 4 3
3 2 3 0 3
5 0 2 3 1
1 3 3 3 1

```

Ημέρα 2η - πρόβλημα 1

Οι εννέα αριθμοί στο πάνω μέρος του Σχήματος 5 παριστάνουν τις θέσεις εννέα δεικτών ρολογιού, όπου κάθε δείκτης μπορεί να έχει μία από τις επόμενες τέσσερις θέσεις: βόρεια ή 12 η ώρα (0), ανατολικά ή 3 η ώρα (1), νότια ή 6 η ώρα (2) και δυτικά ή 9 η ώρα

```

3 3 0
2 2 2
2 1 2

0
3--1
2

```

Σχήμα 5

Θέσεις των δεικτών.

(3) (όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 5).

Θεωρούμε εννέα διαφορετικούς τρόπους περιστροφής των δεικτών πάνω στα ρολόγια. Ονομάζουμε κίνηση καθέναν από αυτούς τους τρόπους. Κάθε κίνηση επιλέγεται μέσω ενός από τους αριθμούς 1 έως 9. Η επιλογή ενός

αριθμού περιστρέφει του δείκτη που είναι σημειωμένος με «1» κατά ενενήντα μοίρες δεξιόστροφα. Σε όσους είναι σημειωμένοι με «0» δεν έχει επίδραση. Οι εννέα κινήσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.

```

1 1 0 1 1 1 0 1 1
1 1 0 0 0 0 0 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0
Κίνηση 1  Κίνηση 2  Κίνηση 3

1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 0 1 1 1 0 0 1
1 0 0 0 1 0 0 0 1
Κίνηση 4  Κίνηση 5  Κίνηση 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 1 1
1 1 0 1 1 1 0 1 1
Κίνηση 7  Κίνηση 8  Κίνηση 9

```

Σχήμα 6

Για παράδειγμα, η επόμενη ακολουθία κινήσεων έχει το εξής αποτέλεσμα στη θέση των δεικτών: καταλήγουν όλοι στις 12 η ώρα (0):

```

3 3 0 3 0 0
2 2 2  Κίνηση 5 → 3 3 3
2 1 2 2 2 2

3 0 0
Κίνηση 8 → 3 3 3
3 3 3

0 0 0
Κίνηση 4 → 3 3 3
0 3 3

0 0 0
Κίνηση 9 → 0 0 0
0 0 0

```

Το πρόβλημα είναι να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα παίρνει οποιαδήποτε αρχική θέση των δεικτών και θα βρίσκει τη συντομότερη ακολουθία κινήσεων που φέρνει όλους τους δείκτες στη θέση 12 η ώρα (0).

Δεδομένα εισόδου. Το πρόγραμμα διαβάζει εννέα αριθμούς από το αρχείο INPUT.TXT. Το προηγούμενο παράδειγμα θα έχει το εξής αρχείο εισόδου:

```

3 3 0
2 2 2
2 1 2

```

Δεδομένα εξόδου. Γράψτε στο αρ-

χείο OUTPUT.TXT τη συντομότερη ακολουθία κινήσεων (των αριθμών τους) που φέρνει όλους τους δείκτες στη θέση 0 (12 η ώρα). Στο παράδειγμά μας το OUTPUT.TXT να είναι το

5849

Ζητείται μία μόνο λύση.

Ημέρα 2η - πρόβλημα 2

Ένας άνθρωπος φτάνει σε μια στάση λεωφορείου στις 12.00. Παραμένει εκεί από τις 12.00 έως τις 12.59. Η στάση χρησιμοποιείται από αρκετές λεωφορειακές γραμμές. Ο άνθρωπος σημειώνει τις ώρες άφιξης των λεωφορείων. Ο χρόνος άφιξης των λεωφορείων δίνεται από τους εξής κανόνες:

1. Λεωφορεία της ίδιας γραμμής φτάνουν κατά κανονικά χρονικά διαστήματα από τις 12.00 έως τις 12.59.
2. Οι χρόνοι δίνονται σε ολόκληρα λεπτά από το 1 έως το 59.

3. Στη στάση φτάνουν τουλάχιστον δύο λεωφορεία της ίδιας γραμμής ανάμεσα στις 12.00 και 12.59.

4. Το πλήθος των λεωφορειακών γραμμών στο παράδειγμα του διαγωνισμού είναι το πολύ 17.

5. Λεωφορεία διαφορετικών γραμμών μπορούν να φτάσουν στη στάση την ίδια στιγμή.

6. Μερικές γραμμές μπορεί να έχουν τον ίδιο χρόνο πρώτης άφιξης είτε διάστημα μεταξύ δύο αφίξεων. Αν δύο γραμμές έχουν τον ίδιο χρόνο πρώτης άφιξης και το ίδιο διάστημα μεταξύ αφίξεων, είναι διαφορετικές και πρέπει να παρουσιαστούν και οι δύο.

Βρείτε το ελάχιστο πλήθος λεωφορειακών γραμμών που πρέπει να σταματήσουν στη στάση για να ικανοποιούνται τα δεδομένα εισόδου. Για κάθε γραμμή να δώσετε το χρόνο πρώτης άφιξης και το διάστημα μεταξύ των αφίξεων.

Δεδομένα εισόδου. Το αρχείο εισόδου INPUT.TXT περιέχει έναν αριθμό n ($n \leq 300$) ο οποίος μας λέει το πλήθος των αφίξεων λεωφορείων που έχουν σημειωθεί, ακολουθούμενο από τους χρόνους άφιξης σε αύξουσα σειρά.

Το παράδειγμά μας:

```

17
0 3 5 13 13 15 21 26 27
29 37 39 39 45 51 52 53

```

Αν δύο λεωφορεία φτάνουν την ίδια

στιγμή, η στιγμή αυτή παρατίθεται δύο φορές.

Δεδομένα εξόδου. Γράψτε στο αρχείο OUTPUT.TXT έναν πίνακα με μία γραμμή για κάθε λεωφορειακή γραμμή. Κάθε γραμμή του αρχείου μας δίνει το χρόνο άφιξης για το πρώτο λεωφορείο και το διάστημα μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων σε λεπτά. Η σειρά των λεωφορειακών γραμμών δεν έχει σημασία. Αν υπάρχουν διαφορετικές λύσεις, αρκεί μόνο μία.

Το παράδειγμά μας δίνει

```
0 13
3 12
5 8
```

Ημέρα 2η - πρόβλημα 3

Θεωρήστε τη μαγική λίστα 5 αριθμών:

```
1 3 10 2 5
```

Αριθμοί που είναι ο ένας δίπλα στον άλλο θεωρούνται γειτονικοί. Επίσης, οι δύο ακραίοι αριθμοί 1 και 5 θεωρούνται γειτονικοί, σαν να σχημάτιζε η λίστα έναν κύκλο. Ξεκινώντας από το 2 μπορούμε να σχηματίσουμε μια αδιάκοπη ακολουθία ακεραίων από το 2 έως το 21 χρησιμοποιώντας έναν μόνο αριθμό από τη λίστα ή προσθέτοντας γειτονικούς αριθμούς. Η ακολουθία σχηματίζεται ως εξής:

```
2, 3, 1 + 3 = 4, 5,
5 + 1 = 6, 2 + 5 = 7,
2 + 5 + 1 = 8,
5 + 1 + 3 = 9, 10,
2 + 5 + 1 + 3 = 11,
10 + 2 = 12, 3 + 10 = 13,
1 + 3 + 10 = 14,
3 + 10 + 2 = 15,
1 + 3 + 10 + 2 = 16,
10 + 5 + 2 = 17,
10 + 2 + 5 + 1 = 18,
5 + 1 + 3 + 10 = 19,
3 + 10 + 2 + 5 = 20,
1 + 3 + 10 + 2 + 5 = 21
```

Σας δίνονται τρεις αριθμοί (n , m και k) όπου

n = το μήκος της λίστας των αριθμών,

m = ο αριθμός εκκίνησης,

k = η μικρότερη δυνατή τιμή ενός μέλους της λίστας —δηλαδή, όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του k .

Σκοπός σας είναι να βρείτε n ακέραιους για τη μαγική λίστα που μπορεί να δημιουργήσει μια αδιάκοπη ακολουθία όλων των ακεραίων $m, m + 1, m + 2, \dots, \max$, όπου ο \max είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος.

Δεδομένα εισόδου. Το αρχείο INPUT.TXT περιέχει τρεις ακεραίους (n, m, k). Για το παράδειγμά μας το αρχείο θα είναι το

```
5
2
1
```

Δεδομένα εξόδου. Το αρχείο OUTPUT.TXT πρέπει να περιέχει τα εξής:

1. Τον μεγαλύτερο αριθμό (\max) που μπορεί να δημιουργηθεί από τη λίστα των αριθμών.

2. Όλες τις μεταθέσεις των αριθμών του κύκλου που δημιουργούν μια ακολουθία από το m έως το \max (μία σε κάθε γραμμή). Κάθε μετάθεση είναι μια λίστα αριθμών που ξεκινά από τον μικρότερο αριθμό (ο οποίος δεν είναι απαραίτητα μοναδικός).

Σημείωση: η (2 10 3 1 5) δεν είναι αποδεκτή λύση επειδή δεν αρχίζει με τον μικρότερο αριθμό. Οι (1 3 10 2 5) και (1 5 2 10 3) πρέπει να περιληφθούν και οι δύο στην έξοδο. Σημειώστε ότι οι (1 1 2 3), (1 3 2 1), (1 2 3 1), και (1 1 3 2) πρέπει να περιέχονται όλες στην έξοδο.

Η έξοδος για το παράδειγμά μας θα είναι:

```
21
1 3 10 2 5
1 5 2 10 3
2 4 9 3 5
2 5 3 9 4
```

Η 35η Διεθνής Ολυμπιάδα Μαθηματικών

Τον Ιούλιο διεξήχθη μία ακόμη Ολυμπιάδα, η Διεθνής Ολυμπιάδα Μαθηματικών. Ο διαγωνισμός έγινε στο Χονγκ Κονγκ από τις 8 έως τις 20 Ιουλίου. Στις πέντε πρώτες θέσεις μεταξύ των 69 ομάδων που συμμετείχαν αναδείχθηκαν οι ΗΠΑ, η Κίνα, η Ρωσία, η Βουλγαρία και η Ουγγαρία. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έξι προβλήματα από την 35η Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών.

1. Έστω m και n θετικοί ακέραιοι.

Έστω a_1, a_2, \dots, a_m διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$, τέτοια ώστε όταν $a_i + a_j \leq n$ για κάποια i, j με $1 \leq i < j \leq m$, υπάρχει k , $1 \leq k \leq m$ τέτοιο ώστε $a_i + a_j = a_k$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

2. Έστω ABC ισοσκελές τρίγωνο με $AB = AC$. Υποθέτουμε ότι (i) M είναι το μέσον της BC και O είναι σημείο της ευθείας AM τέτοιο ώστε η OB να είναι κάθετη στην AB , (ii) Q είναι ένα τυχαίο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος BC διαφορετικό από τα B και C , (iii) το E ανήκει στην ευθεία AB και το F στην ευθεία AC και τα σημεία E, Q, F είναι διαφορετικά και συγγραμικά. Αποδείξτε ότι η OQ είναι κάθετη στην EF αν και μόνον αν $QE = QF$.

3. Για κάθε θετικό ακέραιο k έστω f_k το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ η αναπαράσταση των οποίων στο σύστημα αρίθμησης με βάση 2 περιέχει τρία ακριβώς 1. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $f_k = m$. (β) Προσδιορίστε όλους τους θετικούς ακέραιους m για τους οποίους υπάρχει ακριβώς ένα k με $f_k = m$.

4. Προσδιορίστε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων (m, n) τέτοια ώστε το

$$(n^3 + 1)/(mn - 1)$$

να είναι ακέραιος.

5. Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το -1 . Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: S \rightarrow S$ που ικανοποιούν δύο συνθήκες:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ για κάθε x και y που ανήκουν στο S .

(ii) Η $f(x)/x$ είναι γνησίως αύξουσα για $-1 < x < 0$ και για $0 < x$.

6. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο A θετικών ακεραίων με την εξής ιδιότητα: για κάθε άπειρο σύνολο S πρώτων αριθμών, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $m \in A$ και $n \in A$, καθένας από τους οποίους είναι γινόμενο k διαφορετικών στοιχείων του S για κάποιο $k \geq 2$. \blacksquare

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 61

Το πρόγραμμα της Βοστώνης

Το ετήσιο Πρόγραμμα Μαθηματικών για Νέους Επιστήμονες (Program in Mathematics for Young Scientists, PROMYS) θα πραγματοποιηθεί στο Πανεπιστήμιο της Βοστώνης από τις 2 Ιουλίου έως τις 12 Αυγούστου 1995. Το PROMYS προσφέρει ένα συναρπαστικό μαθηματικό περιβάλλον όπου οι φιλόδοξοι μαθητές λυκείου μπορούν να εξερευνήσουν τον δημιουργικό κόσμο των μαθηματικών. Όσοι συμμετέχουν στο πρόγραμμα καταβάλλουν έντονες προσπάθειες για να λύσουν μια πλούσια συλλογή από ασυνήθιστα και προκλητικά προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Με αυτό τον τρόπο εξασκούνται στην τέχνη της μαθηματικής ανακάλυψης —στην εξερεύνηση των αριθμών, τη διατύπωση και την κριτική των εικασιών και στις τεχνικές απόδειξης και γενίκευσης. Οι πιο έμπειροι μπορούν επίσης να μελετήσουν αφηρημένη άλγεβρα, συνδυαστική και θεωρία της ρημάνειας συνάρτησης ζήτα.

Επίσης, καθημερινά θα δίνονται διαλέξεις από ερευνητές μαθηματικούς, με μεγάλη πείρα από το Θερινό Πρόγραμμα Μαθηματικών του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Οχάιο, που εδώ και πολύ καιρό διοργανώνει ο καθηγητής Arnold Ross. Επιπλέον, 18 σύμβουλοι με άριστη κατάρτιση, που διαμένουν στους κοιτώνες, είναι πάντοτε πρόθυμοι να συζητήσουν με τους μαθητές για θέματα μαθηματικών. Καθένας από τους συμμετέχοντες εντάσσεται σε μια ομάδα λυτών προβλημάτων, η οποία συναντά έναν επαγγελματία μαθηματικό τρεις φορές την εβδομάδα. Ειδικές διαλέξεις προσκεκλημένων ομιλητών παρέχουν μια ευρύτερη εικόνα των μαθηματικών και του ρόλου τους στις θετικές επιστήμες.

Στο PROMYS μπορούν να συμμετάσχουν 60 μαθητές των τριών τάξεων του λυκείου. Η επιλογή τους θα βασιστεί στα εξής κριτήρια: στις λύσεις που θα βρουν για ένα σύνολο προκλητικών προβλημάτων τα οποία θα περιέχονται στο φυλλάδιο της αίτησης· στις συστατικές επιστολές των καθηγητών· σ' ένα

δοκίμιο όπου θα εξηγούν τους λόγους για τους οποίους τους ενδιαφέρει το πρόγραμμα. Τα έξοδά τους θα είναι 1.300 δολάρια για στέγη και διατροφή. Τα βιβλία ίσως κοστίσουν 100 δολάρια επιπλέον. Παρέχεται επίσης και οικονομική βοήθεια. Αρχή του PROMYS είναι ότι κανενός η συμμετοχή δεν πρέπει να εμποδίζεται από οικονομικές ανάγκες.

Το PROMYS διευθύνεται από τον καθηγητή Glenn Stevens. Αιτήσεις μπορείτε να προμηθευτείτε γράφοντας στη διεύθυνση: PROMYS, Department of Mathematics, Boston University, 111 Cummington St., Boston MA 02215 USA, ή τηλεφωνώντας στο (617) 353-2563. Οι αιτήσεις θα γίνονται δεκτές από την 1η Μαρτίου έως την 1η Ιουνίου 1995.

Στο δρόμο για το Νόμπελ

Η Πολωνική Ακαδημία Επιστημών ανακοίνωσε τους νικητές του δεύτερου ετήσιου διεθνούς διαγωνισμού φυσικής μαθητών λυκείου "First Step to Nobel Prize in Physics". Είναι οι: Can Altineller (Τουρκία), Anton A. Belyaev (Ουκρανία), Ζωή Κουρνιά (Ελλάδα), Janko Isidorovic (Γιουγκοσλαβία), Marcus Meuller (Ελβετία), Samuel F. Schaer (Ελβετία), και Michal Rewienski (Πολωνία). Οι νικητές, στους οποίους απονεμήθηκαν διπλώματα, προσκλήθηκαν να περάσουν ένα μήνα στην Πολωνία, κάνοντας έρευνα.

Ο καθηγητής Henryk Szymczak, διευθυντής του Πολωνικού Ινστιτούτου Φυσικής, αναφερόμενος στο σκεπτικό της διοργάνωσης του εν λόγω διαγωνισμού γράφει: «Αρκετοί μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που ενδιαφέρονται για τη φυσική επιθυμούν να παρουσιάσουν τις δικές τους ερευνητικές εργασίες. Πολλές φορές τα αποτελέσματά τους είναι ενδιαφέροντα και αξιόλογα. Γι' αυτό, πριν από δύο χρόνια διοργανώθηκε ο πρώτος διεθνής διαγωνισμός φυσικής για μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το επίπεδο των εργασιών που υποβλήθηκαν ήταν πολύ υψηλό, και

ξεπέρασε τις προσδοκίες των διοργανωτών. Αποφασίστηκε λοιπόν να επαναλαμβάνεται ο διαγωνισμός κάθε χρόνο.

«Οι γενικοί κανόνες είναι οι εξής:

— Γίνονται δεκτοί όλοι οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αρκεί να μη φοιτούν σε πανεπιστημιακό κολέγιο και η ηλικία τους να είναι κάτω των 20 ετών.

— Δεν υπάρχουν περιορισμοί στο θέμα και το επίπεδο των εργασιών, ούτε στις μεθόδους που θα εφαρμοστούν. Ωστόσο, οι εργασίες πρέπει να έχουν ερευνητικό χαρακτήρα και να αφορούν θέματα φυσικής ή θέματα που σχετίζονται άμεσα με τη φυσική. Ο όγκος κάθε εργασίας δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 20 τυπωμένες σελίδες, και να είναι γραμμένη στα αγγλικά.

— Οι συγγραφείς των βραβευμένων εργασιών θα προσκληθούν στο Ινστιτούτο Φυσικής, για να κάνουν έρευνα επί ένα μήνα. Το Ινστιτούτο θα καλύψει τα έξοδα διαμονής στην Πολωνία (δυστυχώς όμως αδυνατεί να καλύψει τα έξοδα του ταξιδιού από και προς την Πολωνία).

— Οι διαγωνιζόμενοι πρέπει να γράψουν την εργασία τους στα αγγλικά, και να την αποστείλουν σε δύο αντίγραφα.

«Ελπίζουμε ότι αυτός ο διαγωνισμός θα δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να συγκρίνουν τις προσπάθειές τους με τις προσπάθειες συνομηλίκων τους από άλλες χώρες. Επίσης, ελπίζουμε ότι η συνάντηση των νέων επιστημόνων στο Ινστιτούτο μας θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν μια φιλική συνεργασία, η οποία θα αποδειχτεί εξαιρετικά πολύτιμη για το μέλλον».

Η προθεσμία για την υποβολή των ερευνητικών εργασιών για τον τρίτο ετήσιο διαγωνισμό λήγει στις 31 Μαρτίου 1995. Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να επικοινωνήσουν με τον καθηγητή Waldemar Gorzkowski (e-mail: gorzk@gamma1.ifpan.edu.pl, fax: 022-430926, τηλ.: 022-435212), Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, al. Lotnikow 32/26, Warszawa, Poland. ■

Η γενική θεωρία

Αγαπητοί φίλοι,

Θα ήθελα κατ' αρχάς να σας εκφράσω τα ειλικρινή συγχαρητήριά μου για την ελληνική έκδοση του *Quantum*. Μια προσπάθεια που πρέπει να υποστηριχτεί θερμά από όλους όσοι ενδιαφέρονται για την προώθηση της μαθηματικής και φυσικής παιδείας στην Ελλάδα. Διδάσκω «φυσική» σε φροντιστήριο προετοιμασίας των μαθητών για τις Πανελλαδικές εξετάσεις και βλέπω την κακοποίηση που υφίσταται η φυσική, αλλά και η απλή λογική πολλές φορές, από το εκπαιδευτικό μας σύστημα. Προσπάθειες σαν τη δική σας δείχνουν ότι κάτι υπάρχει ακόμη που αναπνέει.

Παίρνω τώρα το θάρρος να προτείνω ένα πρόβλημα φυσικής, γνωστό βέβαια σε όλους, αλλά με μια δική μου διαφορετική λύση, που ίσως έχει κάποια αξία.

Πρόβλημα: Όταν ένα σώμα είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο και θέλουμε να το μετακινήσουμε χωρίς να περιστραφεί, πρέπει η δύναμη που θα ασκήσουμε πάνω του να περνάει από το κέντρο βάρους του. Πώς εξηγείται το γεγονός ότι παρόλο που το βάρος εξουδετερώνεται, το κέντρο βάρους του σώματος παίζει καθοριστικό ρόλο στο φαινόμενο; Πόσο μάλλον που το ίδιο συμβαίνει ακόμη και στην περίπτωση όπου το σώμα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.

Απάντηση: Είναι γνωστό ότι σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας ισχύει για ένα σώμα που είναι ακίνητο σε κάποιο σημείο ενός πεδίου βαρύτητας έντασης \vec{E} ότι τα φαινόμενα που παρατηρούνται είναι τα ίδια αν υποθέσουμε πως το σώμα είναι εκτός πεδίου βαρύτητας, αλλά κινείται με επιτάχυνση $\vec{y} = -\vec{E}$. Αντί λοιπόν να μελετήσουμε το φαινόμενο όπως μας δίνεται (επιτάχυνση ενός σώματος εκτός πεδίου βαρύτητας), υποθέτουμε ότι το σώμα βρίσκεται μέσα σε κάποιο πεδίο βαρύτητας

και θέλουμε να ασκήσουμε πάνω του μια δύναμη ώστε να ισορροπεί. Είναι τότε προφανές, ότι η δύναμη αυτή πρέπει να περνάει από το κέντρο βάρους του.

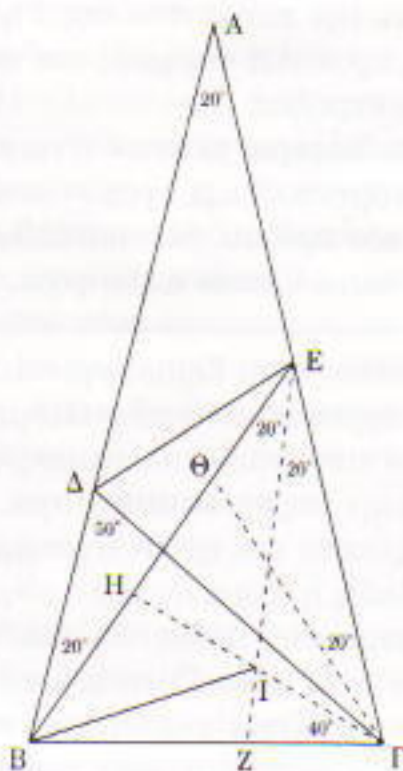
Το πρόβλημα αυτό είναι χαρακτηριστική περίπτωση του πόσο απλά μπορούν να εξηγηθούν καθημερινά, γνωστά μας φαινόμενα με τη βοήθεια μιας γενικής θεωρίας. Δείχνει ότι μια θεωρία μπορεί να επιβεβαιωθεί ακόμη και με την απλή (απλοϊκή;) παρατήρηση φαινομένων της καθημερινής εμπειρίας μας.

Τάσος Σιώπας,
Χαλάνδρι

Άλλη μια λύση

Κύριε Διευθυντά,

Στο τεύχος 2 του *Quantum*, σε άρθρο του Constantine Kpor παρουσιάζονται 9 λύσεις για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο τεύχος 4 ο κ. Κεσογλίδης δίνει δύο ακόμη λύσεις με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας. Επιτρέψτε μου να σας παρουσιάσω μία ακόμη λύση με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας, την οποία ελπίζω να δημοσιεύσετε:



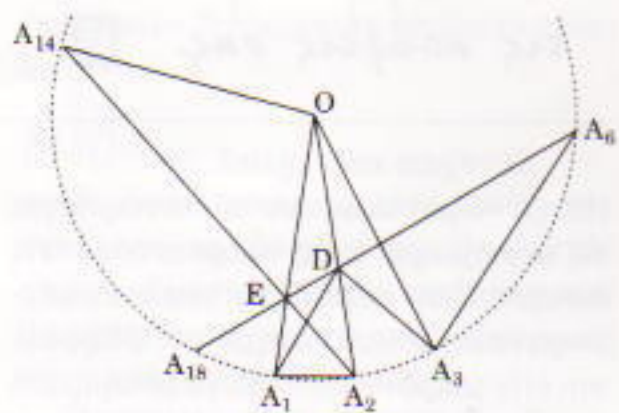
Χαράσσω τη διχοτόμο EZ της $\angle BEG$. Τότε $EZ \parallel AB$. Φέρω και την GH διχοτόμο της $\angle EGB$. Επειδή $EI \parallel BD$,

αρκεί να δείξω ότι $EI = BD$, διότι τότε το $BDEI$ θα είναι παραλληλόγραμμο, και συνεπώς $\angle DEB = \angle EBI = 30^\circ$, αφού BI διχοτόμος της $\angle EBI$. Όμως, είναι $GH = EH$, αφού $\angle HGE = \angle HEI = 40^\circ$. Οπότε, έστω $G\Theta$ η διχοτόμος της $\angle HGE$, και τότε θα είναι $EI = G\Theta$ (1). Αλλά $\angle \Theta GB = \angle \Theta BG = 60^\circ$, άρα $\Theta G = BG$ (2), ενώ $BG = BD$ (3) αφού $\angle BGD = \angle BDG = 50^\circ$. Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο.

Σκορδίλης Γιάννης,
μαθηματικός

Και η δική μας σειρά

Είναι ιδιαίτερος ευχάριστο ότι το άρθρο του Constantine Kpor στο 2ο τεύχος του *Quantum* προκάλεσε τόσο πολύ το ενδιαφέρον των αναγνωστών του. Είναι αλήθεια ότι υπάρχουν και άλλες λύσεις του προβλήματος πέραν όλων εκείνων που έχουν μέχρι τώρα δημοσιευτεί στο περιοδικό. Θα επιθυμούσα να ολοκληρώσω και να κλείσω τη σχετική συζήτηση, παρουσιάζοντας μία ακόμη λύση, την πιο «κομψή», την πιο «ευφυή» απ' όσες έχω στη διάθεσή μου. Δόθηκε το 1951 από τον S.T. Thompson και βρίσκεται αναδημοσιευμένη στο έξοχο βιβλίο του Ross Honsberger, *Mathematical Gems II*, MAA, 1976, σελ. 16-18:




Στην προκειμένη λύση οι κορυφές A, B, C του ισοσκελούς τριγώνου της εκφώνησης αντιστοιχούν στα σημεία O, A_1, A_2 . Σ' έναν κύκλο P με κέντρο O και ακτίνα OA_1 θεωρούμε τόξο $A_1A_2 = 20^\circ$, οπότε $\angle A_1OA_2 = 20^\circ$. Επί-

σης, το A_1A_2 είναι πλευρά ενός κανονικού 18-γώνου $A_1A_2A_3\dots A_{18}$ εγγεγραμμένου στον κύκλο P . Το εντυπωσιακό όμως είναι ότι η χορδή A_5A_{18} τέμνει το τρίγωνο A_1OA_2 ακριβώς στα «ειδικά» σημεία E και D . Προκειμένου να αποδείξω ότι πράγματι πρόκειται περί των εν λόγω σημείων της εκφώνησης, θα δείξω ότι $\angle OA_1D = 20^\circ$ και $\angle OA_2E = 30^\circ$. Επειδή τόξο $A_5A_{18} =$ τόξο A_2A_{14} , οι δύο αυτές χορδές τέμνονται πάνω στην OA_1 , πράγμα που σημαίνει ότι η A_2A_{14} διέρχεται από το σημείο E . Στο ισοσκελές τρίγωνο A_2OA_{14} είναι $\angle A_2OA_{14} = 120^\circ$, οπότε $\angle OA_2E = 30^\circ$. Ενώνοντας κάθε τρίτη κορυφή του 18γώνου $A_1A_2A_3\dots A_{18}$ προκύπτει ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο P . Επομένως $A_6A_3 = OA_6$, δηλαδή το A_6 είναι σημείο της μεσοκάθετου του OA_3 . Ομοίως, το A_{18} είναι ένα άλλο σημείο της ίδιας ευθείας, οπότε συμπεραίνουμε ότι η A_6A_{18} είναι πράγματι η μεσοκάθετος του OA_3 . Αφού το D είναι σημείο της A_6A_{18} έχουμε $OD = DA_3$. Επίσης, λόγω συμμετρίας, $DA_3 = DA_1$. Άρα $OD = DA_1$, δηλαδή το τρίγωνο ODA_1 είναι ισοσκελές και έτσι $\angle OA_1D = \angle DOA_1 = 20^\circ$.

Τα υπόλοιπα είναι εύκολα! Επειδή $\angle A_3OA_2 = 20^\circ$ και $OA_3 \perp A_{18}A_6$, είναι $\angle ODA_6 = 70^\circ$. Τότε $\angle A_2DE = \angle ODA_6 = 70^\circ$ και $\angle A_2DA_1 = \angle DA_1O + \angle A_1OD = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$. Τέλος, $\angle EDA_1 = \angle A_2DE - \angle A_2DA_1 = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Γιώργος Ευαγγελόπουλος


Η στήλη αλληλογραφίας είναι δική σας. Περιμένουμε τις απόψεις σας. 

⇒ *Συνέχεια από τη σελ. 35*
ποιημένο μοντέλο, που το επινόησα για να περιγράψω τους υπερκαινοφανείς αστέρες. Στην περίπτωση του υπερκαινοφανούς, η πυκνότητα της ύλης είναι είτε μικρότερη είτε μεγαλύτερη από την πυρηνική πυκνότητα· επομένως, πρόκειται για δύο καταστάσεις της ύλης που αντιστοιχούν, στο πυρηνικό επίπεδο, προς την αέρια και την υγρή κατάστασή της. Στη μια περίπτωση η ταχύτητα του ήχου είναι μικρή και στην άλλη πολύ μεγάλη. Σ' έναν αστέ-

⇒ *Συνέχεια από τη σελ. 9*
ανυψώνονται. Με άλλα λόγια, αναπτύσσεται μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων. Έτσι η διάδοση της θερμικής ενέργειας με αγωγιμότητα συμπληρώνεται με τη διαδικασία μεταφοράς μέσω της κίνησης του μέσου.

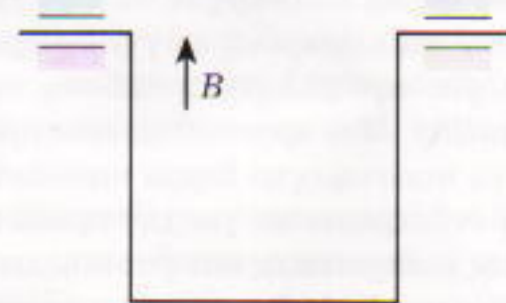
Η μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων —δηλαδή η άνοδος θερμών μαζών και η κάθοδος ψυχρών μαζών— προκαλεί οριζόντιες κινήσεις στην επιφάνεια της Γης. Κοιτάξτε ξανά το Σχήμα 1 —ίχνη κάποιων ξενόλιθων δείχνουν ότι κατέρχονται όταν η βαθμίδα θερμοκρασίας τους είναι χαμηλή (χαμηλότερη από τον μέσο όρο, που απεικονίζεται με τη διακεκομμένη γραμμή) και επιστρέφουν στην επιφάνεια της Γης όταν τυχαίνει να βρίσκονται σε περιοχή με υψηλή βαθμίδα θερμοκρασίας. Όταν εξετάζετε το σχήμα αυτό, να θυμάστε ότι μπορούμε να αναλύσουμε μόνο τα πετρώματα που καταφέρνουν να επιστρέψουν στην επιφάνεια, γι' αυτό τα σχεδόν κυκλικά ίχνη είναι ίσως πολύ πιο συχνά απ' ό,τι στην πραγματικότητα.

Ο φλοιός της Γης πραγματικά κινείται —αργά αλλά σίγουρα. Το φαινόμενο δεν είναι παρατηρήσιμο· οι ρυθμοί μετατόπισης είναι πολύ αργοί και οι άνθρωποι έχουν συνηθίσει στην ιδέα ότι ζουν σ' ένα σταθερό, ακίνητο έδαφος. Ωστόσο ζούμε πάνω σε κινούμενες ηπειρωτικές πλάκες και κάτω, στα βάθη της Γης, βρίσκεται μια μεγάλη πηγή θερμικής ενέργειας που εξαναγκάζει την επιφάνεια της Γης να κινείται, προκαλεί σεισμούς και ηφαιστειακές εκρήξεις.

Όσο ενδιαφέροντα κι αν είναι αυτά τα φαινόμενα, ξεφεύγουν από το πλαίσιο του άρθρου. Θα επανέλθουμε, όμως, σ' αυτά κάποια άλλη φορά. 

ρα νετρονίων που δημιουργείται από την κατάρρευση ενός εκφυλισμένου αστρικού πυρήνα, ο τελευταίος, πριν φτάσει στην πυρηνική πυκνότητα, έχει μια «ταχύτητα του ήχου» σχετικά μικρή. Δηλαδή, η ύλη είναι πολύ συμπεσστή. Επομένως, πρόκειται για κάτι ανάλογο με το αέριο. Γι' αυτό η κατάρρευση συνεχίζεται και επιταχύνεται. Όταν όμως φτάσουμε στην πυρηνική πυκνότητα, τότε εμφανίζονται ισχυρές απωστικές πυρηνικές δυνάμεις και η ύλη γίνεται πολύ πυκνή, ασυμπίεστη.

⇒ *Συνέχεια από τη σελ. 23*
άρθρωση μέσα σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B (Σχήμα 2). Ποια είναι η μέγιστη γωνία απόκλισης του πλαισίου από την αρχική θέση του αν στο σύρμα κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I ; Η μάζα της μονάδας μήκους του σύρματος είναι ρ .
(Α. Kipriyanov)



Σχήμα 2

Φ30


Δύο φακοί. Το πραγματικό είδωλο μια σημειακής φωτεινής πηγής σχηματίζεται στο σημείο A (Σχήμα 3) από έναν λεπτό φακό που τοποθετείται



Σχήμα 3

κοντά στο αριστερό άκρο της γραμμής. Κατόπιν ο φακός αυτός αντικαθίσταται από άλλον που τοποθετείται στο ίδιο σημείο, οπότε το είδωλο της πηγής μετατοπίζεται στο σημείο B . Εν συνεχεία, ο πρώτος φακός τοποθετείται πολύ κοντά στον δεύτερο και το είδωλο μετατοπίζεται στο σημείο C . Προσδιορίστε γεωμετρικά τη θέση της φωτεινής πηγής.
(Α. Deshkovsky)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 61

Δηλαδή, η «ταχύτητα του ήχου» πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Αυτό είναι το αντίστοιχο της υγρής φάσης. Η εργασία που έχω να κάνω εκεί είναι βασικά η μελέτη του συνόρου ανάμεσα στις δύο φάσεις, δηλαδή την υποπυρηνική και την υπερπυρηνική, το αντίστοιχο δηλαδή του συνόρου ανάμεσα στο υγρό και το αέριο. Τέλος, όσον αφορά το κεφαλαιώδες σημασίας πρόβλημα του στροβιλισμού πρέπει να ομολογήσω ότι δεν έχω ακόμη ασχοληθεί μαζί του. 

Μαθηματικά

M26

Η απάντηση είναι $x = 37$. Αν θέσουμε $f(x) = x^2 + ax + b$ και $g(x) = x^2 + px + q$, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε $111a + 3b = 111p + 3q$, ή $37a + b = 37p + q$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το 37 είναι η μοναδική λύση της (γραμμικής) εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Θα μπορούσαμε επίσης να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών x_1, x_2, x_3 , αντί των 1, 10 και 100. Τότε η απάντηση θα ήταν $x = (x_1 + x_2 + x_3)/3$ —ο αριθμητικός μέσος των δεδομένων αριθμών. Η απάντηση γίνεται καθαρότερη αν παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα είναι στο σύνολό του «γραμμικό» και όχι «δευτεροβάθμιο», διότι τα τετράγωνα απαλείφονται στην εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε το πρόβλημα καθώς και στη συνθήκη του προβλήματος.

M27

Η απάντηση είναι 11 βαθμοί. Ας αποδείξουμε πρώτα ότι αυτή η βαθμολογία επαρκεί για την πρόκριση στην τελική τετράδα. Ας υποθέσουμε ότι δεν αρκεί —με άλλα λόγια, ότι μετά το τέλος των αγώνων μπορεί να υπάρχουν πέντε ομάδες με 11 ή περισσότερους βαθμούς. Σε αυτήν την περίπτωση η συνολική βαθμολογία αυτών των ομάδων είναι μεγαλύτερη ή ίση του 55. Από την άλλη πλευρά, η συνολική βαθμολογία στους δέκα μεταξύ τους αγώνες είναι 20, ενώ η συνολική βαθμολογία τους στους αγώνες με τις άλλες τρεις ομάδες είναι το πολύ $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση: $20 + 30 < 55$.

Είναι εύκολο να σχεδιάσουμε ένα τουρνουά όπου οι 10 βαθμοί δεν εξασφαλίζουν την πρόκριση στους τελικούς. Για παράδειγμα, πέντε ομάδες

μπορούν να έρθουν ισόπαλες μεταξύ τους και να κερδίσουν τις άλλες τρεις ομάδες. Τότε όλες τους συγκεντρώνουν $4 + 6 = 10$ βαθμούς αλλά μία από αυτές δεν προκρίνεται.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι σ' ένα τουρνουά ενός γύρου η ελάχιστη βαθμολογία που εξασφαλίζει μία από τις πρώτες k θέσεις μεταξύ n αντιπάλων ($k < n$) ισούται με $2n - k - 1$.

M28

Αν ένας κακοποιός καταδιώκεται από άπειρο πλήθος «αδερφών» του, επιλέγουμε αυτό το άπειρο σύνολο «αδερφών» του. Το εν λόγω σύνολο ικανοποιεί την απαίτησή μας.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε κακοποιός καταδιώκεται από πεπερασμένο πλήθος κακοποιών. Διαλέγουμε έναν, τον g_1 , και στέλνουμε στη φυλακή όσους θέλουν να τον σκοτώσουν καθώς και αυτόν που κυνηγάει ο g_1 . Από το άπειρο σύνολο που απομένει επιλέγουμε έναν κακοποιό g_2 και φυλακίζουμε όσους θέλουν να τον σκοτώσουν καθώς και αυτόν που καταδιώκει ο g_2 (ο g_1 και ο g_2 θα μείνουν ελεύθεροι), και συνεχίζουμε επαγωγικά: αφού επιλέξουμε n κακοποιούς g_1, \dots, g_n , θα έχουμε ακόμη ένα άπειρο πλήθος κακοποιών από τους οποίους ουδείς θα καταδιώκεται από τους πρώτους n , και επομένως θα μπορούμε να επιλέξουμε τον g_{n+1} . Άρα η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον για να προκύψει το επιθυμητό σύνολο.

M29

Θεωρήστε έναν κύκλο με μήκος 99 διαμερισμένο σε 99 μοναδιαία τόξα. Σημειώστε 10 από τα άκρα αυτών των τόξων έτσι ώστε τα μήκη των δέκα τόξων που ορίζονται από αυτά τα σημεία να ισούνται, διαδοχικά, με τους δέκα αριθμούς που βρι-

σκονται γύρω από το πρώτο δεκάγωνο. Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάζουμε έναν δεύτερο κύκλο που αντιπροσωπεύει το δεύτερο δεκάγωνο. Τοποθετούμε τώρα τον δεύτερο κύκλο πάνω στον πρώτο έτσι ώστε να συμπέσουν οι δύο αρχικές διαμερίσεις.

Θεωρούμε 99 περιστροφές του δεύτερου κύκλου κατά πολλαπλάσια των $360^\circ/99$. Θα αποδείξουμε ότι έπειτα από μία τέτοια περιστροφή δύο ζεύγη μαρκαρισμένων σημείων θα συμπέσουν. Τούτο διότι, αν έπειτα από καθεμία περιστροφή συμπίπτει το πολύ ένα από τα μαρκαρισμένα σημεία του δεύτερου κύκλου μ' ένα μαρκαρισμένο σημείο του πρώτου κύκλου, τότε θα έχουμε συνολικά το πολύ 99 συμπτώσεις. Αυτό όμως είναι αδύνατο επειδή καθένα από τα μαρκαρισμένα σημεία ενός κύκλου πρέπει να συμπέσει με καθένα από τα μαρκαρισμένα σημεία του άλλου κύκλου μία φορά ακριβώς. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των συμπτώσεων είναι 100. Άρα, υπάρχει μία περιστροφή που φέρνει σε σύμπτωση δύο ζεύγη σημείων. Τα τόξα που ορίζουν αυτά τα σημεία, και στους δύο κύκλους, έχουν το ίδιο μήκος, πράγμα που σημαίνει ότι τα αντίστοιχα αθροίσματα διαδοχικών αριθμών είναι ίσα.

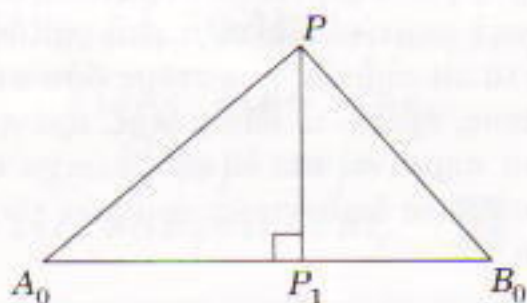
M30

Θα δώσουμε λύση μόνο για το γενικότερο πρόβλημα (β). Βασίζεται στην επόμενη χρήσιμη πρόταση που μας βοηθά συχνά να αποδείξουμε τη σύγκλιση ευθειών.

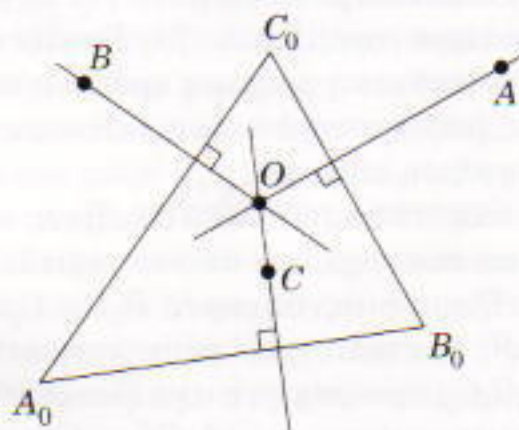
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CARNOT. Τρεις κάθετοι που φέρουμε από τα σημεία A, B, C προς τις πλευρές B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 αντίστοιχα, ενός τριγώνου $A_0B_0C_0$ συντρέχουν στο ίδιο σημείο αν και μόνον αν $(A_0C_0^2 - CB_0^2) + (B_0A_0^2 - AC_0^2) + (C_0B_0^2 - BA_0^2) = 0$.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα παρατηρούμε ότι, βάσει του πυθαγόρειου θεωρήματος, για κάθε σημείο P η διαφορά των τετραγώνων $A_0P^2 - PB_0^2$ ισούται με την αντίστοιχη διαφορά $A_0P_1^2 - P_1B_0^2$ που ορίζεται από την προβολή P_1 του P επί της A_0B_0 (Σχήμα 1). Εφόσον η θέση του σημείου P_1 επί της ευθείας A_0B_0 καθορίζεται μονοσήμαντα από την τιμή της δεύτερης διαφοράς (αφήνουμε την απόδειξη αυτού του γεγονότος στον αναγνώστη), συνεπάγεται ότι ο τόπος των σημείων P για τα οποία η διαφορά $A_0P^2 - PB_0^2$ είναι σταθερή, είναι μια ευθεία κάθετη στην A_0B_0 που διέρχεται από το P_1 . Αν οι κάθετοι του θεωρήματος συντρέχουν σ' ένα σημείο O (Σχήμα 2), μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση τα σημεία A, B, C με το O , χωρίς να μεταβάλουμε την τιμή του αριστερού της μέλους. Έπειτα από αυτήν την αντικατάσταση όλοι οι όροι απαλείφονται και προκύπτει 0. Αντίστροφα, αν η εξίσωση είναι αληθής και δύο από τις κάθετες—ας πούμε αυτές που διέρχονται από το A και το B —τέμνονται στο Q , μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση τα A και B με το Q , οπότε προκύπτει $A_0C^2 - CB_0^2 = A_0Q^2 - QB_0^2$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το Q ανήκει και στην τρίτη κάθετη.

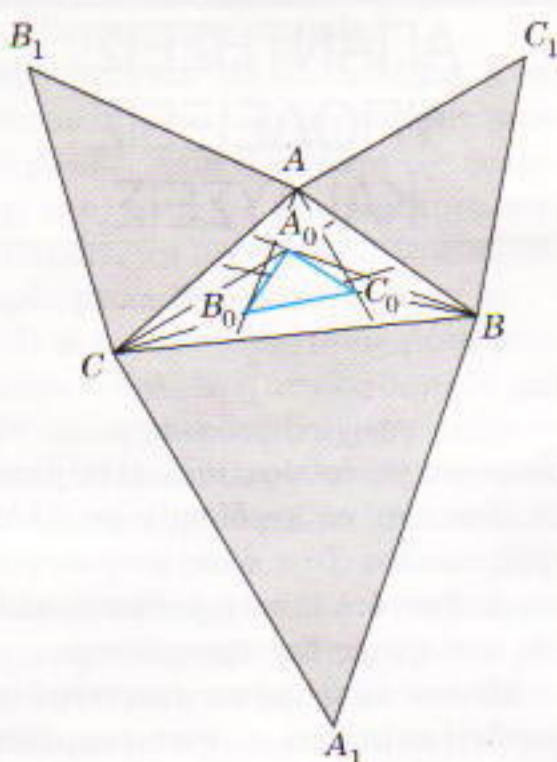
Επομένως ο σκοπός μας θα είναι να βρούμε ένα τρίγωνο $A_0B_0C_0$ τέτοιο ώστε οι ευθείες του προβλήματος να είναι κάθετες στις πλευρές του και



Σχήμα 1



Σχήμα 2

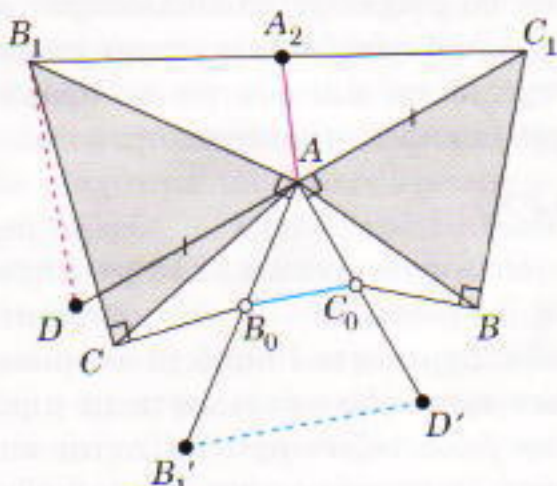


Σχήμα 3

να ικανοποιείται η εξίσωση του Carnot.

Κατασκευάζουμε το σημείο C_0 έτσι ώστε οι γωνίες C_0AC_1 και C_0BC_1 να είναι ορθές και, παρόμοια, τα σημεία A_0 και B_0 (Σχήμα 3). Ας αποδείξουμε ότι η B_0C_0 είναι κάθετη στην AA_2 . Προεκτείνουμε την C_1A κατά τμήμα $AD = C_1A$ (Σχήμα 4). Εφόσον $\angle B_1AB_0 = \angle DAC_0 = 90^\circ$, η περιστροφή κατά 90° περί το A μεταφέρει τα σημεία B_1 και D στα σημεία B_1' και D' των AB_0 και AC_0 αντίστοιχα. Φυσικά, $B_1D \perp B_1'D'$. Ταυτόχρονα, όμως, $B_1D \parallel AA_2$ (η AA_2 συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου B_1C_1D) και $B_1'D' \parallel B_0C_0$ (διότι $AB_0/AB_1' = AC_0/AC_1 = AC_0/AD = AC_0/AD'$). Επομένως $AA_2 \perp B_0C_0$. Παρομοίως, οι BB_2 και CC_2 είναι κάθετες στις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου $A_0B_0C_0$.

Απομένει να ελέγξουμε αν ισχύει η συνθήκη του Carnot, κάτι τετριμμένο αφού τα σημεία A_0, B_0, C_0 ισάπexουν από τα άκρα των αντίστοι-



Σχήμα 4

χων πλευρών του δεδομένου τριγώνου:

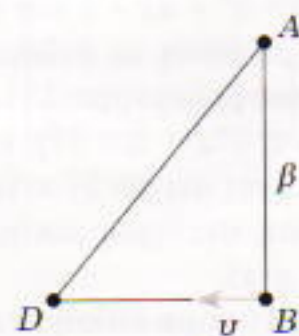
$$(A_0B^2 - BC_0^2) + (C_0A^2 - AB_0^2) + (B_0C^2 - CA_0^2) = 0.$$

(V. Dubrovsky)

Φυσική

Φ26

Ας μελετήσουμε το πρόβλημα στο πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θεωρούμε το αυτοκίνητο αρχικά ακίνητο και το σημείο B να κινείται με σταθερή ταχύτητα u . Για να φτάσει στο σημείο



Σχήμα 5

B όσο το δυνατόν συντομότερα, το αυτοκίνητο πρέπει να κινηθεί σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση γ . Η διεύθυνση της συγκεκριμένης ευθείας θα είναι τέτοια ώστε η συνάντηση του αυτοκινήτου με το σημείο B να γίνει σε ορισμένο σημείο D σε διεύθυνση κάθετη στην AB . Από το τρίγωνο ABD (Σχήμα 5), και θέτοντας $AB = \beta$, παίρνουμε

$$\beta^2 + (ut)^2 = \left(\frac{\gamma t^2}{2}\right)^2.$$

Λύνοντας την εξίσωση, βρίσκουμε

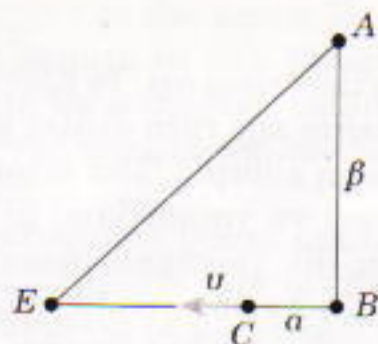
$$t = \sqrt{\frac{2u^2}{\gamma^2} + \sqrt{\left(\frac{2u^2}{\gamma^2}\right)^2 + \frac{4\beta^2}{\gamma^2}}} = 50 \text{ sec.}$$

Αφού η βέλτιστη κίνηση του αυτοκινήτου είναι ομαλά επιταχυνόμενη, η τροχιά του σε σχέση με τη Γη θα είναι παραβολή.

Παρόμοια είναι η στρατηγική για να φτάσουμε στο σημείο C όσο το δυνατόν συντομότερα. Όμως, ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσουμε στο σημείο E (Σχήμα 6) θα βρεθεί από τη λύση της εξίσωσης με γενική μορφή

$$\beta^2 + (ut+a)^2 = \left(\frac{\gamma t^2}{2}\right)^2,$$

όπου $a = BC$, ή αλλιώς την



Σχήμα 6

$$t = \sqrt{\frac{4}{v^2} (\beta^2 + (vt + a)^2)} \quad (1)$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση προσεγγιστικά με τη λεγόμενη επαναληπτική μέθοδο ή μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων. Στην ουσία πρέπει να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $f(t) = t$. Σε πρώτη προσέγγιση εκλέγουμε μια αυθαίρετη αρχική τιμή $t = t_0$, και στη συνέχεια σχηματίζουμε την ακολουθία

$$t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), \dots, t_n = f(t_{n-1}).$$

Αν η ακολουθία αυτή έχει ένα όριο S και η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο σημείο S , τότε το S είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

Αν ξεκινήσουμε με $t_0 = 0$, παίρνουμε την εξής ακολουθία τιμών:

$$\begin{aligned} t_1 &= 41,2 \text{ sec,} \\ t_2 &= 53,6 \text{ sec,} \\ t_3 &= 57,5 \text{ sec,} \\ t_4 &= 58,7 \text{ sec,} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$t_n = 59,2 \text{ sec.}^*$$

Παρατηρήστε ότι ακρίβεια 1% πετυχαίνουμε όταν $n = 4$, και ότι οποιαδήποτε δύο διαδοχικά βήματα (δηλαδή, ο υπολογισμός των δύο επόμενων όρων της ακολουθίας) βελτιώνουν την ακρίβεια κατά έναν παράγοντα 2.

Αν το τελικό σημείο τοποθετείται αυθαίρετα, μπορεί να υπάρχει ένα πρόσχημο συν ή πλην μπροστά από το $a = BC$. Για να λύσουμε την εξίσωση (1) στην περίπτωση αυτή, η επαναλη-

* Για μια λεπτομερή διερεύνηση των προϋποθέσεων εφαρμογής της επαναληπτικής μεθόδου δείτε τα βιβλία: Thomas Finney, *Απειροστικός Λογισμός*, τόμ. I, σελ. 212, και M. Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, σελ. 387, των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, (Σ.Ι.Ε.)

πτική μέθοδος πρέπει να εφαρμοστεί με προσοχή και το αποτέλεσμα μπορεί να είναι αμφίβολο και να εξαρτάται από τη σωστή επιλογή της αρχικής προσέγγισης.

Και μία ακόμη παρατήρηση. Για να οδηγήσει κάποιος κατά μήκος μιας παραβολικής τροχιάς με το διάνυσμα της επιτάχυνσης σταθερό, πρέπει να είναι αρκετά καλός οδηγός.

Φ27

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler,

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{σταθ.},$$

και συνεπώς, όσο μικρότερη είναι η ακτίνα της τροχιάς του διαστημοπλοίου τόσο μικρότερη είναι η περίοδος περιφοράς T γύρω από τον Ήλιο. Η ελάχιστη περίοδος περιφοράς αντιστοιχεί στην ελάχιστη ακτίνα της τροχιάς του διαστημοπλοίου —δηλαδή στην ακτίνα του Ήλιου:

$$a_{\min} = R_{\text{H}} = \frac{a}{2} R_{\text{H}\Gamma},$$

όπου $R_{\text{H}\Gamma}$ είναι η απόσταση Ήλιου-Γης. Ας συγκρίνουμε τώρα τις κινήσεις του διαστημοπλοίου και της Γης γύρω από την Ήλιο:

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3} = \frac{T_{\Gamma}^2}{R_{\text{H}\Gamma}^3},$$

Έτσι, γνωρίζοντας ότι η περίοδος περιφοράς της Γης είναι $T_{\Gamma} = 365,25$ ημέρες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{\min} &= T_{\Gamma} \left(\frac{a}{2} \right)^{3/2} \cong 0,116 \text{ ημέρες} \\ &\cong 2 \text{ ώρες και } 47 \text{ πρώτα λεπτά.} \end{aligned}$$

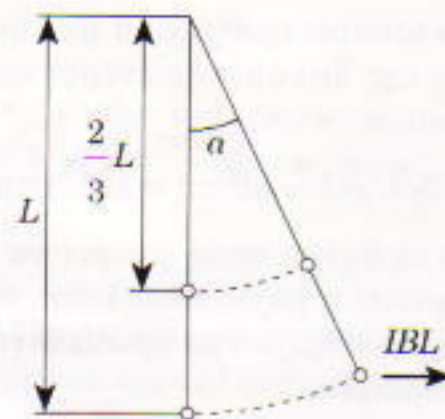
Φ28

Αν το πάχος της ατμόσφαιρας είναι μικρό σε σχέση με την ακτίνα του πλανήτη (αυτό θα το ελέγξουμε στο τέλος των υπολογισμών μας), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο για τη μάζα του οξυγόνου:

$$m = \frac{4\pi r^2 P}{g}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας g στην επιφάνεια του πλανήτη προκύπτει από το νόμο της παγκόσμιας έλξης:

$$g = \frac{GM}{r^2}.$$



Σχήμα 7

Έτσι,

$$m = \frac{4\pi r^2 P}{GM} \cong 5 \cdot 10^{17} \text{ kgr.}$$

Αυτό αντιστοιχεί περίπου σε $1,5 \cdot 10^{19}$ mole.

Η διάσπαση κάθε μορίου ανθρακικού οξέος παράγει ένα μόριο οξυγόνου, πράγμα που σημαίνει ότι η διαδικασία θα διαρκέσει περίπου $1,5 \cdot 10^{13} \text{ sec} \cong 500.000$ χρόνια. Όχι και μεγάλο χρονικό διάστημα...

Για μια κατά προσέγγιση εκτίμηση του πάχους της ατμόσφαιρας, ας βρούμε την πυκνότητα του οξυγόνου κοντά στην επιφάνεια του πλανήτη:

$$\rho = \frac{Pm_{\text{mole}}}{RT} \cong 0,4 \text{ kgr/m}^3.$$

Με την πυκνότητα αυτή, το πάχος της ατμόσφαιρας, που θεωρείται ομογενής, θα είναι

$$h = \frac{m}{4\pi r^2 \rho} \cong 30 \text{ km.}$$

Το πάχος είναι στην πραγματικότητα πολλές φορές μεγαλύτερο (η πυκνότητα ελαττώνεται με το ύψος), όμως ακόμη και η διορθωμένη τιμή είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα του πλανήτη.

Φ29

Το κέντρο μάζας του πλαισίου βρίσκεται σε απόσταση $2L/3$ από τον άξονα περιστροφής του (Σχήμα 7). Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις δρουν σε κάθε αγωγό, όμως μόνο η δύναμη που ασκείται στον οριζόντιο αγωγό στρέφει το πλαίσιο (οι άλλες δυνάμεις τείνουν να το παραμορφώσουν). Ας ονομάσουμε α τη γωνία απόκλισης. Τότε το κέντρο μάζας θα ανυψωθεί κατά $2L(1 - \sin\alpha)/3$. Κατά τη διάρκεια της οριζόντιας μετατόπισης L ημ, η ηλεκτρομαγνητική δύναμη IBL παράγει έργο $IBL^2 \eta\mu\alpha$. Το έργο

αυτό ισούται αριθμητικά με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας του πλαισίου:

$$2\rho L^2 g(1 - \sigma \nu \alpha) = IBL^2 \eta \mu \alpha.$$

Από τη σχέση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία απόκλισης, πρέπει όμως να θυμηθούμε πρώτα λίγη τριγωνομετρία:

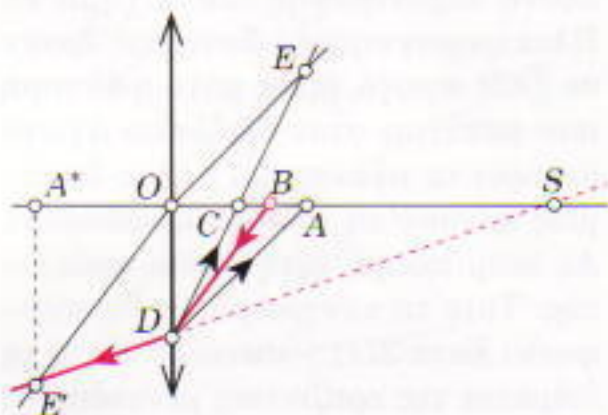
$$\frac{\eta \mu \alpha}{1 - \sigma \nu \alpha} = \sigma \varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{2\rho g}{IB}, \text{ ή}$$

$$\alpha = 2 \sigma \xi \epsilon \varphi \frac{IB}{2\rho g}.$$

Φ30

Ας υποθέσουμε ότι μια ακτίνα από την πηγή χτυπά τον πρώτο φακό στο σημείο D (Σχήμα 8). Αφού διαθλαστεί στο φακό, συνεχίζει την πορεία της και περνάει από το σημείο A' έτσι προκύπτει η ακτίνα DA . Κατόπιν προσθέτουμε τον δεύτερο φακό στο σύστημα, οπότε η προηγούμενη ακτίνα περνάει πλέον από το σημείο C . Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την κύρια εστία του δεύτερου φακού. Χαράζουμε μια βοηθητική ευθεία που περνάει από το σημείο O και είναι παράλληλη στην ακτίνα DA . Αυτή τέμνει την προέκταση της DC στο εστιακό επίπεδο του δεύτερου φακού, επομένως το σημείο E βρίσκεται πάνω σ' αυτό το εστιακό επίπεδο (στο Σχήμα 8 το σημείο E βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο A , αλλά αυτό δεν έχει καμιά σημασία επί της αρχής).

Τώρα, χρησιμοποιώντας την κύρια εστία του δεύτερου φακού, μπορούμε να βρούμε τη θέση της πηγής. Ας θυμηθούμε την αρχή του αντιστροφου της πορείας του φωτός. Χαράζουμε μια ακτίνα από το σημείο B στο σημείο D —μετά τη διάθλασή της



Σχήμα 8

πρέπει να περάσει από το σημείο S (την πηγή). Είναι πιθανό να μην περάσει η ίδια η ακτίνα από την πηγή αλλά η προέκτασή της.

Ας σημειώσουμε το σημείο A^* —την αριστερή ή κύρια εστία του δεύτερου φακού, η οποία είναι συμμετρική του σημείου A — και ας χαράξουμε μια βοηθητική ευθεία που περνάει από το σημείο O και είναι παράλληλη στην ακτίνα BD . Η ευθεία αυτή περνάει από το σημείο E' που ανήκει στο εστιακό επίπεδο και μας επιτρέπει να χαράξουμε την υπόλοιπη πορεία της ακτίνας BD μετά τη διάθλασή της —δηλαδή την DE' . Η πηγή προφανώς θα βρίσκεται στην προέκταση της διαθλώμενης ακτίνας.

Το Σχήμα 8 δείχνει ότι πρόκειται για μια «φανταστική» πηγή —οι φακοί δέχτηκαν μια δέσμη ακτίνων οι προεκτάσεις των οποίων συνέκλιναν στο σημείο S . Αν το σημείο C βρισκόταν πιο πέρα από τα σημεία A και B , τότε θα επρόκειτο για συνηθισμένη «πραγματική» πηγή.

Σπαζοκεφαλιές

Σ26

Τα μοναδικά δυνατά γράμματα είναι τα A (ο αριθμός 1), B (2), Λ (11), M (12), Φ (21), και X (22). Η μοναδική λέξη με νόημα που αντιστοιχεί στον δεδομένο αριθμό είναι ΜΑΛΑΜΑ.

Σ27

Η απάντηση είναι $3.201 \times 3.201 = 10.246.401$. Αφού $FIVE \times V = 0$, έχουμε $V = 0$. Τα γινόμενα του $FIVE$ με τα F, I, E , είναι τετραψήφια, άρα $F \leq 3$, και $I, E \leq 2$. Και εφόσον το γινόμενο έχει οκτώ ψηφία, $FIVE > 3.200$. Επομένως, $FIVE = 3.201$.

Σ28

Οι σκιές στη Γη είναι λιγότερο έντονες επειδή το σκεδαζόμενο από την ατμόσφαιρα φως εισέρχεται στις σκιές, που έτσι γίνονται φωτεινότερες. Οι σκιές στη Σελήνη, όπου δεν υπάρχει ατμόσφαιρα, μπορεί να φωτιστούν μόνο από τις ακτίνες που ανακλώνται από άλλα σεληνιακά αντικείμενα. Αυτή η σχετικά αδύνατη πηγή φωτισμού έχει σχεδόν μηδενική επίδραση στο πώς βλέπουμε τα αντικείμενα.

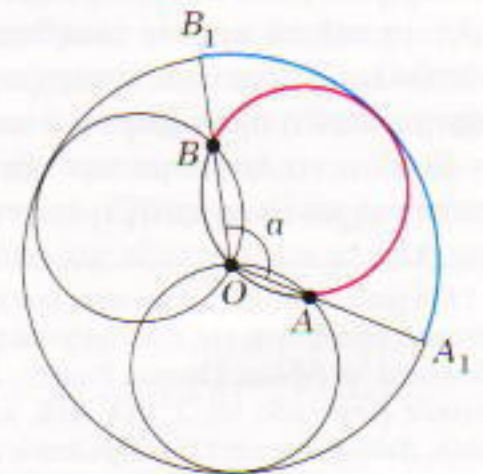
Σ29

Η απάντηση είναι όχι. Το πλέγμα μας αποτελείται από επτά στήλες με τρεις κόμβους η καθεμιά. Μια τέτοια στήλη μπορεί να χρωματιστεί με $2^3 = 8$ τρόπους (αν χρησιμοποιήσουμε δύο χρώματα). Αν δύο από τις στήλες είναι χρωματισμένες με ίδιο τρόπο, θεωρήστε τη μία από αυτές. Θα περιέχει τουλάχιστον δύο κόμβους ίδιου χρώματος, και αυτοί οι δύο κόμβοι μαζί με τους κόμβους των ίδιων γραμμών στην άλλη στήλη σχηματίζουν τη ζητούμενη τετράδα. Αν όλες οι στήλες είναι χρωματισμένες διαφορετικά, τότε μόνο ένας από τους οκτώ δυνατούς χρωματισμούς μένει αχρησιμοποίητος, και επομένως σε μια από τις στήλες όλοι οι κόμβοι έχουν το ίδιο χρώμα —ας πούμε, κόκκινο. Αφού χρησιμοποιούνται όλοι οι χρωματισμοί εκτός από έναν, υπάρχει μια στήλη με δύο κόκκινους κόμβους. Αυτοί οι κόμβοι μαζί με τους αντίστοιχους κόμβους στην προηγούμενη στήλη σχηματίζουν ένα μονόχρωμο ορθογώνιο.

(V. Dubrovsky)

Σ30

Η περίμετρος της ροδοειδούς αποτελείται από τόξα των μικρότερων κύκλων. Θεωρήστε ένα από αυτά τα τόξα —ας πούμε το μεγαλύτερο τόξο AB στο Σχήμα 9. Φέρουμε τις ακτίνες OA_1 και OB_1 του μεγάλου κύκλου οι οποίες διέρχονται από τα A και B . Το μήκος του τόξου A_1B_1 ισούται με $2ra$, όπου $a = \angle AOB$ και r η ακτίνα των μικρότερων κύκλων. Το μήκος του τόξου AB είναι $2ar$, επειδή κείται απέναντι από την εγγεγραμμένη γωνία AOB μέτρου a , οπότε η αντίστοιχη επικεντρική γωνία είναι $2a$. Επομένως, τα τόξα AB και



Σχήμα 9

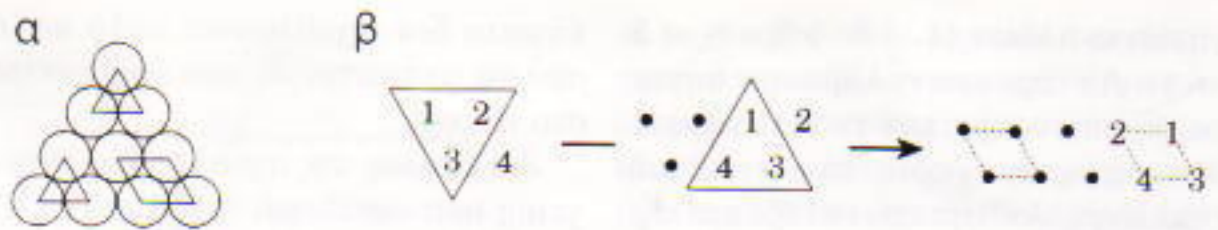
A_1B_1 έχουν το ίδιο μήκος. Προσθέτοντας όλα αυτά τα τόξα βλέπουμε ότι το μήκος της ροδοειδούς ισούται με το μήκος της περιφέρειας του μεγάλου κύκλου.

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το πώς είναι διατεταγμένοι οι μικρότεροι κύκλοι μέσα στον μεγάλο (αρκεί να διέρχονται από το O), καθώς και ανεξάρτητο από το πλήθος τους.

Παιχνιδότοπος

1. Οποιαδήποτε αναδιάταξη των κερμάτων σ' ένα τρίγωνο μεγέθους n μπορεί να παρασταθεί ως μία διαδοχή εναλλαγών γειτονικών κερμάτων. Δύο γειτονικά νομίσματα a και b εναλλάσσονται μέσω μιας πράξης παρόμοιας με αυτήν που βλέπουμε στα Σχήματα 1 και 2 του άρθρου· για να μπορέσουμε όμως να τη χρησιμοποιήσουμε πρέπει πρώτα να δημιουργήσουμε ένα απομονωμένο τρίγωνο έξι κερμάτων που θα περιέχει τα a και b . Αυτό μπορεί να γίνει αν αποσπάσουμε τριάδες από το δεδομένο μεγάλο τρίγωνο, μία μία, έως ότου υπάρξει αρκετός χώρος για να αποσπασθεί το επιθυμητό τρίγωνο των έξι νομισμάτων που περιέχει τα a και b (πιθανόν μέσω της πράξης μετατόπισης που περιγράψαμε στο άρθρο—δείτε το Σχήμα 2 σ' αυτό).

Τώρα, σχετικά με τις μετατοπίσεις γνωρίζουμε ότι μια τριάδα (στην περίπτωση $n = 2$) ή ένα τρίγωνο έξι κερμάτων (περίπτωση $n = 3$) μπορεί να μετατοπιστεί σε οποιαδήποτε θέση του πλέγματος. Στο Σχήμα 10α βλέπουμε ότι, για $n = 4$, ένα τρίγωνο μεγέθους n διαιρείται σε δύο τριάδες και σ' έναν «ρόμβο» τεσσάρων κερμάτων που μπορεί να μετατοπιστεί τρία διαστήματα κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής του πλέγματος (δείτε το Σχήμα 10β). Ένα τρίγωνο μεγέθους $n = 3k + 2$ μπορεί να διαιρεθεί σε k οριζόντια στρώματα των τριών γραμμών (ξεκινώντας από τη βάση του) και σε μία τριάδα στην κορυφή τους. Το κάθε στρώμα διαιρείται σε τριάδες και, ίσως, ένα τρίγωνο έξι κερμάτων (Σχήμα 11). Έτσι, διασπάμε το μεγάλο μας τρίγωνο σε τρίγωνα μεγέθους 2 και 3, μετακινούμε αυτά τα τμήματα ξεχωριστά, και κατόπιν τα ξανασυνδέουμε σε οποιαδήποτε νέα θέση

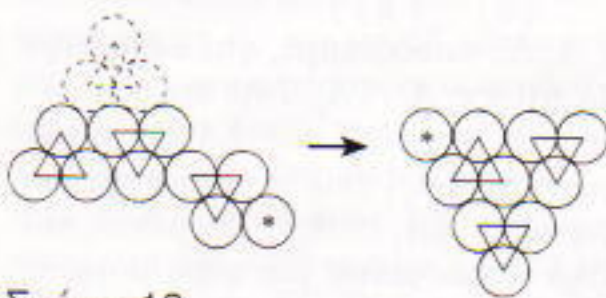


Σχήμα 10

θέλουμε. Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στην περίπτωση που $n = 3k$, με τη διαφορά ότι στην κορυφή θα έχουμε τώρα ένα τρίγωνο έξι κερμάτων αντί της τριάδας. Εάν $n = 3k + 1$, το τμήμα της κορυφής θα είναι ένα τρίγωνο μεγέθους 4, και έχουμε δει ότι μπορούμε να το μετατοπίσουμε κατά οποιοδήποτε (διαίρετο με το 3) πλήθος διαστημάτων. Επομένως, το ίδιο ισχύει και για ολόκληρο το τρίγωνο. Άλλες μετατοπίσεις σ' αυτή την περίπτωση είναι αδύνατες, λόγω της διατήρησης των αναλλοίωτων s_x και s_y (δείτε το άρθρο).



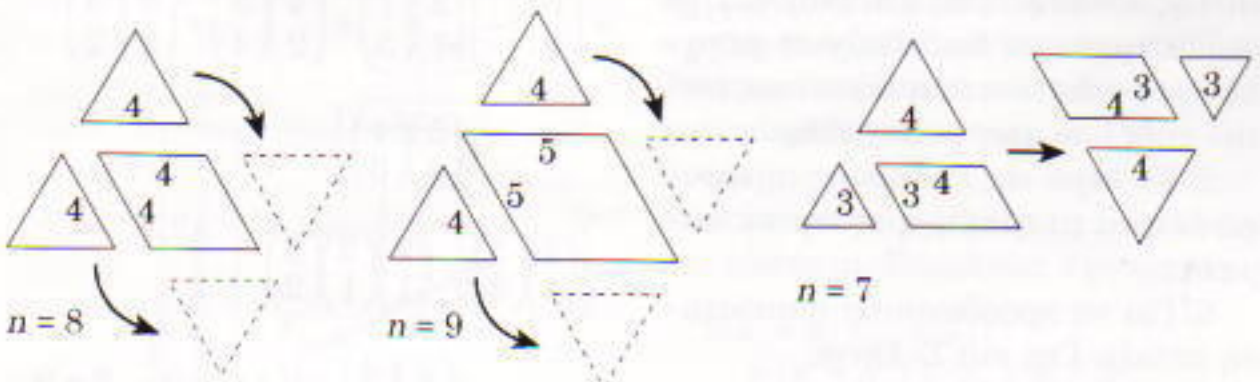
Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Αντιστροφή τριγώνων με πλευρές 8, 9 και 7 κερμάτων. Οι αριθμοί στο σχήμα δηλώνουν το πλήθος των κερμάτων κατά μήκος των αντιστοιχών πλευρών. Όταν $n = 7$, το παραλληλόγραμμα μετατοπίζεται κατά την αναδιάταξη του.

2. Για το τρίγωνο έχουμε $s_y = 1$, ενώ για το παραλληλόγραμμο έχουμε $s_y = 0$. Επομένως η απάντηση είναι όχι.

3. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι καθένα από αυτά τα τρίγωνα είναι αντιστρέψιμο με βάση τα Σχήματα 12 έως 14. Στο Σχήμα 12 βλέπουμε πώς θα αντιστρέψουμε ένα τρίγωνο με πλευρά τεσσάρων κερμάτων (ένα «τρίγωνο-4»). Στο Σχήμα 13 βλέπουμε την αντιστροφή ενός τριγώνου μεγέθους 3 με τη χρήση ενός βοηθητικού τριγώνου-4. Ένας «ρόμβος» με πλευρά τεσσάρων κερμάτων μπορεί να χωριστεί σ' ένα τρίγωνο-3 και ένα τρίγωνο-4 με δύο διαφορετικούς τρόπους, έτσι ώστε ο προσανατολισμός των τριγώνων να είναι διαφορετικός σε κάθε διαμέριση. Το τρίγωνο-4 μπορεί να πάρει όποιον προσανατολισμό θέλουμε και το τρίγωνο-3 μπορεί να μετακινηθεί για να ενωθεί ή να χωριστεί από το τρίγωνο-4. Εποσημαίνουμε ότι ένα τρίγωνο μεγέθους τρία δεν μπορεί να αντιστραφεί μόνο του. Στο Σχήμα 14 βλέπουμε πώς μπορούμε να διαιρέσουμε ένα τρίγωνο σε «παραλληλόγραμμα» και σε μικρότερα αντιστρέψιμα τρίγωνα.

4. Η απάντηση είναι αρνητική. Αυτό οφείλεται στη σύγκριση των αναλλοίωτων d_0, d_1, d_2 για τις δύο διατάξεις.

5. Η πράξη που δίνεται στο άρθρο συνίσταται στην εναλλαγή δύο σφαιρών ($1 \leftrightarrow 3$) και την κυκλική αλλα-

γή πέντε άλλων (4 → 6 → 9 → 8 → 5 → 4). Αν την επαναλάβουμε πέντε φορές παίρνουμε την εναλλαγή των δύο σφαιρών χωρίς την κυκλική εναλλαγή. Αν την επαναλάβουμε έξι φορές παίρνουμε μόνον τον κύκλο χωρίς την εναλλαγή. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να πετύχουμε εναλλαγές άλλων ακραίων σφαιρών —ας πούμε, 5 ↔ 8. Για να πετύχουμε την εναλλαγή δύο διαδοχικών σφαιρών μιας ακμής— για παράδειγμα, 9 ↔ 8— εκτελούμε τον προηγούμενο κύκλο έτσι ώστε να φέρουμε τις σφαίρες 9 και 8 στη θέση των 8 και 5, από όπου μπορούμε να τις εναλλάξουμε, και κατόπιν τις επιστρέφουμε στις θέσεις 9 και 8 (με αντίστροφη σειρά) χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο κύκλο.

Καλειδοσκόπιο

1. Όχι, διότι στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία είναι σταθερά και δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

2. Συνήθως τα ραδιόφωνα αυτοκινήτου δέχονται το απευθείας σήμα από ένα σταθμό μετάδοσης, στον οποίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο κατακόρυφα. Για να λαμβάνουμε τη μέγιστη ισχύ του εισερχόμενου σήματος, η κεραία πρέπει να είναι επίσης κατακόρυφη.

3. Τα βραχέα κύματα διαδίδονται σε μεγάλες αποστάσεις εξαιτίας συνεχών ανακλάσεων στην επιφάνεια της Γης και το αγωγίμο στρώμα της ατμόσφαιρας—την ιονόσφαιρα. Ως εκ τούτου, κάποιες περιοχές να μη λαμβάνουν το σήμα.

4. Με την απουσία άμεσης ηλιακής ακτινοβολίας, ο ιονισμός μορίων στην ιονόσφαιρα ελαττώνεται. Αυτό καθιστά εντονότερη την ανακλαστικότητα της ιονόσφαιρας και βοηθάει τα ραδιοκύματα να διαδοθούν σε μεγαλύτερες αποστάσεις, αυξάνοντας έτσι την εμβέλεια των ραδιοσταθμών.

5. Το νερό της θάλασσας απορροφά έντονα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

6. Για να προσδιοριστεί η απόσταση μεταξύ Γης και Σελήνης.

7. Κατ' αρχάς, η ιονόσφαιρα είναι διαφανής στα υπερβραχέα κύματα που χρησιμοποιούνται στις τηλεοπτικές μεταδόσεις· επιπλέον, τα εν λόγω

κύματα δεν περιθλώνται πολύ καλά από τα αντικείμενα που βρίσκονται στο έδαφος.

8. Εξαιτίας της ανταλλαγής ενέργειας που οφείλεται στη θερμική ακτινοβολία.

9. Ναι, εκπέμπει.

10. Το γυαλί απορροφά και την υπέρυθη και την υπεριώδη ακτινοβολία.

11. Η υπεριώδης ακτινοβολία της φυσικής βλάστησης και αυτή του καμουφλάζ είναι διαφορετικές· έτσι επηρεάζουν διαφορετικά το φωτογραφικό φιλμ.

12. Η ενέργεια των ακτίνων X δεν μπορεί να υπερβεί την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων.

13. Ναι, διότι τα μήκη κύματος των ακτίνων γ είναι ακόμη μικρότερα.

Μικροπειραματισμοί. Ανακλά την υπέρυθη ακτινοβολία που εκπέμπεται από τη σπειροειδή αντίσταση.

Το Ρεωφορείο και οι Παικτούβες

1. 10, 84.

$$2. \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

$$3. \binom{9}{3} - \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 84 - 16 = 68.$$

4. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $x \in A_1 \cap A_2$. Τότε απαριθμούμε το x μια φορά στο $|A_1|$ και μια φορά στο $|A_2|$ ενώ το αφαιρούμε μια φορά στο $|A_1 \cap A_2|$. Επομένως τελικά απαριθμείται μία φορά μόνο.

5. Το πλήθος των διαδρομών N είναι

$$\begin{aligned} N &= |U| - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\ &= \binom{10}{4} - \left[\binom{2}{1} \binom{7}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{4} + \binom{6}{2} \binom{3}{2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{4} \binom{4}{3} \right] \\ &\quad + \left[\binom{2}{1} \binom{5}{4} + \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{2}{1} \binom{4}{3} + 0 + 0 + 0 \right] - 0 + 0 \\ &= 210 - 165 + 36 = 81. \end{aligned}$$

6. Η έλλειψη μοιάζει με εξάγωνο

(βλ. Σχήμα 15).

7. Επειδή $50 = 2 \cdot 5^2$, έχουμε $\phi(50) = 50 - (50/2 + 50/5) + 50/10 = 20$. Ομοίως $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, οπότε $\phi(105) = 105 - (105/3 + 105/5 + 105/7) + (105/15 + 105/21 + 105/35) - 105/105 = 48$,

και $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, οπότε $\phi(210) = 210 - 247 + 101 - 17 + 1 = 48$.

8. Θεωρήστε το σύνολο των τεσσάρων γιων —

$S = \{\text{γιος 1, γιος 2, γιος 3, γιος 4}\}$ —και έστω U το βασικό σύνολο που αντιπροσωπεύει τις 4! διατάξεις των τεσσάρων γιων. Επομένως,

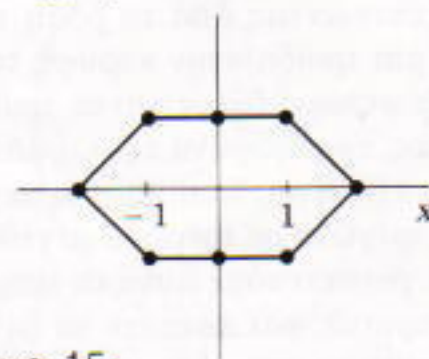
$U = \{(i, j, k, \ell): 1 \leq i, j, k, \ell \leq 4, \text{ όπου } i, j, k, \ell \text{ διαφορετικά ανά δύο}\}.$

Η διάταξη σε κάθε τετράδα έχει σημασία —για παράδειγμα η (i, j, k, ℓ) αντιστοιχεί στην τοποθέτηση της κάρτας του i γιου στον πρώτο φάκελο, του j γιου στον δεύτερο, του k γιου στον τρίτο και του ℓ γιου στον τέταρτο φάκελο.

Στη συνέχεια ορίζουμε τέσσερα υποσύνολα $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ του U , όπου το A_i αποτελείται απ' όλες τις διατάξεις των γιων στις οποίες η κάρτα του γιου i βρίσκεται στον i -οστό φάκελο. Έτσι, για παράδειγμα, $A_1 = \{(1, j, k, \ell): 2 \leq j, k, \ell \leq 4, \text{ και τα } j, k, \ell \text{ είναι διαφορετικά ανά δύο}\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο A_i περιέχει $3! = 6$ στοιχεία, και ότι κάθε τομή δύο διαφορετικών συνόλων $A_i \cap A_j$ περιέχει $2!$ στοιχεία.

Το σύνολο των ανακατατάξεων που ενδιαφέρει την κυρία Ιωάννα είναι το D_4 :

$D_4 = U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Πραγματικά, αν $(i, j, k, \ell) \in D_4$, τότε σίγουρα $i \neq 1, j \neq 2, k \neq 3, \ell \neq 4$. Αυτό σημαίνει ότι η κάρτα κάθε γιου βρίσκεται σε λαθεμένο φάκελο. Η ερώτηση 8 αφορούσε την πληθικότητα του συνόλου D_4 . Με τη βοήθεια του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε



Σχήμα 15

$$\begin{aligned}
 |D_4| &= |U| - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\
 &\quad - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\
 &= 4! - \binom{4}{1} 3! + \binom{4}{2} 2! - \binom{4}{3} 1! + \binom{4}{4} 0! \\
 &= 9.
 \end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η παράσταση

$$4! - \binom{4}{1} 3! + \binom{4}{2} 2! - \binom{4}{3} 1! + \binom{4}{4} 0!$$

μπορεί να γραφεί ως

$$4!(1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4!).$$

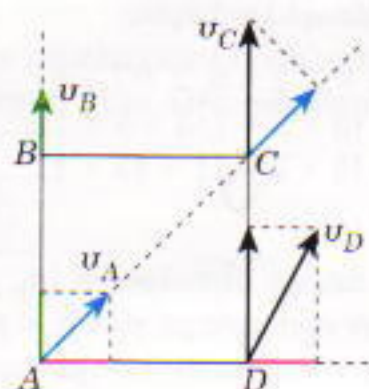
Γενικεύοντας, βλέπουμε ότι αν η κυρία Ιωάννα είχε πέντε γιους θα υπήρχαν $5!(1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5!) = 44$ τρόποι τοποθέτησης των καρτών έτσι ώστε όλες να είναι σε λαθεμένο φάκελο.

Οι συνιστώσες

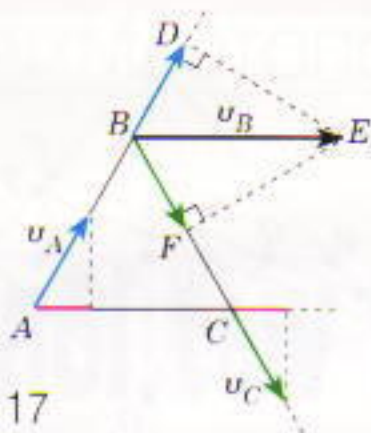
1. Αφού το ξύλο είναι στερεό σώμα, το μήκος του δεν αλλάζει. Έτσι οι συνιστώσες των v_B και v_A κατά μήκος του ξύλου πρέπει να είναι ίσες. Αυτό οδηγεί άμεσα στην απάντηση: $v_B = v_A$ συνα/συνβ.

2. Εφόσον το τετράγωνο είναι στερεό σώμα, οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του παραμένουν αμετάβλητες. Άρα, η συνιστώσα της v_C κατά μήκος της AC πρέπει να είναι ίση με την v_A . Το γεγονός αυτό, μαζί με τη δεδομένη διεύθυνση της v_C , μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε το διάνυσμα v_C (βλ. Σχήμα 16).

Το διάνυσμα v_B κατευθύνεται κατά μήκος της AB (αλλιώς το BC θα άλλαζε — κοιτάξτε την v_C !). Η συνιστώσα του κατά μήκος της AB — δη-



Σχήμα 16



Σχήμα 17

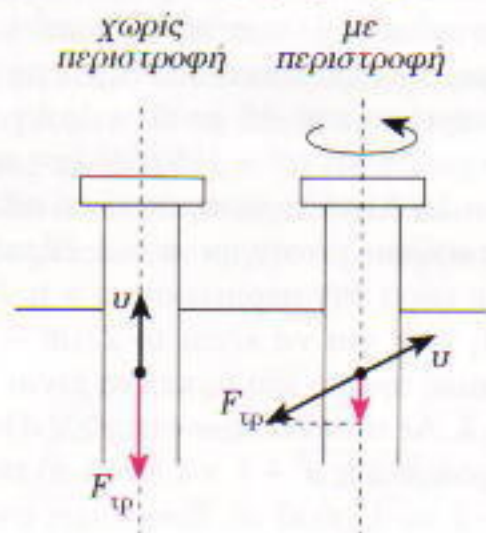
λαδή το ίδιο το διάνυσμα — είναι ίση με τη συνιστώσα της v_A κατά μήκος της AB . Για την v_D γνωρίζουμε τις συνιστώσες της κατά μήκος της CD (είναι η v_C) και κατά μήκος της AD (είναι η συνιστώσα της v_A κατά μήκος της AD). Προσθέτοντάς τες, λοιπόν, διανυσματικά φτάνουμε στην απάντηση:

$$v_B = v_A \sqrt{2} / 2, \quad v_C = v_A \sqrt{2},$$

$$v_D = v_A \sqrt{2.5}.$$

3. Η απάντηση είναι $v_C = v_A$, $v_B = 2v_A$. Είναι εύκολο να βρούμε την v_C — η συνιστώσα της κατά μήκος της AC είναι η ίδια με αυτή της v_A . Περισσότερο ενδιαφέρον είναι να βρούμε την v_B . Μολονότι γνωρίζουμε τη συνιστώσα της κατά μήκος της AB (είναι ίση με v_A) και της BC (είναι ίση με v_C), δεν αποκλείεται να οδηγηθούμε σε λάθος. Κοιτάξτε το Σχήμα 17: η v_B δεν είναι το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών της! Χαράσσουμε το DE κάθετο στο AB και το FE κάθετο στο BC . Το διάνυσμα BE (το μήκος του οποίου μπορείτε να το βρείτε εύκολα, σωστά;) εκφράζει τη v_B .

4. Η δύναμη της τριβής έχει πάντοτε κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση της ταχύτητας ενός αντικειμένου. Αν περιστρέφουμε το καρφί καθώς το τραβάμε προς τα έξω,



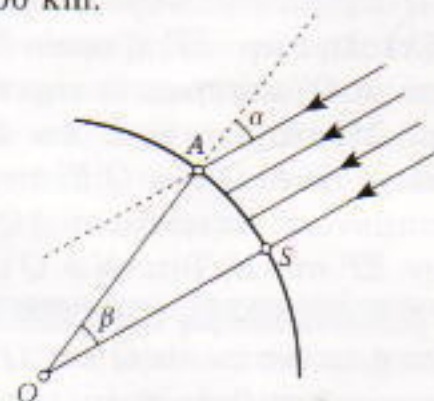
Σχήμα 18

οι ταχύτητες κάθε σημείου του καρφιού σχηματίζουν ορισμένη γωνία ως προς την επιθυμητή κατεύθυνση, και έτσι η συνιστώσα της τριβής που έχει κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση που εμείς τραβάμε είναι μικρότερη (βλ. Σχήμα 18).

Απειροστικός λογισμός

(Δείτε το προηγούμενο τεύχος)

1. Θεωρήστε τις (παράλληλες) ακτίνες του Ηλίου όπως φαίνονται από τη Συήνη και την Αλεξάνδρεια το μεσημέρι του θερινού ηλιοστάσιου (βλ. Σχήμα 19). Εφόσον $a = \beta$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος του AS προς την περιφέρεια της Γης ισούται με $7.5/360$ — δηλαδή $800/\pi = 7.5/360$, ή $\pi = 38.500$ περίπου km. Η τιμή αυτή με $\pi \approx 3$ μας οδηγεί στο $R \approx 38.500/(2 \cdot 3) = 6.400$ km.



Σχήμα 19

2. Οι υπολογισμοί του λογιστικού σας φύλλου έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
 N(t+1) - N(t) &= 0.1N(t) - 0.0005N(t)^2 \\
 &= 0.0005N(t)[200 - N(t)].
 \end{aligned}$$

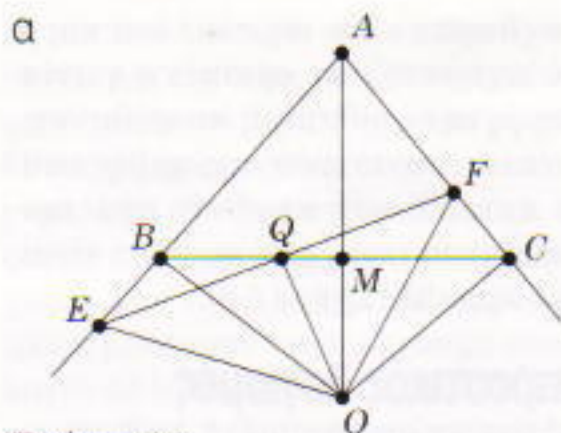
Αυτό δείχνει λοιπόν ότι η $N(t)$ είναι αύξουσα για $0 < N(t) < 200$ και φθίνουσα για $N(t) > 200$.

Η 35η Δ.Ο.Μ.

1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 > a_2 > \dots > a_m$. Ισχυριζόμαστε ότι $a_i + a_{m+1-i} \geq n+1$ για $1 \leq i \leq m$. Αν $a_i + a_{m+1-i} \leq n$ για κάποιο i , τότε $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \dots < a_i + a_{m+1-i} \leq n$. Τότε καθένας από τους διαφορετικούς i αριθμούς $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ πρέπει να είναι ίσος με έναν από τους a_1, a_2, \dots, a_{i-1} . Αυτό είναι αδύνατο. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
 2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \\
 &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) \\
 &\quad + \dots + (a_m + a_1) \geq m(n+1),
 \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$



Σχήμα 20

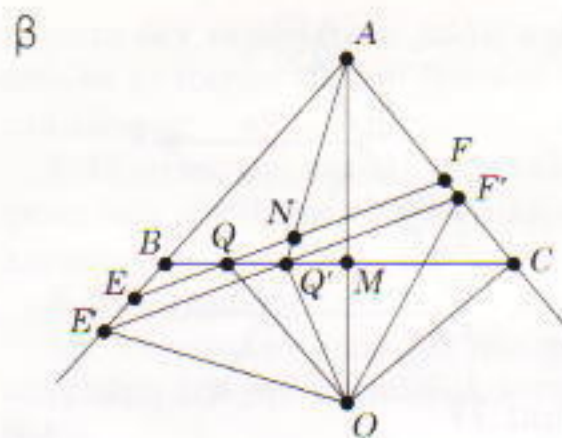
2. Κατ' αρχάς, υποθέτουμε ότι η OQ είναι κάθετη στην EF (Σχήμα 20α). Τα $OEBQ$ και $OCFQ$ είναι εγγράφιμα τετράπλευρα και επομένως $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OCQ = \angle OFQ$. Έπεται ότι: τρίγωνο $OEQ \cong$ τρίγωνο OFQ και $QE = QF$. Υποθέτουμε τώρα ότι $QE = QF$. Έστω ότι η κάθετη από το O επί την EF τέμνει την BC στο $Q' \neq Q$ (Σχήμα 20β). Φέρουμε ευθεία παράλληλη στην EF , η οποία διέρχεται από το Q' , και η οποία τέμνει τις AB και AC στα σημεία E' και F' , αντίστοιχα. Τότε $Q'E' = Q'F'$ όπως προηγουμένως. Έστω ότι η AQ' τέμνει την EF στο N . Τότε $N \neq Q$ και $NE = NF$, οπότε $QE \neq QF$. Αυτό είναι αντίφαση, εκτός αν τα Q και Q' συμπίπτουν —αν, δηλαδή, η OQ είναι κάθετη στην EF .

3. Συμβολίζουμε με g_k το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \dots, k\}$ η αναπαράσταση των οποίων στο σύστημα αρίθμησης με βάση 2 περιέχει τρία ακριβώς 1. Είναι φανερό ότι οι $f(k)$ και $g(k)$ είναι αύξουσες συναρτήσεις, και ότι $f(k) = g(2k) - g(k)$. Άρα

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= g(2k+2) - g(k+1) - [g(2k) - g(k)] \\ &= g(2k+2) - g(2k) - [g(k+1) - g(k)]. \end{aligned}$$

Η δυαδική αναπαράσταση του $2k+2 = 2(k+1)$ προκύπτει απ' αυτήν του $k+1$ αν επισυνάψουμε απλώς ένα μηδέν στο τέλος. Επομένως, ή θα προσμετρούνται και το $2k+2$ στο $g(2k+2)$ και το $k+1$ στο $g(k+1)$, ή κανένα. Έπεται ότι $f(k+1) - f(k) = 1$ ή 0 , ανάλογα με το αν προσμετρείται το $2k+1$ στο $g(2k+2)$. Σε κάθε περίπτωση, η $f(k)$ «περνάει» απ' όλους τους θετικούς ακέραιους. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(2^n) &= g(2^n - 1) = \binom{n}{3}, \text{ επομένως } f(2^n) \\ &= g(2^{n+1}) - g(2^n) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2}. \end{aligned}$$



Άρα η $f(k)$ δεν είναι άνω φραγμένη. Έπεται ότι το πεδίο τιμών της $f(k)$ είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων. Για κάθε θετικό ακέραιο m , η $f(k) = m$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η $f(k) = m$ έχει μία μοναδική λύση. Τότε, $f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - f(k-1)$. Η πρώτη ισότητα ισχύει αν και μόνον αν το $2k+1$ προσμετρείται στο $g(2k+2)$. Ισοδύναμα, υπάρχουν δύο ακριβώς 1 στη δυαδική αναπαράσταση του k . Το ίδιο ισχύει για το $k-1$. Αυτό είναι δυνατό αν και μόνον αν το τελευταίο ψηφίο του $k-1$ είναι 1, το προτελευταίο 0, και υπάρχει ένα ακόμη ακριβώς ψηφίο που είναι 1. Με άλλα λόγια, $k = 2^n + 2$, για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$. Τώρα,

$$\begin{aligned} f(2^n + 2) &= g(2^{n+1} + 4) - g(2^n + 2) \\ &= 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) = 1 + \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι το σύνολο των θετικών ακεραίων m για τους οποίους η $f(k) = m$ έχει μία μοναδική λύση είναι το $\{1 + \binom{n}{2} \mid n \geq 2\}$.

4. Παρατηρούμε ότι οι $mn-1$ και m^3 είναι σχετικά πρώτοι. Τότε το να διαιρείται το n^3+1 από το $mn-1$ είναι ισοδύναμο με το να διαιρεί το $mn-1$ το $m^3(n^3+1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1$, που με τη σειρά του ισοδυναμεί με το να διαιρεί το $mn-1$ το m^3+1 . Αν $m = n$, έχουμε ότι $(n^3+1)/(n^2-1) = n + 1/(n-1)$. Αυτός ο αριθμός είναι ακέραιος αν και μόνον αν $n = 2$. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $m > n$. Αν $n = 1$, τότε για να είναι το $2/(m-1)$ ακέραιος πρέπει και αρκεί να είναι $m = 2$ ή 3 . Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 2$. Παρατηρούμε ότι $n^3+1 \equiv 1 \pmod{n}$ ενώ $mn-1 \equiv -1 \pmod{n}$. Επομένως αν ο $(n^3+1)/(mn-1)$ είναι ακέραιος, τότε ισούται με $kn-1$ για κάποιον θετικό

ακέραιο k . Τώρα $kn-1 < (n^3+1)/(n^2-1) = n+1/(n-1)$ ή $(k-1)n < 1+1/(n-1)$. Άρα $k=1$, οπότε $n^3+1 = (mn-1)(n-1)$. Από αυτό προκύπτει ότι $m = (n^3+1)/(n-1) = n+1+2/(n-1)$, που είναι ακέραιος αν και μόνον αν $n = 2$ ή 3 . Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι $m = 5$. Συνοψίζοντας, έχουμε εννέα λύσεις —συγκεκριμένα, $(2, 2), (2, 1), (3, 1), (5, 2), (5, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 5)$, και $(3, 5)$ από τις οποίες οι τελευταίες τέσσερις προκύπτουν λόγω συμμετρίας.

5. Η συνθήκη (ii) συνεπάγεται ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ τρεις λύσεις: μία στο διάστημα $(-1, 0)$, μία ίση με το 0, και μία στο $(0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι $f(u) = u$ για κάποιο u στο $(-1, 0)$. Αν θέσουμε $x = y = u$ στη συνθήκη (i), παίρνουμε $f(u^2+2u) = u^2+2u$. Αφού $0 < u+1 < 1$, $u^2+2u = (u+1)^2 - 1$ ανήκει επίσης στο $(-1, 0)$. Επομένως, $u^2+2u = u$. Τότε όμως το u δεν ανήκει στο $(-1, 0)$. Θέτοντας $f(v) = v$ για κάποιο v στο $(0, +\infty)$ οδηγούμαστε σε μια παρόμοια αντίφαση. Όμως, $f(x+(1+x)f(x)) = x+(1+x)f(x)$ για όλα τα x στο S . Θα πρέπει να είναι $x+(1+x)f(x) = 0$, επομένως $f(x) = -[x/(1+x)]$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι αυτή η συνάρτηση έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Είναι φανερό ότι η $f(x)/x = -[1/(1+x)]$ είναι γνησίως αύξουσα στο S . Για κάθε x και y στο S έχουμε

$$y + (1+y)f(x) = y - \frac{x(1+y)}{1+x} = \frac{y-x}{1+x},$$

$$\text{και } f(x+(1+x)f(y)) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)$$

$$= -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}} = \frac{y-x}{1+x}.$$

6. Έστω A το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων της μορφής $q_1 q_2 \dots q_{q_1}$, όπου οι $q_1 < q_2 < \dots < q_{q_1}$ είναι πρώτοι. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} A &= \{2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, \dots\} \\ &\cup \{3 \times 5 \times 7, 3 \times 5 \times 11, \dots\} \\ &\cup \{5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17, \dots\} \\ &\cup \dots \end{aligned}$$

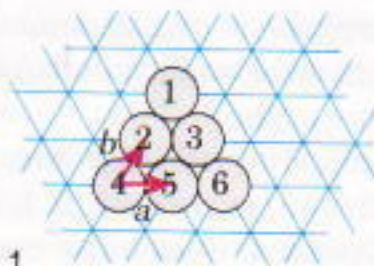
Για κάθε άπειρο σύνολο $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ πρώτων αριθμών με $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ μπορούμε να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες του προβλήματος επιλέγοντας $k = p_1$, $m = p_1 p_2 \dots p_k$, και $n = p_2 p_3 \dots p_{k-1}$.

Το παιχνίδι των τριάδων

Αντιμετωπίζοντας αναλλοίωτες

Vladimir Dubrovsky

ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΓΡΑΦΤΗΚΕ ΛΙΓΟ μετά το διαγωνισμό επίλυσης προβλημάτων στο Διεθνή Μαθηματικό Διαγωνισμό Πόλεων, ο οποίος έγινε, όπως και το 1993, στο Μπελορέτσκ της Ρωσίας τον περασμένο Αύγουστο. Η εκδήλωση αυτή είναι ένα εξαιρετικό, ίσως και μοναδικό, γεγονός που συνδυάζει τα χαρακτηριστικά ενός θερινού σχολείου, μιας ολυμπιάδας, και ενός «ερευνητικού ινστιτούτου» για μαθητές λυκείου. (Για να αποκτήσετε πληρέστερη ιδέα για το τι συμβαίνει εκεί, διαβάστε την «Ιστορία μιας πόλης» στο τεύχος του Ιουλίου/Αυγούστου 1994, που καλύπτει τον προηγούμενο διαγωνισμό.) Ήμουν καλεσμένος στο Μπελορέτσκ ως μέλος της επιτροπής και πρότεινα ένα εκτενές πρόβλημα γνωστό ως σπαζοκεφαλιά των τριάδων. Πίστευα ότι το πρόβλημα θα αποδεικνυόταν ιδιαίτερα ελκυστικό —και πραγματικά, πριν ακόμη ολοκληρώσω την παρουσίαση, παρατήρησα σε αρκετά θρανία της τάξης στροβιλισμούς κερμάτων που προσπαθούσαν να αναπαραστήσουν το πρόβλημα— δεν περίμενα όμως τόσα θαυμάσια αποτελέσματα. Οι λίγες αρχικές εισαγωγικές ερωτήσεις απαντήθηκαν σε ελάχιστο πρακτικά χρονικό διάστημα (για την ακρίβεια, σε μία



Σχήμα 1
Το βασικό τρίγωνο έξι κερμάτων, η αριθμησή τους και το αντίστοιχο πλέγμα.

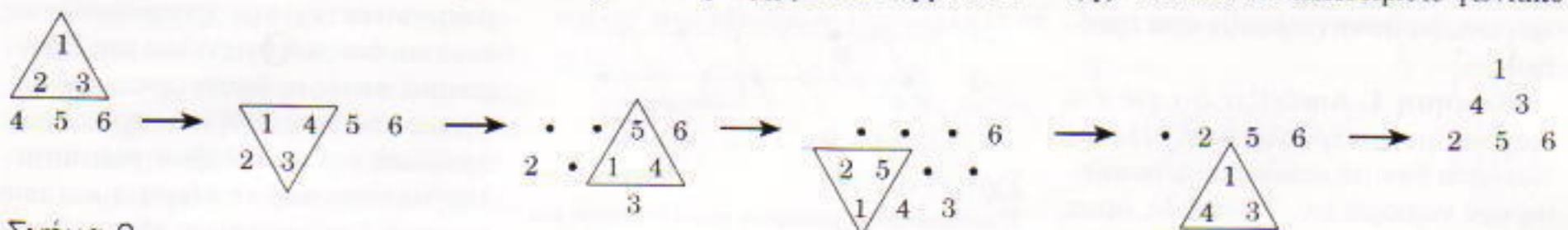
μέρα). Αλλά ακόμη και σε πολύ δυσκολότερες και ευρύτερες επεκτάσεις, δόθηκαν πλήρεις και κομψές λύσεις, αν όχι απολύτως απεργάδιαστες. Θα ήθελα, λοιπόν, να μοιρασιώ μαζί σας μερικές από αυτές τις αξιοσημείωτες ανακαλύψεις.

Επιτρέψτε μου να σας υπενθυμίσω ότι το παιχνίδι των τριάδων, η αρχική εκδοχή του οποίου ανήκει στον Sergey Grabarchuk, συνίσταται στην αναδιάταξη έξι κερμάτων —που αρχικά σχηματίζουν ένα τρίγωνο με τρία κέρματα σε κάθε πλευρά—, με τη μετακίνηση κάθε φορά μικρών τριγώνων που αποτελούνται από τρία επαπτόμενα κέρματα («τριάδες»). Μια τριάδα επιτρέπεται να μετακινηθεί μόνο πάνω στην επιφάνεια «παράλληλα» προς την αρχική της θέση. Μετά τη μετακίνηση μιας τριάδας δημιουργούνται νέες, και η διαδικασία συνεχίζεται. Θα υποθέσουμε από την αρχή ότι τα κέρματα εί-

ναι αριθμημένα 1, 2, ..., 6 όπως στο Σχήμα 1 και θα θεωρήσουμε μόνο τις περιπτώσεις όπου τα κέντρα όλων των κερμάτων συμπίπτουν με τους κόμβους του τριγωνικού πλέγματος που βλέπουμε στο Σχήμα 1. (Αυτό είναι βολικό και, στην πραγματικότητα, δεν είναι περιοριστικό.)

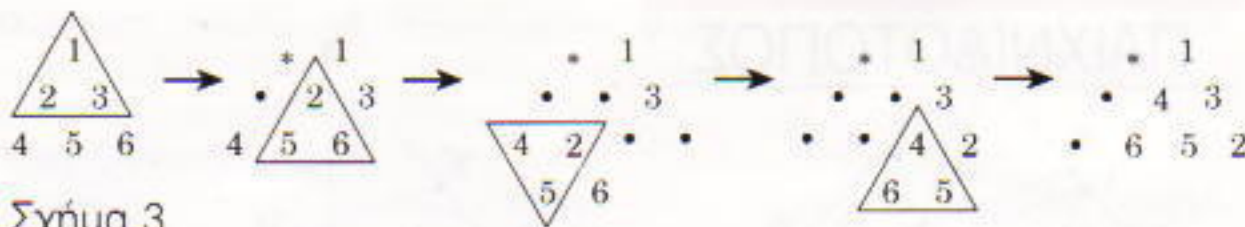
Μεταθέσεις και μετατοπίσεις

Μια από τις πρώτες, εισαγωγικές ερωτήσεις που τέθηκαν στο διαγωνισμό ήταν το κατά πόσον είναι δυνατό να δημιουργηθούν όλες οι $6! = 720$ δυνατές μεταθέσεις των κερμάτων με τη μετακίνηση τριάδων. Μια θαυμάσια λύση (από την οποία μάλιστα προκύπτει ότι μπορούμε να πετύχουμε οποιαδήποτε μετάθεση χωρίς να χρειαστεί να μετατοπίσουμε, ως σύνολο, το μεγάλο τρίγωνο) βρέθηκε από έναν αμερικανό διαγωνιζόμενο, τον Joseph Shaeffer, μαθητή στο Oak Tree School στο Σαρλότ της Βόρειας Καρολίνας. Η πράξη του, που συνίσταται από πέντε κινήσεις και παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, εναλλάσσει ένα γωνιακό νόμισμα μ' ένα γειτονικό του, αφήνοντας ολόκληρο το μεγάλο τρίγωνο στην αρχική του θέση. Η κατάλληλη περιστροφή αυτής (ή μιας συμμετρικής της πράξης) εναλλάσσει οποιοδήποτε γωνιακό



Σχήμα 2

«Η εναλλαγή του Shaeffer.» Τα τριγωνικά πλαίσια υποδεικνύουν τις τριάδες που πρόκειται να μετακινηθούν.



Σχήμα 3

Μοναδιαία μετατόπιση.

νόμισμα με οποιοδήποτε από τα γειτονικά του. Και δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αυτές οι εναλλαγές αρκούν για τη δημιουργία κάθε μετάθεσης.

Ο Joseph και μερικοί ακόμη διαγωνιζόμενοι βρήκαν επίσης μια πράξη (Σχήμα 3) που μετακινεί ολόκληρο το μεγάλο τρίγωνο οριζόντια κατά μία θέση—κατά το διάνυσμα $\mathbf{a} = 45$ (Σχήμα 1)—μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων του πλέγματος. Θεωρώντας τη συμμετρική αυτής της πράξης ως προς τη διχοτόμο της γωνίας 146 του τριγώνου μας, πετυχαίνουμε τη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\mathbf{b} = 42$. Συνδυάζοντας αυτές τις πράξεις και τις αντίστροφές τους, μπορούμε να μετατοπίσουμε το μεγάλο τρίγωνο κατά οποιοδήποτε διάνυσμα $n\mathbf{a} + m\mathbf{b}$, όπου n, m , ακέραιοι. Επομένως, το μεγάλο τρίγωνο μπορεί να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε θέση του πλέγματος, χωρίς μάλιστα να απαιτείται η αλλαγή της σειράς των νομισμάτων, αφού κάθε αναδιάταξη που συνοδεύει τη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $n\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ μπορεί να ακυρωθεί αν χρησιμοποιηθούν οι εναλλαγές που περιγράψαμε προηγουμένως.

Μια αναλλοίωτη

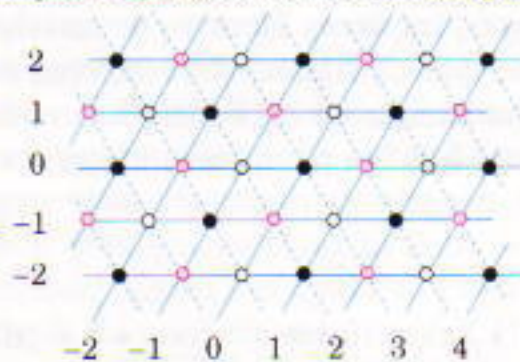
Αφού μέχρι τώρα αποδείχτηκε δυνατή κάθε αναδιάταξη που θελήσαμε να πετύχουμε, μπορεί να σχηματίσουμε την εντύπωση ότι αυτό θα εξακολουθήσει για πάντα—ότι δηλαδή, οποιοδήποτε δύο διευθετήσεις ίσου πλήθους κερμάτων στο πλέγμα μας (που η καθεμιά περιέχει, φυσικά, μια τριάδα) είναι δυνατό να μετασχηματιστούν η μία στην άλλη. Όμως, αν προσπαθήσουμε να αναπαραγάγουμε τα αποτελέσματά μας για ένα μεγαλύτερο τρίγωνο θα συναντήσουμε ένα εμπόδιο.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι για ένα τρίγωνο με n κέρματα στην πλευρά του είναι δυνατή οποιαδήποτε μετάθεση των νομισμάτων. Το σύνολο, όμως, των δυνατών μετατοπίσεων εξαρτάται από το n : όταν το n είναι της μορφής $3k$

ή $3k + 2$ ($k = 1, 2, \dots$) μπορούμε να μετακινήσουμε το τρίγωνο κατά οποιοδήποτε διάνυσμα $m\mathbf{a} + \ell\mathbf{b}$ όπου m, ℓ ακέραιοι, ενώ για n της μορφής $3k + 1$ μόνον κατά τα «τριπλά» διανύσματα $3m\mathbf{a} + 3\ell\mathbf{b}$. Το ότι μερικές μετατοπίσεις είναι αδύνατες για κάποια n φαίνεται να είναι το δυσκολότερο μέρος αυτού του προβλήματος. Απαιτεί μια καινούργια προσέγγιση. Τέτοια γεγονότα μπορεί να αποδειχθούν με τη βοήθεια των λεγόμενων *αναλλοιώτων*. Ας δούμε τι ακριβώς σημαίνει αυτό στην περίπτωση μας.

Αριθμούμε τις οριζόντιες γραμμές του πλέγματος $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ όπως στο Σχήμα 4. Θεωρούμε ένα τυχαίο σύνολο νομισμάτων πάνω στο πλέγμα και το άθροισμα των αριθμών των γραμμών πάνω στις οποίες βρίσκονται. Όταν μετακινείται μια τριάδα είναι προφανές ότι οι τρεις αριθμοί που βρίσκονται από κάτω της μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσό, και επομένως το συνολικό τους άθροισμα μεταβάλλεται κατά ένα πολλαπλάσιο του τρία. Αυτό σημαίνει ότι αυτό το άθροισμα modulo 3—δηλαδή, το υπόλοιπο της διαιρέσής του με το 3—παραμένει σταθερό. Τέτοια αμετάβλητα μεγέθη ονομάζονται *αναλλοιώτες*. Θα συμβολίσουμε την αναλλοίωτή μας s_x , ενώ θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό s_x για μια άλλη αναλλοίωτη που προκύπτει από μια αρίθμηση των κεκλιμένων γραμμών του πλέγματος (Σχήμα 4).

Αυτές οι αναλλοιώτες μας προσφέρουν μια ένδειξη σχετική με το ερώτημα για τις μετατοπίσεις της Άσκησης 1.



Σχήμα 4

Η αρίθμηση των γραμμών του πλέγματος και ο χρωματισμός των κόμβων του που χρησιμοποιείται για τον ορισμό των αναλλοιώτων.

Όταν μετακινείται οριζόντια ένα σύνολο N νομισμάτων—ας πούμε, κατά διάνυσμα \mathbf{a} —είναι φανερό ότι η s_x του δεν αλλάζει ενώ η s_x αλλάζει κατά $N \pmod{3}$. Επομένως, η μετατόπιση κατά \mathbf{a} είναι δυνατή μόνο όταν το N διαιρείται με το 3—δηλαδή, μπορούμε να εκτελέσουμε μόνο μετατοπίσεις κατά πολλαπλάσια του $3\mathbf{a}$. Το ίδιο ισχύει για πλάγιες μετατοπίσεις. Ολοκληρώστε τώρα μόνοι σας την απόδειξη και κατόπιν προσπαθήστε να λύσετε τις επόμενες ασκήσεις.

Άσκησης

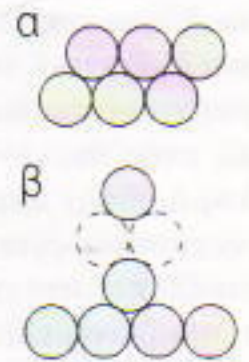
2. Είναι δυνατό να μετασχηματίσουμε ένα τρίγωνο μεγέθους 3 (τρία νομίσματα σε κάθε πλευρά) στο «παράλληλόγραμμο» του Σχήματος 5α;

3. Για ποιες τιμές του n ένα τρίγωνο μεγέθους n μπορεί να αντιστραφεί—δηλαδή να αναποδογυριστεί;

4. Είναι δυνατό να μετασχηματίσουμε ένα τρίγωνο μεγέθους 3 στη διάταξη του Σχήματος 5β;

Μορφές

Η τελευταία άσκηση είναι παράδειγμα ενός τρίτου τύπου ερωτήσεων που μπορούμε να κάνουμε για τις τριάδες: ποιες μορφές μπορεί να πάρει ένα τριγωνικό σύνολο έξι νομισμάτων έπειτα από μια τυχαία αναδιάταξη του μέσω μετακινήσεων τριάδων. (Οι δύο πρώτοι τύποι ερωτήσεων είχαν να κάνουν με μεταθέσεις και μετατοπίσεις.) Στην πραγματικότητα, αν λύσουμε αυτό το τρίτο πρόβλημα σημαίνει ότι έχουμε λύσει το (τρόπος του λέγειν) θεμελιώδες πρόβλημα σχετικά με τις τριάδες—δηλαδή, το να περιγράψουμε όλες τις δυνατές διευθετήσεις των έξι κερμάτων που αποτελούν το αρχικό μας τρίγωνο, τις οποίες μπορούμε να πετύχουμε χρησιμοποιώντας τους κανόνες του παιχνιδιού μας. Πραγματικά, αυτές οι διευθετήσεις καθορίζονται από τη μορφή και τη θέση του συνόλου των έξι κόμβων που καταλαμβάνονται από τα κέρματα και από τη σειρά των κερμάτων πάνω σ' αυτούς τους κόμβους. Γνωρίζουμε, όμως,



Σχήμα 5

Μπορείτε να δημιουργήσετε αυτές τις μορφές ξεκινώντας από ένα τρίγωνο;

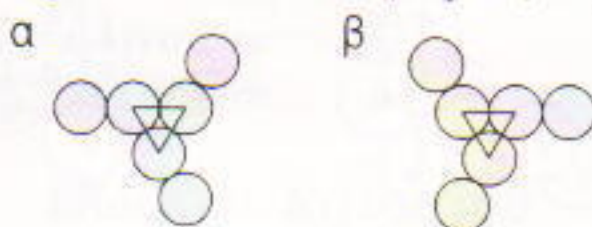
ότι είναι δυνατή οποιαδήποτε σειρά των νομισμάτων, επειδή είναι δυνατή οποιαδήποτε μετάθεση στο αρχικό τρίγωνο. Γνωρίζουμε επίσης ότι μπορούμε να μετακινήσουμε οποιαδήποτε επιτεύξιμη μορφή σε μια τυχαία θέση του πλέγματος σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο, επειδή το ίδιο ισχύει και για το ίδιο το τρίγωνο. Επομένως το μόνο που δεν γνωρίζουμε ακόμη είναι οι ποιες είναι οι δυνατές μορφές.

Αλήθεια, προσπαθήσατε πραγματικά να λύσετε τις ασκήσεις 2,3,4; Αν απλώς τις προσπεράσατε, δοκιμάστε τώρα να τις λύσετε. Υπολογίζοντας τις αναλλοιώτες s_x και s_y θα βρείτε γρήγορα ότι η απάντηση στην άσκηση 2 είναι αρνητική. Θα είναι λίγο δυσκολότερο να προσδιορίσετε για ποιες τιμές του n αντιστρέφεται ένα τρίγωνο μεγέθους n , και νομίζω ότι θα απαιτηθεί αρκετός χρόνος και προσπάθεια για να πιστοποιήσετε ότι το τρίγωνο είναι όντως αντιστρέψιμο γι' αυτές τις τιμές. Όσον αφορά την άσκηση 4, οι αναλλοιώτες μας δεν κάνουν διάκριση μεταξύ του τριγώνου των έξι κερμάτων και της μορφής του Σχήματος 5β. Όμως, είμαι βέβαιος ότι δεν έχετε ανακαλύψει μέχρι τώρα κάποιον επιθυμητό μετασχηματισμό. Φυσικά, το γεγονός ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί ο μετασχηματισμός δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι δεν υπάρχει. Και στην άσκηση 3, άλλωστε, ήταν επίσης δύσκολο να βρεθεί. Υπάρχουν όμως σοβαροί λόγοι να είμαι βέβαιος. Και ίσως τους έχετε βρει και εσείς. Υπάρχουν αναλλοιώτες, διαφορετικές από τις s_x και s_y , που απαγορεύουν αυτό το μετασχηματισμό.

Για να τις περιγράψουμε, χρωματίζουμε τους κόμβους του πλέγματος με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 4. Αυτός ο χρωματισμός είναι δυνατό να οριστεί αλγεβρικά. Αν χρησιμοποιήσουμε την αρίθμηση των γραμμών του σχήματος, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κόμβο ένα ζεύγος ακεραίων (x, y) —τους αριθμούς της κεκλιμένης γραμμής (x) και της οριζόντιας (y) που διέρχονται από αυτόν τον κόμβο [οι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του κόμβου ως προς τους δύο άξονες του πλέγματος με αριθμό 0]. Χρωματίζουμε τώρα με όμοιο χρώμα όλους τους κόμβους με την ίδια διαφορά $x - y \pmod{3}$: στο Σχήμα 4 οι κόμβοι με

$x - y = 0 \pmod{3}$ είναι μαύροι, αυτοί με $x - y = 1 \pmod{3}$ είναι κόκκινοι, ενώ οι κόμβοι με $x - y = 2 \pmod{3}$ είναι λευκοί. Μια τριάδα καλύπτει πάντοτε στο πλέγμα έναν μαύρο, έναν κόκκινο και έναν λευκό κόμβο· επομένως, όταν μετακινούνται οι τριάδες, το πλήθος d_0 των μαύρων, d_1 των κόκκινων και d_2 των λευκών κόμβων που βρίσκονται κάτω από τα κέρματα παραμένει αναλλοιώτο. (Γυρίστε τώρα πάλι στην άσκηση 4!)

Τώρα λοιπόν έχουμε πέντε αναλλοιώτες: τις $s_x, s_y, d_0, d_1,$ και d_2 . Δεν είναι όμως ανεξάρτητες: προφανώς $s_x = d_0 + d_1 + d_2 + s_y \pmod{3}$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, ας πούμε, μόνο την s_y και να αδιαφορήσουμε για την s_x . Αυτό ήταν λοιπόν; Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι, ξεκινώντας από το τρίγωνο με τα έξι νομίσματα, κάθε αναδιάταξη των έξι νομισμάτων της οποίας οι τέσσερις αναλλοιώτες (και επομένως, και οι πέντε) είναι ίδιες με αυτές του αρχικού τριγώνου, είναι επιτεύξιμη; Η απάντηση είναι και πάλι αρνητική! Δείτε το Σχήμα 6: για όλες τις διατάξεις που απεικονίζονται σε αυτό οι αναλλοιώτες έχουν τις ίδιες τιμές με αυτές του αρχικού τριγώνου —δηλαδή $d_0 = d_1 = d_2 = 2, s_y = 1$, αλλά είναι αδύνατο να δημιουργήσουμε το τρίγωνο ξεκινώντας από αυτές. Πραγματικά, η μοναδική τριάδα που υπάρχει στο Σχήμα 6α (ή στο 6β) είναι αδύνατο να μετακινηθεί —εμποδίζεται από τα υπόλοιπα τρία κέρματα— ενώ οι δύο τριάδες του Σχήματος 6γ μπορούν μόνο να παίρνουν διάφορες θέσεις πάνω στο επίπεδο. Ο μοναδικός τρόπος να δημιουργηθεί μια νέα τριάδα είναι να τις τοποθετήσουμε όπως στο Σχήμα 6δ —και να ανακαλύψουμε ότι αυτή η νέα τριάδα είναι μπλοκαρισμένη. Όμως, θα δούμε σύντομα ότι αυτοί οι σχηματισμοί (καθώς και όλοι οι άλλοι πιθανοί συνδυασμοί δύο «αναποδογυρισμένων» τριάδων) είναι οι μοναδικές εξαιρέσεις του γενικού κανόνα σύμφωνα με τον οποίο η ισότητα των τριών αναλλοιώτων εξασφαλίζει τη



Σχήμα 6
Μορφές με μπλοκαρισμένη τριάδα.

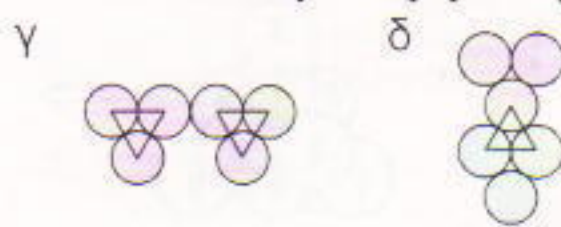
δυνατότητα μετασχηματισμού ενός συνόλου κερμάτων σ' ένα άλλο.

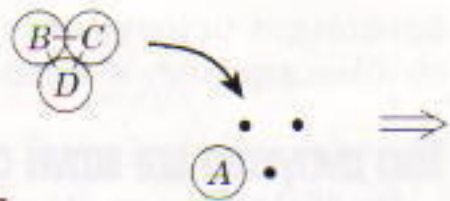
Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη

Θα ήθελα τώρα να διατυπώσω και να αποδείξω το θεώρημα των τριάδων που ανακάλυψε κατά τη διάρκεια του διαγωνισμού ο Hugh Robinson, που ταξίδεψε από το Κόβεντρι της Μεγάλης Βρετανίας έως το Μπελορέτοκ και κέρδισε το πρώτο βραβείο για την έρευνα που έκανε πάνω σε αυτή τη σπαζοκεφαλιά.

Ας κάνουμε λιγότερο αυστηρούς τους κανόνες του παιχνιδιού μας και ας επιτρέψουμε να σηκώνεται πάνω από το επίπεδο μια τριάδα όταν μετακινείται σε νέα θέση. Τότε μπορούμε να πετύχουμε μια διευθέτηση έξι κερμάτων στο πλέγμα μας, ξεκινώντας από το αρχικό τρίγωνο, αν και μόνον αν η διευθέτηση αυτή περιέχει μια τριάδα και έχει τις ίδιες τιμές των αναλλοιώτων d_0, d_1, d_2, s_y με το τρίγωνο ($d_0 = d_1 = d_2 = 2, s_y = 1$). Η «και μόνον αν» συνθήκη (αναγκαιότητα) προκύπτει απ' όσα είπαμε προηγουμένως. Στην επόμενη παράγραφο περιγράφω την απόδειξη του ικανού της συνθήκης.

Στο Σχήμα 7 βλέπουμε πώς μπορούμε να απομακρύνουμε ένα νόμισμα από έναν κόμβο και, ταυτόχρονα, να φέρουμε ένα άλλο νόμισμα πάνω σ' έναν γειτονικό κόμβο του ίδιου χρώματος: φέρνουμε απλώς μια τριάδα δίπλα στο πρώτο νόμισμα σχηματίζοντας έναν «ρόμβο» τεσσάρων νομισμάτων, και απομακρύνουμε κατόπιν την άλλη τριάδα που περιέχεται στο ρόμβο. Η τριάδα που φέρνουμε δίπλα στον κόμβο μπορεί να «δείχνει» προς τα πάνω ή προς τα κάτω: ο καθένας από αυτούς τους προσανατολισμούς μας δίνει τρία από τα έξι δυνατά «άλματα» από έναν κόμβο σε κάποιον από τους πλησιέστερους κόμβους ίδιου χρώματος. Σε όλες τις περιπτώσεις, η τριάδα αντιστρέφεται μετά το άλμα. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε, βάσει των τιμών των αναλλοιώτων μας, ότι κάθε διάταξη που ικανοποιεί τη συνθήκη του προ-





Σχήμα 7

Αλλα ενός κέρματος.

βλήματός μας αποτελείται από μια τριάδα και από τρία κέρματα που βρίσκονται πάνω σε κόμβους διαφορετικού χρώματος. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τριάδα για να αναδιατάξουμε τα «ελεύθερα» νομίσματα έτσι ώστε να σχηματίσουν τη βάση του αρχικού τριγώνου —τρία κέρματα στη σειρά, διότι μια παρόμοια γραμμή καλύπτει πάντοτε τρεις διαφορετικά χρωματισμένους κόμβους. Κατόπιν μπορούμε να συμπληρώσουμε το τρίγωνο τοποθετώντας την τριάδα πάνω στη βάση. Για να κατασκευάσουμε την δεδομένη διάταξη από το τρίγωνο, απλώς αντιστρέφουμε αυτόν το μετασχηματισμό.

Περιορίζομαι σ' αυτή την σύντομη περιγραφή της απόδειξης παρότι χρειάζεται μια συγκεκριμένη τελειοποίηση: οφείλουμε να εξασφαλίσουμε ότι όλα τα βήματα του μετασχηματισμού είναι όντως δυνατά να πραγματοποιηθούν. Μπορείτε να συμπληρώσετε όλες τις λεπτομέρειες χρησιμοποιώντας την ισότητα των αναλλοίωτων.

Σημειώστε ότι η μέθοδος μετασχηματισμού που περιγράψαμε έχει να κάνει μόνο με τη μορφή (και τη θέση) του συνόλου των κερμάτων —δηλαδή με τους κόμβους που καταλαμβάνουν. Αυτό, όμως, είναι αρκετό αφού, όπως γνωρίζουμε, μπορούμε πάντοτε να μεταθέσουμε τα κέρματα του τριγώνου με όποιο τρόπο θέλουμε. Επίσης, ήταν ουσιαστικό το γεγονός ότι είχαμε τη δυνατότητα να μετακινούμε ελεύθερα τις «ενεργές» τριάδες —κάτι που ενδεχομένως δεν θα ίσχυε αν οι τριάδες μπορούσαν μόνο να ολισθαίνουν. Πάντως, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να εξετάσουμε όλες τις διευθετήσεις μιας τριάδας και τριών κερμάτων και

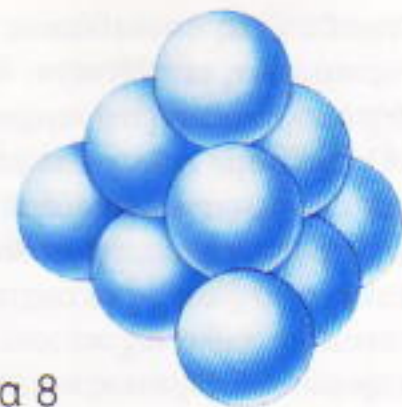
να επιβεβαιώσουμε ότι η προηγούμενη απόδειξη μπορεί να εφαρμοστεί και με ολισθήση, εκτός από τις περιπτώσεις του Σχήματος 6.

Έτσι, έχουμε περιγράψει πλήρως τους μετασχηματισμούς των έξι κερμάτων. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο και να επεκτείνουμε το θεώρημά μας για δύο οποιαδήποτε σύνολα κερμάτων πάνω σ' ένα τριγωνικό πλέγμα. Και, μάλιστα, όχι μόνο αυτό. Αν το αρχικό σύνολο περιέχει εκτός από την τριάδα και δύο τουλάχιστον κέρματα που βρίσκονται πάνω σε κόμβους διαφορετικού χρώματος (σε σχέση με το χρωματισμό του Σχήματος 4), είναι δυνατή οποιαδήποτε μετάθεση των κερμάτων του πάνω στο ίδιο σύνολο κόμβων. (Για να εναλλάξουμε δύο κέρματα, τα μετακινούμε μαζί με άλλα τρία έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα «τραπεζοειδές» όπως αυτό που σχηματίζουν τα κέρματα 1 έως 5 στο Σχήμα 1, και μετά χρησιμοποιούμε την πράξη του Σχήματος 2—το κέρμα 6 δεν χρειάζεται αφού ουδέποτε μετακινείται σε αυτήν την πράξη.)

Τετράδες

Θα ολοκληρώσω την ιστορία μας με μια τρισδιάστατη γενίκευση της σπαζοκεφαλιάς μας. Φανταστείτε μια πυραμίδα αποτελούμενη από δέκα όμοιες σφαίρες (Σχήμα 8). Επιτρέπεται να αποσπάσουμε μια «τετράδα» —μια μικρή πυραμίδα τεσσάρων σφαιρών— και να τη μετακινήσουμε χωρίς να την περιστρέψουμε σε νέα θέση, κατόπιν να αποσπάσουμε και να μετακινήσουμε μια νέα τετράδα, κ.ο.κ. Τι σχηματισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε ξεκινώντας από την αρχική πυραμίδα;

Κατ' αρχάς, αυτή τη φορά δεν έχου-



Σχήμα 8

Κάτι για να εξασκήσετε τη φαντασία σας.

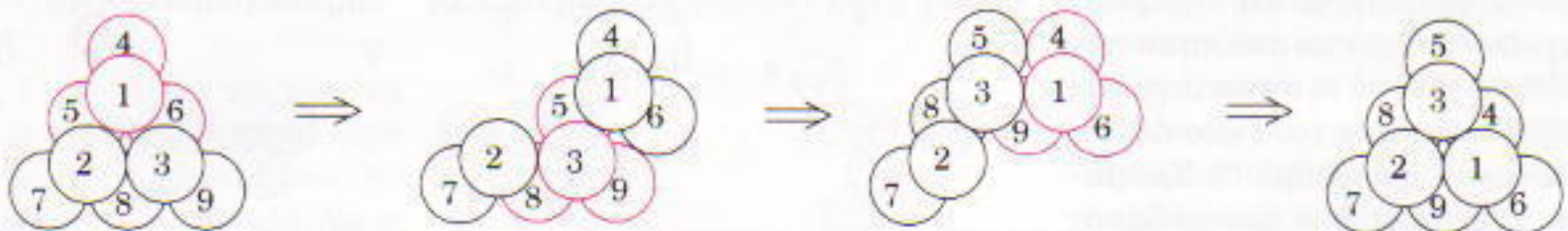
με κάποιο πλέγμα: αν **a**, **b**, και **c** είναι τα διανύσματα που φέρουμε από το κέντρο μιας από τις σφαίρες της τετράδας προς τα κέντρα των άλλων τριών σφαιρών της, τότε κανένα από τα διανύσματα τα οποία συνδέουν το ίδιο κέντρο με το κέντρο μιας σφαίρας που εφάπτεται σε κάποια από τις σφαίρες της τετράδας δεν είναι της μορφής $na + mb + kc$ με n , m , και k ακέραιους. Και μάλιστα όχι μόνο αυτό —το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των κέντρων των σφαιρών που μπορεί να προκύψουν σε αυτό το παιχνίδι είναι παντού πυκνό στο χώρο. Επομένως, δεν μπορούμε να ορίσουμε αναλλοίωτες όπως κάναμε στο επίπεδο και δεν είναι φανερό το πώς θα συνεχίσουμε την έρευνά μας για τις μορφές και τις μετατοπίσεις στο χώρο.

Μπορούμε όμως να περιγράψουμε πλήρως τις μεταθέσεις των σφαιρών. Ο Hugh Robinson και μερικοί ακόμη διαγωνιζόμενοι ανακάλυψαν την απλή αναδιάταξη τριών κινήσεων του Σχήματος 9. Αποδεικνύεται ότι δεν χρειαζόμαστε τίποτε άλλο.

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας αυτή την πράξη, δείξτε ότι μπορούμε να εναλλάξουμε οποιαδήποτε γωνιακή σφαίρα με οποιαδήποτε γειτονική της.

Είναι φανερό ότι αυτές οι εναλλαγές αρκούν για να πετύχουμε οποιαδήποτε μετάθεση των σφαιρών της πυραμίδας, χωρίς καν να τη μετατοπίσουμε. ■

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 61



Σχήμα 9

Βασική αναδιάταξη στη σπαζοκεφαλιά των τετράδων, πάνω όψη. (Η σφαίρα της κορυφής της πυραμίδας δεν φαίνεται ούτε μετακινείται.)