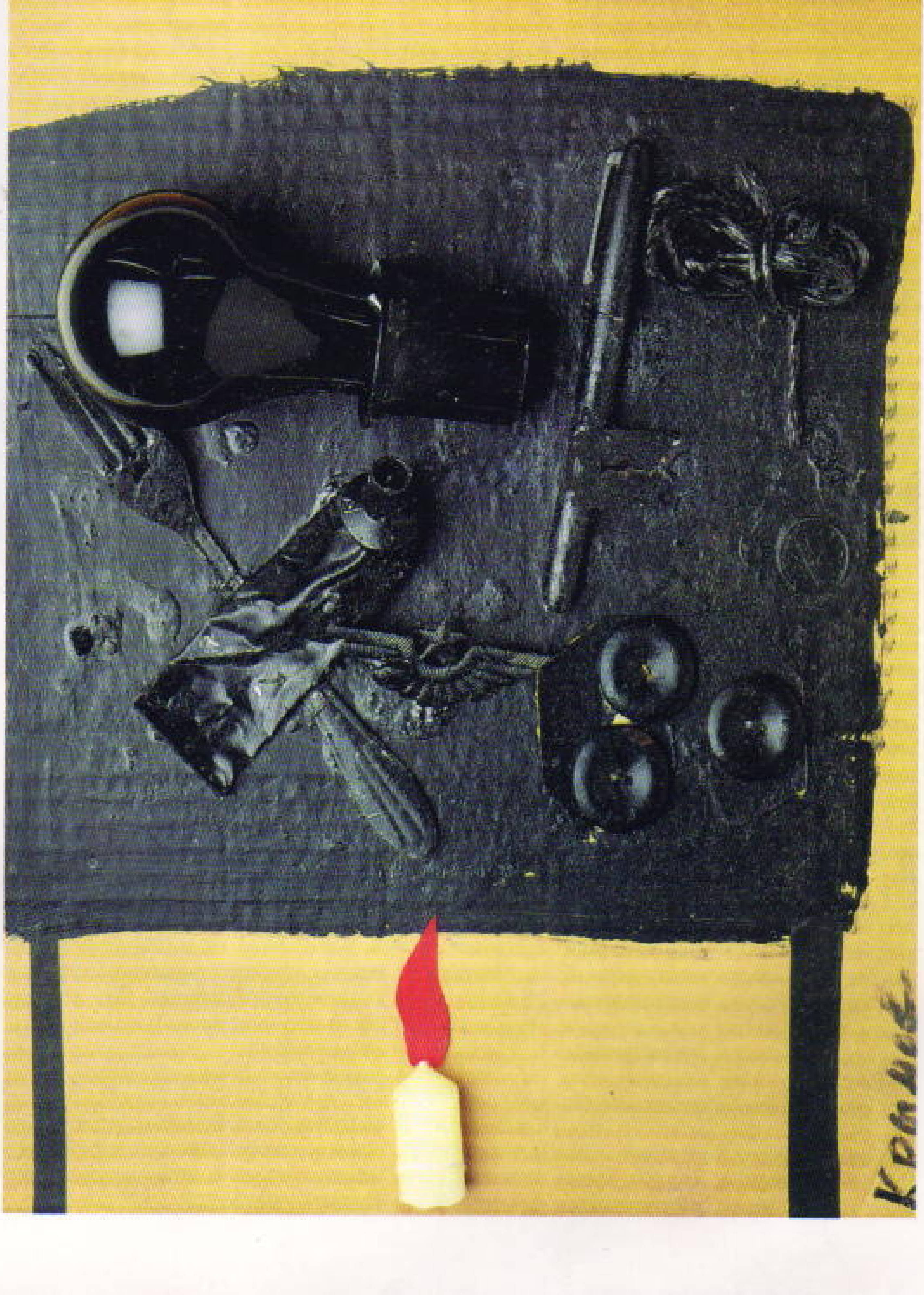
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1996
ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 1
1.400 ΔΡΧ.

Μελανό σώμα και νόμος του Kirchhoff



- *Συνέντευξη με τον Κορνήλιο Καστοριάδη*
- *Πληροφορική και σφάλματα*
- *Η φυσική της ηχομόνωσης*
- *Μέση τιμή συνάρτησης*
- *UFO: εξωγήινοι επισκέπτες;*
- *Ο παράδεισος του Georg Cantor*
- *Ιξώδες και λάδια κινητήρων*
- *Παιχνίδια με την ταινία του Möbius*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Συλλογή Andrew W. Mellon © 1995 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

Άποψη της στενωπού
που ονομάζεται χαράδρα των Λευκών Ορέων (χαράδρα Κρώφορντ) (1839)
του Thomas Cole

ΑΝ Ο THOMAS COLE (1801-1848), ΕΝΑΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΙΔΡΥΤΕΣ της αμερικανικής «σχολής ζωγραφικής του ποταμού Χάντσον», αναπαριστούσε αυτή τη σκηνή τριάντα χρόνια αργότερα, ίσως συμπεριλάμβανε στον πίνακα την οδοντωτή σιδηροδρομική γραμμή που κατασκευάστηκε από τη χαράδρα Κρώφορντ ώς το όρος Ουάσινγκτον, περίπου δεκατρία χιλιόμετρα προς τα βορειοανατολικά. Το όρος Ουάσινγκτον είναι η υψηλότερη κορυφή των Λευκών Ορέων και χαρακτηρίζεται από δριμύτατες καιρικές συνθήκες —το 1934 αναφέρθηκαν άνεμοι ταχύτητας 372 km/s. Το μεγαλύτερο μέρος της γύρω περιοχής εντάσσεται σήμερα στον Εθνικό Δρυμό των Λευκών Ορέων. Η ίδια η χαράδρα Κρώφορντ αποτελεί πάρκο της Πολιτείας, και ώς έναν μεγάλο βαθμό η φυσική ομορφιά την οποία βρήκε σ' αυτήν ο Cole διατηρείται μέχρι σήμερα.

Η γειτονική κορυφή που εικονίζεται σε τούτο τον πίνακα να δεσπόζει πάνω από ένα γαλήνιο τοπίο δεν υφίσταται το σφυροκόπημα σφοδρών ανέμων. Ωστόσο, ο Cole μάς προσφέρει την άποψη ενός διαφορετικού είδους μετεωρολογικού φαινομένου. Οπωσδήποτε εντυπωσιάστηκε από τον τρόπο με τον οποίο τα νέφη συσσωρεύονται από τη μια πλαγιά της κορυφής, ενώ ο ουρανός είναι καθαρός από την άλλη. Παρατηρείται συχνά κάτι τέτοιο στα βουνά, και γιατί συμβαίνει; Για να βρείτε κάποιες απαντήσεις, διαβάστε το άρθρο «Το βουνό που καπνίζει», στη σελίδα 25.

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 1

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

Στο εξώφυλλό μας βλέπουμε μια εντελώς παράδοξη εκδοχή ενός «δείπνου υπό το φως των κεριών»! Τα εδέσματα δεν είναι και πολύ ορεκτικά: ένα ξυράφι, ένας λαμπτήρας, ένα στιλό... Άλλωστε, φαίνεται ότι όλα έχουν γίνει κάρβουνο!

Τι μαγειρεύεται εδώ; Μπορεί να έχουμε αντιληφθεί το θέμα εντελώς λανθασμένα· ίσως τα αντικείμενα ήταν κατάμαυρα προτού εκτεθούν στη φλόγα. Είναι σαφές ότι υπάρχει κάτι περισσότερο από αυτό που βλέπουμε (το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην πραγματικότητα προκύπτει από ένα μικρό ποσοστό του εκπεμπόμενου φωτός). Το άρθρο της σελίδας 12 οπωσδήποτε θα διαφωτίσει το ζήτημα.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

UFO: εξωγήινοι επισκέπτες;

«Και παρ' όλα αυτά απ' άκρου εις άκρον του διαστήματος εγκέφαλοι ασύγκριτα ανώτεροι από τους δικούς μας παρακολουθούσαν αυτή τη Γη με φθονερά μάτια ενώ αργά αλλά σταθερά κατέστρωναν τα σχέδιά τους εναντίον μας.»

—Ο πόλεμος των Κόσμων, *H.G. Wells*

ΑΣΥΝΗΘΗ ΙΠΤΑΜΕΝΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ γνωστά στο ευρύτερο κοινό ως UFO (Unidentified Flying Objects —Αγνώστου Ταυτότητος Ιπτάμενα Αντικείμενα) παρατηρούνται σε ολόκληρο τον κόσμο από το 1947 μέχρι σήμερα. Τα τεκμηριωμένα περιστατικά υπερτερούν στις ΗΠΑ και στις χώρες της Δυτικής Ευρώπης όπου είναι ευκολότερη η πρόσβαση σε αρμόδιες κρατικές υπηρεσίες ή ιδιωτικά κέντρα —αυτοανακηρυσσόμενα αρμόδια— που καταγράφουν και μελετούν τις σχετικές μαρτυρίες. Συνειρμικά, «UFO» σημαίνει «εξωγήινοι». Στην πραγματικότητα το «φαινόμενο των UFO» έχει βαθύτερες ρίζες και πολλές διαπλεκόμενες διαστάσεις (φυσικές, πολιτισμικές, ψυχολογικές, κοινωνικές, ιστορικές), οι οποίες μεταβάλλονται συνεχώς μεταβάλλοντας έτσι και τη φύση του φαινομένου. Μία από τις μεγαλύτερες δυσκολίες της σκιαγράφησής του είναι η αξιοπιστία των πηγών σχετικά με την αλήθεια, την ακρίβεια και την αντικειμενικότητα των γεγονότων που περιγράφουν. Με τη διαβεβαίωση ότι η παρούσα προσέγγιση αποτελεί απόσταγμα πολυετούς ενασχόλησης και συνεχούς παρακολούθησης του θέματος κάτω από ένα ιδιαίτερα κριτικό πνεύμα, θα επιχειρήσουμε να το αντιμετωπίσουμε ξεκινώντας από την αρχή. Και η αρχή σε κάθε πεδίο έρευνας είναι η σωστή ταξινόμηση των ευρημάτων της.

Το κλασικό σύστημα ταξινόμησης των UFO προτάθηκε από τον αστρονόμο Allen Hynek, καθηγητή του Πανεπιστημίου Northwestern και σύμβουλο της Αμερικανικής Αεροπορίας στο πρόγραμμα Blue Book (1952-1969) που είχε στόχο την καταγραφή και αξιολόγηση των μαρτυριών UFO. Το σύστημα περιλαμβάνει επτά κατηγορίες με τα ονόματα: Νυχτερινά Φώτα (ΝΦ), Φωτοημερήσιοι Δίσκοι (ΦΔ), Ραδιο-Οπτικά αντικείμενα (ΡΟ) και Στενές Επαφές (ΣΕ) τύπου Ι, ΙΙ, ΙΙΙ και IV. Αναλυτικότερα περιλαμβάνει τα εξής φαινόμενα:

Νυχτερινά Φώτα (ΝΦ): Φωτεινές πηγές, σημειακές (μεμονωμένες ή σε σχηματισμούς) ή εκτεταμένες, μονόχρωμες ή πολύχρωμες, ακίνητες ή σε κίνηση, που εκ πρώτης όψεως δεν ερμηνεύονται συμβατικά. Απαρτίζουν τη μεγαλύτερη ομάδα μαρτυριών (85%). Τυπική περίπτωση στο Λάμποκ του Τέξας, τον Αύγουστο και τον Σεπτέμβριο του 1951. Πολυπληθείς μαρτυρίες για φωτεινές πηγές διατεταγμένες σε σχήμα ημισελήνου που υπερίπταντο κάνοντας ελιγμούς και διατηρώντας το σχηματισμό τους.

Φωτοημερήσιοι Δίσκοι (ΦΔ): Αντικείμενα παρατηρούμενα στο φως της ημέρας, δισκοειδή ή ωοειδή (αλλά και άλλων μορφών), μεταλλικής υφής, κινούμενα ή μετεωριζόμενα στον ουρανό ή κοντά στο έδαφος και εξαφανιζόμενα αιφνιδίως αναπτύσσοντας απίστευτες ταχύτητες. Τυπικές οι περιπτώσεις των Arnold, το 1947, και Mantell, το 1948. Στις 24 Ιουνίου 1947 ο 32χρονος επιχειρηματίας Kenneth Arnold, υπεριπτάμενος με το ιδιωτικό του μονοπλάνο του όρους Ραινίερ της πολιτείας Ουάσινγκτον, παρατηρεί με έκπληξη ένα σμήνος ιπτάμενων μεταλλικών δίσκων εγκαινιάζοντας τη σύγχρονη εποχή των UFO. Στις 7 Ιουλίου 1948 η αστυνομία του Μάντισονβιλλ, του Κεντάκυ, ειδοποιεί την αεροπορική βάση Goodman για ένα τεράστιο UFO που κατευθύνεται προς αυτήν. Ο διοικητής της βάσης παρουσία πολλών αξιωματικών βλέπει το UFO (μεταλλικό, κωνοειδούς σχήματος με ερυθροκίτρινη αιγλοβολία) να μετεωρίζεται και αποστέλλει τρία καταδιωκτικά F-51 για αναχαίτιση και καταδίωξη. Τα δύο εγκαταλείπουν την προσπάθεια, το τρίτο όμως, με πιλότο το σμηναγό Thomas Mantell, αναφέρει στη βάση ότι έχει μπροστά του «αυτό το πράγμα», βρίσκεται σε ύψος 3,5 km και επιχειρεί ανάβαση στα 6 km κυνηγώντας το. Αυτό ήταν το τελευταίο του μήνυμα. Τα συντρίμμια του αεροπλάνου βρέθηκαν το ίδιο απόγευμα.

Ραδιο-Οπτικά Αντικείμενα (ΡΟ): Σπάνιες περιπτώσεις όπου αγνώστου προελεύσεως αντικείμενα ανιχνεύονται συγχρόνως με την οπτική τους παρατήρηση και σε ραντάρ (από τον ίδιο ή άλλους παρατηρητές). Τυπική περίπτωση στην Ουάσινγκτον τον Ιούλιο του 1952. Το ραντάρ του πύργου ελέγχου του αεροδρομίου ανιχνεύει επτά άγνωστα αντικείμενα. Αποστέλλονται δύο μαχητικά F-94.

Ο πιλότος του ενός αναφέρει ότι το αεροπλάνο του έχει περικυκλωθεί από επτά φωτεινά αντικείμενα και ζητά άδεια να ανοίξει πυρ. Ενώ στον πύργο ελέγχου συσκέπτονται, τα UFO εξαφανίζονται.

Στενές Επαφές ή Κοντινές Συναντήσεις (Close Encounters). Αποτελούν τις πλέον ενδιαφέρουσες μαρτυρίες, δεδομένου ότι αναφέρονται σε αντικείμενα ή φαινόμενα που συμβαίνουν σε πολύ κοντινή απόσταση από τον παρατηρητή (όχι πάνω από 200 μέτρα). Διακρίνονται σε Στενές Επαφές (ΣΕ) τεσσάρων τύπων: ΣΕ Ι, ΣΕ ΙΙ, ΣΕ ΙΙΙ, και ΣΕ IV.

ΣΕ Ι: Το UFO βρίσκεται πολύ κοντά, χωρίς όμως να υπάρχει αλληλεπίδραση με τον παρατηρητή ή το περιβάλλον. Τυπικές περιπτώσεις στο Ανν Άρμπορ του Μίσιγκαν, το 1966, στο Νέντερλαντ του Τέξας, το 1966, και στη Μιννεζότα, το 1979. Την περίοδο 19-20 Μαρτίου 1966 παρατηρείται ένα λαμπρό, οβάλ σχήματος UFO, μεγέθους αυτοκινήτου, να υπερίπταται πάνω από τα έλη που βρίσκονται κοντά στο Ανν Άρμπορ (μισή ώρα την πρώτη ημέρα και για τέσσερις ολόκληρες ώρες τη δεύτερη). Ένα μήνα πριν, στις 6 Φεβρουαρίου 1966, στις 6 το πρωί, στο Νέντερλαντ του Τέξας, παρατηρείται επί πέντε λεπτά από τρεις αξιόπιστους μάρτυρες, UFO που περνά πάνω από τη στέγη ενός σπιτιού σαρώνοντας την περιοχή με ερυθρά ακτινοβολία που εκπέμπει από οπή στο κάτω μέρος του. Εξάλλου στη Μιννεζότα, τον Αύγουστο του 1979, ο αξιωματικός της αστυνομίας Val Johnson ανέφερε τρομοκρατημένος ότι μία τεραστίων διαστάσεων φωτεινή σφαίρα καταδίωξε το περιπολικό του στον αυτοκινητόδρομο, τον ανάγκασε να βγει έξω από το δρόμο και τελικά συγκρούστηκε με το αυτοκίνητο.

ΣΕ ΙΙ: Το UFO βρίσκεται σε κοντινή απόσταση, παρατηρούνται δε και αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον, όπως διακοπή της λειτουργίας του ηλεκτρικού συστήματος των αυτοκινήτων (σβήσιμο μηχανής και φώτων), σημάδια ή καψίματα στο έδαφος όπου προσγειώθηκε το UFO και επιπτώσεις σε φυτά, ζώα και ανθρώπους που βρίσκονται κοντά. Τυπικές περιπτώσεις στο Λέβελλαντ του Τέξας, το 1957, στο Λοχ Ραίηβεν Νταμ της Μαίρυλαντ, το 1958, και στο Τρανς-αν-Προβάνς, στη Γαλλία, το 1981. Στις αρχές Νοεμβρίου του 1957 στο Λέβελλαντ του Τέξας, περιπολικό της αστυνομίας και εφτά άλλα οχήματα που βρίσκονταν στην περιοχή εμφάνισης ενός UFO ωοειδούς σχήματος, μεγέθους 100 μέτρων, φωτεινού «σαν τον Ήλιο στη δύση του» ακινητοποιήθηκαν (έσβησαν οι μηχανές τους). Στις 26 Οκτωβρίου 1958 ένα ζευγάρι που πλησίαζε με το αυτοκίνητό του σε μια γέφυρα, αμέσως μετά το φράγμα του Λοχ Ραίηβεν, στη Μαίρυλαντ, είδε ένα UFO ωοειδούς σχήματος να αιωρείται 30 μέτρα πάνω από τη γέφυρα. Η μηχανή του αυτοκινήτου τους σταμάτησε, τα φώτα του έσβησαν ενώ μια λαμπρή έκλαμψη λευκού φωτός συνοδευόμενη από υπόκωφη έκρηξη έκανε το UFO να απογειωθεί κάθετα και να εξαφανιστεί μέσα σε 5-10 δευτερόλεπτα, αφήνοντας το ζεύγος έκπληκτο από το φαινόμενο και την έντονη θερμότητα που ένιωσαν από την έκλαμψη. Σ' ένα μικρό γαλλικό χωριό, το Τρανς-αν-Προβάνς, το απόγευμα της 8ης Ιανουαρίου 1981, μπροστά στα έκπληκτα μάτια του εργολάβου Renato Nicolai που περιποιόταν τον κήπο του, προσγειώθηκε σε απόσταση μικρότερη των 100 μέτρων ένας ιπτάμενος δίσκος μεταλλικής υφής και αμέσως μετά, σε δευτερόλεπτα, απογειώθηκε με απίστευτη ταχύτητα αφήνοντας στο έδαφος έναν κύκλο μισοκαμένου εδάφους διαμέτρου 2 μέτρων.

ΣΕ ΙΙΙ: Στο UFO διακρίνονται ανθρωποειδή όντα («ανθρωποειδή», «ξένοι», «εξωγήινοι») που όμως δεν έρχονται σε επαφή ή επικοινωνία με τον παρατηρητή. Τυπικές περιπτώσεις του ιεραποστόλου Gill στην Παπούα-Νέα Γουινέα το 1959 και του αστυνομικού Zamora στο Σοκόρρο του Νιου Μέξικο, το 1964. Στα τέλη Ιουνίου του 1959 επί τρεις νύχτες και επί τετράωρο κάθε νύχτα ο αιδεσιμότατος William B. Gill και τα 37 μέλη της ιεραποστολής του στην Παπούα-Νέα Γουινέα παρατηρούσαν ένα τεράστιο φωτεινό διώροφο UFO με φινιστρίνια, μέσα από τα οποία διακρίνονταν ανθρωποειδή όντα που κινούνταν. Τα απόγευμα της 24ης Απριλίου 1964 ο αστυνομικός Lonnie Zamora στο Σοκόρρο του Νιου Μέξικο ενώ καταδίωκε με το περιπολικό του έναν μοτοσυκλετιστή, είδε να κατεβαίνει από τον ουρανό ένα φλεγόμενο αντικείμενο και να πέφτει πίσω από έναν λόφο. Πιστεύοντας ότι είχε πέσει κάποιο αεροπλάνο, κατόρθωσε να φτάσει κοντά του για να διαπιστώσει με έκπληξη ότι υπήρχε εκεί ένα απαστράπτον ωοειδές σκάφος μεγέθους αυτοκινήτου, στηριγμένο σε τέσσερα μεταλλικά πόδια. Δίπλα του περιφέρονταν δύο λευκοντυμένα όντα που μόλις τον αντελήφθησαν, μπήκαν στο σκάφος, που απογειώθηκε κάθετα μέσα σε εκκωφαντικό θόρυβο και εξαφανίστηκε πετώντας οριζόντια. Μαζί με συνάδελφό του που είχε φτάσει εν τω μεταξύ, ερεύνησαν την περιοχή και διαπίστωσαν πως υπήρχαν ίχνη καψίματος στον τόπο της προσγείωσης και ίχνη από τα βήματα των όντων.

ΣΕ IV ή Απαγωγές (Abductions): Αποτελεί νεότερη προσάρτηση (μετά το 1960) και είναι χαρακτηριστική περίπτωση μετεξέλιξης του φαινομένου των UFO. Συνεχείς μαρτυρίες απαγωγών ανθρώπων από «εξωγήινους», μεταγωγής τους σε «διαστημόπλοια» συνήθως με σάρωσή τους (zapping) με φωτεινή δέσμη που εκπέμπεται από αυτά, υποβολής τους σε ιατρικές εξετάσεις, σεξουαλικές πράξεις και κηρύγματα φιλειρηνικής και οικολογικής συνήθως φύσεως. Η πλειονότητα των μαρτυριών —οι οποίες στις ΗΠΑ από το 1980 και μετά έχουν λάβει διαστάσεις επιδημίας— εξέρχεται ως τραυματική εμπειρία κατά τη διάρκεια ψυχοθεραπευτικής υπνώσεως των «απαχθέντων» και (μέσω αυτής) αναδρομής τους σε μνήμες του παρελθόντος. Πρότυπο όλων των νεότερων περιπτώσεων είναι η «εμπειρία» των Betty και Barney Hill από το Νιου Χάμσαϊρ των ΗΠΑ το 1961, που έλαβε μεγάλη δημοσιότητα μετά το 1966. Η πρώτη τέτοια περίπτωση όμως (αν εξαιρέσει κανείς τα εσκεμμένα και κατάφωρα ψευδολογήματα του George Adamski και των οπαδών του, το 1953) είναι του 23χρονου αγρότη Antonio Villas-Boas στη Βραζιλία το 1957. Τη νύχτα της 15ης Οκτωβρίου του 1957, και ενώ ο Villas-Boas επέστρεφε με τρακτέρ στο σπίτι του, προσγειώθηκε μπροστά του ένα φωτεινό οβάλ σκάφος. Η μηχανή και τα φώτα του τρακτέρ έσβησαν ενώ μέσα από το σκάφος βγήκαν τρία μικρών διαστάσεων όντα με γκρι στολές και κράνη και τον ανάγκασαν να εισέλθει σ' αυτό. Εκεί υποβλήθηκε σε ιατρικές εξετάσεις και στη συνέχεια αναγκάστηκε να έρθει σε σεξουαλική επαφή με «εξωγήινη γυναίκα». Όταν τον άφησαν να φύγει διαπίστωσε ότι έφερε παράξενα τραύματα σε όλο του το σώμα. Το περιστατικό το ανέφερε χωρίς να υποβληθεί σε ύπνωση (σε αντίθεση με το ζεύγος Hill) και υποστήριζε επίμονα ότι έλεγε την αλήθεια.

Δεχόμαστε λοιπόν επισκέψεις εξωγήινων ή υπάρχουν εναλλακτικές ερμηνείες; Πόσο πιθανή είναι η παρουσία εξωγήινων πολιτισμών πιο προηγμένων από τον δικό μας; Το ερώτημα απασχολεί την «κατεστημένη» επιστήμη; Φυσικά και την απασχολεί, και μάλιστα ολοένα και περισσότερο τα τελευταία τριάντα χρόνια. Οι ενδείξεις ότι το φαινόμενο της ζωής δεν είναι εφήμερο αλλά ανθεκτικό, και πιθανώς ευρύτατα διαδεδομένο στο Γαλαξία μας, πληθαίνουν.

Η παρουσία μοριακών νεφών με πολύπλοκα οργανικά μόρια ιδιαίτερης βιολογικής σημασίας, όπως π.χ. η γλυκίνη —ένα από τα 20 αμινοξέα που υπάρχουν σε κάθε έμβιο ον στη γη— που πρόσφατα (1993) ανιχνεύθηκε στο μοριακό νέφος Sagittarius B_2(N), κοντά στο κέντρο του Γαλαξία μας, και η ανίχνευση δίσκων κοσμικής σκόνης γύρω από αστέρες παρόμοιους με τον Ήλιο —δίσκων που αποτελούν την πρώιμη φάση μελλοντικών πλανητικών συστημάτων—, αυξάνουν την πιθανότητα να υπάρχουν πολλά κοσμικά λίκνα μέσα στα οποία μπορεί να εμφανιστεί και να ανθήσει το φαινόμενο της ζωής. Οι παρατηρήσεις στο υπέρυθρο τη δεκαετία 1980-90 (ανίχνευση δίσκων σκόνης γύρω από τους αστέρες β-Pictoris, Formalhaut, HR479 και Vega), σε συνδυασμό με τις πρόσφατες (1994) φωτογραφίες του Διαστημικού Τηλεσκοπίου Hubble με τις οποίες επιτεύχθηκε η ανίχνευση πρωτοπλανητικών δίσκων σε 56 από τους 110 μελετηθέντες αστέρες του νεφελώματος του Ωρίωνος, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η εμφάνιση πλανητικών συστημάτων αποτελεί συνήθη έκφανση των αστρικών διεργασιών. Υπολογίζεται ότι περίπου οι μισοί αστέρες ηλιακού τύπου που βρίσκονται στην κοντινή περιοχή του Ηλίου (σε ακτίνα έως και 50 ετών φωτός) χαρακτηρίζονται από πρωτοπλανητικούς δίσκους. Εξάλλου η πρόσφατη (Οκτώβριος 1995) ανακάλυψη πλανήτη κινούμενου γύρω από τον αστέρα Πήγασο 51, που βρίσκεται σε απόσταση 40 ετών φωτός από τη Γη —εφόσον επαληθευτεί και από άλλους παρατηρητές— θα αποτελέσει την οριστική επιβεβαίωση της παρουσίας τους έξω από το δικό μας πλανητικό σύστημα.

Είναι λοιπόν αναμενόμενο η ανάπτυξη ζωής σε πλανήτες γηραιότερους σε ηλικία αλλά παρόμοιους με τη Γη μας, είτε πρωτογενώς επάνω σ' αυτούς είτε δευτερογενώς με «σπορά» τους από οργανισμούς που πιθανώς δημιουργούνται σε μοριακά νέφη, να έχει ακολουθήσει την ίδια πορεία με τη δική μας, με φυσική συνέπεια της παρουσία νόησης και την ανάπτυξη τεχνολογικών πολιτισμών. Με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος ζωής ενός τεχνολογικού πολιτισμού που ξεκίνησε ακολουθώντας τη δική μας πορεία αλλά πριν από μας, υπερβαίνει σημαντικά τα εκατό έτη —δηλαδή τη δική μας τεχνολογική ηλικία—, και άρα μπορεί να υπερκεράσει τις αυτοκαταστροφικές του δυνατότητες στις πρώτες ανώριμες φάσεις του, είναι λογικό να αναμένει κανείς έναν Γαλαξία στον οποίο κυκλοφορούν εξωγήινοι «υψηλότερης τεχνολογίας».

Έκφανση των προσδοκιών της «κατεστημένης» επιστημονικής κοινότητας για επαφή με εξωγήινους τεχνολογικούς πολιτισμούς αποτελούν τα συνεχώς πληθυνόμενα αμερικανικά αστροφυσικά προγράμματα ραδιοακρόασης πιθανών εξωγήινων «ραδιο-νοημόνων» σημάτων. Κάτω από τη γενική ονομασία SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence), οι προσπάθειες αυτές άρχισαν με το πρόγραμμα Ozma το 1960 και συνεχίζονται με το πρόγραμμα SETI του Πανεπιστημίου του Ohio (1973 έως σήμερα), τα προγράμματα SERENDIP I, II, III και IV του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Μπέρκλεϋ (1980-82, 1986-88, 1992-94, 1995 έως σήμερα αντιστοίχως), τα προγράμματα του Πανεπιστημίου του Χάρβαρντ της Μασσαχουσέττης META I (1985-95) και BETA I (μόλις εγκαινιάστηκε, στις 30 Οκτωβρίου 1995) και το συνεργαζόμενο META II του Ραδιοαστρονομικού Ινστιτούτου της Αργεντινής (1990 έως σήμερα), όπως επίσης και με το πρόγραμμα HRMS της NASA του 1992 που πρόκειται να μετεξελιχθεί στο πρόγραμμα PHOENIX.

Στα πλαίσια αυτών των προγραμμάτων χρησιμοποιούνται μεγάλα ραδιοτηλεσκόπια σε συνδυασμό με πολυκαναλικούς ραδιοφασματογράφους (αναλυτές με πολύ υψηλή διακριτική ικανότητα συχνοτήτων) για την καταγραφή ραδιοσημάτων που προέρχονται από αστέρες παρόμοιους με τον Ήλιο σε απόσταση μέχρι 100 ετών φωτός από αυτόν. Η καταγραφή γίνεται στην περιοχή των 1-3 GHz, ιδιαίτερα στη συχνότητα 1,4 GHz της γραμμής των 21 cm του ουδέτερου υδρογόνου (HI), δηλαδή του κατ' εξοχήν κοσμικού στοιχείου που λόγω της αφθονίας του την καθιστά την πιο εύχρηστη συχνότητα κοσμικής επικοινωνίας. Η περιοχή 1-3 GHz πλεονεκτεί επικοινωνιακά διότι είναι απαλλαγμένη από ραδιοφωνικό θόρυβο (κοσμικό και γήινο). Εξάλλου στην ίδια περιοχή της γραμμής των 1,4 GHz του υδρογόνου (HI) υπάρχει και η επίσης σημαντική κοσμική γραμμή 1,7 GHz της ρίζας υδροξυλίου (OH), ρίζας που, συμπτωματικά, μαζί με το άτομο του υδρογόνου (H) αποτελούν τα συστατικά του ύδατος (H_2O), δηλαδή του στοιχείου που επέτρεψε να αναπτυχθεί η ζωή στη Γη. Η εξ ανάγκης ανθρωποκεντρική θεώρηση του προβλήματος της επικοινωνίας με εξωγήινους πολιτισμούς προσδίδει σ' αυτόν τον ραδιοφωνικό «λάκκο του νερού» (H_2O) μια συμβολική διάσταση που επίσης αναμένεται να αποδίδεται σ' αυτόν από «αδελφά» εξωγήινα όντα κατά την επιλογή συχνοτήτων για την αποστολή των σημάτων τους. Ορισμένα από τα προγράμματα SETI (π.χ. SERENDIP III) εργάστηκαν στην περιοχή 424-436 MHz, δηλαδή στην περιοχή των συχνοτήτων της γήινης τηλεπικοινωνίας (UHF, TV, ραντάρ, κινητή τηλεφωνία), με την προσδοκία να ανιχνεύσουν σήματα χαρακτηριστικά ενός πολιτισμού που διέρχεται από τεχνολογική φάση παρόμοια με τη δική μας. Μέχρι σήμερα έχει καταγραφεί ένας αριθμός αινιγματικών σημάτων, για μία και μόνο φορά κατά περίπτωση, γεγονός που καθιστά πρόωρη την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Πάντως η διάθεση της επιστημονικής κοινότητας να αποδεχθεί την παρουσία εξωγήινων με τεχνολογικό πολιτισμό υψηλότερο του δικού μας φαίνεται και από πιο προωθημένες ερευνητικές προτάσεις, όπως λόγου χάρη την πρόταση για ανίχνευση της γραμμής 1,517 GHz του τριτίου, που αποτελεί παράγωγο-κατάλοιπο της πυρηνικής σύντηξης του υδρογόνου και έχει μικρό χρόνο ζωής (τ = 12,5 έτη). Ανίχνευση τριτίου στο πλανητικό μας σύστημα, ιδιαίτερα στο επίπεδο της τροχιάς των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, θα σημαίνει την παρουσία εξωγήινου κατασκοπευτικού οχήματος που προωθείται με τη μέθοδο πυρηνικής σύντηξης του υδρογόνου.

Τι ζητά λοιπόν η «κατεστημένη» επιστημονική κοινότητα για να δεχτεί τα UFO σαν εκφάνσεις μιας εξωγήινης νοημοσύνης; Το μόνο που ζητά για την αποδοχή ενός τόσο εξαιρετικά σημαντικού γεγονότος είναι η πιστοποίηση της πραγματικότητάς του. Της πραγματικότητας όπως την κατανοούν οι θετικές επιστήμες, της «σκληρής» πραγματικότητας. Ζητά «σκληρές» αποδείξεις. Και για την αποδοχή εξαιρετικά σημαντικών γεγονότων απαιτούνται εξαιρετικά σημαντικές αποδείξεις. Υπάρχουν όμως ή ό,τι υπάρχει ικανοποιεί τις απαιτήσεις μιας «χαλαρής» πραγματικότητας;

Χρίστος Δ. Γούδης

Το δεύτερο μέρος του κειμένου θα δημοσιευτεί στο επόμενο τεύχος του Quantum *με τον τίτλο* UFO: «σκληρή» και «χαλαρή» πραγματικότητα.

Ο ***Χρίστος Δ. Γούδης*** είναι καθηγητής Αστροφυσικής στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης	Υπεύθυνος εικονογράφησης	Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων
Timothy Weber	**Sergey Ivanov**	**Edward Lozansky**

Σύμβουλοι Σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α΄ Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα
Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Αϊλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης	Διευθυντής
Αλέκος Μάμαλης	**Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.:
Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, **Ευαγγελία Δημοβασίλη**, **Παύλος Ιωάννου**-φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης**-μαθηματικός, **Πωλίνα Αγαπάκη**-φυσικός, **Γιώργος Κυριακόπουλος** και **Αλέκος Μάμαλης**-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια	Τυπογραφικές διορθώσεις	Επιμέλεια έκδοσης	Υπεύθυνη λογιστηρίου
Παντελής Μπουκάλας	**Π. Τασιόπουλος**	**Γ. Νιράνος**	**Μαρία Μάμαλη**

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α΄ Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση	Φιλμ, μοντάζ	Εκτύπωση	Βιβλιοδεσία
Κάτοπτρο	**Γ. Κεραμάς**	**Τετραχρωμία**	**Θ. Αρχοντουλάκης**

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 7.500 δρχ. για ιδιώτες, 12.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

Μέση τιμή μιας συνάρτησης

Μια αριθμητική έννοια επεκτείνεται και εφαρμόζεται σε ασυνήθιστες περιοχές

Yury Ionin και Alexander Plotkin

ΧΩΡΙΣ ΑΜΦΙΒΟΛΙΑ ΓΝΩΡΙΖΕΤΕ ΤΙ είναι ο αριθμητικός μέσος ενός πεπερασμένου πλήθους αριθμών. Σε τούτο το άρθρο θα επεκτείνουμε αυτή την έννοια σε συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα, σε έναν κύκλο ή σε μια σφαίρα, και θα παρουσιάσουμε τις κάπως απρόσμενες εφαρμογές της στη γεωμετρία. Συγκεκριμένα, θα εξηγήσουμε πώς μπορούμε να βρίσκουμε το μήκος μετρώντας το πλάτος.

Για να διαβάσετε το άρθρο θα χρειαστεί να γνωρίζετε λίγα πράγματα για τη γεωμετρία των διανυσμάτων. Πρέπει να ξέρετε πώς να προσθέσετε διανύσματα και πώς να υπολογίσετε το μήκος τους (το μέτρο τους). Θα ασχοληθούμε επίσης με την προβολή ενός διανύσματος σε ευθεία, αλλά αυτήν θα την ορίσουμε στα παρακάτω. Θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον κάποια ορολογία και συμβολισμό από τον ολοκληρωτικό λογισμό, ωστόσο οι αναγνώστες που δεν έχουν γνώσεις του θέματος θα μπορέσουν να αντιληφθούν το νόημα με άλλον τρόπο. Μόνο τα τελευταία δύο ή τρία προβλήματα απαιτούν πραγματική γνώση του ολοκληρωτικού λογισμού.

Σε πεπερασμένα σύνολα

Στην ετήσια συνέλευση της Επιτροπής Γονικών Παροχών σε κάποια σχολή οικονομικών μαθηματικών ο πρόεδρος απευθύνθηκε στο ακροατήριό του λέγοντας: «Θα αποτελεί τιμή για κάθε γονέα να συνεισφέρει περισσότερο από τον μέσο όρο!» Προφανώς, ο πρόεδρος δεν τα πήγαινε και πολύ καλά με τα μαθηματικά. Ας δούμε γιατί.

Ο μέσος όρος, ή αριθμητικός μέσος, n αριθμών $x_1, x_2, ..., x_n$, σύμφωνα με τον συνηθισμένο ορισμό, είναι ο αριθμός $M = M(x_1, x_2, ..., x_n)$ που δίνεται από την εξίσωση

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n}. \quad (1)$$

Ακολουθώντας τη συμβουλή του προέδρου, οι γονείς θα έπρεπε να ικανοποιήσουν ταυτόχρονα τις ανισότητες $x_1 > M$, $x_2 > M$, ..., $x_n > M$. Αν τις προσθέσουμε και διαιρέσουμε με το n καταλήγουμε σε αντίφαση με την εξίσωση (1).

Επισημαίνουμε τις εξής σημαντικές ιδιότητες του αριθμητικού μέσου:

1. $M(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) = M(x_1, x_2, ..., x_n) + M(y_1, y_2, ..., y_n)$.
2. $M(ax_1, ax_2, ..., ax_n) = aM(x_1, x_2, ..., x_n)$.
3. $\min(x_1, x_2, ..., x_n) \le M(x_1, x_2, ..., x_n) \le \max(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Θα ήταν καλό να βρουν μόνοι τους οι αναγνώστες τις φραστικές περιγραφές αυτών των ιδιοτήτων.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε τις παραπάνω ιδιότητες 1-3.

2. Για κάθε ακέραιο $n > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει η ανισότητα $\binom{2n}{n} > 2^{2n-1}/n$ (όπου $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ είναι ένας διωνυμικός συντελεστής). Αυτό μπορεί να γίνει με τέλεια επαγωγή, αλλά και με τη βοήθεια της ιδιότητας 3.

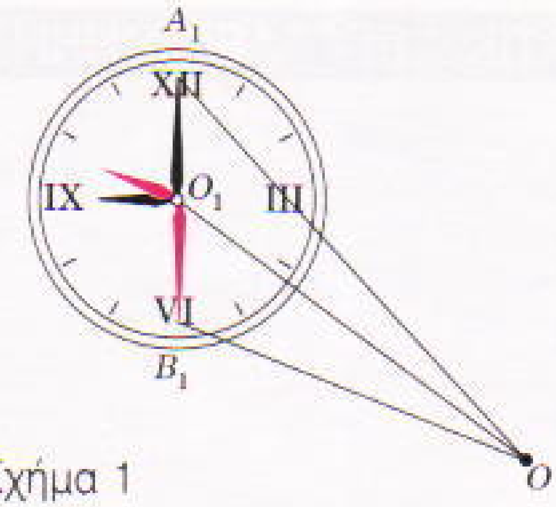
Η ιδιότητα 3 χρησιμοποιείται συχνά για να δείξουμε ότι ένας από τους αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μεγαλύτερος από κάποιον δεδομένο d: αρκεί να αποδείξουμε ότι $M(x_1, x_2, ..., x_n) > d$. Δείτε για παράδειγμα το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 1. Υπάρχουν πενήντα ρολόγια, τα οποία δείχνουν όλα τη σωστή ώρα, απλωμένα σε ένα κυκλικό τραπέζι. Αποδείξτε ότι κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου του τραπεζιού από τις άκρες των λεπτοδεικτών θα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου του τραπεζιού από τα κέντρα των ρολογιών.

Λύση. Συμβολίζουμε με $f(t)$ το άθροισμα των αποστάσεων των άκρων των λεπτοδεικτών του ρολογιού από το κέντρο O τη χρονική στιγμή t (σε ώρες). Έστω d το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου του τραπεζιού από τα κέντρα των ρολογιών. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $f(t) > d$ κάποια συγκεκριμένη στιγμή t. Θα αποδείξουμε ότι $M(f(t_0), f(t_0 + 1/2)) > d$ για κάποιο t_0, πράγμα που σημαίνει ότι μία από τις χρονικές στιγμές t_0, $t_0 + 1/2$ είναι αυτή που αναζητούμε.

Συμβολίζουμε με O_i, A_i, και B_i το κέντρο του i-οστού ρολογιού, την άκρη του λεπτοδείκτη του κατά τη χρονική στιγμή t, και την ίδια άκρη

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov



Σχήμα 1

έπειτα από μισή ώρα (τη στιγμή $t + 1/2$), αντίστοιχα. Αφού τα ρολόγια δείχνουν τη σωστή ώρα, υπάρχει μια στιγμή t_0 κατά την οποία τα σημεία O, A_1, και B_1 δεν είναι συνευθειακά. Θεωρούμε το τρίγωνο OA_1B_1 και τη διάμεσό του OO_1 (Σχήμα 1).

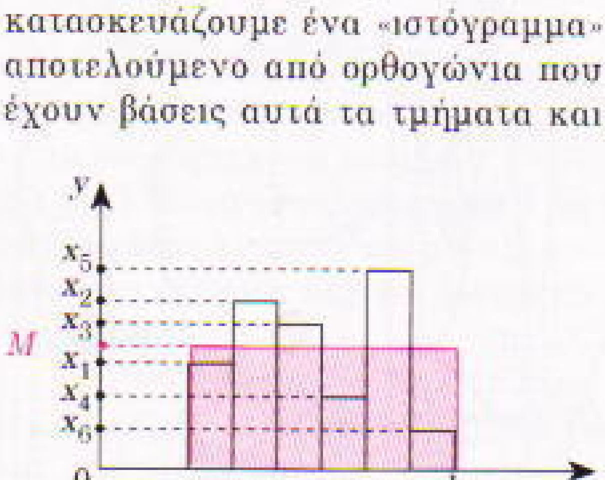
Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών που άγονται από την ίδια κορυφή.

Από την άσκηση 3 παίρνουμε ότι $OO_1 < (OA_1 + OB_1)/2$ τη στιγμή t_0. Για όλα τα υπόλοιπα ρολόγια έχουμε ότι $OO_i \leq (OA_i + OB_i)/2$ (σιγουρευτείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί πρέπει να αντικαταστήσουμε τη γνήσια ισότητα με το «≤»). Προσθέτοντας τις 50 αυτές ανισότητες και διαιρώντας με το n, παίρνουμε $M(f(t_0), f(t_0 + 1/2)) > d$.

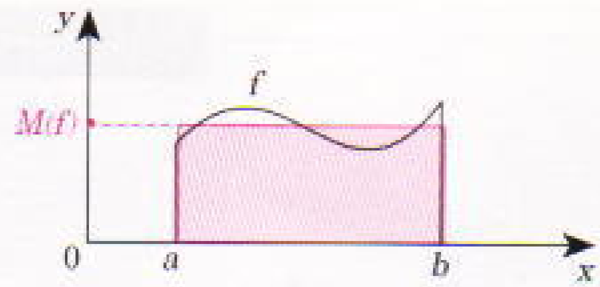
Σε ένα διάστημα

Στο πρόβλημα 1 αρκούσε να υπολογίσουμε τον αριθμητικό μέσο *δύο* τιμών μιας συνάρτησης. Είναι δυνατόν να ορίσουμε τον μέσο όρο *όλων* των τιμών; Για να προσεγγίσουμε έναν τέτοιο ορισμό, θα δώσουμε γεωμετρικό νόημα στον μέσο όρο n αριθμών $x_1, x_2, ..., x_n$.

Διαιρούμε ένα διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα τμήματα μήκους $(b - a)/n$ και κατασκευάζουμε ένα «ιστόγραμμα» αποτελούμενο από ορθογώνια που έχουν βάσεις αυτά τα τμήματα και



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ύψη τους αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ (Σχήμα 2). Το εμβαδόν αυτού του σχήματος ισούται με $M(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (b - a)$. Επομένως ο $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση $[a, b]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ιστογράμματός μας.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνεχή, μη αρνητική συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Ως *μέση τιμή* της στο διάστημα $[a, b]$ θα εννοούμε το ύψος του ορθογωνίου με βάση $[a, b]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του «καμπυλόγραμμου τραπεζοειδούς» που ορίζεται από τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, τον x άξονα, και το γράφημα της f (Σχήμα 3). Αυτό το εμβαδόν μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

[Σημείωση (*για τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα ολοκληρώματα*): Ίσως σηκώσατε τα χέρια σας σε αυτό το σημείο και είστε έτοιμοι να τα εγκαταλείψετε. Περιμένετε! Σε ολόκληρο το άρθρο μπορείτε να θεωρείτε την παράσταση $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ απλώς ως ένα σύμβολο για το εμβαδόν που περιγράψαμε προηγουμένως, όπου το σύμβολο ολοκλήρωσης $\int$ σημαίνει «εμβαδόν», τα γράμματα a, b, και f συμβολίζουν τα σύνορα της περιοχής, ενώ το $\mathrm{d}x$ υποδηλώνει το όρισμα (x) της συνάρτησης f για να το ξεχωρίσει από τις υπόλοιπες παραμέτρους από τις οποίες πιθανόν εξαρτάται η f. Η πραγματική ολοκλήρωση αρχίζει όταν πρέπει να υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν, αλλά στη συνέχεια θα χρειαστούμε, όλο κι όλο, ένα μόνο αριθμητικό αποτέλεσμα, και αυτό μπορείτε απλώς να το πάρετε ως δεδομένο.]

Έτσι, η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ *ορίζεται* ως

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

(Αυτός ο ορισμός είναι ικανοποιητικός για *κάθε* συνάρτηση στο $[a, b]$ για την οποία έχει νόημα το δεξί μέλος της εξίσωσης (2), αλλά εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις.)

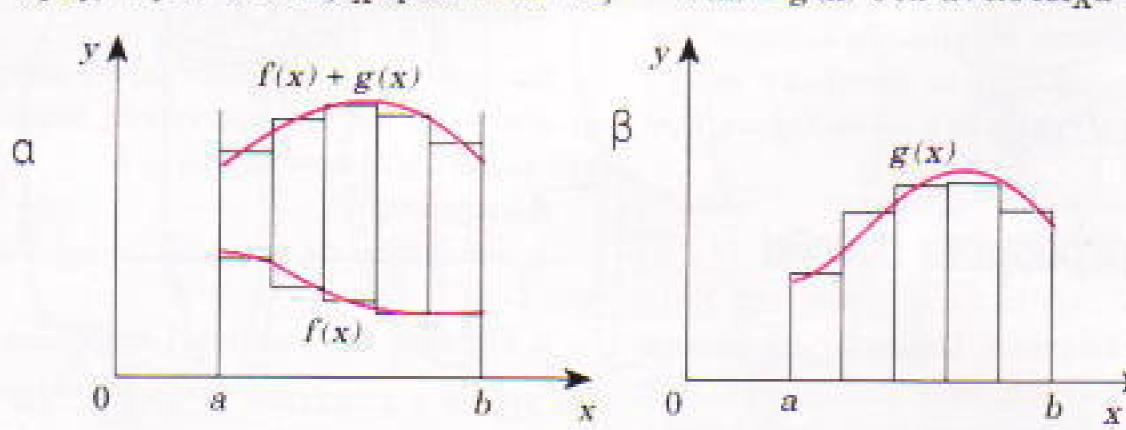
Η κατ' αυτόν τον τρόπο οριζόμενη μέση τιμή έχει ιδιότητες παρόμοιες με τις 1-3:

1′. $M(f + g) = M(f) + M(g)$·

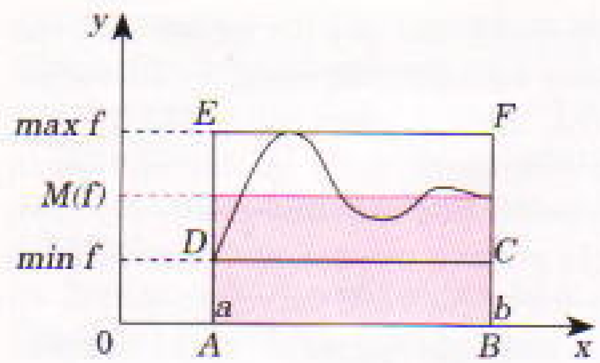
2′. $M(af) = aM(f)$·

3′. $\min\limits_{a \leq x \leq b} f(x) \leq M(f) \leq \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Ας ερμηνεύσουμε την πρώτη από αυτές τις ιδιότητες με όρους εμβαδών. (Μια αυστηρή απόδειξη απαιτεί αυστηρό ορισμό του ολοκληρώματος.) Θεωρήστε το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των γραφημάτων της f και της $f + g$ (υποθέτουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι θετικές —δείτε το Σχήμα 4α). Μπορούμε να το προσεγγίσουμε, με όση ακρίβεια επιθυμούμε, μέσω ενός συνόλου ορθογωνίων, με τον τρόπο που βλέπετε στο σχήμα. Μετατοπίστε όλα τα ορθογώνια προς τον άξονα x (Σχήμα 4β). Θα σχηματίσουν ένα «ιστόγραμμα» το οποίο προσεγγίζει το εμβαδόν της περιοχής που είναι κάτω από το γράφημα της $g(x)$ (διότι τα ύψη τους ισούνται με τις τιμές των διαφορών $(f(x) + g(x)) - f(x) = g(x)$ στα αντίστοιχα σημεία).



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Αφού η προσέγγιση μπορεί να έχει όση ακρίβεια επιθυμούμε, το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των γραφημάτων της f και της $f + g$ ισούται με το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το γράφημα της g —δηλαδή,

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx - \int_a^b f(x)dx =$$

$$\int_a^b g(x)dx,$$

που ισοδυναμεί με την ιδιότητα 1′.

Η ιδιότητα 2′ αποδεικνύεται παρομοίως, ενώ η ιδιότητα 3′ γίνεται φανερή από το Σχήμα 5 (η περιοχή κάτω από την f είναι ανάμεσα στα ορθογώνια $ABCD$ και $ABFE$ —δηλαδή μεταξύ των $(b - a)\min f$ και $(b - a)\max f$.

Άσκηση 4. Με βάση τις ιδιότητες 1′-3′ αποδείξτε την ακόλουθη:

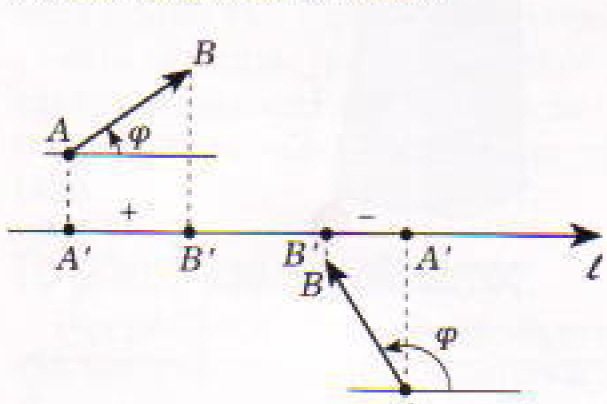
4′. Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $M(f) \le M(g)$.

Στο επόμενο πρόβλημα η μέση τιμή συνάρτησης εφαρμόζεται σε μια περίπτωση που μοιάζει να μην έχει την παραμικρή σχέση με αυτή.

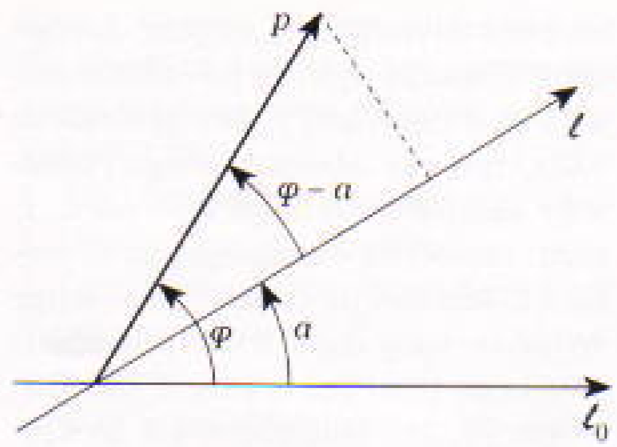
Πρόβλημα 2. Τέσσερα διανύσματα **a**, **b**, **c**, **d** του επιπέδου έχουν συνισταμένη μηδέν. Αποδείξτε την ανισότητα

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \ge |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \qquad (3)$$

(εδώ με $|\mathbf{a}|$ συμβολίζουμε το μήκος του διανύσματος **a**, κ.ο.κ.).



Σχήμα 6



Σχήμα 7

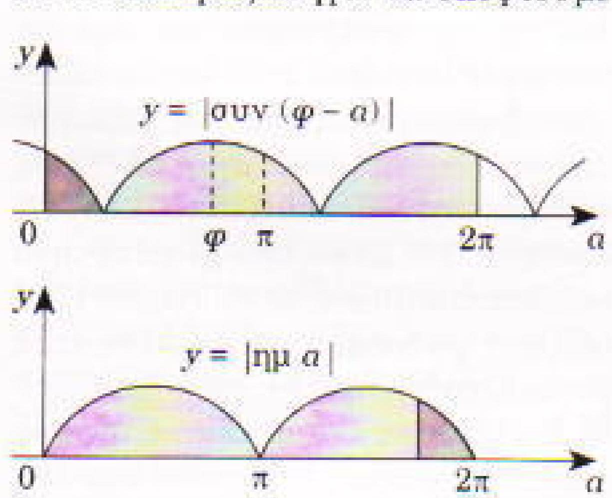
Η λύση βασίζεται στην επόμενη μονοδιάστατη εκδοχή του προβλήματος, την οποία αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι για κάθε τετράδα πραγματικών αριθμών με μηδενικό άθροισμα, ισχύει

$$|a| + |b| + |c| + |d| \ge |a + d| + |b + d| + |c + d|. \qquad (4)$$

Λύση του προβλήματος 2. Θεωρούμε τις προβολές των διανυσμάτων **a**, **b**, **c**, **d** σε έναν τυχαίο άξονα (προσανατολισμένη ευθεία). Για το σκοπό μας, θα ορίσουμε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σε έναν (προσανατολισμένο) άξονα ℓ ως τον αριθμό $\pm A'B'$, όπου A', B' είναι οι προβολές των A και B στον ℓ (Σχήμα 6), ενώ το πρόσημο το επιλέγουμε ανάλογα με το αν το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ έχει την ίδια (+) ή την αντίθετη (−) φορά με τον άξονα —με άλλα λόγια, ισούται με $AB\,\text{συν}\varphi$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των ℓ και $\overrightarrow{AB}$.

Βάσει της άσκησης 5, αν αντικαταστήσουμε τα διανύσματα στην παράσταση (3) με τις προβολές τους ως προς κάποιον άξονα, θα πάρουμε μια αληθή ανισότητα (επειδή το άθροισμα των προβολών ισούται με την προβολή του αθροίσματος —δηλαδή με μηδέν). Αυτό μας οδηγεί να σκεφτούμε



Σχήμα 8

ότι θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την ανισότητα (3) θεωρώντας όλες τις δυνατές προβολές των δεδομένων διανυσμάτων.

Επιλέγουμε έναν σταθερό άξονα ℓ_0 και για κάθε διάνυσμα **p** ορίζουμε τη συνάρτηση $p(a)$ ως την προβολή του **p** πάνω σε έναν άξονα ℓ που σχηματίζει γωνία a με τον ℓ_0 (Σχήμα 7). Αν η γωνία μεταξύ του ℓ_0 και του **p** είναι φ, τότε $p(a) = |\mathbf{p}|\ \text{συν}(\varphi - a)$. Θεωρούμε τώρα τη μέση τιμή $M(|p|)$ της συνάρτησης $a \to |p(a)|$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Βάσει της ιδιότητας 2′, $M(|p|) = |\mathbf{p}| \cdot M(|\text{συν}(\varphi - a)|)$, και

$$M(|\text{συν}(\varphi - a)|) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\text{συν}(\varphi - a)\right| da.$$

Από το Σχήμα 8 γίνεται φανερό ότι το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το γράφημα της $|\text{συν}(\varphi - a)|$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ισούται με το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το γράφημα της $|\text{συν}(\pi/2 - a)| = |\text{ημ}a|$ στο $[0, 2\pi]$ (ή με το διπλάσιο του εμβαδού της περιοχής κάτω από ένα τόξο της κανονικής ημιτονοειδούς). Επομένως,

$$M(|\text{συν}(\varphi - a)|) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right| da = M(|\text{ημ}a|).$$

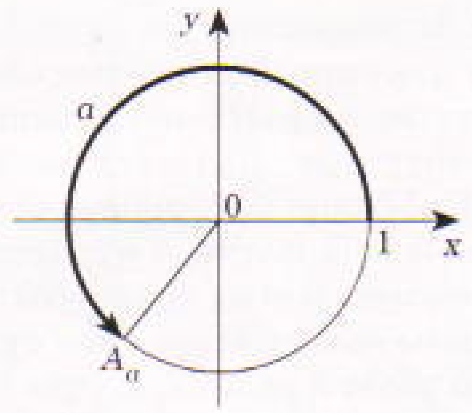
Ο ολοκληρωτικός λογισμός μάς δίνει ότι το εμβαδόν αυτό ισούται στην πραγματικότητα με 4, αλλά αυτό που έχει σημασία για μας είναι το ότι δεν εξαρτάται από τη φ και ότι είναι θετικό. Επομένως η μέση τιμή της συνάρτησης $p(a)$ είναι ανάλογη προς το μήκος του **p**, όπου η σταθερά αναλογίας είναι ένας θετικός k:

$$M(|\mathbf{p}|) = k|\mathbf{p}| \qquad (5)$$

(με τη βοήθεια του λογισμού μπορούμε να βρούμε ότι $k = M(|\text{ημ}a|) = 2/\pi$). Και η βασική ιδιότητα αυτής της συνάρτησης που χρησιμοποιήσαμε στην επιχειρηματολογία μας είναι ότι το μήκος του διαστήματος $[0, 2\pi]$ στο οποίο υπολογίσαμε τον μέσο όρο, είναι περίοδός της.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ολοκληρώσουμε τη λύση.

Όπως προαναφέραμε, για κάθε $a \in [0, 2\pi]$ το άθροισμα των αριθμών $a(a)$, $b(a)$, $c(a)$, $d(a)$ είναι μηδέν. Επομένως,



Σχήμα 9

$$|a(\alpha)| + |b(\alpha)| + |c(\alpha)| + |d(\alpha)| \ge |a(\alpha) + d(\alpha)| + |b(\alpha) + d(\alpha)| + |c(\alpha) + d(\alpha)|.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 1′ και 4′ (δείτε το παράδειγμα 4) για να βρούμε τη μέση τιμή και στα δύο μέλη και εκφράζοντας τις μέσες τιμές σύμφωνα με την παράσταση (5), παίρνουμε

$$k|\mathbf{a}| + k|\mathbf{b}| + k|\mathbf{c}| + k|\mathbf{d}| \ge k|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{b} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

Το μόνο που απομένει είναι να απλοποιήσουμε τον παράγοντα k.

Στον κύκλο και τη σφαίρα

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε την ανισότητα (3) του προβλήματος 2 για τέσσερα διανύσματα **a**, **b**, **c**, **d** του χώρου με συνισταμένη μηδέν.

Θα ήταν καλά αν μπορούσαμε να επεκτείνουμε τον «επίπεδο συλλογισμό» μας στο χώρο. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να ορίσουμε με κάποιον τρόπο τη μέση απόλυτη τιμή των προβολών ενός διανύσματος σε άξονες που παίρνουν όλες τις διευθύνσεις στο χώρο. Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτό ισοδυναμεί με το να θεωρήσουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης σε μια σφαίρα. Ας αρχίσουμε λοιπόν με μια απλούστερη αλλά παρόμοια περίπτωση συναρτήσεων στον μοναδιαίο κύκλο (κύκλο με ακτίνα τη μονάδα).

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων του μοναδιαίου κύκλου και τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ορίζουμε $\bar{f}(\alpha) = f(A_\alpha)$, όπου A_α είναι το σημείο του μοναδιαίου κύκλου που προκύπτει από την περιστροφή του σημείου $E(1,0)$ κατά γωνία μέτρου (σε ακτίνια) α περί την αρχή (Σχήμα 9). Αυτό μας επιτρέπει να επεκτείνουμε μια τυχαία συνάρτηση f, ορισμένη στον μοναδιαίο κύκλο, σε συνάρτηση $\bar{f}$ που ορίζεται σε ολόκληρο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι φανερό ότι η $\bar{f}$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη *μέση τιμή της f στον μοναδιαίο κύκλο* ως τη μέση τιμή της $\bar{f}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Θυμηθείτε ότι το κρίσιμο σημείο στη λύση του προβλήματος 2 προηγουμένως ήταν ότι η μέση τιμή $M(|p|)$ ήταν ανεξάρτητη από τη διεύθυνση του διανύσματος **p**. Η ανεξαρτησία αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας της μέσης τιμής συναρτήσεων επί του μοναδιαίου κύκλου.

5′. Έστω f και g δύο συναρτήσεις επί του μοναδιαίου κύκλου που διαφέρουν μέσω περιστροφής περί το κέντρο του κύκλου κατά σταθερή γωνία φ—δηλαδή, $g(A) = f(r^{\varphi}(A))$ για κάθε σημείο A του κύκλου, όπου r^{φ} είναι αυτή η περιστροφή. Τότε, $M(g) = M(f)$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε αυτή την ιδιότητα.

Συνεχίζοντας με το πρόβλημα 3, θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή O. Είναι δυνατόν να ορίσουμε τη μέση τιμή των συναρτήσεων που ορίζονται στη σφαίρα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες 1′-5′! (Φυσικά, η r^{φ} της ιδιότητας 5′ πρέπει τώρα να θεωρηθεί ως περιστροφή της σφαίρας κατά γωνία φ γύρω από έναν συγκεκριμένο *άξονα* που διέρχεται από το O.) Δεν μπορούμε να εξηγήσουμε εδώ πώς γίνεται αυτό, διότι στον ακριβή ορισμό εμπλέκεται ολοκλήρωση επί της σφαίρας.

Πάντως, ας θεωρήσουμε ότι ορίζεται με κάποιον τρόπο η μέση τιμή $M(f)$ μιας συνάρτησης στη σφαίρα και ότι οι ιδιότητες 1′-5′ ικανοποιούνται. Δηλαδή, θεωρούμε ως «αξίωμα» την ύπαρξη της μέσης τιμής $M(f)$ μιας συνάρτησης που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1′-5′. Στην πραγματικότητα αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες 1′-5′ ορίζουν μονοσήμαντα τη μέση τιμή μιας συνάρτησης.

Επιλέγουμε ένα σημείο A της μοναδιαίας σφαίρας. Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα **p** και ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $p(A)$ ως την προβολή του **p** στον άξονα OA (με ίδια κατεύθυνση όπως το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Τότε η μέση τιμή $M(|p|)$ της συνάρτησης $A \to |p(A)|$ πάνω στη σφαίρα μας ικανοποιεί την εξίσωση (5) για ένα συγκεκριμένο σταθερό $k \neq 0$ και για κάθε διάνυσμα **p**. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι $M(|p|) = M(|q|)$ όταν $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι αυτό είναι πράγματι ικανό. (Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα 2′.)

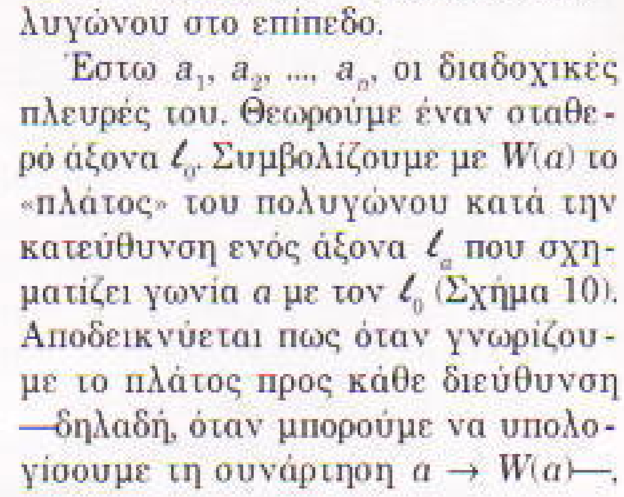
Ας υποθέσουμε ότι $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$. Τότε υπάρχει μια περιστροφή r του χώρου γύρω από κάποιον άξονα που διέρχεται από την αρχή O, η οποία μεταφέρει την ακτίνα OQ, όπου $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$, στην ακτίνα OP, όπου $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$. Είναι φανερό ότι $q(A) = p(r(A))$ για κάθε σημείο A της σφαίρας. Τότε, όμως, λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα 5′, $M(|q|) = M(|p|)$.

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη λύση του προβλήματος 3, επαναλαμβάνοντας το τελευταίο μέρος της λύσης του προβλήματος 2.

Το μήκος ως συνάρτηση του πλάτους

Η ίδια ιδέα μπορεί να μας πει κάτι για την περίμετρο ενός κυρτού πολυγώνου στο επίπεδο.

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$, οι διαδοχικές πλευρές του. Θεωρούμε έναν σταθερό άξονα ℓ_0. Συμβολίζουμε με $W(\alpha)$ το «πλάτος» του πολυγώνου κατά την κατεύθυνση ενός άξονα ℓ_α που σχηματίζει γωνία α με τον ℓ_0 (Σχήμα 10). Αποδεικνύεται πως όταν γνωρίζουμε το πλάτος προς κάθε διεύθυνση —δηλαδή, όταν μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $\alpha \to W(\alpha)$—,



Σχήμα 10

τότε μπορούμε να βρούμε την περίμετρο P του πολυγώνου. Ας δούμε γιατί ισχύει αυτό.

Συμβολίζουμε με $a_i(\alpha)$ το μήκος της προβολής της πλευράς a_i επί του άξονα ℓ_α.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι $W(\alpha) = {}^1/_2\,(a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + ... + a_n(\alpha))$.

Λύνοντας το πρόβλημα 2, αποδείξαμε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης $\alpha \to a_i(\alpha)$ είναι ανάλογη προς το μήκος $|a_i|$ της πλευράς a_i. Αναφέραμε επίσης ότι ο συντελεστής αναλογίας είναι $k = 2/\pi$. Από την άσκηση 8 και τις ιδιότητες 1′ και 2′ έπεται ότι η μέση τιμή $M(W)$ ισούται με το μισό του αθροίσματος των μέσων τιμών των συναρτήσεων $\alpha \to a_i(\alpha)$. Επομένως,

$$M(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}|a_1| + \frac{2}{\pi}|a_2| + \ldots + \frac{2}{\pi}|a_n|\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}P.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέσης τιμής μιας συνάρτησης (εξίσωση (2)) καταλήγουμε τελικά στην

$$P = \pi \cdot M(W) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W(\alpha)\,d\alpha.$$

Επομένως, το μήκος μιας πολυγωνικής διαδρομής (που σχηματίζουν οι πλευρές του πολυγώνου μας) εκφράζεται μέσω της συνάρτησης W.

Άσκηση 9. Αποδείξτε πως όταν τα μήκη όλων των πλευρών και διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου είναι μικρότερα από d, τότε η περίμετρός του είναι μικρότερη από πd.

Η παράστασή μας για την περίμετρο ισχύει για κάθε επίπεδη κλειστή κυρτή καμπύλη. Η μέθοδος που περιγράψαμε προηγουμένως για τον υπολογισμό του μήκους όταν είναι γνωστό το πλάτος (σε κάθε διεύθυνση) προτάθηκε από τον διάσημο πολωνό μαθηματικό H. Steinhaus το 1930.

Το μήκος του αθροίσματος

Πρόβλημα 4. Έστω ότι το άθροισμα των μηκών των διανυσμάτων $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ του επιπέδου ισούται με 1. Αποδείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο πλήθος από αυτά τα διανύσματα έτσι ώστε το μήκος της συνισταμένης τους να είναι τουλάχιστον $1/\pi$.

Επιλύστε αυτό το πρόβλημα ακολουθώντας το εξής σχέδιο.

Ορίζουμε την *ψευδοπροβολή* ενός διανύσματος $\mathbf{p}$ στον άξονα ℓ ως τη συνηθισμένη προβολή αν η γωνία μεταξύ των $\mathbf{p}$ και ℓ είναι οξεία, και μηδέν σε κάθε άλλη περίπτωση. Θεωρούμε έναν σταθερό άξονα ℓ_0. Αν η γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{p}$ *και* ℓ_0 είναι φ, τότε η ψευδοπροβολή του $\mathbf{p}$ στον άξονα ℓ_α που σχηματίζει γωνία α με τον ℓ_0 μπορεί να γραφεί ως $|\mathbf{p}|g(\varphi - \alpha)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} \text{συν}\, x, & \text{εάν συν}x > 0, \\ 0, & \text{εάν συν}x \le 0. \end{cases}$$

Άσκηση 10 (για αναγνώστες που γνωρίζουν λίγο ολοκληρωτικό λογισμό). Επιβεβαιώστε ότι

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi - \alpha)\,d\alpha = 2$$

για κάθε φ. (Αν δεν γνωρίζεται ολοκληρωτικό λογισμό, μπορείτε να θεωρήσετε αυτό το γεγονός δεδομένο και να συνεχίσετε με τα λίγα τελευταία προβλήματα.)

Συμβολίζουμε τώρα με $f(\alpha)$ το άθροισμα των ψευδοπροβολών των διανυσμάτων $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ στον ℓ_α.

Ασκήσεις

11. Αποδείξτε ότι η μέση τιμή της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ισούται με $1/\pi$.

12. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των ψευδοπροβολών των δεδομένων διανυσμάτων σε έναν συγκεκριμένο άξονα ℓ_α είναι τουλάχιστον $1/\pi$.

13. Αποδείξτε την πρόταση του προβλήματος 4.

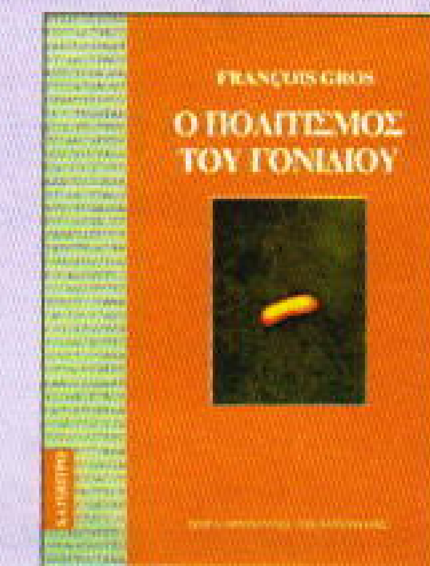
Δεν είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε τη σταθερά $1/\pi$ στο πρόβλημα 4 με κάποιον μεγαλύτερο αριθμό. Αυτό γίνεται φανερό αν θεωρήσετε ένα αρκετά μεγάλο n και τα διανύσματα που φέρουμε κατά μήκος των πλευρών ενός κανονικού n-γώνου.

Για τα διανύσματα του χώρου η πρόταση του προβλήματος 4 αποδεικνύεται αληθής ακόμη και αν αντικαταστήσουμε τη σταθερά $1/\pi$ με το $1/4$. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

Ο ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΓΟΝΙΔΙΟΥ

François Gros
Καθηγητής στο Collège de France



Η μοριακή βιολογία, κυριαρχώντας στην ιατρική και τη γεωργία, μετατρέπεται σε κοινωνικό ζήτημα: η γενετική μηχανική μεταβάλλει τη διατροφή και το περιβάλλον μας· η γονιμοποίηση και η αναπαραγωγή γίνονται αντικείμενα ελέγχου· η ανίχνευση των κληρονομικών νοσημάτων εγκυμονεί τον κίνδυνο του συστηματικού φακελώματος του πληθυσμού...
Ως πού μπορεί να φτάσει η εξουσία των βιολόγων; Ποιο μερίδιο αποφάσεων θα αφήσουν στους πολιτικούς, οι οποίοι έχουν αποπροσανατολιστεί από το εύρος των μεγάλων διεθνών ερευνητικών προγραμμάτων και από την παρεπόμενη διαταραχή της παγκόσμιας ισορροπίαςδυνάμεων;
Η συζήτηση για τη βιοηθική είναι θυελλώδης. Ποιες ελπίδες γεννά και ποιους κινδύνους συνεπάγεται ο «πολιτισμός του γονιδίου»;

Σελ.: 192, 2.400 δρχ.

Εκδόσεις *κάτοπτρο*

Λιγότερη θερμότητα, περισσότερο φως

Ιδανικό μελανό σώμα, νόμος του Kirchhoff, και άλλα τινά

Y. Amstislavsky

Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΜΕ ΤΟΝ οποίο ένα θερμό σώμα εκπέμπει φως (θερμική ακτινοβολία), έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της φυσικής. Αρκεί να αναφέρουμε ότι η μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας σηματοδότησε την έναρξη της κβαντικής εποχής. Ένας από τους βασικούς νόμους για το εν λόγω φαινόμενο διατυπώθηκε από τον γερμανό φυσικό Gustav Kirchhoff το 1859. Ακριβώς αυτός ο νόμος θα αποτελέσει το θέμα της ιστορίας μας.

Μπορεί το μελανό να είναι φωτεινό;

Καταρχάς δυο λόγια για το «μελανό». Στη φυσική μ' αυτό τον όρο χαρακτηρίζουμε όσα φυσικά σώματα έχουν την ιδιότητα να απορροφούν την ακτινοβολία (στην ορατή ή οποιαδήποτε άλλη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος) που προσπίπτει πάνω τους. Όσο πιο μελανό είναι ένα σώμα τόσο περισσότερη από την προσπίπτουσα ακτινοβολία απορροφά. Το *ιδανικό μελανό σώμα* (στη συνέχεια θα το σημειώνουμε ως ΙΜΣ) απορροφά όλη την ακτινοβολία που δέχεται —και αυτό για όλες τις περιοχές του φάσματος. Αντίθετο του «μελανού» σώματος, όπως πιθανώς υποψιάζεστε, είναι το «λευκό». Όσο περισσότερη ακτινοβολία ανακλά ένα σώμα τόσο λιγότερη απορροφά, και τόσο λιγότερο μελανό φαίνεται.

Δυο λόγια τώρα για τα «φωτεινά» σώματα. Θεωρούμε ένα σώμα φωτεινό όταν εκπέμπει αρκετή ακτινοβολία (στην ορατή ή οποιαδήποτε άλλη περιοχή του φάσματος). Όσο περισσότερη ακτινοβολία εκπέμπει τόσο φωτεινότερο είναι. Αντίθετο του «φωτεινού», βεβαίως, είναι το «σκοτεινό». Ένα φωτεινό σώμα ακτινοβολεί πολύ περισσότερη ενέργεια απ' όση ένα σκοτεινό.

Επομένως, «μελανό» και «φωτεινό» (ή ομοίως «μελανό» και «σκοτεινό») είναι έννοιες διαφορετικής «τάξης». Περιγράφουν διαφορετικές ιδιότητες των σωμάτων. Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι αν αυτές οι έννοιες συσχετίζονται. Αν υπάρχει πράγματι σχέση με καθολική εφαρμογή που να συνδέει τη μια με την άλλη, τότε θα μπορούμε μέσω των χαρακτηριστικών απορρόφησης ενός σώματος να προβλέπουμε τα στοιχεία εκπομπής ακτινοβολίας απ' αυτό υπό διάφορες συνθήκες.

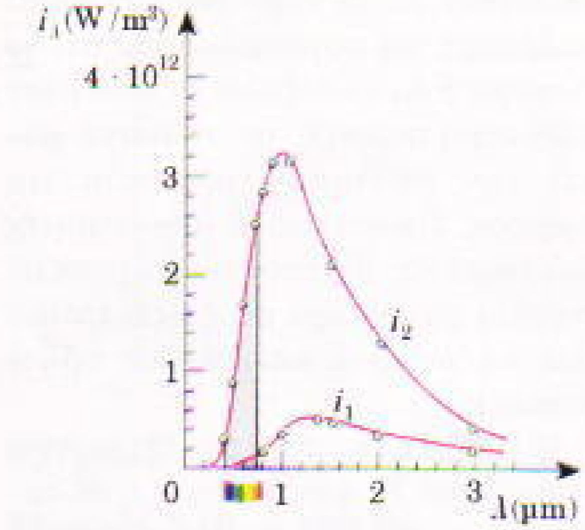
Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι σώματα σε διαφορετικές θερμοκρασίες εκπέμπουν διαφορετικό φως. Θυμηθείτε πόσο δραστικά αλλάζει το φως που βλέπουμε να εκπέμπει ένας λαμπτήρας πυρακτώσεως όταν αυξάνει το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το σπείραμά του —από μια πενιχρή κόκκινη αίγλη στους 800 K σε μια εκτυφλωτική λευκή λάμψη στους 2.800 K. Και αναμφίβολα θα έχετε προσέξει τους μετασχηματισμούς της φλόγας που καπνίζει καθώς αλλάζει η θερμοκρασία του σώματος. Σε υψηλές θερμοκρασίες (της τάξης των 1.800 K), τα «μαύρα» σωματίδια άνθρακα (η αιθάλη) φωτοβολούν έντονα και παράγουν κίτρινες γλώσσες φωτιάς (εδώ το μελανό είναι φωτεινό), ενώ τα ίδια σωματίδια αιθάλης, όταν δεν έχουν καεί πλήρως και έχουν χρόνο να ψυχθούν, παράγουν σκούρες γλώσσες καπνιάς (εδώ το μελανό είναι σκοτεινό). Επομένως πρέπει να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά απορρόφησης και εκπομπής ακτινοβολίας διαφόρων σωμάτων σε ίδιες θερμοκρασίες.

Στην καθημερινή μας ζωή, τα σώματα που υπάρχουν γύρω μας βρίσκονται συνήθως σε θερμοκρασία δωματίου, και συχνά βλέπουμε μελανά σώματα: μαύρα ρούχα, κομμάτια κάρβουνου, το πτέρωμα των χελιδονιών, το στόμιο μιας φωλιάς ή μιας σπηλιάς, οι λιμουζίνες των επισήμων... Αν τοποθετήσετε μερικά από αυτά τα σώματα δίπλα σε άλλα μη μελανά σώματα, θα διαπιστώσετε ότι τα πρώτα είναι σκοτεινά ενώ τα δεύτερα φωτεινότερα. Είναι λοιπόν εύλογο να οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι το «μελανό» είναι και «σκοτεινό», και μάλιστα όσο πιο μελανό είναι ένα σώμα τόσο σκοτεινότερο είναι. Αλλά κάνετε λάθος.

Δεν είναι δύσκολο να εξηγήσουμε αυτό το παράδοξο. Κατά πρώτον, πάντοτε συγκρίνουμε τα διαφορετικά σώματα υπό το φως της ημέρας ή και ηλεκτρικών λαμπτήρων (ουδείς κάνει κάτι τέτοιο σε ένα σκοτεινό δωμάτιο). Επομένως, το φως που δέχονται τα μάτια μας δεν είναι η θερμική ακτινοβολία των σωμάτων αλλά το φως του Ήλιου ή των ηλεκτρικών λαμπτήρων που ανακλάται στην επιφάνειά τους· τα μη μελανά σώματα διαχέουν έντονα το φως που πέφτει πάνω τους, και γι' αυτό φαίνονται φωτεινά. Κατά δεύτερον, συνήθως παρατηρούμε τα σώματα γύρω μας διά γυμνού οφθαλμού· αυτό το αξιοθαύμαστο όργανο, όμως, είναι ευαίσθητο μόνο στο ορατό φως —δηλαδή σε μια πολύ μικρή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Μάλιστα, σ' αυτή την περιοχή, το ποσόν της θερμικής ακτινοβολίας ενός σώματος σε θερμοκρασία δωματίου είναι πρακτικά αμελητέο!

Η ανάλυση της σχέσης μεταξύ των ιδιοτήτων εκπομπής και απορρόφησης διαφόρων σωμάτων οδήγησε τον Kirchhoff σε ένα σημαντικό συμπέρασμα, γνωστό ως νόμος του Kirchhoff: *όσο περισσότερη ακτινοβολία απορροφά ένα σώμα σε δεδομένη θερμοκρασία τόσο περισσότερη ακτινοβολία εκπέμπει (δηλαδή, όσο πιο μελανό τόσο και πιο φωτεινό είναι).*

Για να εκφράσουμε μαθηματικά τον παραπάνω νόμο, πρέπει να ορίσουμε την απορροφητικότητα και την ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Η απορροφητικότητα (ή συντελεστής απορρόφησης) ενός σώματος, $A_{\lambda,T}$, για δεδομένο μήκος κύματος λ και δεδομένη απόλυτη θερμοκρασία T, είναι το κλάσμα της ισχύος που απορροφά το σώμα προς αυτήν που πέφτει πάνω του. Ο συντελεστής απορρόφησης είναι καθαρός αριθμός, και για τα διάφορα σώματα παίρνει τιμές από 0 έως 1. Η τιμή του είναι 0 για το απολύτως λευκό σώμα,[1] και 1 για το ΙΜΣ. Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα ανά μονάδα μήκους κύματος (ή συνάρτηση φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας), $I_{\lambda,T}$, για δεδομένο μήκος κύματος λ και δεδομένη απόλυτη θερμοκρασία T, είναι η ισχύς



Σχήμα 1

που εκπέμπει η μονάδα επιφανείας του σώματος στο μοναδιαίο διάστημα μήκους κύματος[2] στην περιοχή πλησίον του λ.

Φανταστείτε πως έχουμε ένα πλήθος σωμάτων και μεταξύ αυτών ένα ΙΜΣ και ένα ιδανικό λευκό σώμα που όλα έχουν διαφορετική $A_{\lambda,T}$. Ας υποθέσουμε ότι θερμαίνουμε τα σώματα στην ίδια, μάλλον υψηλή, θερμοκρασία T. Τότε, σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff, τα σώματα δεν θα εκπέμπουν την ίδια ακτινοβολία: φωτεινότερο θα είναι το ΙΜΣ, ενώ το ιδανικό λευκό σώμα θα είναι απολύτως σκοτεινό. Μπορούμε να σημειώσουμε με ιδιαίτερα σύμβολα την απορροφητικότητα και την ένταση ανά μονάδα μήκους κύματος του ΙΜΣ: $A_{\lambda,T}^{\text{ΙΜΣ}} = a = 1$, $I_{\lambda,T}^{\text{ΙΜΣ}} = i_{\lambda,T}$. Είναι σημαντικό ότι το ΙΜΣ όχι μόνο εκπέμπει τη μέγιστη ακτινοβολία σε δεδομένη θερμοκρασία, αλλά επιπλέον χαρακτηρίζεται από μια αυστηρά καθορισμένη φασματική σύνθεση. Με άλλα λόγια, η $i_{\lambda,T}$ είναι μια οικουμενική συνάρτηση των λ και T. Σύμφωνα με τα παραπάνω, λοιπόν, ο νόμος του Kirchhoff μπορεί να γραφεί ως

$$I_{\lambda,T} = A_{\lambda,T}\, i_{\lambda,T}. \qquad (1)$$

Έγιναν πολλές προσπάθειες να υπολογιστεί θεωρητικά η συνάρτηση $i_{\lambda,T}$, και τελικά, αυτό το κατάφερε ο γερμανός φυσικός Max Planck, το 1900:

$$i_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}, \qquad (2)$$

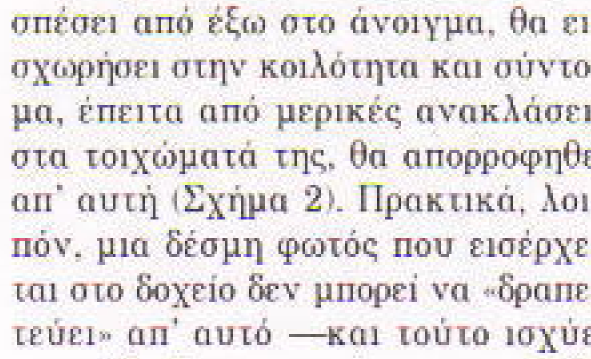
όπου $c = 3 \cdot 10^8$ m / s είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s η σταθερά του Planck, και $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J / K η σταθερά του Boltzmann.

Όταν η θερμοκρασία T ενός σώματος διατηρείται σταθερή, τα μεγέθη A, I, και i εξαρτώνται μόνο από το λ. Σ' αυτή την περίπτωση, λοιπόν, μπορούμε να τα σημειώνουμε ως A_λ, I_λ, και i_λ, αντίστοιχα. Στο Σχήμα 1 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Planck για δύο θερμοκρασίες, T_1 = 2.000 K και T_2 = 3.000 K.

Μπορεί το κόκκινο να γίνει μπλε;

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κλειστό δοχείο από πυρίμαχο υλικό το οποίο διαθέτει μικρό (σε σχέση με τις διαστάσεις του δοχείου) άνοιγμα· η κοιλότητα στο εσωτερικό του δοχείου επικοινωνεί με το περιβάλλον μέσω αυτού του ανοίγματος. Το εν λόγω άνοιγμα θεωρείται μια καλή προσέγγιση ΙΜΣ. Η θερμοκρασία του δοχείου μπορεί ν' αλλάζει με τη βοήθεια κάποιας εξωτερικής συσκευής θέρμανσης, και το σχήμα του δοχείου μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Αν μια λεπτή δέσμη φωτός προσπέσει από έξω στο άνοιγμα, θα εισχωρήσει στην κοιλότητα και σύντομα, έπειτα από μερικές ανακλάσεις στα τοιχώματά της, θα απορροφηθεί απ' αυτή (Σχήμα 2). Πρακτικά, λοιπόν, μια δέσμη φωτός που εισέρχεται στο δοχείο δεν μπορεί να «δραπετεύει» απ' αυτό —και τούτο ισχύει για κάθε θερμοκρασία και για κάθε μήκος κύματος. Επομένως, το άνοιγμα συμπεριφέρεται ακριβώς ως ΙΜΣ.



Σχήμα 2

1. Ή, για τον τέλειο ανακλαστήρα (το ιδανικό κάτοπτρο). Η απολύτως λευκή επιφάνεια διαχέει ομοιογενώς προς όλες τις κατευθύνσεις τις προσπίπτουσες ακτίνες, ενώ το ιδανικό κάτοπτρο τις ανακλά σε κατεύθυνση που προσδιορίζεται από τη γωνία πρόσπτωσης.

2. Για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση, σημειώστε ότι η έκφραση «μοναδιαίο διάστημα μήκους κύματος» δεν σημαίνει ότι το $\Delta\lambda$ είναι, ας πούμε, 1 m. Το ζήτημα έγκειται στο ότι η ισχύς που εκπέμπει το σώμα είναι ανάλογη του $\Delta\lambda$ —δηλαδή, $\Delta E/(\Delta S \cdot \Delta t) = I_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda$, όπου ΔE είναι η ενέργεια που εκπέμπεται σε διάστημα μήκους κύματος $\Delta\lambda$ από περιοχή ΔS του σώματος σε χρόνο Δt.

Ίσως νομίζετε πως το άνοιγμα απορροφά όλες τις ακτινοβολίες και δεν βγαίνει καμιά απ' αυτό. Κάνετε λάθος. Πράγματι, το ΙΜΣ απορροφά κάθε ακτινοβολία που εισέρχεται σ' αυτό αφού τις «χωνέψει», όμως, «γεννά» τη δική του ακτινοβολία που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του T. Σύμφωνα μάλιστα με το νόμο του Kirchhoff, η ακτινοβολία που εξέρχεται από το άνοιγμα θα είναι εντονότερη από εκείνη που θα εξέπεμπε κάθε άλλο σώμα με την ίδια θερμοκρασία. Ο ίδιος ο Kirchhoff, μάλιστα, ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε (το 1859) να χρησιμοποιήσει το άνοιγμα ενός κλειστού δοχείου ως ιδανικό μελανό πομπό. Ωστόσο, κύλησαν αρκετά χρόνια έως ότου γίνουν αποδεκτές οι πειραματικές μελέτες της θερμικής ακτινοβολίας μέσω αυτού του μοντέλου ΙΜΣ.

Ας αναφερθούμε τώρα σε τρία παραδείγματα ώστε να κατανοήσουμε βαθύτερα το νόμο του Kirchhoff.

1. Υποθέστε ότι στιλβώνουμε τόσο την εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας του Σχήματος 2 ώστε να λειτουργεί ως κάτοπτρο για μεγάλη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Τι θα βλέπει ένας παρατηρητής καθώς θα κοιτά τη σφαίρα από την πλευρά του ανοίγματος S, στις εξής δύο περιπτώσεις: (α) όταν η σφαίρα βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου (T = 300 K), και (β) όταν είναι λευκοπυρωμένη (T = 3.000 K);

(α) Για να μην παραπλανηθούμε από άλλα φαινόμενα και να εστιάσουμε την προσοχή μας στο θέμα που εξετάζουμε, ας θεωρήσουμε ότι εκτελούμε το πείραμα σε σκοτεινό δωμάτιο. Αλλά όταν η σφαίρα βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου, δεν μπορούμε να δούμε τίποτα δια γυμνού οφθαλμού: σύμφωνα με την εξίσωση (2), η συνάρτηση i_λ του Planck στους 300 K είναι αμελητέα για την περιοχή του ορατού φάσματος ($0{,}4 \cdot 10^{-6}$ m $\le \lambda \le 0{,}76 \cdot 10^{-6}$ m). Βεβαίως, ένα σώμα σε θερμοκρασία T = 300 K εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, και η μέγιστη ισχύς της βρίσκεται στο φασματικό διάστημα όπου η συνάρτηση i_λ παρουσιάζει μέγιστο —δηλαδή στο μήκος κύματος $\lambda_m = 10 \cdot 10^{-6}$ m (10 μm), που βρίσκεται στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος. Σύμφωνα λοιπόν με το νόμο του Kirchhoff μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το άνοιγμα S θα φωτοβολεί έντονα στην υπέρυθρη περιοχή, με σκοτεινό φόντο την υπόλοιπη επιφάνεια της σφαίρας. Προφανώς, ο παρατηρητής θα μπορεί να «βλέπει» αυτή την ακτινοβολία μόνο μέσω ενός μετατροπέα των υπέρυθρων ακτίνων σε ορατό φως.

(β) Όταν η σφαίρα θερμανθεί στους 3.000 K, η συνάρτηση i_λ θα εμφανίσει το μέγιστό της στην περιοχή του ορατού. Επιπλέον, όπως προκύπτει από την εξίσωση (2), όταν η T μεταβάλλεται από T_1 σε T_2, η ένταση της ακτινοβολίας μελανού σώματος ανά μονάδα μήκους κύματος για δεδομένο λ αυξάνει κατά έναν παράγοντα

$$\frac{i_{\lambda,T_2}}{i_{\lambda,T_1}} = \exp\left[\frac{hc}{\lambda k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

(Το διαπιστώνετε εύκολα από την (2) θεωρώντας ότι $\exp(hc/\lambda kT) >> 1$). Για $\lambda = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$ m (η μέση περίπου της ορατής περιοχής), T_2 = 3.000 K και T_1 = 300 K, προκύπτει

$$\frac{i_{\lambda,T_2}}{i_{\lambda,T_1}} = e^{78} = 10^{34}.$$

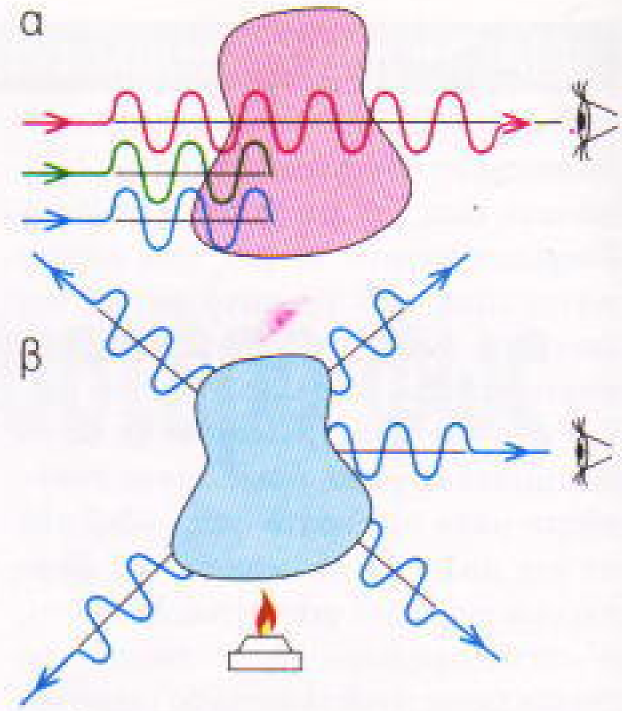
Προφανώς σ' αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται κανείς μετατροπέας, και ο παρατηρητής θα βλέπει το άνοιγμα S να λάμπει έντονα, με σκοτεινό φόντο την υπόλοιπη επιφάνεια της σφαίρας (θυμηθείτε, «όσο πιο μελανό τόσο πιο φωτεινό!»).

2. Υποθέστε ότι έχουμε ένα έγχρωμο πυρίμαχο ορυκτό που φαίνεται κόκκινο όταν το διαπερνά φως (Σχήμα 3α)· ουσιαστικά απορροφά όλες τις κυανές, μπλε και ιώδεις ακτίνες (γι' αυτές $A_\lambda = 1$) και είναι διαφανές στο πορτοκαλί-ερυθρό μέρος του φάσματος ($A_\lambda = 0$). Χάριν ακριβείας, υποθέστε επιπλέον ότι η περιοχή της έντονης απορρόφησης πρακτικά δεν μετατοπίζεται κατά μήκος του φάσματος καθώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία. Θα ακτινοβολεί αυτό το ορυκτό αν το θερμάνουμε στους 3.000 K, και αν ναι, τι χρώμα θα έχει η ακτινοβολία;

Στην T = 3.000 K, η συνάρτηση i_λ του Planck παρουσιάζει μέγιστο στην ορατή περιοχή, και σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff το πυρωμένο υλικό θα εκπέμπει έντονη θερμική ακτινοβολία στις περιοχές του φάσματος όπου απορροφά έντονα (εκεί όπου $A_\lambda = 1$):

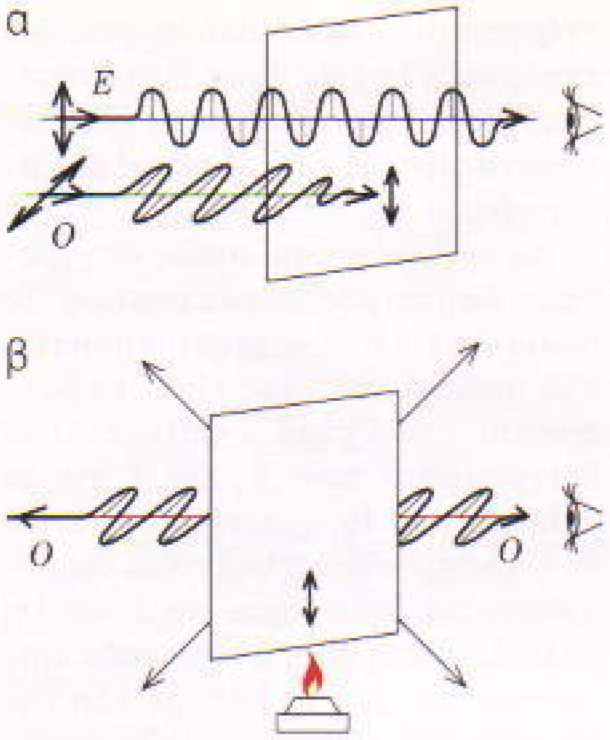
$$I_\lambda = A_\lambda i_\lambda.$$

Εφόσον, λοιπόν, το ορυκτό απορροφά έντονα τα μικρά μήκη κύματος του ορατού φάσματος, θα εκπέμπει έντονη θερμική ακτινοβολία χρώματος κυανού-μπλε (Σχήμα 3β).



Σχήμα 3

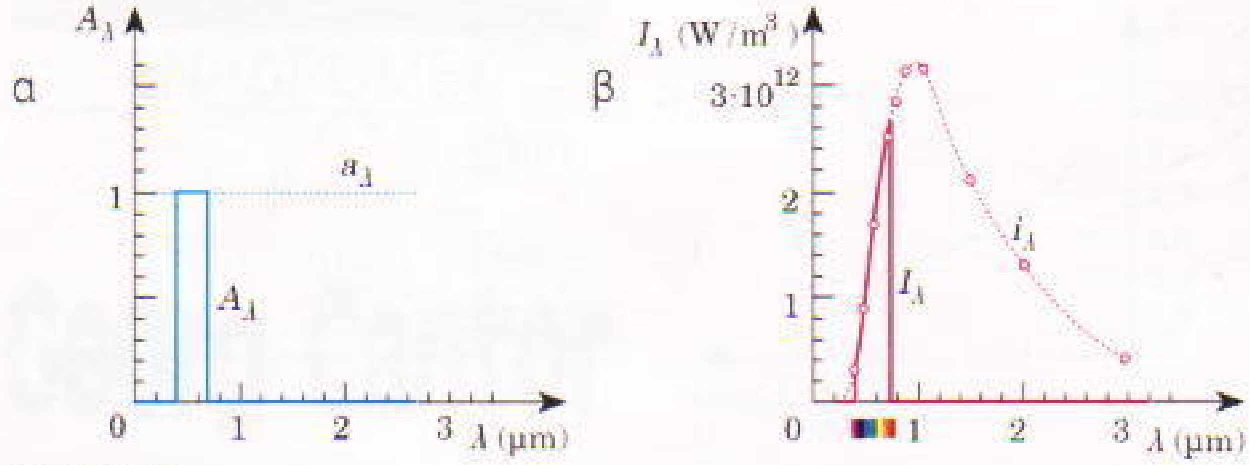
Ο αμερικανός φυσικός Robert Wood πραγματοποίησε στις αρχές του 20ού αιώνα ένα σπουδαίο πείραμα με τηγμένο χαλαζία. Ο τηγμένος χαλαζίας είναι διαφανής στην ορατή περιοχή του φάσματος· γι' αυτήν η απορρόφηση είναι αμελητέα —$A_\lambda = 0$. Έτσι, μια θερμαινόμενη στήλη τηγμένου χαλαζία παραμένει σκοτεινή, όσο υψηλά να φτάσει η θερμοκρασία της. Ο Wood «χρωμάτισε» τον τηγμένο χαλαζία προσθέτοντας σ' αυτόν οξείδιο νεοδυμίου. Ήταν ήδη γνωστό ότι διαλύματα σπάνιων στοιχείων (σ' αυτά περιλαμβάνεται το νεοδύμιο) παρουσιάζουν για την ορατή περιοχή στενές φασματικές ταινίες έντονης απορρόφησης. Για το νεοδύμιο αυτές βρίσκονται στην ερυθρή, πορτοκαλί και πράσινη περιοχή του φάσματος. Ο Wood θέρμανε την παραπάνω στήλη «χρωματισμένου» χαλαζία και μελέτησε, με τη βοήθεια ενός φασματοσκοπίου, την έντονη ακτινοβολία που εξέπεμπε· διαπίστωσε λοιπόν ότι πράγματι αυτή η ακτινοβολία αποτελείται από ταινίες στην ερυθρή, πορτοκαλί και πράσινη περιοχή.



Σχήμα 4

3. Είναι γνωστό ότι μερικοί κρύσταλλοι παρουσιάζουν διαφορετική απορροφητικότητα για φως πολωμένο σε διάφορα επίπεδα ταλάντωσης· δηλαδή η παράμετρος A_λ είναι μεγαλύτερη για φως που το ηλεκτρικό πεδίο του ταλαντώνεται σε συγκεκριμένη διεύθυνση και μικρότερη σε άλλη (για τις ίδιες τιμές λ και T). Κλασικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι ο ισλανδικός κρύσταλλος, κατά έναν άξονα έγχρωμο (συνήθως πράσινο) πυρίμαχο κρυσταλλικό υλικό, που απορροφά κυρίως τις τακτικές (O) ακτίνες φωτός (Σχήμα 4α). Ένα πλακίδιο ισλανδικού κρυστάλλου πάχους λίγων χιλιοστών λειτουργεί ως φυσικός πολωτής: το διαπερνούν οι έκτακτες (E) ακτίνες φωτός, με το επίπεδο ταλάντωσής τους παράλληλο στην κύρια τομή του κρυστάλλου. Το ερώτημα είναι, τι ακτινοβολία εκπέμπει ένας θερμός ισλανδικός κρύσταλλος;

Η παράμετρος A_λ διαφέρει για τις τακτικές και τις έκτακτες ακτίνες. Σύμφωνα λοιπόν με το νόμο του Kirchhoff, ο ισλανδικός κρύσταλλος θα εκπέμπει μερικώς πολωμένη θερμική ακτινοβολία στην οποία θα επικρατούν σημαντικά οι τακτικές ακτίνες (Σχήμα 4β). Αυτό ακριβώς συμπέρανε ο Kirchhoff στις ποιοτικές έρευνές του, το 1859, για τη θερμική ακτινοβολία του ισλανδικού κρυστάλλου. Αργότερα, στις αρχές του 20ού αιώνα, ποσοτικές μελέτες επιβεβαίωσαν τη σχέση $A^E / A^O = I^E / I^O$.



Σχήμα 5

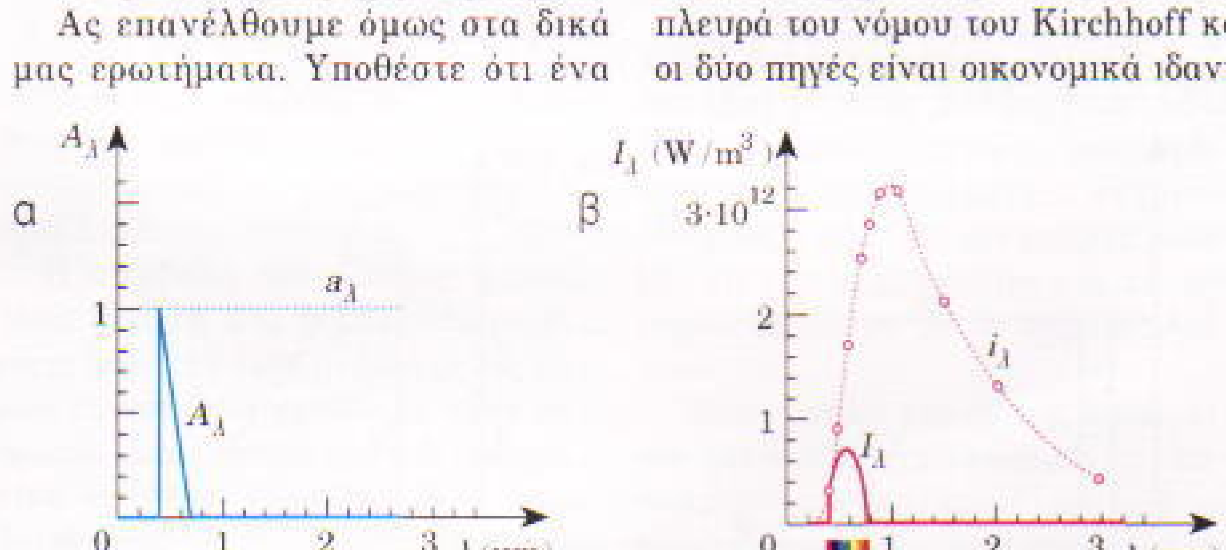
Μπορεί 3 W = 100 W;

Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των σωμάτων που βρίσκονται σε υψηλή θερμοκρασία και ακτινοβολούν είναι οι θερμές φωτεινές πηγές. Θυμηθείτε το σπείραμα των λαμπτήρων πυρακτώσεως, οι οποίοι συνεχίζουν να αποτελούν την κύρια πηγή τεχνητού φωτισμού. Εφόσον αναφερόμαστε στις πρακτικές εφαρμογές του νόμου του Kirchhoff, πρέπει να τονίσουμε ότι μόνο ένα μικρό κλάσμα της ενέργειας που ακτινοβολεί το ΙΜΣ βρίσκεται στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος (το γραμμοσκιασμένο τμήμα στο διάγραμμα του Σχήματος 1) —μόνο 0,3% στην T = 2.000 K. Στην T = 3.000 K το κλάσμα αυξάνει στο 3%, αλλά και πάλι παραμένει μικρό. Αν το σπείραμα αποτελείται από σύρμα βολφραμίου, η κατάσταση είναι λίγο καλύτερη. Εντούτοις, εξαιτίας των αναπόφευκτων επιπρόσθετων απωλειών που οφείλονται στη διάδοση της θερμότητας με μεταφορά και αγωγιμότητα, η πραγματική απόδοση των σύγχρονων λαμπτήρων με σπείραμα βολφραμίου δεν ξεπερνά το 2% - 3%. Αυτό σημαίνει ότι «πετιέται» το 97% περίπου της παρεχόμενης ισχύος.

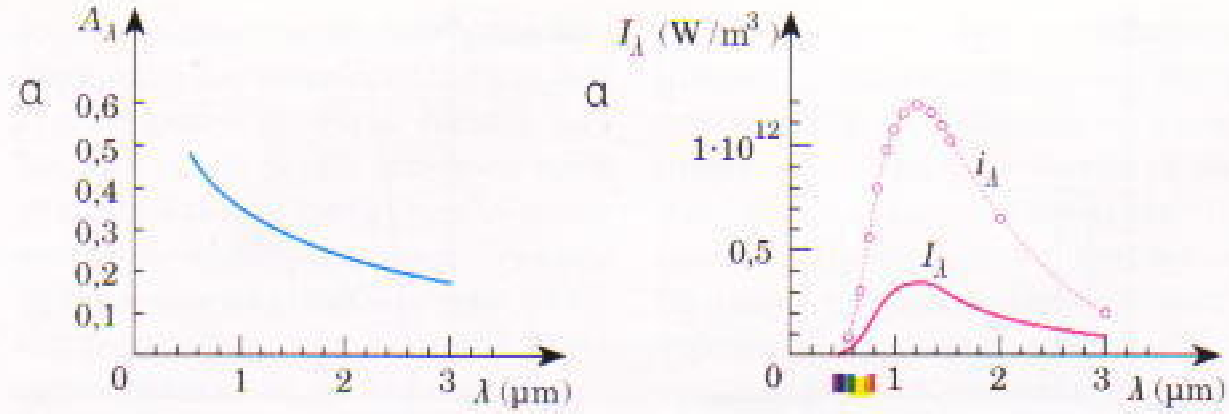
Ας επανέλθουμε όμως στα δικά μας ερωτήματα. Υποθέστε ότι ένα πυρίμαχο, ηλεκτρικά αγώγιμο υλικό (με θερμοκρασία τήξης T = 3.000 K), σε υψηλές θερμοκρασίες απορροφά έντονα το φως στην ορατή περιοχή του φάσματος ($A_\lambda = 1$), ενώ στις υπόλοιπες περιοχές πρακτικά δεν απορροφά τίποτε ($A_\lambda = 0$). Σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff, θα έχουμε σοβαρή εξοικονόμηση ενέργειας με το λαμπτήρα που το σπείραμά του θα αποτελείται από αυτό το υλικό· και πράγματι, η φωτεινή ισχύς τής εν λόγω πηγής αντιστοιχεί στη φωτεινή ισχύ που παράγει ένας σύγχρονος λαμπτήρας των 100 W.

Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα, τι μορφή πρέπει να έχει η συνάρτηση A_λ ώστε ο λαμπτήρας να παράγει τη μέγιστη φωτεινή ισχύ, στις περιπτώσεις που επιθυμούμε: (1) η φωτεινότητα της πηγής να είναι μέγιστη στην παραπάνω θερμοκρασία T, και (2) η φωτεινότητα της πηγής να είναι μέγιστη αλλά και η χρωματική σύνθεση του εκπεμπόμενου φωτός να είναι η πιο ξεκούραστη για το ανθρώπινο μάτι;

Ας συμβολίσουμε τις δύο φωτεινές πηγές με Π_1 και Π_2. Η μορφή των συναρτήσεων A_λ που αναζητούμε φαίνεται στα Σχήματα 5α και 6α· οι αντίστοιχες συναρτήσεις I_λ φαίνονται στα Σχήματα 5β και 6β. Από την πλευρά του νόμου του Kirchhoff και οι δύο πηγές είναι οικονομικά ιδανι-



Σχήμα 6



Σχήμα 7

κές, αφού εκπέμπουν μόνο ορατό φως (A_λ = 0 στις περιοχές εκτός του ορατού). Η πηγή $Π_1$ όμως είναι φωτεινότερη σε δεδομένη θερμοκρασία, επειδή εκπέμπει φως ως ΙΜΣ. Ωστόσο, αυτό το φως έχει κόκκινη απόχρωση επειδή επικρατούν τα ζεστά χρώματα —και τούτο επειδή η I_λ αυξάνει απότομα σε συνάρτηση με το λ. Από την άλλη, τα ζεστά χρώματα αποκλείονται από το φως που εκπέμπει η $Π_2$ εξαιτίας της μείωσης της A_λ στο τμήμα των μεγάλων μηκών κύματος του ορατού φάσματος· έτσι η κατανομή ενέργειας μοιάζει με την κατανομή του ηλιακού φωτός. Δηλαδή, το φως που εκπέμπει η $Π_2$ είναι «λευκότερο» από το φως της $Π_1$, επομένως πιο άνετο για το ανθρώπινο μάτι. (Σημειώστε ότι στην περίπτωση 6α επιλέξαμε την απλούστερη περίπτωση. Είναι πιθανό κάποιοι από σας να μπορούν να προτείνουν καλύτερη μορφή για την A_λ· είναι απαραίτητες όμως γνώσεις νευροβιολογίας και βιοφυσικής.)

Αντιλαμβάνεστε ότι αν διαθέταμε λαμπτήρες σαν τους $Π_1$ και $Π_2$ θα οδηγούμαστε σε επαναστατικές αλλαγές στην εφαρμοσμένη μηχανική. Αυτό βεβαίως θα προϋπέθετε μια προηγούμενη επανάσταση στην τεχνολογία των υλικών —να γνωρίσουμε πώς μπορούμε να παράγουμε υλικά με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά όσον αφορά την απορρόφηση του φωτός, τη θερμοκρασία τήξης, κ.λπ., κ.λπ.

Δυστυχώς, οι θερμές φωτεινές πηγές που διαθέτουμε διαφέρουν σημαντικά από τις ιδανικές υπεροικονομικές πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Ωστόσο μπορούμε να εντοπίσουμε μερικά κοινά σημεία τους. Ας θυμηθούμε την παλιά καλή λυχνία του Auer (λάμπα γκαζιού). Στις αρχές του 20ού αιώνα αυτή η λυχνία έγινε ευρέως γνωστή ως πηγή έντονου φωτός στην περιοχή του ορατού και στα μέσα της περιοχής του υπερύθρου· σήμερα έχει μόνο ιστορικό ενδιαφέρον. Ωστόσο, οι ιδιότητές της είναι αξιοπρόσεκτες. Το βασικό στοιχείο της λυχνίας είναι το δικτυωτό περίβλημα αμιάντου, που θερμαίνεται από τη φλόγα του υγραερίου στους 1.800 Κ. Τα νήματα του αμιάντου έχουν εμποτιστεί με οξείδια των σπανίων γαιών θορίου και δημητρίου. Το οξείδιο του δημητρίου απορροφά εντόνως (πρακτικά, σαν ΙΜΣ) σε ολόκληρη την περιοχή του ορατού και στα μέσα της περιοχής του υπερύθρου, και δεν απορροφά σχεδόν καθόλου στην εγγύς περιοχή του υπερύθρου. Επομένως, το μέρος του φάσματος του ΙΜΣ στους 1.800 Κ που αντιστοιχεί στην περισσότερη ενέργεια απουσιάζει από το φως που εκπέμπει η λυχνία Auer. Αυτή εκπέμπει φως μόνο στις περιοχές που προαναφέραμε, ενώ η συνολική ακτινοβολία της είναι λίγη.

Ας επιστρέψουμε στους σύγχρονους λαμπτήρες πυρακτώσεως. Το βασικό υλικό που χρησιμοποιείται στα σπειράματά τους είναι το βολφράμιο. Στο Σχήμα 7 φαίνονται τα διαγράμματα των A_λ και I_λ για το βολφράμιο σε θερμοκρασία T = 2.450 Κ. Παρατηρήστε ότι στην ίδια θερμοκρασία το βολφράμιο ακτινοβολεί πολύ λιγότερη ισχύ ανά μονάδα επιφανείας απ' ό,τι το ΙΜΣ, σε όλη την έκταση του φάσματος. Ειδικότερα, στην ορατή περιοχή ακτινοβολεί περίπου το 1/2 της ισχύος που ακτινοβολεί το ΙΜΣ (όχι ιδιαίτερα καλό χαρακτηριστικό για μια φωτεινή πηγή) και στην υπέρυθρη το 1/3 ώς 1/5 αυτής του ΙΜΣ (καλό χαρακτηριστικό για φωτεινή πηγή, αφού το φως της είναι πιο άνετο για το ανθρώπινο μάτι αλλά είναι και οικονομικότερη). Ωστόσο, η απόδοση των λαμπτήρων πυρακτώσεως με σπείραμα βολφραμίου είναι χαμηλή —όπως προαναφέραμε, δεν ξεπερνά το 3%.

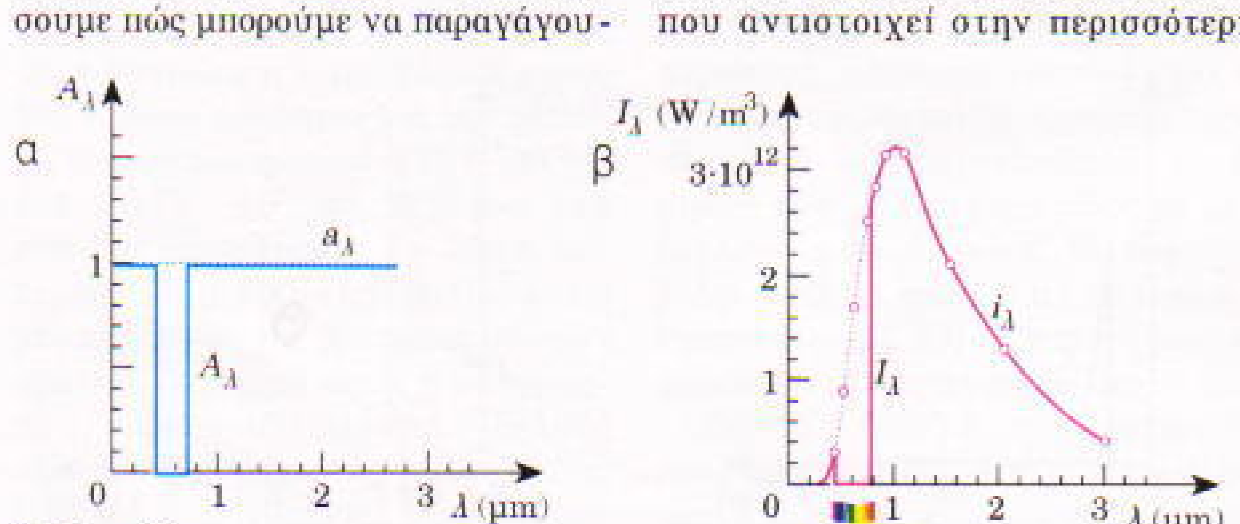
Τελειώνοντας θα ήθελα να σας κάνω μια ερώτηση ώστε να ελέγξετε πόσο κατανοήσατε τα παραπάνω θέματα. Στο Σχήμα 8 φαίνονται τα διαγράμματα των A_λ και I_λ ενός θερμού σώματος. Τι μπορείτε να σχολιάσετε για τη θερμική ακτινοβολία του; ◙

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 11 τεύχη. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους. Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ QUANTUM

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 · Αθήνα
Τηλ.: 3643272, 3645098. Fax: 3641864



Σχήμα 8

Georg Cantor

«Κανείς δεν θα μας εκδιώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας.»

—David Hilbert

Vladimir Tikhomirov

ΣΤΙΣ 3 ΜΑΡΤΙΟΥ ΤΟΥ 1995 ΣΥΜΠΛΗρώθηκαν 150 χρόνια από τη γέννηση του Georg Cantor. Ο σπουδαίος ρώσος τοπολόγος Pavel Sergeyevich Alexandrov υποστηρίζει: «Δεν πιστεύω ότι υπήρξε μαθηματικός κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα που να άσκησε μεγαλύτερη επιρροή στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης από το δημιουργό της αφηρημένης θεωρίας συνόλων, τον Georg Cantor». Δεν θα συμφωνήσουν όλοι μὲ αυτή την άποψη —άλλωστε την ίδια εποχή έζησε και δημιούργησε ο μεγάλος Henri Poincaré. Ουδείς όμως μπορεί να αρνηθεί την τρομερή, ασύγκριτη επίδραση της εργασίας του Cantor σε όλα τα μαθηματικά που ακολούθησαν. Εμπλούτισε την επιστήμη μας με θεμελιώδεις νέες έννοιες, εμπνευσμένα αποτελέσματα, σημαντικές θεωρίες, γόνιμες μεθόδους...

Οι ιδέες του Cantor αντιμετωπίστηκαν στην αρχή με μια υγιή δόση σκεπτικισμού και στη συνέχεια —από πολλούς μαθηματικούς— με θαυμασμό. Αργότερα έγιναν αντικείμενο κριτικής και ο απόηχος των επικρίσεων ακούγεται έως σήμερα. Αλλά ιδού τι πιστεύει ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, ο David Hilbert: «Νομίζω ότι [η θεωρία συνόλων του Cantor] είναι ένα από τα σπουδαιότερα δείγματα της ανθρώπινης ευφυΐας και ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρώπινης πνευματικής δραστηριότητας». Και λίγο αργότερα, όταν πολλοί στοχαστές άρχισαν να αμφιβάλουν για την αξία της θεωρίας συνόλων εξαιτίας των παραδόξων της, ο Hilbert είπε τη φράση που παραθέτουμε σαν μότο του άρθρου.

Ποια είναι λοιπόν η συμβολή του Cantor στα μαθηματικά; Επιτρέψτε μου να ξεκινήσω με μια απλή καταγραφή. Ουσιαστικά, ο Cantor συνέλαβε την ιδέα της οικοδόμησης ενός ολόκληρου σώματος μαθηματικών πάνω στη βάση της θεωρίας συνόλων. Εισήγαγε τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας συνόλων και της τοπολογίας, θεμελίωσε την ίδια τη θεωρία συνόλων, δημιούργησε μια από τις κατασκευές του συνόλου των πραγματικών αριθμών, επινόησε το διαγώνιο επιχείρημα, απέδειξε ότι το συνεχές δεν είναι αριθμήσιμο και ότι χώροι διαφορετικής διάστασης έχουν ίδια πληθικότητα, απέδειξε την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών, κατασκεύασε το τέλειο σύνολο του Cantor και την κλιμακωτή συνάρτηση Cantor· απόδειξε ότι δεν υπάρχει «μέγιστη» πληθικότητα, απέδειξε το θεμελιώδες θεώρημα μοναδικότητας για τις τριγωνομετρικές σειρές, και έθεσε το πρόβλημα του συνεχούς.

Η συμβολή του Cantor υπήρξε τόσο βασική και θεμελιώδης ώστε είναι δυνατόν να εξηγήσουμε τις κύριες έννοιές του σχεδόν σε κάθε άνθρωπο. (Στην ομιλία του στο μαθηματικό συνέδριο των Παρισίων, όπου διατύπωσε τα περίφημα προβλήματά του, ο Hilbert υποστήριξε: «Δικαιούμαστε να χαρακτηρίσουμε τέλεια μια μαθηματική θεωρία μόνο όταν ... μπορούμε να την εξηγήσουμε σχεδόν σε κάθε άνθρωπο». Όλες οι δημιουργίες του Cantor φέρουν αυτό το σημάδι τελειότητας.)

Θα προσπαθήσω να περιγράψω σχεδόν όλα τα κύρια επιτεύγματα του Cantor (με αρκετές μάλιστα λεπτομέρειες) σε λίγες σελίδες ενός περιοδικού που απευθύνεται και σε μαθητές λυκείου. Ελπίζω ότι τούτο το άρθρο θα επιβεβαιώσει το γεγονός ότι το βάθος των μαθηματικών αποτελεσμάτων δεν μετριέται πάντα με το μήκος του κειμένου και τη δυσκολία των αποδείξεων!

Ας προχωρήσουμε λοιπόν και ας μελετήσουμε την κληρονομιά του Cantor. Θα ξεκινήσουμε με το πιο θεμελιώδες επίτευγμά του.

Σύνολα και δομή των μαθηματικών

Στον Cantor οφείλουμε την εισαγωγή της έννοιας του «συνόλου» (ή «συλλογής») στα μαθηματικά. Αυτή ανήκει στην κατηγορία των πρωταρχικών, μη οριζόμενων, εννοιών. Μπορούμε μόνο να την ερμηνεύσουμε, να την εξηγήσουμε και να την παρουσιάσουμε μέσω παραδειγμάτων.

Ένα σύνολο, έγραψε ο Cantor, είναι μια συλλογή καθορισμένων, διακεκριμένων αντικειμένων που τα αντιλαμβανόμαστε ή τα σκεφτόμαστε ως μια ολότητα. Οι P.S. Alexandrov και A.N. Kolmogorov γράφουν σε ένα βιβλίο τους: «Για παράδειγμα, μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο όλων των ανθρώπων μέσα σε ένα δωμάτιο ή το σύνολο των χηνών που κολυμπούν σε μια λίμνη». Εύκολα μπορείτε να επεκτείνετε αυτόν τον κατάλογο των δυνατών συνόλων.

Ο Kolmogorov υποστηρίζει: «Στη βάση όλων των μαθηματικών βρίσκεται η καθαρή θεωρία των συνόλων.» Η δήλωσή του αντανακλά μια άποψη για τη δομή των μαθηματικών που την υπερασπίζονται πολλοί μαθηματικοί της γενιάς του. Αυτή η ιδεολογία είναι, κατά κύριο λόγο, πνευματικό παιδί του Cantor. Διατυπώθηκε ξεχωριστά από τους Hilbert και Weyl, ενώ αργότερα ενοποιήθηκε και αναπτύχθηκε με τη θεμελιακή εργασία μιας ομάδας γάλλων μαθηματικών που εμφανίζεται υπό το ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki.

Στο άρθρο του «Η αρχιτεκτονική των μαθηματικών»,* ο Bourbaki γράφει: «Η ουσιαστική εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης ... ενίσχυσε την ενότητα των τμημάτων της ... . Το τελικό αποτέλεσμα ήταν η τάση που συνήθως ονομάζεται "αξιωματική μέθοδος"». (Πολλοί εξέχοντες μαθηματικοί απορρίπτουν τον ισχυρισμό του Bourbaki και πιστεύουν ότι η αξιωματική μέθοδος οδηγεί σε αδιέξοδο δρόμο στην ιστορία των μαθηματικών. Αυτό το ενδιαφέρον ζήτημα όμως υπερβαίνει τα όρια ενός άρθρου αφιερωμένου στον Georg Cantor.) Κατά τον Bourbaki, τα μαθηματικά καταλήγουν σε *δομές* συνεχώς αυξανόμενης πολυπλοκότητας —δηλαδή σε σύνολα εφοδιασμένα με αλγεβρικές πράξεις, συστήματα υποσυνόλων, κ.ο.κ.

Αυτή η ιδέα μάς επαναφέρει στον κύριο χαρακτήρα της ιστορίας μας, τον Cantor, που ανέπτυξε τη θεωρία μιας από τις γνωστότερες δομές —του συστήματος των πραγματικών αριθμών.

Η θεωρία των πραγματικών αριθμών

Από την άποψη της αξιωματικής, το σύστημα των πραγματικών αριθμών είναι ένα *πλήρες, διατεταγμένο σώμα*. Διατεταγμένο σώμα είναι ένα σύνολο με δύο πράξεις —πρόσθεση ($a + b$) και πολλαπλασιασμό (ab)— και μια σχέση διάταξης ($a < b$), οι οποίες ικανοποιούν όλες τις βασικές ιδιότητες (αξιώματα) που έχουμε μάθει στο σχολείο: $a + b = b + a$, $a(b + c) = ab + ac$, «αν $a < b$ και $b < c$ τότε $a < c$», «το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός», κ.ο.κ. Οι περισσότεροι συγγραφείς χρησιμοποιούν λιγότερα από 20 τέτοια αξιώματα, η επιλογή των οποίων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ο όρος «πλήρες» σημαίνει ότι η δομή αυτή ικανοποιεί ένα άλλο εξαιρετικά σημαντικό αξίωμα (τοπολογικής φύσης) —το *αξίωμα πληρότητας*.

Την εποχή του Cantor η διατύπωση του ενός ή του άλλου αξιώματος πληρότητας αποτελούσε τη θεωρία των πραγματικών αριθμών αυτή καθ' εαυτήν, διότι συνεπαγόταν τις προηγούμενες αλγεβρικές ιδιότητες της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης. Τέτοια αξιώματα είχαν εισαγάγει (ευθέως ή κατ' ουσίαν) όλοι οι έξοχοι μαθηματικοί που θεμελίωσαν αυστηρά τον απειροστικό λογισμό —ο Cauchy, ο Bolzano, ο Dedekind, ο Weierstrass και ο Cantor.

ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ CANTOR (αξίωμα των κιβωτισμένων διαστημάτων). *Κάθε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων που το μήκος τους τείνει στο μηδέν έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο.*

Τώρα διαθέτουμε έναν ολοκληρωμένο κατάλογο αξιωμάτων για τους πραγματικούς αριθμούς. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο που ορίζεται από αυτό το σύστημα αξιωμάτων είναι, ουσιαστικά, μοναδικό (μέχρι ισομορφισμού). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο αντικείμενα που ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα, η οποία θα διατηρεί τις δύο αλγεβρικές πράξεις και τη διάταξη. Το αντικείμενο (μοναδικό σύμφωνα με την προηγούμενη έννοια) που περιγράφεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται σύστημα των πραγματικών αριθμών ή ευθεία των πραγματικών.

Ο Cantor αντιμετώπισε το πρόβλημα της κατασκευής του συστήματος των πραγματικών αριθμών όταν προσπάθησε να εφαρμόσει τη συνολοθεωρία του σε συγκεκριμένο πρόβλημα της άλγεβρας και της θεωρίας αριθμών —το πρόβλημα της ύπαρξης μη αλγεβρικών αριθμών (θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα).

Πρέπει επίσης να επισημά-

Ο Georg Cantor, γόνος γερμανού διπλωμάτη, γεννήθηκε το 1845 στην Αγία Πετρούπολη. Σχολείο πήγε στο Βερολίνο, ενώ σπούδασε μαθηματικά στη Ζυρίχη, στο Γκαίτινγκεν και στο Βερολίνο, όπου πήρε τον μεταπτυχιακό του τίτλο το 1867. Εγκαταστάθηκε στη Χάλλε και δίδαξε μαθηματικά στο τοπικό πανεπιστήμιο έως το 1913. Από το 1879 ήταν πρόεδρος του μαθηματικού τμήματος του πανεπιστημίου. Η εξαιρετικά παραγωγική σταδιοδρομία του διακόπηκε το 1897, όταν αρρώστησε σοβαρά. Πέθανε στη Χάλλε το 1918.

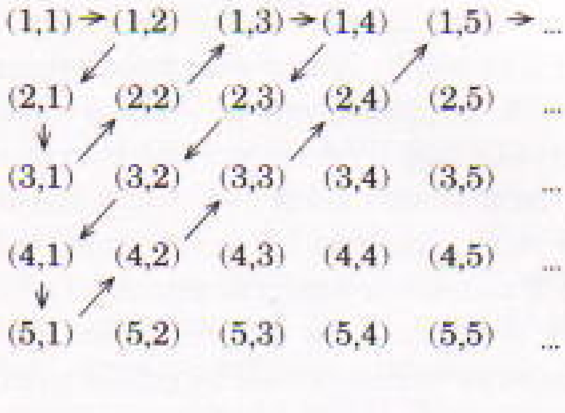
* Το αρχικό άρθρο υπάρχει στη συλλογή άρθρων που επιμελήθηκε ο F. Le Lionnais, Great Currents of Mathematical Thought, εκδόσεις Dover 1971. Επίσης υπάρχει ελληνική μετάφραση του από την αείμνηστη Μυρτώ Λευκοπούλου, στο περιοδικό *Διάσταση*, τεύχος 1, 1994. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

νουμε ότι ο Cantor έδωσε έναν ακόμη ορισμό των πραγματικών αριθμών —τους όρισε ως κατηγορίες ισοδύναμων βασικών ακολουθιών. Στην πραγματικότητα, αυτός επινόησε τον όρο «βασική ακολουθία».

Ας προχωρήσουμε όμως στο επόμενο θέμα.

Τα βασικά της θεωρίας συνόλων

Η σημαντικότερη έννοια στη θεωρία συνόλων είναι αναμφισβήτητα η έννοια του Cantor για τον πληθάριθμο (ή τον πληθικό αριθμό) ενός συνόλου. Γενικεύει την έννοια του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου. Δύο σύνολα ονομάζονται *ισοδύναμα* όταν υπάρχει μεταξύ τους μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία. Έτσι ο πληθάριθμος ορίζεται ως το κοινό χαρακτηριστικό των συνόλων που είναι ισοδύναμα. Ο Cantor έγραψε: «Ο πληθάριθμος ενός συνόλου είναι αυτό που απομένει στο πνεύμα μας όταν αφαιρέσουμε όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των στοιχείων και τη διάταξή τους». Ο μικρότερος άπειρος πληθάριθμος είναι αυτός του συνόλου των φυσικών αριθμών. Ο Cantor τη συμβόλισε ως $\aleph_0$ («άλεφ μηδέν», όπου άλεφ είναι το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου). Κάθε σύνολο πληθαρίθμου $\aleph_0$ ονομάζεται *αριθμήσιμο* —τα στοιχεία του είναι δυνατόν να απαριθμηθούν. Ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικών αριθμών που απαρτίζουν το διάστημα [0, 1] καλείται πληθάριθμος του συνεχούς και συμβολίζεται μερικές φορές με *c*.



Σχήμα 1

Ένα σκαρίφημα του διαγράμματος, χαραγμένο στην αναμνηστική στήλη που είναι αφιερωμένη στον Cantor και βρίσκεται στη Χάλλε.

Ο Cantor απέδειξε το επόμενο θεώρημα που αποτελεί τον πυρήνα της θεωρίας των συνόλων. Έδειξε ότι οι ακέραιοι είναι αριθμήσιμοι αν τους καταγράψουμε με τη μορφή του καταλόγου 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ... Όλα τα σύνολα που διευθετούνται σε έναν κατάλογο τέτοιας μορφής είναι ασφαλώς αριθμήσιμα, αφού μπορούμε να πούμε ότι το πρώτο στοιχείο τους αντιστοιχεί στον αριθμό 1, το δεύτερο στο 2, το τρίτο στο 3, κ.ο.κ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Το σύνολο των ζευγών φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

Πραγματικά, κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να αναλυθεί μονοσήμαντα σε γινόμενο μιας δύναμης του 2 και ενός περιττού αριθμού. Επομένως, ο τύπος $(m, n) \leftrightarrow 2^{m-1}(2n - 1)$ ορίζει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των ζευγών (m, n) (με m, n φυσικούς) και του συνόλου {1,2,3,...} των φυσικών αριθμών.

Μια διαφορετική μέθοδος απαρίθμησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ένα σύνολο που αποτελείται από την ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο.*

Όπως επισημάναμε, κάθε αριθμήσιμο σύνολο μπορεί να διευθετηθεί ως ένας άπειρος «κατάλογος». Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι γράφουμε σε έναν οριζόντιο κατάλογο το πρώτο αριθμήσιμο σύνολο, το δεύτερο σε έναν άλλο κατάλογο κάτω από το πρώτο, το τρίτο κάτω από το δεύτερο, κ.ο.κ. Ένα διάγραμμα που μοιάζει με αυτό του Σχήματος 1, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο απαρίθμησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Το συνεχές είναι μη αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να απαριθμηθεί το συνεχές. Κάθε σημείο του διαστήματος [0,1] μπορεί να παρασταθεί ως άπειρος δεκαδικός (για το μονοσήμαντο, οι πεπερασμένοι δεκαδικοί θα γράφονται με περίοδο το 9 —για παράδειγμα, 0,25 = 0,2499...9...).

Αφού είναι αριθμήσιμο το πλήθος των αριθμών στο τμήμα [0,1], τους γράφουμε σε έναν κατάλογο τον έναν κάτω από τον άλλο:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}x_{11}x_{12}\ldots x_{1n} \\
x_2 &= 0{,}x_{21}x_{22}\ldots x_{2n} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

όπου x_{ij} είναι ένα από τα ψηφία 0, 1, ..., 9, ενώ κανείς από αυτούς τους δεκαδικούς δεν καταλήγει σε μια αδιάκοπη σειρά μηδενικών. Θεωρούμε τον δεκαδικό $a = 0{,}y_1y_2\ldots y_n\ldots$, όπου $y_i = 1$ αν $x_{ii} \neq 1$ και $y_i = 2$ όταν $x_{ii} = 1$. (Αυτή είναι η κατασκευή που ονομάστηκε *διαγώνιο επιχείρημα ή μέθοδος του Cantor*.) Με βάση την υπόθεσή μας, ο αριθμός a πρέπει να έχει συγκεκριμένη θέση στην αρίθμησή μας —ας πούμε ότι $a = x_N$. Τότε όμως, $a = 0{,}x_{N1}x_{N2}\ldots x_{NN}\ldots$, κάτι που είναι αδύνατο διότι, από την κατασκευή μας, το N-οστό ψηφίο του a είναι $y_N \neq x_{NN}$. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το θεώρημα.

Το διαγώνιο επιχείρημα έχει γίνει ένα σημαντικό και ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στις μαθηματικές αποδείξεις. Για παράδειγμα, οι αποδείξεις δύο αξιοσημείωτων θεωρημάτων —το θεώρημα του Sousline σχετικά με την ύπαρξη μιας νέας κατηγορίας συνόλων (των A-συνόλων) και το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel— βασίζονται στο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.

Θα συναγάγουμε ένα σημαντικό πόρισμα αυτού του θεωρήματος. Ένας πραγματικός αριθμός καλείται *αλγεβρικός* όταν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Ένα παράδειγμα είναι ο αριθμός $\sqrt{2}$ —η ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$. Οι μη αλγεβρικοί αριθμοί καλούνται *υπερβατικοί*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί.*

Ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού (με ακέραιο «συντελεστή») είναι ένας ακέραιος, και αυτό το σύνολο πολυωνύμων είναι βέβαια αριθμήσιμο. Ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού είναι της μορφής $ax + b$ και καθορίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος ακεραίων (a, b). Επομένως, το σύνολο των πρωτοβάθμιων πολυωνύμων είναι αριθμήσιμο (από το Θεώρημα 2).

Ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο είναι της μορφής $ax^2 + bx + c$ και καθορίζεται από τη διατεταγμένη τριάδα ακεραίων (a, b, c). Ή, μπορούμε να πούμε ότι καθορίζεται από τον αριθμό a και το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $bx + c$. Άρα το σύνολο των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων καθορίζεται από διατεταγμένα ζεύγη που τα στοιχεία τους (ένας ακέραιος και ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο) ανήκουν σε αριθμήσιμα σύνολα. Μπορούμε λοιπόν να τα τοποθετήσουμε όπως στο Σχήμα 1, και να διαπιστώσουμε ότι είναι αριθμήσιμα.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα τριτοβάθμια, τα τεταρτοβάθμια, τα πεμπτοβάθμια, ... πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμα. Επομένως, το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων, και άρα (βάσει του πορίσματος του Θεωρήματος 1) αριθμήσιμο.

Ο Cantor απέδειξε κάπως διαφορετικά αυτό το θεώρημα. Ας υποθέσουμε ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι και ότι μπορούμε να τους καταγράψουμε σε έναν κατάλογο. Παίρνουμε τον πρώτο αριθμό και βρίσκουμε ένα διάστημα που δεν τον περιέχει. Παίρνουμε τον δεύτερο αριθμό και βρίσκουμε ένα διάστημα μέσα στο πρώτο που δεν περιέχει τον δεύτερο αριθμό. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων φροντίζοντας επιπλέον το μήκος τους να τείνει στο μηδέν. Βάσει του αξιώματος του Cantor, αυτά έχουν ένα κοινό σημείο που πρέπει να είναι υπερβατικός αριθμός, αφού δεν συμπίπτει, εκ κατασκευής, με κανέναν από τους προηγούμενους.

Με την ίδια μέθοδο (χωρίς χρήση της διαγώνιας μεθόδου) μπορεί να αποδειχθεί η μη αριθμησιμότητα του συνεχούς.

Η πρώτη κατασκευή συγκεκριμένου υπερβατικού αριθμού δόθηκε από τον Liouville το 1844, ο οποίος απέδειξε ότι ο αριθμός $10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots$ είναι υπερβατικός. Πολλοί μαθηματικοί εσφαλμένα αντιπαραθέτουν την «κατασκευαστική» λύση του Liouville στο θεώρημα «καθαρής ύπαρξης» του Cantor. Αυτή η αντίθεση όμως είναι ψευδής. Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που θα «υπολογίζει» βήμα-βήμα έναν υπερβατικό αριθμό. Λεπτομέρειες μπορείτε να βρείτε στο άρθρο "George Cantor and Transcendental Numbers" (Ο George Cantor και οι υπερβατικοί αριθμοί) του Robert Gray (στο *American Mathematical Monthly*, Νοέμβριος 1994, 819-32).

Το επόμενο θεώρημα προκάλεσε αίσθηση στην εποχή του. Δεν είναι φανερό ότι υπάρχουν «περισσότερα» σημεία σε ένα τετράγωνο απ' ό,τι σε ένα ευθύγραμμο τμήμα; Για πολύ καιρό και ο Cantor πίστευε ότι ο πληθάριθμος ενός τετραγώνου είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο ενός ευθύγραμμου τμήματος. Αλλά αργότερα, προς μεγάλη του έκπληξη, ανακάλυψε ότι τα πράγματα δεν είναι έτσι. Εξέφρασε την κατάπληξή του σε ένα γράμμα του προς τον Dedekind. Η επιστολή —είναι γραμμένη, φυσικά, στα γερμανικά— περιέχει μια γαλλική φράση: «Je le vois, mais je ne crois pas!» (Το βλέπω, αλλά δεν το πιστεύω!)

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. *Το σύνολο I των σημείων του διαστήματος $[0,1]$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο I^2 των σημείων του τετραγώνου $\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.*

Απόδειξη. Χωρίζουμε τη δεκαδική αναπαράσταση ενός αριθμού που ανήκει στο I σε τμήματα που αποτελούνται, εξ ορισμού, από ένα σημαντικό (μη μηδενικό) ψηφίο μαζί με όλα τα προηγούμενα από αυτό μηδενικά ψηφία. (Σε ό,τι αφορά την αναπαράσταση των πεπερασμένων δεκαδικών αναπτυγμάτων, εφαρμόζουμε την ίδια σύμβαση όπως στο Θεώρημα 2.) Για παράδειγμα, ο αριθμός 0,0032050007... διαμερίζεται στα τμήματα {003}{2}{05}{0007}... . Τα τμήματα θα συμβολίζονται με b_i και c_i. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ δεκαδικών και ακολουθιών τμημάτων από ψηφία. Ας πάρουμε ένα ζεύγος (x, y) του I^2. Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη του συντεταγμένη $x = 0{,}x_1x_2\dots$ αντιστοιχεί στην ακολουθία των τμημάτων $0{,}b_1b_2\dots$ και ότι η δεύτερη συντεταγμένη $y = 0{,}y_1y_2\dots$ αντιστοιχεί στην ακολουθία των τμημάτων $0{,}c_1c_2\dots$. Θεωρούμε τώρα τη μικτή ακολουθία τμημάτων $0{,}b_1c_1b_2c_2\dots$ που αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό αριθμό z του I. Αντίστροφα, η αντίθετη διαδικασία «αποχωρισμού τμημάτων» μάς επιτρέπει να βρούμε για κάθε z που ανήκει στο I το αντίστοιχο σημείο (x, y) του I^2. Έτσι, έχουμε μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του τετραγώνου και του ευθύγραμμου τμήματος, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. *Ο πληθάριθμος του συνόλου όλων των υποσυνόλων ενός δεδομένου συνόλου είναι μεγαλύτερη από την πληθάριθμο του δεδομένου συνόλου.*

Πρέπει πρώτα απ' όλα να εξηγήσουμε τι σημαίνει η φράση «ο πληθάριθμος του συνόλου Y είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του συνόλου X». Σημαίνει ότι το X είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του Y, αλλά κανένα υποσύνολο του X δεν είναι ισοδύναμο με το Y. (Ο Cantor ήθελε πολύ να αποδείξει πως όταν το X είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του Y και το Y είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του X, τότε τα X και Y είναι ισοδύναμα. Ανακάλυψε μια απόδειξη, αλλά εν τω μεταξύ το θεώρημα είχε ήδη αποδειχθεί από τον Felix Bernstein. Σήμερα ονομάζεται θεώρημα του F. Bernstein.)

Ας αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 5. Έστω X το δεδομένο σύνολο και S το σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Το σύνολο X είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των μονομελών υποσυνόλων του X, που είναι υποσύνολο του S. Άρα, απομένει να δείξουμε ότι το S δεν είναι ισοδύναμο με το X.[1]

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα. Τότε υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία και στα υποσύνολα του X. Συμβολίζουμε με $A(x)$ το υποσύνολο που αντιστοιχεί στο στοιχείο x. Το x λοιπόν είναι ένα στοιχείο και το $A(x)$ είναι ένα σύνολο, επομένως το x είτε είναι στοιχείο του $A(x)$ είτε δεν είναι στοιχείο του $A(x)$. Θα ονομάζουμε «καλό» ένα στοιχείο x όταν ανήκει στο $A(x)$, και «κακό» στην αντίθετη περίπτωση. Τότε, κάθε στοιχείο του X είναι ή καλό ή κακό.

Ας θεωρήσουμε τώρα το υποσύνο-

1. Εδώ χρησιμοποιούμε έμμεσα το θεώρημα του F. Bernstein.

λο του X που αποτελείται από όλα τα κακά στοιχεία του X. Το υποσύνολο αυτό πρέπει να αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο ξ. Αυτό το στοιχείο είναι καλό ή κακό; Λοιπόν, αν είναι καλό, τότε $\xi \in A(\xi)$ —πράγμα που σημαίνει ότι το ξ είναι κακό. Επομένως το ξ δεν μπορεί να είναι καλό. Είναι δυνατόν να είναι κακό; Αν είναι κακό, τότε $\xi \in A(\xi)$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το ξ είναι καλό! Επομένως, η παραδοχή μας ότι υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του X και των υποσυνόλων του X μας οδηγεί σε αντίφαση.

Ας εξετάσουμε τώρα μερικές ακόμη έννοιες που εισήγαγε ο Cantor και κάποιες από τις κατασκευές του.

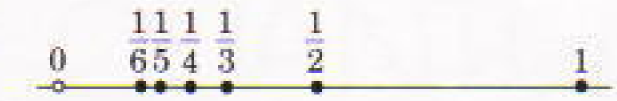
Τοπολογία και κατασκευές

Ο Cantor έθεσε τα θεμέλια της γενικής τοπολογίας. Όρισε τις σημαντικότερες έννοιές της για την περίπτωση της ευθείας γραμμής, εμείς όμως είναι προτιμότερο να τις εξετάσουμε στη γενικότερη μορφή τους.

Έστω X ένα σύνολο και τ ένα συγκεκριμένο σύστημα υποσυνόλων του. Το ζεύγος (X, τ) ονομάζεται *τοπολογικός χώρος* όταν η τομή πεπερασμένου πλήθους και η ένωση οποιουδήποτε πλήθους συνόλων του τ ανήκουν στο τ. Τα σύνολα του τ ονομάζονται *ανοικτά* σύνολα, και κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το στοιχείο $x \in X$ ονομάζεται περιοχή του x. (Η έννοια του τοπολογικού χώρου αποκρυσταλλώθηκε στις αρχές του αιώνα μας και πήρε την τελική της μορφή στο έργο του Hausdorff.)

Ακολουθούν οι ορισμοί μερικών βασικών τοπολογικών εννοιών.

Ένα σημείο x ενός τοπολογικού χώρου είναι *οριακό σημείο* του συνόλου A (Σχήμα 2) αν κάθε περιοχή του x περιέχει ένα σημείο του A διαφορετικό από το x. Ένα σύνολο που περιέχει όλα τα οριακά του σημεία ονομάζεται *κλειστό*. Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A είναι το *παράγωγο* σύνολο του A. Ένα σύνολο που συμπίπτει με το σύνολο των οριακών του σημείων ονομάζεται *τέλειο*. Το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία του A και τα οριακά του σημεία είναι η *κλειστή θήκη* του A. Θα λέμε ότι ένα σύνολο είναι *παντού*



Σχήμα 2

Το σύνολο $A = \{1/n \mid n \geq 1\}$, που έχει οριακό σημείο το 0. Το παράγωγο σύνολο αποτελείται μόνο από το 0. Το $A \cup \{0\}$ είναι κλειστό.

πυκνό σε ένα ανοικτό σύνολο όταν η τομή της κλειστής θέσης του με το ανοικτό σύνολο συμπίπτει με αυτό. Και όταν δεν υπάρχει κάποιο ανοικτό σύνολο στο οποίο να είναι παντού πυκνό, θα λέμε ότι το σύνολο δεν είναι *πουθενά πυκνό*.

Οι μαθηματικοί εξοικειώνονται με αυτές τις έννοιες από την αρχή των σπουδών τους, και αυτό καμιά φορά δημιουργεί την εσφαλμένη εντύπωση ότι υπήρχαν πάντα. Και όμως, όχι. Προέρχονται όλες από έναν άνθρωπο —τον Georg Cantor.

Ας περιγράψουμε τώρα δύο αξιοσημείωτες κατασκευές του Cantor.[2]

Παίρνουμε το μοναδιαίο διάστημα I και αποκόπτουμε το μεσαίο τμήμα του με μήκος $1/3$ (με άλλα λόγια, το διάστημα $(1/3, 2/3)$). Απομένουν τα δύο τμήματα $[0, 1/3]$ και $[2/3, 1]$. Εκτελούμε και στα δύο μια παρόμοια πράξη (αφαίρεση του μεσαίου τρίτου). Έτσι καταλήγουμε με τέσσερα τμήματα, και επαναλαμβάνουμε το ίδιο με καθένα από αυτά. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον. Τι απομένει στο τέλος; Αποδεικνύεται ότι το υπόλειμμα είναι συγχρόνως μεγάλο και μικρό. Το σύνολο που απομένει είναι τέλειο, πουθενά πυκνό, και έχει την πληθικότητα του συνεχούς. Από την άλλη πλευρά, μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων με συνολικό μήκος οσοδήποτε μικρό (λέμε ότι τα σύνολα με αυτήν την ιδιότητα έχουν μέτρο μηδέν). Το αξιοπρόσεκτο αυτό σύνολο που δημιουργήσαμε ονομάζεται *σύνολο Cantor*.

Για αρκετό καιρό τέτοια σύνολα θεωρούνταν τέρατα που ήταν αδύνατον να εμφανιστούν στον κλασικό απειροστικό λογισμό. Αποδείχτηκε όμως ότι δεν είναι έτσι. Τέτοια σύνολα προέκυψαν στα περισσότερα κλασικά προβλήματα της μηχανικής, ακόμη και στις εργασίες του Poincaré! (Στις μέρες μας, πολλοί έχουν πειστεί ότι στην «πραγματική ζωή» τα μόνα που συναντάμε είναι «τέρατα». Αυτό όμως είναι ένα άλλο ζήτημα που δεν μπορώ να το θίξω σε αυτό το άρθρο.)

Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $C(x)$ επί του I ως εξής. Για κάθε x που ανήκει στο πρώτο διάστημα που αφαιρούμε (το $(1/3, 2/3)$) θέτουμε $C(x) = 1/2$.

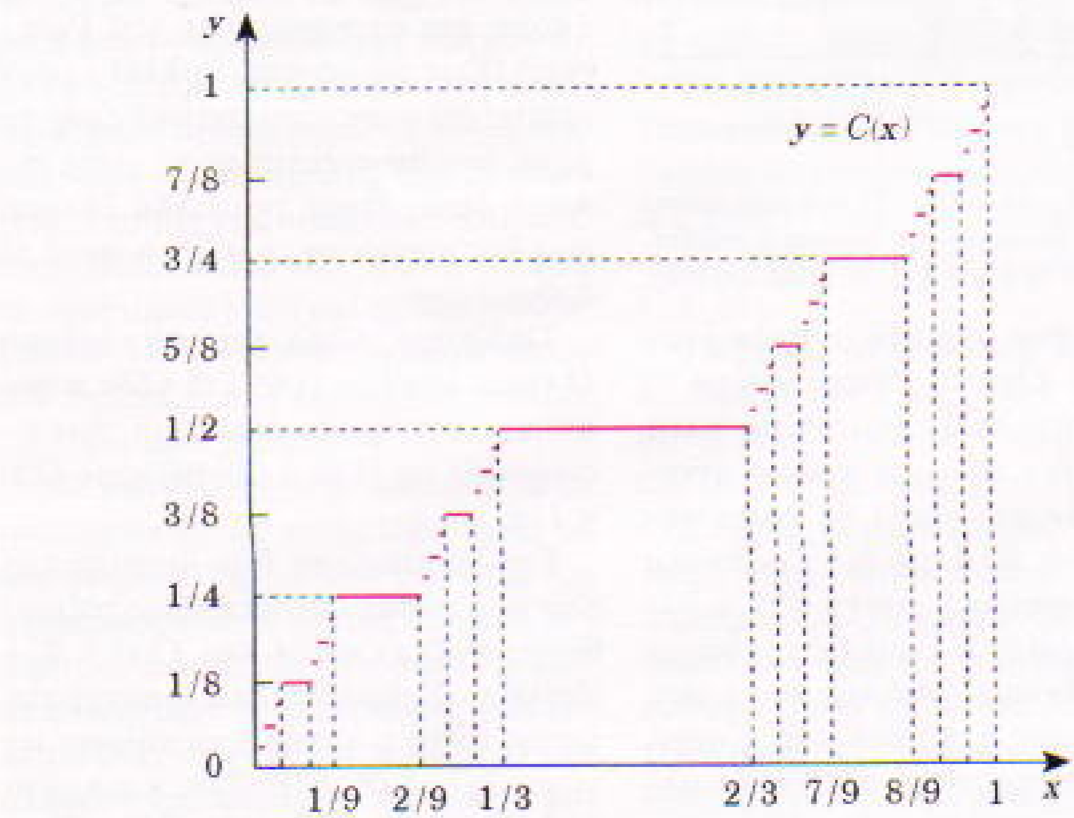
Για τα επόμενα δύο διαστήματα που αφαιρούμε (τα «δεύτερης τάξης») θέτουμε $C(x) = 1/4$ και $C(x) = 3/4$ (δείτε το Σχήμα 3). Στα διαστήματα τρίτης τάξης η συνάρτηση παίρνει τις τιμές $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$, κ.ο.κ. για κάθε διάστημα ανώτερης τάξης. Έτσι ορίζεται η συνάρτησή μας σε όλα τα διαγραμμένα διαστήματα. Στο ίδιο το σύνολο Cantor, η συνάρτηση ορίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε να διατηρείται η συνέχειά της. Η $C(x)$ ονομάζεται *κλιμακωτή συνάρτηση Cantor*. Είναι μονότονη και (για όσους γνωρίζουν αυτή την έννοια του απειροστικού λογισμού) έχει παράγωγο σε όλα τα διαγραμμένα διαστήματα, που έχουν συνολικό μήκος 1 (η παράγωγος ισούται με μηδέν σε κάθε διαγραμμένο διάστημα).

Φυσικά, απέχουμε πολύ από το να καλύψουμε πλήρως την κληρονομιά αυτού του εξαιρετικού λογίου. (Μια θεωρία που ούτε καν τη θίξαμε είναι η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών. Μπορείτε να διαβάσετε σχετικά σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας συνόλων.) Πάντως, πιστεύω ότι σε τούτο το άρθρο καλύφθηκαν οι σημαντικότερες περιοχές του έργου του Cantor.

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Αν δεν το έχετε ήδη πράξει, θα ήθελα να σας συμβουλέψω να διαβάσετε το βιβλίο του Cantor για τη θεωρία συνόλων. Θα αναφερθώ μια ακόμη φορά στον P.S. Alexandrov. Γράφει ότι τα έργα του Cantor ήταν ανάμεσα στα πρώτα μαθηματικά κείμενα που διάβασε κατά τη νεότητά του. Η εντύπωση που του έκαναν ήταν αξέχαστη. Εκφράζει την ελπίδα να μελετηθούν με ενθουσιασμό «και να βοηθήσουν τους νέους ανθρώπους

2. Αυτές οι κατασκευές έχουν ήδη παρουσιαστεί στο *Quantum* —δείτε το «Πέταλο του Smale» στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1995 για περισσότερα σχόλια και εφαρμογές.



Σχήμα 3

Τα πρώτα τέσσερα βήματα της κατασκευής του συνόλου Cantor. Η C(x) είναι η κλιμακωτή συνάρτηση Cantor. Το άθροισμα του μήκους όλων των διαγραμμένων τμημάτων ισούται με το μήκος ολόκληρου του διαστήματος: $1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = (1/3)/(1 - 2/3) = 1$.

που δείχνουν ενδιαφέρον και ταλέντο στα μαθηματικά». Το ίδιο ακριβώς ελπίζω και εγώ.

Η ζωή του Georg Cantor ήταν από πολλές απόψεις τραγική. Από την αρχή της έρευνάς του έθεσε το *πρόβλημα του συνεχούς*: ήθελε ολόψυχα να αποδείξει ότι δεν υπάρχουν άλλοι πληθάριθμοι μεταξύ του $\aleph_0$ και του πληθάριθμου του συνεχούς.

Μερικές φορές πίστεψε ότι είχε φτάσει στον τόσο επιθυμητό στόχο —για να ανακαλύψει στη συνέχεια ότι έκανε λάθος. Η λύση του προβλήματος του συνεχούς (το πρώτο στον κατάλογο των προβλημάτων που έθεσε ο David Hilbert ως πρόκληση προς τους μαθηματικούς του 20ού αιώνα) από τους Gödel και Cohen είναι ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα του αιώνα μας. Αποδείχτηκε ότι η εικασία του συνεχούς δεν είναι δυνατόν ούτε να αποδειχθεί το ίδιο ούτε η άρνησή του.

Πολλοί παράγοντες, όπως η ένταση του προγράμματος της δουλειάς του, η ανικανότητα πολλών μαθηματικών να διακρίνουν τη σημασία των αποτελεσμάτων του και η αδυναμία του να επιλύσει το πρόβλημα του συνεχούς, οδήγησαν τον Cantor σε κατάσταση σοβαρής κατάθλιψης. Πέθανε σε νευρολογική κλινική, στη Χάλλε της Γερμανίας, στις 6 Ιανουαρίου του 1918. Ας είναι αυτό ένα μάθημα για τους νέους επιστήμονες —προσέξτε τον εαυτό σας!

Ο Cantor δεν έζησε για να δει την παγκόσμια αναγνώριση των ιδεών του. Αυτό συνέβη κατά τη δεκαετία του 1920. Η απότομη ανάπτυξη των μαθηματικών μετά από τον Α' Παγκόσμιο πόλεμο, η πρόοδος της τοπολογίας και της συναρτησιακής ανάλυσης και, γενικότερα, η αναθεώρηση της ίδιας της ουσίας των μαθηματικών με τις εργασίες των Hilbert, Weyl, Bourbaki, και πολλών άλλων —ήταν συνέπειες της επανάστασης του Cantor.

Russell Stannard

Ο Θείος Αλβέρτος και ο κόσμος των κβάντων

Πρόκειται για την πιο πρόσφατη —και πιο ελκυστική— περιπέτεια του διάσημου επιστήμονα, του *Θείου Αλβέρτου*. Μπείτε μαζί με την ανιψιά του, την Αλίκη Νοητού, στη μυστηριώδη φυσαλίδα σκέψης του *Θείου Αλβέρτου*, και συνοδέψτε τη στην απίστευτη περιπλάνησή της στον κόσμο των κβάντων. Πιείτε μαζί της το μαγικό ποτό που σε συρρικνώνει, και γνωρίστε από κοντά το μικροσκοπικό σύμπαν των κουάρκ και των ηλεκτρονίων. Βοηθήστε την Αλίκη και τον Άσπρο Κούνελο να εξερευνήσουν τη θαυμαστή χώρα του φωτός και της ύλης, όπου τίποτε δεν είναι όπως φαίνεται. Ακόμη και σήμερα, οι επιστήμονες δεν μπορούν να εξηγήσουν τις ανακαλύψεις τους! Ποιος θα λύσει , λοιπόν, τους κβαντικούς γρίφους; Μήπως εσείς; Καλού-κακού όμως προσέχετε τη Βασίλισσα Κούπα, γιατί μπορεί να σας κόψει το κεφάλι μέχρι να πείτε κύμινο.

Σελ.: 144, 2.900 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ *κάτοπτρο*

Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα, τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

Το βουνό που καπνίζει

Γιατί ο αέρας είναι πάντα θερμότερος στην υπήνεμη πλευρά;

Ivan Vorobyov

—Αύριο θα έχουμε θαυμάσιο καιρό! είπα. Ο αξιωματικός δε μίλησε —μου έδειξε μόνο το ψηλό βουνό που υψώνεται απέναντί μας.

—Ποιο είναι αυτό το βουνό; ρώτησα εγώ.

—Το Γκουντ —έτσι το λένε.

—Και λοιπόν;

—Κοιτάξτε τον καπνό που βγαίνει.

Και πραγματικά, το Γκουντ κάπνιζε. Στις πλαγιές του σερνόντουσαν λουρίδες από ελαφρά σύννεφα μ' ένα μαύρο σύννεφο κατακόρυφα που έμοιαζε στο σκοτεινό ουρανό σαν λεκές.

Μιχαήλ Λέρμαντωφ,
Ένας ήρωας του καιρού μας
(Μετάφρ.: Ανδρέας Σαραντόπουλος,
Σ. Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1985.)

Όταν οι ταξιδιώτες περνούν την κορυφογραμμή ενός ψηλού βουνού στην κατεύθυνση που φυσά ο άνεμος —δηλαδή από την προσήνεμη πλευρά στην υπήνεμη—, αντιλαμβάνονται αμέσως την αλλαγή του καιρού. Καθώς σκαρφαλώνουν στην κορυφή, βρίσκονται ανάμεσα σε σύννεφα, αν όχι σε βροχή ή χιόνι, αλλά πέρα από την κορυφογραμμή ο καιρός καλυτερεύει —ούτε ένα σύννεφο στον ουρανό—, και ο άνεμος φυσάει απαλός, ζεστός και ξηρός. (Τέτοιου τύπου άνεμοι, που πρωτομελετήθηκαν στα ορεινά συγκροτήματα των Άλπεων, ονομάζονται φοέν*). Γιατί αλλάζει δραστικά ο καιρός; Και με ποιον τρόπο θερμαίνεται ο αέρας; Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά, ας δούμε τι συμβαίνει όταν υγρός άνεμος συναντά στην πορεία του την κορυφογραμμή ενός υψηλού βουνού.[1]

Αφού συγκρουστεί με το βουνό, το ρεύμα αέρα αρχίζει να ανέρχεται στην πλαγιά. Έτσι, κάθε μάζα αέρα κινείται προς περιοχές χαμηλότερης πίεσης, με αποτέλεσμα να αυξάνει ο όγκος που καταλαμβάνει η εν λόγω μάζα. Ως πρώτη προσέγγιση μπορούμε να παραβλέψουμε την ανταλλαγή θερμότητας ανάμεσα στην αέρια μάζα και τα υπόλοιπα στρώματα αέρα, και να θεωρήσουμε αδιαβατική την εκτόνωσή της. Κατά την εκτόνωση αυτή, λοιπόν, το μηχανικό έργο παράγεται εις βάρος της εσωτερικής ενέργειας του αέρα, γεγονός που συνεπάγεται μείωση της θερμοκρασίας του.

Ας δούμε ακόμη τι συμβαίνει με την υγρασία, καθώς ο αέρας ανέρχεται προς την κορυφή του βουνού. Γνωρίζουμε ότι η τάση κορεσμένων ατμών μειώνεται ανάλογα με τη θερμοκρασία. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το υψόμετρο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η συμπύκνωση υδρατμών, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μεγάλο πλήθος σταγονιδίων που αιωρούνται στον αέρα —δηλαδή σύννεφα ή ομίχλη.

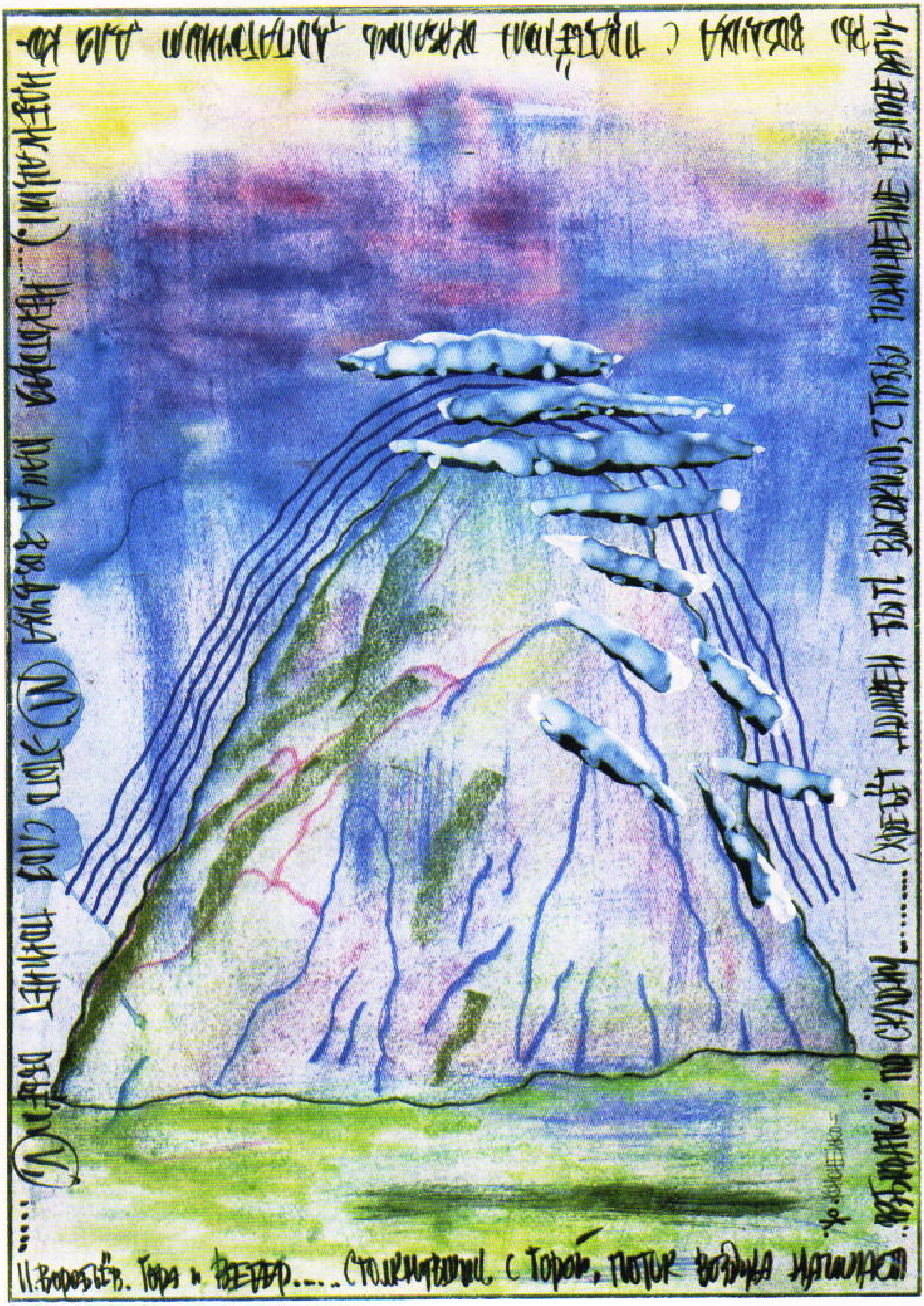
Κατά τη διαδικασία της συμπύκνωσης απελευθερώνεται η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης. Αυτή η ενέργεια δεν είναι καθόλου αμελητέα: στους 18°C, κάθε χιλιόγραμμο ατμού που συμπυκνώνεται σε νερό απελευθερώνει περίπου $2{,}5 \cdot 10^6$ J. Εξαιτίας αυτής της ενέργειας, η θερμοκρασία του ανερχόμενου υγρού αέρα μειώνεται πιο αργά απ' ό,τι θα μειωνόταν αν ο αέρας ήταν ξηρός.

Εάν τα σύννεφα που δημιουργούνται με την άνοδο των αερίων μαζών διασχίσουν την κορυφογραμμή χωρίς να χάσουν ούτε μία σταγόνα νερού, τότε, στη διάρκεια της καθόδου τους στην υπήνεμη πλευρά, καθώς η θερμοκρασία θα αυξάνεται, οι σταγόνες νερού θα εξατμιστούν· και τούτο απαιτεί κατανάλωση ίσου ποσού ενέργειας με αυτό που απελευθερώθηκε κατά την άνοδο. Έτσι, στους πρόποδες της υπήνεμης πλευράς του βουνού ο αέρας θα έχει την ίδια θερμοκρασία και υγρασία που είχε και στους πρόποδες της προσήνεμης πλευράς.

Ωστόσο, αν η κορυφογραμμή είναι αρκετά ψηλή, μια σημαντική ποσότητα νερού θα κατακρημνιστεί ως ομίχλη, βροχή ή χιόνι. Έτσι, ο αέρας καθώς θα κατέρχεται στην υπήνεμη πλευρά θα είναι πιο ξηρός, και η θερμοκρασία του θα αυξάνεται πιο γρήγορα, σε σχέση με τη μείωση κατά την άνοδό του, όταν ήταν υγρός. (Φυσικά,

* Στην Ελλάδα τον ονομάζουμε λίβα. (Σ.τ.ε.)

1. Δείτε και το άρθρο «Σχηματισμός νεφών», στο τεύχος Μαρτ./Απρ. 1995.


Н. Воробьёв. Гора и Ветер..... Столкнувшись с горой, поток воздуха начинает
„взбираться" по склону........ (Хочется думать, что гора должна быть высокой, чтобы понижение температуры воздуха с подъёмом оказалось достаточным для конденсации.)....Некоторая масса воздуха (M) этого слоя покинет объём (V).....

για νά 'χουμε ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα στην κορυφή του βουνού, πρέπει αυτό να είναι αρκετά υψηλό ώστε η θερμοκρασία να είναι επαρκώς χαμηλή). Επομένως, σε ίδιο υψόμετρο, η θερμοκρασία του αέρα θα είναι μεγαλύτερη στην υπήνεμη πλευρά του βουνού απ' ό,τι στην προσήνεμη.

Ας εκτιμήσουμε τώρα και ποσοτικά την εν λόγω διαφορά θερμοκρασίας. Θα θεωρήσουμε ένα καμπυλωμένο στρώμα αέρα που εκτείνεται από την προσήνεμη στην υπήνεμη πλαγιά· οι παράπλευρες έδρες του είναι παράλληλες προς τη διεύθυνση κίνησης του ανέμου και οι βάσεις του, που βρίσκονται εκατέρωθεν της κορυφογραμμής, είναι κάθετες σ' αυτήν. Σε μικρό χρονικό διάστημα, μια δεδομένη μάζα M του στρώματος θα εγκαταλείψει όγκο V_1 στην προσήνεμη πλευρά στους πρόποδες του βουνού, όπου η θερμοκρασία είναι T_1 και η πίεση P_1, και θα καταλάβει νέο όγκο V_2, σε θερμοκρασία T_2 και πίεση P_2, σε ίδιο υψόμετρο στην υπήνεμη πλευρά. (Εδώ θεωρούμε ότι σε κάθε σταθερή θέση, η θερμοκρασία του αέρα, η πίεση και η ταχύτητά του δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι σε ίσα χρονικά διαστήματα από οποιαδήποτε τομή του στρώματος διέρχεται η ίδια ποσότητα αέρα.)

Γνωρίζετε ότι η εσωτερική ενέργεια ενός mole μονοατομικού αερίου σε θερμοκρασία T είναι $(3/2)RT$. Ο αέρας συνίσταται βασικά από διατομικά μόρια οξυγόνου και αζώτου. Για διατομικό αέριο, η εσωτερική ενέργεια ανά mole είναι $(5/2)RT$. Η μεταβολή, λοιπόν, στην εσωτερική ενέργεια του στρώματος αέρα είναι

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1),$$

όπου μ είναι η γραμμομοριακή μάζα του αέρα και M/μ ο αριθμός moles του αέρα.

Ας υπολογίσουμε τώρα το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση της μάζας από τη μια θέση στην άλλη. Καθώς κατέρχεται στην υπήνεμη πλευρά, ο άνεμος παράγει θετικό έργο P_2V_2 εκδιώκοντας τον αέρα που καταλάμβανε προηγουμένως τον όγκο V_2 υπό πίεση P_2. Στην προσήνεμη πλευρά, ο άνεμος παράγει αρνητικό έργο $-P_1V_1$ μετατοπίζοντας τον αέρα που καταλάμβανε όγκο V_1 υπό πίεση P_1. Το ολικά παραγόμενο έργο θα είναι:

$$W = P_2V_2 - P_1V_1.$$

Με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων, $PV = \left(\frac{M}{\mu}\right)RT$, προκύπτει:

$$W = \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

(Αφού οι όγκοι V_1 και V_2 είναι στο ίδιο υψόμετρο, η δυναμική ενέργεια του αέρα είναι η ίδια και στην αρχική και στην τελική θέση.)

Θα υποθέσουμε ότι το βουνό είναι αρκετά ψηλό ώστε κατά την άνοδο της μάζας αέρα στην προσήνεμη πλευρά, σχεδόν όλοι οι υδρατμοί να συμπυκνώνονται και να κατακρημνίζονται ως βροχή. Αν Δm είναι η μάζα των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων, τότε η θερμότητα που απελευθερώνεται κατά τη συμπύκνωση θα είναι $Q = L\Delta m$ (όπου L η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης). Σύμφωνα με τον Πρώτο Νόμο της θερμοδυναμικής θα ισχύει:

$$Q = \Delta U + W.$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της Q. Η ειδική θερμότητα των υδρατμών μεταβάλλεται ασθενώς με τη θερμοκρασία, οπότε μπορούμε να τη θεωρούμε σταθερή. Έστω ότι η μερική πίεση των υδρατμών που περιέχονται στην αέρια μάζα είναι P, η δε μάζα τους Δm. Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση,

$$PV_1 = \frac{\Delta m}{\mu_0}RT_1, \text{ και } P_1V_1 = \frac{M}{\mu}RT_1,$$

όπου μ_0 η γραμμομοριακή μάζα του νερού. Διαιρώντας κατά μέλη, εύκολα βρίσκουμε:

$$\Delta m = M\frac{\mu_0 P}{\mu P_1}.$$

Έτσι,

$$Q = LM\frac{\mu_0 P}{\mu P_1}.$$

Στην προηγούμενη θεώρηση υποθέσαμε ότι την κορυφογραμμή θα τη διασχίζει ολόκληρη η μάζα M του αέρα, που καταλαμβάνει όγκο V_1 —δηλαδή παραβλέψαμε την αλλαγή μάζας εξαιτίας της βροχόπτωσης. Η παραπάνω σχέση για τη Δm δείχνει ότι αυτή η απλούστευση είναι αποδεκτή: μ_0 = 18 g/mole, μ = 29 g/mole, $P \ll P_1$ (για παράδειγμα, αν η υγρασία είναι 50%, η θερμοκρασία 18°C, η πίεση $P_1 = 10^5$ N/m², η πίεση των ατμών είναι $P \cong 0{,}01 \cdot 10^5$ N/m²)· επομένως, $\Delta m \ll M$.

Έτσι, ο Πρώτος Νόμος της θερμοδυναμικής λαμβάνει τη μορφή:

$$LM\frac{\mu_0 P}{\mu P_1} = \frac{5}{2}\frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1) + \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1),$$

που απλουστεύεται στη μορφή:

$$L\mu_0\frac{P}{P_1} = \frac{7}{2}R(T_2 - T_1).$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ο τύπος για την αύξηση της θερμοκρασίας:

$$T_2 - T_1 = \frac{2}{7}\frac{L\mu_0 P}{RP_1}.$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές $P_1 = 10^5$ N/m², $P = 0{,}01 \cdot 10^5$ N/m², $L = 2{,}5 \cdot 10^6$ J/kg, R = 8,3 J/mole · K και μ_0 = 18g/mole στον τύπο αυτό, παίρνουμε: $T_2 - T_1 \cong$ 15°C! Αυτή είναι η διαφορά στη θερμοκρασία του αέρα, μεταξύ της προσήνεμης και της υπήνεμης πλευράς ενός υψηλού βουνού!

Οι ορεσίβιοι και οι λάτρες της ορειβασίας μπορούν εύκολα να εξακριβώσουν αυτό το γεγονός.

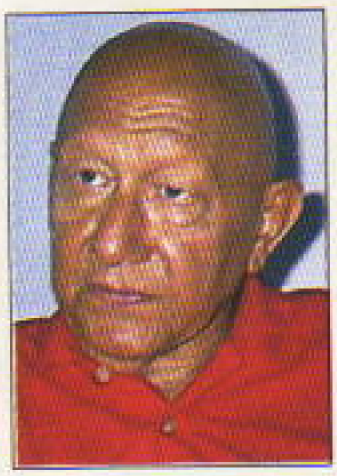
Εικονογράφηση: Yury Kononenko

Φιλοσοφία και επιστήμη

Ο Κορνήλιος Καστοριάδης μιλά στο ελληνικό Quantum

Ο Κορνήλιος Καστοριάδης, *ένας εξέχων φιλόσοφος —από τους σημαντικότερους στοχαστές του καιρού μας, κατά τον Jürgen Habermas— που παρακολουθεί με εξαιρετικό ζήλο τις εξελίξεις της επιστήμης είναι βέβαια ο πιο αρμόδιος να μιλήσει για τις σχέσεις της με τη φιλοσοφία. Στα τέλη του καλοκαιριού τον συνάντησε ο* Γιώργος Ευαγγελόπουλος *σ' ένα γραφικό χωριό της Τήνου, και κάτω από το κυκλαδίτικο φως βρήκαν την ευκαιρία να συζητήσουν για κεφαλαιώδη φιλοσοφικά και επιστημονικά θέματα.*

Ερ.: *Κύριε Καστοριάδη, είστε ένας από τους ελάχιστους σύγχρονους φιλοσόφους που παρακολουθούν τις εξελίξεις της επιστήμης. Πάνω λοιπόν στον άξονα φιλοσοφία-επιστήμη θα σας παρακαλούσα να κινηθεί η συζήτησή μας. Ο Heidegger διακήρυξε το «τέλος της φιλοσοφίας», υπό την έννοια της «αποσύνθεσής της μέσα στην ανάπτυξη των τεχνικοποιημένων επιστημών». Ακόμη και όσοι δεν συμφωνούν μ' αυτή την άποψη, δεν μπορούν παρά να αναγνωρίσουν ότι στο παρελθόν ιδιαίτερα, αλλά και τώρα, περιοχές που παραδοσιακά ανήκαν στη φιλοσοφία εκχωρήθηκαν στις νεογέννητες επιστήμες και δεν διεκδικήθηκαν έκτοτε από αυτήν. Όπως παρατηρεί ο Διονύσης Αναπολιτάνος, στο άρθρο του* Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες *(περιοδικό* Θεωρία και Κοινωνία*), «κάτι τέτοιο συνέβαινε και εξακολουθεί να συμβαίνει κάθε φορά που ένας κλάδος του επιστητού οροθετείτο μεθοδολογικά και άρχιζε να μελετάται με προεξάρχον το στοιχείο διασύνδεσης θεωρίας και παρατηρησιακών δεδομένων». Ποιο ρόλο επιφυλάσσει σήμερα η φιλοσοφία στον εαυτό της;*



Ο Κορνήλιος Καστοριάδης γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη το 1922. Σπούδασε στην Αθήνα νομικά, οικονομικά και φιλοσοφία, και από το 1945 ζει στο Παρίσι. Υπήρξε συνιδρυτής και εμπνευστής της ομάδας και του περιοδικού *Socialisme ou Barbarie* (Σοσιαλισμός ή Βαρβαρότητα, 1949-1965). Έχει δημοσιεύσει στα γαλλικά πολλά βιβλία πολιτικής και κοινωνικής ανάλυσης και φιλοσοφίας. Σχεδόν όλα έχουν εκδοθεί στα ελληνικά (τα έργα του *Η φαντασιακή θέσμιση της κοινωνίας* και *Από την οικολογία στην αυτονομία* από τις Εκδόσεις Ράππα, και όλα τα άλλα από τις Εκδόσεις Ύψιλον, με πιο πρόσφατο το *Χώροι του ανθρώπου*). Θεωρείται ένας από τους κορυφαίους ευρωπαίους διανοητές.

Απ.: Αναφέρετε μεταξύ άλλων τον Heidegger, για τον οποίο έχω ήδη μιλήσει, δεν θέλω λοιπόν να επαναλάβω αυτά που είπα στο «Τέλος της Φιλοσοφίας;» που περιέχεται στο βιβλίο μου *Οι ομιλίες στην Ελλάδα*. Παραθέτετε και την άποψη του κ. Αναπολιτάνου, η οποία είναι συμβατική, παραδοσιακή, γνωστή εδώ και 150 χρόνια. Είναι η θετικιστική άποψη. Είναι επίσης η άποψη του Ένγκελς, ο οποίος λέει ότι η φιλοσοφία ήταν για τον καιρό εκείνο που δεν υπήρχαν επιστήμες και ότι σιγά σιγά, καθώς αναπτύσσονται και ωριμάζουν οι επιστήμες, τελικά από τη φιλοσοφία θα μείνει μόνο η λογική και η διαλεκτική. Νομίζω ότι αυτό είναι τελείως εσφαλμένο, από μια άποψη που θα προσπαθήσω να σας εκθέσω.

Πρώτα πρώτα, έχουμε τη σύγχρονη γέννηση της φιλοσοφίας και της επιστήμης στην αρχαία Ελλάδα, από τη μια μεριά τυχαία και από την άλλη μεριά φυσιολογική. Φυσιολογική είναι διότι η φιλοσοφία γεννήθηκε ως πρώτη έκφραση της προσπάθειας του ανθρώπου για αυτονομία, για ελευθερία της σκέψης και συνεπώς για απόσπαση από τις παραδοσιακές παραστάσεις, και ιδίως τις μυθικές. Αν μελετήσει κανείς τους προσωκρατικούς, λόγου χάρη τον Ηράκλειτο αλλά και άλλους, θα δει ότι καταπολεμούσαν τη μυθική εικόνα του κόσμου, και καταπολεμώντας την προσπαθούσαν να δώσουν ταυτοχρόνως και μια εξήγησή του. Αυτές οι εξηγήσεις άλλωστε σε πολλές περιπτώσεις φάνηκαν βάσιμες. Λόγου χάρη η ερμηνεία των εκλείψεων, οι οποίες δεν οφείλονται στο ότι κάποιος δράκος τρώει τη Σελήνη, όπως πίστευαν οι Κινέζοι, αλλά στο ότι παρεντίθεται ένα σώμα που τη σκιάζει κλπ. Από την άλλη μεριά είναι τυχαία, διότι το πραγματικό έργο της φιλοσοφίας δεν είναι η εξήγηση των επιμέρους φαινομένων. Αλλά επ' αυτού θα επανέλθω. Συνεπώς, ο πρώτος λόγος για τον οποίο υπήρξε αυτή η συμφυΐα, αν μπορώ να πω, φιλοσοφίας και επιστήμης είναι η ταυτόχρονη γέννησή τους, ενώ ο δεύτερος λόγος ήταν η ακατάσχετη τάση της παραδοσιακής φιλοσοφίας προς ενοποίηση. Συνεπώς, η προσπάθεια υπαγωγής των φυσικών φαινομένων σε γενικότερες αρχές, υπερφυσικές ή μεταφυσικές, όχι απλώς φυσικές, η τάση προς ενοποίηση η οποία διείπε την παραδοσιακή φιλοσοφία και απαιτούσε να υπαχθεί το σύνολο των φαινομένων στη φιλοσοφική ερμηνεία.

Βεβαίως αυτό δεν είναι απόλυτο. Διότι, πρώτα πρώτα, αν μελετήσετε π.χ. τον Αριστοτέλη, θα διαπιστώσετε ότι τα *Φυσικά* του έργα είναι τελείως διακεκριμένα από τα φιλοσοφικά. Στο έργο του *Περί Ψυχής* ανακινεί το ζήτημα εάν ο λόγος περί ψυχής είναι του φυσικού ή του φιλοσόφου. Και δεν απαντά στο θέμα αν η θεωρία περί ψυχής είναι θεωρία φυσικής ή φιλοσοφίας. Από τον Καντ όμως και μετά, υπάρχει αρκετά σαφής διαχωρισμός της επιστήμης από τη φιλοσοφία. Αυτή είναι η κληρονομημένη στάση, η οποία βεβαίως επιδέχεται κριτική, και πρέπει κατά τη γνώμη μου να απορριφθεί βάσει μιας φιλοσοφικής διαπίστωσης. Η φιλοσοφική διαπίστωση είναι ότι το ον δεν είναι ενιαίο, δηλαδή ότι είναι στιβαδωτό, ή στρωματοποιημένο, και στην καθεμία από τις στιβάδες του συγκροτείται από ιδιαίτερες μορφές, ή από ιδιαίτερα είδη, αν πάρουμε τον πλατωνικό όρο, συνεπαγόμενα και ιδιαίτερους νόμους, στο μέτρο που υπάρχουν νόμοι· και αυτές οι ιδιαίτερες μορφές κάθε στιβάδας του όντος δεν μπορούν ούτε να απαχθούν από πρώτες αρχές ούτε να κατασκευαστούν λογικά οι μεν από τις δε. Αυτό συνδέεται με την κεντρική ιδέα της δικής μου φιλοσοφίας, με το ότι δηλαδή το ον είναι δημιουργία, και δημιουργία μορφών. Δημιουργία μορφών σημαίνει όχι απλώς παραγωγή της μιας μορφής από την άλλη, αλλά ανάδυση καινούργιων μορφών. Αυτό το βλέπουμε κατ' εξοχήν στην ανθρώπινη ιστορία, αλλά και στην ίδια τη φύση, αν π.χ. κοιτάξουμε το «χοντρό» παράδειγμα με την κλιμάκωση που υπάρχει ανάμεσα στα καθαρά φυσικά φαινόμενα και στα βιολογικά φαινόμενα, ή, ακολούθως, ανάμεσα στα βιολογικά φαινόμενα και στα ψυχικά και κοινωνικοϊστορικά.

Για να βάλουμε τα πράγματα στη θέση τους, πρέπει να σκεφτούμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις στάσεις της σκέψης, της πραγματικής σκέψης. Η πρώτη στάση είναι η εξήγηση. Αυτή είναι η στάση της φυσικής και κατά ένα μέρος της βιολογίας. Εξήγηση σημαίνει να προσπαθήσουμε να αναγάγουμε ένα φαινόμενο στις αιτίες του και σε γενικούς νόμους, σύμφωνα με τους οποίους η εμφάνιση ενός συγκεκριμένου φαινομένου οφείλεται σε μια συγκεκριμένη αιτία. Η εξήγηση «λειτουργεί» σε ολόκληρη τη φυσική επιστήμη, δηλαδή από την κοσμολογία ώς τη μικροφυσική και ώς τις εφαρμογές, π.χ. γεωλογία κλπ.

Υπάρχει μια δεύτερη στάση, η οποία είναι η κατανόηση. Η κατανόηση αφορά τον ανθρώπινο χώρο, και πηγάζει από το γεγονός ότι η ανθρώπινη ιστορία και η ανθρώπινη ζωή είναι δημιουργία νοημάτων και σημασιών. Δεν έχει νόημα να προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την παραγωγή των εν λόγω νοημάτων και σημασιών, μπορούμε απλώς να εξετάσουμε τους αναγκαίους, αλλά *ποτέ* ικανούς όρους μέσα από τους οποίους προκύπτουν, και το βασικό ερώτημα που τίθεται είναι αυτό της κατανόησής τους. Τι λέμε λόγου χάρη για την αρχαία Ελλάδα; Μπορούμε να πούμε ότι η μάχη του Μαραθώνα έγινε το 490, ότι ο Κλεισθένης εγκαθίδρυσε τη δημοκρατία το 507, ότι το 415 έγινε η σικελική εκστρατεία κλπ., και να δώσουμε χρονολογική σειρά των γεγονότων. Θα γίνουν ασφαλώς και μερικές προσπάθειες να εξηγηθούν αυτά τα γεγονότα κατά τη φυσική έννοια, αλλά αυτές οι προσπάθειες τελικά αποτυγχάνουν, διότι πάντα δείχνουν μερικούς αναγκαίους, αλλά ποτέ ικανούς όρους —αν βέβαια αποδειχθεί ότι είναι αναγκαίοι, γιατί μπορεί να μην είναι ούτε καν αυτό. Τι γυρεύουμε όταν μελετάμε την ιστορία της αρχαίας Ελλάδας; Θέλουμε να μάθουμε πόσων χρόνων πέθανε ο Θεμιστοκλής; Όχι. Θέλουμε να μάθουμε ποιες ήταν οι σημασίες, τα νοήματα πάνω στα οποία στηρίχθηκε η αθηναϊκή δημοκρατία, τα οποία δημιούργησε η αθηναϊκή δημοκρατία, και τα οποία είναι ομοούσια με την αθηναϊκή δημοκρατία, παραδείγματος χάριν η ισότητα μεταξύ των πολιτών, η παρρησία, ο ελεύθερος λόγος, το γεγονός ότι η βουλή και ο δήμος νομοθετούν κλπ. κλπ. Εδώ πρόκειται για ένα έργο κατανόησης, που συνίσταται στην αναζήτηση του σημασιακού, του νοηματικού περιεχομένου της αρχαίας ελληνικής δημοκρατίας. Και το ίδιο ισχύει για κάθε μορφή κοινωνικής θέσμισης και πολιτισμού.

Η διάκριση εξήγησης και κατανόησης πρέπει να παραμείνει αυστηρή, παρότι τώρα τελευταία έχουν διατυπωθεί και απόψεις οι οποίες λένε ότι αυτή η διάκριση είναι παρατραβηγμένη, ότι πρέπει να καταλάβουμε πως και η φυσική προσπαθεί να κατανοήσει τον κόσμο κτλ. Κατανόηση δεν μπορεί να υπάρξει, σύμφωνα με όσα είπαμε, παρά από τη στιγμή κατά την οποία υπάρχει ήδη διαμορφωμένο και, αν μπορώ να το πω, κατατεθειμένο ή αποθεμένο κάπου, ένα νόημα, μια σημασία. Το να λέμε ότι μπορούμε να κατανοήσουμε τον κόσμο συνεπάγεται σαν υπόρρητο αίτημα το ότι ο κόσμος έχει νόημα ή σημασία. Ο κόσμος, όμως, δεν έχει παρά μόνον επιμέρους αλληλουχίες, οιονεί νοηματικές, δηλαδή το σύνολο του κόσμου δεν έχει κανένα νόημα, δεν έχει καμία σημασία, όπως δεν έχει νόημα ή σημασία ούτε η ανθρώπινη ιστορία, ως τέτοια. Η ανθρώπινη ιστορία είναι ο χώρος μέσα στον οποίο δημιουργούνται τα νοήματα και οι σημασίες. Το να λέει κανείς ότι η ανθρώπινη ιστορία έχει σημασία, είναι σαν να λέει ότι ένας βαρυτικός χώρος έχει βάρος. Βάρος έχουν τα σώματα μέσα στον βαρυτικό χώρο, ο χώρος ο ίδιος δεν έχει βάρος.

Τέλος, η τρίτη στάση είναι αυτό που ονομάζω διαύγαση, που αποτελεί το έργο της φιλοσοφίας, και το οποίο δεν είναι απλώς κατανόηση. Το αντικείμενο της διαύγασης είναι το σύνολο της ανθρώπινης πείρας, δηλαδή η σκέψη παντός του σκεπτού. Η σκέψη είναι αυτό που προσπαθεί να διαυγάσει ακόμη και την κατανόηση, ακόμη και την εξήγηση. Διότι προσπαθούμε να διαυγάσουμε την εξήγηση, όταν λόγου χάρη προσπαθούμε να καταλάβουμε τι σημαίνει αιτιότητα, τι σημαίνει φυσικός νόμος και με ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να μιλάμε για αιτιότητα και για φυσικό νόμο. Επίσης, επιχειρούμε να διαυγάσουμε την κατανόηση, όταν θέλουμε να καταλάβουμε τι εννοούμε όταν ισχυριζόμαστε ότι κατανοούμε τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό· διότι αυτό κάνουμε όταν ψάχνουμε να βρούμε τι περιεχόμενο μπορεί να έχει αυτή έκφραση. Και οι δύο αυτές δραστηριότητες, δηλαδή και η εξήγηση και η κατανόηση, έχουν όρους ή προϋποθέσεις, οι οποίες αφορούν τη φιλοσοφία· από τη μια μεριά όρους οι οποίοι αφορούν το υποκείμενο που εξηγεί, που κατανοεί, δηλαδή τον φυσικό επιστήμονα ή τον ιστορικό επιστήμονα ή τον κοινωνιολόγο, και από την άλλη μεριά το αντικείμενο, δηλαδή τον τύπο του φυσικού όντος και τον τύπο του ανθρώπινου όντος, ο οποίος προϋποτίθεται μέσα σ' αυτές τις εργασίες.

Αυτά τα δύο, το υποκείμενο και το αντικείμενο, είναι αδιαχώριστα μέσα στη διαδικασία της γνώσης. Ο Καντ π.χ. ρωτούσε πώς πρέπει να είναι το υποκείμενο για να υπάρχει η γνώση. Το ρωτούσε αυτό πολύ σωστά, αλλά ξέχασε να ρωτήσει το άλλο ήμισυ. Πώς πρέπει να είναι το αντικείμενο για να μπορεί να υπάρξει γνώση; Ο Καντ λέει ότι κάθε γνώση στηρίζεται στις *a priori* μορφές του υποκειμένου, το οποίο π.χ. επιβάλλει την κατηγορία της αιτιότητας στα φαινόμενα. Και αμέσως τίθεται το ερώτημα: Θα μπορούσε το υποκείμενο, το υπερβασιακό υποκείμενο, να επιβάλει την κατηγορία της αιτιότητας σε *οποιαδήποτε* φαινόμενα; Εάν ο κόσμος ήταν λόγου χάρη ένα απόλυτο χάος, με την κοινή έννοια του όρου, τι κατηγορίες θα μπορούσαμε να επιβάλουμε στα φαινόμενα; Πρέπει, λοιπόν, για να υπάρχει φυσική επιστήμη, να υπάρχει και ένας φυσικός κόσμος, δηλαδή κάτι το οποίο να εμπεριέχει ένα ελάχιστο τάξης. Και διερωτάται κανείς αμέσως πώς πρέπει να είναι και ώς πού πρέπει και μπορεί να πηγαίνει αυτή η τάξη. Αυτό είναι κατ' ανάγκη κάτι που μας οδηγεί στην οντολογία. Διότι μιλάμε πλέον για το πώς πρέπει να είναι το φυσικό ον, δεδομένου ότι έχουμε κάποια γνώση του, έστω και αν η γνώση αυτή είναι ελαττωματική, ανεπαρκής, ανολοκλήρωτη κλπ. Το ότι έχουμε κάποια γνώση προϋποθέτει μεν ότι έχουμε ορισμένες ικανότητες να γνωρίζουμε, ορισμένες υποκειμενικές μορφές, λογικές διαδικασίες κλπ., προπάντων όμως προϋποθέτει ότι το αντικείμενο είναι *γνωρίσιμο*, και αυτό με κανέναν τρόπο δεν εξαρτάται από το υποκείμενο.

Το άλλο κρίσιμο σημείο σ' αυτή τη συζήτηση για τη σχέση φιλοσοφίας και επιστήμης είναι ότι η προαναφερθείσα οντολογία δεν μπορεί να χωριστεί από τη θεώρηση των επιμέρους όντων. Και εδώ είναι το μεγάλο σφάλμα του Heidegger, ο οποίος λέει ότι όλη η παρεξήγηση οφείλεται στο ότι η φιλοσοφία, αντί να προσπαθήσει να καταλάβει το νόημα του Είναι, προσπάθησε να καταλάβει την ουσία των όντων, των επιμέρους όντων. Αλλά μια θεώρηση του Είναι αφαιρετικά από τα όντα, που κάνει δηλαδή αφαίρεση των όντων, ή θα είναι κενή ή θα είναι απλώς λεξικογραφική διασάφηση. Με άλλα λόγια, τι εννοώ όταν λέω ότι κάτι *είναι*; Το Είναι π.χ. του ανθρώπινου χώρου, δηλαδή η οντολογία του ανθρώπου σε όλες της τις διαστάσεις, ατομικές, κοινωνικοϊστορικές, ψυχικές, κ.ά., μας υποχρεώνει να σκεφτούμε άλλα πράγματα από την οντολογία του φυσικού χώρου. Ποια είναι αυτά τα άλλα πράγματα; Ας πούμε απλώς και μόνον αυτό, ότι στην κοινωνική ζωή των ανθρώπων συναντάμε δύο τουλάχιστον νέα βασικά στοιχεία, τα οποία δεν έχουν κανένα νόημα στον φυσικό χώρο, ήτοι το θεσμό και τη σημασία. Η ανθρώπινη ζωή είναι ένα σύνολο θεσμών, διοικητικών και ποινικών, γλωσσικών, κ.ά. Αυτοί οι θεσμοί, λοιπόν, είναι φορτισμένοι με σημασίες. Και οι σημασίες τους ισχύουν συνολικά, διότι διαπιδύουν, διαποτίζουν τους θεσμούς. Η σημασία Θεός λόγου χάρη είναι μια κοινωνική φαντασιακή σημασία. Ενσαρκώνεται μέσα από τις εκκλησίες, τις τελετουργικές πράξεις, τα κείμενα της πίστης των ανθρώπων, τους αγίους, τις γιορτές κ.ά. Όλα αυτά είναι διαποτισμένα με τη σημασία Θεός, και από κει παίρνουν την ιερή τους υπόσταση.

Η διαύγαση είναι η δημιουργία φιλοσοφικών σημασιών που μας επιτρέπουν να σκεφτούμε το ον και τα όντα στη σύνδεσή τους και στη σχέση τους με την εμπειρία μας. Εμπειρία όχι με την έννοια της εμπειρικής παρατήρησης, αλλά συνολική εμπειρία, δηλαδή εμπειρία του φυσικού κόσμου, του κοινωνικού κόσμου, του έρωτα, της τέχνης κλπ. Έτσι π.χ. η φιλοσοφία προσπαθεί να δημιουργήσει σημασίες οι οποίες να διαυγάζουν την τέχνη ή την πολιτική, όπως και την επιστημονική δραστηριότητα. Γιατί λέω ότι το ον είναι δημιουργία; Εδώ βλέπουμε το πώς η εξέταση του ανθρώπινου χώρου μάς οδηγεί να αναθεωρήσουμε βασικές οντολογικές αρχές. Αντίθετα με τον Heidegger, μπορούμε να πούμε ότι το ον είναι δημιουργία, διότι μεταξύ άλλων υπάρχει και η μουσική. Μουσική η οποία δεν υπήρχε στη Μεγάλη Έκρηξη ούτε στη σύσταση του πλανητικού συστήματος ούτε την εποχή του αφανισμού των δεινοσαύρων, και η οποία είναι ένας τύπος όντος εξίσου σημαντικός με τους γαλαξίες, στα μάτια ενός φιλοσόφου. Πρέπει να υπάρχει μια οντολογία του ανθρώπινου όντος η οποία να διαυγάζει το φαινόμενο ότι το ανθρώπινο ον είναι δημιουργικό σε αυτή την ένταση, με αυτή την πυκνότητα και με αυτές τις αποχρώσεις.

Ερ.: *Ο φιλόσοφος Wittgenstein, στο βιβλίο του* Πολιτισμός και αξίες, *γράφει: «Τίποτε δεν μου φαίνεται λιγότερο πιθανό από το να επηρεαστεί σοβαρά στον τρόπο εργασίας του ένας επιστήμονας ή ένας μαθηματικός που διαβάζει τα έργα μου». Με αυτό τον ισχυρισμό ήρθε πρόσφατα να συμφωνήσει ο νομπελίστας φυσικός Steven Weinberg στο βιβλίο του* Όνειρα για μια τελική θεωρία: *«Δεν γνωρίζω κανέναν απ' όσους συμμετείχαν δραστήρια στην πρόοδο της φυσικής μεταπολεμικά που να βοηθήθηκε σημαντικά στην έρευνά του από το έργο των φιλοσόφων... Ακόμη και φιλοσοφικά δόγματα που κατά το* *παρελθόν φάνηκαν χρήσιμα στους επιστήμονες, τελικά παρέμειναν για τόσο διάστημα στο προσκήνιο, ώστε αποδείχθηκαν περισσότερο επιζήμια απ' όσο χρήσιμα ήταν αρχικά». Προς επίρρωση του τελευταίου του ισχυρισμού, ο Weinberg, ανάμεσα σε πολλά άλλα παραδείγματα, αναφέρει και ότι η «μηχανοκρατία», σύμφωνα με την οποία όλα τα φυσικά φαινόμενα ανάγονται σε συγκρούσεις υλικών σωμάτων και ρευστών, όχι μόνον εμπόδισε ώς το 1720 τους επιγόνους του Καρτέσιου να δεχτούν τη νευτώνεια θεωρία του ηλιακού συστήματος, αλλά δεν απορρίφθηκε οριστικά, όπως θα έπρεπε, ούτε το 1905, όταν η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν απέκλεισε τον αιθέρα και τον αντικατέστησε με τον κενό χώρο ως το μέσο που μεταφέρει τους ηλεκτρομαγνητικούς παλμούς· αντίθετα, η «μηχανοκρατία» επεκτάθηκε πέρα από τα σύνορα της επιστήμης και ενσωματώθηκε τον 19ο αιώνα στον διαλεκτικό υλισμό του Μαρξ και του Ένγκελς, υλισμός ο οποίος, ως γνωστόν, εμπόδισε αρχικά την αποδοχή της γενικής σχετικότητας στην τότε Σοβιετική Ένωση. Επίσης, ο Feynman θεωρούσε τη φιλοσοφία βλαβερή για τη φυσική επιστήμη, καίτοι το βιβλίο του Ο χαρακτήρας του φυσικού νόμου είναι ένα βαθύτατα φιλοσοφικό κείμενο. Πώς σχολιάζετε εσείς, ως φιλόσοφος, την τάση των σύγχρονων φυσικών επιστημόνων να απορρίπτουν κάθε φιλοσοφία, είτε αυτή είναι κανονιστικού χαρακτήρα είτε απλώς περιγραφική, ως άσχετη, άχρηστη ή ακόμη και βλαβερή για την επιστημονική έρευνα, εν αντιθέσει προς τους θεμελιωτές της θεωρίας της σχετικότητας και της κβαντικής μηχανικής, τα έργα των οποίων φανερώνουν βαθιά φιλοσοφική παιδεία και σεβασμό για τη φιλοσοφία;*

Απ.: Το ερώτημά σας αφορά τη χρησιμότητα της φιλοσοφίας. Εγώ θα έλεγα πρώτα πρώτα, κάπως απότομα, ότι η φιλοσοφία δεν είναι βιομηχανία, και συνεπώς τα έργα της δεν έχουν καμία χρησιμότητα. Θα μπορούσε να πει κανείς κοφτά ότι απλώς η φιλοσοφία διακρίνει το σκεπτόμενο ανθρώπινο ον από τον επιστημονικό πειραματικοαλγοριθμικό τεχνοκράτη, ο οποίος είναι τυφλός. Αλλά νομίζω ότι σε αυτά που λέει ο Weinberg σφάλλει, τολμώ να πω, στην ιστορική του ανάπτυξη. Δεν θα μπω σε όσα αναπτύσσει για τη μηχανοκρατία, διότι εδώ υπάρχει μια τεράστια ιστορία, την οποία πετσοκόβει κάπως. Τονίζει ότι στο τέλος του 19ου αιώνα εξακολουθούσε να υπάρχει η λεγόμενη ενεργειακή σχολή της φυσικής, η οποία αρνιόταν την ύπαρξη σωματιδίων. Στην πραγματικότητα, υπήρχε εξίσου διαδεδομένη και η άποψη για την ύπαρξη των σωματιδίων. Το να χαρακτηρίζει όσα περιγράφετε στην ερώτησή σας ως μηχανοκρατική αντίληψη και να διατείνεται ότι αυτή αποτέλεσε εμπόδιο στην ανάπτυξη της επιστήμης είναι εξωφρενικό, κατά τη γνώμη μου. Παραβλέπει όλη την πολυπλοκότητα των προβλημάτων. Και τούτο διότι, επί παραδείγματι, η ατομική υπόθεση, αν μπορεί κανείς να την ονομάσει έτσι, υπερβεβαιώθηκε από τη συνέχεια των εξελίξεων, πλην όμως ταυτοχρόνως και ανετράπη, με άλλες μορφές βέβαια. Αυτή είναι η πραγματική ιστορία της επιστήμης, ότι η ατομική υπόθεση επιβεβαιώθηκε και ανετράπη. Και προφανώς δεν πρόκειται για την ατομική υπόθεση όπως τη θεωρούσε ο Δημόκριτος, ας το διευκρινίσουμε κι αυτό.

Ερ.: *Θα ήθελα στο σημείο αυτό να πω ότι ο Weinberg δεν αρνείται ότι αυτό που εκείνος ονομάζει μηχανοκρατία, έστω εσφαλμένα και καταχρηστικά, αν θέλετε, προσέφερε «υπηρεσίες» στην επιστήμη του 19ου αιώνα. Αντιθέτως, υποστηρίζει ότι η μηχανοκρατία έφτασε στο ζενίθ της τον 19ο αιώνα με την ευφυέστατη εξήγηση της χημείας και της θερμότητας με αναφορά στα άτομα. Ο Weinberg λέει απλώς ότι στην επιστήμη, όπως και στην πολιτική ή την οικονομία, πολλές σημαντικές ιδέες, ακόμη και φιλοσοφικές, γίνονται επικίνδυνες όταν διατηρούνται ενώ έχουν πάψει να είναι χρήσιμες.*

Απ.: Δεν νομίζω ότι αυτό είναι σωστό. Διαβάστε, αν θέλετε, το βιβλίο του Thomas Kuhn, *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity: 1894-1912* (Θεωρία μέλανος σώματος και κβαντική ασυνέχεια: 1894-1912), το οποίο είναι ωραιότατο και αναφέρεται στην ανακάλυψη της κβαντικής φυσικής από τον Planck. Το βιβλίο αρχίζει με εκατό σελίδες για τον Boltzmann, τη θερμοδυναμική κλπ. Εκεί θα δείτε ότι η σύγκρουση της ατομικής υπόθεσης με την ενεργειακή παίζει τεράστιο ρόλο στο έργο του Boltzmann. Ο Planck είχε την ανάσχεση να παραδεχτεί ότι υπάρχουν άτομα ενέργειας και τα θεωρούσε απλώς ένα μέσο υπολογισμού, ώσπου στο τέλος με το άρθρο του Αϊνστάιν, στα 1905, για τα κβάντα φωτός, επικράτησε η κβαντική άποψη, δηλαδή μια ατομική θεωρία για την ενέργεια. Το να μιλάμε λοιπόν για μηχανοκρατία, εννοώντας όλα τα προαναφερθέντα, είναι κάπως επιπόλαιο.

Υπάρχει παραδείγματος χάριν το θέμα της κβαντικής ασυνέχειας, που η διαπίστωσή της οφείλεται στο έργο του Planck. Υπάρχει επίσης το ζήτημα της σχέσης των φιλοσοφικών αρχών των έργων του Αϊνστάιν και του Mach. Στη βάση της δουλειάς του Αϊνστάιν για τη σχετικότητα, την «Ηλεκτροδυναμική των κινούμενων σωμάτων», του 1905, υπάρχει μια θεωρητική απόφαση, σύμφωνα με την οποία μόνο τα παρατηρήσιμα έχουν σημασία για τη φυσική. Η εν λόγω θεωρητική απόφαση μας ανάγει στον

Mach, αλλά και στον Καντ, δηλαδή είναι μια φιλοσοφική αρχή. Αυτή μας προσδιορίζει τι μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο της φυσικής επιστήμης, ήτοι μόνον μεγέθη τα οποία είναι, πρώτον, μετρήσιμα, μαθηματικοποιήσιμα, και δεύτερον, παρατηρήσιμα από έναν απλό παρατηρητή. Με άλλα λόγια, πρόκειται για μια απόφαση σχετικά με το τι είναι φυσική επιστήμη, δηλαδή υπό ποιους όρους είναι δυνατή μια φυσική επιστήμη. Επιπλέον, περίπου είκοσι χρόνια αργότερα, γύρω στο 1925-1927, σε κάποια συζήτηση, ο Αϊνστάιν λέει στο συνομιλητή του: Τι θα πει παρατηρήσιμο; Η θεωρία αποφασίζει το τι είναι παρατηρήσιμο. Αλλά αυτό είναι μια επίσης καθαρά φιλοσοφική απόφαση. Σ' ένα κείμενό του που το έγραψε για τα 75 χρόνια του de Broglie, ο Αϊνστάιν αρχίζει με την εξής καταπληκτική φράση: «Η ιδέα ότι το κέντρο βάρους της Σελήνης σε ορισμένη στιγμή κατέχει μια ακριβέστατα καθορισμένη θέση μέσα στο Διάστημα είναι προφανώς μια μεταφυσική υπόθεση, η οποία δεν επιδέχεται απόδειξη». Και αυτό το λέει σ' ένα άρθρο στο οποίο καταπολεμά τον ιντετερμινισμό του Bohr, του Heisenberg και των άλλων. Και όμως, ο Αϊνστάιν θεωρεί ότι η φυσική του είναι βασισμένη στην ιδέα ότι το κέντρο βάρους της Σελήνης κατέχει μια χωροχρονικά ακριβέστατη θέση.

Θα ήθελα επίσης να πω ότι δεν ευσταθεί ούτε γι' αστείο ο ισχυρισμός του Weinberg πως κανένας φυσικός δεν βοηθήθηκε από τη φιλοσοφία. Λόγου χάρη, ο Heisenberg στο βιβλίο που αποτελεί την πνευματική του αυτοβιογραφία, το *Das Ganze und der Teil* (Το όλον και το μέρος), αναφέρει τι τον παρακίνησε να γίνει φυσικός. Το ερέθισμα το δέχτηκε στην τελευταία τάξη του γυμνασίου, όταν διδάχθηκε τον *Τίμαιο* του Πλάτωνος. Στον *Τίμαιο* γίνεται η πρώτη προσπάθεια να μαθηματικοποιηθεί πλήρως το φυσικό αντικείμενο και το σύνολο του κόσμου, καθόσον ο Πλάτων προσπαθεί να διατυπώσει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα τέσσερα στοιχεία και το σύμπαν και στα πέντε πλατωνικά στερεά, λέγοντας ότι τα άτομα του ενός είναι πυραμιδικά, τα άλλα είναι κυβικά κ.ο.κ. Έχουμε λοιπόν εδώ και ατομική υπόθεση και γεωμετρικοποίηση του φυσικού αντικειμένου. Συνεπώς, το ζήτημα της σχέσης της φιλοσοφίας με τη φυσική νομίζω ότι πρέπει να το δούμε αλλιώς, δηλαδή στο κατά πόσον για μία ακόμη φορά οι φυσικοί θέλουν απλώς να χειρίζονται πειραματικά εργαλεία και να αλγοριθμίζουν, μπορώ να πω, τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων και των πειραμάτων τους, ή στο κατά πόσον θέλουν να σκεφτούν τις βάσεις και τις προϋποθέσεις της επιστήμης τους, οπότε δεν κάνουν πλέον φυσική. Σ' αυτή την περίπτωση κάνουν μεταφυσική, όπως είπε κάποτε ο Niels Bohr στον Heisenberg, προσθέτοντας εύστοχα: «Δεν καταλαβαίνω γιατί όταν οι μαθηματικοί μιλάνε για μεταμαθηματικά όλος ο κόσμος το αποδέχεται, ενώ όταν εμείς οι φυσικοί μιλάμε για μεταφυσική, οι πάντες θεωρούν ότι παύουμε να είμαστε επιστήμονες». Εν κατακλείδι, θα υποστήριζα ότι είναι περίεργο να λέγονται αυτά τα πράγματα, τόσο από τον Heidegger όσο και από τον Weinberg, σε μια εποχή κατά την οποία η ίδια η εξέλιξη της φυσικής ανακινεί βασικά φιλοσοφικά θέματα, π.χ. την «αιτιότητα», την «ταυτότητα», τον «εντοπισμό» κ.ά. Υπενθυμίζω ότι ο E. Wigner βεβαιώνει ότι στην κβαντική μηχανική έχει γίνει πρωταρχική η έννοια «νοητική πράξη», και αναγνωρίζει αμέσως ότι αυτό ισοδυναμεί «με την εξήγηση ενός αινίγματος με ένα μυστήριο».

Εξάλλου, με τις ανισότητες του Bell και τα πειράματα του Aspect, το 1982, αποδεικνύεται ότι δύο σωματίδια τα οποία βρίσκονται σε τέτοια απόσταση ώστε να αποκλείεται να έχουν αλληλεπιδράσει μεταξύ τους, εξακολουθούν μολαταύτα να συμπεριφέρονται σαν να βρίσκονταν σε συνεχή αλληλεπίδραση. Δηλαδή το κρίσιμο θέμα του «εντοπισμού» γίνεται κάτι το ασύλληπτο. Η ιδέα ότι το φυσικό φαινόμενο έχει έναν συγκεκριμένο τόπο καταρρέει. Και αναφέρομαι όχι απλώς σ' έναν τόπο ο οποίος έχει ένα περιθώριο απροσδιοριστίας σύμφωνα με την αρχή του Heisenberg, αλλά σ' έναν τόπο με μια πολύ πιο ευρεία έννοια! Και αφήνω την κοσμολογία, όπου ξαναεμφανίζονται όλα τα προβλήματα τα οποία ανέκαθεν τυραννούσαν τη φιλοσοφία.

Ερ.: *Θα ήθελα να σας παρακαλέσω να συζητήσουμε κάπως διεξοδικά την πολύπλοκη και ενδιαφέρουσα σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας. Σύμφωνα με τον Διονύση Αναπολιτάνο, υπάρχει μια ομοιότητα στον τρόπο που λειτουργεί η ορθολογικότητα στους χώρους των μαθηματικών και της φιλοσοφίας, η οποία συνιστά μια κοινή τους διαφορά από το μοντέλο των φυσικών επιστημών. Τα μαθηματικά διαφέρουν από τις υπόλοιπες επιστήμες στο βαθμό που για τον έλεγχο της ορθότητας των πρώτων αρχών και των αποτελεσμάτων τους δεν απαιτείται διαμεσολάβηση κάποιας εμπειρικής πραγματικότητας, οπότε δεν υπάρχει γι' αυτά το δίπολο θεωρία-πείραμα. Έτσι, οι τύποι ορθολογικότητας που συναντά κάποιος στη μαθηματική επιστήμη είναι, πρώτον, αυτός που προκύπτει από την αποδοχή* κάποιων *(βλ. ιντουισιονιστικά ή ακόμη και περατοκρατικά μαθηματικά), ή όλων (βλ. κλασικά μαθηματικά) των γνωστών λογικών αρχών και μεθόδων, και δεύτερον, αυτός που αναφέρεται στους μεταμαθηματικούς κανόνες και τις αντίστοιχες διαδικασίες που αυτοί επιβάλλουν σχετικά με τη δημιουργία ή την επιλογή πρώτων αρχών και αξιωμάτων μη τετριμμένου μαθηματικού πληροφοριακού περιεχομένου. Η φιλοσοφία γειτνιάζει προς τα μαθηματικά, παρ' όλη τη μεγαλύτερη μεθοδολογική της ρευστότητα. Υπ' αυτή την έννοια, οι τύποι ορθολογικότητας που συναντάμε στη φιλοσοφία είναι παρεμφερείς προς αυτούς που συναντάμε στα μαθηματικά. Ελλείπει και εδώ το στοιχείο της εμπειρικής επιβεβαίωσης-επίρρωσης των θεωρητικών κατασκευών, η δε ακολουθητέα διαδικασία δημιουργίας σοβαρού φιλοσοφικού λόγου υιοθετεί τόσο την ημιεπαγωγική μέθοδο κατασκευής ή επιλογής θεωρητικών συστημάτων (δηλαδή των φιλοσοφικών αξιωμάτων ή των πρώτων αρχών τους), όσο και την παραγωγική ή απαγωγική συμπερασματική μέθοδο συναγωγής φιλοσοφικών θεωρημάτων και πορισμάτων (από το ήδη δημιουργηθέν ή επιλεγέν σώμα φιλοσοφικών αξιωμάτων), στην οποία περιλαμβάνονται και όλα τα μεταθεωρήματα επάρκειας, πληρότητας και συμπάγειας του συστήματος. Εν κατακλείδι, η φιλοσοφία είναι δραστηριότητα επιχειρηματο-*

λογική και, κατ' αναλογίαν προς τα μαθηματικά, δραστηριότητα που δεν χρειάζεται απαραίτητα εμπειρική υποστήριξη για να συνεχίσει να υπάρχει.

Πώς κρίνετε τις ανωτέρω επισημάνσεις του Διονύση Αναπολιτάνου και πού θεωρείτε εσείς ότι εκδηλώνεται η λειτουργία της ορθολογικότητας μέσα σ' αυτές τις δύο τόσο παλιές και τόσο σημαντικές για τον πολιτισμό μας πνευματικές δραστηριότητες του ανθρώπου;

Απ.: Δεν συμφωνώ καθόλου με όσα υποστηρίζει. Θα έλεγα ότι υπάρχει μια μεγάλη διαφορά μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας, η οποία μπορεί να συνοψιστεί στο εξής: Τα μαθηματικά στη «δουλειά» τους είναι συνολοταυτιστικά, δηλαδή εργάζονται με τη λογική την οποία εγώ ονομάζω συνολοταυτιστική, λογική της θεωρίας των συνόλων, με οποιεσδήποτε εκλεπτύνσεις ή επεξεργασίες μπορεί αυτή να έχει υποστεί στον 20ό αιώνα (η θεωρία των συνόλων, άλλωστε, είναι κατ' ουσίαν θεωρία του 20ού αιώνα). Και λέω ταυτιστική, διότι το βασικό της αξίωμα είναι η αρχή της ταυτότητας, η αρχή της μη αντίφασης. Λοιπόν, τα μαθηματικά είναι συνολοταυτιστικά στη «δουλειά» τους, από τη μια μεριά. Απ' την άλλη, όσον αφορά τη «θέση», την επιλογή των αξιωμάτων τους, είναι αυστηρώς ποιητικά, δηλαδή είναι δημιουργικά.

Είναι προφανές ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορεί να πει κανείς ότι οι μαθηματικοί, έπειτα από πολλή δουλειά, συνήγαγαν τα αξιώματα από το σύνολο των προτάσεων που είχαν μπροστά τους (ή, αλλιώς, τα υπήγαγαν σ' αυτές). Μπορούμε να πούμε για παράδειγμα ότι ο Ευκλείδης είχε μπροστά του μια τεράστια γεωμετρική δουλειά, το προϊόν των τριών προηγούμενων αιώνων και, διατυπώνοντας για πρώτη φορά την υποθετικοαπαγωγική μέθοδο, διερωτήθηκε ποιο είναι το ελάχιστο των αρχών που μπορούν να στηρίξουν αυτά τα θεωρήματα, τα οποία, κατά τ' άλλα, είναι αληθή ή αληθοφανέστατα· έτσι «οδηγήθηκε» στα αξιώματά του. Γενικότερα, όμως, αυτό που χαρακτηρίζει τη δουλειά των μαθηματικών είναι η «θέση», η επιλογή αξιωμάτων τα οποία δεν συνεπάγονται από καμιά εμπειρία, ούτε βγαίνουν απλώς λογικά· διότι αν έβγαιναν λογικά, δεν θα ήταν αξιώματα, θα ήταν θεωρήματα της λογικής. Δείτε λόγου χάρη τα διάφορα συστήματα αξιωμάτων τα οποία στηρίζουν τις διάφορες μορφές της τοπολογίας και θα καταλάβετε. Συνεπώς, τα μαθηματικά δεν είναι απλώς αποδοχή λογικών αρχών και μεταμαθηματικών κανόνων. Εάν δεν είχε υπάρξει «δημιουργία» νέων αξιωμάτων, όποτε εμφανίστηκε ανάγκη, τα μαθηματικά θα είχαν σταματήσει προ πολλού. Σημειώστε εδώ το παράδειγμα της Κίνας, στην οποία εμφανίστηκαν παλιά σπουδαιότατοι μαθηματικοί, οι οποίοι σε κάποια χρονική στιγμή «κόλλησαν» κάπου και δεν μπόρεσαν ν' αναπτύξουν περαιτέρω τη σκέψη τους.

Όσον αφορά τη δημιουργία στα μαθηματικά, πέραν της συνολοταυτιστικής λογικής, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ή εξαναγκασμός που να οδηγεί σ' αυτήν, που να την κατευθύνει. Δεν υφίσταται κάτι που να περιορίζει την επιλογή των αξιωμάτων, εκτός φυσικά από τη μη αντιφατικότητα, τη συμβιβαστότητα των αξιωμάτων, αλλά και την επάρκειά τους· αλλά μόνον με τις δύο αυτές αρχές δεν μπορεί κανείς να δημιουργήσει αξιώματα· αυτές αποτελούν απλώς αρνητικούς όρους. Αντιθέτως, η φιλοσοφία δεν υπακούει, παρά μόνον εν μέρει και κατά εργαλειακό τρόπο, στη συνολοταυτιστική λογική, διότι το αντικείμενό της υπερβαίνει τα σύνολα, ή τα συνολοποιήσιμα όντα, και ασχολείται μ' αυτό που ονομάζω μάγμα.

Θα δώσω πρώτα ένα εύληπτο παράδειγμα. Όλες οι παραστάσεις που έχετε μέσα στο κεφάλι σας ή μπορεί να σας έρθουν καθώς ονειροπολείτε, καθώς συλλογίζεστε κλπ., δεν αποτελούν ένα σύνολο με τη μαθηματική έννοια. Διότι ένα σύνολο, για να επανέλθουμε στον παλιό και δήθεν αφελή ορισμό του Cantor, αποτελείται από στοιχεία ορισμένα και διακεκριμένα τα μεν από τα δε, είτε του πραγματικού κόσμου είτε της σκέψης μας. Όμως, οι παραστάσεις μας δεν αποτελούνται από στοιχεία διακεκριμένα και ορισμένα. Δεν μπορείτε να τα «χωρίσετε», διότι, αν λόγου χάρη σκεφτείτε την παράσταση της μητέρας σας, θα διαπιστώσετε ότι δεν μπορείτε να πείτε «ιδού το σύνολο των στοιχείων που την απαρτίζουν», και αυτό συμβαίνει για πολλούς και διάφορους λόγους, οι οποίοι είναι προφανείς. Θα ορίσετε την παράσταση της μητέρας σας βάζοντας μέσα την τάδε σκηνή της παιδικής σας ηλικίας, στην οποία η μητέρα σας παίζει έναν ορισμένο ρόλο, θα προσθέσετε όλες τις σκέψεις που κάνετε γι' αυτήν ή ό,τι θυμόσαστε γι' αυτήν ή όλη την οικογένειά της, ή κάτι που σας είπε για τον παππού της κλπ., και έτσι θα φτάσετε στο άπειρο, ή, σωστότερα, στο απεριόριστο. Ένα άλλο, αρκετά συγγενές παράδειγμα αφορά τις σημασίες των λέξεων οποιασδήποτε γλώσσας· δεν μπορείτε να χωρίσετε τα σημαινόμενά τους και να τα ορίσετε με μεθόδους συνολοταυτιστικές. Μπορείτε βέβαια να συντάξετε λεξικά, λόγου χάρη όρων της γεωπονίας, της αεροδυναμικής κλπ., αλλά αυτά είναι τεχνικά και επιμέρους. Τούτο καθίσταται δυνατό ακριβώς επειδή οι ενασχολήσεις με αυτά τα θέματα είναι εργαλειακές, συνολοταυτιστικές. Αλλά εάν επιχειρήσετε να γράψετε ένα λεξικό των πραγματικών σημασιών των λέξεων μιας γλώσσας, θα δείτε ότι τα πράγματα είναι διαφορετικά.

Ας πάρουμε π.χ. το δημοτικό ποίημα που αρχίζει με το «Μάνα με τους εννιά σου γιους και με τη μια σου κόρη», και που πιο κάτω περιέχει το στίχο «και τον βοριά τον δροσερό, τον πήραν τα καράβια». Εδώ υπάρχει ένας παραλογισμός, αφού, στην πραγματικότητα, τα καράβια δεν παίρνουν τον βοριά, αλλά αντιθέτως ο βοριάς παίρνει τα καράβια. Πρόκειται για μια καθαρά μαγματική, ποιητική έκφραση, που παραβιάζει τους κανόνες της λογικής συνολοταυτιστικής χρήσης των όρων βοριάς, καράβια κλπ. Άλλωστε, οι περισσότεροι σπουδαίοι στίχοι είναι έτσι.

Αν θέλαμε τώρα να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του μάγματος, θα λέγαμε το εξής: «Ένα μάγμα είναι αυτό από το οποίο μπορούμε να αφαιρέσουμε έναν απροσδιόριστο αριθμό συνόλων ή μέσα στο οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν απεριόριστο αριθμό συνόλων, αλλά το οποίο δεν μπορούμε συνολικά να το αναπαραγάγουμε ή να το κατασκευάσουμε με τις συνολιστικές διαδικασίες, δηλαδή με μια συνδυαστική, οιασδήποτε πολυπλοκότητας και οιασδήποτε λεπτότητας». Το αντικείμενο της φιλοσοφίας, π.χ. η οντολογία, είτε είναι οντολογία του ανθρώπινου όντος είτε οντολογία της φύσης κλπ., αναφέρεται σε μάγματα. Φυσικά, για να μιλήσουμε για τα μάγματα, καταφεύγουμε συνεχώς σε εργαλειακές χρήσεις της συνολοταυτιστικής λογικής και προσπαθούμε να δώσουμε μονοσήμαντες εκδοχές στις λέξεις, οι οποίες, όσο λιγότερο αφορούν πραγματικά αντικείμενα, όπως ένα τραπέζι, ένα πακέτο τσιγάρα κλπ., τόσο λιγότερο επιδέχονται τη μονοσημαντότητα. Σε αντίθεση με τα μαθηματικά, τα οποία, αφού διατυπωθούν τα αξιώματά τους, «δουλεύουν» πλέον συνολοταυτιστικά, η φιλοσοφία δεν έχει αξιώματα και δεν δουλεύει συνολοταυτιστικά, απλώς χρησιμοποιεί μόνον εργαλειακά αυτή τη λογική. Από την άλλη μεριά, ενώ η δημιουργία αξιωμάτων στα μαθηματικά δεν υφίσταται κανέναν περιορισμό ή καταναγκασμό, εκτός από τους τετριμμένους, ήτοι της μη αντίφασης, ενδεχομένως της επάρκειας κλπ., αντιθέτως, η φιλοσοφία εργάζεται υπό έναν αυστηρό καταναγκασμό, αυτόν της πραγματικότητας· η φιλοσοφία ασχολείται με την πραγματικότητα, ενώ τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με αυτήν. Και η φιλοσοφία ασχολείται με τα μαθηματικά στο μέτρο που τα μαθηματικά είναι πραγματικότητα. Διότι, όπως είπα πριν, η φιλοσοφία ασχολείται με το σύνολο της ανθρώπινης εμπειρίας, και συνεπώς ασχολείται και με την πραγματικότητα, όπως αυτή εμφανίζεται μέσα στην ανθρώπινη εμπειρία. Η φιλοσοφία δεν μπορεί να βιάσει την πραγματικότητα, επομένως δεν μπορεί να γίνει δεκτή μια «φιλοσοφία» ενός πλήρους ενδεχομενισμού, ή μια «φιλοσοφία» του πλήρως τυχαίου, που θα επέμενε ότι πουθενά και ποτέ δεν υπάρχουν αιτιακές σχέσεις. Διότι δεν μπορούμε να αρνηθούμε ότι υπάρχουν αιτιακές σχέσεις και ότι αν καταπιώ μερικά γραμμάρια αρσενικού θα με πιάσει τρομερός πόνος στο στομάχι και μετά θα πεθάνω.

Η φιλοσοφία δεν μπορεί να βιάσει την πραγματικότητα, δεν δικαιούται όμως και να την αγνοήσει ή να αγνοήσει μέρη της. Μια φιλοσοφία που θα αγνοούσε την τέχνη, την ιστορία, την ψυχή κλπ. θα ήταν ανάπηρη και ανεπαρκής.

Ερ.: *Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι συνήθως οι ερευνητές μαθηματικοί έχουν για τη φύση της δραστηριότητάς τους φιλοσοφικές αντιλήψεις που βρίσκονται κοντά στον «πλατωνικό ρεαλισμό», ενώ οι φιλόσοφοι της μαθηματικής επιστήμης δεν τις ενστερνίζονται, τουλάχιστον στον ίδιο βαθμό. Ορισμένοι σημαντικοί μαθηματικοί, όχι μόνον παλαιότεροι, όπως ο Jacques Hadamard, αλλά και σύγχρονοι, όπως ο Roger Penrose, ο Alain Connes κ.ά., πιστεύουν ότι η κατά τον φυσικό E. Wigner «παράλογη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών» οφείλεται στο ότι οι μαθηματικές δομές, ως καθαρές έννοιες και μορφές, ενοικούν σ' έναν υπαρκτό «παράλληλο» κόσμο, τον οποίο μόνον το ανθρώπινο πνεύμα μπορεί να ανακαλύψει. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τη νευροφιλοσοφία, τα «μαθηματικά αντικείμενα» δεν είναι ανεξάρτητα από τον εγκέφαλο και την ανθρώπινη εμπειρία, αλλά μάλλον αποτελούν απλώς προϊόν της εγκεφαλικής λειτουργίας. Μπορεί δηλαδή να υπάρχουν και άλλοι τρόποι αναπαράστασης του κόσμου, εξίσου θεμελιώδεις με τις γνωστές μαθηματικές δομές και κατασκευές, τους οποίους όμως δεν μπορούμε καν να φανταστούμε, διότι ο εγκέφαλός μας, με δεδομένη την οργάνωση που έχει, ίσως να είναι προδιατεθειμένος προς έναν ορισμένο τρόπο περιγραφής των κανονικοτήτων που υπάρχουν στο σύμπαν. Ποια είναι η δική σας άποψη;*

Απ.: Με ρωτάτε πώς εξηγώ τον όντως διαφορετικό τρόπο με τον οποίο οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι βλέπουν τη φύση, τις μαθηματικές δραστηριότητες και το αντικείμενό τους.

Το πρώτο που θα ήθελα να πω είναι ότι οι περισσότεροι μαθηματικοί είναι πράγματι ρεαλιστές, και αυτό νομίζω ότι συμβαίνει διότι υπάρχει αυτή η εσωτερική αναγκαιότητα και αλληλοσύνδεση των μαθηματικών, η οποία πράγματι φαίνεται να πηγάζει από μια σκληρή πραγματικότητα. Δεν μπορείς να κάνεις ό,τι θέλεις. Αν δεν ακολουθήσεις τον σωστό δρόμο, αν παρακάμψεις, επειδή δυσκολεύεσαι να κατανοήσεις, σύντομα θα ξαναβρεθείς μπροστά στα ίδια «εμπόδια». Ένα παράδειγμα είναι ο π, αλλά και ο e στις εκθετικές συναρτήσεις· όπου και να πας, τους βρίσκεις, σαν το μαϊντανό στις ελληνικές παροιμίες. Τώρα, ο π που υπάρχει στην περίμετρο και το εμβαδόν του κύκλου, γιατί να είναι πανταχού παρών; Ή, το e, το οποίο βγαίνει από μια συγκλίνουσα σειρά, γιατί εμφανίζεται επίσης παντού και έχει τεράστια σημασία;

Άλλο παράδειγμα: το πυθαγόρειο θεώρημα. Ο Πυθαγόρας, ή όποιος άλλος τέλος πάντων έκανε την απόδειξη του γνωστού ως πυθαγορείου θεωρήματος, είχε στο μυαλό του ευκλείδεια τρίγωνα και πάνω σ' αυτά έκανε την απόδειξή του. Αν ανοίξετε όμως ένα σύγχρονο βιβλίο ανάλυσης, π.χ. του Dieudonné, θα διαβάσετε ως θεώρημα ότι «σε κάθε προχιλμπερτιανό διάστημα, το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των διανυσμάτων». Ο Πυθαγόρας δεν θα καταλάβαινε τι σημαίνει αυτό. Αλλά ο Dieudonné το ονομάζει σωστά, πυθαγόρειο θεώρημα, διότι πράγματι το ευκλείδειο διάστημα είναι προχιλμπερτιανό. Όλα αυτά δεν είναι δυνατόν να μη μας εντυπωσιάζουν, αφού είναι σαν να ψηλαφίζουμε ένα τεράστιο ζώο, στην αρχή από τη μια μεριά και, όταν αργότερα το γυρίζουμε από την άλλη, να ξαναβρίσκουμε τα ίδια στοιχεία, τα ίδια «σημάδια». Άρα, κάποια αδιόρατη γραμμή συνέχειας διέπει αρκετά από τα γνωστά μαθηματικά, κατά κάποιον τρόπο όχι πάντα ευανάγνωστο, και ίσως και μυστηριώδη.

Ερ.: *Ο Roger Penrose ισχυρίζεται ότι παραδείγματα όπως αυτά του συνόλου Mandelbrot και του συστήματος των μιγαδικών αριθμών «μιλούν» για μια βαθιά και αιώνια πραγματικότητα των μαθηματικών.*

Απ.: Πράγματι, οι διαπιστώσεις αυτές αποτελούν μια εμπειρία που μας προκαλεί ρίγος. Νομίζω, όμως, ότι η προκειμένη εμπειρία των ανθρώπων που κάνουν έρευνα στα μαθηματικά προκύπτει από τις ενυπάρχουσες σ' αυτά σταθερές αλληλουχίες του συνολοταυτιστικού χώρου. Υπάρχουν δηλαδή εκεί μέσα σχέσεις και αλληλουχίες οι οποίες είναι σταθερές και μη βιάσιμες, αβίαστες, ας πούμε. Γεννάται βεβαίως το ερώτημα ποιος είναι ο τρόπος υπάρξεως του μαθηματικού χώρου και των περιεχομένων του. Και αυτό νομίζω ότι είναι ένα από τα πιο σκοτεινά ερωτήματα που συναντά η σκέψη μας, το οποίο μάλιστα γίνεται ακόμη σκοτεινότερο, λόγω της πολυσημίας του όρου πραγματικότητα. Ποιος μπορεί λόγου χάρη να μας εξηγήσει τι εννοεί όταν χαρακτηρίζει τα μαθηματικά θεωρήματα ως πραγματικά, με την πλατωνική, ας πούμε, έννοια του όρου; Εδώ πρέπει να κάνω μια παρέκβαση για να πω ότι αυτό που ονομάζω συνολοταυτιστικό είναι αναγκαία διάσταση κάθε μορφής του όντος, και όχι απλώς της σκέψης μας. Αυτό το είχε δει θαυμάσια ο Αριστοτέλης με το έμβιο ον. Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα: ένας τράγος και μια κατσίκα θα βγάλουν αποκλειστικά κατσικάκια, διότι δεν μπορούν να βγάλουν τίποτε άλλο, δηλαδή ούτε κροκόδειλο ούτε ατμομηχανή ούτε βέβαια και ποίημα. Ο Αριστοτέλης έλεγε «άνθρωπος άνθρωπον γεννά». Δηλαδή πρέπει να υπάρχει ένας άνθρωπος για να γεννηθεί ένας άλλος άνθρωπος, και αν ένας άνθρωπος γεννήσει κάποιον άλλον, αυτός ο κάποιος άλλος θα είναι άνθρωπος, εκτός φυσικά αν υπάρξει τερατογένεση. Άρα, υπάρχει πράγματι σε όλα τα όντα, ώς ένα ορισμένο μέτρο τουλάχιστον, μια διάσταση συνολοταυτιστική. Λόγου χάρη, ορισμένοι ισχυρίζονται ότι σχεδόν τα πάντα είναι μετρήσιμα σε κάθε πεδίο, κι εδώ έγκειται η μεγάλη απάτη, η πλάνη και των οικονομολόγων και των δομιστών· η αλήθεια είναι ότι μπορεί να υπάρχουν συνολοταυτιστικές, μετρήσιμες, δομικές κ.ά. απόψεις, οι οποίες όμως είναι συνήθως τετριμμένες και δεν ανταποκρίνονται σε τίποτε ουσιαστικό. Μπορώ βέβαια να μετρήσω πόσες νότες έχει μια συμφωνία του Μπετόβεν, αλλά αυτό δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Μπορώ επίσης να προσπαθήσω να κατασκευάσω σχέσεις μεταξύ του θέματος και του αντιθέματος μιας φούγκας του Μπαχ, όμως η σημασία της μουσικής είναι αλλού. Εδώ εμφανίζεται φυσικά ο εργαλειακός χαρακτήρας της συνολοταυτιστικής λογικής, καθόσον δεν μπορείς να γράψεις μουσική, αν δεν ξέρεις ορισμένα μαθηματικά· αν δεν ξέρεις καθόλου, πρέπει τουλάχιστον να διαισθάνεσαι, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην περίπτωση των πρωτόγονων βάρδων και των φολκλορικών μουσικών συγκροτημάτων, μερικές αναλογίες, κάποιες συμμετρίες που ορίζουν τις σχέσεις των τόνων μιας κλίμακας, των μεν με τους δε. Αυτό δεν σημαίνει ότι η μουσική περιορίζεται σ' αυτό το στοιχείο.

Κλείνω αυτή την παρένθεση και συνοψίζω λέγοντας ότι κατά τη γνώμη μου η «παράλογη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών» οφείλεται στη συνολοταυτιστική τους διάσταση. Όμως, η ύπαρξη αυτής της διάστασης δεν σημαίνει ότι υπάρχει μια απόλυτη αντιστοιχία ανάμεσα στο συνολοταυτιστικό των πραγματικών όντων και στο συνολοταυτιστικό των μαθηματικών. Στο μέτρο που υπάρχει, εξηγεί την παράλογη, την αδικαιολόγητη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών. Εδώ γεννιούνται πολλές επιμέρους εξηγήσεις. Επί παραδείγματι, υπάρχουν αυτοί οι περίεργοι τέσσερις τύποι σχέσεων ανάμεσα στα μαθηματικά και τη φυσική, τους οποίους περιγράφω σ' ένα κείμενο που λέγεται «Το οντολογικό βάρος της ιστορίας της επιστήμης» και περιέχεται στους *Χώρους του ανθρώπου*. Στην πρώτη περίπτωση των σχέσεών τους, τα μαθηματικά και η φυσική βαδίζουν ταυτοχρόνως. Στην περίπτωση του έργου του Νεύτωνος, λόγου χάρη, έχουμε ταυτόχρονα και, μπορώ να πω, ομοούσια με τη διατύπωση του διαφορικού λογισμού και τη θεμελίωση μιας νέας φυσικής. Η μαθηματικοποίηση της φυσικής άρχισε από τον Γαλιλαίο, συνεχίστηκε από τον Καρτέσιο και ολοκληρώθηκε ή μάλλον, πιο σωστά, οριστικοποιήθηκε με τον Νεύτωνα.

Η δεύτερη περίπτωση είναι εκείνη όπου η μαθηματική επιστήμη προηγείται της φυσικής. Για παράδειγμα, οι ρημάνειοι χώροι περίμεναν 55 ή 65 χρόνια για να τους χρησιμοποιήσει η φυσική. Αυτό έγινε μόλις το 1915, με τη διατύπωση της γενικής σχετικότητας από τον Αϊνστάιν. Άλλωστε, σίγουρα μέχρι τότε η πλειονότητα των φυσικών αγνοούσε τη ρημάνεια γεωμετρία, αφού δεν τη χρειάστηκε στην έρευνα, εν αντιθέσει με τη χρησιμότητα που είχαν γι' αυτήν τα «εργαλεία» που προσέφερε η κλασική ανάλυση. Και το αστείο είναι αυτό που αναφέρει ο Pais στην ωραιότατη βιογραφία του Αϊνστάιν, υπό τον τίτλο *Subtle is the Lord...*, ότι δηλαδή στη δουλειά του για τη γενική σχετικότητα ο Αϊνστάιν ξαναανακάλυψε τις ταυτότητες του Bianchi και του Ricci, οι οποίες ήταν γνωστές στους μαθηματικούς από το 1900, αλλά άγνωστες στους φυσικούς, και άγνωστες στον ίδιο τον Hilbert. Με δυο λόγια, ο Αϊνστάιν εργάστηκε σαν μαθηματικός και ανακάλυψε δύο βασικές ταυτότητες που απορρέουν από τη ρημάνεια γεωμετρία.

Στην τρίτη περίπτωση των σχέσεων μαθηματικών και φυσικής, έχουμε τη δεύτερη επιστήμη να προηγείται της πρώτης. Λόγου χάρη, τα σημερινά μαθηματικά αδυνατούν να αντιμετωπίσουν εκείνα τα φαινόμενα της υδροδυναμικής στα οποία παρουσιάζονται στροβιλώδεις ροές. Είναι γνωστά βέβαια ορισμένα στοιχεία, όπως η σταθερά του Reynolds, αλλά δεν υπάρχει πραγματική μαθηματική περιγραφή και εξήγηση του φαινομένου του στροβιλισμού. Άλλωστε, ο John von Neumann έλεγε: «Προσπαθώ να φτιάξω ηλεκτρονικούς υπολογιστές, διότι πάνω σ' αυτούς θα επιτύχουμε προσομοιώσεις στροβιλισμών, οπότε ίσως μπορέσουμε να μελετήσουμε καλύτερα αυτά τα φαινόμενα και να ανακαλύψουμε τα μαθηματικά που τα περιγράφουν».

Θά 'θελα μάλιστα να τονίσω ότι υπάρχουν και άλλοι τομείς της φυσικής, εκτός από την υδροδυναμική, στους οποίους συναντάμε άλυτα μαθηματικά προβλήματα. Νομίζω ότι η ίδια η κβαντική μηχανική εξακολουθεί να έχει προβλήματα, τα οποία είναι υποχρεωμένη να μελετά προσεγγιστικά. Όλη η περίφημη επανακανονικοποίηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά μόνον προσεγγίσεις· δηλαδή «κόβουν» άκρα από τις εξισώσεις για να μπορέσουν να «πέσουν» σε πιο πεπερασμένες τιμές των λύσεων και να αποφύγουν τους απειρισμούς σ' αυτές. Αλλά και οι σύγχρονες κοσμολογικές θεωρίες για τα πληθωριστικά σύμπαντα, όπως και οι πρόσφατες θεωρίες των χορδών, αντιμετωπίζουν προβλήματα που η επίλυσή τους προσκρούει στον τοίχο της μαθηματικής δυσκολίας.

Πέραν όμως από τους τρεις προαναφερθέντες τύπους σχέσεων των μαθηματικών με τη φυσική, πρέπει να υπογραμμίσουμε την τέταρτη και πιο βαθιά σχέση τους, που έγκειται στη μη ταύτισή τους και οφείλεται στην ύπαρξη τεράστιων κλάδων της μαθηματικής επιστήμης οι οποίοι δεν έχουν και ούτε μπορούν να αποκτήσουν φυσική «ανταπόκριση», δηλαδή αντιστοιχία στον φυσικό κόσμο. Λόγου χάρη, απλούστατα πράγματα, όπως το άπειρο, τα άπειρα άπειρα της κλιμάκωσης του Cantor, δηλαδή $2^{\aleph}$, $2^{2^{\aleph}}$, ... Τι φυσικό νόημα έχει ή θα μπορέσει να αποκτήσει ποτέ αυτή η ακολουθία; Το ίδιο ερώτημα ισχύει και για τις «τερατώδεις» τοπολογίες των Bourbaki, κ.ά. Αλλά και αυτοί ακόμη οι πραγματικοί αριθμοί, αν εξαιρέσουμε τους ακεραίους και μερικούς ρητούς, δεν ανταποκρίνονται σε καμία φυσική πραγματικότητα, δεν έχουν κανένα φυσικό νόημα. Εντούτοις, οι άρρητοι, και ιδίως οι πραγματικοί άρρητοι, όχι οι αλγεβρικοί και οι διαφορικοί, αλλά οι μη υπολογίσιμοι άρρητοι, οι οποίοι είναι σχεδόν το σύνολο των πραγματικών (οι υπολογίσιμοι πραγματικοί αποτελούν νησίδες μέσα σ' έναν τεράστιο ωκεανό), αποτελούν τους αριθμούς πάνω στους οποίους δουλεύουν οι μαθηματικοί. Γι' αυτό το λόγο δεν παραδέχομαι και τη νευρολογική θεωρία που αναφέρατε, και η οποία θα αφορούσε το πολύ τη στοιχειώδη αριθμητική και την ευκλείδεια γεωμετρία. Αν πάρει κανείς τη δαρβινική άποψη (και ο Φρόυντ, παραδόξως, υποστηρίζει, ώς ένα ορισμένο σημείο, μια καντιανοδαρβινική άποψη), έχουμε *a priori* μορφές σκέψης, μεταξύ των οποίων, φυσικά, και ορισμένες μαθηματικές, οι οποίες επελέγησαν-διαμορφώθηκαν μέσα από τη διαδικασία της φυσικής επιλογής. Έστω, λοιπόν, ότι έτσι δημιουργήθηκε ο μηχανισμός με τον οποίο μπορούμε να σκεφτόμαστε. Έστω, επίσης, ότι οι ανάγκες της πραγματικής μας επιβίωσης μας επιβάλλουν να μπορούμε να μετρήσουμε π.χ. ένα κοπάδι κατσίκες. Κατά τι μας επιβάλλουν να αποδείξουμε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο, σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα του Ευκλείδη; Εξάλλου, αυτή η «εξήγηση» αφορά και τα ζώα, και συνεπώς δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα. Με άλλα λόγια, στο μέτρο που ο εγκέφαλός μας αποτελεί προϊόν της δαρβινικής εξέλιξης, είναι προορισμένος να συλλαμβάνει τη φυσική πραγματικότητα μέσω μαθηματικών εννοιών και κατασκευών, που ανταποκρίνονται στη συνολοταυτιστική διάσταση αυτού που ονομάζω η πρώτη φυσική στιβάδα, δηλαδή η στιβάδα της άμεσης δεδομένης φύσης, συμπεριλαμβανομένης και της βιολογικής φύσης. Επί παραδείγματι, ο χώρος είναι τοπικά, έστω και αν δεν είναι τελικά, ευκλείδειος. Δεν είναι τελικά ευκλείδειος για λόγους γενικής θεωρίας της σχετικότητας, και ίσως δεν είναι γενικά ευκλείδειος για λόγους μη ευκλείδειας τοπολογίας του υπομικρόκοσμου (βλ. απόψεις Wheeler κ.ά.). Αλλά, ως «ικανός κατά την χρείαν», όπως λέει ο Αριστοτέλης, δηλαδή όσο χρειάζεται για την πρακτική, ο χώρος είναι ευκλείδειος τοπικά και στην πρώτη του στιβάδα. Μέσα σ' αυτό τον ευκλείδειο χώρο λειτουργούν και τα ζώα και τα φυτά κλπ.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα ζώα, έστω και αν δεν έχουν συνείδηση ότι το κάνουν, λύνουν θεωρήματα διαφορικού λογισμού. Η καμπύλη καταδιώξεως ενός λαγού από έναν σκύλο ελαχιστοποιεί το χρόνο στον οποίο ο σκύλος θα φτάσει το λαγό. Αν ο λαγός αποβλέπει να φτάσει κάπου, ο σκύλος θα κάνει μια καμπύλη η οποία ελαχιστοποιεί το χρόνο στον οποίο θα τον προλάβει· ο σκύλος λύνει εδώ μια διαφορική εξίσωση. Συνεπώς, αν υπάρχουν αυτές οι δομές, τις μοιραζόμαστε τουλάχιστον με τα θηλαστικά, αλλά, μάλλον, και με πολλά άλλα ζώα.

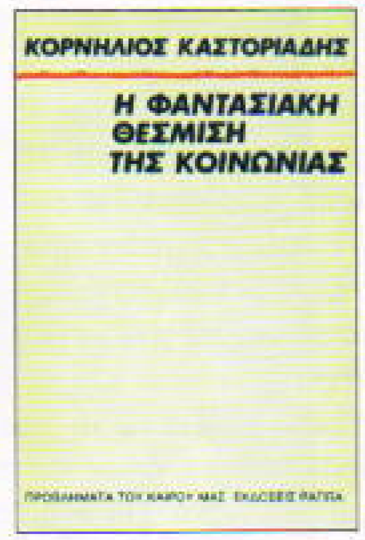
Αυτή η άποψη δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για μας, από τη στιγμή που μας απασχολεί *κυρίως* ο χωρισμός ανάμεσα στο ανθρώπινο ον και στο απλώς έμβιο ον· διότι υπάρχει μια τεράστια συνέχεια, αλλά υπάρχει και χωρισμός. Αυτός ο χωρισμός εμφανίζεται μεταξύ των άλλων και στα μαθηματικά. Εμφανίζεται γενικότερα με τη μη λειτουργικότητα των περισσότερων πραγμάτων τα οποία κάνει ο άνθρωπος.

Ενώ το έμβιο ον είναι λειτουργικό σε ό,τι κάνει, εκτός από ελάχιστα ίσως πράγματα, εμείς, αντιστρόφως, είμαστε μη λειτουργικοί σχεδόν στα πάντα, εκτός από ελάχιστα πράγματα. Επί παραδείγματι, η μουσική δεν είναι λειτουργική, το ίδιο και η ποίηση και τα μαθηματικά· αλλά και η φυσική, και ιδιαίτερα η κοσμολογία, δεν βλέπω να έχουν καμία λειτουργικότητα. Κι αυτό έχει σχέση με την ανάδυση στο ανθρώπινο ον του ριζικού φαντασιακού ως ιδιωτικού, δηλαδή ως πηγής της φαντασίας του επιμέρους ανθρώπου, και του ριζικού φαντασιακού ως κοινωνικού, δηλαδή ως πηγής κοινωνικής δημιουργίας. Και εκεί ανήκει και αυτό το τεράστιο μέρος των μαθηματικών που υπερβαίνει την απλή αριθμητική και την απλή γεωμετρία.

Θα έλεγα, λοιπόν, απαντώντας στο αρχικό ερώτημά σας για τη φύση τους, ότι τα μαθηματικά, στον τεράστιο βαθμό που υπερβαίνουν τη συνολοταυτιστική διάσταση κάθε όντος, δημιουργούν ιδεατότητες, όχι πλατωνικές, ήτοι υπερπραγματικές, αλλά σημασίες που έχουν μιαν ισχύ όχι κατ' ανάγκην *de facto*, αλλά *de jure*, όπως θα έλεγαν οι νομικοί, δηλαδή σημασίες για τις οποίες ο χρόνος είναι, κατά κάποιον τρόπο, αδιάφορος. Τα μαθηματικά δημιουργούν σημασίες, οι οποίες, όσον αφορά κάθε ανθρώπινο ον, επιβάλλονται λογικά αφότου γίνουν αποδεκτά τα αξιώματα. Εδώ υπάρχει η κλασική ερώτηση: ίσχυε το πυθαγόρειο θεώρημα προ 200.000.000 ετών; Πρώτη απάντηση: Ναι, διότι αφορά *και* την απτή πραγματικότητα, καθόσον η γεωμετρία του σύμπαντος *τοπικά* είναι ευκλείδεια, ακόμη και μέσα στη γενική θεωρία της σχετικότητας. Το πυθαγόρειο θεώρημα ίσχυε με αυτή την έννοια και προ 200.000.000 ετών, ως «εμπεδωμένο», ενσωματωμένο στην πραγματικότητα, δηλαδή ως ενυπάρχον στη συνολοταυτιστική μαθηματικοποιήσιμη διάσταση της πραγματικότητας. Τώρα, το θεώρημα του Ευκλείδη για το άπειρο πλήθος των πρώτων αριθμών καθώς και το θεώρημα των Hadamard και de la Vallée Poussin για την προσέγγιση του πλήθους των πρώτων αριθμών οι οποίοι δεν είναι μεγαλύτεροι από έναν δεδομένο φυσικό αριθμό, ίσχυαν προ 200.000.000 ετών; Νομίζω ότι η ερώτηση δεν έχει νόημα. Και θα έλεγα ότι θα ίσχυαν, μόνον με την έννοια ότι κάθε σκεπτόμενο ον, την εποχή εκείνη, εάν δούλευε αρκετά και, κυρίως, αν είχε αρκετή φαντασία, θα «έφτανε» σ' αυτά τα θεωρήματα.

Ερ.: *Πώς κρίνετε το γεγονός ότι αιώνες παραδοσιακής φιλοσοφικής σκέψης δεν έριξαν τόσο φως στα ερωτήματα για τη φύση της νόησης και της ελεύθερης βούλησης, όσο οι πρόσφατες επιστημονικές εξελίξεις στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης και της νευροβιολογίας; Είναι δυνατή σήμερα μια αυτόνομη προσέγγιση αυτών των ερωτημάτων, με τη βοήθεια μόνον του κλασικού οπλοστασίου της φιλοσοφίας, ή μήπως, τελικά, το πανάρχαιο φιλοσοφικό πρόβλημα νου-σώματος θα λυθεί κάποτε από την επιστήμη, έστω και όχι σύντομα;*

Απ.: Νομίζω ότι μόνο το συνολοταυτιστικό μέρος της σκέψης μπορεί να αλγοριθμοποιηθεί. Αυτά είναι τα όρια κάθε τεχνητής νοημοσύνης. Εγώ περιμένω με πολύ ενδιαφέρον, αλλά όχι μεγάλη ανυπομονησία, την κατασκευή ενός υπολογιστή με λογισμικό ικανό να δημιουργήσει καινούργια, μη αντιφατικά, μη τετριμμένα και κυρίως γόνιμα μαθηματικά αξιώματα. Επίσης, θα δεχτώ ότι υπάρχει πραγματική δημιουργική σκέψη στους υπολογιστές, όταν αυτοί θα μας «δώσουν» καινούργιες μορφές τέχνης. Θά 'θελα έναν υπολογιστή ο οποίος από μόνος του, *αυθόρμητα*, θα παθιαζόταν να αποδείξει το μεγάλο θεώρημα του Fermat (υπό την προϋπόθεση ότι δεν θα γνώριζε την απόδειξη του Wiles) ή τις εικασίες του Goldbach και του Riemann. Η ανθρώπινη σκέψη είναι δημιούργημα της ανθρώπινης φαντασίας, της επιθυμίας για γνώση, του πάθους και της ηδονής για την ανακάλυψη της αλήθειας. Δεν καταλαβαίνω καν τι θα πει «σκεπτόμενη μηχανή», δηλαδή κάτι που θα σκεφτόταν χωρίς να έχει πάθος, ηδονή, φαντασία, επιθυμία. Εκτός αν κατασκευαστεί κάποτε ένας «τεχνητός άνθρωπος», πράγμα το οποίο βέβαια δεν θα αποδείξει τίποτε, ή μάλλον θα αποδείξει ακριβώς το αντίθετο αυτού που επιδιώκουν οι οπαδοί της τεχνητής νοημοσύνης. Θα αποδείξει δηλαδή ότι η μόνη μηχανή που μπορεί να μιμηθεί την ανθρώπινη σκέψη είναι μια πλήρης μίμηση του ανθρώπου ώς την τελευταία του λεπτομέρεια. Νομίζω ότι ο Edelman έχει δίκιο όταν λέει ότι «ακόμη και αν η επιστήμη επιτύχει να επανεντάξει τη νόηση στη φύση, δεν θα μπορέσει να περιγράψει επαρκώς την ατομική ή την ιστορική εμπειρία», αλλά δυστυχώς δεν προχωρεί έτι περαιτέρω τη σκέψη του.



Ερ.: *Σε ποιο βαθμό μπορούν σήμερα οι φιλόσοφοι να παρακολουθούν τις εξελίξεις της σύγχρονης επιστήμης, λόγου χάρη της θεωρητικής φυσικής, και να ασχολούνται με τα φιλοσοφικά προβλήματα που αυτή θέτει, όταν η κατανόηση των τελευταίων προϋποθέτει την εξοικείωση των φιλοσόφων με εννοιολογικά εργαλεία και μαθηματικές τεχνικές εξαιρετικά δυσνόητες για τους μη ειδικούς; Πόσο εφικτό είναι για το φιλόσοφο να ασχοληθεί με τα φιλοσοφικά θεμέλια π.χ. της κβαντικής θεωρίας πεδίου, αν δεν γνωρίζει ο ίδιος καλή φυσική; Πώς αντιμετωπίσατε εσείς το πρόβλημα και τι προτείνετε στους συναδέλφους σας φιλοσόφους που έχουν ενδιαφέρον για την επιστήμη;*

Απ.: Η ερώτηση είναι πάρα πολύ σοβαρή, όπως και το ίδιο το θέμα είναι τρομερά σοβαρό και δύσκολο. Νομίζω ότι, ώς ένα σημείο τουλάχιστον, είναι δυνατή μια σοβαρή εξοικείωση του φιλοσόφου με θέματα της επιστήμης. Φυσικά, χρειάζεται πολλή δουλειά, πολύ πείσμα, πάθος και επιθυμία για γνώση.

Όταν πήγα στο Παρίσι, το 1946, παρακολούθησα μόνο για έναν χρόνο τις παραδόσεις του Bachelard (ήταν ο τελευταίος χρόνος που δίδασκε) και θυμάμαι το θαυμασμό και συνάμα τον εκνευρισμό που μου προκαλούσε, διότι τότε δεν είχα πολυασχοληθεί με τις θετικές επιστήμες, καίτοι πάντα με σαγήνευαν, και αισθανόμουν φτωχός σε γνώσεις, έχοντας μόνον τα θλιβερά εφόδια που μου είχε προσφέρει η ελληνική μέση εκπαίδευση. Θυμάμαι πως αισθανόμουν δέος και θαυμασμό όταν έγραφε στον πίνακα τις τέσσερις περίφημες εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού του Maxwell ή τα μαθηματικά της θερμοδυναμικής.

Από τον καιρό εκείνο δούλεψα όσο μπορούσα, ιδίως τα μαθηματικά. Δυστυχώς, όχι αρκετά.

Υπάρχουν θέματα στα μαθηματικά, πέρα από τις τεχνικές, τα οποία είναι πολύ βασικά, και χρειάζονται τεράστια δουλειά. Εμένα, λόγου χάρη, με παιδεύει το περίφημο θεώρημα Löwenheim-Skolem, που λέει ότι κάθε «συνεπής θεωρία του συνόλου των πραγματικών αριθμών είναι δεκτική ενός απαριθμήσιμου μοντέλου». Πρόκειται για ένα τρομερό θεώρημα, το οποίο, με μια έννοια, καταργεί τη διάκριση μεταξύ των πραγματικών και των απαριθμήσιμων συνόλων αριθμών, ενώ, με μια άλλη, μας πηγαίνει σε άλλα πολύ πιο σύγχρονα θέματα, όπως στην πληθικότητα των πραγματικών αριθμών κλπ. Θα ήθελα να μπορέσω να ασχοληθώ σε βάθος με αυτό το θεώρημα, δηλαδή να καταλάβω πραγματικά πώς αποδεικνύεται και ποια είναι η σημασία του. Δυστυχώς δεν μπόρεσα να το κάνω μέχρι σήμερα, ούτε θα βρω φαντάζομαι ποτέ τον καιρό να ασχοληθώ μαζί του· αλλά τέλος πάντων, εργάζεται κανείς κατά το δυνατόν.

Ερ.: *Πώς προκύπτει και σε τι συνίσταται, κατά την κρίση σας, μια επιστημονική επανάσταση; Πώς αξιολογείτε τη θέση του Thomas Kuhn, ότι αυτή αποτελεί ένα ασυνεχές βήμα που απαιτεί την περιγραφή των δεδομένων μέσω νέων θεωρητικών εννοιών και έρχεται να καταργήσει μια περίοδο «Κανονικής Επιστήμης», όπου οι δραστηριότητες των επιστημόνων καθοδηγούνταν από συγκεκριμένα υποδείγματα «επιτυχούς πρακτικής» (τα περίφημα «Παραδείγματα»), για να δημιουργήσει εν τέλει κι αυτή, με τη σειρά της, μια νέα «Κανονική Επιστήμη»;*

Απ.: Ασφαλώς παραδέχομαι την αντίληψη του Kuhn και την πολύ σοβαρή δουλειά του. Θα πρόσθετα μόνο μερικά σχόλια. Πρώτα πρώτα, ότι οι επαναστάσεις, αυτό που ονομάζει καινούργια Παραδείγματα, είναι δημιουργίες νέων φαντασιακών σχημάτων. Αυτό γίνεται εμφανέστατο όταν προσπαθεί κανείς να σκεφτεί τη διάσταση μεταξύ του νευτώνειου και του αϊνσταϊνικού φαντασιακού σχήματος. Βλέπει πολύ καθαρά το κοσμοείδωλο που φέρνει στο μυαλό του το καθένα από αυτά τα δύο φαντασιακά σχήματα. Ένας άπειρος χώρος, όπου τα πάντα επικοινωνούν μεταξύ τους αυτοστιγμεί, όπου υπάρχει δράση εξ αποστάσεως επίσης στιγμιαία, η βαρύτητα, όπου υπάρχουν σωματίδια, τα οποία έλκονται και απωθούνται, κλπ., είναι περίπου το κοσμοείδωλο το οποίο είχαμε όλοι μας όταν ήμασταν έφηβοι, δηλαδή όταν ξεφύγαμε από μυθικές ιδέες. Και βλέπει κανείς το άλλο φαντασιακό σχήμα, το οποίο θα λέγαμε ότι έχει κάποια σχέση με την τέχνη της εποχής μας, δηλαδή το κοσμοείδωλο της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, όπου υπάρχουν τοπικές στρεβλώσεις του χωρόχρονου οι οποίες αντιστοιχούν με την ύλη, και όπου ταυτοχρόνως η ύλη προκαλεί στρεβλώσεις του χωρόχρονου και κάθε διάδοση σημάτων, ακόμη και των βαρυτικών, γίνεται με πεπερασμένη ταχύτητα, κλπ.

Έχουμε εδώ δύο καθαρά φαντασιακές δημιουργίες, δύο εικόνες, δύο σχήματα, ας πούμε, τα οποία όμως, φυσικά, διαφέρουν από τις εικόνες που έχει στο κεφάλι του ένας ποιητής, επειδή υφίστανται αυστηρό έλεγχο από τη φυσική πραγματικότητα και συναντώνται με αυτήν, το καθένα στο επίπεδό του. Κατά δεύτερον, αυτή η ασυνέχεια την οποία υπογραμμίζει ο Kuhn συνοδεύεται, τουλάχιστον στην ιστορία της ελληνοδυτικής επιστήμης, από μια ιδιόρρυθμη συνέχεια. Δηλαδή, όσο και αν έχουν τεράστια διαφορά τα μοντέρνα μαθηματικά από τα αρχαία ελληνικά, πρόκειται πάντα για μαθηματικά. Τούτο ισχύει ακόμη και για τη φυσική, παρότι η σύγχρονη φυσική έχει τεράστια διαφορά από την αριστοτελική, πολύ μικρότερη όμως από την αρχιμήδεια. Θυμάστε ασφαλώς ότι ο Penrose τοποθετεί την αρχιμήδεια θεωρία, όπως και την ευκλείδεια, μεταξύ των θεωριών που ονομάζει υπέροχες, εξαίρετες. Διότι, πράγματι, η θεωρία των μοχλών του Αρχιμήδη ή η υδροστατική του είναι «ζώα» της ίδιας οικογένειας με τις σύγχρονες φυσικές θεωρίες.

Θα έλεγα ότι αυτή η συνέχεια έχει βαθείς λόγους, δηλαδή ότι υπάρχει ένα ελληνικό Υπερ-Παράδειγμα, για να χρησιμοποιήσω τον όρο του Kuhn, ή Μετα-Παράδειγμα σχετικά με το τι είναι επιστημονική σκέψη, και το οποίο εξακολουθεί να μας διέπει.

Και αυτό μπορώ να το συνοψίσω σε μερικές ιδέες: α) Στο «λόγον διδόναι», δηλαδή γιατί το λες αυτό, και μη μου πεις ότι το λέω επειδή αναφέρεται στο Κοράνιο ή στην Αγία Γραφή ή έστω και στο σύγγραμμα, ας πούμε, του Weinberg ή στο κλασικό εγχειρίδιο φυσικής του Feynman. Διότι, ακόμη και αν αναφέρεται στο τελευταίο, ίσως και να μην είναι αληθινό, μπορούμε να το συζητήσουμε. Λόγον διδόναι, λοιπόν. β) Στο τι είναι δεκτό ως απόδειξη, δηλαδή ως αυστηρή λογική ή πειραματική επαλήθευση, αφού κανένας άλλος τρόπος αποδείξεως δεν υπάρχει. γ) Στη μεταφυσική θέση, την οποία συμμερίζεται η σύγχρονη φυσική, μιας εν μέρει τουλάχιστον υπάρχουσας πρακτικής δυνατότητας εξήγησης και εκλογίκευσης του κόσμου. Όταν ο Αϊνστάιν λέει ότι «ο Θεός δεν παίζει ζάρια», σημαίνει ότι πιστεύει, έστω και αν αυτό είναι αναπόδεικτο, πως υπάρχουν λογικές αλήθειες και κατανοήσιμες αλληλουχίες ανάμεσα στα πράγματα.

Ερ.: *Στον κοινωνικό προβληματισμό επιστημόνων, φιλοσόφων, αλλά και του απλού λαού, προστέθηκαν πρόσφατα τα προβλήματα που γεννούν για την ηθική οι δυνατότητες που μας προσφέρουν η σύγχρονη γενετική, η μοριακή βιολογία και η βιοτεχνολογία. Τίθεται και πάλι το παλαιό δύσκολο ερώτημα: Ποιος αποφασίζει για τον έλεγχο της επιστημονικής προόδου (ή «προόδου»), με ποια κοινωνική νομιμοποίηση και μέσω ποιων μηχανισμών;*

Απ.: Η απάντησή μου υπάρχει στο κείμενο «Η τεχνοεπιστήμη», που περιέχεται στις *Ομιλίες στην Ελλάδα*. Κανείς δεν αποφασίζει για τον έλεγχο της επιστημονικής προόδου, ούτε για τις προϋποθέσεις της εφαρμογής της· δεν υπάρχει καμία κοινωνική νομιμοποίηση και κανένας μηχανισμός που να ασχολείται με το θέμα. Δηλαδή, υπάρχει μια αυτονόμηση της τεχνοεπιστήμης η οποία είναι σαν ένα αφηνιασμένο άλογο, ή σαν εξπρές που έχει εκτροχιαστεί. Η τεχνοεπιστήμη τραβά τον δικό της δρόμο, χωρίς να διερωτάται αν αυτά που κάνει έχουν σημασία και επιπτώσεις στον άνθρωπο, στη ζωή κλπ. Αυτές οι σκέψεις έρχονται μόνον εκ των υστέρων. Και αυτό γεννά, για πρώτη φορά σε μια οιονεί δημοκρατική ή ψευτοδημοκρατική κοινωνία, το τεράστιο και για μένα πολύ οδυνηρό ερώτημα, ώς ποιο βαθμό και κατά ποιο τρόπο μπορούν να υπάρξουν θεσμοί που να περιορίζουν την ελευθερία της έρευνας. Το ότι το ερώτημα δεν είναι τρελό, φασιστικό ή σταλινικό αποδεικνύεται αμέσως από το γεγονός ότι κανένας δεν θεωρεί σήμερα ότι είναι επιτρεπτή μια έρευνα, έστω κι αν πρόκειται απλώς για «αξιοποίηση» τεχνικών κατασκευής ατομικής βόμβας, όπου θα χρησιμοποιείται ως σχάσιμος πυρήνας κάποιος του οποίου τα προϊόντα της σχάσης είναι περισσότερο ραδιενεργά απ' ό,τι συνήθως. Είναι επιτρεπτή αυτή η κατασκευή; Και αν κάποιος θέλει να ικανοποιήσει την επιστημονική του περιέργεια, με ποιο δικαίωμα του το απαγορεύουμε; Το απαγορεύουμε διότι ενδεχομένως φοβόμαστε τις επιπτώσεις. Σταματάει αυτό στα πυρηνικά όπλα; Κατ' αρχήν δεν σταματάει πουθενά. Ασφαλώς όχι στη φυσική, ούτε στη βιολογία. Αλλά ούτε και στα μαθηματικά· θυμάμαι μια αφελέστατη δήλωση του διάσημου άγγλου μαθηματικού Hardy, ο οποίος στο βιβλίο του *Η απολογία ενός μαθηματικού* αναφέρει ότι επέλεξε ως επιστήμη του τα μαθηματικά διότι σκέφτηκε ότι είναι η μόνη επιστήμη η οποία ποτέ δεν μπορεί να κάνει κακό σ' ένα ανθρώπινο ον! Και αυτό το έλεγε ο Hardy το 1940, παρότι όταν μαθαίνει κανείς διαφορικό λογισμό, τουλάχιστον όπως τον έμαθα εγώ, μια από τις πρώτες εξισώσεις τις οποίες διδάσκεται είναι γνωστή, στα γαλλικά τουλάχιστον, ως η «εξίσωση των πυροβολητών»· διότι είναι η διαφορική εξίσωση που επιτρέπει να υπολογίσει κανείς τη διαδρομή ενός βλήματος, το σημείο πτώσης του, κλπ.

Λοιπόν, αυτό το ερώτημα μένει ανοιχτό, και εγώ νομίζω ότι μόνο μια έλλογη και σοφή κοινωνία θα μπορούσε να το απαντήσει. Γι' αυτό είμαι αρκετά απαισιόδοξος. Γίνομαι μάλιστα όλο και περισσότερο απαισιόδοξος, καθώς βλέπω ότι όλος ο ζωτικός χυμός της επιστήμης ολοένα και περισσότερο πηγαίνει προς τις εφαρμογές, και ολοένα και λιγότερο προς τη βασική θεωρία. Αυτό είναι σημείο παρακμής, καθαρά σημείο αλεξανδρινισμού. Την πρώτη ατμομηχανή δεν την έφτιαξε ούτε ο Ευκλείδης ούτε ο Αρχιμήδης· την κατασκεύασε ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς τον 1ο αιώνα, διότι και τότε το ενδιαφέρον ήταν στραμμένο περισσότερο προς τις εφαρμογές της επιστήμης και λιγότερο προς τη θεωρία.

Ερ.: *Ποιος μπορεί να είναι ο «απελευθερωτικός» ρόλος της επιστήμης στην προσπάθεια μιας κοινωνίας για αυτοθέσμισή της;*

Απ.: Φυσικά υπάρχει ένας τεράστιος ανθρώπινος ρόλος της τεχνοεπιστήμης, αν αφήσουμε προς στιγμήν κατά μέρος (αν βέβαια αυτό είναι δυνατόν) τη σημερινή ιστορική της κατεύθυνση, με την ξέφρενη πορεία της προς τα εμπρός, κατά την οποία δεν διερωτώμεθα ούτε από πού ήρθαμε ούτε πού πηγαίνουμε ούτε τι σκοπό δίνουμε σε όλα αυτά που κάνουμε.

Υπάρχει φυσικά ένας τεράστιος απελευθερωτικός ρόλος της επιστήμης, τόσο στο κοινότοπο επίπεδο των σχέσεών μας με τις θρησκείες, τις προλήψεις ή ό,τι άλλο θέλετε, όσο και στο κεντρικό, αν μπορώ να πω —διότι η λέξη είναι εκπορνευμένη— υπαρξιακό σημείο. Είναι αυτό που έλεγε ο Αριστοτέλης για το θαυμάζειν. Δηλαδή η επιστήμη μάς «ξεαποκτηνώνει», μας «ξεζωοποιεί», μας βγάζει από τη βασική ζωική μας διάσταση, ακριβώς διότι μας κάνει να θαυμάζουμε και να θέλουμε ταυτόχρονα να εξηγήσουμε, λόγου χάρη τον έναστρο ουρανό, ένα σκουλήκι που έρπει, κλπ. Στον πρώτο, τον ακατέργαστο, ας πούμε, σταθμό, προσθέτει έναν δεύτερο, πιο κατεργασμένο, και έναν τρίτο. Ο δεύτερος σταθμός είναι ασφαλώς όλες αυτές οι καταπληκτικές αλληλουχίες που υπάρχουν στο ον, δηλαδή ότι το ον έχει και την όψη ενός κόσμου, με την αρχαία ελληνική έννοια, μιας σχετικής τάξης και διάταξης, την οποία περίπου ανεξάντλητα προσπαθούμε να ανακαλύψουμε με την επιστήμη. Και ο τρίτος σταθμός είναι ότι πέρα απ' αυτόν τον κόσμο υπάρχει ένα χάος παντού.

Απ' αυτή την άποψη, μας δείχνει τα όρια και τη θνητότητά μας, και παράλληλα μας ξεχωρίζει. Έτσι, η επιστήμη είναι κάτι το αμέτρητα πολύτιμο. Τώρα, σε μια αυτοθεσμισμένη και φρόνιμη κοινωνία, όπως θα την έλεγα, αυτή η διάσταση της επιστήμης δεν μπορεί παρά να αξιοποιηθεί, ακόμη περισσότερο, με τη διάδοση των γνώσεων και την κατανόηση του τι είναι επιστήμη, του ότι δεν είναι ένα σύνολο από ρετσέτες, ότι ο σκοπός της δεν είναι μόνον να μπορεί να κατασκευάζει καλύτερα αυτοκίνητα και δεν ξέρω τι άλλο. Η επιστήμη μπορεί να μας βοηθήσει να προσεγγίσουμε εκ νέου την πραγματική, ποιητική και μυθική διάσταση της ανθρώπινης ύπαρξης.

Γραφ

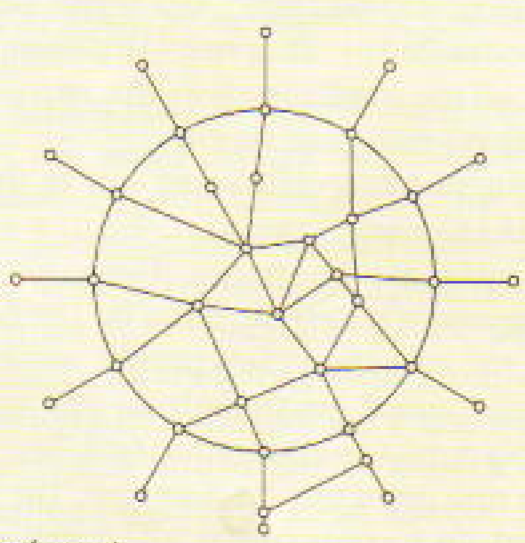
Γενεαλογικά δέντρ

Ο ΟΡΟΣ «ΓΡΑΦΗΜΑ» ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙείται στα μαθηματικά βασικά με δύο έννοιες. Η περισσότερο «κλασική» σημασία συνδέεται με καμπύλες σε ένα σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου που αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις ή εξισώσεις δύο μεταβλητών. Εδώ όμως θα αναφερθούμε στην άλλη σημασία του «γραφήματος»: στα διακριτά μαθηματικά και την τοπολογία είναι ένα διάγραμμα που παρουσιάζει ένα πλήθος σημείων, μερικά από τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές (όχι απαραίτητα ευθείες). Τα διαγράμματα των συστημάτων συγκοινωνίας, όπως οι γραμμές του μετρό ή τα σιδηροδρομικά δίκτυα που εμφανίζονται στους γεωγραφικούς χάρτες αποτελούν τυπικά παραδείγματα γραφημάτων (Σχήμα 1).[1]

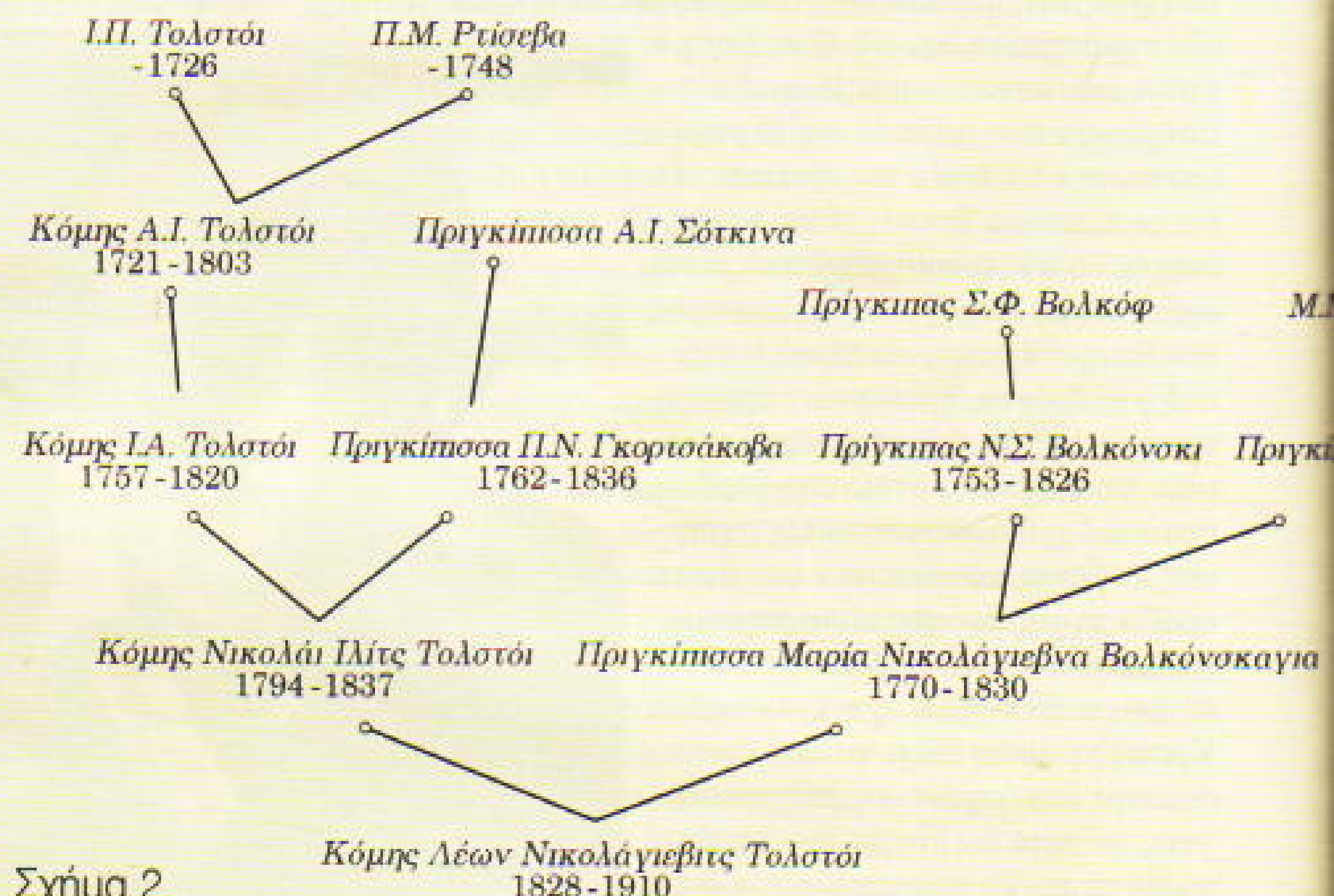
Τα σημεία ενός γραφήματος καλούνται κόμβοι ή κορυφές, και οι γραμμές που τα συνδέουν ονομάζονται ακμές. Το πραγματικά ουσιαστικό σε ένα γράφημα είναι ο τρόπος που συνδέονται οι κόμβοι μέσω των ακμών. Αν υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα των κόμβων δύο γραφημάτων, μέσω της οποίας σε οποιοδήποτε ζεύγος συνδεδεμένων κόμβων του ενός γραφήματος αντιστοιχούν συνδεδεμένοι κόμβοι του άλλου, θεωρούμε ότι τα δύο γραφήματα είναι ταυτόσημα.

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε ένα διαφορετικό παράδειγμα γραφήματος —το «ανιόν» γενεαλογικό δέντρο του μεγάλου συγγραφέα κόμη Λέοντος Νικολάγιεβιτς Τολστόι. Εδώ οι κορυφές του γραφήματος αντιπροσωπεύουν τα μέλη της οικογένειας του διάσημου ρώσου ευγενούς, και οι γραμμές που τα συνδέουν υποδηλώνουν σχέση γονέα-παιδιού. Στη θεωρία γραφημάτων ο όρος «δέντρο» σημαίνει ένα γράφημα χωρίς κύκλους —δηλαδή, ένα γράφημα που οι ακμές του δεν σχηματίζουν κλειστές διαδρομές. Με άλλα λόγια, σε ένα δέντρο δεν μπορείτε να ξεκινήσετε από έναν κόμβο, να διασχίσετε κάποιο πλήθος ακμών και να επιστρέψετε στον αρχικό κόμβο. Τα γενεαλογικά δέντρα είναι δέντρα σύμφωνα και με αυτή την έννοια, εφόσον δεν υπάρχουν στην οικογένεια γάμοι μεταξύ συγγενών.

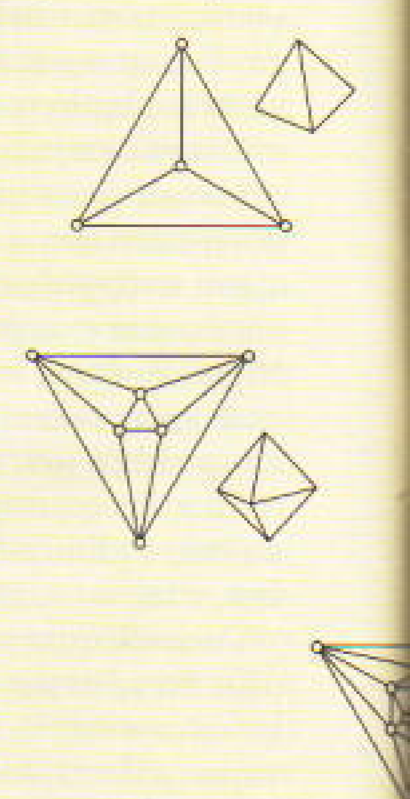
Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι ένα γράφημα-δέντρο μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο έτσι ώστε να μην τέμνονται οι ακμές του. Την ίδια ιδιότητα έχουν τα γραφήματα που σχηματίζονται από τις κορυφές και τις ακμές ενός κυρτού πολυέδρου. Στο Σχήμα 3 δίνονται παραδείγματα τέτοιων γραφημάτων και για τα πέντε κανονικά πολύεδρα. Ένα από αυτά τα γραφήματα —αυτό του τετραέδρου— έχει την εξής ιδιότητα: κάθε δύο κόμβοι του συν-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

1. Δείτε επίσης το άρθρο «Σήματα, γραφήματα και βασιλιάδες σε μια σπείρα» σε τούτο το τεύχος.

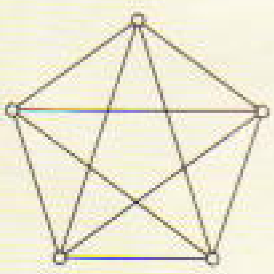
ήματα

αι δύστροποι γείτονες

Γσααντέγιεβα

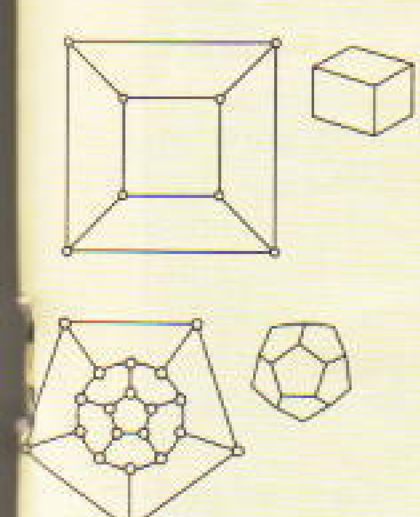
α Ε.Ν. Τρουμπέτσκαγια
1749-1799

δέονται με ακμή. Ένα γράφημα με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται *πλήρες*. Ένα ακόμη παράδειγμα πλήρους γραφήματος —για την περίπτωση των πέντε κόμβων— υπάρχει στο Σχήμα 4. Προσπαθήστε να το σχεδιάστε έτσι ώστε να μην τέμνονται οι ακμές του.

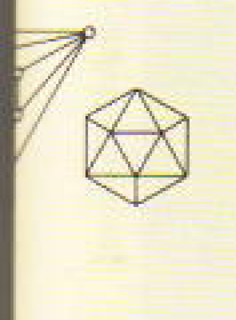


Σχήμα 4

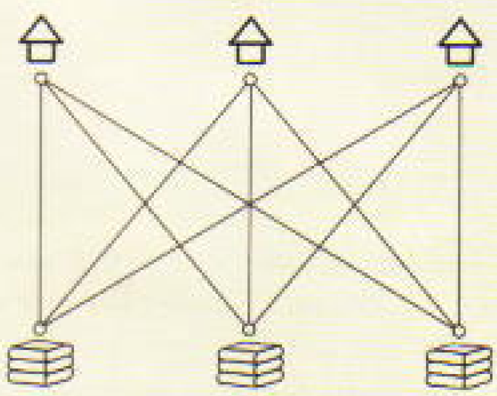
Δοκιμάσατε; Και ποιο ήταν το αποτέλεσμα; Δεν χρειάζεται να απαντήσετε —γνωρίζω προκαταβολικά τι θα πείτε! Δεν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε αυτό το γράφημα στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του. Είναι εξίσου αδύνατον με το να ικανοποιήσουμε τις επιθυμίες των τριών ανθρώπων όπως τις περιέγραψε κάποτε ο Lewis Carroll:



Ζούσαν σε τρία γειτονικά σπίτια και υπήρχαν κοντά τους τρία πηγάδια —ένα με νερό, ένα με βούτυρο και το τρίτο με μαρμελάδα. Συνήθιζαν να πηγαίνουν στα πηγάδια ακολουθώντας τα μονοπάτια που βλέπετε στο Σχήμα 5. Μια μέρα όμως καβγάδισαν και αποφάσισαν να κατασκευάσουν νέα μονοπάτια που δεν θα διασταυρώνονταν μεταξύ τους. Στο Σχήμα 6 βλέπετε μία από τις προσπάθειές τους.



Αποδείχτηκε ότι τα γραφήματα των Σχημάτων 5 και 6 έχουν αποφασιστική σημασία για να καθορίσουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο —δηλαδή αν μπορούμε να το σχεδιάσουμε στο επίπεδο έτσι ώστε να μην τέμνεται με τον εαυτό του.



Σχήμα 5

Ο πολωνός μαθηματικός Kazimierz Kuratowski και ο ρώσος μαθηματικός Lev Pontryagin απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως υπογράφημα κανένα από αυτά τα δύο γραφήματα (το πλήρες γράφημα των 5 κόμβων και το γράφημα «σπιτιών-πηγαδιών»).[2]

Σχήμα 6

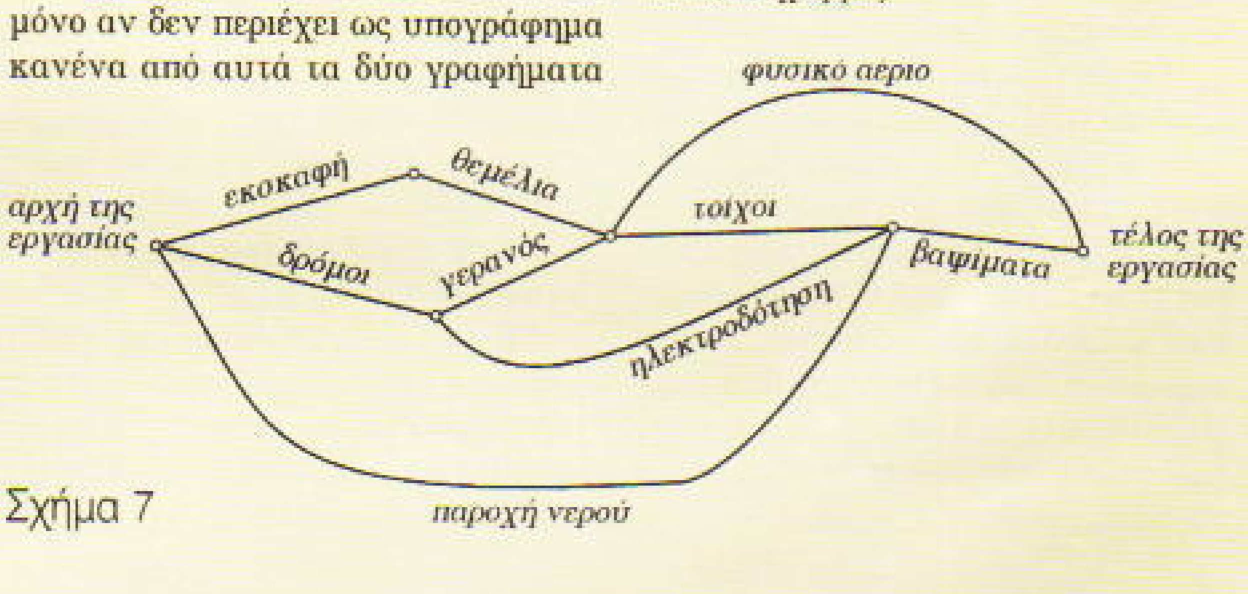
Συναντάμε γραφήματα στα διαγράμματα δομής των προγραμμάτων των υπολογιστών και σε μοντέλα δικτύων για κατασκευαστικές εργασίες, όπου οι ακμές αντιστοιχούν σε διαφορετικά στάδια της εργασίας και η διευθέτησή τους δείχνει τη σειρά με την οποία πρέπει να ολοκληρωθούν —δηλαδή, τα μέρη της εργασίας που πρέπει πρώτα να τελειώσουν πριν ξεκινήσουν τα υπόλοιπα (Σχήμα 7).

Τα γραφήματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα για να επιλύουμε σπαζοκεφαλιές. Στους «Παιχνιδότοπους» τα έχουμε χρησιμοποιήσει πολλές φορές (δείτε, για παράδειγμα, το «Νικηφόρες στρατηγικές» στο προηγούμενο τεύχος του *Quantum*).

Η θεωρία γραφημάτων αποτελεί μέρος της τοπολογίας όπως και της συνδυαστικής. Η τοπολογική της φύση πηγάζει από το γεγονός ότι οι ιδιότητες του γραφήματος είναι ανεξάρτητες από τη θέση των κόμβων του και το σχήμα των ακμών του. Από την άλλη πλευρά, η «γλώσσα» των γραφημάτων αποδείχτηκε εξαιρετικά κατάλληλη για τη διατύπωση συνδυαστικών προβλημάτων, πράγμα που καθιστά τη θεωρία γραφημάτων ένα ισχυρό εργαλείο της συνδυαστικής.

—Anatoly Savin

2. Στην πιο πρόσφατη βιβλιογραφία, αυτό το γράφημα ονομάζεται γράφημα «υπηρεσιών», επειδή παρουσιάζει το πρόβλημα της σύνδεσης τριών σπιτιών με την παροχή, ας πούμε, νερού, γκαζιού και ηλεκτρικού χωρίς να διασταυρώνονται οι γραμμές.



Σχήμα 7

Η φυσική της ηχομόνωσης

Μια αστυνομική ιστορία σε διήγηση του δρ. Τζον Γουάτσον

Roman Y. Vinokur

ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΝΑ ΗΡΕΜΗΣΩ, ΑΛΛΑ είμαι αναγκασμένος ν' ακούω συνεχώς την τρομερή βουή του τραμ που περνάει ακριβώς έξω απ' το σπίτι μου. Τα νεύρα μου είναι τεντωμένα, αλλά και το γραφείο μου δεν είναι το καταλληλότερο μέρος για να δέχομαι ασθενείς· οι θόρυβοι εισβάλλουν συνεχώς από το δρόμο. Τα χοντρά τούβλα του σπιτιού ανακλούν τους ήχους, αλλά το παράθυρο, ακόμη και κλειστό, αφήνει τους περισσότερους να περνούν. Μετανιώνω που δεν ήμουν επιμελής όταν σπούδαζα φυσική στο πανεπιστήμιο. Αυτός ο κλάδος της επιστήμης κρατάει τα κλειδιά της λύσης πολλών συναρπαστικών προβλημάτων και μυστηρίων.

Αλήθεια, γιατί να μην ακολουθήσω τη συμβουλή του φλύαρου τζαμά που με επισκέφθηκε χθες το βράδυ; Δεν τον προσκάλεσα εγώ, ήρθε μόνος του για να βελτιώσει την ηχομόνωση του παραθύρου μου. Ξόδεψε αρκετό χρόνο δίπλα στο παράθυρο. Έφυγε σχετικά αργά, όταν τα παράθυρα σκοτείνιασαν και οι γείτονες πήγαν για ύπνο. Μου συνέστησε διπλά τζάμια, αντί των μονών που έχω τώρα. Δύο επάλληλα τζάμια, το καθένα πάχους 3 mm, μ' ένα στρώμα αέρα πάχους 15 mm μεταξύ τους...

«Συγνώμη που διακόπτω, αλλά μια τέτοια συμβουλή είναι άχρηστη», είπε ο Σέρλοκ Χολμς με το συνηθισμένο του ύφος. «Πίστεψέ με, το πάχος του στρώματος του αέρα στην περίπτωσή σου, πρέπει νά 'ναι πολύ μεγαλύτερο από 15 mm.»

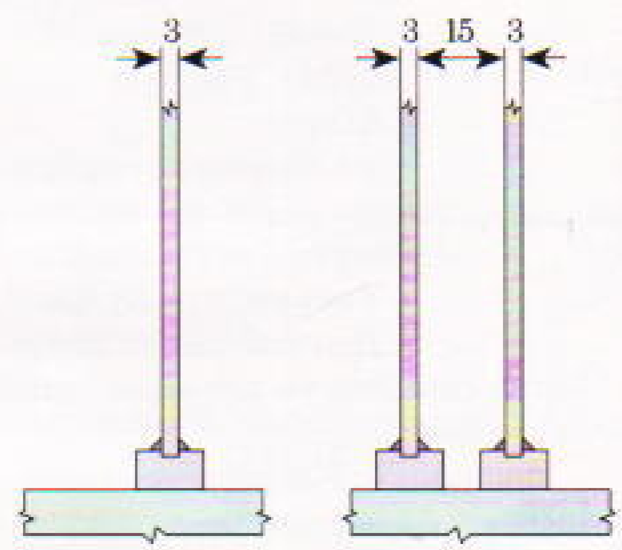
Γύρισα το κεφάλι μου και τον κοίταξα. Ο Χολμς καθόταν με την εφημερίδα του στο δρύινο γραφείο μου. Είχα ξεχάσει ότι ήταν εκεί, γιατί φαινόταν βαθιά απορροφημένος στο διάβασμα. Παρατήρησε το απορημένο ύφος μου και κούνησε το κεφάλι του χαμογελώντας.

«Όχι, όχι, αγαπητέ μου Γουάτσον, δεν διαβάζω τη σκέψη. Μπορώ απλώς να παρατηρώ και να αναλύω. Επαγωγικά, καταλήγω στο σωστό συμπέρασμα.

»Καταρχάς», συνέχισε, «ήξερα ότι ο θόρυβος που μπαίνει συνεχώς στο δωμάτιο σε τρελαίνει. Όταν πέρασε το τραμ, πριν από λίγα λεπτά, είδα ότι πετάχτηκες όρθιος. Άρχισες να ακουμπάς το τζάμι και να περιεργάζεσαι το παράθυρο, χωρίς να κοιτάς έξω απ' αυτό. Την ίδια στιγμή, εγώ έβρισκα στην εφημερίδα σου, εντελώς κατά τύχη, τη διεύθυνση του τζαμάδικου. Το είχες υπογραμμίσει και σημειώσει κάτι για μείωση του θορύβου και διπλό τζάμι: 3 + 15 + 3. Κατά τη γνώμη μου, η λύση αυτή (Σχήμα 1) δεν είναι σωστή. Ταύτα».

«Ναι...» μουρμούρισα, «ακούγεται λογικό. Ο τζαμάς χθες βράδυ επέμενε να ακολουθήσω τη συμβουλή του... Εσύ, όμως, πώς και κατέληξες τόσο ξαφνικά στο συμπέρασμα ότι κάνει λάθος;»

«Τό 'χα πάρει προσωπικά, Γουάτσον, να σε βοηθήσω να μειώσεις το θόρυβο στο γραφείο σου. Διάβασα αρκετά βιβλία ακουστικής και μηχανικής, και τώρα πλέον γνωρίζω πολύ καλά τις τρέχουσες απόψεις περί ηχομόνωσης. Κατά τη γνώμη μου, δεν ισχύει το ίδιο και για τον τζαμά σου.»



Σχήμα 1

Τα λόγια του φίλου μου μου έδωσαν θάρρος. Ο Χολμς σηκώθηκε και προχώρησε προς το παράθυρο. Κρεμόμουν απ' τα χείλη του. Φαινόταν να το διασκεδάζει.

«Το πρόβλημα στην αρχή φαίνεται δύσκολο, αλλά σύντομα θα αντιληφθείς πώς έχουν τα πράγματα. Έπιασες ποτέ στα χέρια σου διαφορικό λογισμό ή διανυσματική ανάλυση; Όχι; Καλά, μήπως λογαρίθμους; Δεν πειράζει, ας τ' αφήσουμε αυτά. Και τι γνωρίζεις για τον ήχο;»

«Αντιλαμβάνομαι ότι η πείρα μου στο πεδίο αυτό είναι σχεδόν μηδαμινή», απάντησα άβολα. «Ήχος είναι... ήχος είναι μια κυματική κίνηση. Συμβαίνει όταν τα σωματίδια του αέρα, για παράδειγμα, τίθενται σε κίνηση από ένα σώμα που ταλαντώνεται, που το αποκαλούμε "ηχητική πηγή". Η κίνηση αυτών των σωμα-

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

τιδίων εξαπλώνεται βαθμιαία και στα πιο απομακρυσμένα σωματίδια... Ο απλούστερος τύπος ηχητικού κύματος», συνέχισα γρήγορα, «είναι εκείνος στον οποίο τα σωματίδια ταλαντώνονται με μία μόνο συχνότητα. Αυτό το λέμε "αρμονικό κύμα"».

Ο Χολμς επαίνεσε την απάντησή μου. Παρότι είχε κάποια κενά, έδειχνε ικανοποιημένος. Ξέρω ότι του αρέσει να είναι ειλικρινής. Ήθελε να διαπιστώσει πόσα ήξερα ήδη περί ακουστικής.

«Μπορείς να φανταστείς ένα ηχητικό κύμα σαν μια σφαίρα όπλου», άρχισε, «και έναν τοίχο σαν έναν... τοίχο. Η εικόνα δεν υπεραπλουστεύει το φαινόμενο της διάδοσης του ήχου μέσα από έναν τοίχο, αλλά αποτελεί ένα χονδρικό μηχανικό ανάλογο που απλουστεύει την εξήγηση. Αναμφισβήτητα, τα ανάλογα φαινόμενα παραπλανούν όποιον το παρατραβά· είναι όμως χρήσιμα για να διασαφηνίσουμε πολύπλοκα φαινόμενα.

»Αν λοιπόν μια σφαίρα χτυπήσει τον τοίχο», συνέχισε ο Χολμς, «τρία πράγματα είναι δυνατόν να συμβούν. Πρώτον, η σφαίρα μπορεί να εκτραπεί —ή, θα λέγαμε, "να ανακλαστεί". Δεύτερον, μπορεί να σφηνωθεί στον τοίχο —δηλαδή να "απορροφηθεί". Τρίτον, μπορεί να διαπεράσει τον τοίχο —με άλλα λόγια, η σφαίρα να "διαδοθεί" μέσω αυτού. Μια παρόμοια κατάσταση παρουσιάζεται όταν ένα ηχητικό κύμα συναντά ένα χώρισμα (ας πούμε έναν τοίχο ή ένα παράθυρο)· το αποτέλεσμα, όμως, είναι πιο εντυπωσιακό. Εμφανίζονται ταυτόχρονα τόσο ένα ανακλώμενο όσο και ένα διαδιδόμενο κύμα, και επιπλέον απορροφάται ακουστική ενέργεια από το χώρισμα. Βρίσκεις παράξενο αυτό το σενάριο, φίλε μου;»

«Λοιπόν», είπα, αναζητώντας μια απάντηση, «σίγουρα δεν είναι προφανές για μένα. Καταρχάς, μου φαίνεται απίθανη η ιδέα ενός τοίχου τον οποίο διαπερνά ο ήχος που ταξιδεύει μέσω του αέρα. Αν γινόταν κάτι τέτοιο, οι τοίχοι γύρω μας θα ήταν γεμάτοι τρύπες, αλλά δεν βλέπω και πολλές...»

«Ακριβώς! Ένας κόσμος όπου οι ήχοι θα μπορούσαν να τρυπούν τους τοίχους δεν θα ήταν και τόσο ασφαλής, έτσι, δεν είναι; Όχι, όχι..., τα πράγματα γίνονται λίγο διαφορετικά. Τα προσπίπτοντα και τα ανακλώμενα κύματα απλώς δονούν τον τοίχο. Ο τοίχος πάλλεται, και ως εκ τούτου εκπέμπει τον ήχο σε δύο κατευθύνσεις. Τα εκπεμπόμενα κύματα είναι λιγότερο έντονα από τα κύματα που προσέκρουσαν στον τοίχο.

»Παρεμπιπτόντως», συνέχισε ο Χολμς, «το φαινόμενο αυτό δεν είναι μοναδικό. Πειράματα αυτού του είδους είναι πολύ κοινά. Όταν χτυπάς τα σκέλη ενός διαπασών, πάλλονται και επενεργούν στα τριγύρω σωματίδια του αέρα. Κοντολογίς, εκπέμπουν ηχητικά κύματα. Το ρόλο του προσπίπτοντος κύματος στην περίπτωση αυτή τον παίζει οτιδήποτε χρησιμοποιείς για να χτυπήσεις το διαπασών (Σχήμα 2). Το συλλαμβάνεις;»

«Όχι μόνο το συλλαμβάνω,» του είπα, «αλλά το βρίσκω και φοβερά ενδιαφέρον. Έχεις ταλέντο να διδάσκεις τους ανθρώπους, Χολμς. Τώρα όμως θα 'θελα να μάθω ποια είδη τοίχων παρέχουν την καλύτερη ηχομόνωση. Για να σου πω την αλήθεια, αυτό με νοιάζει περισσότερο από κάθε θεωρία...»

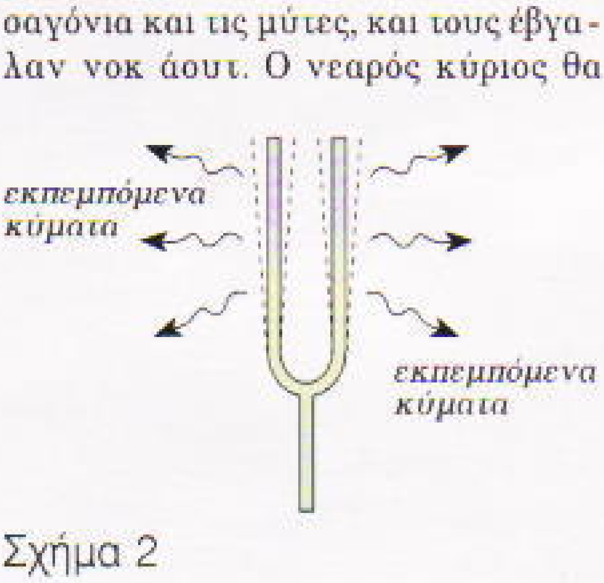
...Δεν νομίζω ότι θα μπορέσω να τα βγάλω πέρα στη ζωή μου χωρίς τον Χολμς. Δεν έχει πολλές μέρες που βγήκε από το νοσοκομείο και ακόμη φαίνεται αδύναμος. Η υγεία του, δόξα τω Θεώ, βελτιώνεται. Είχε προσπαθήσει να υπερασπιστεί μια γυναίκα εναντίον τριών νεαρών κακοποιών που της επετέθησαν. Μέσα σε λίγες στιγμές έμοιαζε περισσότερο νεκρός παρά ζωντανός. Οι κακοποιοί παραήταν πολλοί γι' αυτόν. Ξαφνικά, ένας νεαρός άνδρας εμφανίστηκε κι έβαλε στη θέση τους τους τρεις μπράβους. Οι γροθιές του τους έσπασαν τα σαγόνια και τις μύτες, και τους έβγαλαν νοκ άουτ. Ο νεαρός κύριος θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ο καλύτερος πυγμάχος του Λονδίνου, αλλά, προς έκπληξη όλων, εξαφανίστηκε μόλις έφτασε στον τόπο του συμβάντος η αστυνομία. Οι αστυνομικοί βρήκαν τέσσερις άνδρες να κείτονται αναίσθητοι και μια γυναίκα που έμοιαζε μάλλον συνεπαρμένη παρά φοβισμένη. Παραδέχτηκε ωστόσο ότι δεν είχε δώσει μόνη της τη μάχη με τους αλήτες...

«Γουάτσον! Φαίνεσαι χαμένος στις σκέψεις σου. Παρακολουθούσες αυτά που έλεγα;» Με κοίταξε επίμονα.

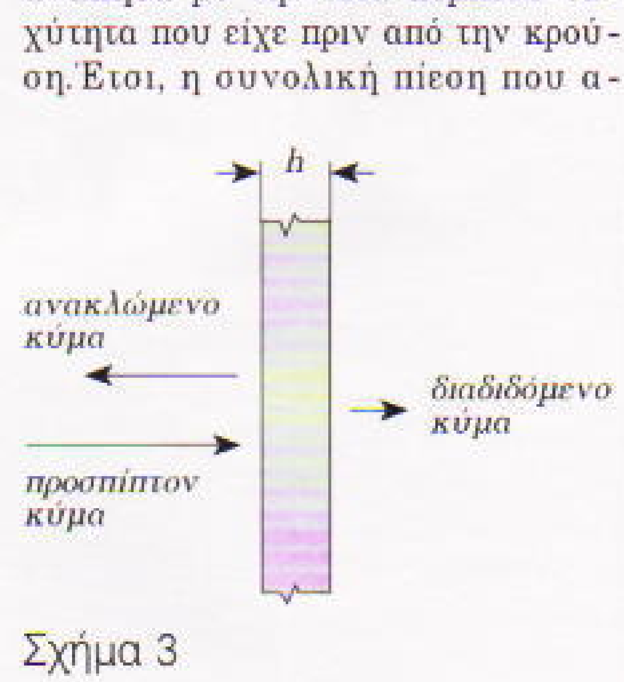
«Ναι, φυσικά Χολμς! Παρακαλώ, συνέχισε. Είμαι όλος αυτιά.»

«Ας θεωρήσουμε την απλούστερη περίπτωση διάδοσης ήχου μέσω ενός μονού τοίχου (Σχήμα 3). Η πίεση που ασκεί το προσπίπτον κύμα στην αριστερή πλευρά του τοίχου κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω στην επιφάνειά του και μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο: p ημ(ωt), όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος, p το πλάτος της πίεσης και t ο χρόνος.

»Πόση είναι λοιπόν η συνολική πίεση που ασκείται στον τοίχο και λόγω του ανακλώμενου κύματος; Είναι περίπου διπλάσια της πίεσης που ασκεί το προσπίπτον κύμα. Γιατί; Το κύμα που διαδίδεται μέσω του τοίχου, τον διαπερνά και στη συνέχεια διαδίδεται πέραν της δεξιάς του πλευράς, είναι ασθενικό σε σύγκριση με το προσπίπτον και το ανακλώμενο, τα οποία έχουν σχεδόν το ίδιο πλάτος. Αυτό δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ελαστικής κρούσης μιας ελαφριάς μπάλας με ένα ακίνητο αντικείμενο μεγάλης μάζας, η μπάλα αναπηδά με την ίδια περίπου ταχύτητα που είχε πριν από την κρούση. Έτσι, η συνολική πίεση που α-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

σκείται στον τοίχο είναι σχεδόν διπλάσια της πίεσης που ασκεί το προσπίπτον κύμα.

»Τώρα, με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνος, μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση του τοίχου:

$$\gamma = \frac{2pS \text{ ημ}(\omega t)}{M}, \qquad (1)$$

όπου M και S είναι η μάζα και η επιφάνεια του τοίχου, αντίστοιχα. Για αρμονική κίνηση ισχύει

$$|\upsilon| = \frac{|\gamma|}{\omega}, \qquad (2)$$

όπου $|\upsilon|$ και $|\gamma|$ είναι τα πλάτη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2) στην (1), και κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, φτάνουμε τελικά στη σχέση

$$|\upsilon| = \frac{2p}{\sigma\omega}, \qquad (3)$$

όπου $\sigma = M/S$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του τοίχου, που μετριέται σε kg/m^2. Αυτή η παράμετρος είναι πολύ σημαντική για τη μόνωση μονών τοίχων έναντι ήχου μεταφερόμενου δια του αέρος. Ωστόσο η ηχομόνωση εξαρτάται επιπλέον και από τις ελαστικές και διασκορπιστικές ιδιότητες των τοίχων. Παρ' όλ' αυτά, η επιφανειακή πυκνότητα παραμένει η σημαντικότερη παράμετρος. Όσο μεγαλύτερη μάζα έχει ένας μονός τοίχος τόσο μεγαλύτερη ηχομόνωση δημιουργεί.

»Έχεις καμιά ερώτηση, Γουάτσον; Σε παρακαλώ να με διακόπτεις όποτε σου φαίνεται ότι φλυαρώ. Προσωπικά, δεν δίνω βάση στα λεγόμενα κάποιου χωρίς να εξετάσω σε βάθος το θέμα ή χωρίς να το ερευνήσω μόνος μου...»

«Μην ανησυχείς, Χολμς, σε παρακολουθώ. Πραγματικά, χαίρομαι που σε καταλαβαίνω. Το μόνο πράγμα που θά 'θελα να μάθω είναι πώς συσχετίζεται η επιφανειακή πυκνότητα ενός τοίχου με την ακουστική του μόνωση. Νομίζω ότι ξέρεις...»

«Ναι, βέβαια. Μ' αρέσουν οι ερωτήσεις σου! Βλέπεις, προοδεύουμε, γιατί προχωράμε μαζί. Μια λογική ερώτηση είναι συχνά πιο σημαντική από την κατάλληλη απάντηση. Ερευνητές έχουν βρει προσεγγιστικές σχέσεις που συσχετίζουν την ηχομόνωση ενός μονού τοίχου με την επιφανειακή του πυκνότητα. Για παράδειγμα, οι τοίχοι του σπιτιού μου είναι από τούβλο, κι έχουν πάχος 0,75 m. Η πυκνότητα ενός τούβλου είναι περίπου 1.600 kg/m^3, έτσι, η επιφανειακή πυκνότητα των τοίχων είναι σ = (0,75 m)(1.600 kg/m^3) = 1.200 kg/m^2. Επομένως, οι γείτονές μου δεν ακούνε τίποτε όταν εξασκούμαι στη σκοποβολή. Αν σ = 500 kg/m^2, δεν μπορείς ν' ακούσεις μια έντονη συνομιλία στην άλλη πλευρά του τοίχου. Αν σ = 200 kg/m^2, την ακούς σαν θόρυβο, αλλά τη χαμηλόφωνη συνομιλία δεν μπορείς να την ακούσεις. Αν $\sigma \leq$ 20 kg/m^2, μπορείς να ακούσεις ακόμη και ψιθύρους.

»Φυσικά, αυτά τα εμπειρικά αποτελέσματα ισχύουν μόνο αν δεν υπάρχουν τρύπες ή άλλα ανοίγματα στον τοίχο.

»Παράδειγμα υλικού με μικρή ηχομόνωση είναι ένα φύλο κοντραπλακέ. Κι αυτό συμβαίνει εξαιτίας της μικρής επιφανειακής του πυκνότητας...»

«Καταλαβαίνω πού το πας...», διέκοψα. «Η πυκνότητα του γυαλιού είναι 2.500 kg/m^3 - έτσι η επιφανειακή πυκνότητα ενός τζαμιού πάχους 3 mm είναι μόνο 7,5 kg/m^2... Θεέ μου! Αυτό είναι απελπιστικό. Πώς μπορώ να βελτιώσω την ηχομόνωση των παραθύρων μου;»

«Ηρέμησε, Γουάτσον! Θα σου εξηγήσω...», είπε αυτάρεσκα ο Χολμς. «Τα διπλά χωρίσματα παρέχουν συγκριτικά υψηλή ηχομόνωση. Το ίδιο ισχύει με τους ανθρώπους: δύο γνώμες αξίζουν περισσότερο από μία, έτσι δεν είναι;»

«Η εμπειρία μου λέει ότι εξαρτάται απ' τα κεφάλια. Και επιπλέον, συχνά οι άνθρωποι δεν τα πάνε καλά μεταξύ τους. Αλλά ας γυρίσουμε στο θέμα μας. Φυσική και ψυχολογία είναι διαφορετικά πράγματα...»

«Νομίζεις. Για να λέμε την αλήθεια, η ισχύς της προχωράει πολύ πέρα από την ψυχολογία· ισχύει και για τη φυσική, παρά τα όσα λες. Δύο όμοιες δυνάμεις μπορούν να έχουν αντίθετη δράση. Η κατάσταση αυτή δεν είναι ασυνήθιστη, ούτε και στην ηχομόνωση. Έτσι, τα διπλά χωρίσματα δημιουργούν καλή ηχομόνωση μόνο αν το στρώμα αέρα ανάμεσά τους είναι αρκετά παχύ. Όσο μικρότερες είναι οι μάζες των χωρισμάτων τόσο μεγαλύτερο το ελάχιστο στρώμα αέρα. Διαφορετικά, θα έχεις φτωχότερα αποτελέσματα και απ' αυτά που θα είχες με ένα μονό χώρισμα της ίδιας επιφανειακής πυκνότητας.»

«Συγγνώμη Χολμς, αλλά εδώ χάθηκα. Ίσως το μυαλό μου βρίσκεται σε κακή φόρμα... Όπως το καταλαβαίνω, το στρώμα αέρα είναι καλό για θερμομόνωση. Τα διπλά τζάμια προστατεύουν το δωμάτιο από το κρύο καλύτερα από τα μονά. Το βρίσκω φυσιολογικό να αυξάνεται η θερμομόνωση ανάλογα με το πάχος του στρώματος αέρα —όσο μεγαλύτερο το στρώμα τόσο υψηλότερο το επίπεδο μόνωσης...»

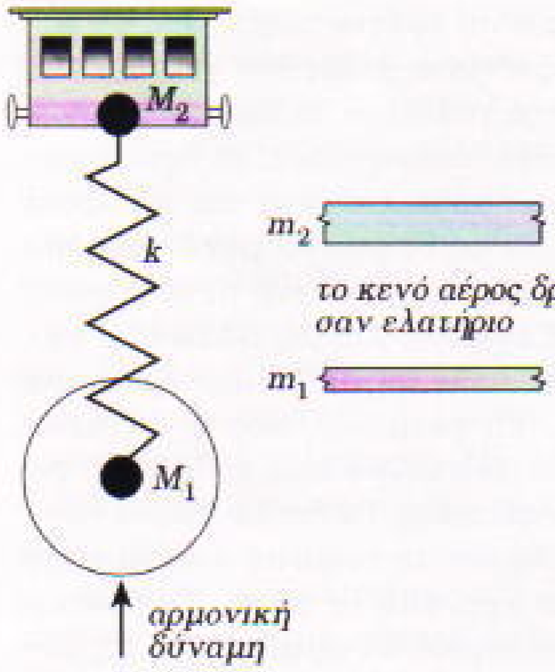
«Συμφωνώ απολύτως, Γουάτσον», με διέκοψε ο Χολμς. «Ωστόσο, μια συνήθης παρανόηση σε πολλές προτεινόμενες μεθόδους ηχομόνωσης είναι ότι μέθοδοι αποτελεσματικές για τη θερμομόνωση ισχύουν επιτυχώς και για την ηχομόνωση. Συχνά η συγγένεια φαίνεται κοντινή, μπορεί όμως νά 'ναι παραπλανητική. Αρκούμαι να παρατηρήσω ότι το παλτό σου, που σε προστατεύει από το κρύο, είναι αναποτελεσματικό για να σε προστατέψει από τους θορύβους. Η επιφανειακή του πυκνότητα δεν είναι αρκετά μεγάλη... Αλλά, φίλε μου, πρέπει να μιλήσουμε για το συντονισμό, που παίζει σημαντικό ρόλο στην ηχομόνωση με πολλαπλά χωρίσματα.»

«Αγαπητέ μου Χολμς, συγγνώμη που σε διακόπτω, αλλά φοβάμαι πως το πρόβλημα έχει γίνει πολύ περίπλοκο για μένα. Δεν είμαι επιστήμονας.»

«Μην τα παρατάς φίλε μου!» αναφώνησε ο Χολμς. «Ας συνεχίσουμε για λίγα λεπτά ακόμη. Σχεδόν φτάσαμε στον αντικειμενικό μας σκοπό. Θα απλουστεύσω το θέμα μας μ' ένα ζωντανό παράδειγμα: το τραμ.»

«Τραμ! Ωραίος φίλος είσαι. Θα προτιμούσα να μην ακούω ούτε το διαβολεμένο θόρυβό του ούτε τ' όνομά του. Είναι η καταστροφή μου...»

«Πιστεύω στο πείσμα σου, Γουάτσον! Από άποψη κατασκευής, το τραμ μπορεί να θεωρηθεί ένα απλό μηχανικό σύστημα που αποτελείται από δύο μάζες κι ένα ελατήριο. Άσε να σ' το σχεδιάσω (Σχήμα 4). Η κάτω μάζα αντιπροσωπεύει το αμάξωμα



Σχήμα 4

και η πάνω το βαγόνι με τους επιβάτες και τον οδηγό. Το ελατήριο παίζει το ρόλο της ανάρτησης του τραμ. Το μηχανικό αυτό σύστημα έχει μια συχνότητα συντονισμού, που δίνεται από την εξίσωση:

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)k},$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου, και M_1, M_2 οι δύο μάζες. Αν μια αρμονική δύναμη συχνότητας f ενεργεί στην πρώτη μάζα, το πλάτος ταλάντωσης της δεύτερης μάζας εξαρτάται καθοριστικά από τη συχνότητα f. Αν $f \ll f_r$, το ελατήριο δεν προστατεύει τη δεύτερη μάζα από την ταλαντωτική κίνηση την οποία προκαλεί η δύναμη που ενεργεί στην πρώτη μάζα. Αντίθετα, αν $f \gg f_r$, η μόνωση της δεύτερης μάζας απ' την ταλάντωση είναι σημαντική. Γι' αυτό στα τραμ χρησιμοποιείται το σύστημα ανάρτησης. Το πλάτος ταλάντωσης της δεύτερης μάζας είναι συγκριτικά μικρό και μειώνεται ακόμη περισσότερο με την αύξηση της συχνότητας.

»Αλλά βέβαια συμβαίνει μια επικίνδυνη κατάσταση, που λέγεται συντονισμός, αν $f = f_r$, (δηλαδή, αν η συχνότητα της αρμονικής δύναμης εξισωθεί με τη συχνότητα συντονισμού.) Η ταλάντωση της δεύτερης μάζας μπορεί να ενισχυθεί υπερβολικά, ειδικά αν η εσωτερική απόσβεση του ελατηρίου είναι χαμηλή.»

«Σ' ευχαριστώ, Χολμς! Πρόκειται για ένα εντελώς ξεκάθαρο και πραγματικό ανάλογο της διάδοσης του ήχου μέσω διπλού χωρίσματος. Οι δύο μάζες είναι τα ξεχωριστά χωρίσματα, και το ελατήριο είναι... το στρώμα αέρα, γιατί ο αέρας είναι ελαστικός!»

«Μπράβο, Γουάτσον! Το βρήκες μόνος σου. Έχεις απόλυτο δίκιο. Η συχνότητα συντονισμού ενός διπλού χωρίσματος δίνεται από μια παρόμοια εξίσωση:

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{\gamma P}{d}}, \qquad (4)$$

όπου m_1 και m_2 είναι οι επιφανειακές πυκνότητες των χωρισμάτων, d το πάχος του στρώματος αέρα, P η ατμοσφαιρική πίεση και $\gamma = 1{,}4$ ο λόγος της ειδικής θερμότητας του αέρα υπό σταθερή πίεση προς την ειδική θερμότητά του υπό σταθερό όγκο. Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, τη συχνότητα συντονισμού του διπλού τζαμιού που σου πρότεινε ο τζαμάς. Αν θέσουμε $m_1 = m_2 = 7{,}5\ \mathrm{kg/m^2}$, σύμφωνα με την προηγούμενη εκτίμησή σου, Γουάτσον, $P = 10^5\ \mathrm{N/m^2}$, $d = 0{,}015$ m και $\pi = 3{,}14$, στην παραπάνω εξίσωση... παίρνουμε

$$f_r \cong 250\ \mathrm{Hz}.$$

Τώρα, πρέπει να υπολογίσουμε την πιο "θορυβώδη" συχνότητα του θορύβου του τραμ.»

«Μα, Χολμς, δεν έχουμε συσκευή μέτρησης. Απ' ό,τι ξέρω, αυτό μπορεί να γίνει με αντηχεία Helmholtz.»*

«Μην ανησυχείς, αγαπητέ Γουάτσον. Η καλύτερη συσκευή που διαθέτω είναι τ' αυτιά μου. Ξέρεις ότι έχω μουσικό αυτί. Για τ' αυτιά μου, ο θόρυβος του τραμ είναι υψηλός, στην περιοχή συχνοτήτων από 100 έως 400 Hz. Η μέση συχνότητα αυτής της περιοχής είναι 250 Hz. Άρα, αγαπητέ μου φίλε, είχα δίκιο. Αν έκανες ό,τι σου είπε ο τζαμάς, θα δημιουργούσες, λόγω συντονισμού, ένα πολύ ηχηρό παράθυρο!»

«Θα ήταν καταστροφή. Χολμς, ευχαριστώ που με βοήθησες. Τώρα μπορώ να υπολογίσω το σωστό πάχος του στρώματος αέρα. Αν ήταν 150 mm (δεκαπλάσιο απ' το προηγούμενο), η συχνότητα συντονισμού, όπως προκύπτει από την εξίσωση, θα ήταν περίπου 80 Hz. Αυτό θα αρκούσε για να επιτευχθεί η εκλεκτή συνθήκη: $f \gg f_r$. Είναι τόσο απλό, Χολμς!»

«Είναι πολύ εύκολο, αν ξέρεις τι κάνεις. Ο τζαμάς σου, ωστόσο, αποδείχθηκε λίγο αφελής, πράγμα παράξενο: κατά κανόνα, τέτοιοι τεχνίτες γνωρίζουν τα κόλπα, γιατί η έλλειψη συστηματικής εκπαίδευσης αντισταθμίζεται από την πρακτική εμπειρία...»

Ο Χόλμς σώπασε. Περπάτησε ώς το παράθυρο και έπειτα από μεγάλη παύση μού υπέβαλε κάποιες ερωτήσεις σχετικές με τον τζαμά (για την εμφάνιση και τους τρόπους του). Λίγο μετά, έφυγε.

Με επισκέφθηκε στο γραφείο μου το επόμενο πρωί. Κάτι αινιγματικό υπήρχε σε όλα αυτά. Ο Χολμς είδε την απορία ζωγραφισμένη στο πρόσωπό μου· ενώνοντας τα δάχτυλά του (όπως το συνηθίζει) και ακουμπώντας τους αγκώνες στα γόνατα, μου εξήγησε τι συμβαίνει.

«Θά 'πρεπε να βρίσκεσαι υπό φρούρηση», άρχισε δυσοίωνα. «Ο τζαμάς σου είναι ένας πανέξυπνος άνθρωπος, που έχει κάνει στην Οξφόρδη. Είναι πολύ καλός μποξέρ και επιπλέον αριστοκράτης. Ωστόσο, πριν από τέσσερα χρόνια κρίθηκε ένοχος για ληστεία. Ουδείς κατάλαβε γιατί το έκανε. Τρία χρόνια αργότερα δραπέτευσε και σήμερα καταζητείται από την αστυνομία.»

«Χολμς, με ξαφνιάζεις. Αλλά δεν είναι ανάγκη να ανησυχείς για την ασφάλειά μου. Λυπάμαι που το λέω, αλλά η δουλειά μου αποφέρει λίγα χρήματα. Δεν είμαι πλούσιος. Αν αυτός ο άνθρωπος είναι πραγματικά έξυπνος, δεν θα διαλέξει εμένα για θύμα του. Εξάλλου, θα μπορούσε να μου έχει επιτεθεί εδώ και αρκετές ημέρες. Δεν σε πολυκαταλαβαίνω, αγαπητέ μου Χολμς.»

«Όσον αφορά εσένα, συμφωνώ μαζί σου Γουάτσον. Μ' αυτή την έννοια δεν κινδυνεύεις. Ο στόχος του, όμως, είναι ένα διαμέρισμα στο κτίριο στην απέναντι πλευρά του δρόμου. Ο γείτονάς σου που ζει εκεί είναι ένας σπουδαίος χρυσοχόος, ο Ντέιβιντ Πόλακ. Τον γνωρίζεις προσωπικά;»

«Είναι πελάτης μου. Ευγενικός και έξυπνος άνθρωπος. Απ' ό,τι έχω αντιληφθεί, έγινε σπουδαίος κόβοντας και πουλώντας διαμάντια. Είναι δεινός σκοπευτής απ' ό,τι ακούω,

* Για το αντηχείο Helmholtz διαβάστε το άρθρο «Η υπόθεση του μυθικού τέρατος» στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1995. (Σ.τ.ε.)

αν και δεν υπηρέτησε στο στρατό... Και κάτι άλλο..., τα αυτιά του είναι πολύ ευαίσθητα. Υποφέρει απ' το θόρυβο περισσότερο κι από μένα!»

«Πολύ καλά, Γουάτσον! Θά 'θελα να σε πληροφορήσω ακόμη ότι ο γείτονάς σου δεν πιστεύει σε θυρίδες φύλαξης ή χρηματοκιβώτια. Κρύβει τα πολύτιμα διαμάντια του σε μυστικές κρυψώνες στα δωμάτια. Συχνά ξεχνάει να κλείσει τις κουρτίνες, όταν έχει τα φώτα ανοιχτά, και μπορεί εύκολα να φανεί από το παράθυρό σου. Τον είδα να κρύβει τα διαμάντια χθες βράδυ. Ο αυτοαποκαλούμενος τζαμάς σου έκανε το ίδιο προχθές.»

«Κατάλαβα. Όλα είναι ξεκάθαρα.» Χτύπησα ελαφρά την άδεια τσέπη του σακακιού μου. «Θα μου χρειαστεί το περίστροφο;»

«Όχι, όχι, Γουάτσον. Σε καμιά περίπτωση δεν θα πυροβολήσεις. Θα προσπαθήσουμε να ρίξουμε τον "τζαμά" μας στη δική του παγίδα. Ας ελπίσουμε ότι θα πετύχει...»

Ο επισκέπτης ήρθε λίγα λεπτά αργότερα. Ήταν τόσο ταραγμένος που δεν φάνηκε να αναγνωρίζει το δωμάτιο. Εμένα δεν με πρόσεξε καν. Απευθύνθηκε στον Χολμς, σαν να ήταν η τελευταία του ελπίδα.

«Διάβασα στην εφημερίδα ότι ο κύριος Χολμς ξέρει κάτι για μια κοπέλα ονόματι Λίλιαν Γουίλσον. Την ψάχνω γιατί...»

«Γιατί είσαι ο αδερφός της, Ρόναλντ Γουίλσον», είπε ο Χολμς ειρωνικά. «Σωστά;»

Ο επισκέπτης μας έστρεψε βιαστικά το βλέμμα του γύρω στο δωμάτιο. Εγώ στεκόμουν στην πόρτα με το χέρι στην τσέπη. Ο Γουίλσον γέλασε ψεύτικα. Στράφηκε στον Χολμς.

«Συγχαρητήρια! Τώρα σε αναγνωρίζω. Είσαι ο κύριος που έσωσα. Κι αυτό είναι το ευχαριστώ! Καλή δουλειά, αστυνόμε.»

«Καταρχάς, κύριε Γουίλσον, δεν είμαι αστυνόμος. Δεύτερον, μπορείτε να φύγετε, αν θέλετε. Ωστόσο, δεν θα ήταν καλό για σας, για πολλούς λόγους. Γι' αυτό ηρεμήστε κι ακούστε με προσεκτικά. Η αδερφή σας Λίλιαν είναι παντρεμένη και ζει στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, στο Γουέστ Τσέστερ, στην πολιτεία της Πενσυλβανίας. Ο σύζυγός της είναι ένας εύπορος νεαρός γιατρός. Ζουν ευτυχισμένοι μαζί.

»Τώρα, σχετικά με τον χρυσοχόο απέναντι. Δεν θα σας συνιστούσα να ενοχλήσετε τον κύριο Πόλακ. Έχει ευαίσθητα αυτιά κι είναι καλός στο σημάδι. Δεν θα ήταν συνετό να τον επισκεφθείτε απρόσκλητος· τι λέτε κι εσείς, κύριε;»

Ο επισκέπτης μας έμεινε εμβρόντητος. «Είστε μάγος, κύριε!»

«Όχι», απάντησε ο Χολμς, «δεν είμαι μάγος. Το όνομά μου είναι Σέρλοκ Χολμς. Αυτός είναι ο καλύτερος φίλος και συνεργάτης μου, ο δρ. Γουάτσον. Μπροστά του μπορείτε να μιλάτε ανοιχτά, όπως σε μένα. Μα φαίνεται ότι νιώθετε άβολα. Θα θέλατε ένα φλιτζάνι τσάι;»

Ο Γουίλσον χάρηκε που έμαθε ότι η αγαπημένη του αδερφή ήταν υγιής κι ευτυχισμένη. Μας είπε πως, όταν πέθαναν οι γονείς του, δεν κληρονόμησαν τίποτε, παρά μόνο χρέη. Τα οικογενειακά κοσμήματα βγήκαν σε πλειστηριασμό. Το ίδιο έγινε με το σπίτι και τα έπιπλα. Ο Γουίλσον δούλεψε σκληρά για να μπορέσει να επιβιώσει. Ήταν όμως αποφασισμένος να πάρει πίσω τα οικογενειακά κειμήλια, πάση θυσία. Έτσι, βρέθηκε αντιμέτωπος με το νόμο —διέρρηξε το σπίτι ενός τραπεζίτη που είχε αγοράσει τα περισσότερα κειμήλια της οικογένειας Γουίλσον. Κατέληξε στη φυλακή κι έχασε την επαφή με την αδερφή του. Δραπέτευσε και αρκετά νωρίς έμαθε ότι κάποια από τα τιμαλφή της οικογένειας είχαν πουληθεί στον κύριο Πόλακ.

«Χαίρομαι που μαθαίνω ότι η αδερφή μου χαίρει άκρας υγείας», είπε ο Γουίλσον. «Όσο για μένα», πρόσθεσε με πικρία, «είμαι ένας εγκληματίας».

«Γέλα λίγο, νεαρέ!» αναφώνησε ο Χολμς. «Η κοπέλα που έσωσες τις προάλλες από τους κακοποιούς είναι η κόρη αυτού του τραπεζίτη. Σε αναγνώρισε. Η μνήμη μιας γυναίκας είναι καταπληκτική μερικές φορές. Μου υποσχέθηκε ότι θα μιλήσει στον πατέρα της. Πιστεύω ότι η υπόθεσή σου θα επανεξεταστεί, και θα κριθείς αθώος.

»Επί τη ευκαιρία», πρόσθεσε, «θα ήθελε να σε γνωρίσει. Όσο θυμάμαι, είναι από τις δύσκολες, αν και αυτό δεν με αφορά».

«Σας ευχαριστώ πάρα πολύ, κύριε Χολμς. Εκτιμώ τη φιλική σας υποστήριξη. Αλλά βρίσκομαι σε δεινή θέση. Είναι πολύ δύσκολο να βρω δουλειά σήμερα. Εξάλλου, ήμουν στη φυλακή...»

«Λοιπόν, αφού είναι έτσι, θα σε συστήσω στον κύριο Πόλακ. Ναι, στον ίδιο! Πρόκειται να φύγει στη Νότια Αφρική για να κλείσει μια παραγγελία διαμαντιών, κι ένας σύντροφος σαν εσάς θα ήταν σωστό δώρο γι' αυτόν. Οι συστάσεις μου επαρκούν σ' αυτή την περίπτωση.»

Πέρασε ένας χρόνος, ώσπου λάβαμε ένα γράμμα από τον Γουίλσον. Το ταξίδι του με τον Ντέιβιντ Πόλακ στέφθηκε από μεγάλη επιτυχία. Έγινε πλούσιος. Στο γράμμα του έγραφε ότι το νέο του σπίτι βρισκόταν σ' ένα ήσυχο μέρος στην εξοχή.

«Αγαπητοί κύριοι Χολμς και Γουάτσον», έγραφε, «ανακάλυψα ότι ο Ντέιβιντ είναι πραγματικά δεινός σκοπευτής. Όχι μόνο αυτό, αλλά έχει μελετήσει ακουστική και έχουμε επανειλημμένα συζητήσει πολλά προβλήματα, μεταξύ των οποίων κι αυτό της ηχομόνωσης. Τώρα ξέρω πως η "συμβουλή" μου ήταν λάθος, κύριε Γουάτσον, εξαιτίας του φαινομένου του συντονισμού. Από την άλλη, το λάθος αυτό άλλαξε τη ζωή μου. Παρεμπιπτόντως, πιστεύω πως η καλύτερη ηχομόνωση είναι η απομάκρυνση απ' όλες τις πηγές θορύβου —όσο πιο μακριά, τόσο πιο καλά. Σας προσκαλώ να μας επισκεφθείτε στο ήσυχο σπίτι μας, εμένα και τη σύζυγό μου. Ειλικρινά δικός σας, Ρόναλντ Γουίλσον».

«Πολύ καλά», είπα, «ας πάμε να τον επισκεφθούμε τον άλλο μήνα. Με βολεύει».

«Λυπάμαι που θα το πω αγαπητέ Γουάτσον, αλλά δεν μπορώ να σε πάρω μαζί μου.»

Ξαφνιάστηκα. «Γιατί όχι, Χολμς;»

«Απλώς, επειδή δεν αντέχεις το θόρυβο.»

Άνοιξε την εφημερίδα του. Ανέφερε ότι η κυβέρνηση είχε αποφασίσει να επεκτείνει μια σιδηροδρομική γραμμή στην περιοχή του Γουίλσον, κοντά στο νέο του σπίτι. Η επέκταση θεωρείται θέμα προτεραιότητας για οικονομικούς λόγους, γι' αυτό πρέπει να γίνει το συντομότερο δυνατόν... Ω, θόρυβε, θόρυβε! Υπάρχεις παντού!

Σήματα, γραφήματα, βασιλιάδες και σπείρες

Εξασφαλίζοντας ευκρινή επικοινωνία μέσω μιας ποικιλίας πομπών

A. Futer

Οι ΑΝΘΡΩΠΟΙ ΠΟΥ ΚΟΥΒΕΝΤΙΑζουν εντελώς αβίαστα καταλαβαίνουν συνήθως ξεκάθαρα τις λέξεις που χρησιμοποιεί ο συνομιλητής τους. Σπάνια θα ζητήσουν από τον άλλο να επαναλάβει ή να διευκρινίσει μια ακατανόητη λέξη. Αν όμως η συζήτηση γίνει μέσω τηλεφώνου, μπορεί να δυσκολευτούν να καταλάβουν μερικές λέξεις, ειδικά όταν στη γραμμή υπάρχει θόρυβος εξαιτίας της κακής σύνδεσης. Μερικές φορές οι λέξεις που χάνονται καθιστούν αδύνατη τη συνεννόηση. Αν μάλιστα αντί για λέξεις με νόημα προσπαθήσουμε να μεταδώσουμε από το τηλέφωνο τυχαίες ακολουθίες γραμμάτων, όπως *ρπτφφφσκλησααβμ...*, θα διαπιστώσουμε ότι μερικά γράμματα συγχέονται συχνά μεταξύ τους —για παράδειγμα, το *η* και το *θ*, το *μ* και το *ν*, και ούτω καθεξής.

Πρακτικά, κάθε μέσο επικοινωνίας —τηλέφωνο, ραδιόφωνο, ναυτικά κιάλια— αλλοιώνει το σήμα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να καταπολεμήσουμε αυτό το φαινόμενο, όλοι όμως μειώνουν την αποδοτικότητα της επικοινωνίας. Για παράδειγμα, αντί για ξεχωριστά γράμματα μπορούμε να στείλουμε μέσω του τηλεφώνου ολόκληρες λέξεις που αρχίζουν απ' το συγκεκριμένο γράμμα —να μεταδώσουμε το *μ* ως *Μαρία*, το *π* ως *Παναγιώτης*, κ.ο.κ. Τότε, όμως, αντί για ένα γράμμα πρέπει να στείλουμε πέντε ή δέκα. Εναλλακτικά, μπορούμε να επαναλάβουμε κάθε

σήμα πολλές φορές, μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε όταν μεταδόθηκαν οι πρώτες φωτογραφίες της αθέατης πλευράς της Σελήνης στη Γη το 1959. Αλλά ο απαιτούμενος χρόνος για να επιτευχθεί αυτό αυξάνεται κατά τον ίδιο παράγοντα.

Σε τούτο το άρθρο θα εξετάσουμε μια οικονομική μέθοδο ελέγχου του θορύβου.[1] Η ιδέα που κρύβεται πίσω από τη μέθοδο είναι εξαιρετικά απλή: γνωρίζουμε μεταξύ ποιων σημάτων μπορεί να δημιουργηθεί σύγχυση, και έτσι στέλνουμε μόνο ένα σήμα από κάθε τέτοια ομάδα και αγνοούμε όλα τα υπόλοιπα. Για παράδειγμα, από τους τρεις ήχους φ, ψ και ξ στέλνουμε μόνο τον ένα μέσω του τηλεφώνου —ας πούμε τον ψ.

Γραφήματα σφάλματος

Κάθε μήνυμα αποτελείται συνήθως από διαφορετικά «στοιχειώδη» σήματα: λέξεις (σε μια τηλεφωνική συνομιλία), γράμματα (με τον σηματοφόρο), ή άλλα σύμβολα (παύλες και τελείες στην τηλεγραφία). Αυτά τα στοιχειώδη σήματα αποτελούν το σύνολο S, το λεγόμενο *αλφάβητο εισόδου*. Ας παραστήσουμε κάθε σήμα του S με έναν μικρό κύκλο και ας συνδέσουμε μεταξύ τους όσους κύκλους αντιστοιχούν σε σήματα που συγχέονται κατά τη μετάδοση. Γενικά, όταν υπάρχει ένα σύνολο σημείων και κάποια από αυτά συνδέονται με ευθείες έχετε ένα *γράφημα*. Τα σημεία ονομάζονται *κόμβοι* του γραφήματος και οι ευθείες που τα συνδέουν *ακμές*. Δύο κόμβοι, v και w, που συνδέονται με μια ακμή, καλούνται *προσκείμενοι* —αυτό το συμβολίζουμε με $v - w$. Το γράφημα του συνόλου S που περιγράψαμε προηγουμένως ονομάζεται γράφημα σφάλματος για τον δεδομένο πομπό.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό ρολόι που ο λεπτοδείκτης του αλλάζει θέση με άλματα —μόλις ολοκληρωθεί ένα λεπτό, ο δείκτης μετακινείται στην επόμενη ένδειξη του δίσκου. Όταν το ρολόι βρίσκεται μακριά μας δεν μπορούμε να καθορίσουμε με ακρίβεια τη θέση του λεπτοδείκτη. Ας υποθέσουμε όμως ότι το σφάλμα μας δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο —ας πούμε, όχι μεγαλύτερο από ένα λεπτό. Τότε το αλφάβητο εισόδου θα αποτελείται από 60 στοιχεία —τις 60 δυνατές θέσεις του λεπτοδείκτη (που η καθεμιά τους αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο σημείο της περιφέρειας του δίσκου)— ενώ το γράφημα σφάλματος G θα είναι ένα κανονικό 60-γωνο: κάθε σημείο συνδέεται με τους δύο γείτονές του.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να καταλάβουμε τι πρέπει να κάνουμε ώστε να αναγνωρίσουμε σωστά το μέγιστο πλήθος διαφορετικών ενδείξεων του λεπτοδείκτη. Ας ρυθμίσουμε το ρολόι έτσι ώστε ο λεπτοδείκτης του να κάνει άλματα δύο λεπτών —με άλλα λόγια, να δείχνει μόνο τα άρτια λεπτά της ώρας. Σε αυτήν την περίπτωση αποκλείεται να μπερδέψουμε δύο ενδείξεις αφού δεν επιτρέπουμε σφάλματα δύο λεπτών ή μεγαλύτερα. Αν λοιπόν συμφωνήσουμε να περιορίσουμε το σύνολο των μεταδιδόμενων σημάτων μόνο στους 30 άρτιους αριθμούς από το 0 έως το 58, η λήψη τους θα είναι πάντοτε σωστή. Από την άλλη πλευρά, το μέγιστο πλήθος σημάτων που είναι δυνατόν να διακριθούν χωρίς σφάλμα είναι προφανώς 30: οποιοδήποτε υποσύνολο 31 κόμβων στο γράφημά μας θα περιέχει τουλάχιστον δύο προσκείμενους κόμβους (αποδείξτε το!).

Σε αυτό το παράδειγμα κατασκευάσαμε ένα υποσύνολο M των κόμβων του γραφήματος με την εξής

1. Αυτό το πρόβλημα το ερεύνησε πρώτος ο διάσημος αμερικανός μαθηματικός Claude Shannon.

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

ιδιότητα: *δεν υπάρχουν δύο κόμβοι του M που να συνδέονται με ακμή.* Κάθε υποσύνολο που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται *ανεξάρτητο σύνολο* κόμβων. Στο παράδειγμά μας, οποιοδήποτε σύνολο άρτιων ενδείξεων του λεπτοδείκτη —ας πούμε το {2, 8, 34, 52, 56}— ή το σύνολο των ενδείξεων που διαιρούνται με το 5 —{0, 5, 10, ..., 55}— είναι ανεξάρτητο, όπως και πολλά άλλα.

Όταν το πλήθος των κόμβων σε ένα ανεξάρτητο σύνολο M είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των κόμβων οποιουδήποτε άλλου ανεξάρτητου συνόλου, ονομάζουμε το M *μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο* (ΜΑΣ), ενώ το πλήθος των κόμβων του, $a(G)$, ονομάζεται *βαθμός ανεξαρτησίας* (ΒΑ) του γραφήματος.

Το γράφημα G που εξετάσαμε προηγουμένως έχει πολλά ανεξάρτητα σύνολα, αλλά τα μέγιστα ανεξάρτητα είναι δύο (το σύνολο όλων των άρτιων αριθμών από το 0 έως το 58 και το σύνολο όλων των περιττών από το 1 έως το 59· επομένως, $a(G) = 30$.

Αν G είναι το γράφημα σφάλματος μιας συγκεκριμένης συσκευής μετάδοσης T, τότε $a(G)$ είναι το μέγιστο πλήθος σημάτων που μπορεί να μεταδοθεί μέσω αυτής της συσκευής χωρίς να υπάρξει σύγχυση μεταξύ των σημάτων. Γι' αυτό το $a(G)$ ονομάζεται επίσης *διεκπεραιωτική ικανότητα* της συσκευής T.

Προβλήματα

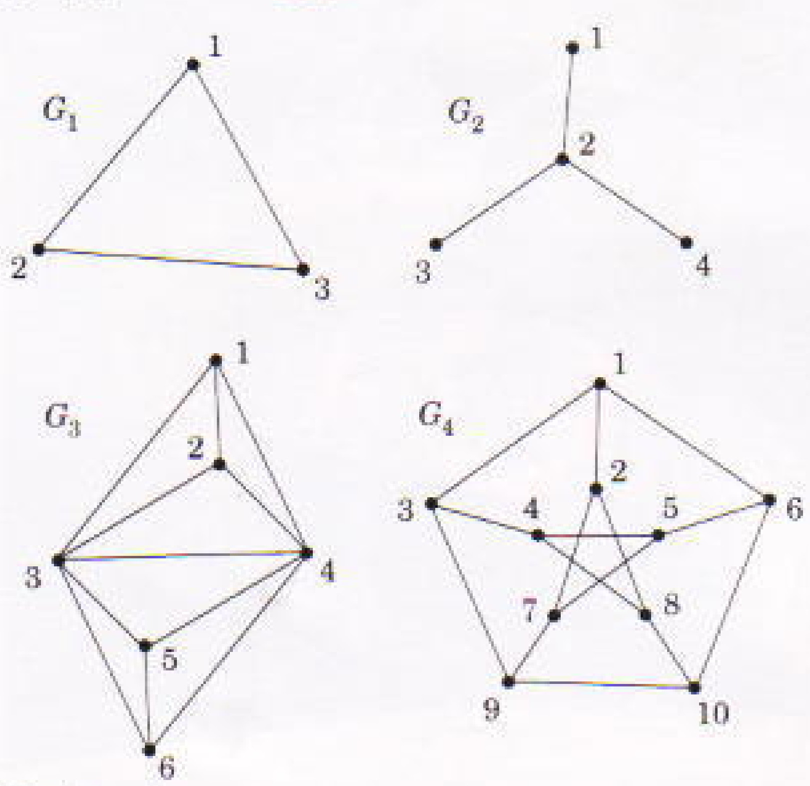
1. Βρείτε τα ΜΑΣ και ΒΑ για τα γραφήματα του Σχήματος 1.

2. Σχεδιάζουμε n το πλήθος σημεία πάνω σε έναν κύκλο. Κάθε σημείο συνδέεται με $2k$ σημεία (που είναι τα k πλησιέστερα προς κάθε πλευρά). Βρείτε τον βαθμό ανεξαρτησίας αυτού του γραφήματος.

Ένα αλφάβητο υψωμένο στο τετράγωνο

Κάθε πομπός T μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση του αλφαβήτου εισόδου S, του γραφήματος σφάλματος G και του βαθμού ανεξαρτησίας του γραφήματος G (ή της διεκπεραιωτικής ικανότητας της T) $a(G)$. Τι μπορούμε να κάνουμε όμως όταν ο πομπός T είναι δεδομένος και σταθερός αλλά η διεκπεραιωτική του ικανότητα δεν μας αρκεί; Για παράδειγμα, τι γίνεται όταν το T είναι ο τηλέγραφος που μπορεί να στείλει μόνο παύλες και τελείες αλλά εμείς θέλουμε να μεταδώσουμε γράμματα; Η λύση δεν αποτελεί μυστικό —είναι ο πασίγνωστος κώδικας Μορς. Στέλνουμε ομάδες αρκετών σημάτων (τελείες και παύλες) μέσω του T και θεωρούμε κάθε ομάδα ως ένα μοναδικό σήμα.

Ας προσπαθήσουμε καταρχάς να στείλουμε ζεύγη διαδοχικών σημάτων του S μέσω της ίδιας συσκευής T και ας δούμε κατά πόσον αυξάνονται με αυτόν τον τρόπο οι δυνατότητές μας. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τώρα έχουμε έναν νέο πομπό T^2, του οποίου το αλφάβητο εισόδου S^2 αποτελείται από σήματα δύο γραμμάτων (v_1, v_2), όπου τα v_1 και v_2 είναι στοιχεία του S (στη συνέχεια, χάριν ευκολίας, θα αναφέρουμε ως «γράμματα» τα στοιχεία οποιουδήποτε αλφαβήτου).



Σχήμα 1

Ας προσπαθήσουμε να καθορίσουμε τη διεκπεραιωτική ικανότητα του μεταδότη T^2. Για να το πετύχουμε πρέπει να σχεδιάσουμε το γράφημα σφάλματος που θα συμβολίσουμε με G^2. Πότε μπορεί να υπάρξει σύγχυση μεταξύ ενός σήματος (v_1, v_2) και του σήματος (w_1, w_2); Προφανώς αν (και μόνο αν) ικανοποιείται μια από τις εξής συνθήκες:

(α) $(v_1 = w_1)$, $(v_2 \sim w_2)$,
(β) $(v_1 \sim w_1)$, $(v_2 = w_2)$,
(γ) $(v_1 \sim w_1)$, $(v_2 \sim w_2)$.

Έτσι, δύο κόμβοι (v_1, v_2) και (w_1, w_2) του γραφήματος G^2 συνδέονται με ακμή αν υπάρχουν στο γράφημα G οι ακμές v_1w_1 (ή $v_1 = w_1$) και v_2w_2 (ή $v_2 = w_2$).

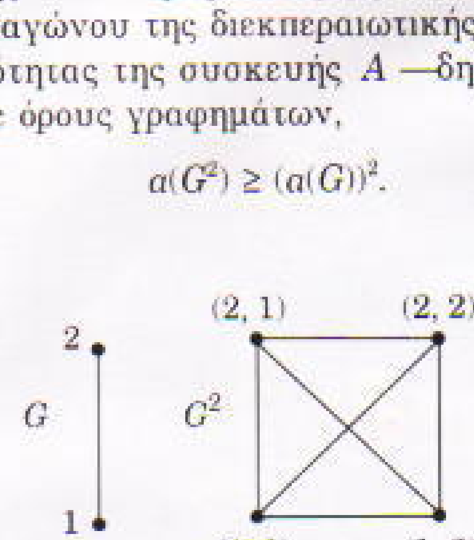
Για παράδειγμα, αν το γράφημα G έχει δύο μόνο κορυφές συνδεδεμένες με ακμή, τότε το G^2 έχει τη μορφή ενός τετραγώνου με τις διαγωνίους του (Σχήμα 2).

Πρόβλημα 3. Σχεδιάστε το τετράγωνο γράφημα G^2 για κάθε γράφημα G του Σχήματος 3.

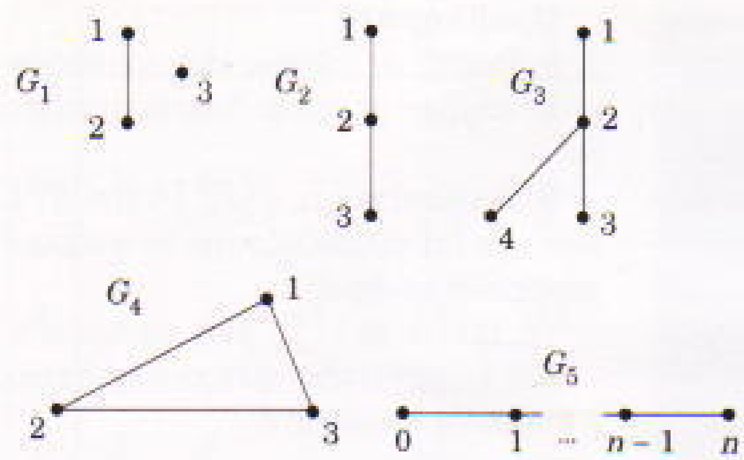
Το γράφημα G^2 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «ινώδες» γράφημα στο οποίο κάθε κατακόρυφη ή οριζόντια «ίνα» είναι το γράφημα G, ενώ κάθε ακμή ab του G αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο με διαγωνίους του G^2.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να εντοπίσουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο στο G^2. Αν M είναι ένα τέτοιο σύνολο του γραφήματος G, τότε τα στοιχεία του M δεν συγχέονται μεταξύ τους όταν μεταδίδονται μέσω της συσκευής T. Έτσι, όταν μεταδίδονται ζεύγη αυτών των γραμμάτων δεν καταστρέφεται κανένα γράμμα του M, επομένως τα ζεύγη (a, b) του αλφαβήτου S^2, με $a \in M$, $b \in M$, δεν συγχέονται μεταξύ τους. Το σύνολο των ζευγών (a, b), όπου $a \in M$, $b \in M$, συμβολίζεται με M^2. Προφανώς το πλήθος των στοιχείων του M^2 είναι p^2, όπου p είναι το πλήθος των στοιχείων του M. Άρα, η διεκπεραιωτική ικανότητα της A^2 είναι μεγαλύτερη ή ίση του τετραγώνου της διεκπεραιωτικής ικανότητας της συσκευής A —δηλαδή, με όρους γραφημάτων,

$$a(G^2) \geq (a(G))^2.$$



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι αυτή η αύξηση της διεκπεραιωτικής ικανότητας δεν είναι ανέξοδη —το τίμημα είναι η πτώση της ταχύτητας μετάδοσης στο μισό.

Στην πραγματική τηλεγραφία, τα γράμματα μεταδίδονται λίγο διαφορετικά. Αντί για δύο, έχουμε τρία στοιχειώδη σύμβολα στο αλφάβητο του τηλεγράφου (στον κώδικα Μορς) —τελεία, παύλα και *κενό* (αυξημένο διάστημα μεταξύ των σημάτων). Έτσι, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε το ίδιο πλήθος σημάτων (τελείες και παύλες) για όλα τα γράμματα —είναι λογικότερο να συμβολίσουμε τα συχνότερα γράμματα με μικρότερες ακολουθίες συμβόλων και να κρατήσουμε τις μεγαλύτερες ακολουθίες για τα σπανιότερα. Για παράδειγμα, υπάρχουν 33 γράμματα στο ρωσικό αλφάβητο. Αν θέλαμε να τα παραστήσουμε όλα με το ίδιο πλήθος συμβόλων θα αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε σύνολα 6 συμβόλων (διότι υπάρχουν μόνο $2^5 = 32$ σύνολα αποτελούμενα από πέντε τελείες και παύλες). Στην πραγματικότητα, τέσσερα σύμβολα είναι αρκετά για να παραστήσουμε σχεδόν όλα τα ρωσικά γράμματα: $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$. Από τα υπόλοιπα τρία, τα δύο προσδιορίζονται με συγκεκριμένα ζεύγη γραμμάτων από τα τριάντα, και το τελευταίο —το σπανιότερο— έχει κωδικό πέντε συμβόλων. Τα σύνολα με περισσότερα από τέσσερα σύμβολα χρησιμοποιούνται για τους αριθμούς και τα σημεία στίξης.[2]

2. Οι «ομοιόμορφοι» κώδικες, δηλαδή οι κώδικες με ίδιο πλήθος συμβόλων για κάθε γράμμα, έχουν τα δικά τους πλεονεκτήματα και χρησιμοποιούνται επίσης στην τηλεγραφία, ίσως συχνότερα και από τον κώδικα Μορς.

Βασιλιάδες σε μια σπείρα

Ας περιπλέξουμε λίγο το «γραμμικό» γράφημα G_5 του Σχήματος 3 ενώνοντας τα ακραία σημεία του 0 και n. Παίρνουμε έτσι ένα n-γωνο $0\ 1\ 2 \ldots (n-1)$. Ας το συμβολίσουμε με P_n. Το τετράγωνο P_n^2 αυτού του γραφήματος προκύπτει από το τετράγωνο του γραμμικού γραφήματος (το οποίο είναι ένα πλέγμα $n \times n$ τετραγώνων με τις διαγωνίους τους) αν ενώσουμε τις απέναντι πλευρές του. Αυτή η πράξη όμως μετατρέπει ένα τετράγωνο, ένα κανονικό γνήσιο τετράγωνο, σε σπείρα! (Δείτε το Καλειδοσκόπιο στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1994 του ελληνικού *Quantum*.) Έτσι, το P_n^2 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλέγμα σε μια σπείρα το οποίο αποτελείται από n^2 «μοναδιαία τετράγωνα» και τις διαγωνίους τους (το κόκκινο πλέγμα του Σχήματος 4).

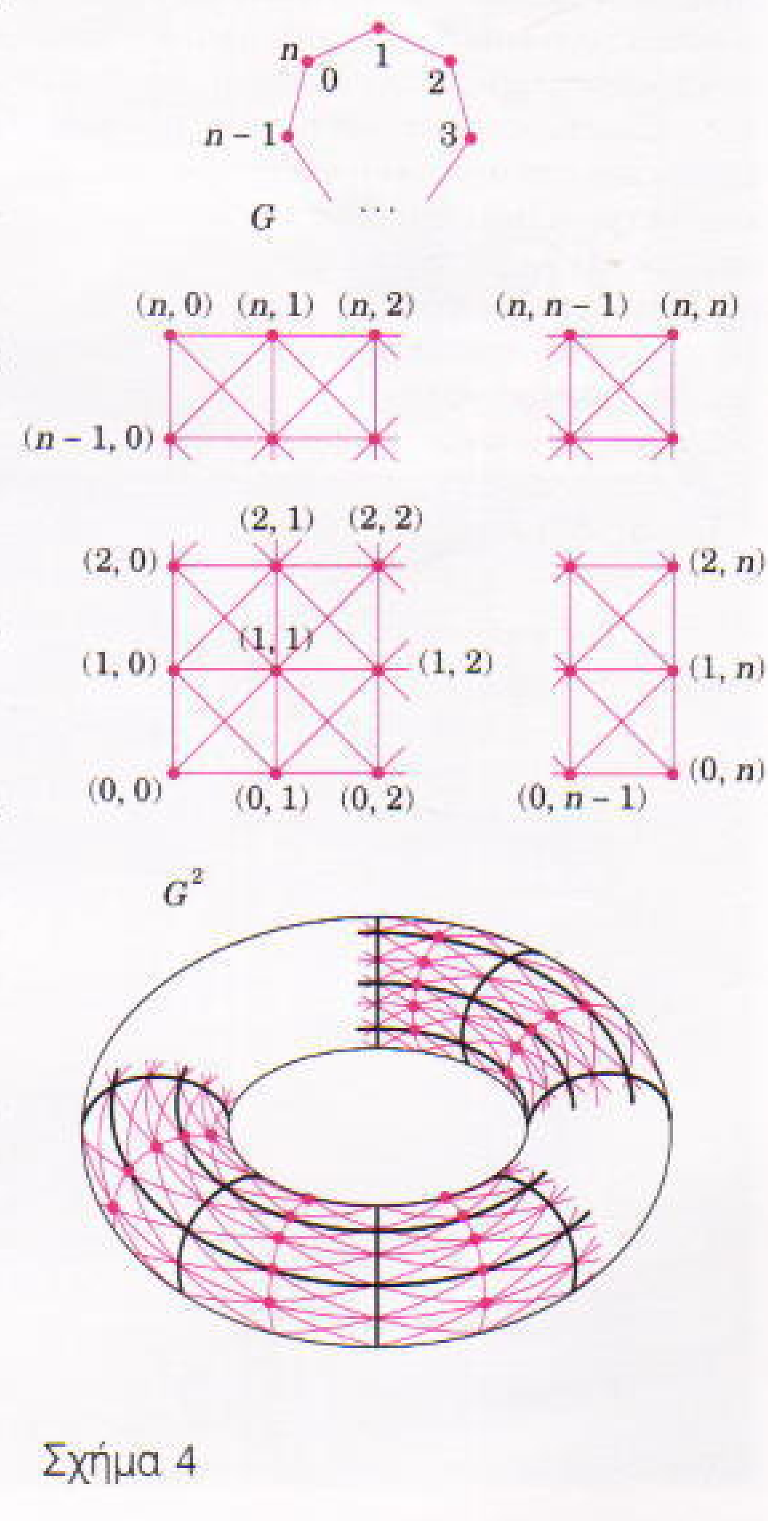
Μπορούμε να ταυτίσουμε τις κορυφές αυτών των τετραγώνων με τα κέντρα των τετραγώνων μιας σπειροειδούς σκακιέρας διαστάσεων $n \times n$ (είναι χρωματισμένη μαύρη στο Σχήμα 4). Τότε, οι προσκείμενοι κόμβοι του P_n^2 θα αντιστοιχούν σε τετράγωνα της σκακιέρας που συνδέονται με κινήσεις του βασιλιά. Επομένως, το πλήθος ανεξαρτησίας του P_n^2 ισούται με το μέγιστο πλήθος βασιλιάδων που μπορεί να τοποθετηθούν σε μια σπειροειδή $n \times n$ σκακιέρα ώστε να μην απειλεί ο ένας τον άλλο. Αυτό είναι το αντικείμενο του προβλήματος *M51* στο παρόν τεύχος του *Quantum*.

Για να κατανοήσετε περισσότερο τη δομή του ΜΑΣ για το γράφημα P_n^2, λύστε τα επόμενα προβλήματα.

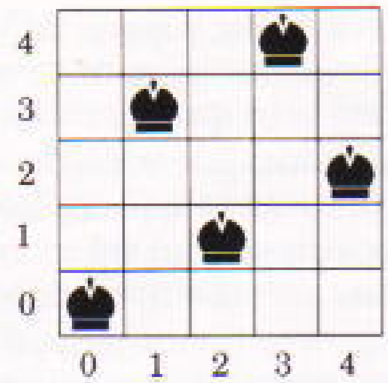
Προβλήματα

4. Έστω M το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο του P_n^2 (ή της σπειροειδούς σκακιέρας). Αποδείξτε ότι (α) αν $n = 2s$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα M της μορφής M_1^2, όπου M_1 είναι οποιοδήποτε ΜΑΣ του P_n, ενώ $\alpha(P_{2s}^2) = s^2$, (β) αν $n = 4s + 1$, τότε υπάρχουν ακριβώς s κόμβοι (βασιλιάδες) του M σε κάθε οριζόντια ή κατακόρυφη γραμμή της σκακιέρας, και (γ) αν $n = 4s + 3$, τότε κάθε κατακόρυφη ή οριζόντια γραμμή περιέχει είτε s είτε $s + 1$ στοιχεία του M.

5. Ορίζουμε ως *κυκλική μετατόπιση* του γραφήματος P_n^2 σε μια σπείρα μια «παράλληλη μετατόπιση modulo n», που μεταφέρει ένα σημείο (x, y) στο $(x + s, y + t) \pmod n$ για συγκεκριμένα σταθερά s και t —δηλαδή στο σημείο (x', y'), όπου x' και y' είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης των $x + s$ και $y + t$ με το n. Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε ΜΑΣ του P_5^2 μπορεί να αναχθεί στη μορφή που βλέπετε στο Σχήμα 5 μέσω μιας κατάλληλης κυκλικής μετατόπισης και, ίσως, μιας συμμετρίας ως προς ευθεία της σκακιέρας.



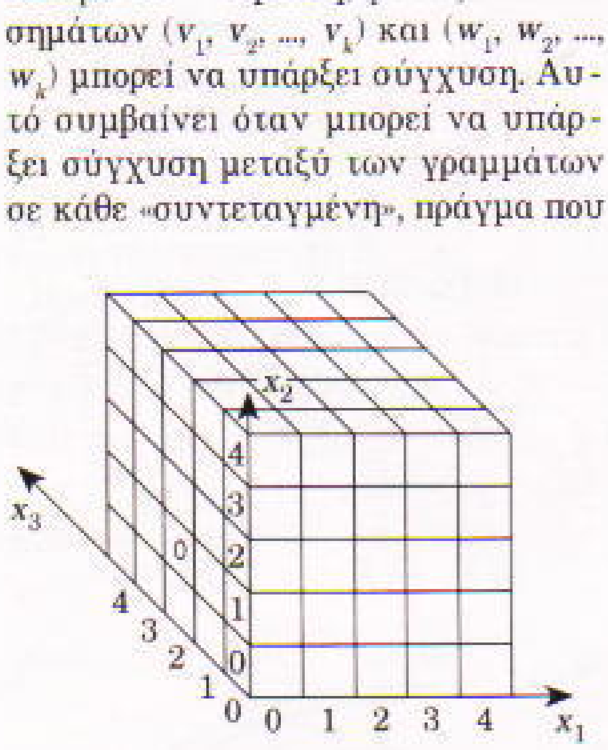
Σχήμα 4



Σχήμα 5

Ανεβαίνοντας τη διαστασιακή κλίμακα

Ας βελτιώσουμε περισσότερο τον πομπό μας: θεωρούμε την συσκευή T^k, όπου k τυχαίος φυσικός αριθμός. Δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε τον πομπό T για να στέλνουμε κάθε φορά πακέτα k γραμμάτων του αρχικού αλφάβητου εισόδου S. Όπως και στην περίπτωση $k = 2$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα σφάλματος G^k του πομπού T^k. Το σύνολο των κόμβων του είναι το αλφάβητο S^k που αποτελείται από όλα τα σύνολα k γραμμάτων $(v_1, v_2, ..., v_k)$, όπου όλα τα $v_i \in S$. Επίσης, είναι φανερό ποιοι κόμβοι αυτού του συνόλου είναι προσκείμενοι —δηλαδή, μεταξύ ποιων σημάτων $(v_1, v_2, ..., v_k)$ και $(w_1, w_2, ..., w_k)$ μπορεί να υπάρξει σύγχυση. Αυτό συμβαίνει όταν μπορεί να υπάρξει σύγχυση μεταξύ των γραμμάτων σε κάθε «συντεταγμένη», πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε i πρέπει να ικανοποιείται μία από τις δύο συνθήκες: είτε $v_i = w_i$ είτε $v_i \sim w_i$ (αν $v_i = w_i$ για κάθε i, τα δύο σύνολα συμπίπτουν).



Είναι μάλλον δύσκολο να βρούμε ακριβώς τη διεκπεραιωτική ικανότητα στη γενική περίπτωση, αλλά μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα κάτω φράγμα της.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι $a(G^k) \geq (a(G))^k$.

Όσο για περισσότερες βελτιώσεις... Ακόμη και στην απλούστερη περίπτωση όπου το γράφημα σφάλματος είναι ένα n-γωνο P_n, δεν γνωρίζουμε πολλά για το $a\left(P_n^k\right)$. Θα συνοψίσω στη συνέχεια τα αποτελέσματα που έχουν επιτευχθεί έως σήμερα.[3]

Ένα τετράγωνο ή μια σκακιέρα με ενωμένες τις απέναντι πλευρές είναι μια *διοδιάστατη σπείρα*. Παρόμοια, η k-οστή δύναμη ενός n-γωνου (το γράφημα P_n^k) μπορεί να ονομαστεί *k-διάστατη σπείρα* μεγέθους n. Οι κόμβοι του γραφήματος P_n^k μπορούν να παρασταθούν ως σύνολα k ακεραίων $(x_1, x_2, ..., x_k)$ με κάθε x_i να παίρνει τις τιμές από 0 έως $n - 1$.

Πρόβλημα 7. Βρείτε το πλήθος των κόμβων του P_n^k.

Από τον ορισμό, δύο σύνολα $(x_1, x_2, ..., x_k)$ και $(y_1, y_2, ..., y_k)$ είναι προσκείμενα στο γράφημα P_n^k αν τα μέλη κάθε ζεύγους συντεταγμένων (x_i, y_i) είναι «γείτονες» στο P_n —δηλαδή, διαφέρουν το πολύ κατά 1 (mod n): για κάθε i, $|x_i - y_i| \in \{0, 1\}$ (mod n). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 6 βλέπετε όλους τους γείτονες του συνόλου (0, 1, 2) στην περίπτωση που $k = 3$, $n = 5$.

3. Δηλαδή, κατά την ημερομηνία της πρώτης δημοσίευσης αυτού του άρθρου στο *Kvant*, πριν από 15 χρόνια. Πιθανότατα, πολλές από τις κενές θέσεις του πίνακα αποτελεσμάτων που δίνουμε στη συνέχεια έχουν πλέον συμπληρωθεί.

Προβλήματα

8. Βρείτε το πλήθος των γειτόνων κάθε κόμβου σε μια k-διάστατη σπείρα.

9. Αποδείξτε ότι $a\left(P_n^k\right) \leq [(n/2)^k]$, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του αριθμού x.

10. Βρείτε το $a\left(P_n^k\right)$ για τα άρτια n.

Για τις περιττές τιμές του n ισχύει η επόμενη ανισότητα:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k \leq a\left(P_n^k\right) \leq \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right],$$

ενώ μερικές φορές είναι δυνατόν να βρούμε ακριβώς την τιμή του $a\left(P_n^k\right)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν το $n - 1$ διαιρείται με το 2^k, $k \geq 1$, τότε*

$$a\left(P_n^k\right) = \frac{n-1}{2^k} \cdot n^{k-1}.$$

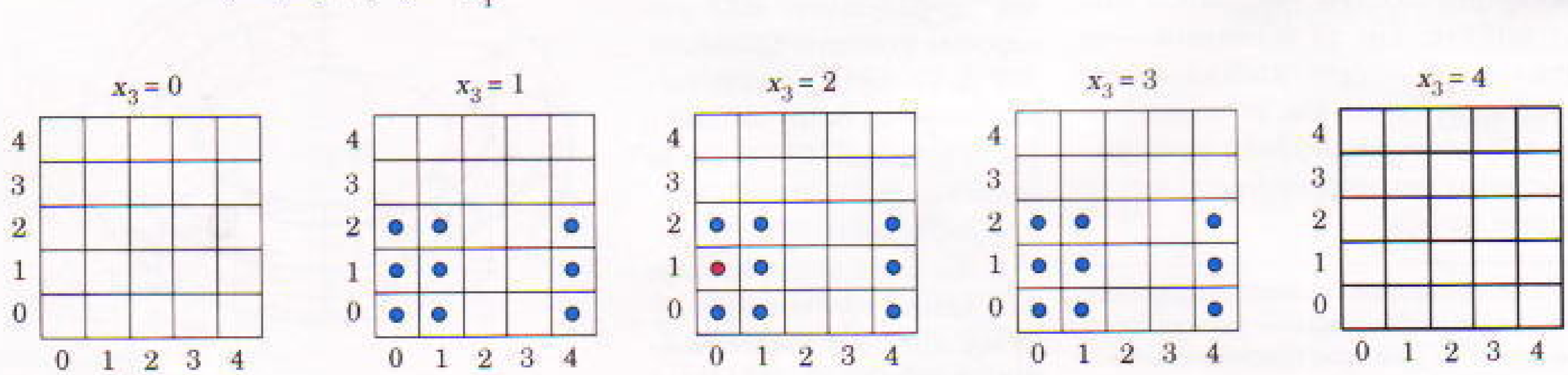
Η πλήρης απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι μάλλον εκτενής, έτσι θα περιοριστώ στην παρουσίαση ενός ανεξάρτητου συνόλου με $a\left(P_n^k\right)$ στοιχεία. Θεωρούμε ένα τυχαίο σύνολο τιμών για τις πρώτες $k - 1$ συντεταγμένες $(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$, με $0 \leq x_i \leq n - 1$, και υπολογίζουμε $r = (n - 1)/2^k$ τιμές της k-οστής συντεταγμένης χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$x_k = 2\ell + r(2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + ... + 2^1 x_{k-1}) \text{ (mod } n),$$

όπου ℓ είναι κάποιος ακέραιος από το 0 έως το $r - 1$. Έτσι παίρνουμε $n^{k-1} \cdot r$ κόμβους $(x_1, x_2, ..., x_k)$ του P_n^k που σχηματίζουν ένα ανεξάρτητο σύνολο.

Αν σχεδιάσετε το σύνολο των κόμβων με συντεταγμένες που ικανοποιούν τον τελευταίο τύπο για την περίπτωση $k = 2$, θα έχετε την απάντηση στο πρόβλημα *M51* για τη περίπτωση που το $n - 1$ διαιρείται με το 4.

Αυτά τα αποτελέσματα μας επιτρέπουν να συμπληρώσουμε έναν



Σχήμα 6

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	
6	3	9	37	81	243
7	3	10	33		
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81		
10	5	25	125	625	3125
11	5	27			
12	6	26	216	1296	7776
13	6	39			
14	7	49	343	2401	16807
15	7	52			

Σχήμα 7

πίνακα με τις τιμές του $a\left(P_n^k\right)$ (Σχήμα 7). Μερικές από τις καταχωρίσεις του πίνακα έχουν υπολογιστεί «θεωρητικά», ενώ οι υπόλοιπες μέσω υπολογιστή. Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι το ποσοστό των κενών θέσεων αυξάνει όσο μεγαλώνουν τα n και k.

Ίσως μερικοί αναγνώστες μας καταφέρουν να συμπληρώσουν τα κενά του πίνακα και να λύσουν το πρόβλημα του υπολογισμού της διεκπεραιωτικής ικανότητας των πομπών. ◘

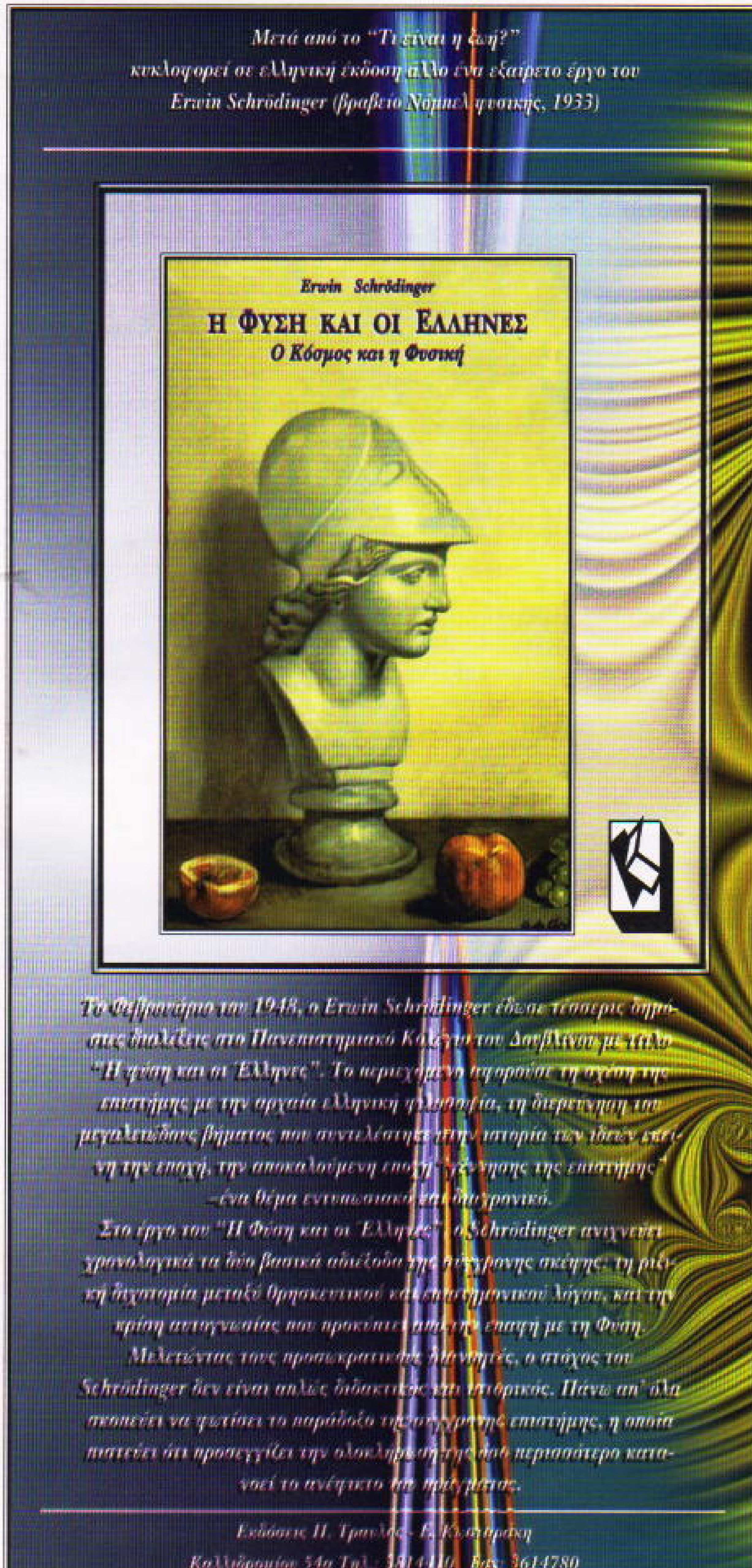
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

QUANTUM

ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

**Διαβάστε το
και διαδώστε το**

*Γίνετε και εσείς
συντελεστής στην Quant-ική
εξίσωση*



ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

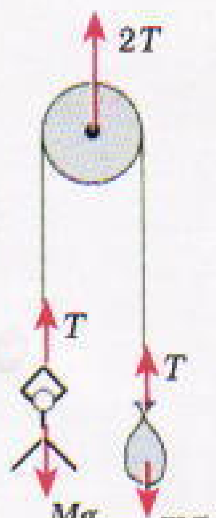
Οι υπέροχες μηχανές του Atwood

«Η βαρύτητά σου σβήνει, και δεν σε σώζει η αρνητικότητά σου.»
—Bob Dylan

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΒΡΙΣΚΕΣΑΙ ΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟ ΟΡΟΦΟ ενός κτιρίου που καίγεται. Οι καπνοί πυκνώνουν και τα πράγματα αρχίζουν να γίνονται δύσκολα. Ξαφνικά στην άκρη της οροφής βλέπεις στερεωμένη μια τροχαλία. Ένα χοντρό σκοινί είναι περασμένο πάνω της· το ένα άκρο του φτάνει στο έδαφος και είναι δεμένο σ' ένα σάκο άμμου· το άλλο κρέμεται ελεύθερα. Με μια ματιά αντιλαμβάνεσαι ότι ο σάκος έχει μάζα 45 kg. Η εμπειρία που έχεις αποκτήσει μέχρι σήμερα λύνοντας ασκήσεις φυσικής σε βοηθάει τούτη τη στιγμή να μην πανικοβάλλεσαι.

Αποφασίζεις να υπολογίσεις γρήγορα-γρήγορα κατά πόσο είναι δυνατόν να σωθείς αν κρεμαστείς στο ελεύθερο άκρο του σκοινιού. Σχεδιάζεις σ' ένα πρόχειρο χαρτί τα διαγράμματα «ελεύθερου σώματος» (Σχήμα 1), και σημειώνεις όλες τις δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα. Επειδή η τροχαλία είναι «καλολαδομένη» και «καλογυαλισμένη», αποφασίζεις να παραβλέψεις τις τριβές. Σημειώνεις με M τη μάζα σου, με m τη μάζα του σάκου, με g την επιτάχυνση της βαρύτητας, με T την τάση του σκοινιού, με Γ τη δική σου επιτάχυνση και με γ την επιτάχυνση του σάκου, και γράφεις τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τον εαυτό σου και τον σάκο.



Σχήμα 1

Θεωρώντας ότι οι δυνάμεις και οι επιταχύνσεις είναι θετικές όταν έχουν φορά προς τα πάνω, γράφεις

$$T - Mg = M\Gamma, \qquad (1)$$

και

$$T - mg = m\gamma. \qquad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους (T, Γ, γ). Αφού οι δύο μάζες συνδέονται με νήμα σταθερού μήκους, οι επιταχύνσεις τους θα έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετη φορά, δηλαδή

$$\gamma = -\Gamma. \qquad (3)$$

Λύνοντας τώρα το σύστημα των τριών εξισώσεων βρίσκεις εύκολα ότι θα κινηθείς προς το έδαφος με επιτάχυνση μέτρου

$$\Gamma = g\frac{M-m}{M+m}.$$

Αντικαθιστάς τη μάζα σου $M = 90$ kg και το $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, και βρίσκεις $\Gamma = 3{,}3\ \mathrm{m/s^2}$. Άρα η ταχύτητα με την οποία θα φτάσεις στο έδαφος ισούται με

$$\upsilon = \sqrt{2\Gamma h}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 3{,}3\ \mathrm{m/s^2} \cdot 15\ \mathrm{m}} = 9{,}9\ \mathrm{m/s}.$$

Αυτό ισοδυναμεί με το να πηδούσες ελεύθερα από ύψος 5 m· επομένως, είναι αρκετά πιθανό, αφού κρεμαστείς στο ελεύθερο άκρο του σκοινιού, να προσγειωθείς στο έδαφος χωρίς να τραυματιστείς. Αν μάλιστα έχεις μικρότερη μάζα, ή σκεφτείς να τυλίξεις μερικές φορές το σκοινί γύρω από την τροχαλία ώστε να μεγιστοποιήσεις την τριβή, η κάθοδός σου θα γίνει ασφαλέστερη.

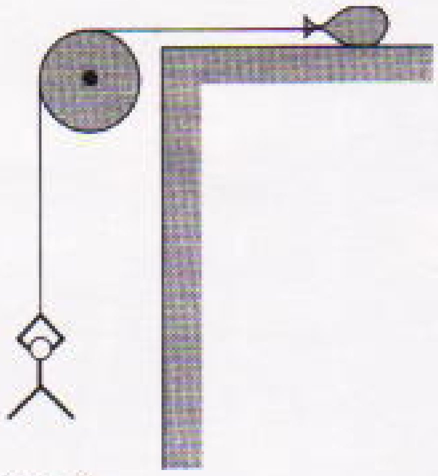
Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί παράδειγμα ενός κλασικού προβλήματος της φυσικής που είναι γνωστό με το όνομα «μηχανή του Atwood». Η εν λόγω διάταξη μας παρέχει τη δυνατότητα να μετακινούμε κατακόρυφα στο εργαστήριο κάποιο σώμα με επιτάχυνση τιμής οσοδήποτε μικρότερης αυτής του g. (Μπορείτε να προτείνετε έναν τρόπο να επιτυγχάνουμε επιταχύνσεις μεγαλύτερες του g;) Συχνά η μηχανή Atwood χρησιμοποιείται στο εργαστήριο για την πειραματική επίδειξη του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Για παράδειγμα, η τροχαλία μπορεί να βρίσκεται στην κορυφή δύο κεκλιμένων επιπέδων —διάταξη που μοιάζει με Λ—, και οι μάζες να ολισθαίνουν —με ή χωρίς τριβή— στα κεκλιμένα επίπεδα.

Ας έρθουμε τώρα στο πρόβλημα αυτού του μήνα, που αναφέρεται σε δύο τροποποιήσεις της μηχανής του Atwood.

Α. Αν ο σάκος ολισθαίνει χωρίς τριβή στο οριζόντιο επίπεδο του Σχήματος 2, και η μάζα σας είναι 90 kg, με πόση επιτάχυνση κατέρχεστε και πόση είναι η τάση του σκοινιού; (Η διάταξη αυτή ονομάζεται «μισή μη-

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


TOMAS BUNK



Σχήμα 2

χανή του Atwood».) Ελέγξτε την ορθότητα των αποτελεσμάτων σας υποθέτοντας πως κάθε μάζα χωριστά τείνει στο μηδέν.

Β. Υποθέστε ότι η μισή μηχανή του Atwood έχει τοποθετηθεί σε όχημα μάζας m_3, το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Με πόση επιτάχυνση κινείται καθεμιά από τις τρεις μάζες και πόση είναι η τάση του σκοινιού αμέσως μετά τη στιγμή που εγκαταλείπουμε ελεύθερες τις τρεις μάζες; Το πρόβλημα λύνεται πολύ δύσκολα για οποιαδήποτε στιγμή t πλην της στιγμής $t = 0$· για την εν λόγω στιγμή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω στην κανονική μηχανή του Atwood. Υποθέστε ότι το σκοινί έχει σταθερό μήκος, και ελέγξτε την ορθότητα των αποτελεσμάτων σας στις οριακές συνθήκες.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Φεβρουαρίου 1996. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

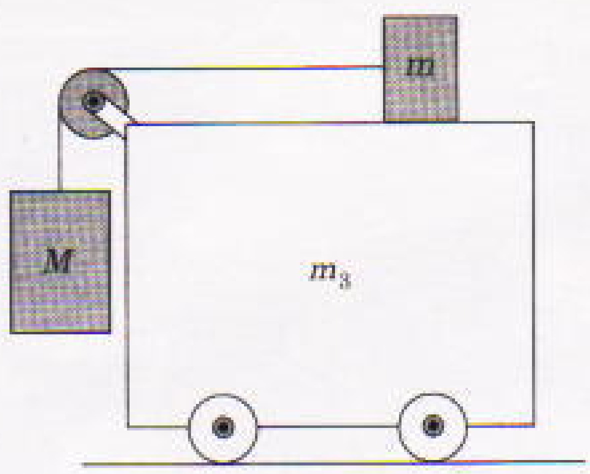
Το εκκρεμές που στάζει

Καταρχάς ας υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αδειάσει το δοχείο· μπορούμε να το βρούμε διαιρώντας την αρχική μάζα M_0 του υγρού διά τον ρυθμό εκροής του r. Έτσι,

$$t_{max} = \frac{M_0}{r} = \frac{8a^3\rho}{r},$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού. Επειδή στη συνέχεια της λύσης θα χρειαστούμε πολλές φορές το διάστημα t_{max}, προκειμένου να αποφύγουμε τη συνεχή επανάληψη του παραπάνω τύπου ας ορίσουμε μια νέα αδιάστατη σταθερά τ από τη σχέση

$$\tau = t/t_{max}, \text{ με } 0 \le \tau \le 1.$$



Σχήμα 3

Μπορούμε να εκφράσουμε τη μάζα του υγρού που απομένει στο δοχείο σε συνάρτηση με το τ:

$$M(t) = M_0(1 - \tau).$$

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για το ύψος του d:

$$d(t) = 2a(1 - \tau).$$

Επομένως, το μήκος του εκκρεμούς, μια και το κέντρο μάζας του υγρού συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του, δίνεται από τη σχέση

$$L(t) = L_0 + a - \frac{d(t)}{2} = L_0 + a\tau.$$

Αυτή τη σχέση θα μπορούσαμε να τη γράψουμε εξαρχής αντιλαμβανόμενοι ότι το κέντρο μάζας μετακινείται ομαλά από το L_0 στο $L_0 + a$ καθώς το τ μεταβάλλεται από το 0 στο1.

Άρα η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς θα ισούται με

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0 + a\tau}{g}} = T_0\sqrt{1 + \frac{a\tau}{L_0}},$$

όπου $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$ είναι η αρχική περίοδος του εκκρεμούς. Η γραφική παράσταση της μεταβολής της περιόδου σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 4 (πάνω καμπύλη), για την περίπτωση $L_0 = 2a$. Μολονότι η καμπύλη αυτή μοιάζει με ευθεία γραμμή, στην πραγματικότητα έχει μια ελαφρά καμπύλωση λόγω της τετραγωνικής ρίζας στο δεξιό μέλος. Σημειώστε ότι η περίοδος δεν ορίζεται από τη στιγμή που το δοχείο θα έχει αδειάσει και ύστερα.

Εάν το δοχείο έχει μάζα M_0, πρέπει να υπολογίσουμε το κέντρο μάζας $x_{κ.μ.}$ του συστήματος δοχείο-υγρό:

$$x_{κ.μ.} = \frac{m_δ x_δ + m_υ x_υ}{m_δ + m_υ},$$

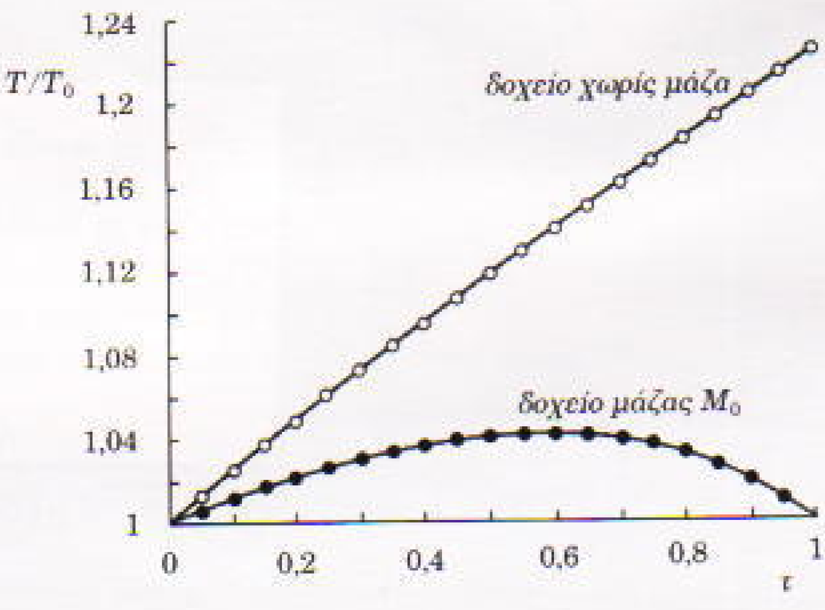
όπου οι δείκτες «δ» και «υ» αναφέρονται στο δοχείο και το υγρό αντίστοιχα. Εάν επιλέξουμε να βρούμε τη θέση του κέντρου μάζας ως προς το κέντρο του δοχείου, τότε $x_δ = 0$, οπότε

$$x_{κ.μ.} = \frac{M_0(1-\tau)a\tau}{M_0 + M_0(1-\tau)} = a\frac{\tau(1-\tau)}{2-\tau}.$$

Επομένως, η περίοδος του εκκρεμούς ως συνάρτηση του χρόνου θα δίνεται από τη σχέση

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{a\tau(1-\tau)}{L_0(2-\tau)}}.$$

Η σχετική γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4 (κάτω καμπύλη). Σημειώστε ότι η περίοδος γίνεται μέγιστη στο 60% περίπου του διαστήματος που απαιτείται για να αδειάσει το δοχείο, και ότι η μέγιστη περίοδος παραμένει μικρότερη απ' ό,τι στην περίπτωση του δοχείου χωρίς μάζα. Επιπλέον, σημειώστε πως όταν όλο το υγρό εγκαταλείψει το δοχείο, η περίοδος λαμβάνει πάλι την αρχική της τιμή· αυτό μάλλον το περιμένατε αφού το κέντρο μάζας του συστήματος σ' αυτή την περίπτωση συμπίπτει με το κέντρο μάζας του δοχείου. ◼



Σχήμα 4

Για να περνά η ώρα

Σ51

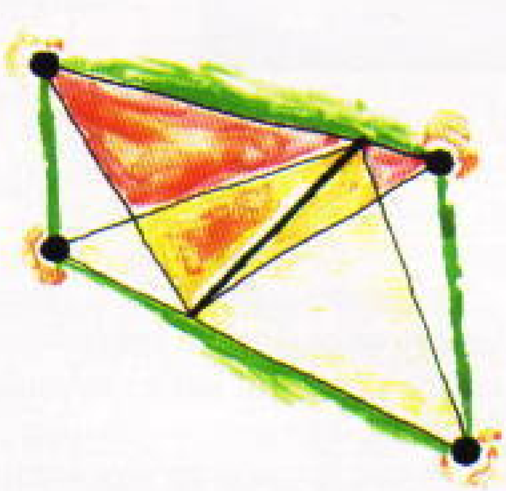
Σύστημα εξισώσεων. Λύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων για φυσικούς αριθμούς T, W και O:
$T - W - O = T + W + O = 2$.
(Y. Alenkov)

Σ52

Οικονομικές συναλλαγές. Το πλουσιόπαιδο ο Τομ λέει στην καπιταλίστρια φίλη του Άτζι: «Αν προσθέσω 7 δολάρια στα 3/5 των κεφαλαίων μου, θα έχω τόσα χρήματα όσα και συ»· οπότε η Άτζι του απαντά: «Επομένως, έχεις μόνο τρία δολάρια περισσότερα από μένα». Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;
(N. Antonovich)

Σ53

Πείραμα στην άβυσσο. Βυθίζουμε δύο μεγάλου μήκους χάλκινους σωλήνες στον ωκεανό. Ο ένας σωλήνας είναι ερμητικά σφραγισμένος και στα δύο άκρα του, ενώ ο άλλος έχει το ένα άκρο ανοιχτό. Τι θα συμβεί στους σωλήνες στο βάθος του ωκεανού;



Σ54

Τριγωνικά παιχνίδια. Τοποθετούμε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα έτσι ώστε η κορυφή της ορθής γωνίας του καθενός να βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα του άλλου (δείτε το σκίτσο). Οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές σχηματίζουν ένα τετράπλευρο. Αποδείξτε ότι η ευθεία που ενώνει τις κορυφές των ορθών γωνιών διαιρεί το εμβαδόν του σε δύο ίσα μέρη.
(V. Proizvolov)

Σ55

Μην το συμπληρώνετε! Δύο παίκτες χρωματίζουν τετράγωνα σε ένα πλέγμα διαστάσεων 4 × 4. Οι παίκτες χρωματίζουν διαδοχικά από ένα τετράγωνο κάθε φορά, και χάνει αυτός που θα συμπληρώσει ένα εξ ολοκλήρου χρωματισμένο τετράγωνο διαστάσεων 2 × 2. Ποιος μπορεί να εξασφαλίσει τη νίκη, ο πρώτος ή ο δεύτερος παίκτης;
(S. Tokarev)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Επτά οι ημέρες της Δημιουργίας

Α, ουρανέ, μήπως νομίζεις πως μας αρκεί να σε κοιτάμε;
Σα να μου φαίνεται πως δε μας ξέρεις.

— Τίτος Πατρίκιος

Ανδρέας Κασσέτας

Κυριακή

Όλα είναι ίδια στην Υπερκόλαση

Δεν ξέρουμε αν κάποιος πάτησε τη σκανδάλη. Ένα τρομακτικό μπαμ —ή μπανγκ όπως λένε οι Αμερικάνοι— και η παράσταση αρχίζει. Γεννιέται ένα καινούργιο «είναι»· εμπεριέχει ένα δικό του γίγνεσθαι· εμπεριέχει το μέλλον. Δεκαπέντε δισεκατομμύρια χρόνια αργότερα το νεογνό έχει πια μεγαλώσει. Μια ιδιόρρυθμη «εγγονή» του, η Ανθρώπινη Σκέψη, καταφέρνει και επιστρέφει στο «τότε». Με το θρασύτατο βλέμμα της μπορεί και βρίσκει την άκρη του νήματος, γυρίζει πίσω στο νεογέννητο Σύμπαν· ίσως το πρώτο και μοναδικό, ίσως ένα ακόμα ανάμεσα σε άλλα Σύμπαντα που είχαν προηγηθεί. Αρκείται στο «ίσως». Μπορεί, ωστόσο, και «βλέπει» ορισμένα από αυτά που συμβαίνουν την πρώτη μέρα του δικού της Σύμπαντος, την πιο σκοτεινή απ' όλες.

Η πρώτη μέρα της Δημιουργίας είναι πολύ μικρή. Από το άχρονο μηδέν έως το 10^{-43} του πρώτου δευτερολέπτου. Η Σκέψη ξαναπροβάλλει σε αργό γύρισμα τα συμβαίνοντα —ή, μάλλον, ελάχιστα από αυτά— ώστε να μπορέσει να τα δει. Μιλάει γι' αυτά χρησιμοποιώντας έννοιες δοκιμασμένες στην Πραγματικότητα του δικού της «σήμερα», έννοιες/προϊόντα αφαίρεσης σφυρηλατημένες και αποτελεσματικές: «Σωματίδια», «Κίνηση», «Αλληλεπίδραση». Και η Ανθρώπινη αφαιρετική Σκέψη, γδύνοντας τα γεγονότα και τα αντικείμενα με τρόπους που εκείνη επιλέγει, «βλέπει» μέσα σ' αυτά όντα, που τα αποκαλεί «σωματίδια», να κινούνται και να αλληλεπιδρούν.

Την πρώτη ημέρα της Δημιουργίας όλα είναι ίδια και η ζέστη φοβερή. Υπάρχουν μόνον όμοια σωματίδια· είναι αεικίνητα και αλληλεπιδρούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Οι τέσσερις «διαφορετικές» δυνάμεις της φυσικής τού σήμερα εμφανίζονται ως «μία». Το Σύμπαν της Κυριακής είναι πολύ μικρό και το πιο ζεστό πράγμα που έχει υπάρξει ποτέ. Πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις των ανθρώπινων εμπειριών· τόσο μικρό που η μεγαλωμένη με υλικό εμπειρίας φαντασία μας να δυσκολεύεται να συλλάβει εικόνες με κινούμενα σωματίδια μέσα σ' αυτό. Και τόσο ζεστό που και τα καζάνια της κόλασης να θεωρούνται δροσιά· 10^{32} βαθμοί της θερμοκρασιακής κλίμακας Κέλβιν είναι «κάτι» πολύ μακριά και από τις πλέον τολμηρές ανθρώπινες φαντασιώσεις. Στην οπτική του Μικρόκοσμου η Υπερκόλαση αυτή αντανακλά τις πυρετώδεις κινήσεις των νεογέννητων σωματιδίων. Ένα περιβάλλον που ίσως είναι εκείνο που επιβάλλει την ενιαία μορφή στα σωματίδια και στις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Και όλα αυτά μέσα στο πλαίσιο ενός νοησιακού «ίσως».

Το μόνο σχετικά σίγουρο είναι ότι στις μέρες που ακολουθούν, το καινούργιο Σύμπαν θα μεγαλώνει διαρκώς και θα ψύχεται.

Την πρώτη εκείνη ημέρα της Δημιουργίας, οι φυσικοί της εποχής μας, γεμάτοι αμφιβολίες για όλα όσα λένε γι' αυτήν, θα την αποκαλούν και «εποχή της κβαντικής βαρύτητας». Για μία ακόμη φορά θα δώσουν όνομα σε κάτι το οποίο αδυνατούν να διαπιστώσουν ότι υπάρχει.

Δευτέρα

Ενοποίηση

Η δεύτερη μέρα είναι λιγότερο ζεστή και σχετικά μεγαλύτερη από την πρώτη. Διαρκεί από το 10^{-43} έως το 10^{-35} του πρώτου δευτερολέπτου.

Το βρέφος μεγαλώνει διαρκώς. Αρχέγονα σωματίδια απροσδιόριστης μορφής κινούνται και αλληλεπιδρούν. Η Σκέψη διακρίνει σωματίδια Ύλης —κοινούς προγόνους των λεπτονίων και των κουάρκ— αλλά και τα αντισωματίδιά τους· αυτά ανήκουν στην Αντιύλη. Οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις εκδηλώνονται «σήμερα» με δύο μορφές. Η μια είναι η Βαρυτική. Η άλλη είναι οι τρεις —Ηλεκτρομαγνητική, Ασθενής, Ισχυρή— ενοποιημένες. Ο Δημιουργός έχει αφήσει να φανούν ορισμένες από τις προθέσεις του. Οι δυνάμεις θα πρέπει να ξεχωρίσουν.

Δεν ξέρουμε εάν ο Δημιουργός είναι ένα είδος Θεού ή μια εγκεφαλική σύλληψη «κατ' εικόνα και καθ' ομοίωσιν» του ανθρώπου —ινδοευρωπαίος με γενιάδα ή μαύρος με κοντό μαλλί είτε γυναίκα ασιάτισσα είτε κάτι μη περιγράψιμο—, και στις δύο πάντως περιπτώσεις είναι ον ή πλάσμα ικανό όχι μόνο να πατήσει τη σκανδάλη για το μεγάλο μπαμ-μπανγκ αλλά και να προωθήσει τα πράγματα βάσει αρχικού σχεδίου που θα τα οδηγούσε αναπόφευκτα σε γαλαξίες, σε άτομα Ανθρακα, σε κουκουναριές και σε όντα με τη δυνατότητα να τον επινοήσουν.

Μια τρίτη, λιγότερο ανθρωπική εκδοχή επιμένει ότι η πορεία των γεγονότων ήταν ένα σκληρό παιχνίδι ανάμεσα στο Χάος και την Τάξη, παιχνίδι στο οποίο η Τάξη εμφανίστηκε χωρίς κανέναν εκπρόσωπο, παιχνίδι δίχως κανόνες περιγράψιμους από τον συγκροτημένο από υλικό Σύμπαντος ανθρώπινο εγκέφαλό μας.

Τρίτη

Ο θάνατος έχει τη μορφή φωτονίων

Η τρίτη ημέρα της Δημιουργίας «ξημερώνει» στο 10^{-35} και διαρκεί έως το ένα εκατομμυριοστό του δευτερολέπτου. Τα αρχέγονα σωματίδια μεταμορφώνονται σε κουάρκ και σε ισάριθμα αντικουάρκ, σε νετρίνα και σε αντινετρίνα, σε ηλεκτρόνια και σε άλλα τόσα ποζιτρόνια, και το σαιξπηρικών προδιαγραφών έργο αρχίζει· Ρωμαίος και Ιουλιέττα, Οφηλία και Άμλετ. Κάθε συνάντηση ενός κουάρκ με το αντικουάρκ του σημαίνει εξαΰλωση και των δύο. Οι κουάρκ πεθαίνουν μαζί με τις αντικουάρκ Ιουλιέττες τους και ο θάνατος ζεσταίνει, έστω και πρόσκαιρα, τα υπόλοιπα συστατικά του Κόσμου. Στο σύνολό του, βέβαια, το Σύμπαν εξακολουθεί να ψύχεται και να μεγαλώνει. Και με κάθε ηλεκτρόνιο συμβαίνει το ίδιο· η συνάντηση με ποζιτρόνιο συνεπάγεται εξαφάνιση και των δύο και ο θάνατος έχει τη μορφή φωτονίων.

Κάπου εκεί ο Δημιουργός φαίνεται ότι παραμέρισε τους δισταγμούς και πήρε τη μεγάλη απόφαση: Η αρχική συμμετρία Ύλης και Αντιύλης θα έπρεπε να διαταραχθεί έστω και ελαφρά υπέρ της Ύλης. Η απόφαση είχε την άμεση συνέπεια ν' αρχίσουν να περισσεύουν τα κουάρκ. Ορισμένοι Ρωμαίοι κουάρκ δεν θα συναντήσουν ποτέ την αντικουάρκ Ιουλιέττα τους και θα επιζήσουν για να φτιάξουν το Σύμπαν του μέλλοντος· θα φτιάξουν πρωτόνια, θα φτιάξουν Άστρα, μουριές, Πελοπόννησο, Μάνη, κορίτσια, παιδιά.

Την Τρίτη ημέρα της Δημιουργίας το Σύμπαν, με μέγεθος μιας μπάλας του τένις, κατευθύνεται προς την επιλογή «Ύλη». Ωστόσο το δρομολόγιο θα πραγματοποιηθεί δύσκολα κι αυτό γιατί η Κόλαση επιμένει· η θερμοκρασία της ακτινοβολίας διατηρείται σε τρομακτικά υψηλές τιμές και καθένα από τα υψηλής ενέργειας φωτόνια που τη συγκροτούν μπορεί να γεννήσει Αντιύλη· είναι, δηλαδή, δυνατόν να «σβήσει» και στη θέση του να εμφανιστεί ένα ζευγάρι ηλεκτρονίου με ποζιτρόνιο. Όσο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από το «κατώφλι» $5{,}93 \cdot 10^9$ Κέλβιν, τα ποζιτρόνια της Αντιύλης θα ξανάρχονται μαζί με τα δίδυμα «υλικά» αδερφάκια τους. Η Κόλαση επιβάλλει επιστροφές στην Αντιύλη.

Καθώς η Τρίτη ξετυλίγεται, τα φωτόνια πλημμυρίζουν το νεαρό Σύμπαν και συνεισφέρουν στο ενεργειακό περιεχόμενο περισσότερο από τα σωματίδια Ύλης και Αντιύλης. Η ενέργεια με τη μορφή ακτινοβολίας κυριαρχεί ποσοτικά πάνω στην ενέργεια με τη μορφή μάζας. Οι συγκρούσεις λοιπόν είναι δύο. Η μία, ανάμεσα σε Ύλη και Αντιύλη, είναι ανελέητη. Η άλλη έχει στόχο την ποσοτική επικράτηση της Ύλης/Ακτινοβολία-Ενέργεια πάνω στην Ύλη/Μάζα. Οι δύο συγκρούσεις διεξάγονται και σε κοινό πεδίον μάχης καθώς ορισμένα φωτόνια —φορείς της ακτινοβολίας— εξαΰλώνονται αφήνοντας δίδυμα· έναν στρατιώτη της μίας πλευράς κι έναν της άλλης. Κάθε φωτόνιο που «σβήνει» αφήνει στη θέση του ένα «αποδεκτό» ηλεκτρόνιο και ένα «τέρας Αντιύλης», ποζιτρόνιο με θετικό φορτίο. Και τα δύο θα μπουν στο παιχνίδι «θανάτου-γέννησης» με τις τρεις προσχεδιασμένες προοπτικές.

Η πρώτη είναι ότι η Ύλη θα νικήσει την Αντιύλη στον Μεγάλο Πόλεμο. Και όχι απλώς «θα νικήσει». Η εξέλιξη θα οδηγήσει σε πλήρη, σχεδόν, αφανισμό των παιδιών της Αντιύλης, των ποζιτρονίων και των αντικουάρκ. Η δεύτερη προοπτική είναι ότι η Ύλη ως μάζα θα επικρατήσει ποσοτικά της Ύλης-ακτινοβόλου ενέργειας. Η τρίτη, τέλος, προοπτική είναι ότι η ενηλικίωση του Σύμπαντος θα συντελείται με γενική κατεύθυνση από μορφές απλές σε μορφές συνθετότερες.

Για όλες αυτές τις προοπτικές υπάρχουν βασικοί κανόνες· κάτι σαν Εντολές του Δημιουργού. Η πρώτη Εντολή επιβάλλει τη διατήρηση της ποσότητας «Μάζα-Ενέργεια», η δεύτερη αποκλείει τη μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου ενώ μια ακόμη Εντολή ρητά απαγορεύει την αλλαγή της ολικής ορμής του Κόσμου.

Προς το τέλος της τρίτης ημέρας ξεχωρίζει και η Ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση ως ενοποιημένη μορφή της Ασθενούς και της Ηλεκτρομαγνητικής και η μέρα τελειώνει με τα κουάρκ να κυκλοφορούν για τελευταία φορά ελεύθερα χωρίς, βέβαια, να υποψιάζονται ότι από «αύριο» θα είναι ισοβίως φυλακισμένα βάσει κάποιας θεϊκής απόφασης είτε βάσει κάποιας εσωτερικής δυναμικής που υπάρχει μέσα στην ίδια την Πραγματικότητα.

Τετάρτη

Με πηλό κουάρκ φτιάχνει πρωτόνια

Η Τετάρτη είναι μακρόστενη· ένας διάδρομος στο τέλος του οποίου το Σύμπαν γιορτάζει τα πρώτα του γενέθλια· γίνεται ενός δευτερολέπτου.

Καθώς η μέρα ξετυλίγεται και η ζέστη συνεχώς υποχωρεί, συμβαίνουν διάφορα πράγματα. Ένα από αυτά είναι η ρήξη μιας προϋπάρχουσας ενότητας. Όσο η θερμοκρασία είναι πάνω από την κρίσιμη τιμή $3 \cdot 10^{15}$ Κέλβιν, η ενότητα μεταξύ της Ασθενούς και της Ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι εμφανής. Οι δύο δυνάμεις είναι «μία»· η Ηλεκτρασθενής. Καθώς όμως κυλάει η μέρα η θερμοκρασία ελαττώνεται. Μόλις πέσει κάτω από την τιμή $3 \cdot 10^{15}$ Κέλβιν οι δύο αλληλεπιδράσεις θα ξεχωρίσουν. Στους αιώνες που ακολουθούν θα «κυκλοφορούν» ως δύο δυνάμεις διαφορετικές. Στο μέλλον κάποια πλάσματα του ενήλικου πλέον Σύμπαντος —όντα με όραση αμφιβληστροειδούς αλλά και με βλέμμα Σκέψης ικανής να διεισδύει στο αθέατο και να ρίχνει ματιές— θα αποκαλύψουν το κοινό παρελθόν των «δύο» καθώς και το ενιαίο που κρύβεται πίσω από τη φαινομενική διαφορετικότητα.

Οι Homo Sapiens του μακρινού εκείνου μέλλοντος θα καταφέρουν να «δουν» μποζόνια W^+, W^-, Z^0, αόρατα, δηλαδή, σωματίδια σε στυλ βαριών φωτονίων, με τα οποία πραγματοποιείται η μια αλληλεπίδραση, η Ασθενής, ενώ τα «συνήθη» φωτόνια θα τα «δουν» και ως σωματίδια ανταλλαγής με τα οποία συντελείται η «άλλη», η συγκριτικά ισχυρότερη αλληλεπίδραση, η Ηλεκτρομαγνητική. Και η Σκέψη τους θα μπορέσει, τελικά, να διακρίνει ότι σε ειδικές συνθήκες Κόλασης οι δύο δυνάμεις είναι μία· η Ηλεκτρασθενής.

Ένα εκατοστό του δευτερολέπτου από τη γέννησή του το Σύμπαν της Τετάρτης είναι ένα κοσμικό ρευστό με θερμοκρασία 10^{11} Κέλβιν και εξαιρετικά πυκνό· αδιαφανές ακόμα και για τα νετρίνα. Η ώρα είναι 0,11 του πρώτου δευτερολέπτου και η θερμοκρασία έχει πέσει στους $3 \cdot 10^{10}$ Κέλβιν. Είναι όμως ακόμα και τώρα μεγαλύτερη από το κατώφλι $5{,}93 \cdot 10^9$ Κέλβιν των ηλεκτρονίων. Αυτό θα πει ότι στο «Κοσμικό Μαιευτήριο» συνεχίζουν να γεννιούνται δίδυμα από την ακτινοβολία.

Καθώς η μέρα γέρνει προς το τέλος της θα συμβεί και το συνταρακτικό γεγονός, ένα από εκείνα που θα σημαδέψουν το μέλλον: «Με πηλό κουάρκ ο Δημιουργός αρχίζει να φτιάχνει πρωτόνια». Έχει εν τω μεταξύ φροντίσει να ανακαλύψει την εξαιρετική κόλλα γλοιονίων. Τα κουάρκ εγκλωβίζονται, για πάντα, τρία μέσα σε κάθε πρωτόνιο. Δύο όμοια «πάνω» και ένα τρίτο «κάτω» θα ζήσουν για πάντα εκεί· μαζί και τα τρία. Αδιάσπαστα, αναλλοίωτα και αθάνατα θα ταξιδεύουν μαζί στο αδιάκοπα διαστελλόμενο Σύμπαν, συγκρατούμενα από την πιο ισχυρή κόλλα του Κόσμου.

Με πηλό κουάρκ ο Δημιουργός φτιάχνει και νετρόνια την ίδια εκείνη μέρα, την Τετάρτη. Δύο «κάτω» και ένα «πάνω» και το πρώτο νετρόνιο του Κόσμου είναι έτοιμο.

Στα πρώτα γενέθλια του Σύμπαντος οι τέσσερις αλληλεπιδράσεις έχουν πια ξεχωρίσει. Καθεμιά έχει αναλάβει έναν ειδικό ρόλο. Στο πάρτυ των γενεθλίων νεογέννητα πρωτόνια και νετρόνια κυκλοφορούν στους διαδρόμους· μαζί με τα ηλεκτρόνια και τα νετρίνα αποτελούν, τώρα, τους εκπροσώπους της Ύλης. Τέρατα εξακολουθούν να υπάρχουν· κυρίως ποζιτρόνια και αντινετρίνα. Μαζί και μια πλημμύρα από φωτόνια που εκπροσωπούν την Ύλη/Ακτινοβολία. Όλα αυτά τα σωματίδια, μαζί με τους υπόλοιπους «μεσολαβητές», συγκροτούν τον ηλικίας ενός δευτερολέπτου καινούργιο κόσμο.

Το βρέφος Σύμπαν εύχεται χρόνια πολλά στον εαυτό του.

Πέμπτη

Ανέραστοι πυρήνες Ηλίου: η πρώτη αποτυχία του Δημιουργού

Σε σχέση με τις προηγούμενες, η Πέμπτη είναι πολύ πιο διαφανής για την Ανθρώπινη Σκέψη. Διαρκεί περίπου τρία λεπτά· από τα πρώτα γενέθλια έως και τη στιγμή που τελειώνει η προϊστορία του Σύμπαντος. Ξημερώνει με πρωτόνια και νετρόνια και τελειώνει με πυρήνες Ηλίου, αφού στο μεταξύ μειωθούν πάρα πολύ τα ηλεκτρόνια και τα δίδυμα τερατάδερφάκια τους και βρουν δρόμους ελευθερίας τα νετρίνα.

Από το χάραμα κιόλας της μέρας η αρκετά μειωμένη πλέον πυκνότητα, συνδυαζόμενη με τη σχετικά πεσμένη θερμοκρασία, θα επιτρέψει στα νετρίνα να αυξήσουν τους χρόνους ελεύθερης διαδρομής τόσο ώστε να συμπεριφέρονται σαν ελεύθερα σωματίδια και να μη δεσμεύονται, όπως συνέβαινε έως και την Τετάρτη. Από το ξημέρωμα της Πέμπτης το Σύμπαν γίνεται διαφανές για όλα τα νετρίνα και εκείνα οι μεγαλύτεροι αλήτες του Κόσμου. Θα μπορούν να διασχίζουν πλάκες μολύβδου χωρίς την παραμικρή σκέδαση, θα εισχωρούν στον πλανήτη Γη και θα βγαίνουν από την άλλη μεριά χωρίς να «καταλαβαίνουν» τίποτε.

Η θερμοκρασία πέφτει διαρκώς. Καθώς η Κόλαση «μαλακώνει» επιβάλλονται καταστάσεις διαφορετικές. Περίπου 14 δευτερόλεπτα από την Αρχή η θερμοκρασία της Ακτινοβολίας είναι πια μόνο $3 \cdot 10^9$ Κέλβιν, κάτω δηλαδή από το «κατώφλι». Αυτό σημαίνει ότι το μαιευτήριο ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων δεν λειτουργεί πια. Όσα ηλεκτρόνια είχαν προλάβει να γεννηθούν εξαϋλώνονται μαζί με τα τελευταία τέρατα Αντιύλης, τα ποζιτρόνια.

Όλα, *σχεδόν*, τα ηλεκτρόνια εξολοθρεύονται αλλά μια σημαντική πτυχή των εξελίξεων του μέλλοντος θα θεμελιωθεί πάνω στο *σχεδόν*. Ορισμένα δηλαδή —περίπου ένα στο εκατομμύριο— θα διασωθούν, έτσι ώστε να μην παραβιαστεί η Δεύτερη Εντολή του Δημιουργού.

Τα ελάχιστα «διασωθέντα από τη γενοκτονία» ηλεκτρόνια θα παίξουν κάποτε στο παιχνίδι της κοσμικής γονιμότητας έναν ρόλο απρόβλεπτο ή προσχεδιασμένο —αυτό δεν μπορούμε να το ξέρουμε.

Η Πέμπτη όμως είναι πάνω απ' όλα η ημέρα της πυρηνοσύνθεσης που σημαδεύεται και από την πρώτη αποτυχία του Δημιουργού. Υπάρχουν ήδη πρωτόνια. Καθένα τους δείχνει διαθέσιμο να συνυπάρξει με άλλα πρωτόνια ή με νετρόνια για τη συγκρότηση συνθετότερων μορφών Ύλης. Και η διαθεσιμότητά του οδηγεί τον πλάσμα της Σκέψης μας Δημιουργό σε νέες συνθέσεις.

Με δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια οικοδομείται ένα σταθερότατο σωματίδιο που πρόκειται να παίξει ρόλο πρωταγωνιστή στην Ιστορία της Ύλης. Το όνομά του θα είναι «πυρήνας Ηλίου» ή «Ήλιο-4». Έρχεται στον Κόσμο με μάζα μικρότερη από εκείνη που είχαν αθροιστικά τα τέσσερα σωματίδια. Ένα έλλειμα μάζας ισοδύναμο με την ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη «σύντηξή» τους. Γιατί η πυρηνοσύνθεση Ηλίου έκρυβε για τον Δημιουργό-Συγκολλητή μια μεγάλη έκπληξη. Αντί να απαιτεί κάποιες ποσότητες ενέργειας —κάποιον «κόπο», τέλος πάντων, για την πραγματοποίησή της— πρόσφερε γενναιόδωρα ενέργεια στο υπόλοιπο Σύμπαν.

Πέμπτη ημέρα της Δημιουργίας και πανομοιότυποι πυρήνες Ηλίου κάνουν ταχύτατα την εμφάνισή τους. Η αρχική αυτή πυρηνοσύνθεση θα αποτελέσει πρότυπο για τη δημιουργία των βαρύτερων πυρήνων.

Το Σχέδιο όμως θα αποτύχει. Κι αυτό γιατί το νέο σωματίδιο είναι «εκνευριστικά» σταθερό. Εσωστρεφές, ανέραστο και με μια αριστοκρατική νοοτροπία, αρνείται να πάρει μέρος στο παιχνίδι. Η εξέλιξη φρενάρει πάνω του. Δύο πυρήνες Ηλίου, ακόμα κι όταν αγγίζουν ο ένας τον άλλον, δεν προχωρούν σε σύντηξη. Το Ηλιο-4 αρνείται να ενωθεί με Ηλιον-4 ή έστω με κάτι άλλο και μπλοκάρει το αρχικό Σχέδιο. Ο πλάσμα της Σκέψης μας Δημιουργός γεύεται την πρώτη σοβαρή αποτυχία. Δεν δείχνει, όμως, να απογοητεύεται. Έχει ήδη έτοιμα τα αυριανά του σχέδια για δημιουργία Ατόμων. Θα δοκιμάσει, αρχικά έστω και μόνο με Υδρογόνο και Ήλιον. Όσο για συνθετότερα σωματίδια, έχει από τώρα στο μυαλό τη δεύτερη προσπάθεια στο εσωτερικό των άστρων. Αυτά, βέβαια, είναι σχέδια για το ερχόμενο Σάββατο.

Παρασκευή

Ο καιρός των Ατόμων

Η απόδραση των φωτονίων, η οριστική ποσοτική επικράτηση της Ύλης/Μάζα πάνω στην Ύλη/Ακτινοβόλο Ενέργεια και η εμφάνιση των πρώτων Ατόμων στο προσκήνιο συνιστούν τα βασικά επεισόδια της πάρα πολύ «μεγάλης» Παρασκευής· διαρκεί 700.000 χρόνια.

Καθώς το Σύμπαν εξακολουθεί να διαστέλλεται, η ακτινοβολία «κρυώνει» και η ενέργεια των φωτονίων υποχωρεί. Αργά αλλά και σταθερά αποδεσμεύονται από την Ύλη/Μάζα και αρχίζουν να αλητεύουν στο Σύμπαν. Η Αλληλεπίδραση, δηλαδή, με την Ύλη/Μάζα παύει να είναι το πρωταρχικό στοιχείο της ύπαρξής τους και βασικό τους παιχνίδι γίνεται η Κίνηση. Σε αριθμό είναι ένα εκατομμύριο φορές περισσότερα από τα βαρυόνια, τους βασικούς δηλαδή φορείς της μάζας του Κόσμου. Τα πράγματα, ωστόσο, εξελίσσονται έτσι ώστε σε κάποια στιγμή η ισοδύναμη ενέργεια των βαρυονίων να υπερισχύει. Πρόκειται για την τελική έκβαση μιας από τις μεγάλες συγκρούσεις.

«Παρασκευή» όμως σημαίνει, κυρίως, «λυκαυγές της εποχής των Ατόμων». Στα λίγα ηλεκτρόνια που επέζησαν της γενοκτονίας επιφυλάσσεται ένας ιδιαίτερος ρόλος. Σε κάποια στιγμή που η θερμοκρασία έχει πέσει τόσο ώστε να «το επιτρέπει» —κάτω δηλαδή από τους 3.000 Κέλβιν —τα «διασωθέντα» θα αρχίσουν να συγκρατούνται από πυρήνες έτσι ώστε να αποτελέσουν τις «επιδερμίδες» καινοφανών αλλά και συνθετότερων σωματιδίων τα οποία, δισεκατομμύρια χρόνια αργότερα, μια ορισμένη «φυλή» του Σύμπαντος θα τα ονομάσει «Άτομα». Και εννοείται ότι τα Άτομα της Παρασκευής είναι μόνο Άτομα Υδρογόνου και Άτομα Ηλίου. Χρειάστηκε να κυλήσουν 700.000 από την Αρχή της Δημιουργίας μέχρι να εμφανιστούν τα πρώτα Άτομα στο προσκήνιο της Ιστορίας της Ύλης, αλλά το επεισόδιο αυτό θα είναι βασικό σταυροδρόμι της πορείας προς μεγαλύτερη συνθετότητα. Γιατί κατά την έβδομη ημέρα της Δημιουργίας —και αφού προηγουμένως δημιουργηθούν ως παιδιά των Άστρων ατομικοί πυρήνες βαρύτεροι από το Ήλιο-4— τα Άτομα, βασιζόμενα στις ηλεκτρονικές επιδερμίδες τους, θα συστεγαστούν με επιλεγμένους συντρόφους σε «Μόρια», ένα γεγονός που θα ανοίξει μονοπάτια για πρωτεΐνες, τριανταφυλλιές και ανθρώπινες συνειδήσεις. Το Σάββατο προβλέπεται, εκτός των άλλων, να είναι και μέρα Αστροφυσικής, Χημείας και Βιολογίας, επιστήμες τις οποίες θα πρέπει «να παίζει στα δάχτυλα» ο πλάσμα της Σκέψης μας Δημιουργός.

Σάββατο

Γαλαξίες, κορίτσια και σκουλαρίκια χρυσά

Το Σάββατο είναι ατελείωτο. Διαρκεί δεκαπέντε δισεκατομμύρια χρόνια. Αρχίζει με την εμφάνιση των πρώτων Ατόμων και τελειώνει σ' ένα παραλιακό ταβερνάκι του πλανήτη Γη.

Το Σύμπαν συνεχίζει να διαστέλλεται προχωρώντας προς το δικό μας «σήμερα». Ο υπεύθυνος για την εξέλιξη της δομής του είναι κυρίως η Βαρύτητα. Ενώ οι άλλες τρεις δυνάμεις θα αναλάβουν τις λειτουργίες του Μικρόκοσμου, η Βαρύτητα θα διαμορφώσει το χωρόχρονο, θα δώσει στο Σύμπαν τη δική του Γεωμετρία, θα αναλάβει τη βασική ευθύνη για τη γέννηση, την ενηλικίωση και το θάνατο των άστρων. Επτά δισεκατομμύρια χρόνια μετά το μεγάλο μπαμ θα αρχίσουν να βγαίνουν στη σκηνή οι πρώτοι γαλαξίες.

Μετά την οδυνηρή αποτυχία της Πέμπτης ο πλάσμα της Σκέψης μας Δημιουργός θα ξαναδοκιμάσει. Ο στόχος παραμένει ο ίδιος· να οικοδομήσει πυρήνες βαρύτερους, πολυπληθείς, δηλαδή, συστεγάσεις πρωτονίων και νετρονίων μέσα στο ίδιο σωματίδιο. Η προηγούμενη απόπειρα είχε σταματήσει στους πυρήνες Ηλίου και η εξέλιξη είχε φρενάρει εκεί. Τώρα έχει καταλάβει ότι για να αποφύγει την οδύνη μιας νέας αποτυχίας χρειάζεται τρία, τουλάχιστον, πράγματα· ένα καινούργιο περιβάλλον «μέτριας κόλασης» όπως εκείνο της προηγούμενης Πέμπτης, ένα διαφορετικό κόλπο ώστε να πείσει το φαινομενικά ανέραστο Ήλιο να πάρει μέρος στο παιχνίδι αλλά και μία τρίτη προϋπόθεση που δεν είναι τίποτε άλλο από «περισσότερος χρόνος».

Η ιδέα πρέπει να ήρθε γρήγορα. Το κατάλληλο περιβάλλον θα μπορούσε να είναι το εσωτερικό των άστρων. Η ιδέα κάλυπτε και την τρίτη προϋπόθεση· η διάρκεια της ζωής ενός άστρου τού πρόσφερε τον «πολύ χρόνο» που τόσο είχε ανάγκη. Όσο για το καινούργιο κόλπο, αυτό ήταν «τρεις πυρήνες Ηλίου» και όχι «δύο» όπως την προηγούμενη φορά.

Μέσα στο φούρνο ενός άστρου, και καθώς γινόταν το άγγιγμα δύο πυρήνων Ηλίου, έκλεισε συμφωνία με την Τύχη έτσι ώστε, ακριβώς τη στιγμή εκείνη, να κάνει την εμφάνισή του ένας τρίτος πυρήνας. Το «τέκνο» της συνεύρεσης των τριών ήταν ο πυρήνας Άνθρακα, το αγαπημένο παιδί του Σύμπαντος, ο θησαυρός. Χωρίς αυτόν η αναρρίχηση σε μορφές συνθετότερες θα ήταν δύσκολο να βρει δρόμους να προχωρήσει. Ο ίδιος θα γίνει κάποτε ο «μικρός ήρωας» της χημικής και της βιολογικής εξέλιξης. Στη δεύτερη αυτή προσπάθεια ο πλάσμα της Σκέψης μας Δημιουργός τα κατάφερε. Στο εσωτερικό ενός άστρου —και για την ακρίβεια ενός Κόκκινου Γίγαντα— το αριστοκρατικής νοοτροπίας Ήλιο θα δώσει Άνθρακα, και σε επόμενη σύντηξη θα δημιουργηθεί Οξυγόνο. Από κει και πέρα το Νάτριο, το Μαγνήσιο, το Αργίλιο και κάποτε το Άζωτο θα εμφανιστούν όλα σαν παιδιά των Άστρων, σαββατογεννημένα και με προοπτικές.

Στο εσωτερικό κάθε Κόκκινου Γίγαντα οι φούρνοι θα δουλεύουν συνέχεια. Πυρίτιο, Φωσφόρος, Θείο, Ασβέστιο, ακόμα και Σίδηρος θα παρασκευαστεί εκεί. Το αρχικό Σχέδιο της πυρηνοσύνθεσης, ενώ απέτυχε κατά την αρχική φάση των τριών, περίπου, λεπτών, υλοποιείται τώρα στα μαγειρεία των άστρων.

Η καρδιά όμως του Κόκκινου Γίγαντα θερμαίνεται συνεχώς, και η καινούργια κόλαση απειλεί με αποσύνθεση τα τόσο υπομονετικά δημιουργημένα υλικά. Τα «φαγητά» ετοιμάστηκαν ύστερα από τόσες προσπάθειες αλλά η θερμοκρασία του φούρνου ανεβαίνει επικίνδυνα και απειλεί να τα κάψει.

Η εντολή του Δημιουργού αυτή τη φορά θα είναι κατ' επιλογήν για ορισμένα μόνον άστρα. Τα άστρα αυτά θα καταρρεύσουν με μια τρομακτική έκρηξη· «Σουπερνόβα» θα λένε οι Homo Sapiens πολλά χρόνια μετά. Το ζήτημα είναι ότι με την έκρηξη η αστρική μάζα —με τα φαγητά έτοιμα— εκσφενδονίζεται προς κάθε κατεύθυνση για να ξανακάνει τη διαδρομή που είχε κάνει το Σύμπαν κατά το παρελθόν. Με μια σοβαρή διαφορά όμως: «τώρα υπάρχουν και πυρήνες βαρύτεροι από το Ήλιο». Προσφέρονται στο Σύμπαν καλοψημένοι και έτοιμοι να συνεχίσουν κάπου αλλού την καριέρα τους· μέσα σε άστρα που θα γεννηθούν, σε βουνά που θα δημιουργηθούν, σε σαλιγκάρια που θα υπάρξουν. Το κόλπο «Σουπερνόβα» συνιστά εντυπωσιακή επιλογή του Δημιουργού ώστε να συνεχιστεί το κοσμικό παιχνίδι της συνθετότητας. Τα Άτομα και τα Μόρια δεν θα μπορούσαν να οικοδομηθούν στους φούρνους των μαγειρείων οποιουδήποτε άστρου. Η κοσμική εξέλιξη θα συνεχιστεί πλέον μέσα στο ψύχος του Διαστήματος.

Εν τω μεταξύ ο Γενικός Διευθυντής του Σύμπαντος, η θηλυκού γένους Βαρύτητα, εμφανίζεται συγκρατημένη και προσεκτική. Επιτρέπει σε μερικά άστρα να ακτινοβολούν για δισεκατομμύρια χρόνια και γύρω από αυτά διατηρεί πλανήτες σε τροχιές, ορισμένους μάλιστα σε αποστάσεις τέτοιες ώστε οι συνθήκες να ευνοούν νησίδες ζωής που θα μπορούσαν να κάνουν την εμφάνισή τους.

Δέκα δισεκατομμύρια χρόνια μετά το Μεγάλο Μπαμ, ένα τέτοιο άστρο θα γεννηθεί σε προάστιο ενός συγκεκριμένου γαλαξία. Θα είναι άστρο με εννέα πλανήτες περιφερόμενους γύρω του. Σε έναν από αυτούς τα πράγματα θα οδηγηθούν στην εμφάνιση φαινομένου ζωής με οργανισμούς βασισμένους σε Άνθρακα. Δεκαπέντε δισεκατομμύρια χρόνια μετά το μπαμ κάποιοι βιογράφοι του Σύμπαντος θα κάνουν, στον πλανήτη αυτόν, την εμφάνισή τους.

Σαββατόβραδο σε παραλιακό ταβερνάκι, Ιούλιος, και κείνη κάτι του λέει για σαλονοτραπεζαρίες και Αστροφυσική. Σηκώνει το κεφάλι και ρίχνει καστανόχρωμους προβολείς κατευθείαν πάνω της. Του αρέσει να την ακούει:

«Τον καναπέ τον φτιάχνει μαραγκός, η σπανακόπιτα απαιτεί σύζυγο ή μαγείρισσα και η οικοδομή οικοδόμο. Αυτά μας έλεγε η καλή μας δασκάλα η εμπειρία. Ακόμα κι έναν βαρύ γλυκό να θελήσεις να πιεις, κάποιος πρέπει να τον φτιάξει. Και η Σκέψη μου, μεγαλωμένη με υλικό εμπειρίας, αδυνατεί να συλλάβει ότι "κάτι" μπορεί να φτιάχνεται μόνο του».

Η φωνή της έχει έναν τόνο που αποθαρρύνει τον αντίλογο: «Πώς λοιπόν έγιναν τα πρωτόνια, τα μακρομόρια και τα γαλαξιακά σμήνη; Το Σύμπαν χρειάστηκε Δημιουργό και αν δεν υπήρξε, η Σκέψη μου νιώθει την παρόρμηση να τον πλάσει, την ανάγκη να τον φανταστεί· και τον φαντάζεται».

Ο πλάσμα της Σκέψης Δημιουργός, αόρατος στην τρίτη άδεια καρέκλα, παρακολουθεί και δείχνει ευχαριστημένος. Τα πρωτόνια πάνε καλά, τα γλοιόνια κατά τη διαδρομή τους αναπαράγονται, τα μόρια δουλεύουν μια χαρά και το αγόρι, το καθισμένο απέναντι, δείχνει να αγαπάει το κορίτσι. Πιάνει με τα δύο δάχτυλα το μουστάκι του —μια κίνηση που τη συνηθίζει όποτε είναι ικανοποιημένος με «κάτι»— και φέρνει στο «δημιουργικό» μυαλό του την εξολόθρευση των ποζιτρονίων, την αποτυχία του με το Ηλιο και τα άστρα του Σαββάτου. Καλή ιδέα, τελικά, αυτή με το Σουπερνόβα. Αν δεν την είχε σκεφτεί, δεν θα υπήρχαν τώρα αυτοί οι δύο να κοιτάζονται τόσο τρυφερά. Αλλά και αν κάτι, οτιδήποτε, είχε πάει διαφορετικά, δεν θα υπήρχαν όντα όπως αυτά να τον επινοήσουν.

Το κορίτσι αδυνατεί φυσικά να ανιχνεύσει την ύπαρξη του αόρατου πλάσματος της Σκέψης Δημιουργού. Αγγίζει το υπαρκτό χέρι του αγοριού και συνεχίζει: «Το Υδρογόνο της επιδερμίδας σου, ενωμένο χημικά με Οξυγόνο, Άζωτο και Άνθρακα, έχει πρωτόνια μεγάλης ηλικίας φτιαγμένα μάλλον την Τετάρτη. Αυτά τα αόρατα πρωτόνια της παλάμης σου θα συνεχίσουν να κυκλοφορούν στο Σύμπαν και τότε που δεν θα υπάρχει κανείς από τους δυο μας. Ο Άνθρακάς σου, βέβαια, είναι πολύ νεότερος και οπωσδήποτε αστρογέννημα, όπως και το Ασβέστιο της ωμοπλάτης σου. Σαββατογεννημένα και τα δυο, μαγειρεύτηκαν πριν από πάρα πολλά χρόνια στο ζεστό στομάχι ενός Κόκκινου Γίγαντα. Έτσι που με ακούω να το λέω, μου φαίνεται σαν παραμύθι».

Του αρέσει που του αγγίζει το χέρι. Την κοιτάζει και σκέφτεται πως το πιο νεαρό απ' όλα είναι, μάλλον, το Χρυσάφι στο σκουλαρίκι της. Πρέπει να ήρθε στον Κόσμο μέσα σε συνθήκες τρομακτικά υψηλής θερμοκρασίας λίγο πριν από μια έκρηξη Σουπερνόβα.

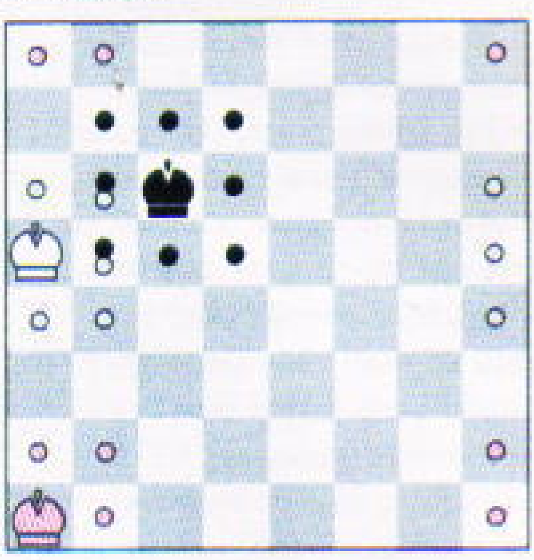
Κοντεύει μεσάνυχτα. Η έβδομη ημέρα της Δημιουργίας είναι ακόμη εκεί. Το Σύμπαν είναι πια τόσο μεγάλο που η θερμοκρασία της ακτινοβολίας υποβάθρου είναι 3 βαθμοί της κλίμακας Κέλβιν. Καμία σχέση με την Κόλαση των πρώτων ημερών.

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M51

Πολιτική στη σκακιέρα. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος βασιλιάδων του σκακιού που μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σπειροειδή σκακιέρα διαστάσεων $n \times n$ έτσι ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους; (Η σπειροειδής σκακιέρα προκύπτει από την κανονική αν ενώσουμε μεταξύ τους τις απέναντι πλευρές της. Στη σπείρα, ένας βασιλιάς απειλεί πάντα οκτώ τετράγωνα —δείτε το Σχήμα 1.)
(A. Tolpygo)



Σχήμα 1

M52

Διακεκριμένα γινόμενα. Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών a_n, τα ακέραια μέρη των τετραγωνικών ριζών των αριθμών

$$b_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

είναι όλα διαφορετικά.
(L. Kurlyandchik)

M53

Κύκλοι και ευθείες. Οι κύκλοι S_1 και S_2 εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο F. Η ευθεία ℓ εφάπτεται των S_1 και S_2 στα σημεία A και B, αντίστοιχα, και η ευθεία που είναι παράλληλη της ℓ και εφάπτεται του S_2 στο σημείο C τέμνει τον S_1 στα σημεία D και E. Αποδείξτε ότι (α) τα σημεία A, F, C είναι συνευθειακά, (β) η κοινή χορδή των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ABC και BDE διέρχεται από το F.
(A. Kalinin)

M54

Περίοδος περισυλλογής. Τοποθετούμε m μάρκες στις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου ($m > n$). Ένα ζευγάρι μάρκες που βρίσκονται στην ίδια κορυφή μετακινείται στις κορυφές που βρίσκονται δίπλα —μία μάρκα σε κάθε προσκείμενη κορυφή. Στη συνέχεια χωρίζουμε με τον ίδιο τρόπο ένα ακόμη ζευγάρι, κ.ο.κ. Έπειτα από ορισμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων, σε κάθε κορυφή υπάρχουν τόσες μάρκες όσες είχαμε αρχικά. Αποδείξτε ότι το πλήθος αυτών των κινήσεων είναι πολλαπλάσιο του n.
(I. Rubanov)

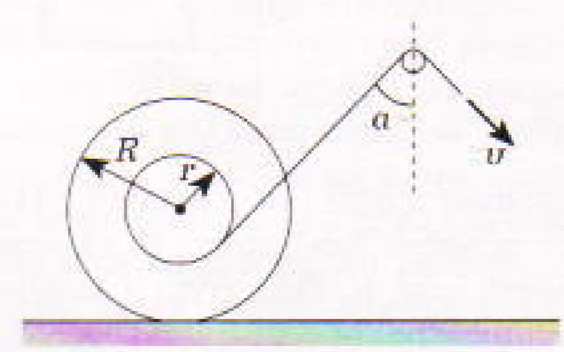
M55

Θετικές θέσεις. Σε κάθε τετράγωνο ενός άπειρου τετραγωνικού πλέγματος του επιπέδου είναι γραμμένος ένας πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε δύο σχήματα που αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων του πλέγματος. Επιτρέπουμε την ολίσθηση των σχημάτων παράλληλα με τις γραμμές του πλέγματος κατά οποιοδήποτε ακέραιο πλήθος τετραγώνων. Αποδείξτε ότι αν για κάθε ολίσθηση του πρώτου σχήματος το άθροισμα των αριθμών που καλύπτει είναι θετικό, τότε υπάρχει μια ολίσθηση του δεύτερου σχήματος τέτοια ώστε το άθροισμα των αριθμών που καλύπτει να είναι θετικό.
(B. Ginzburg, I. Solovyov)

Φυσική

Φ51

Περιστρεφόμενη κουβαρίστρα. Η άκρη της κλωστής, η οποία είναι τυλιγμένη σε μια κουβαρίστρα, περνιέται πάνω από ένα καρφί καρφωμένο στον τοίχο (Σχήμα 2). Τραβάμε την



Σχήμα 2

άκρη της κλωστής ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα **υ**. Πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου της κουβαρίστρας, αν η κλωστή σχηματίζει γωνία α με την κατακόρυφο; Η εξωτερική ακτίνα της κουβαρίστρας είναι R, και η εσωτερική ακτίνα της r, θεωρούμε δε ότι η κουβαρίστρα περιστρέφεται χωρίς να ολισθαίνει.
(S. Krotov)

Φ52

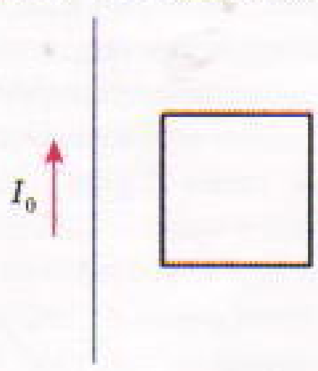
Φυσαλίδα αζώτου. Σαπουνόφουσκα γεμίζεται με άζωτο σε θερμοκρασία δωματίου. Πόση πρέπει να γίνει η διάμετρος της φυσαλίδας ώστε ν' αρχίσει να ανυψώνεται; Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του σαπωνοδιαλύματος είναι $\sigma = 0{,}04$ N/m. Η μάζα της μεμβράνης της φυσαλίδας θεωρείται αμελητέα. (A. Sheronov)

Φ53

Αεροναυπηγική. Ένας εφευρέτης σχεδιάζει το ακόλουθο «αεροσκάφος». Η άνω επιφάνεια μιας μεγάλης επίπεδης πλάκας διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία 0°C, ενώ η θερμοκρασία της κάτω επιφάνειας είναι 100°C. Ο εφευρέτης υποστηρίζει ότι μια τέτοια πλάκα θα αιωρείται στον αέρα σαν αερόστατο. Εξηγήστε το φαινόμενο. Εκτιμήστε την ανυψωτική δύναμη (τάξη μεγέθους) που αναπτύσσεται σε μια τέτοια πλάκα, αν το εμβαδόν της είναι 1 m^2. Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι 20°C.

Φ54

Ρεύμα και πλαίσιο. Ένα τετράγωνο συρμάτινο πλαίσιο τοποθετείται κοντά σ' ένα μακρύ ευθύγραμμο καλώδιο που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I_0 (Σχήμα 3). (Η διάμετρος του



Σχήμα 3

σύρματος του πλαισίου είναι d_0.) Όταν το ρεύμα διακόπτεται, το πλαίσιο αποκτά ορμή p_0. Ποια είναι η κατεύθυνση αυτής της ορμής; Ποια ορμή θα αποκτήσει το πλαίσιο αν το αρχικό ρεύμα στο καλώδιο είναι $I_1 = 3I_0$ και η διάμετρος d_1 του σύρματος του πλαισίου τώρα είναι διπλάσια της d_0;
(V. Mozhayev)

Φ55

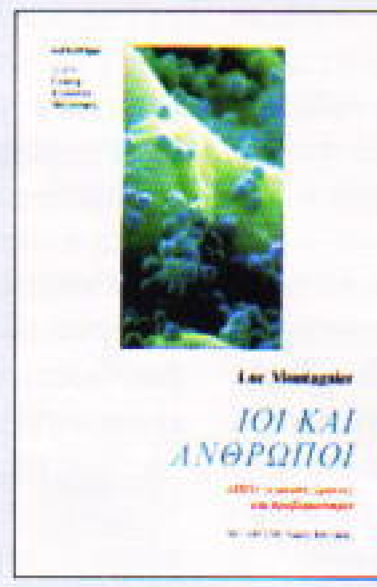
Σύνθετος φακός. Από κυρτό φακό διαμέτρου $d = 5$ cm και εστιακής απόστασης $F = 50$ cm αφαιρείται φέτα πάχους $h = 5$ mm που αποτελούσε το κεντρικό μέρος του. Τα δύο τμήματα που απομένουν μετακινούνται και φέρονται μεταξύ τους σε επαφή. Μια σημειακή πηγή φωτός S τοποθετείται σε απόσταση $\ell = 75$ cm από τον νέο φακό, κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του. Μέχρι πόση μέγιστη απόσταση από το φακό μπορεί να παρατηρείται φαινόμενο συμβολής;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

ΙΟΙ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ

AIDS: γεγονότα, έρευνες και προβληματισμοί

Luc Montagnier
Διευθυντής ερευνών στο CNRS



«Τον καιρό της ειρήνης, οι γιοι θάβουν τους πατέρες τους· τον καιρό του πολέμου, οι πατέρες θάβουν τους γιους τους», έγραφε ο Ηρόδοτος. Είναι αλήθεια ότι διεξάγεται ένας πραγματικός πόλεμος από τότε που εμφανίστηκε το AIDS, το 1981, αυτή η ασθένεια που καταστρέφει το ανοσοποιητικό σύστημα. Στην πρωτοπορία της έρευνας βρίσκεται ο Luc Montagnier, ένας από τους σημαντικότερους ιολόγους του κόσμου. Είναι ο επιστήμονας που, μαζί με την ομάδα του στο Ινστιτούτο Παστέρ, ανακάλυψε το 1983 τον ιό ο οποίος έχει προκαλέσει πραγματική πανδημία.
Σε τούτο το εξαιρετικά ενδιαφέρον βιβλίο, ο συγγραφέας του αναφέρεται στην ερευνητική εργασία που τον οδήγησε στην ανακάλυψή του και περιγράφει τη διαμάχη του με τον αμερικανό επιστήμονα R. Gallo· δίνει μια ευσύνοπτη, περιεκτική, αλλά επίσης πλήρη και διαφωτιστική παρουσίαση των γνώσεων που διαθέτουμε όσον αφορά τον ιό και την προέλευσή του, τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η ασθένεια, τις δυνατότητες θεραπείας και ανακάλυψης εμβολίου, και τη γεωγραφική εξάπλωση του AIDS. Ακόμη, ο συγγραφέας αναπτύσσει τις απόψεις του για τις ευθύνες των πολιτικών και εκθέτει τις σκέψεις του για τις επιπτώσεις της επιδημίας του AIDS στα δημόσια συστήματα υγείας και σε ολόκληρη την κοινωνία.
Πρόκειται για ένα βιβλίο πλούσιο σε πολύτιμες πληροφορίες, γραμμένο από έναν επιστήμονα και ερευνητή που μάχεται σε έναν από τους δραματικότερους πολέμους του αιώνα μας.

Σελ.: 376, 5.000 δρχ.
Εκδόσεις *κάτοπτρο*

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Περί ιξώδους

Οι σωτήριες ιδιότητες του λαδιού για τους κινητήρες

Henry D. Schreiber

ΕΛΕΓΧΕΤΕ ΤΟ ΛΑΔΙ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΗ του αυτοκινήτου. Η βέργα λαδιού δείχνει ότι η στάθμη του είναι χαμηλή. Αποφασίζετε να το συμπληρώσετε. Τα ράφια είναι γεμάτα μάρκες —Pennzoil, Quaker State, Agip, Valvoline, Amoco· προϊόντα εξειδικευμένα και μη. Κάθε μάρκα έχει επιλογές του τύπου 10W40, 5W30, SAE30. Οι διαφημίσεις εκθειάζουν την αξία του καθενός: το ένα παρέχει «εξαιρετική αντίσταση κατά της αλλοίωσης του ιξώδους», κάποιο άλλο έχει «τέλεια ρευστότητα στις χαμηλές θερμοκρασίες αλλά προστατεύει και στις υψηλές», ένα τρίτο είναι «πολυπαχύρρευστο και αντέχει σε συνθήκες σκληρής λειτουργίας του κινητήρα». Ποιο απ' όλα θα προτιμήσετε; Έχει σημασία η μάρκα ή ο τύπος του λαδιού; Τι σημαίνουν οι αριθμοί; Χρειάζεστε συμπλήρωμα ή αλλαγή λαδιών; Μια ματιά στο εγχειρίδιο του οδηγού θα βοηθούσε, αλλά... μάλλον έπρεπε να τό 'χατε πάει μια και καλή για σέρβις... Ατυχία!

Καταρχάς πρέπει να γνωρίζουμε γιατί χρειάζεται το λάδι στους κινητήρες των αυτοκινήτων. Η πρωταρχική λειτουργία του είναι η λίπανση —να κυκλοφορεί το λάδι στο εσωτερικό του κινητήρα, ανάμεσα στις επιφάνειες που τρίβονται, και να σχηματίζει μια προστατευτική μεμβράνη μεταξύ τους, εμποδίζοντάς τες να έρχονται σε επαφή. Το λάδι πρέπει να είναι αρκετά λεπτό ώστε να ρέει στις περιοχές αυτές όταν η μηχανή είναι κρύα, αλλά και αρκετά παχύ ώστε και στις υψηλές θερμοκρασίες να παραμένει ανάμεσα στις τριβόμενες επιφάνειες. Από την άλλη, το λάδι δεν πρέπει να είναι πολύ λεπτό, διότι θα διαρρέει από τα διάκενα, με αποτέλεσμα να φθείρονται οι τριβόμενες επιφάνειες, ούτε όμως πολύ παχύ, διότι θα χρειάζεται επιπλέον κατανάλωση ισχύος για να υπερνικηθούν οι οπισθέλκουσες δυνάμεις που αναπτύσσονται στα κινούμενα μέρη.

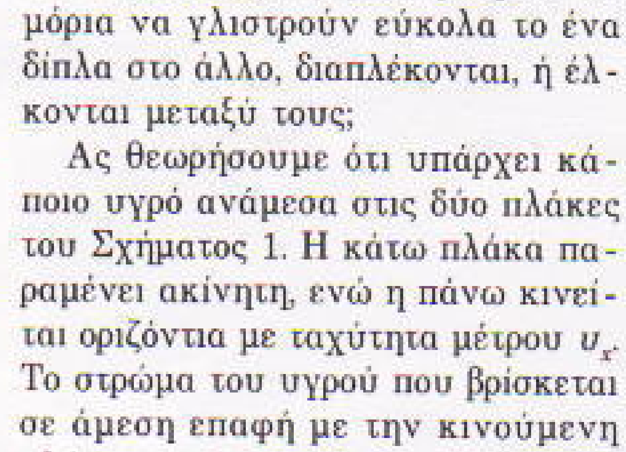
Οι άλλες λειτουργίες του λαδιού στον κινητήρα περιλαμβάνουν τη μεταφορά θερμότητας από τα θερμά μέρη της μηχανής στο δοχείο λαδιών, την αφαίρεση των ρινισμάτων από τις φθαρμένες επιφάνειες, και τον περιορισμό των δονήσεων που προκαλεί η ανάφλεξη.

Το λάδι του κινητήρα πρέπει να αλλάζεται περιοδικά διότι γίνεται αναποτελεσματικό όσον αφορά τον πρωτεύοντα ρόλο του, δηλαδή τη λίπανση. Οι ιδιότητές του, και ειδικά το πόσο παχύ είναι, αλλοιώνονται με την παρατεταμένη χρήση στις θερμοκρασίες λειτουργίας της μηχανής. Ανάλογα με το σχεδιασμό του, ένας συγκεκριμένος κινητήρας απαιτεί λάδι ορισμένης ρευστότητας· έτσι, αλλαγή λαδιού σημαίνει καταρχάς ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε λάδι συγκεκριμένου τύπου, όπως ορίζουν οι προδιαγραφές.

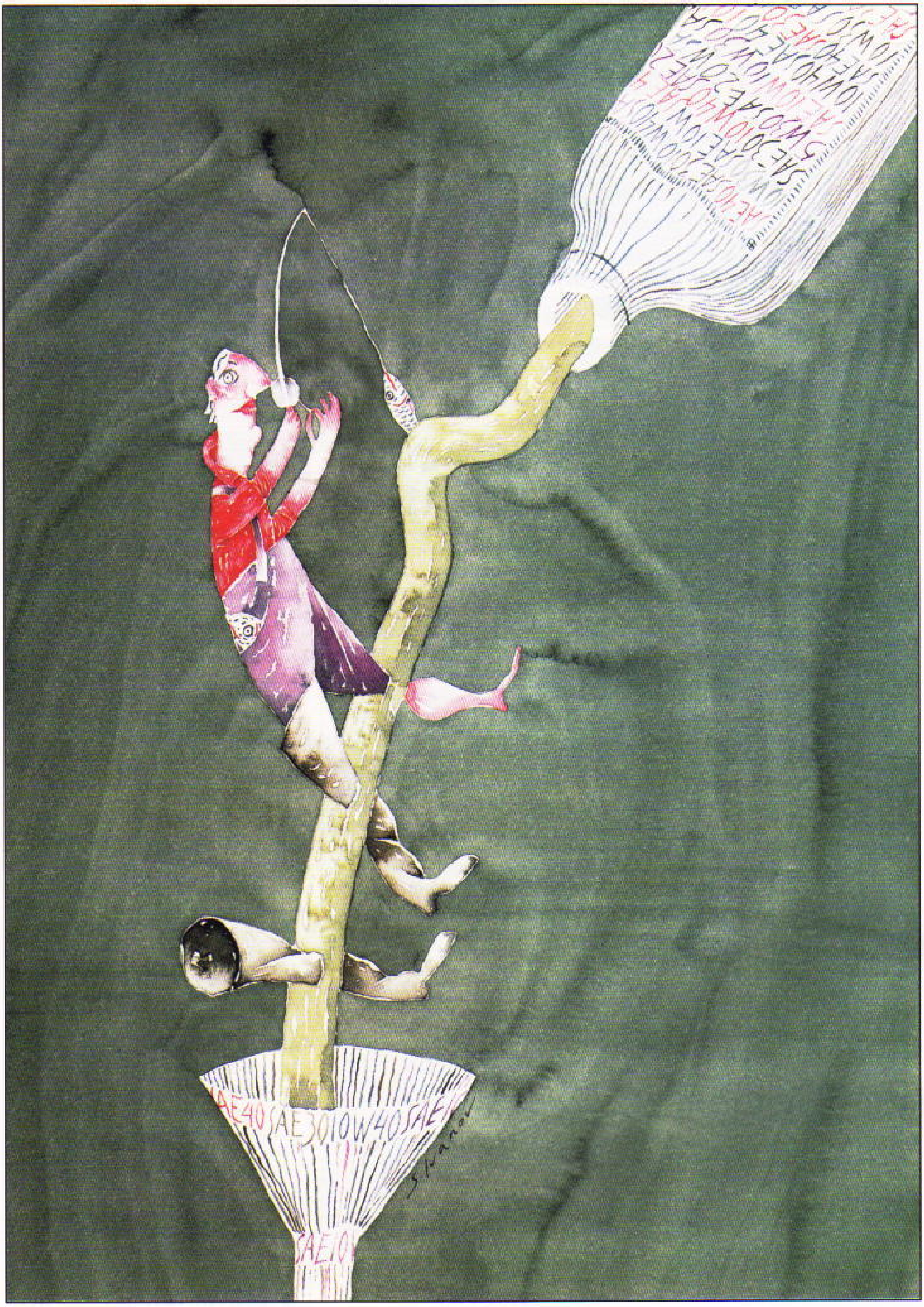
Γενικές έννοιες

Η έκφραση «αργό σαν μέλι το χειμώνα» αναφέρεται στο ρυθμό ροής του μελιού τις κρύες ημέρες· ρέει βραδύτερα από το νερό, και πολύ πιο αργά σε χαμηλές θερμοκρασίες. Οι ιδιότητες της ροής είναι συνάρτηση του είδους του υγρού και της θερμοκρασίας του. Για να προσδιορίσουμε ποσοτικά τη ροή, χρησιμοποιούμε τον όρο *ιξώδες*. Το ιξώδες είναι η εσωτερική τριβή του υγρού, που το κάνει να αντιστέκεται στην τάση να ρέει. Τα παχύρρευστα υγρά έχουν συνεκτική και κολλώδη σύσταση. Το αν ένα υγρό έχει μεγάλο ή μικρό ιξώδες σε θερμοκρασία δωματίου εξαρτάται από τη μοριακή δομή του: μπορούν τα μόρια να γλιστρούν εύκολα το ένα δίπλα στο άλλο, διαπλέκονται, ή έλκονται μεταξύ τους;

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποιο υγρό ανάμεσα στις δύο πλάκες του Σχήματος 1. Η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη, ενώ η πάνω κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_x. Το στρώμα του υγρού που βρίσκεται σε άμεση επαφή με την κινούμενη πλάκα κινείται επίσης με ταχύτητα μέτρου υ_x, κι αυτό που βρίσκεται σε



Σχήμα 1



άμεση επαφή με την ακίνητη πλάκα έχει μηδενική ταχύτητα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η ταχύτητα των στρωμάτων του υγρού αυξάνει ανάλογα με την απόστασή τους από την κάτω πλάκα. Αν δεχτούμε ότι η κατανομή των ταχυτήτων μεταξύ των οριακών τιμών —0 και υ_x— είναι γραμμική, σημαίνει πως υπάρχει μια βαθμίδα ταχύτητας που μεταβάλλεται γραμμικά από πάνω προς τα κάτω —δηλαδή κάθετα στη διεύθυνση κίνησης της πάνω πλάκας. Ο εν λόγω ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας μετά της απόστασης από την κάτω πλάκα, $d\upsilon_x/dy$, μετριέται κάθετα στη διεύθυνση της ροής του υγρού. Το πόσο γρήγορα ελαττώνεται η βαθμίδα εξαρτάται από το ιξώδες του υγρού, που με τη σειρά του εξαρτάται από τις μοριακές έλξεις των στρωμάτων του υγρού. Για να μετακινηθεί η πάνω πλάκα σε σχέση με την κάτω που είναι ακίνητη, πρέπει να εφαρμοστεί στο σύστημα μια διατμητική δύναμη F. Το μέτρο της δύναμης αυτής συνδέεται με τη βαθμίδα ταχύτητας μέσω της σχέσης

$$F = -\eta S \frac{d\upsilon_x}{dy}, \qquad (1)$$

όπου S είναι το εμβαδόν της πάνω πλάκας και η ο συντελεστής ιξώδους (ή απλώς το ιξώδες), και μπορεί να θεωρηθεί ως συντελεστής αναλογίας παρόμοιος με το συντελεστή τριβής για την κίνηση των σωμάτων. Στη σχέση (1) το πρόσημο μείον ερμηνεύεται από το γεγονός ότι η υ_x μειώνεται όσο αυξάνει η απόσταση από την πλάκα στην οποία εφαρμόζεται η διατμητική δύναμη. Το συντελεστή ιξώδους τον μετράμε σε poise. Έχουμε συντελεστή ιξώδους 1 poise όταν διατμητική τάση μέτρου 1 dyne/cm^2 έχει αποτέλεσμα βαθμίδα ταχύτητας $d\upsilon_x/dy$ μέτρου 1 cm/s ανά cm κάθετα στο επίπεδο που υφίσταται τη διατμητική τάση.

Μολονότι η εξίσωση (1) ορίζει το ιξώδες η, δεν είναι εύκολο να μετρηθεί πειραματικά η διατμητική δύναμη και η βαθμίδα ταχύτητας. Στο εργαστήριο συνήθως μετράμε έμμεσα το ιξώδες, μέσω κάποιας άλλης ιδιότητας της ροής των υγρών που εξαρτάται από το ιξώδες. Για παράδειγμα, με τις κλασικές μεθόδους μετράμε το χρόνο που χρειάζεται ένα υγρό για να ρεύσει από έναν τριχοειδή σωλήνα ή από μια τρύπα στον πυθμένα μιας φιάλης, μετράμε την απαιτούμενη ροπή για τη στρέψη ενός στροφάλου μέσα στο υγρό, ή το χρόνο που χρειάζεται ένα σφαιρίδιο για να πέσει κατά μήκος μιας στήλης υγρού.

Για να κατανοήσετε την επίδραση της θερμοκρασίας στη ροή των υγρών, σκεφτείτε ότι στη δομή των υγρών υπάρχουν ατέλειες έλλειψης, δηλαδή κενά διαστήματα ανάμεσα σε γειτονικά μόρια. Τα μόρια του υγρού κινούνται συνεχώς εντός και εκτός των κενών, επιτρέποντας στο υγρό να ρέει· αλλά μια τέτοια κίνηση απαιτεί ενέργεια, τη λεγόμενη ενέργεια ενεργοποίησης E. Επειδή σε υψηλές θερμοκρασίες η διαθέσιμη ενέργεια είναι περισσότερη, τα μόρια του υγρού ρέουν πιο εύκολα στις υψηλές θερμοκρασίες. Επομένως, το ιξώδες των περισσότερων υγρών μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Από μαθηματική πλευρά, η ρευστότητα ενός υγρού συνδέεται με την απόλυτη θερμοκρασία του T μέσω της εκθετικής συνάρτησης του Arrhenius:

$$\text{ρευστότητα} = \frac{1}{\eta} = Ae^{-E/RT}, \qquad (2)$$

όπου A είναι μια ειδική σταθερά του υγρού (προεκθετικός παράγοντας) και R η παγκόσμια σταθερά των αερίων (8,31 J/mole · K). Παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της (2), εύκολα προκύπτει

$$\ln \eta = \frac{E}{RT} - \ln A. \qquad (3)$$

Η γραφική παράσταση του λογαρίθμου του ιξώδους ως προς το αντίστροφο της θερμοκρασίας είναι ευθεία γραμμή, με κλίση ίση με την ενέργεια ενεργοποίησης για τη ροή διά την παγκόσμια σταθερά των αερίων.

Το ιξώδες του λαδιού

Το ιξώδες του λαδιού αποτελεί τη σημαντικότερη ιδιότητα για τη λίπανση του κινητήρα του αυτοκινήτου. Το ιδανικό λάδι έχει μικρό ιξώδες σε χαμηλές θερμοκρασίες, ώστε να ρέει ανάμεσα στις τριβόμενες επιφάνειες, αν και κάθε υγρό παρουσιάζει την τάση να γίνεται περισσότερο παχύ σε χαμηλές θερμοκρασίες. Από την άλλη, το ιδανικό λάδι έχει επαρκώς μεγάλο ιξώδες σε υψηλές θερμοκρασίες, διαφορετικά τα στρώματα μεταξύ των τριβόμενων επιφανειών θα είναι πολύ λεπτά. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (2), όλα τα λάδια γίνονται λεπτότερα καθώς θερμαίνονται. Εξάλλου, με το πέρασμα του χρόνου οι υψηλές θερμοκρασίες του κινητήρα καταστρέφουν το λάδι. Υπό μία έννοια, το λάδι καίγεται ή οξειδώνεται, που σημαίνει ότι αλλάζει η μοριακή δομή του. Η μακρόχρονη έκθεσή του σε υψηλές θερμοκρασίες το κάνει πιο παχύρρευστο, χωρίς να παρέχει πλέον σωστή λίπανση.

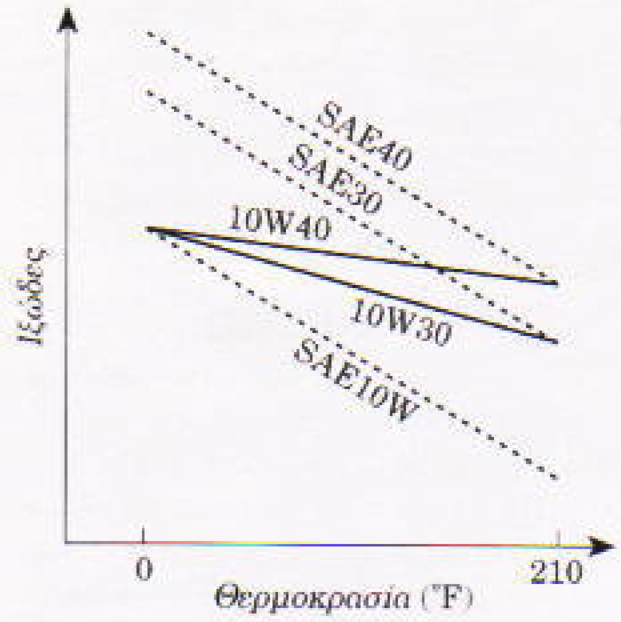
Με βάση τις προδιαγραφές της SAE (Εταιρεία Μηχανικών Αυτοκινήτων), όλα τα λάδια κινητήρων χαρακτηρίζονται με έναν αριθμό, που προσδιορίζει μια περιοχή τιμών για το ιξώδες. Ταξινομούνται με βάση τη συμπεριφορά τους σε δύο ακραίες συνθήκες: σε χαμηλή θερμοκρασία (T = 0°F, ή περίπου −18°C) —και συνοδεύονται από το γράμμα W, που κά-

Θερμοκρασία (°F)	Αριθμός ανά SAE	Ιξώδες
0	5W	0-1.200 cp
	10W	1.200-2.400 cp
	20W	2.400-9.600 cp
210	20	5,7-9,6 cp
	30	9,6-12,9 cp
	40	12,9-16,8 cp
	50	16,8-22,7 cp

Μονάδες μέτρησης : cp = centipose, cs = centistokes
cp = cs × πυκνότητα του λαδιού στην εν λόγω θερμοκρασία

Σχήμα 2

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

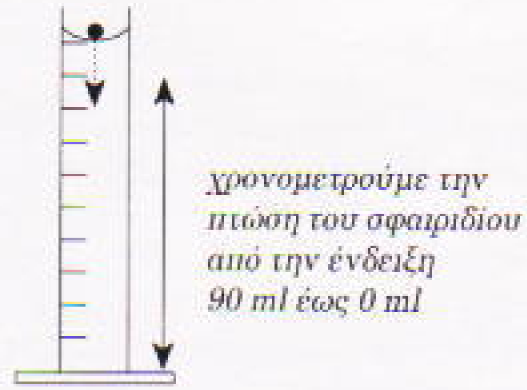


Σχήμα 3

ποτε σήμαινε τον χειμερινό τύπο λαδιού— και σε υψηλή θερμοκρασία (T = 210°F, ή περίπου 100°C). Στο Σχήμα 2 φαίνονται οι περιοχές τιμών του ιξώδους για τους διάφορους τύπους λαδιών. Παρατηρήστε ότι οι περιοχές αυτές είναι αρκετά ευρείες, επιτρέποντας μια ποικιλία λαδιών κινητήρα για κάθε ταξινόμηση. Έτσι, το λάδι SAE30 λόγου χάρη εμφανίζει ρευστότητα σε ορισμένη περιοχή μόνο στην υψηλή θερμοκρασία λειτουργίας. Το λάδι 20W20 εμφανίζει ρευστότητα σε ορισμένες περιοχές τόσο στην υψηλή όσο και στη χαμηλή θερμοκρασία, ενώ το λάδι 10W40 σε άλλες περιοχές και πάλι στις δύο ακραίες θερμοκρασίες. Λάδια όπως το 10W40 ή το 5W30 αποτελούν παραδείγματα των πολύτυπων λαδιών, για τα οποία η επίδραση της θερμοκρασίας στο ιξώδες είναι εντελώς διαφορετική απ' ό,τι στα μονότυπα λάδια, όπως το SAE30. Η επίδραση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 3.

Πειραματικές μετρήσεις του ιξώδους

Στη βιομηχανία μετράμε το ιξώδες των λαδιών με το ιξωδόμετρο του Saybolt, με το οποίο ουσιαστικά προσδιορίζουμε το χρόνο που χρειάζεται το λάδι για να ρεύσει μέσα από μια τρύπα στον πυθμένα μιας πρότυπης φιάλης. Ωστόσο, η μέθοδος της πτώσης σφαιριδίων είναι καταλληλότερη για τον απλό εργαστηριακό εξοπλισμό ενός σχολείου. Σκοπός του πειράματος είναι να προσδιορίσουμε και να συγκρίνουμε την εξάρτηση διαφορετικών τύπων λαδιού από τη



Σχήμα 4

θερμοκρασία.

Ας θεωρήσουμε ένα σφαιρίδιο που το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί κατά μήκος μιας κατακόρυφης στήλης υγρού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Το μέτρο της δύναμης που ωθεί το σφαιρίδιο προς τον πυθμένα ισούται με το γινόμενο της ενεργού μάζας του σφαιριδίου επί την επιτάχυνση της βαρύτητας. Η ενεργός μάζα του σφαιριδίου είναι η μάζα του σφαιριδίου μείον τη μάζα του υγρού που εκτοπίζει. Αν r και ρ είναι η ακτίνα και η πυκνότητα του σφαιριδίου αντίστοιχα, και ρ_0 η πυκνότητα του υγρού, τότε:

$$\text{ενεργός μάζα} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0), \quad (4)$$

η οποία δεν είναι παρά ο όγκος του σφαιριδίου επί τη διαφορά των πυκνοτήτων. Άρα,

$$F_{κάτω} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g. \quad (5)$$

Μια εγγενής παραδοχή είναι ότι η ακτίνα του σφαιριδίου είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την ακτίνα της στήλης, ώστε να μην υπάρχει στροβιλισμός ή επίδραση των τοιχωμάτων.

Το μέτρο της δύναμης που αντιστέκεται στην πτώση του σφαιριδίου υπολόγισε ο Stokes, και δίνεται από τον τύπο

$$F_{πάνω} = 6\pi\eta r\upsilon, \quad (6)$$

όπου υ είναι η ταχύτητα πτώσης του σφαιριδίου και η το ιξώδες του υγρού.

Αλλά το μέτρο της ταχύτητας του κατερχόμενου σφαιριδίου είναι κάθε στιγμή dy/dt, ή κατά προσέγγιση $\Delta y/\Delta t$. Έτσι

$$F_{πάνω} = 6\pi\eta r\frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (7)$$

Στην αρχή της κίνησής του το σφαιρίδιο επιταχύνεται. Καθώς αυξάνει όμως η ταχύτητά του, θα φτάσει η στιγμή κατά την οποία θα εξισορροπηθούν οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Από τη στιγμή αυτή το σφαιρίδιο θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα, με την οποία και θα εξακολουθήσει να κινείται. Τότε θα ισχύει

$$6\pi\eta r\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g, \quad (8)$$

ή

$$\eta = \frac{2}{9}r^2(\rho - \rho_0)g\frac{\Delta t}{\Delta y}. \quad (9)$$

Ωστόσο, η μέτρηση της ακριβούς τιμής του ιξώδους απαιτεί να γνωρίζουμε την ακτίνα του σφαιριδίου και τις πυκνότητες του σφαιριδίου και του υγρού. Συνήθως το ιξώδες μετριέται σε σχέση με ένα πρότυπο υγρό (υγρό αναφοράς), της ίδιας περίπου πυκνότητας, στην ίδια συσκευή, με ένα σφαιρίδιο ίδιων διαστάσεων και πυκνότητας. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε:

$$\eta = k\Delta t, \quad (10)$$

όπου Δt ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το σφαιρίδιο ένα συγκεκριμένο ύψος της στήλης υγρού και k η σταθερά αναλογίας, η οποία υπολογίζεται αν μετρήσουμε το χρόνο που απαιτείται για να διανύσει το σφαιρίδιο το ίδιο ύψος στο πρότυπο υγρό γνωστού ιξώδους:

$$k = \frac{\eta_s}{\Delta t_s}, \quad (11)$$

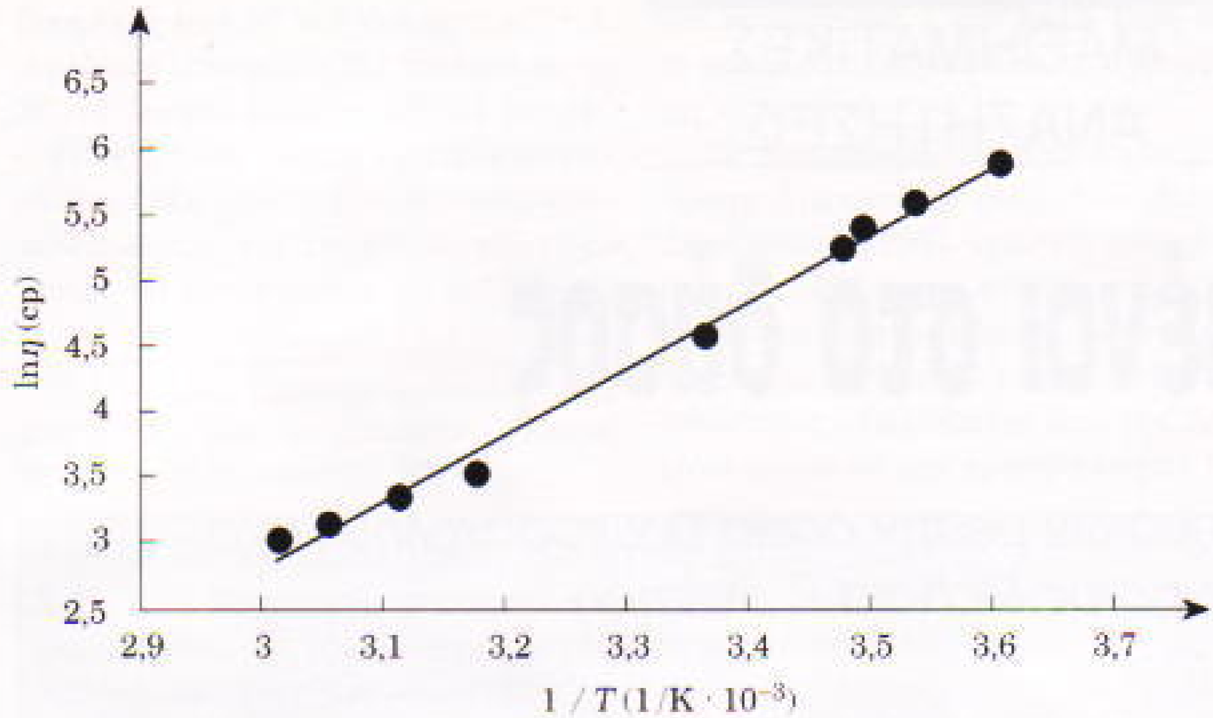
όπου ο δείκτης s υποδηλώνει το πρότυπο υγρό. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (10) και (11), βρίσκουμε εύκολα τη σχέση

$$\frac{\eta}{\eta_s} = \frac{\Delta t}{\Delta t_s}, \quad (12)$$

δηλαδή ότι το σχετικό ιξώδες είναι ανάλογο προς το λόγο των χρόνων.

(Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε ακριβέστερα το ιξώδες του λαδιού, οφείλουμε να λάβουμε υπόψη τη διαφορά πυκνότητας ρ_0 ανάμεσα στο λάδι και στο υγρό αναφοράς.)

Την πειραματική συσκευή είναι πολύ εύκολο να τη βρείτε (Σχήμα 4). Πάρτε έναν ογκομετρικό σωλήνα των 100 ml και γεμίστε τον με το



Σχήμα 5

υγρό αναφοράς ώς τη χαραγή των 100 ml. Με ένα τσιμπιδάκι «ακουμπήστε» μια πλασματική χάντρα ή ένα σφαιρίδιο από τεφλόν (διαμέτρου 3-4 mm περίπου), στο κέντρο της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Χρονομετρήστε (με ακρίβεια ενός δεκάτου του δευτερολέπτου) το σφαιρίδιο καθώς πέφτει από τη στάθμη των 90 ml στον πυθμένα. (Το διάστημα των πρώτων 10 ml είναι μια επαρκής απόσταση για να αποκτήσει το σφαιρίδιο οριακή ταχύτητα.) Το πρότυπο υγρό πρέπει να είναι σχετικά παχύρρευστο για να έχουμε μετρήσιμους χρόνους. Κατάλληλο είναι το μαγειρικό λάδι, του οποίου την ακριβή τιμή ιξώδους μπορείτε να βρείτε σε ένα εγχειρίδιο χημείας ή φυσικής, ή ένα παχύρρευστο υγρό όπως η γλυκερίνη ή αιθυλενογλυκόλη. Οι παραπάνω μετρήσεις για το υγρό αναφοράς αρκεί να γίνουν σε θερμοκρασία δωματίου.

Στη συνέχεια κάντε αρκετές μετρήσεις χρησιμοποιώντας ένα δείγμα λαδιού κινητήρα σε θερμοκρασία δωματίου, για να λάβετε έναν καλό μέσο χρόνο. Το λάδι κινητήρα μπορείτε να το θερμαίνετε προσεκτικά σ' ένα δοχείο με ζεστό νερό ή να το ψύχετε σε δοχείο με κρύο νερό.

Έτσι, μέσω της εξίσωσης (12) μπορείτε να έχετε έναν πίνακα δεδομένων για το ιξώδες του λαδιού σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία του. Επιπλέον, σύμφωνα με την εξίσωση (3) μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου του ιξώδους σε σχέση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας, ώστε να υπολογίσετε την ενέργεια ενεργοποίησης του λαδιού, καθώς και τις τιμές του ιξώδους στις ακραίες θερμοκρασίες (0°F και 210°F). Ένα παράδειγμα τυπικών πειραματικών αποτελεσμάτων φαίνεται στο Σχήμα 5. Στο πείραμά σας, θα μπορέσετε ίσως να καθορίσετε τις διαφορές ανάμεσα σε διάφορες μάρκες λαδιού του ίδιου τύπου —για παράδειγμα του 10W40 των Amoco, Agip, Pennzoil κ.λπ. Μπορείτε ακόμη να εξακριβώσετε τις διαφορές μεταξύ των διαφόρων τύπων λαδιού, όπως π.χ. των SAE30, 10W30 και 10W40, της ίδιας μάρκας.

Χαρακτηριστικά των λαδιών κινητήρων

Περίπου το 20% του όγκου ενός λαδιού κινητήρα μπορεί να είναι πρόσθετα συστατικά (συνθετικά πολυμερή, αντιοξειδωτικά και επιφανειακώς ενεργές ουσίες), ώστε να εμποδίζουν την οξείδωση του λαδιού, να διατηρούν το ιξώδες του, να προστατεύουν από τη σκουριά και τη διάβρωση τις επιφάνειες που τρίβονται, να καθαρίζουν το εσωτερικό της μηχανής από τα ιζήματα, να συντηρούν σε αιωρήματα σωματίδια άνθρακα έως το φιλτράρισμα, και να εξουδετερώνουν τα οξέα που παράγονται κατά την ανάφλεξη. Αυτά τα πρόσθετα όμως μπορεί να μην είναι συμβιβαστά από τη μια μάρκα στην άλλη. Έτσι λοιπόν, όταν βάζετε λάδι στη μηχανή του αυτοκινήτου σας, να χρησιμοποιείτε την ίδια μάρκα και τον ίδιο τύπο, ώστε να ελαχιστοποιείτε τις πιθανότητες να αλληλοκαταργούνται τα πρόσθετα και να γίνονται αναποτελεσματικά.

Καθώς το λάδι κυκλοφορεί στον κινητήρα, χάνει την ποιότητά του επειδή εκτίθεται στις υψηλές θερμοκρασίες λειτουργίας της μηχανής. Το ζεστό λάδι αντιδρά με το οξυγόνο, αλλοιώνεται και σχηματίζει οξειδωμένα ιζήματα στη μηχανή. Επιπλέον, ρύποι, ψυκτικά και αιωρήματα από διάφορες πηγές μολύνουν το λάδι με την πάροδο του χρόνου. Όταν το λάδι δεν έχει πια το σωστό ιξώδες, πρέπει να το αλλάζουμε πριν χάσει εντελώς την αποτελεσματικότητά του. Η ανάπτυξη συνθετικών λαδιών οδήγησε σε λάδια λιγότερο επιρρεπή στην οξείδωση. Αυτό έχει αποτέλεσμα να μη γίνονται παχύτερα υπό μακροχρόνια χρήση σε υψηλές θερμοκρασίες. Έπειτα από έρευνες στον τομέα αυτό, παρήχθησαν επιπλέον λάδια ελαφρύτερα, που σημαίνει μειωμένες μηχανικές τριβές.

Τελειώνοντας, λίγες χρήσιμες συμβουλές ακόμη: Να χρησιμοποιείτε πάντα τα λάδια που σας υποδεικνύει στο εγχειρίδιο ο κατασκευαστής του αυτοκινήτου. Αν πρόκειται να συμπληρώσετε λάδι στο ήδη υπάρχον στη μηχανή σας, χρησιμοποιείτε την ίδια μάρκα. Για κακή μας τύχη, δεν υπάρχει ιξωδόμετρο ή άλλο όργανο που να μετρά άμεσα το ιξώδες των λαδιών του κινητήρα, ώστε να αντιλαμβανόμαστε αν χρειάζονται αλλαγή. Δεν μένει λοιπόν προς το παρόν παρά να εφαρμόζουμε τη μάλλον γενική συνταγή: αλλάζετε λάδια κάθε λίγες χιλιάδες χιλιόμετρα. Ίσως κάποιος από τους αναγνώστες μπορέσει να επινοήσει έναν αισθητήρα ή έναν μετρητή που θα μπορεί να παρακολουθεί την τιμή του ιξώδους, και έτσι να αντικαταστήσουμε αυτή τη μάλλον αντιεπιστημονική εμπειρική μέθοδο.

Ο ***Henry D. Schreiber*** είναι καθηγητής χημείας, ειδικός σε θέματα γενικής χημείας και φυσικοχημείας, στο Στρατιωτικό Ινστιτούτο του Λέξινγκτον της Βιρτζίνια.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

Χαμένοι στο δάσος

Μια περιοχή προβλημάτων με την οποία πρωτοασχολήθηκε ο αείμνηστος Richard E. Bellman

George Berzsenyi

ΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟ ΕΘΕσε ο Richard Bellman, ένας από τους κορυφαίους του κλάδου των εφαρμοσμένων μαθηματικών στην εποχή μας, ως πρόβλημα 6 στη σελίδα 133 του κλασικού του έργου *Dynamic Programming*, που εκδόθηκε το 1957 από το Princeton University Press για λογαριασμό της RAND.

> *Έχουμε χαθεί σε ένα δάσος του οποίου τις διαστάσεις και το σχήμα γνωρίζουμε με ακρίβεια. Πώς μπορούμε να βγούμε στον συντομότερο χρόνο;*

Ο Bellman, που δεν επινόησε μόνο τον όρο «δυναμικός προγραμματισμός» αλλά συνέβαλε και περισσότερο από κάθε άλλον σε αυτό το πεδίο, ενδιαφερόταν κυρίως για τη μαθηματική διατύπωση αυτού του προβλήματος, έτσι ώστε να μπορέσει να εφαρμόσει τη θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού στη γενική λύση του. Δυστυχώς, όσο γνωρίζω, δεν έχουν αναπτυχθεί γενικές μέθοδοι επίλυσης αυτού του προβλήματος και στη βιβλιογραφία συναντάμε σποραδικά μερικά αποτελέσματα που αφορούν ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, το πρόβλημα έχει λυθεί στην περίπτωση που το δάσος καταλαμβάνει την περιοχή ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες (από τον O. Gross —δείτε το πρόβλημα 7 στην ίδια σελίδα του βιβλίου του Bellman). Επίσης, έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση (από τον J.R. Isbell —δείτε στο *Naval Research Logistics Quarterly*, σελ. 357-59 στον τόμο του 1957) στην περίπτωση που το δάσος καταλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο και γνωρίζουμε πόσο μακριά έχουμε ταξιδέψει από το σύνορό του. Αυτό το πρόβλημα, μαζί με την περίπτωση ενός κυκλικού δάσους, παρουσιάστηκε στο μέρος 2 του τόμου II του *USSR Olympiad Problem Book* (Προβλήματα Ολυμπιάδων της ΕΣΣΔ). Στην αγγλική γλώσσα έχει εκδοθεί, δυστυχώς, μόνο ο πρώτος τόμος (ISBN 0-486-27709-7 —Dover Publications) τον οποίο συνιστώ ανεπιφύλακτα στους αναγνώστες μου.

Πέρα από αυτές, η μοναδική αναφορά που βρήκα στο πρόβλημα του Bellman ήταν ένα άρθρο του Gábor Tóth στο ουγγρικό μαθηματικό περιοδικό για μαθητές λυκείου *Középiskolai Matematikai Lapok*, το οποίο πρόσφατα γιόρτασε τα εκατό του χρόνια. Το άρθρο δημοσιεύτηκε το 1982 (σελ. 53-55, τόμος 65), όταν ο Tóth ήταν ακόμη μαθητής λυκείου. Ο Tóth όχι μόνο επιβεβαίωσε τα αποτελέσματα του Isbell και ασχολήθηκε με το κυκλικό δάσος, αλλά κατάφερε και να βρει τις συντομότερες διαδρομές για δάση που έχουν σχήμα κανονικού πολυγώνου με άρτιο πλήθος πλευρών και για ορθογώνια που η μεγαλύτερη πλευρά τους είναι λιγότερο από $\sqrt{3}$ φορές το μήκος της μικρότερης. Η αρχική μου πρόκληση είναι να λύσετε όλες τις ειδικές περιπτώσεις που αναφέραμε.

Απ' ό,τι φαίνεται, η απάντηση δεν είναι γνωστή ούτε καν για ισόπλευρα τρίγωνα. Επιπλέον, δεν γνωρίζουμε τίποτα για τις τρισδιάστατες επεκτάσεις του προβλήματος. Επομένως έχουμε ακόμη πολύ έδαφος να καλύψουμε —ειδικά αν έχουμε πραγματικά χαθεί σε ένα δάσος!

Ανάδραση

Είμαι στην ευχάριστη θέση να αναφέρω ότι σημειώθηκαν θαυμάσιες εξελίξεις και πρόοδος στα προβλήματα που παρουσίασα σε προηγούμενα τεύχη του *Quantum*. Για το πρόβλημα του τεύχους Ιουλίου/Αυγούστου 1995, ένας από τους αναγνώστες μου, ο καθηγητής Les Reed του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Νοτιοδυτικού Μιζούρι, κατάφερε να αποδείξει ότι η τιμή του $G(3, k)$, η μέγιστη τιμή του μέγιστου κοινού διαιρέτη των $n^3 + k$ και $(n + 1)^3 + k$, ισούται με $27k^2 + 1$ αν το k είναι άρτιο και $(27k^2 + 1)/4$ αν το k είναι περιττό. Το ίδιο αποτέλεσμα βρήκε και ο Carl Bosley, μαθητής λυκείου, κατά τη διαμονή του στο υποστηριζόμενο από την NSF Θερινό Πρόγραμμα Νέων Σπουδαστών.*

Απαντώντας σε μια άλλη ερώτηση, ο Σταύρος Σαΐνίδης, πολιτικός μηχανικός από την Ελλάδα, απέδειξε ότι αν το m είναι άρτιο και αν $n = 2^{m-1}k$, τότε το $2^m k + 1$ είναι κοινός

* Το National Science Foundation (Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών), είναι ένα τεράστιας σημασίας αμερικανικό ίδρυμα που χρηματοδοτεί έρευνες, ιδίως σε βασικούς τομείς όπως στα μαθηματικά. (Σ.τ.επιστ.συμβ)

διαιρέτης των $n^m + k$ και $(n+1)^m + k$. Απέδειξε επίσης ότι για περιττά m, το $2^m - 1$ διαιρεί τα $(2^m - 3)^m + 1$ και $(2^m - 2)^m + 1$.* Θα πρέπει να είναι δυνατόν να επεκτείνουμε το δεύτερο αποτέλεσμά του για τυχαίο k, και επομένως να αποδείξουμε ότι το $G(m, k)$ δεν ισούται με 1 για κάθε τιμή των m και k. Δυστυχώς δεν το έχω ακόμη καταφέρει.

Σε ότι αφορά το πρόβλημα του προηγούμενου τεύχους (Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1995), αρκετοί αναγνώστες ανακάλυψαν κάποια σφάλματα σε ένα από τα παραδείγματά μου. Ένα από αυτά μου επισήμανε ένας ανώνυμος αναγνώστης από την Αριζόνα πάνω σε μια όμορφη κάρτα του Εθνικού Μνημείου Saguaro.

Είχα επίσης τη χαρά να λάβω ένα γράμμα από τον νομπελίστα Sheldon Glashow και τον καθηγητή φυσικής του Χάρβαρντ, Eric Carlson, ο οποίος αντιμετώπιζε αυτό το πρόβλημα και έθετε ένα άλλο σχετικό, το οποίο παρουσιάζω εδώ ως νέα πρόκληση. Το γράμμα τους ακολουθεί στη συνέχεια. ◙

* Η εν λόγω απόδειξη δημοσιεύεται στο τεύχος Νοε. / Δεκ. του ελληνικού *Quantum*, στη στήλη «Αλληλογραφία». (Σ.τ.ε.)

Στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1995 του *Quantum* ο George Berzsenyi θυμήθηκε ένα πρόβλημα που το παρουσίασε για πρώτη φορά το 1980. Θεώρησε ένα σύνολο n θετικών ακεραίων όλα τα ζεύγη των οποίων έχουν διαφορετικό άθροισμα. Δηλαδή, $p_i + p_j \neq p_k + p_\ell$, για διαφορετικά i, j, k, ℓ. Οι δυνάμεις του 2 αποτελούν τέτοια σύνολα: $\{2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}\}$. Το ίδιο ισχύει και για τα $\{f_2, ..., f_{n+1}\}$, όπου f_n είναι οι αριθμοί Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1$ και $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$, για $i > 2$. Μπορούμε να κάνουμε μια μοναδική και «ελάχιστη» επιλογή από όλα αυτά τα σύνολα με n στοιχεία ως εξής. Επιλέγουμε αυτά με το ελάχιστο p_n. Από αυτά επιλέγουμε εκείνα με το ελάχιστο p_{n-1}. Συνεχίζουμε τη διαδικασία. Για $n < 7$, άλλα όχι σε άλλη περίπτωση, οι ακολουθίες Fibonacci είναι οι ελάχιστες επιλογές.

Έστω $P(n)$ η τιμή του p_n για το ελάχιστο σύνολο με n στοιχεία. Ο Berzsenyi εξέτασε την περίπτωση $n = 12$, για την οποία απέδειξε ότι $57 \leq P(12) \leq 74$. Το κάτω φράγμα βρέθηκε αναλυτικά ενώ το άνω από το παράδειγμα ενός φοιτητή. Οι αναγνώστες κλήθηκαν «να μικρύνουν το χάσμα». Ο υπολογιστής μας βρήκε τα επόμενα ελάχιστα σύνολα για $7 \leq n \leq 14$:

$n = 7$: {1, 2, 3, 5, 9, 14, 19}
$n = 8$: {1, 2, 3, 5, 9, 15, 20, 25}
$n = 9$: {1, 2, 3, 5, 9, 16, 25, 30, 35}
$n = 10$: {1, 2, 8, 11, 14, 22, 27, 42, 44, 46}
$n = 11$: {1, 2, 6, 10, 18, 32, 34, 45, 52, 55, 58}
$n = 12$: {1, 2, 3, 8, 13, 23, 38, 41, 55, 64, 68, 72}
$n = 13$: {1, 2, 12, 18, 22, 35, 43, 58, 61, 73, 80, 85, 87}
$n = 14$: {1, 2, 7, 15, 28, 45, 55, 67, 70, 86, 95, 102, 104, 106}

Άρα, $P(12) = 72$, και αντιμετωπίσαμε την πρόκληση του Berzsenyi!

Ιδού ένα σχετικό πρόβλημα. Όπως και πριν, έστω $\{q_i\}$ το σύνολο των «αταίριαστων» θετικών ακεραίων. Ας υποθέσουμε ότι ικανοποιείται και ο επιπλέον περιορισμός ότι κανένα q δεν ισούται με τον μέσο όρο δύο άλλων. Συμβολίζουμε την τιμή του q_n για ένα τέτοιο ελάχιστο σύνολο με $Q(n)$. Προφανώς, $Q(n) \geq P(n)$. Μερικά από αυτά τα ελάχιστα σύνολα δίνονται στη συνέχεια:

$n = 3$: 1, 2, 4}
$n = 4$: {1, 2, 5, 7}
$n = 5$: {1, 2, 5, 10, 12}
$n = 6$: {1, 2, 5, 11, 13, 18}

Αυτό το πρόβλημα, όπως και το προηγούμενό του, μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε με τη βοήθεια υπολογιστή, έτσι όμως δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ας στραφούμε λοιπόν σε γενικότερους συλλογισμούς.

Ο αναγνώστης θα πρέπει να μπορέσει να αποδείξει ότι $P(n+1) > P(n) + 1$ για κάθε $n > 2$. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι η επιχειρηματολογία του Berzsenyi οδηγεί σε τετραγωνικά κατώτερα φράγματα για τα $P(n)$ και $Q(n)$:

$$P(n) > \frac{n^2 - 3n + 4}{2}, \quad Q(n) > \frac{n^2 - n}{2}.$$

Τι συμβαίνει με τα ανώτερα φράγματα των $P(n)$ και $Q(n)$;

Προκαλεί έκπληξη ότι είναι επίσης τετραγωνικά ως προς n. Η απόδειξη είναι κάπως τεχνική. Έστω p ο μικρότερος πρώτος αριθμός που είναι μεγαλύτερος του n. Στη θεωρία αριθμών έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει αριθμός x τέτοιος ώστε η μικρότερη λύση της εξίσωσης $x^m \equiv 1 \pmod{p}$ να είναι $m = p - 1$. (Για παράδειγμα, αν $p = 7$, έχουμε $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$). Μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο n θετικών ακεραίων συναρτήσει των x και p:

$$q_i \equiv [pi + (p-1)x^i] \pmod{p(p-1)}$$

για $i = 1, ..., n$. Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\{q_i\}$ ικανοποιεί το κριτήριο του δεύτερου προβλήματος. Δηλαδή, αν $q_i + q_j = q_k + q_\ell$, τότε $i = k$ και $j = \ell$ (ή $i = \ell$ και $j = k$). Επιπλέον, $1 < q_i < p(p-1)$. Ειδικά, έχουμε βρεί ότι $Q(n) < n(n+1)$ για n μικρότερο κατά 1 από κάποιον πρώτο. Ως γνωστόν από το θεώρημα Chebychev, υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένας πρώτος μεταξύ του n και του $2n$, και οι μεγάλοι πρώτοι απέχουν μικρότερα διαστήματα. Συνεπώς, από το αποτέλεσμά μας προκύπτει ένα τετραγωνικό άνω φράγμα του $Q(n)$ για κάθε n. Προσεγγιστικά, και για μεγάλα n, τα $Q(n)$ και $P(n)$ πρέπει να βρίσκονται μεταξύ των $n^2/2$ και n^2. Βελτιώσεις αυτών των ορίων είναι ευπρόσδεκτες.

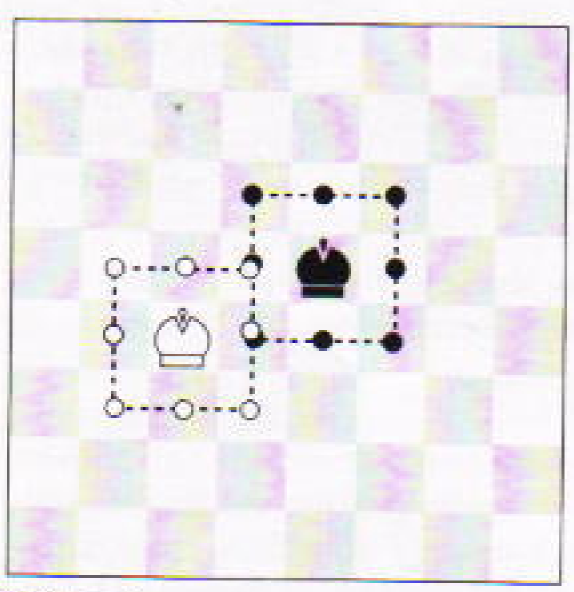
—Eric D. Carlson
και Sheldon L. Glashow
(Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

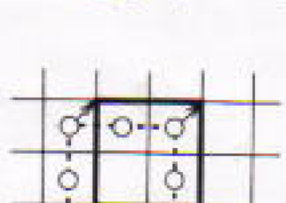
M51

Σε μια σπείρα τα κέντρα των οκτώ τετραγώνων που απειλεί ένας βασιλιάς σχηματίζουν πάντα ένα τετράγωνο διαστάσεων 2 × 2, με πλευρές παράλληλες με τις πλευρές της σκακιέρας (δείτε το Σχήμα 1). Δύο βασιλιάδες δεν απειλούν ο ένας τον άλλο αν και μόνο αν τα 2 × 2 τετράγωνα που τους περιβάλλουν επικαλύπτονται το πολύ κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επομένως το πρόβλημά μας ανάγεται στο εξής ερώτημα: *Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος N τέτοιων 2 × 2 τετραγώνων που είναι δυνατόν να τοποθετηθούν σε μια n × n σπειροειδή σκακιέρα έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται;*

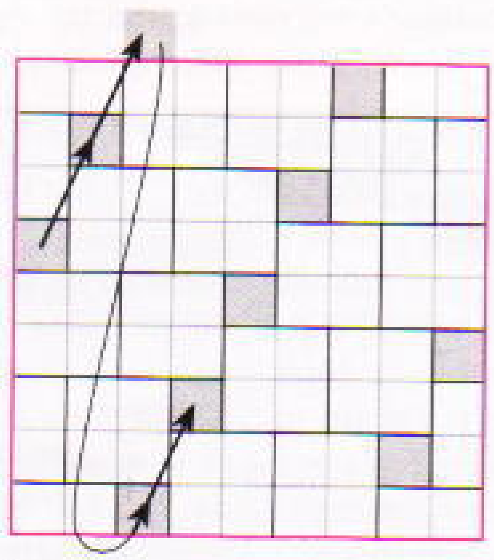


Σχήμα 1

Για ευκολία, ας μετατοπίσουμε όλα τα 2 × 2 τετράγωνα προς τα πάνω και δεξιά κατά μισή διαγώνιο ενός μοναδιαίου τετραγώνου της σκακιέρας (Σχήμα 2), έτσι ώστε το καθένα να καλύπτει ακριβώς τέσσερα τετράγωνα της σκακιέρας. Είναι φανερό τώρα πως όταν έχουμε άρτιο $n = 2s$, η σκακιέρα καλύπτεται από s^2 μη επικαλυπτόμενα 2 × 2 τετράγωνα, επομένως σε αυτή την περίπτωση $N = s^2 = n^2/4$.



Σχήμα 2

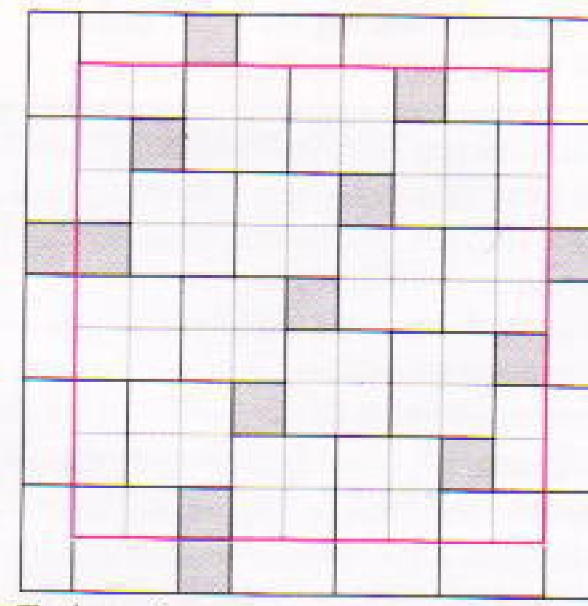


Σχήμα 3

Αν το n είναι περιττό, κάθε διευθέτηση των 2 × 2 τετραγώνων θα αφήνει ακάλυπτο τουλάχιστον ένα μοναδιαίο τετράγωνο σε κάθε οριζόντια γραμμή· επομένως το πλήθος των καλυμμένων τετραγώνων είναι το πολύ $n(n-1)$ και $N \le N_0 = [(n^2 - n)/4]$ (οι αγκύλες συμβολίζουν το ακέραιο μέρος ενός αριθμού). Θα αποδείξουμε ότι $N = N_0$, δηλαδή ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε πάντα N_0 μη επικαλυπτόμενα τετράγωνα διαστάσεων 2 × 2 στη σκακιέρα μας.

Και πάλι θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

Υποθέτουμε ότι $n = 4k + 1$. Τότε έπεται ότι $N_0 = kn$. Ας αφήσουμε ακάλυπτα τα n τετράγωνα που προκύπτουν το ένα μετά το άλλο όταν κινηθούμε στη σκακιέρα όπως το άλογο προς μια σταθερή κατεύθυνση (Σχήμα 3 —μην ξεχνάτε πως βρισκόμαστε σε μια σπείρα!). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η περιοχή που απομένει μπορεί να χωριστεί σε τετράγωνα διαστάσεων 2 × 2. Η ζητούμενη διευθέτηση των βασιλιάδων μπορεί να επιτευχθεί αν τους τοποθετήσουμε, για παράδειγμα, στις κάτω αριστερά γωνίες αυτών των τετραγώνων.



Σχήμα 4

Τέλος, αν $n = 4k + 3$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $N_0 = (k + 1)(n - 1)$. Μπορούμε να διευθετήσουμε αυτό το πλήθος τετραγώνων ως εξής: ξεχωρίζουμε ένα πλαίσιο πάχους ενός μοναδιαίου τετραγώνου στον περίγυρο της σκακιέρας, συμπληρώνουμε το εσωτερικό τετράγωνο μεγέθους $4k + 1$ όπως πριν, και κατόπιν συμπληρώνουμε το πλαίσιο αφήνοντας τέσσερα από τα τετράγωνά του ακάλυπτα όπως βλέπετε στο Σχήμα 4.

M52

Αρκεί να αποδείξουμε μια κάπως ισχυρότερη πρόταση: ο κάθε όρος της ακολουθίας $\left\{\sqrt{b_n}\right\}$ είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο τουλάχιστον κατά 1:

$$\sqrt{b_{n+1}} \ge \sqrt{b_n} + 1. \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$a_1 + \ldots + a_n = a,$$
$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = c,$$
$$a_{n+1} = x > 0,$$

έχουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $x > 0$,

$$\sqrt{(a+x)\left(c+\frac{1}{x}\right)} \ge \sqrt{ac}+1.$$

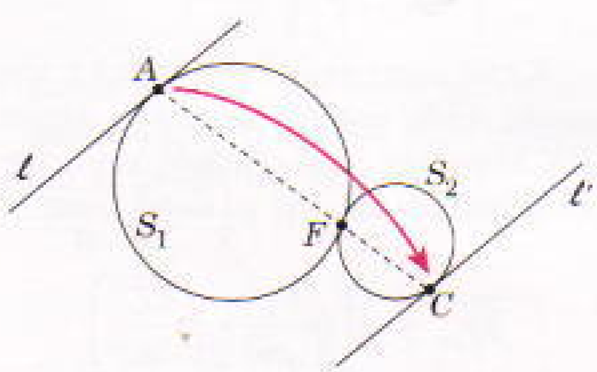
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών δεν είναι ποτέ μεγαλύτερος του αριθμητικού μέσου, παίρνουμε $a/x + cx \ge 2\sqrt{ac}$, απ' όπου οδηγούμαστε στην

$$(a+x)\left(c+\frac{1}{x}\right) \ge ac+1+2\sqrt{ac} = \left(\sqrt{ac}+1\right)^2.$$

Τώρα, η ανισότητα (1) προκύπτει αν πάρουμε την τετραγωνική ρίζα και των δύο μελών.

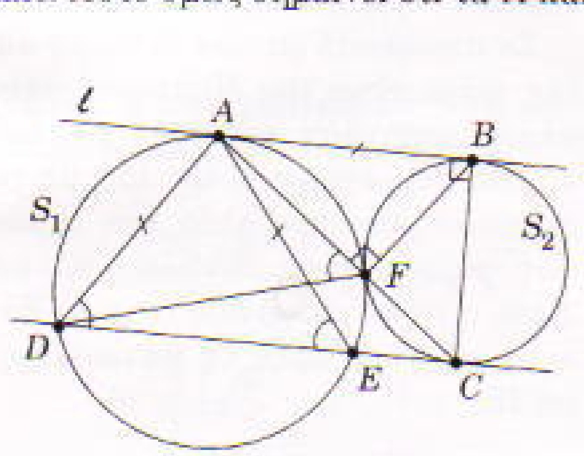
M53

(α) Αυτή η πρόταση αληθεύει για κάθε εφαπτόμενη ℓ ενός κύκλου S_1 (χωρίς να είναι απαραίτητο να εφάπτεται και του δεύτερου κύκλου —δείτε το Σχήμα 5). Ένας από τους απλούστερους τρόπους απόδειξης εί-

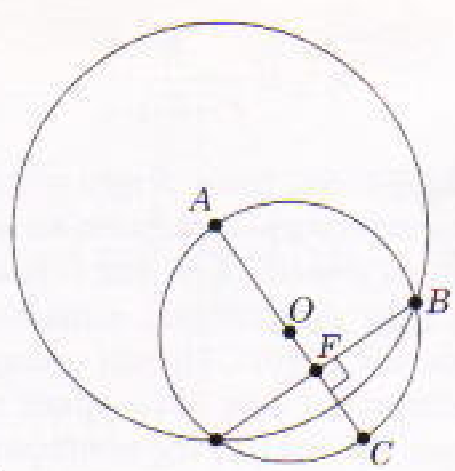


Σχήμα 5

ναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι είναι ομοιόθετοι ως προς το σημείο επαφής τους. Εδώ, η ομοιοθεσία με κέντρο F που μεταφέρει τον κύκλο S_1 στον κύκλο S_2 μεταφέρει την εφαπτόμενη ℓ του S_1 στην παράλληλη εφαπτόμενη ℓ' του S_2. Άρα, μεταφέρει το σημείο επαφής A με τον πρώτο κύκλο στο σημείο επαφής C με τον δεύτερο κύκλο. Αυτό όμως σημαίνει ότι τα A και



Σχήμα 6



Σχήμα 7

C ανήκουν στην ίδια ευθεία με το F.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\angle ABC = \angle BFC = 90°$ (δείτε το Σχήμα 6), επειδή τα B και C είναι εκ διαμέτρου αντίθετα σημεία του κύκλου S_2. Επομένως το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC είναι μέσον της AC ($\angle ABC = 90°$) και, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BDE είναι το σημείο A. Έπεται ότι η BF είναι η κάθετη από το κοινό σημείο B των δύο περιγεγραμμένων κύκλων προς την ευθεία AC, που διέρχεται από τα κέντρα τους. Αλλά αυτό ακριβώς σημαίνει ότι το F βρίσκεται στην κοινή χορδή (Σχήμα 7).

Επομένως, μένει να αποδείξουμε ότι το A είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BDE, ή ότι $AE = AD = AB$. Η πρώτη από αυτές τις ισότητες είναι εύκολη: η ED είναι χορδή του S_1 παράλληλη προς την εφαπτόμενη στο A, επομένως *το τόξο AD* είναι ίσο με το τόξο AE. Όσο για τη δεύτερη, παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ABF και ACB είναι όμοια (έχουν μια κοινή οξεία γωνία στο A). Επομένως, $AF/AB = AB/AC$, ή

$$AB^2 = AF \cdot AC$$

(στην πραγματικότητα, αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του γνωστού θεωρήματος τέμνουσας και εφαπτομένης που άγονται από το ίδιο σημείο σε έναν κύκλο). Δείχνουμε τώρα ότι τα τρίγωνα AFD και ADC είναι επίσης όμοια. Πράγματι, έχουν κοινή τη γωνία στο A, ενώ η $\angle AFD$ ισούται με την $\angle AED$ (και οι δύο βλέπουν το ίδιο τόξο AD), η οποία με τη σειρά της ισούται με την $\angle ADE$ (όπως επισημάναμε προηγουμένως). Από αυτήν την ομοιότητα έχουμε $AF/AD = AD/AC$, ή

$$AD^2 = AF \cdot AC = AB^2,$$

και ολοκληρώσαμε τη λύση.
(V. Dubrovsky)

M54

Ας αριθμήσουμε τις κορυφές του n-γώνου με 1, 2, ..., n, κατά δεξιόστροφη, ας πούμε, φορά. Συμβολίζουμε με a_i το πλήθος των κινήσεων που έχουν γίνει από την i-οστή κορυφή. Τότε από την κορυφή αυτή έχουν φύγει $2a_i$ μάρκες ενώ έχουν φτάσει $a_{i-1} + a_{i+1}$. Επομένως, έχουμε

$$a_1 = \frac{a_n + a_2}{2},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2},$$

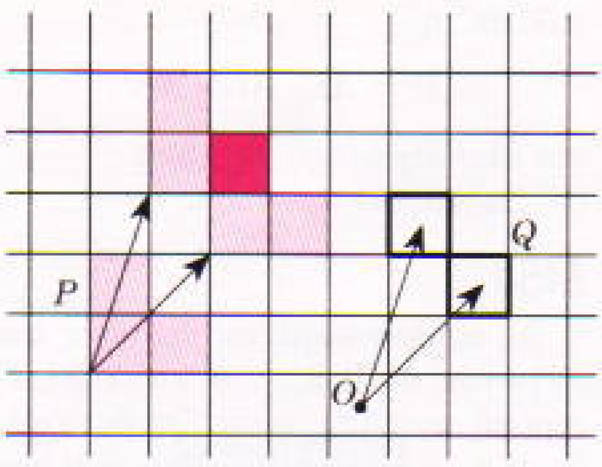
$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_1}{2}.$$

Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη στη γενικότητα ότι το a_1 είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς a_i. Τότε η ισότητα $a_1 = (a_n + a_2)/2$ είναι δυνατή μόνο αν $a_n = a_2 = a_1$. Η ισότητα τώρα $a_2 = (a_1 + a_3)/2$ μας δίνει $a_3 = a_1$, κ.ο.κ. Έτσι, $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Επομένως το συνολικό πλήθος των κινήσεων είναι na_1.

M55

Θεωρούμε δύο συγκεκριμένες θέσεις P και Q στο πλέγμα των δύο σχημάτων και το κέντρο O ενός τυχαίου τετραγώνου του πλέγματος. Έστω P_1, ..., P_n και Q_1, ..., Q_m τα κέντρα των τετραγώνων που αποτελούν τα σχήματα P και Q, αντίστοιχα. Θεωρήστε το άθροισμα των mn αριθμών που βρίσκονται στα άκρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OQ_j}$ που φέρουμε από το O ($i = 1$, ..., n και $j = 1$, ..., m) —μερικοί αριθμοί του αθροίσματος μπορεί να επαναλαμβάνονται. Αυτό το άθροισμα είναι θετικό διότι μπορεί να προκύψει αν προσθέσουμε τα αθροίσματα των m αντιγράφων του σχήματος P (που ίσως επικαλύπτονται —δείτε το Σχήμα 8) τα οποία προκύπτουν από τη μετατόπιση του σχήματος P κατά τα διανύσματα $\overrightarrow{OQ_1}$, ..., $\overrightarrow{OQ_m}$. Όμως, μπορεί να



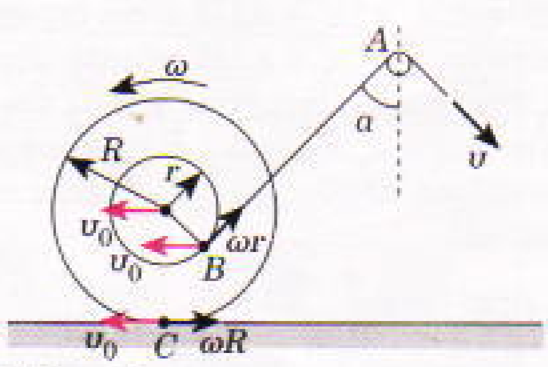
Σχήμα 8

προκύψει επίσης αν προσθέσουμε τα αθροίσματα των n σχημάτων που προκύπτουν από την ολίσθηση του Q κατά τα διανύσματα $\overrightarrow{OP_1}, ..., \overrightarrow{OP_n}$. Επομένως, τουλάχιστον ένα από τα αθροίσματα στα αντίγραφα του Q είναι θετικό.
(*N.* Vasilyev)

Φυσική

Φ51

Αν τραβάμε την κλωστή όπως φαίνεται στο Σχήμα 9, η κουβαρίστρα θα κυλάει προς τα αριστερά περιστρεφόμενη αριστερόστροφα γύρω



Σχήμα 9

από τον άξονά της. Για το σημείο B, η προβολή στη διεύθυνση του σχοινιού της ταχύτητας $\mathbf{υ}_0$ λόγω της μεταφορικής κίνησης, η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, και η ταχύτητα μετατόπισης $\mathbf{υ}$ της κλωστής συνδέονται με τη σχέση

$$\omega r - \upsilon_0 \text{ημ}\alpha = \upsilon,$$

όπου υ_0 είναι το μέτρο της ζητούμενης ταχύτητας. Αφού η κουβαρίστρα δεν ολισθαίνει, για το σημείο C θα ισχύει

$$\upsilon_0 - \omega R = 0.$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει εύκολα

$$\upsilon_0 = \upsilon \frac{R}{r - R\text{ημ}\alpha}.$$

Προφανώς, όταν $R\text{ημ}\alpha = r$ (που αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία τα σημεία A, B και C βρίσκονται στην ίδια ευθεία), ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ο εν λόγω τύπος περιγράφει την κίνηση της κουβαρίστρας τόσο προς τα δεξιά (αν το σημείο B βρίσκεται αριστερά του AC και $R\text{ημ}\alpha > r$), όσο και προς τα αριστερά (αν το σημείο B βρίσκεται δεξιά του AC και $R\text{ημ}\alpha < r$).

Φ52

Η παραδοχή ότι η μάζα της μεμβράνης της φυσαλίδας είναι αμελητέα σημαίνει πως η σαπουνόφουσκα θα αρχίσει να ανυψώνεται όταν η πυκνότητα του αζώτου στο εσωτερικό της γίνει ίση με την πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα:

$$\rho_N = \rho_\alpha.$$

Η καταστατική εξίσωση για το άζωτο και τον αέρα, δίνει:

$$\rho_\alpha = \frac{P_0 \mu_\alpha}{RT}$$

και

$$\rho_N = \frac{\left(P_0 + 8\sigma/d\right)\mu_N}{RT}.$$

Εδώ P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση, μ_N και μ_α είναι οι γραμμομοριακές μάζες του αζώτου και του ατμοσφαιρικού αέρα, R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων, T η θερμοκρασία δωματίου και d η διάμετρος της φυσαλίδας. Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$d = \frac{8\mu_N \sigma}{P_0\left(\mu_\alpha - \mu_N\right)}.$$

Αν θέσουμε $P_0 = 10^5\ \text{N/m}^2$, $\mu_N = 28$ g/mol και $\mu_\alpha = 29$ g/mol, βρίσκουμε

$$d \cong 9 \cdot 10^{-5}\ \text{m}.$$

Φ53

Η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των μέτρων ταχύτητας των μορίων του αέρα που χτυπούν την πλάκα, ή αλλιώς η ενεργός τους ταχύτητα, ισούται με

$$\upsilon_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

όπου T η θερμοκρασία του αέρα και m η μάζα ενός μορίου του αέρα. Η μέση τιμή των προβολών των μοριακών ταχυτήτων στον άξονα OY, που είναι κάθετος στην πλάκα, είναι

$$\overline{\upsilon}_y \cong \frac{\upsilon_{rms}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Μετά την κρούση των μορίων με την πλάκα, η «θερμοκρασία» τους γίνεται ίση με τη θερμοκρασία της πλάκας. Έτσι, για την κάτω επιφάνεια της πλάκας, η μέση τιμή των προβολών των ταχυτήτων μετά την κρούση θα είναι

$$\overline{\upsilon}_{y\pi} = \sqrt{\frac{kT_\pi}{m}},$$

και για την πάνω επιφάνεια

$$\overline{\upsilon}_{y\kappa} = \sqrt{\frac{kT_\kappa}{m}}.$$

Κατά συνέπεια, η μεταβολή της ορμής κάθε μορίου κατά τον άξονα OY λόγω της πρόσκρουσής του στην κάτω επιφάνεια της πλάκας είναι

$$\Delta p_{y\pi} = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_\pi}{m}}\right)$$

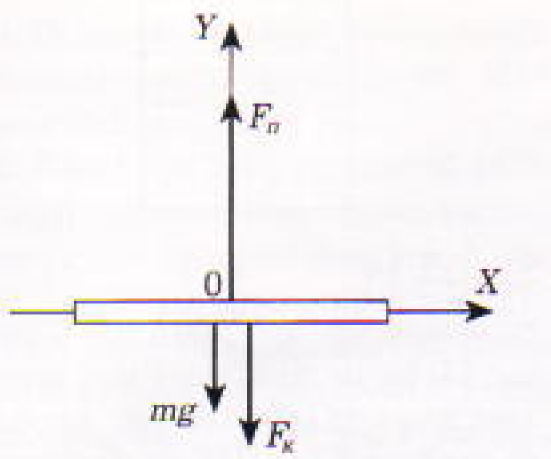
και λόγω της πρόσκρουσής του στην πάνω επιφάνεια

$$\Delta p_{y\kappa} = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_\kappa}{m}}\right).$$

Σε χρονικό διάστημα Δt, κάθε επιφάνεια δέχεται μόρια που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από $\overline{\upsilon}_y \Delta t$. Ο αριθμός των μορίων αυτών είναι $N = n\overline{\upsilon}_y S\Delta t$, όπου n ο αριθμός των μορίων στη μονάδα του όγκου και S το εμβαδόν της πλάκας.

Σε συμφωνία με τον δεύτερο και τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, στην πλάκα ενεργούν κατακόρυφες δυνάμεις που έχουν μέτρα ίσα με τις μεταβολές των προβολών των ορμών των μορίων ανά μονάδα χρόνου. Έτσι, η κάτω επιφάνεια δέχεται δύναμη με φορά προς τα πάνω (Σχήμα 10)

$$F_\pi = \frac{N\Delta p_{y\pi}}{\Delta t}$$



Σχήμα 10

$$= mn\overline{\upsilon}_y\, S\left(\sqrt{\frac{kT_\pi}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right),$$

και η πάνω επιφάνεια δύναμη με φορά προς τα κάτω

$$F_\kappa = \frac{N\Delta p_{y\kappa}}{\Delta t}$$

$$= mn\overline{\upsilon}_y\, S\left(\sqrt{\frac{kT_\kappa}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right).$$

Αφού $T_\pi > T_\kappa$, η συνισταμένη τους δύναμη R θα έχει φορά προς τα πάνω, και το μέτρο της θα είναι

$$R = F_\pi - F_\kappa$$

$$= mn\overline{\upsilon}_y\, S\left(\sqrt{\frac{kT_\pi}{m}} - \sqrt{\frac{kT_\kappa}{m}}\right)$$

$$= nSk\sqrt{T}\left(\sqrt{T_\pi} - \sqrt{T_\kappa}\right).$$

Το πλήθος των μορίων του αέρα σε όγκο V, υπό πίεση P και θερμοκρασία T, είναι $N_V = \nu N_A$, όπου ν είναι το πλήθος των moles του αέρα στον όγκο V, και N_A ο αριθμός του Avogadro. Από την άλλη, $\nu = M/\mu = PV/RT$, οπότε ο αριθμός των μορίων στη μονάδα του όγκου είναι

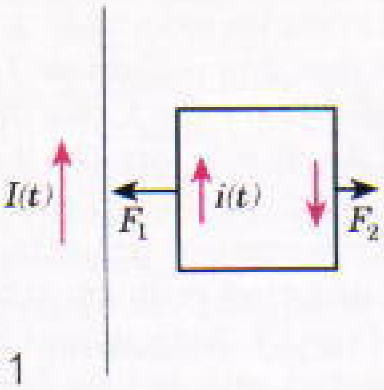
$$n = \frac{P}{RT}N_A .$$

Έτσι, η ανυψωτική δύναμη πάνω στην πλάκα θα ισούται με

$$R = \frac{PN_A sk}{RT}\sqrt{T}\left(\sqrt{T_\pi} - \sqrt{T_\kappa}\right)$$

$$= \frac{Ps}{\sqrt{T}}\left(\sqrt{T_\pi} - \sqrt{T_\kappa}\right).$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα, και θεωρώντας ότι $P = 10^5$



Σχήμα 11

N/m², παίρνουμε

$$R \cong 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Φ54

Καθώς το ρεύμα μειώνεται, το πλαίσιο διαπερνάται από μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή $\Phi(t)$, η οποία είναι ανάλογη του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το καλώδιο.

$$\Phi(t) \sim I(t).$$

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πλαίσιο παράγει ρεύμα $i(t)$ σ' αυτό:

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t},$$

όπου R η αντίσταση του πλαισίου. Αφού $R \sim 1/d^2$, θα ισχύει

$$i(t) \sim \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}d^2.$$

Η αριστερή πλευρά του πλαισίου δέχεται δύναμη Laplace, επειδή βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του ευθύγραμμου καλωδίου, με φορά προς τα αριστερά (Σχήμα 11)

$$F_1 \sim I(t)\cdot i(t) \sim I(t)\cdot\frac{\Delta I(t)}{\Delta t}d^2$$

$$\sim \frac{\Delta\left(I^2(t)\right)}{\Delta t}d^2.$$

Είναι φανερό ότι μια παρόμοια δύναμη F_2 ασκείται στη δεξιά πλευρά του πλαισίου. Το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο είναι

$$F = F_1 - F_2 \sim \frac{\Delta\left(I^2(t)\right)}{\Delta t}d^2$$

και έχει φορά προς τα αριστερά.

Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt στο πλαίσιο ασκείται ώθηση

$$\Delta p = F\Delta t \sim \Delta(I^2(t))d^2.$$

Η ολική ορμή που αποκτά το πλαίσιο κατά τη διάρκεια της διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος στο καλώδιο, από την αρχική τιμή I στην τελική τιμή 0, είναι

$$p \sim I^2 d^2.$$

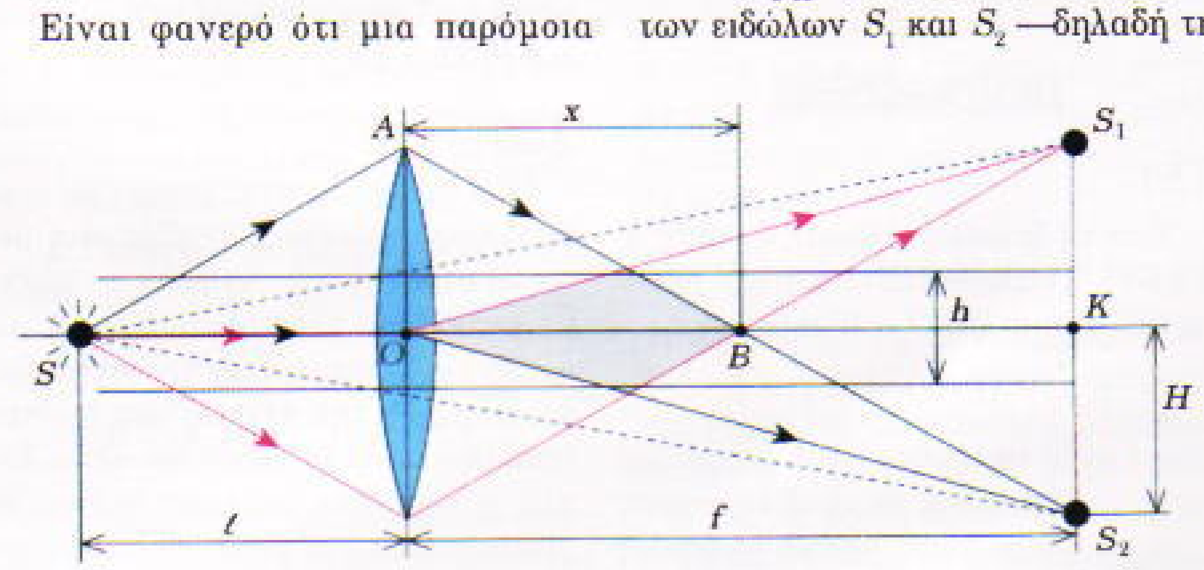
Στην πρώτη περίπτωση αυτή η ορμή ισούται με p_0 και έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Στη δεύτερη περίπτωση θα είναι

$$p_1 = \left(\frac{I_1 d_1}{I_0 d_0}\right)^2 p_0 = 36p_0 .$$

Φ 55

Καθένα από τα δύο τμήματα του σύνθετου φακού σχηματίζει το δικό του είδωλο της πηγής S. Αυτά τα είδωλα (S_1 και S_2 στο Σχήμα 12) βρίσκονται σε απόσταση H από τον άξονα συμμετρίας του συστήματος. Οι ακτίνες που διαπερνούν τα δύο τμήματα του φακού και σχηματίζουν τα εν λόγω είδωλα επικαλύπτονται κατά ένα μέρος, και σ' αυτή την περιοχή επικάλυψης μπορεί να παρατηρείται συμβολή. Ζητείται να εντοπίσουμε τα σύνορα της περιοχής αυτής —δηλαδή να βρούμε την απόσταση x στο Σχήμα 12.

Καταρχάς, ας βρούμε τις θέσεις των ειδώλων S_1 και S_2 —δηλαδή την



Σχήμα 12

απόστασή τους f από το φακό, και την απόστασή τους H από τον άξονα. Χρησιμοποιώντας τον τύπο των φακών και λαμβάνοντας υπόψη ότι η εστιακή απόσταση και των δύο τμημάτων του σύνθετου φακού είναι F, παίρνουμε

$$f = \frac{F\ell}{\ell - F} = 3F.$$

Οι οπτικοί άξονες των δύο τμημάτων βρίσκονται σε απόσταση $h/2$ από τον άξονα συμμετρίας του συστήματος, και είναι παράλληλοι προς αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι η πηγή S απέχει απόσταση $h/2$ από τον οπτικό άξονα οποιουδήποτε από τα δύο τμήματα, και το είδωλό της σχηματίζεται σε απόσταση $H - h/2$ από καθέναν απ' αυτούς. Ο τύπος της γραμμικής μεγέθυνσης του φακού μας δίνει

$$\frac{H - h/2}{h/2} = \frac{f}{\ell},$$

απ' όπου προκύπτει

$$H = \frac{h(\ell + f)}{2\ell} = \frac{h(\ell + 3F)}{2\ell} = 1{,}5h.$$

Τώρα είναι εύκολο να υπολογίσουμε την x. Η ομοιότητα των τριγώνων AOB και BS_2K συνεπάγεται ότι

$$\frac{AO}{S_2K} = \frac{OB}{BK}$$

ή

$$\frac{(d-h)/2}{H} = \frac{x}{f - x},$$

από την οποία παίρνουμε

$$x = \frac{f(d-h)}{d - h + 2H} = \frac{3F(d-h)}{d + 2h}$$

$= 112$ cm.

Σπαζοκεφαλιές

Σ51

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $T = 2WO$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε $2WO - W - O = 2$, ή

$$W(O-1) + O(W-1) = 2.$$

Τώρα, ούτε το O ούτε το W μπορεί να είναι μηδέν (αφού το πρόβλημα μας ζητά να διαιρέσουμε και με τα δύο) ή αρνητικά, άρα οι δύο προσθετέοι στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι μη αρνητικοί. Αν κάποιος από τους δύο ισούται με 1, τότε $O = 1$ ή $W = 1$. Αν $O = 1$, τότε $W = 3$ και $T = 6$. Αν $W = 1$, τότε $O = 3$ και $T = 6$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι δύο προσθετέοι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι και οι δύο ίσοι με 1 (ενώ αν ήταν μεγαλύτεροι, το άθροισμά τους δεν θα μπορούσε να είναι 2). Επομένως, οι δύο μοναδικές λύσεις είναι (6, 3, 1) και (6, 1, 3).

Σ52

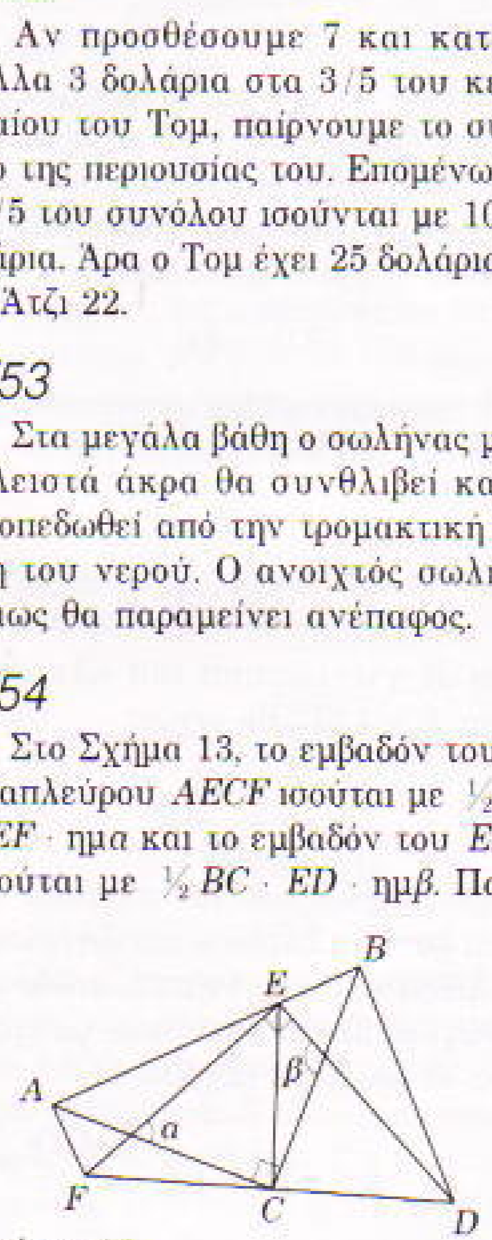
Αν προσθέσουμε 7 και κατόπιν άλλα 3 δολάρια στα 3/5 του κεφαλαίου του Τομ, παίρνουμε το σύνολο της περιουσίας του. Επομένως, τα 2/5 του συνόλου ισούνται με 10 δολάρια. Άρα ο Τομ έχει 25 δολάρια και η Άτζι 22.

Σ53

Στα μεγάλα βάθη ο σωλήνας με τα κλειστά άκρα θα συνθλιβεί και θα ισοπεδωθεί από την τρομακτική πίεση του νερού. Ο ανοιχτός σωλήνας όμως θα παραμείνει ανέπαφος.

Σ54

Στο Σχήμα 13, το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AECF$ ισούται με $\frac{1}{2}\,AC \cdot EF \cdot$ ημα και το εμβαδόν του $EBDC$ ισούται με $\frac{1}{2}\,BC \cdot ED \cdot$ ημβ. Παρατηρούμε ότι $AC = BC$, $EF = ED$ και ημα = ημβ, επειδή $\alpha + \beta = 360° - (\angle ACB + \angle FED) = 180°$.



Σχήμα 13

Σ55

Ο δεύτερος παίκτης μπορεί να κερδίσει εφαρμόζοντας την εξής «συμμετρική στρατηγική»: χωρίζει το πλέγμα σε δύο ίσα μέρη (ας πούμε, με μία οριζόντια γραμμή) και επαναλαμβάνει ακριβώς την κίνηση του πρώτου παίκτη στο άλλο μισό. Με άλλα λόγια, ο δεύτερος παίκτης πρέπει να χρωματίζει κάθε φορά το τετράγωνο που έχει τον ίδιο αριθμό (χρησιμοποιώντας την αρίθμηση του Σχήματος 14) με το τετράγωνο που χρωμάτισε στην τελευταία του κίνηση ο πρώτος παίκτης. Με τη στρατηγική αυτή ο δεύτερος παίκτης εξασφαλίζει τη νίκη, διότι αν συμπληρώσει ένα χρωματισμένο τετράγωνο διαστάσεων 2 × 2 αποτελούμενο από τα μοναδιαία τετράγωνα a, b, c, d, τότε τα άλλα τέσσερα μοναδιαία τετράγωνα με τους ίδιους αριθμούς θα έχουν ήδη χρωματιστεί. Επομένως επτά από αυτά τα οκτώ μοναδιαία τετράγωνα θα έχουν χρωματιστεί μετά την προηγούμενη κίνηση του πρώτου παίκτη, και περιέχουν αναγκαστικά ένα τετράγωνο διαστάσεων 2 × 2.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Σχήμα 14

Μια άλλη νικηφόρα στρατηγική βασίζεται στην εξής προσέγγιση. Ας φανταστούμε ότι χωρίζουμε όλο το πλέγμα σε τέσσερα τετράγωνα διαστάσεων 2 × 2. Αν όλα αυτά τα τετράγωνα έχουν ένα χρωματισμένο μοναδιαίο τετράγωνο που δεν ανήκει στις διαγωνίους του πλέγματος (κάτι που ο δεύτερος παίκτης μπορεί εύκολα να το εξασφαλίσει με τις λίγες πρώτες κινήσεις) και αν το συνολικό πλήθος των χρωματισμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 12, τότε είναι πάντα δυνατό να χρωματιστεί ένα ακόμη τετράγωνο σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού (επιβεβαιώστε το!). Επομένως το παιχνίδι θα συνεχιστεί μέχρι να χρωματίσει ο δεύτερος παίκτης το δωδέκατο τετράγωνο. Ο πρώτος παίκτης τότε δεν θα μπορεί πλέον να κάνει την επόμενη κίνηση, επειδή με αυτή θα συμπληρώσει υποχρεωτικά ένα από τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα διαστάσεων 2 × 2.

(S. Tokarev, V. Dubrovsky)

Βασιλιάδες και σπείρες

1. $\alpha(G_1) = 1$, ΜΑΣ $= \{1\}$, $\{2\}$ ή $\{3\}$· $\alpha(G_2) = 2$, ΜΑΣ $= \{1, 3, 4\}$· $\alpha(G_3) = 2$, ΜΑΣ $= \{i, j\}$, όπου $i \in \{1, 2\}$, $j = \{5, 6\}$· $\alpha(G_4) = 4$, ΜΑΣ $= \{3, 6, 7, 8\}$ (ή τέσσερα άλλα παρόμοια σύνολα).

2. $[n/(k+1)]$.

4. Οι προτάσεις αυτές προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος *M51* αυτού του τεύχους.

5. Βάσει του προβλήματος 4β κάθε γραμμή της σκακιέρας πρέπει να περιέχει έναν ακριβώς βασιλιά. Κάθε ΜΑΣ μπορεί να μετατοπιστεί κυκλικά έτσι ώστε να φέρουμε έναν βασιλιά στο κεντρικό τετράγωνο (2, 2) της σκακιέρας (δείτε το Σχήμα 5 στο άρθρο). Έτσι απομένουν 12 μόνο πιθανά τετράγωνα για τους υπόλοιπους τέσσερις βασιλιάδες: τα τρία τετράγωνα (0, 0), (0, 1) και (1, 0), και τρεις παρόμοιες τριάδες στις υπόλοιπες γωνίες της σκακιέρας. Είναι φανερό ότι πρέπει να υπάρχει ακριβώς ένας βασιλιάς σε καθεμιά από αυτές τις τριάδες τετραγώνων, και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το τετράγωνο (0, 0) πρέπει να μείνει ελεύθερο (διότι ο βασιλιάς στο (0, 0) απειλεί ή βρίσκεται στην ίδια γραμμή με όλα τα τετράγωνα της πάνω αριστερά και της κάτω δεξιά τριάδας). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας βασιλιάς στο (0, 1), διαφορετικά θεωρούμε τη συμμετρία ως προς τη διαγώνιο (0, 0)-(4, 4). Τότε, υπάρχει μία μόνο δυνατή τοποθέτηση των υπόλοιπων τριών βασιλιάδων: (1, 4), (3, 0) και (4, 3). Απομένει να μετατοπίσουμε αυτή τη διευθέτηση ένα τετράγωνο προς τα κάτω.

6. Δύο διαφορετικά σύνολα $(v_1, \ldots, v_k)$ με συντεταγμένες από ένα ΜΑΣ ενός δεδομένου γραφήματος G δεν είναι προσκείμενα στο G^k. Αφού κάθε v_i παίρνει $a(G)$ τιμές, το συνολικό πλήθος αυτών των συνόλων είναι $(a(G))^k$.

7. n^k.

8. $3^k - 1$.

9. Το γράφημα P_n^k μπορεί να θεωρηθεί ως ένα k-διάστατο κυβικό πλέγμα με n^k μοναδιαίους k-διάστατους κύβους: οι κορυφές αυτών των κύβων είναι οι κόμβοι του γραφήματος, και δύο κόμβοι είναι προσκείμενοι αν και μόνο αν είναι κορυφές του ίδιου μοναδιαίου κύβου. Στο άρθρο εξετάσαμε την περίπτωση $k = 2$, ενώ είναι εύκολο να φανταστούμε την περίπτωση $k = 3$. Είναι δύσκολο να συλλάβουμε οπτικά τις περιπτώσεις των μεγαλύτερων διαστάσεων, αλλά μπορούμε να τις προσεγγίσουμε τυπικά. Οι 2^k κορυφές οποιουδήποτε μοναδιαίου κύβου μπορούν να γραφούν ως $(v_1 + h_1, v_2 + h_2, \ldots, v_k + h_k)$, όπου το $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ είναι σταθερό ενώ $h_i = 0$ ή 1 για κάθε $1 \le i \le k$. Κάθε κόμβος του P_n^k είναι κοινή κορυφή των 2^k μοναδιαίων κύβων που την περιβάλλουν. Δύο κόμβοι δεν είναι προσκείμενοι αν και μόνο αν τα σύνολα των μοναδιαίων κύβων που τους περιβάλλουν είναι ξένα. Επομένως ένα ανεξάρτητο σύνολο περιέχει το πολύ $n^k/2^k$ κόμβους.

10. Για $n = 2s$, $a\left(P_n^k\right) = s^k$. Σε αυτήν την περίπτωση οι k-διάστατοι «γειτονικοί κύβοι» των κόμβων που θεωρήσαμε στην προηγούμενη απάντηση (το σύνολο των 2^k μοναδιαίων κύβων που περιβάλλουν έναν κόμβο) είναι δυνατόν να επιλεγούν έτσι ώστε να καλύψουν τον μεγάλο $n \times n \times \ldots \times n$ κύβο χωρίς κενά. Τα κέντρα τους τότε σχηματίζουν το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο που αποτελείται από s^k κόμβους.

Παιχνιδότοπος

1. Ένας συστραμμένος δακτύλιος.

2. Δύο συνδεδεμένους, συστραμμένους δακτυλίους.

3.(α) Τρεις διαπλεκόμενοι δακτύλιοι, (β) μια αλυσίδα τριών δακτυλίων.

4. Δύο συνδεδεμένοι δακτύλιοι —ένας μικρός και ένας μεγάλος, που κανείς τους δεν είναι συστραμμένος.

6. Μια αλυσίδα τριών δακτυλίων, κανείς τους συστραμμένος.

7. Μια αλυσίδα πέντε δακτυλίων. Αλλά αν αλλάξετε τις οδηγίες, ηθελημένα ή όχι, θα πάρετε κάποιες διαφορετικές διευθετήσεις δακτυλίων. Μερικές είναι ενδιαφέρουσες και χρήσιμες σε επόμενα πειράματα.

Μέση τιμή

1. Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα αυτές τις ιδιότητες βασιζόμενοι στον ορισμό της M και λίγες αλγεβρικές πράξεις.

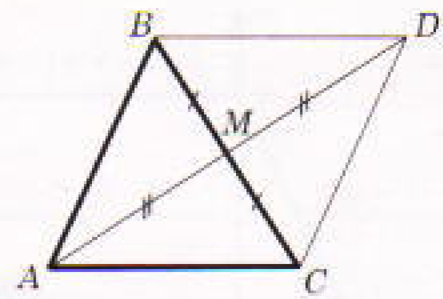
2. Για κάθε n, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$$

(για παράδειγμα, γράφοντας τα αναπτύγματα των $(x + y)2n$ και θέτωντας $x = y = 1$). Έτσι, ο αριθμός $2^{2n-1}/n$ είναι ο μέσος όρος όλων των διωνυμικών συντελεστών $\binom{2n}{k}$. Συγκρίνοντας το κλάσμα

$$\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{k+1}} = \frac{k+1}{2n-k}$$

με το 1, βρίσκουμε ότι $\binom{2n}{n}$ είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς τους συντελεστές, επειδή αυτό το κλάσμα είναι μικρότερο του 1 για $0 \le k \le n-1$ και μεγαλύτερο του 1 για $n \le k \le 2n$. Απομένει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 3.



Σχήμα 15

3. Έστω AM η διάμεσος ενός τριγώνου ABC. Από το Σχήμα 15 παίρνουμε $2AM = AD < AB + BD = AB + AC$.

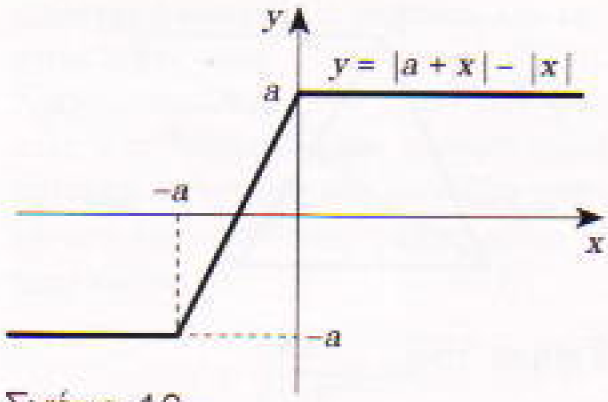
4. $M(g) = M(f) + M(g - f) \ge M(f)$, επειδή $g - f \ge 0$.

5. Αν κάποιος από τους αριθμούς a, b, c, d είναι 0, η απόδειξη είναι εύκολη (στην πραγματικότητα, η ανισότητα της πρότασης γίνεται ισότητα). Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι όλοι διαφορετικοί από το 0. Τότε, τουλάχιστον δύο από τους αριθμούς a, b, c —ας πούμε οι a και b— είναι ομόσημοι. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πρόσημό τους είναι θετικό (διαφορετικά, μπορούμε να αντιστρέψουμε τα πρόσημα όλων των αριθμών). Κάνοντας την αντικατάσταση $d = -(a + b + c)$, ξαναγράφουμε την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε ως $|c| + |a + b + c| \ge |b + c| + |a + c|$, ή

$$|a + (b + c)| - |b + c| \ge |a + c| - |c|.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |a + x| - |x|$. Αν σχεδιάσουμε το γράφημά της (Σχήμα 16), βλέπουμε ότι είναι αύξουσα. Αφού $b + c \ge c$, $f(b + c) \ge f(c)$. Αυτή όμως είναι ακριβώς η αναδιατυπωμένη ανισότητά μας.

6. Αν κατασκευάσουμε τις $\bar{f}$ και



Σχήμα 16

$\overline{g}$ όπως στην παράγραφο που προηγείται της διατύπωσης του προβλήματος, βρίσκουμε ότι το γράφημα της $\overline{g}$ είναι το μετατοπισμένο γράφημα μιας συνάρτησης με περίοδο 2π. Επομένως ισχύει το ίδιο επιχείρημα όπως αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο άρθρο για την ημιτονοειδή.

7. Θεωρούμε ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ της μοναδιαίας σφαίρας, και έστω $k = M(|u|)$. Τότε, για κάθε $\mathbf{p}$ ισχύει $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \cdot M(M(|v|))$, όπου $\mathbf{v}$ είναι το μοναδιαίο διάστημα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{p}$.

Όμως, $M(|v|) = M(|u|) = k$.

8. Η προβολή του δεδομένου πολυγώνου στην ευθεία ℓ_a είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα I. Κάθε κάθετη στο I από ένα εσωτερικό του σημείο συναντάει το σύνορο του πολυγώνου δύο ακριβώς φορές (επειδή το πολύγωνο είναι κυρτό). Έτσι το διάστημα I θα καλυφθεί δύο ακριβώς φορές από τις προβολές των πλευρών του πολυγώνου σε κάθε του σημείο, πράγμα που σημαίνει ότι ισούται με το ημιάθροισμα των μηκών των προβολών όλων των πλευρών.

9. Αν το διάστημα I είναι προβολή του πολυγώνου (δείτε την προηγούμενη λύση), τότε τα άκρα του I είναι προβολές συγκεκριμένων κορυφών. Άρα το I είναι η προβολή μιας πλευράς ή μιας διαγωνίου, και το μήκος του είναι μικρότερο ή ίσο του d. Με άλλα λόγια $W(a) \le d$ για κάθε a, $M(W) \le d$· άρα η περίμετρος, που ισούται με $\pi M(W)$, δεν υπερβαίνει το πd.

10. Η τιμή του $\int_0^{2\pi} g(\varphi - a)\mathrm{d}a$ δεν εξαρτάται από το φ (δείτε τη λύση 6), και για $\varphi = \pi/2$ παίρνει τη μορφή $\int_0^{\pi} \text{ημ}a\mathrm{d}a = 2$. Η τιμή αυτού του ολοκληρώματος είναι 2.

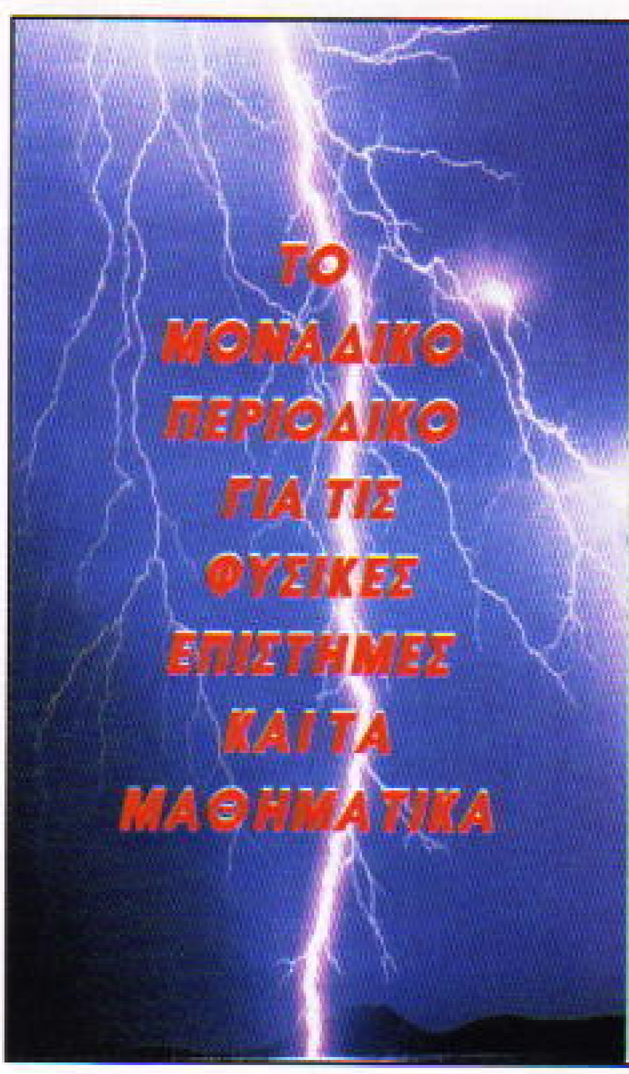
11. Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{a} \to a(\mathbf{a})$, όπου $a(\mathbf{a})$ είναι η ψευδοπροβολή του $\mathbf{a}$ στο a (όπως και στο κείμενο). Η μέση τιμή αυτής της συνάρτησης είναι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathbf{a}| g(\varphi - a)\mathrm{d}a = \frac{|\mathbf{a}|}{\pi}.$$

Τώρα, η συνάρτηση f είναι το άθροισμα των συναρτήσεων $a(\mathbf{a}_i)$ για τα δεδομένα διανύσματά μας. Το συμπέρασμα έπεται από την ιδιότητα 1′ και από το γεγονός ότι τα μήκη των δεδομένων διανυσμάτων έχουν άθροισμα 1.

12. Το εν λόγω άθροισμα είναι συνεχής συνάρτηση του a, $0 \le a \le 2\pi$. Επομένως παίρνει μια μέγιστη τιμή S (αυτό αποδεικνύεται στα μαθήματα του απειροστικού λογισμού, αλλά δεν είναι δύσκολο να το μαντέψουμε και χωρίς τυπική απόδειξη). Αλλά το S είναι μεγαλύτερο ή ίσο της μέσης τιμής αυτής της συνάρτησης, η οποία, όπως γνωρίζουμε από την άσκηση 11, ισούται με $1/\pi$.

13. Επιλέγουμε τον άξονα ℓ_a της άσκησης 12 και όλα τα διανύσματα $\mathbf{a}_i$ που σχηματίζουν οξείες γωνίες με τον ℓ_a. Η συνισταμένη τους είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προβολή της στον ℓ_a, που ισούται με το άθροισμα των προβολών τους στον ℓ_a δηλαδή με το άθροισμα των ψευδοπροβολών *όλων* των διανυσμάτων $\mathbf{a}_i$ στον ℓ_a. Από την επιλογή του ℓ_a έπεται ότι το μήκος της συνισταμένης είναι τουλάχιστον $1/\pi$.



QUANTUM

Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής
και χαρίστε το *Quantum* στον εαυτό σας,
στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας,
στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και
με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).
Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη·
η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Περιοδικό *Quantum*, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα.
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

Πρακτική τοπολογία

Η ταινία του Möbius και συνδεδεμένοι δακτύλιοι

Boris Kordemsky

Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙδιού, όπως αυτά που φοράμε στα δάκτυλά μας, έχει δύο πλευρές (Σχήμα 1). Η μια πλευρά ακουμπά το δάκτυλο, η άλλη βλέπει προς τα έξω. Οι πλευρές αυτές έχουν δύο σύνορα (δηλαδή, δύο ακμές) που είναι κύκλοι. Αν ένα μυρμήγκι αποφασίσει να ταξιδέψει από την εξωτερική πλευρά στην εσωτερική πρέπει αναπόφευκτα να διασχίσει ένα από τα σύνορα.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα απλό μοντέλο με τελείως διαφορετικές ιδιότητες —μια μονόπλευρη επιφάνεια (Σχήμα 2) αντί της δακτυλιοειδούς δίπλευρης επιφάνειας που περιγράψαμε. Ο πρώτος που περιέγραψε αυτή την επιφάνεια ήταν ο August Ferdinand Möbius (το 1863). Κάντε μισή περιστροφή της μιας άκρης μιας ορθογώνιας χάρτινης λωρίδας και κολλήστε τη με την άλλη της άκρη. Θα πάρετε το μοντέλο μιας επιφάνειας που δεν έχει δύο πλευρές («εσωτερική» και «εξωτερική»). Και έτσι —τόσο απλά— δημιουργήσατε μια ταινία του Möbius.

Για να πειστείτε ότι η ταινία του Möbius έχει μία μόνο πλευρά, πάρτε ένα μολύβι και σχεδιάστε μια γραμμή πάνω στην ταινία χωρίς να σηκώσετε τη μύτη του από την επιφάνεια και χωρίς να διασχίσετε την ακμή της ταινίας. Όταν επιστρέψετε στο αρχικό σημείο θα διαπιστώσετε ότι η ευθεία διασχίζει ολόκληρη την επιφάνεια της ταινίας παρότι δεν διασχίσατε ποτέ τη γραμμή που χωρίζει φαινομενικά τις «δύο πλευρές».

Πάρτε τώρα λίγα φύλλα χαρτιού (το χαρτί εφημερίδας είναι ό,τι πρέπει), κολλητική ταινία, ή κόλλα, και ψαλίδι. Είναι καιρός να κάνουμε μερικές πρακτικές ασκήσεις με την ταινία του Möbius και με άλλα μοντέλα που μπορούμε να κατασκευάσουμε με ορθογώνιες ταινίες χαρτιού.

Ας αρχίσουμε με δύο μάλλον γνωστότατα τεχνάσματα.

Πείραμα 1. Τι θα προκύψει αν κόψετε έναν συνηθισμένο χάρτινο δακτύλιο (που δεν έχει περιστραφεί) κατά μήκος της διαμέσου του; Προφανώς δύο στενότεροι δακτύλιοι που έχουν την ίδια περίμετρο με τον αρχικό. Αλλά αν κόψετε μια ταινία του Möbius κατά μήκος της διαμέσου της, θα προκύψει________.

Κάντε το και δείτε τι συμβαίνει!

Πείραμα 2. Κατασκευάστε άλλη μία ταινία του Möbius, με αρκετό πλάτος αυτή τη φορά, και κόψτε τη με το ψαλίδι κατά μήκος μιας ευθείας που βρίσκεται στο 1/3 της απόστασης μεταξύ των δύο (φαινομενικών) ακμών. Θα δημιουργήσετε________.

Θα πάρετε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα αν, πριν κολλήσετε τα άκρα της ταινίας για να σχηματίσετε τον δακτύλιο, περιστρέψετε το ένα κατά 360° και μετά κόψετε το μοντέλο κατά μήκος της διαμέσου του.

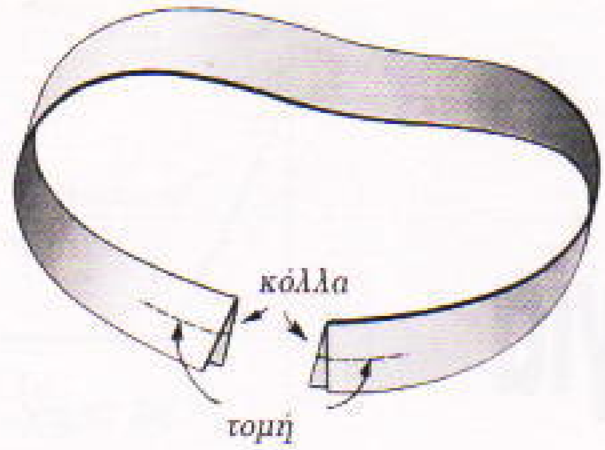
Ας περάσουμε τώρα σε πιο προχωρημένη χαρτοχειρουργική.

Πείραμα 3. Κόψτε τα άκρα της ταινίας όπως βλέπετε στο Σχήμα 3. (α) Κολλήστε μεταξύ τους τα *A* και *D*. Περάστε το *B* κάτω από το *A*, και το *E* πάνω από το *D*· κολλήστε τα *B* και *E* μεταξύ τους. Περάστε τώρα το *C* κάτω από το *B* και πάνω από το *A*. Περάστε το *F* πάνω από το *E* και

Σχήμα 1

Σχήμα 2

Σχήμα 3



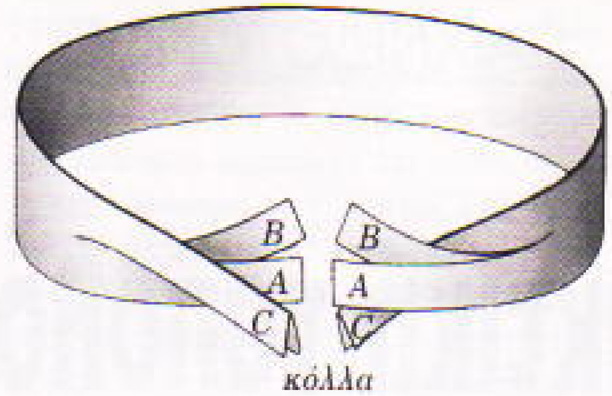
Σχήμα 4

κάτω από το D (προσέξτε ότι αντιμετωπίζουμε τα C και F λίγο διαφορετικά). Κολλήστε μαζί τα C και F. Όλα τα κολλήματα πρέπει να γίνουν κατευθείαν, χωρίς να στρίψετε καμία άκρη. Συνεχίστε τώρα τις τομές κατά μήκος όλης της λωρίδας. Θα προκύψει _______. (β) Κολλήστε μεταξύ τους τα A και D. Περάστε το B κάτω από το A και το E πάνω από το D, και κολλήστε τα B και E μεταξύ τους. Περάστε το F πάνω από το E και κάτω από το D, αλλά αυτή τη φορά κολλήστε το κατευθείαν με το C, χωρίς να κάνετε τίποτα με το C. Όπως και προηγουμένως, κολλήστε όλες τις άκρες κατευθείαν, χωρίς να στρίψετε καμία άκρη. Τότε, και αφού ολοκληρώσετε τις τομές, θα προκύψει _______.

Πείραμα 4. Προετοιμάστε μια ακόμα ταινία με κομμένα τα άκρα της όπως πριν (Σχήμα 3). Κάντε μισή περιστροφή του άκρου E (απομακρύνοντας την πάνω του πλευρά από σας) και κολλήστε το με το C. Κάντε μισή περιστροφή του άκρου F με τον ίδιο τρόπο και κολλήστε το με το B. Περάστε το A κάτω από το B και κολλήστε το με το D χωρίς να το περιστρέψετε. Συνεχίστε τώρα τις τομές κατά μήκος του μοντέλου ώστε να προκύψει _______.

Πείραμα 5. (Μια ιδέα των M. Brooke και J. Madachy.) Θεωρήστε το εξής περίεργο πρόβλημα: κατασκευάστε με χάρτινη ταινία ένα μοντέλο

Σχήμα 5



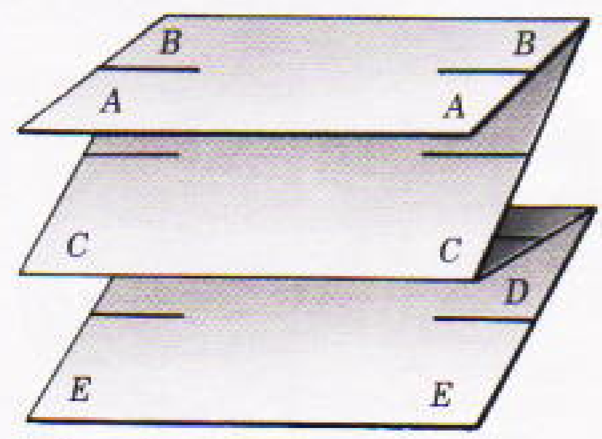
Σχήμα 6

από το οποίο μπορεί να προκύψουν n συνδεδεμένοι δακτύλιοι (δηλαδή, μια συνηθισμένη αλυσίδα) μέσω μιας μοναδικής συνεχούς κλειστής τομής.

Εδώ το μυστικό είναι, πριν από το κόψιμο, να διπλώσετε κατά μήκος την ταινία και να κόψετε και να κολλήσετε τα άκρα της διπλωμένης ταινίας με ειδικό τρόπο.

Αρχίζουμε με μια ταινία που την έχουμε διπλώσει στη μέση μία φορά (Σχήμα 4). Περιστρέψτε πλήρως (κατά 360°) το ένα άκρο και κολλήστε τα άκρα μεταξύ τους, την κάθε τσάκιση με την απέναντί της. Έπειτα κόψτε αυτή τη διπλή ταινία κατά μήκος της διαμέσου της: το αποτέλεσμα είναι τρεις συστραμμένοι ενωμένοι δακτύλιοι (κάθε δύο δακτύλιοι είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους).

Πείραμα 6. Διπλώνουμε την ταινία και κόβουμε τα άκρα της με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 5. (Η ταινία φαίνεται πιο κοντή για να είναι ευδιάκριτο το σχήμα, αλλά στην πραγματικότητα πρέπει να έχει το μήκος της ταινίας του Σχήματος 4.) Χωρίς να περιστρέψετε τα άκρα, κολλήστε τα με τον τρόπο του Σχήματος 6. Παρατηρήστε ότι το B παραμένει πίσω από το A και ότι το C στο αριστερό άκρο περνάει πάνω και από τα δύο, ενώ στο δεξί, περνάει από κάτω τους. Συνεχίστε την τομή γύρω από ολόκληρη τη διπλή ταινία. Αν κάνετε την κατασκευή ακριβώς όπως σας είπα, θα προκύψει _______.



Σχήμα 7

Πείραμα 7. Για να δημιουργήσετε μια αλυσίδα δακτυλίων κάνοντας μία μοναδική κλειστή τομή, πάρτε μια αρκετά μεγάλη ταινία χαρτί και διπλώστε την έτσι ώστε να θυμίζει ακορντεόν (Σχήμα 7 —και πάλι η ταινία σχεδιάστηκε μικρότερη). Κόψτε τα άκρα με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 7, σχηματίστε ένα δακτύλιο με τη διπλωμένη ταινία και ενώστε μεταξύ τους τα άκρα που έχουν την ίδια ονομασία με την εξής σειρά: τα άκρα C, D, E κατευθείαν (χωρίς να τα στρίψετε), τα άκρα B αφού πρώτα περάσετε το ένα από αυτά κάτω από τους δακτύλιους CC και DD, και τα άκρα A αφού πρώτα περάσετε το ένα από αυτά κάτω από τους δακτύλιους CC και EE. Ολοκληρώστε τώρα την τομή σε όλες τις διπλώσεις της ταινίας και θα προκύψει _______.

Οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα και πειράματα δίνονται στη στήλη των απαντήσεων του περιοδικού. Δεν θέλω όμως να δώσω υποδείξεις για τα επόμενα έξι πειράματα. Πρέπει να βρείτε μόνοι σας τον τρόπο αντιμετώπισής τους. Θέτω απλώς έναν όρο: πρέπει να τα καταφέρετε με μία μόνο τομή καθ' όλο το μήκος του μοντέλου, που θα είναι κατασκευασμένο από μια προδιπλωμένη χάρτινη ταινία τα άκρα της οποίας θα έχουν χωριστεί, πλεχτεί και κολληθεί με τον κατάλληλο τρόπο.

Πειράματα

8. Κατασκευάστε μια αλυσίδα τεσσάρων δακτυλίων.

9. Κατασκευάστε δύο χωριστές αλυσίδες δύο και τριών δακτυλίων.

10. Κατασκευάστε μια αλυσίδα τριών δακτυλίων με έναν τέταρτο δακτύλιο κρεμασμένο από τον μεσαίο δακτύλιο της αλυσίδας.

11. Κατασκευάστε μια αλυσίδα εννέα δακτυλίων.

12. Κατασκευάστε τρεις αλυσίδες, των τριών δακτυλίων καθεμιά (από μία μοναδική ταινία χαρτί!).

13. Κατασκευάστε δύο χωριστές αλυσίδες —η μια με τέσσερις δακτύλιους και η άλλη με πέντε (από μία μοναδική ταινία χαρτί).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

ΣΕΙΡΑ: ΑΥΘΕΝΤΙΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

John Barrow
Πανεπιστήμιο του Σάσσεξ
Η ΑΠΑΡΧΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ
Περιήγηση στη μοντέρνα κοσμολογία

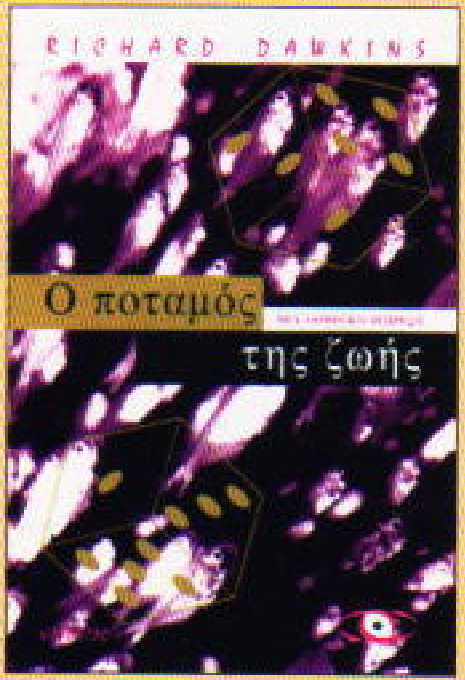
Ο διακεκριμένος αστρονόμος περιγράφει πώς οι ερευνητές, μελετώντας την πρώιμη ιστορία του σύμπαντος και τη δομή του όπως παρατηρείται σήμερα, πέτυχαν μια πληρέστερη κατανόηση των οντοτήτων που το αποτελούν —από τα στοιχειώδη σωματίδια ώς τα μεγάλα γαλαξιακά σμήνη. Εξηγεί τι σημαίνει ότι ο χρόνος έχει μία αρχή. Γιατί οι επιστήμονες υποψιάζονται ότι υπάρχουν κι άλλες διαστάσεις στο σύμπαν. Τι είναι οι κοσμικές σήραγγες. Τι λέει η φυσική για τη «δημιουργία από το τίποτε». Γιατί η ίδια η ύπαρξή μας συνδέεται με την αρχή και τη δομή του σύμπαντος, με τρόπους που δεν υποψιαζόμαστε. Ο συγγραφέας, που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή έρευνας των παραπάνω θεμάτων, μας προσφέρει τις πιο σύγχρονες απόψεις της μοντέρνας κοσμολογίας.

Σελ.: 176, Εικ.: Α/Μ, 14×21 εκ., 3.500 δρχ.

Richard Dawkins
Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης
Ο ΠΟΤΑΜΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ
Μια δαρβινική προσέγγιση

Ο διακεκριμένος βιολόγος, γράφοντας με χαρακτηριστική ευχέρεια, επιχειρεί να λύσει το μυστήριο της προέλευσης της ζωής. Αναλύει τη θεωρία της Αφρικανής Εύας, περιγράφει και αποσαφηνίζει πολύπλοκα φαινόμενα του έμβιου κόσμου, προσπαθεί να απαντήσει σε καίρια ερωτήματα, όπως: Ποιος ήταν ο πιο πρόσφατος κοινός πρόγονος όλων των ανθρώπων; Πώς εξελίσσονται οι πολύπλοκοι μηχανισμοί των έμβιων όντων; Γιατί κληρονομούμε γονίδια που προκαλούν θανατηφόρες ασθένειες; Ποια είναι η κατεύθυνση της εξέλιξης; Περιγράφει τις προσπάθειες των επιστημόνων να ερμηνεύσουν τη ζωή και επισημαίνει πόσο συχνά μας παραπλανούν οι μύθοι για την προέλευσή μας, και μας προσφέρει ένα συναρπαστικό και προκλητικό κείμενο, το οποίο αποτελεί υπόδειγμα επιστημονικού συλλογισμού.

Σελ.: 208, Εικ.: Α/Μ, 14×21 εκ., 4.000 δρχ.



ΚΟΡΥΦΑΙΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΜΕΓΑΛΟ ΦΑΣΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΤΟΜΕΩΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΥΡΥ ΚΟΙΝΟ, ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΜΙΑ ΣΕΙΡΑ ΜΙΚΡΩΝ ΚΑΙ ΕΛΚΥΣΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ, ΤΟ ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥΣ, ΤΙΣ ΙΔΕΕΣ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ, ΤΙΣ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΤΟΛΗ ΤΟΥ 21ΟΥ ΑΙΩΝΑ. Η ΣΕΙΡΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΧΕΔΟΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΣΕ 55 ΧΩΡΕΣ ΤΟΥ ΠΛΑΝΗΤΗ ΜΑΣ: ΑΠΟ ΤΙΣ ΧΩΡΕΣ ΤΗΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗΣ ΕΝΩΣΗΣ, ΤΟΝ ΚΑΝΑΔΑ, ΤΗΝ ΙΑΠΩΝΙΑ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΒΡΑΖΙΛΙΑ, ΤΗΝ ΚΙΝΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ.

- *«ΑΝΤΙΛΑΜΒΑΝΟΜΑΙ ΑΥΤΗ ΤΗ ΣΕΙΡΑ ΣΑΝ ΜΙΑ ΣΠΟΡΑ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΟ ΤΟΝ ΠΛΑΝΗΤΗ ΜΑΣ. Η ΣΥΓΚΟΜΙΔΗ ΘΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΟΜΕΝΗ ΓΕΝΙΑ ΔΙΑΝΟΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΩΝ.»*

—DANIEL DENNETT

ΕΚΔΟΣΕΙΣ *κάτοπτρο*