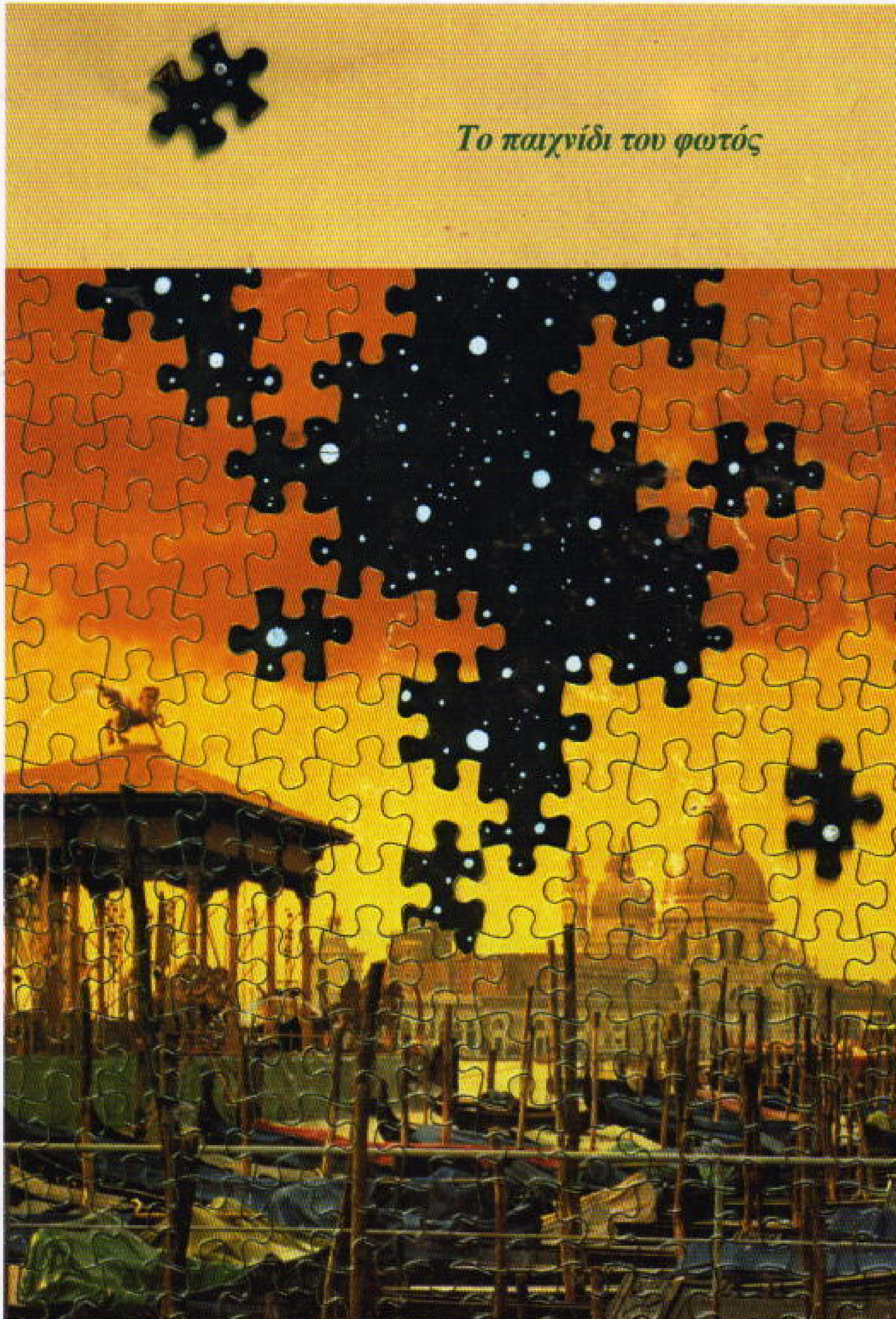
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1996
ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 4
1.500 ΔΡΧ.



- *Συνέντευξη με τον Ilya Prigogine*
- *Η πολυτάραχη ζωή του Évariste Galois*
- *Πρόσκληση για σάουνα*
- *Διερευνώντας την τριτοβάθμια*
- *Τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη;*
- *Η αντίσταση στα ρευστά*
- *Οι ανεξάντλητες δυνατότητες ενός γεωμετρικού διαμαντιού*
- *Η φυσική στον Τύπο*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ Ω

Δωρεά του Avalon Foundation © *1996 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον*

Φθινόπωρο στον ποταμό Χάντσον (1860) του Jasper Francis Cropsey

ΜΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ JASPER CROPSEY (1823-1900) επανεμφανίζεται στην πινακοθήκη του *Quantum* η «σχολή ζωγραφικής του ποταμού Χάντσον». Οι αναγνώστες ίσως θυμούνται τον πίνακα του Thomas Cole που δημοσιεύτηκε στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1996, στον οποίο εικονίζονταν σύννεφα να συσσωρεύονται από τη μία πλευρά μιας βουνοκορφής κοντά στη χαράδρα Κρώφορντ στο Νιου Χάμσαϊρ.

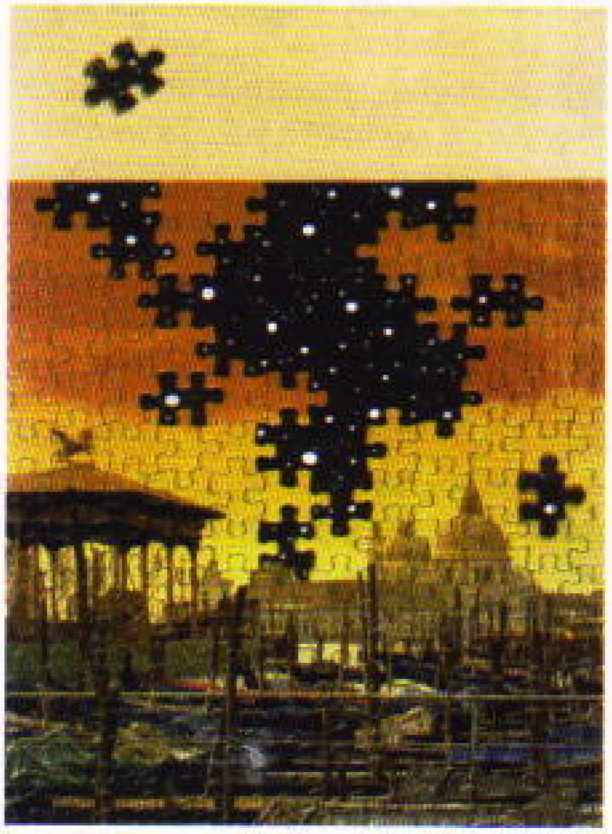
Μερικοί θεωρούν τον Cropsey ως τον μεγαλύτερο κολοριστή της σχολής του ποταμού Χάντσον, και ο παραπάνω πίνακας ενισχύει αυτή την άποψη. Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση του Coley, ο Cropsey πήρε μια θέση στην πινακοθήκη μας χάρη σ' ένα μετεωρολογικό φαινόμενο. Όλοι έχουμε δει πώς το φως περνάει ανάμεσα από τα σύννεφα και απλώνεται σαν βεντάλια το ηλιοβασίλεμα. Το θέαμα παραμένει μαγευτικό, όσο κι αν το έχουν κακοποιήσει κάποιοι λιγότερο ταλαντούχοι ζωγράφοι. Το έχουμε δει όμως τόσες φορές, ώστε μας φαίνεται εντελώς φυσιολογικό. Ωστόσο, αν το *σκεφτούμε* λίγο... αν έχουμε κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις φυσικής... μπορεί να μας δημιουργήσει κάποια σύγχυση ο τρόπος με τον οποίο συμπεριφέρονται οι φωτεινές ακτίνες.

Αυτή η σύγχυση αναλύεται λεπτομερέστερα στην Ερώτηση 17 του «Καλειδοσκοπίου» (σελ. 36).

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova

Από κάποια άποψη, το εξώφυλλο του παρόντος τεύχους θα μπορούσε να είναι εξώφυλλο κάθε τεύχους του *Quantum*. Δεν βρίσκετε πάντοτε στο περιοδικό θέματα που σας προκαλούν αμηχανία; Δεν είναι μερικές φορές εκπληκτικό το συμπέρασμα που προκύπτει στο τέλος ενός άρθρου ή ενός προβλήματος; Δεν υπάρχουν συχνά κενά τα οποία εσείς πρέπει να συμπληρώσετε σκεπτόμενοι; Δεν είναι άραγε το *Quantum* προκλητικό, ευχάριστο, απαιτητικό και απολαυστικό σαν ένα παζλ;

Βέβαια, το εξώφυλλό μας είναι εμπνευσμένο, ως συνήθως, από ένα ειδικότερο θέμα. Παραπέμπει σ' ένα αφελές —όχι και τόσο, όπως θα διαπιστώσετε— ερώτημά μας: Τι θα συνέβαινε αν η ταχύτητα του φωτός ήταν παντού η ίδια; Στο άρθρο της σελίδας 14, οι Dmitry Tarasov και Lev Tarasov φιλοτεχνούν την εικόνα ενός φανταστικού κόσμου όπου το φως κινείται σε οποιοδήποτε διαφανές μέσο με την ταχύτητα την οποία έχει στο κενό. Διαβάστε το· θα ανακαλύψετε έναν παράξενο τόπο!

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη;

«Non est mundus factus in tempore, sed cum tempore.»
—Άγιος Αυγουστίνος, Η πολιτεία του Θεού, *11, 6*

ΛΟΙΠΟΝ, ΤΙ ΣΥΝΕΒΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙ πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη; Τα περισσότερα παιδιά σχολικής ηλικίας κάνουν τους γύρω τους να σαστίζουν όταν θέτουν τέτοια ερωτήματα. Συνήθως αρχίζουν με απορίες σχετικά με το αν ο χώρος «είναι απέραντος», ή ποια είναι η προέλευση των ανθρώπων, ή πώς σχηματίστηκε ο πλανήτης Γη. Στο τέλος, η σειρά των ερωτήσεων φαίνεται να επιστρέφει πάντοτε στην απαρχή των πραγμάτων: τη Μεγάλη Έκρηξη. «Αλλά, *τι* την προκάλεσε;»

Τα παιδιά μεγαλώνουν με μια διαισθητική αντίληψη περί αιτίου και αποτελέσματος. Δεν είναι δυνατόν τα γεγονότα στον φυσικό κόσμο «απλώς να συμβαίνουν». Κάτι προκαλεί την πραγμάτωσή τους. Ακόμη κι όταν ο ταχυδακτυλουργός βγάζει με πειστικό τρόπο ένα λαγό από το καπέλο του, υποψιαζόμαστε ότι υπάρχει κάποιο τέχνασμα. Επομένως, θα μπορούσε άραγε ολόκληρο το σύμπαν απλά να παρουσιαστεί ξαφνικά, ως διά μαγείας, χωρίς κανέναν απολύτως ουσιαστικό λόγο;

Αυτές οι απλές απορίες της σχολικής ηλικίας έχουν βασανίσει άπειρες γενιές φιλοσόφων, επιστημόνων και θεολόγων. Πολλοί αντιπαρήλθαν το θέμα ως ένα ανεξιχνίαστο μυστήριο. Άλλοι προσπάθησαν να το απαλείψουν. Οι περισσότεροι όμως κατέληγαν σε μια φοβερή αμηχανία απλώς και μόνο που το σκέφτονταν.

Στην απλούστερη μορφή του, το πρόβλημα είναι το ακόλουθο: Εάν τίποτε δεν συμβαίνει χωρίς αιτία, τότε *κάτι* πρέπει να προκάλεσε και την εμφάνιση του σύμπαντος. Ωστόσο, τότε αντιμετωπίζουμε το αναπόφευκτο ερώτημα τι προκάλεσε αυτό *το κάτι* κ.ο.κ., σε μια επ' άπειρον αναδρομή. Οριομένοι διακηρύσσουν απλά ότι ο Θεός δημιούργησε το σύμπαν, αλλά τα παιδιά θέλουν πάντοτε να γνωρίζουν ποιος δημιούργησε τον Θεό, και *τούτη* η σειρά ερωτημάτων γίνεται δυσάρεστα ακανθώδης.

Ένας τακτικός ελιγμός συνίσταται στο να ισχυριστούμε ότι το σύμπαν *δεν* είχε αρχή, ότι υπάρχει αιώνια. Δυστυχώς, αυτή η φαινομενικά εύλογη ιδέα αποδεικνύεται εσφαλμένη, για πολλούς επιστημονικούς λόγους. Πρέπει να επισημάνουμε ότι, αν υπάρχει άπειρη ποσότητα χρόνου, τότε οτιδήποτε μπορεί να συμβεί θα έχει ήδη συμβεί, αφού, εάν είναι πιθανό να συμβεί μια φυσική διεργασία με μια συγκεκριμένη μη μηδενική πιθανότητα —οσοδήποτε μικρή—, τότε, εφόσον υπάρχει άπειρη ποσότητα χρόνου, η διεργασία *πρέπει* να πραγματοποιηθεί, με πιθανότητα ίση με τη μονάδα. Μέχρι σήμερα, το σύμπαν θα έπρεπε να έχει καταλήξει σε κάποιο είδος τελικής κατάστασης, προς την οποία έχουν εξελιχθεί όλες οι δυνατές φυσικές διεργασίες. Επιπλέον, δεν *εξηγούμε* την ύπαρξη του σύμπαντος υποστηρίζοντας ότι αυτό υπήρχε ανέκαθεν. Κάτι τέτοιο είναι μάλλον σαν να λέμε ότι ουδείς συνέγραψε την Αγία Γραφή: απλώς αντιγράφηκε από παλαιότερες εκδόσεις. Πέρα από όλα αυτά, υπάρχουν πολύ πειστικές ενδείξεις ότι το σύμπαν *πράγματι* εμφανίστηκε με μια Μεγάλη Έκρηξη, πριν από δεκαπέντε δισεκατομμύρια χρόνια περίπου. Τα αποτελέσματα αυτής της αρχέγονης έκρηξης είναι σαφώς ανιχνεύσιμα σήμερα —στο γεγονός ότι το σύμπαν συνεχίζει να διαστέλλεται, και είναι γεμάτο από μια μεταλαμπή θερμικής ακτινοβολίας.

Ερχόμαστε λοιπόν αντιμέτωποι με το πρόβλημα του τι συνέβη πρωτύτερα ώστε να προκληθεί η Μεγάλη Έκρηξη. Οι δημοσιογράφοι αρέσκονται να θέτουν αυτό το ερώτημα με σαρκαστική διάθεση στους επιστήμονες, όταν οι τελευταίοι διαμαρτύρονται για τα χρηματικά ποσά που διατίθενται για την επιστημονική έρευνα. Ουσιαστικά, η απάντηση (κατά τη γνώμη μου) έχει δοθεί προ πολλού, από κάποιον Αυγουστίνο της Ιππώνος, έναν άγιο της Χριστιανικής Εκκλησίας που έζησε τον 5ο αιώνα. Εκείνες τις προεπιστημονικές εποχές, η κοσμολογία ήταν κλάδος της θεολογίας, και ο σαρκασμός δεν προερχόταν από δημοσιογράφους αλλά από ειδωλολάτρες: «Τι έκανε ο Θεός πριν δημιουργήσει το σύμπαν;», ρωτούσαν. «Έφτιαχνε την Κόλαση για κάτι σαν κι εσάς!», ήταν η καθιερωμένη απάντηση.

Ο Αυγουστίνος, όμως, ήταν πιο οξύνους. Το σύμπαν, ισχυρίστηκε, «δεν δημιουργήθηκε *εν* χρόνω (in tempore), αλλά *μετά του* χρόνου (cum tempore)».

Με άλλα λόγια, η απαρχή του σύμπαντος —αυτό που σήμερα ονομάζουμε Μεγάλη Έκρηξη— δεν ήταν απλά η ξαφνική εμφάνιση της ύλης σ' ένα αιώνια προϋπάρχον κενό, αλλά η γέννηση του ίδιου του χρόνου. Ο χρόνος *άρχισε* μαζί με το σύμπαν. Δεν υπήρχε «πριν», δεν υπήρχε κάποιος ατέλειωτος ωκεανός χρόνου για έναν θεό, ή για μια φυσική διεργασία, ώστε να σπαταληθεί σε μια προετοιμασία άπειρης διάρκειας.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η σύγχρονη επιστήμη έχει καταλήξει, λίγο ώς πολύ, στο ίδιο συμπέρασμα με τον Αυγουστίνο, βασιζόμενη σε ό,τι γνωρίζουμε σήμερα σχετικά με τη φύση του χώρου, του χρόνου και της βαρύτητας. Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν ήταν αυτός που μας δίδαξε ότι ο χρόνος και ο χώρος δεν αποτελούν απλώς μια αμετάβλητη σκηνή στην οποία εκτυλίσσεται το μεγάλο κοσμικό δράμα, αλλά έχουν και αυτοί το ρόλο τους —συμμετέχουν στο φυσικό σύμπαν. Ως φυσικές οντότητες, ο χρόνος και ο χώρος μπορούν να μεταβάλλονται —να υφίστανται παραμορφώσεις— εξαιτίας βαρυτικών διεργασιών. Η θεωρία της βαρύτητας προβλέπει ότι υπό τις ακραίες συνθήκες οι οποίες κυριαρχούσαν στο πρώιμο σύμπαν ο χώρος και ο χρόνος μπορεί να ήταν τόσο παραμορφωμένοι, ώστε να υπήρχε ένα σύνορο, ή «ανωμαλία», στην οποία η παραμόρφωση του χωρόχρονου ήταν άπειρη, και συνεπώς ήταν αδύνατη η «προέκταση» του χώρου και του χρόνου πέρα από αυτήν. Έτσι, η φυσική προβλέπει ότι ο χρόνος είναι πράγματι «φραγμένος» προς το παρελθόν, όπως ισχυρίστηκε ο Αυγουστίνος. Ο χρόνος δεν εκτείνεται σ' ένα αιώνιο παρελθόν.

Εάν η Μεγάλη Έκρηξη ήταν η αρχή του ίδιου του χρόνου, τότε κάθε συζήτηση περί του τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη, ή περί του τι την προκάλεσε —με τη συνήθη έννοια της φυσικής αιτιότητας— απλώς δεν έχει νόημα. Βέβαια, πολλά παιδιά, αλλά και ενήλικοι, θεωρούν ανεπαρκή αυτή την απάντηση. Αντιτείνουν ότι πρέπει να υπάρχει κάτι περισσότερο από αυτό.

Πράγματι, υπάρχει. Άλλωστε, *γιατί* θα έπρεπε ο χρόνος ξαφνικά να αρχίσει να κυλάει; Πώς μπορεί να εξηγηθεί ένα τόσο μοναδικό γεγονός; Μέχρι πρόσφατα, φαινόταν ότι κάθε εξήγηση της αρχικής «ανωμαλίας», η οποία αποτέλεσε την αρχή του χρόνου, θα έπρεπε να υπερβαίνει τα όρια της επιστήμης. Εντούτοις, όλα εξαρτώνται από το τι εννοούμε όταν λέμε «εξήγηση». Όπως προανέφερα, όλα τα παιδιά αντιλαμβάνονται αρκετά καλά την έννοια του αιτίου και του αποτελέσματος, και συνήθως η εξήγηση ενός γεγονότος συνεπάγεται την ανεύρεση κάποιου πράγματος που το προκάλεσε. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν φυσικά γεγονότα τα οποία *δεν* έχουν καλά ορισμένα αίτια, με τη συνήθη έννοια. Τα γεγονότα αυτά ανήκουν σ' έναν παράξενο κλάδο της επιστημονικής έρευνας ο οποίος ονομάζεται κβαντική φυσική.

Τα κβαντικά γεγονότα συμβαίνουν κυρίως στο ατομικό επίπεδο. Δεν τα αντιλαμβανόμαστε με την άμεση εμπειρία της καθημερινής ζωής. Στην κλίμακα των ατόμων και των μορίων, καταργούνται οι συνήθεις κανόνες της κοινής λογικής περί αιτίου και αποτελέσματος. Ο κανόνας του νόμου αντικαθίσταται από ένα είδος αναρχίας ή χάους, και τα πράγματα συμβαίνουν *αυθόρμητα* —χωρίς ιδιαίτερο λόγο. Σωματίδια ύλης μπορούν απλά να εμφανιστούν ξαφνικά και απροειδοποίητα, και κατόπιν να εξαφανιστούν το ίδιο αιφνιδιαστικά. Επίσης, κάποιο σωματίδιο που βρίσκεται σ' ένα σημείο μπορεί ξαφνικά να «υλοποιηθεί» σ' ένα άλλο σημείο, ή να αντιστρέψει την κατεύθυνση της κίνησής του. Και πάλι, αυτά είναι πραγματικά φαινόμενα που συμβαίνουν σε ατομική κλίμακα και μπορούμε να τα παρατηρήσουμε μέσω πειραμάτων.

Μια χαρακτηριστική κβαντική διεργασία είναι η διάσπαση ενός ραδιενεργού πυρήνα. Εάν ρωτήσετε γιατί ένας δεδομένος πυρήνας διασπάται μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και όχι κάποια άλλη, δεν θα πάρετε απάντηση. Το γεγονός «απλώς συνέβη» εκείνη τη στιγμή· αυτό είναι όλο. Δεν μπορείτε να προβλέψετε αυτά τα συμβάντα. Το μόνο που μπορείτε να κάνετε είναι να προσδιορίσετε την πιθανότητα —υπάρχει ορισμένη πιθανότητα να διασπαστεί ένας δεδομένος πυρήνας, ας πούμε, σε μία ώρα. Αυτή η απροσδιοριστία δεν είναι απλώς αποτέλεσμα του γεγονότος ότι αγνοούμε όλες τις μικρές δυνάμεις και επιδράσεις που συντελούν στη διάσπαση του πυρήνα· είναι έμφυτη στην ίδια τη φύση, είναι ένα βασικό τμήμα της κβαντικής πραγματικότητας.

Το δίδαγμα της κβαντικής φυσικής είναι το εξής: Κάτι που «απλώς συμβαίνει», δεν είναι ουσιαστικά απαραίτητο να παραβιάζει τους νόμους της φυσικής. Η ξαφνική και απρόκλητη εμφάνιση κάποιου πράγματος μπορεί να συμβεί μέσα στο πλαίσιο του επιστημονικού νόμου, εφόσον λαμβάνονται υπόψη οι κβαντικοί νόμοι. Φαίνεται ότι η φύση χαρακτηρίζεται από γνήσιο αυθορμητισμό.

Βέβαια, η μετάβαση από την αυθόρμητη και απρόκλητη εμφάνιση ενός υποατομικού σωματιδίου —που είναι ένα γεγονός το οποίο παρατηρείται καθημερινά σε επιταχυντές σωματιδίων— στην αυθόρμητη και απρόκλητη εμφάνιση του σύμπαντος είναι ένα μεγάλο βήμα. Υπάρχει όμως ένα «παραθυράκι». Εάν, όπως πιστεύουν οι αστρονόμοι, το αρχέγονο σύμπαν ήταν συμπιεσμένο σε πολύ μικρό μέγεθος, τότε τα κβαντικά φαινόμενα πρέπει να ήταν κάποτε σημαντικά σε κοσμική κλίμακα. Παρά το γεγονός ότι δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα τι ακριβώς συνέβη κατά την έναρξη, μπορούμε τουλάχιστον να αντιληφθούμε ότι δεν είναι απαραίτητο η εμφάνιση του σύμπαντος από το τίποτε να είναι παράνομη ή αφύσικη ή ανεπιστημονική. Εν ολίγοις, δεν είναι απαραίτητο να πρόκειται για ένα υπερφυσικό γεγονός.

Αναπόφευκτα, οι επιστήμονες δεν ικανοποιούνται αφήνοντας τα πράγματα ως έχουν. Θα θέλαμε να ερευνήσουμε εξονυχιστικά τις λεπτομέρειες αυτής της βαθύτατης έννοιας. Υπάρχει μάλιστα ένας ολόκληρος τομέας που είναι αφιερωμένος σ' αυτήν και ονομάζεται κβαντική κοσμολογία. Δύο διάσημοι ειδικοί της κβαντικής κοσμολογίας, ο James Hartle και ο Stephen Hawking, είχαν μια έξυπνη ιδέα που ανάγεται στον Αϊνστάιν. Ο τελευταίος δεν ανακάλυψε μόνο ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελούν τμήμα του φυσικού σύμπαντος· διαπίστωσε επίσης ότι συνδέονται στενότατα μεταξύ τους. Ουσιαστικά, ο χώρος και ο χρόνος, αυτοί καθ' εαυτούς, δεν αποτελούν κατάλληλα ορισμένες έννοιες. Αντίθετα, πρέπει να εργαστούμε με ένα ενοποιημένο «χωροχρονικό» συνεχές. Ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις και ο χρόνος μία, άρα ο χωρόχρονος είναι ένα τετραδιάστατο συνεχές.

Ωστόσο, παρά τη σύνδεση του χώρου με το χρόνο, ο χώρος παραμένει χώρος και ο χρόνος παραμένει χρόνος σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις. Όποιες κι αν είναι οι παραμορφώσεις του χωρόχρονου τις οποίες μπορεί να προκαλέσει η βαρύτητα, ποτέ δεν μετατρέπουν το χώρο σε χρόνο ή το χρόνο σε χώρο. Εντούτοις, προκύπτει μια εξαίρεση όταν λαμβάνονται υπόψη τα κβαντικά φαινόμενα. Η κεφαλαιώδους σημασίας εγγενής απροσδιοριστία που διέπει τα κβαντικά συστήματα μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στο χωρόχρονο. Σ' αυτή την περίπτωση, η απροσδιοριστία μπορεί κάτω από ειδικές συνθήκες να επηρεάσει την *ταυτότητα* του χώρου και του χρόνου. Για ένα εξαιρετικά μικρό χρονικό διάστημα, είναι δυνατόν η ταυτότητα του χρόνου να συγχωνευτεί με την ταυτότητα του χώρου, και έτσι ο χρόνος να γίνει, ούτως ειπείν, χωροειδής —απλώς άλλη μία διάσταση του χώρου.

Η χωροποίηση του χρόνου δεν είναι κάτι που γίνεται αιφνίδια· είναι μια συνεχής διεργασία. Αν τη δούμε αντίστροφα, ως τη χρονοποίηση του χώρου (μίας διάστασής του), συνεπάγεται ότι ο χρόνος μπορεί να *αναδυθεί από το χώρο* μέσω μιας συνεχούς διεργασίας. (Όταν λέω «συνεχής», εννοώ ότι ο χρονοειδής χαρακτήρας μιας διάστασης, αντίθετα με τον χωροειδή χαρακτήρα της, δεν έχει τη μορφή τού «όλα ή τίποτα»· υπάρχουν και ενδιάμεσες αποχρώσεις. Αυτός ο αόριστος ισχυρισμός μπορεί να διατυπωθεί με αρκετή σαφήνεια κατά μαθηματικό τρόπο.)

Η ουσία της ιδέας των Hartle και Hawking είναι ότι η Μεγάλη Έκρηξη δεν αποτέλεσε την αιφνίδια έναρξη του χρόνου σε κάποια μοναδική πρώτη στιγμή, αλλά την ταχύτατη, πλην όμως συνεχή, ανάδυση του χρόνου από το χώρο. Σε ανθρώπινη χρονική κλίμακα, η Μεγάλη Έκρηξη

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

ήταν ουσιαστικά μια ξαφνική, εκρηκτική έναρξη του χώρου, του χρόνου και της ύλης. Αν όμως κοιτάξετε από πάρα πολύ κοντά εκείνο το ελάχιστο πρώτο κλάσμα του δευτερολέπτου, θα διαπιστώσετε ότι η έναρξη δεν ήταν καθόλου ακριβής ούτε ξαφνική. Άρα, έχουμε μια θεωρία για την προέλευση του σύμπαντος η οποία φαίνεται να μας λέει δύο αντιφατικά πράγματα: Πρώτον, ο χρόνος δεν υπήρχε πάντοτε, και, δεύτερον, δεν υπήρξε κάποια πρώτη στιγμή του χρόνου. Τέτοιες είναι οι παραδοξότητες της κβαντικής φυσικής.

Ακόμη κι όταν αναφέρονται οι παραπάνω λεπτομέρειες, πολλοί αισθάνονται εξαπατημένοι. Θέλουν να ρωτήσουν *γιατί* συνέβησαν αυτά τα παράξενα πράγματα, *γιατί* υπάρχει σύμπαν, και γιατί υπάρχει ειδικά *αυτό* το σύμπαν. Πιθανώς η επιστήμη αδυνατεί να απαντήσει σε τέτοια ερωτήματα. Η επιστήμη είναι ικανή να απαντάει στο πώς, αλλά δεν είναι και τόσο ικανή να απαντάει στο γιατί. Μπορεί να μην υπάρχει γιατί. Είναι πολύ ανθρώπινο το να αναρωτιέται κανείς γιατί, αλλά ίσως δεν υπάρχει απάντηση, με ανθρώπινους όρους, σε τόσο βαθιά υπαρξιακά ερωτήματα. Ή ίσως υπάρχει, αλλά εξετάζουμε το πρόβλημα με εσφαλμένο τρόπο.

Λοιπόν, δεν υποσχέθηκα να παράσχω τις απαντήσεις για τη ζωή, το σύμπαν, και τα πάντα, αλλά τουλάχιστον έδωσα μια εύλογη απάντηση στο ερώτημα με το οποίο άρχισα: Τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη;

Η απάντηση είναι: Τίποτε.

Paul Davies

Ο ***Paul Davies*** είναι θεωρητικός φυσικός και καθηγητής φιλοσοφίας της φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας. Έχει δημοσιεύσει περισσότερες από 100 ερευνητικές εργασίες στους τομείς της κοσμολογίας, της βαρύτητας, και της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Διευθύνει μια ερευνητική ομάδα που ασχολείται με την κβαντική βαρύτητα.

Ο Davies είναι πολύ γνωστός ως συγγραφέας και δημόσιος ομιλητής. Έχει γράψει περισσότερα από 20 βιβλία —από συγγράμματα για ειδικούς μέχρι εκλαϊκευτικά βιβλία για το ευρύ κοινό. Στην Ελλάδα έχουν μεταφραστεί τα βιβλία του *Υπερχορδές* (μαζί με τον J. Brown), *Θεός και μοντέρνα φυσική*, και *Τα τελευταία τρία λεπτά*, από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο, και *Το τυχαίο σύμπαν*, από τις Εκδόσεις Κωσταράκη.


D
M
P
Q
K
N

Διαδοχικές αποκαλύψεις

Εξερευνώντας τις ανεξάντλητες δυνατότητες ενός γεωμετρικού «διαμαντιού»

Vladimir Dubrovsky

ΜΙΑ ΜΕΡΑ, ΞΕΦΥΛΛΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ παλιό τεύχος του *Kvant*, βρήκα το εξής πρόβλημα (του V. Shafaryan): Από ένα σημείο *P* του περιγεγραμμένου κύκλου ενός ορθογωνίου φέρουμε δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Η μία τέμνει δύο πλευρές του ορθογωνίου στα σημεία *A* και *B*, ενώ η δεύτερη τέμνει τις προεκτάσεις των άλλων πλευρών στα σημεία *C* και *D*. Αποδείξτε ότι οι ευθείες *AC* και *BD* είναι (1) κάθετες, και (2) τέμνονται πάνω στη διαγώνιο του ορθογωνίου (Σχήμα 1).

Για κάποιον ξεχασμένο πια λόγο προσείλκυσε την προσοχή μου. Και μάλλον απρόσμενα ανακάλυψα ότι αυτό το κάπως ανιαρό πρόβλημα έχει αξιοσημείωτη ποικιλία λύσεων, που βασίζονται σε διαφορετικές, χρήσιμες και διδακτικές ιδέες. Το πρόβλημα μας αποκαλύπτει συνεχώς νέες πλευρές του, που λάμπουν αντανακλώντας το φως από άλλες, ωραιότερες και πιο σημαντικές ιδιότητες, θυμίζοντάς μας τη διαδικασία κοπής ενός ακατέργαστου κρυστάλλου. Στην πραγματικότητα, αυτή η κατάσταση είναι τυπική για τη στοιχειώδη γεωμετρία —αυτή τη συλλογή γεγονότων που διαπλέκονται τόσο στενά, ώστε η αποκάλυψη ενός από αυτά να φέρνει σχεδόν με κάθε βεβαιότητα στην επιφάνεια μια μακριά αλυσίδα άλλων γεγονότων που ανήκουν σε διαφορετικά μέρη αυτής της επιστήμης (που κατά τη γνώμη μου είναι και τέχνη).

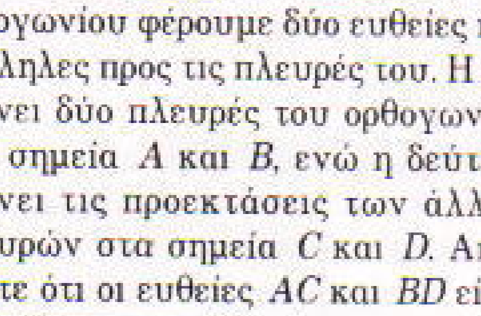
Μια μέθοδος που αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι πασίγνωστη στην... πολιτική! Μπορεί να διατυπωθεί με τρεις λέξεις: «διαίρει και βασίλευε». Στα μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι είναι συχνά χρήσιμο να αρχίζουμε τη λύση ενός προβλήματος «τεμαχίζοντάς το», απομονώνοντας τα τμήματα που είναι όντως σημαντικά και αγνοώντας τα υπόλοιπα. Αυτά τα σημαντικά τμήματα μπορούν κατόπιν να υποβληθούν σε συγκεκριμένους μετασχηματισμούς που διατηρούν όσες ιδιότητες είναι ουσιαστικές για μας, αλλά είτε ανάγουν το πρόβλημα σε μια απλή ειδική περίπτωση είτε, αντίστροφα, οδηγούν σε ενδιαφέρουσες προεκτάσεις. Στη γεωμετρία αυτό επιτυγχάνεται συχνά με μετασχηματισμούς του επιπέδου, όπως παράλληλες μετατοπίσεις, στροφές, ομοιοθεσίες, κ.λπ., που είναι δυνατόν να κάνουν πραγματικά αγνώριστο το αρχικό πρόβλημα. Θα δούμε επίσης πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό —και, συγκεκριμένα, έναν αποτελεσματικό αλλά σπάνια χρησιμοποιούμενο μετασχηματισμό που ονομάζεται «σπειροειδής ομοιότητα»— για να αποδείξουμε ιδιότητες που φαινομενικά δεν έχουν καμία σχέση με μετασχηματισμούς.

Πριν αρχίσουμε όμως τη μεγάλη και ελισσόμενη πορεία των εξερευνήσεών μας, προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα μόνοι σας. Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο, και η λύση σας μπορεί να αποδειχτεί διαφορετική από αυτές που θα διαβάσετε στη συνέχεια.

Ας αρχίσουμε από την πρώτη ιδιότητα που αναφέρεται στο πρόβλημα.

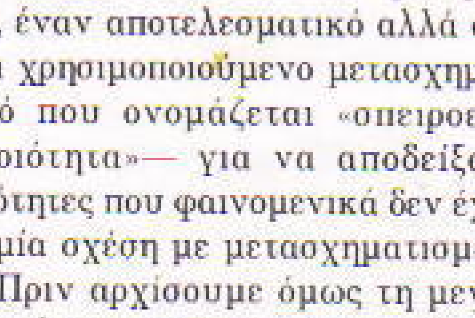
Αποδείξεις της καθετότητας

Υπάρχουν πολλές ορθές γωνίες στο σχήμα μας. Επομένως, είναι φυ-

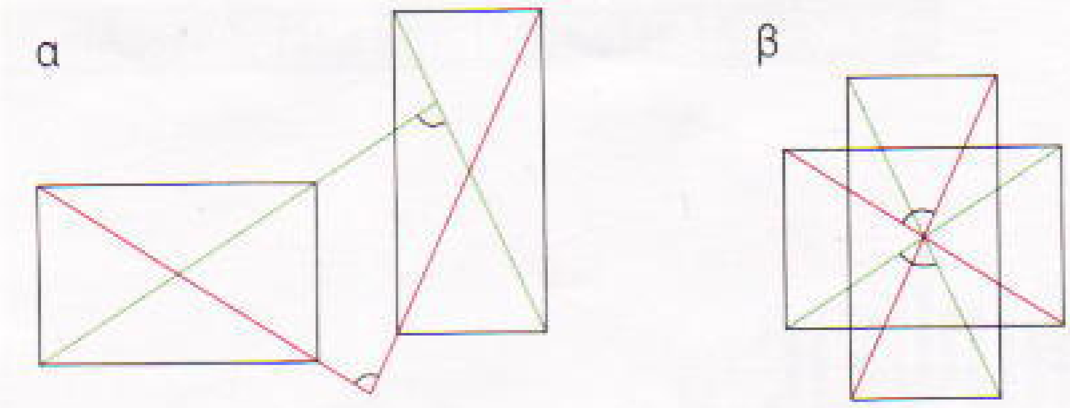


Σχήμα 1

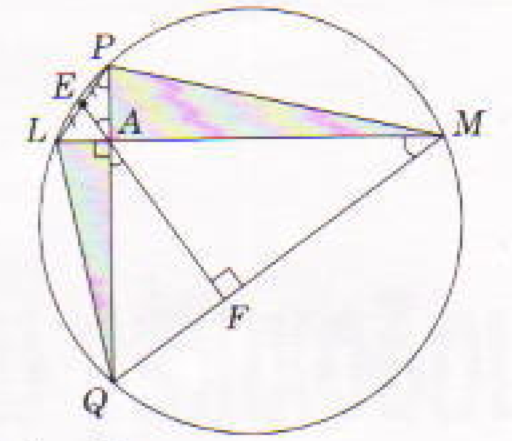
Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 2



Σχήμα 3



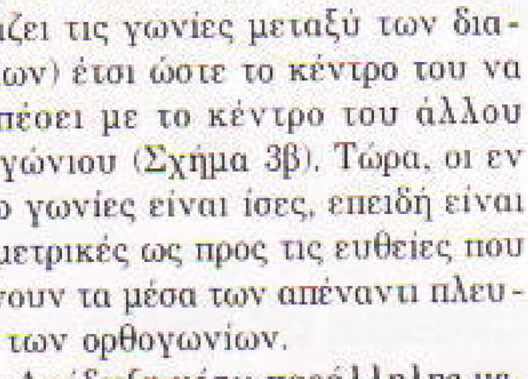
Σχήμα 5

σικό να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η γωνία μεταξύ των AC και BD ισούται με μία από αυτές.

1. *Απόδειξη μέσω μετατόπισης και συμμετρίας.* Ονομάζουμε $KLMN$ το δεδομένο ορθογώνιο (Σχήμα 2). Οι ευθείες AC και BD είναι διαγώνιοι των ορθογωνίων $PALC$ και $PBND$. Οι άλλες διαγώνιοι αυτών των ορθογωνίων είναι οι LP και PN. Έχουμε ότι $\angle LMN = 90^\circ$, άρα η LN είναι διάμετρος του κύκλου. Αυτό σημαίνει ότι, επίσης, $\angle LPN = 90^\circ$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι, *αν δύο ορθογώνια έχουν παράλληλες πλευρές και θεωρήσουμε μια διαγώνιο στο καθένα απ' αυτά, τότε η γωνία μεταξύ των εν λόγω διαγωνίων ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι άλλες δύο διαγώνιοι.*

Αυτό καθίσταται προφανές αν μετατοπίσουμε ένα από τα δεδομένα ορθογώνια (Σχήμα 3α) παράλληλα προς τον εαυτό του (κάτι που δεν αλλάζει τις γωνίες μεταξύ των διαγωνίων) έτσι ώστε το κέντρο του να συμπέσει με το κέντρο του άλλου ορθογώνιου (Σχήμα 3β). Τώρα, οι εν λόγω γωνίες είναι ίσες, επειδή είναι συμμετρικές ως προς τις ευθείες που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών των ορθογωνίων.

2. *Απόδειξη μέσω παράλληλης μετατόπισης.* Η ίδια ιδέα για τη σύγκριση των γωνιών χρησιμοποιείται στην ακόλουθη απόδειξη. Έστω Q το άλλο σημείο τομής της PA και του κύκλου (Σχήμα 2). Τότε, όπως προηγουμένως, $\angle KNM = 90^\circ$, άρα η KM είναι διάμετρος του κύκλου, και $\angle KQM = 90^\circ$. Αφού $AC \parallel KQ$ και $BD \parallel QM$, έπεται ότι οι AC και BD είναι κάθετες.



Σχήμα 4

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι $AC \parallel KQ$ και $BD \parallel QM$.

Σ' αυτή την απόδειξη μπορούμε να πούμε ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ευθειών AC και BD μεταφέρεται μέσω της παράλληλης μετατόπισης στη γωνία KQM.

3. *Απόδειξη μέσω περιστροφής και ομοιοθεσίας.* Παρατηρούμε ότι η στροφή κατά 90° γύρω από το P μεταφέρει τις ευθείες PC, PL, PA στις PB, PN, PD, αντίστοιχα (στο Σχήμα 4 η στροφή γίνεται προς τα αριστερά). Αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια νέα απόδειξη, που βασίζεται σ' αυτή τη στροφή και σε μια ομοιοθεσία με κέντρο P και λόγο PN/PL. Αυτός ο σύνθετος μετασχηματισμός μεταφέρει το σημείο L στο σημείο N. Ποια είναι η εικόνα του σημείου A; Ας ονομάσουμε αυτή την εικόνα X. Αφού η ευθεία PA μεταφέρεται στην ευθεία PB, το X πρέπει να ανήκει στην ευθεία PB. Έχουμε ότι $\angle PAL = 90^\circ$, και, αφού γνωρίζουμε πως ούτε η στροφή ούτε η ομοιοθεσία μεταβάλλουν μέτρα γωνιών, $\angle PXN = 90^\circ$ και $X = D$. Ομοίως, εικόνα του σημείου C είναι το σημείο B. Επομένως, η ευθεία CA μεταφέρεται από αυτό το μετασχηματισμό στην ευθεία BD. Ωστόσο, η στροφή στρέφει την CA κατά 90° ενώ η ομοιοθεσία δεν μεταβάλλει τη διεύθυνση των ευθειών. Έτσι, η BD, η εικόνα της CA, σχηματίζει ορθή γωνία με τη CA.

Στο θαυμάσιο βιβλίο τους *Geometry Revisited*, οι H.S.M. Coxeter και S.L. Greitzer ονομάζουν το μετασχηματισμό του επιπέδου που προκύπτει από μια στροφή ακολουθούμενη από μια ομοιοθεσία ως προς το ίδιο κέντρο «σπειροειδή ομοιότητα». (Αυτή η ονομασία, όπως και κάθε άλλη, δεν είναι καθολικά αποδεκτή.) Με αυτό το μετασχηματισμό, όλες οι ευθείες στρέφονται κατά την ίδια γωνία —ιδιότητα που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη απόδειξη. Μια άλλη ιδιότητα της σπειροειδούς ομοιότητας θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια, σε μια απόδειξη της δεύτερης πρότασης του προβλήματός μας.

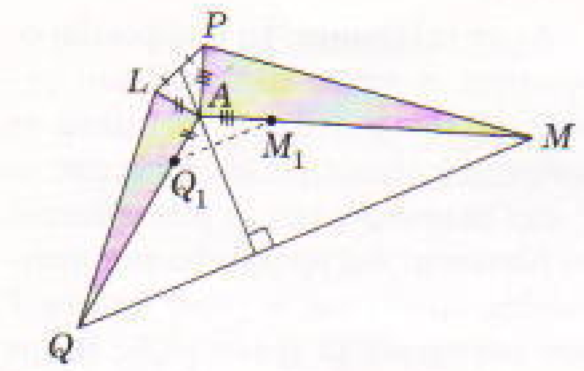
Το θεώρημα του Βραχμαγκούπτα

Σύμφωνα με την Άσκηση 1, η ευθεία MQ του Σχήματος 2 είναι παράλληλη προς την BD. Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να διατυπώσουμε κομψότερα το γεγονός ότι $AC \perp BD$, διατύπωση που είναι γνωστή ως θεώρημα του Βραχμαγκούπτα[1]: *Αν οι διαγώνιοι ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου είναι κάθετες, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής τους και διχοτομεί κάποια από τις πλευρές του είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.*

(Στο Σχήμα 5, όπου έχουμε διατηρήσει τον ίδιο συμβολισμό, το εν λόγω τετράπλευρο είναι το $PLQM$, και η ευθεία είναι η EF —η προέκταση της AC του Σχήματος 2.)

Μπορείτε να προσπαθήσετε να αποδείξετε ευθέως αυτό το θεώρημα (δείχνοντας, για παράδειγμα, ότι οι τέσσερις γωνίες που σημειώνονται στο Σχήμα 5 είναι ίσες), ή να τροποποιήσετε απλώς μια από τις προηγούμενες αποδείξεις. Δεν θα επιμείνω

1. Ο Βραχμαγκούπτα ήταν ινδός μαθηματικός που έζησε τον 7ο αιώνα μ.Χ. (Σ.τ.μ.)

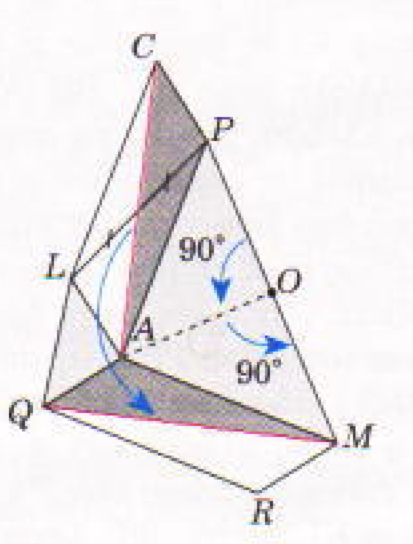


Σχήμα 6

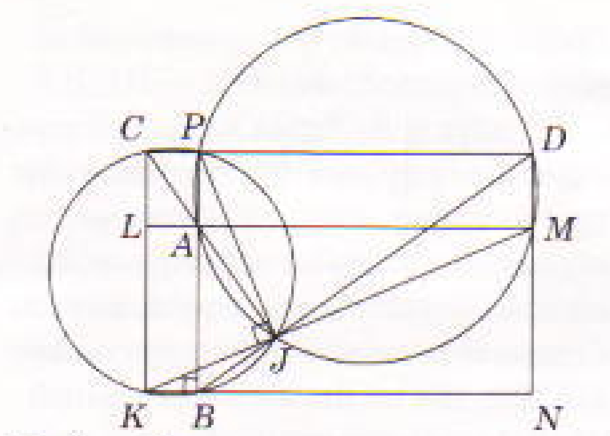
άλλο σ' αυτό το θεώρημα, διότι έχει μια όμορφη γενίκευση.

Φανταστείτε ότι στην κοινή κορυφή A των τριγώνων AQL και AMP του Σχήματος 5 υπάρχει ένας σύνδεσμος που μας επιτρέπει να στρέψουμε το ένα τρίγωνο ως προς το άλλο (Σχήμα 6). Θα δείξουμε τότε ότι η πρόταση του θεωρήματος του Βραχμαγκούπτα (για τις πλευρές PL και QM) παραμένει αληθής. Με άλλα λόγια, *αν επιλέξουμε ένα σημείο A στο εσωτερικό ενός τετραπλεύρου $LPMQ$ έτσι ώστε τα AQL και AMP να είναι όμοια ορθογώνια τρίγωνα (με τις ορθές γωνίες στο A και $\angle L = \angle P$), τότε η ευθεία που διχοτομεί την PL και διέρχεται από το A είναι κάθετη στην QM.*

Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για την πιο συνηθισμένη ειδική περίπτωση, κατά την οποία $AQ = AL$ και $AM = AP$ (μπορούμε πάντα να αντικαταστήσουμε τα σημεία Q και M με τα Q_1 και M_1, πάνω στην AQ και AM αντίστοιχα, που είναι τέτοια ώστε $AQ_1 = AL$, $AM_1 = AP$, διότι $AQ_1/AQ = AL/AQ = AP/AM = AM_1/AM$, και επομένως η Q_1M_1 είναι παράλληλη προς την QM). Σ' αυτή την ειδική περίπτωση, συμπληρώνουμε τα τρίγωνα LAP και QAM, ώστε να σχηματιστούν τα παραλληλόγραμμα $LAPC$ και $QAMR$ (Σχήμα 7). Βλέπουμε τώρα ότι η στροφή κατά 90° γύρω από το μέσο O της PM μεταφέρει το $APCL$ στο $MAQR$ (η AP μεταφέρεται στην MA, $\angle LAP = 180° - \angle QAM = \angle RMA$, και $AL = AQ = MR$, επομένως το L μεταφέρεται στο R, κ.ο.κ.). Ειδικότερα, η στροφή μεταφέρει τη διαγώνιο AC στην MQ. Αυτό όμως σημαίνει απλώς ότι η ευθεία που διχοτομεί την PL (δηλαδή, η AC) είναι κάθετη στην MQ.[2]



Σχήμα 7



Σχήμα 8

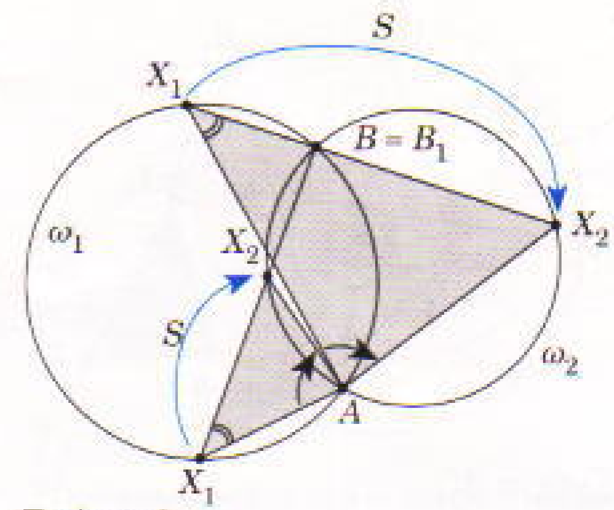
Αποδείξεις της σύγκλισης

Δώσαμε τρεις αποδείξεις του πρώτου μέρους του αρχικού μας θεωρήματος και το συνδέσαμε με το κλασικό αποτέλεσμα του Βραχμαγκούπτα. Στρεφόμαστε τώρα σε αποδείξεις της σύγκλισης των τριών ευθειών που περιγράφεται στο δεύτερο μέρος του προβλήματος.

1. *Απόδειξη μέσω περιγεγραμμένων κύκλων.* Όταν σε κάποιο γεωμετρικό σχήμα έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο βαίνουν διάφορες ορθές γωνίες, είναι συνήθως καλή ιδέα να σχεδιάσουμε έναν κύκλο που θα έχει διάμετρο αυτό το τμήμα και θα διέρχεται από τις κορυφές των ορθών γωνιών. Το δικό μας σχήμα δεν αποτελεί εξαίρεση.

Έστω J το σημείο τομής των CA και BD (Σχήμα 8). Σχεδιάζουμε τα τμήματα KJ και KM όπως στο σχήμα. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\angle CJB = 90°$. Άρα το σημείο J ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του ορθογωνίου $PBKC$, και επομένως $\angle PJK = 90°$. Ομοίως, το σημείο J ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του ορθογωνίου $PAMD$, και επομένως $\angle PJM = 90°$. Έπεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα KJ και JM σχηματίζουν ευθεία, οπότε οι τρεις ευθείες AC, BD και KM συγκλίνουν.

2. *Απόδειξη μέσω σπειροειδούς ομοιότητας τεμνόμενων κύκλων.* Προηγουμένως, στην τρίτη απόδειξη της καθετότητας, χρησιμοποιήσαμε μια σπειροειδή ομοιότητα 90°. Είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε —μολονότι σ' αυτή την περίπτωση ο τρόπος δεν είναι τόσο προφανής— μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα αυτού του μετασχηματισμού και να δώσουμε μια άμεση απόδειξη της σύγκλισης, χωρίς να αποδείξουμε προηγουμένως ότι $AC \perp BD$. Ιδού η ιδιότητα.

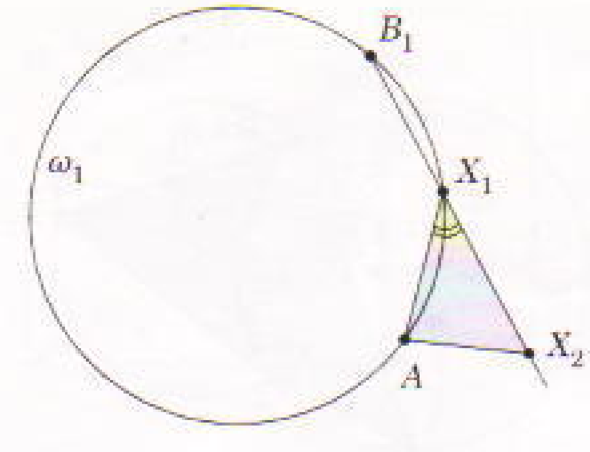


Σχήμα 9

Έστω μια σπειροειδής ομοιότητα S γύρω από το σημείο A η οποία μεταφέρει τον κύκλο ω_1, που διέρχεται από το A, στον κύκλο ω_2. Έστω B το δεύτερο (εκτός του A) σημείο τομής των ω_1 και ω_2. Τότε η ευθεία που ενώνει το τυχαίο σημείο X_1 του ω_1 με την εικόνα του $X_2 = S(X_1)$ στον ω_2 διέρχεται πάντοτε από το B (Σχήμα 9).

Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο X_1 του ω_1 και την εικόνα του X_2 στον ω_2 (στο Σχήμα 9 βλέπετε δύο δυνατές επιλογές). Στο τρίγωνο AX_1X_2 η $\angle X_1AX_2$ ισούται με τη γωνία περιστροφής και ο λόγος AX_1/AX_2 ισούται με το λόγο ομοιοθεσίας. Επομένως, για δύο οποιεσδήποτε επιλογές του X_1, τα αντίστοιχα τρίγωνα AX_1X_2 είναι όμοια. Άρα, η $\angle AX_1X_2$ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου X_1 στον κύκλο ω_1. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο τομής B_1 της ευθείας X_1X_2 και του κύκλου ω_1 είναι πάντα το ίδιο, διότι η εγγεγραμμένη γωνία που έχει κορυφή το X_1 και βλέπει το τόξο AB_1 του κύκλου ω_1 έχει σταθερό μέτρο, οπότε και το τόξο έχει σταθερό μέτρο.

2. Αν αντικαταστήσουμε τη στροφή κατά 90° με μια κατάλληλη σπειροειδή ομοιότητα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε απευθείας τη γενική κατάσταση του Σχήματος 6.



Σχήμα 10

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 9, αυτό το επιχείρημα είναι κατάλληλο στην περίπτωση που το σημείο B_1 ανήκει στην ημιευθεία X_1X_2. Όταν όμως το B_1 ανήκει στην *αντίθετη* ημιευθεία, όπως στο Σχήμα 10, θα ήταν ακριβέστερο να πούμε ότι το τόξο AB_1 = AX_1B_1 είναι συμπληρωματικό του τόξου που βλέπει η εφεξής γωνία της AX_1X_2. Ωστόσο, και σ' αυτή την περίπτωση, το μέτρο αυτού του τόξου παραμένει σταθερό.[3]

Ομοίως, όλες οι ευθείες X_1X_2 τέμνουν τον δεύτερο κύκλο ω_2 σ' ένα σταθερό σημείο B_2. Τα σημεία B_1, B_2 ανήκουν σε όλες τις ευθείες X_1X_2, οπότε $B_1 = B_2$, και αυτό είναι το δεύτερο κοινό σημείο B των ω_1 και ω_2.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημά μας (Σχήμα 8). Όπως και στην τρίτη απόδειξη της καθετότητας, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το ορθογώνιο *PCKB* στο *PAMD* μέσω μιας σπειροειδούς ομοιότητας 90° γύρω από το *P*. Απομένει να εφαρμόσουμε την ιδιότητα που θεωρήσαμε προηγουμένως γι' αυτή την ομοιότητα, τους περιγεγραμμένους κύκλους των ορθογωνίων, τα σημεία *C*, *K*, *B* και τις εικόνες τους *A*, *M*, *D*: βάσει αυτής, οι ευθείες *CA*, *KM*, και *BD* διέρχονται από το κοινό σημείο *J* (≠ P) των περιγεγραμμένων κύκλων, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πριν συνεχίσουμε, ας εξετάσουμε άλλες δύο εφαρμογές αυτής της ιδιότητας της σπειροειδούς ομοιότητας.

Άσκηση 2. Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής *P* δύο δεδομένων κύκλων τούς τέμνει για δεύτερη φορά στα σημεία *A* και *B*. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των τμημάτων *AB*.

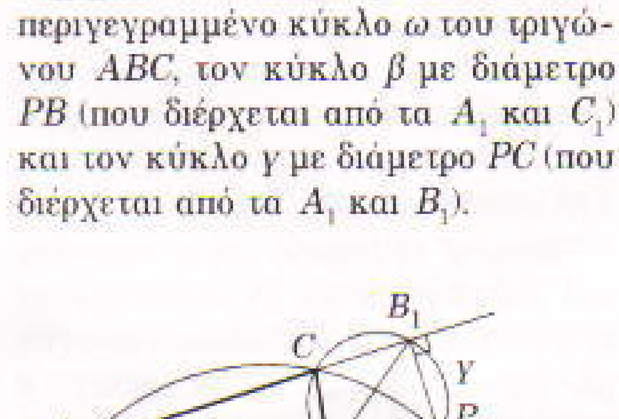
Άσκηση 3. Έστω *Q* το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων της προηγούμενης άσκησης. Φέρουμε στο σημείο *A* την εφαπτομένη του κύκλου στον οποίο ανήκει το *A*, και στο σημείο *B* την εφαπτομένη του άλλου κύκλου. Έστω ότι αυτές οι εφαπτόμενες τέμνονται στο *C*. Αποδείξτε ότι τα σημεία *Q*, *A*, *C*, *B* ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Την ίδια ιδιότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ένα κλασικό θεώρημα, που θα μας επιτρέψει να δούμε το αρχικό μας πρόβλημα από μια νέα, πλεονεκτική οπτική γωνία.

Ευθείες Simson

Το θεώρημα στο οποίο αναφέρομαι αποδείχτηκε από τον William Wallace το 1797, αλλά αποδίδεται εσφαλμένα στον Robert Simson (τέτοια ιστορικά λάθη δεν είναι ασυνήθιστα στα μαθηματικά). Έχει ως εξής: *Έστω ένα σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου. Τα ίχνη των καθέτων που φέρουμε από αυτό το σημείο προς τις πλευρές του τριγώνου (ή τις προεκτάσεις τους) ανήκουν στην ίδια ευθεία.* Αυτή η ευθεία ονομάζεται *ευθεία Simson* του σημείου ως προς το δεδομένο τρίγωνο.

Έστω *ABC* το τρίγωνο, *P* το σημείο, και A_1, B_1, C_1 οι προβολές του (Σχήμα 11). Θεωρούμε επίσης τον περιγεγραμμένο κύκλο ω του τριγώνου *ABC*, τον κύκλο β με διάμετρο *PB* (που διέρχεται από τα A_1 και C_1) και τον κύκλο γ με διάμετρο *PC* (που διέρχεται από τα A_1 και B_1).



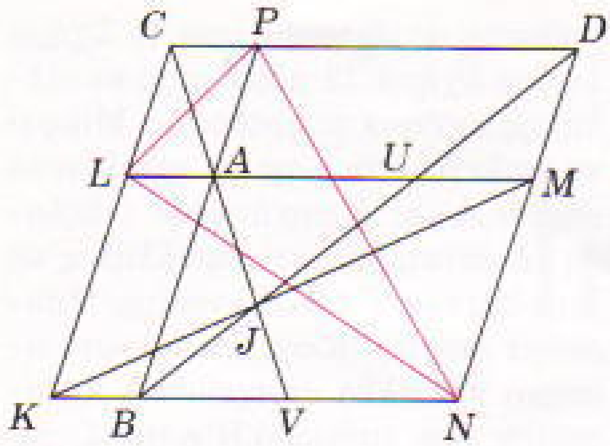
Σχήμα 11

Ας εκτελέσουμε τη σπειροειδή ομοιότητα S_1 γύρω από το *P* που μεταφέρει τον β στον ω, και μετά τη σπειροειδή ομοιότητα S_2 γύρω από το *P* που μεταφέρει των ω στο γ. Εύκολα βλέπουμε ότι προκύπτει μια σπειροειδής ομοιότητα *S* γύρω από το *P* που μεταφέρει το β στο γ. Ας δούμε τι συμβαίνει στο σημείο C_1 έπειτα από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Βάσει της ιδιότητας που αποδείξαμε προηγουμένως, η S_1 μεταφέρει το C_1 στο δεύτερο σημείο τομής της ευθείας BC_1 και του κύκλου ω —δηλαδή, στο *A*. Ομοίως, $S_2(A) = B_1$. Άρα, $S(C_1) = B_1$, και επομένως η C_1B_1 διέρχεται και από το δεύτερο (εκτός από το *P*) σημείο τομής των β και γ —δηλαδή, από το A_1. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος του Simson.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα για να αποδείξουμε τη σύγκλιση που ζητά το πρόβλημά μας. Κοιτάξτε ξανά το Σχήμα 8. Από την εκφώνηση του προβλήματος γνωρίζουμε ότι το σημείο *P* ανήκει στον κοινό περιγεγραμμένο κύκλο των τριγώνων *KLM* και *MNK*. Η ευθεία Simson αυτού του σημείου ως προς το πρώτο τρίγωνο είναι η *AC* και ως προς το δεύτερο η *BD*. Επομένως, και οι δύο αυτές ευθείες διέρχονται από την προβολή *J* του *P* επί της κοινής πλευράς των δύο τριγώνων. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της σύγκλισης.

Είναι ενδιαφέρον ότι με τη βοήθεια της ευθείας Simson μπορούμε να αποδείξουμε —αν και με λιγότερο κομψό τρόπο— και την πρόταση για την καθετότητα. Μισή στροφή γύρω από το κέντρο του δεδομένου κύκλου μεταφέρει το τρίγωνο *MNK* στο *KLM*, το σημείο *P* στο αντιδιαμετρικό σημείο *P'* και την ευθεία *BD* στην ευθεία Simson ℓ του *P'* ως προς το τρίγωνο *KLM*. Επομένως, η ℓ είναι παράλληλη προς την *BD*. Από την άλλη πλευρά, μπορεί να αποδειχτεί (το αφήνω ως άσκηση) ότι οι ευθείες Simson δύο διαφορετικών σημείων *P* και *P'* ως προς το ίδιο τρίγωνο σχηματίζουν γωνία ίση με το ήμισυ του μέτρου του τόξου *PP'*. Στην περίπτωσή μας, αυτό το τόξο έχει μέτρο 180°, άρα η γωνία μεταξύ των ℓ και *AC* (των ευθειών Simson των *P* και *P'* ως προς το *KLM*) είναι 90°. Αφού $\ell \parallel BD$ και $\ell \perp AC$, παίρνουμε ότι $BD \perp AC$.

3. Για να είμαστε απόλυτα ακριβείς, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε *προσανατολισμένες γωνίες και τόξα*, αλλά πιστεύω ότι τα σχήματα είναι αρκετά πειστικά ώστε να επιτρέψουμε κάποια χαλαρότητα στη διατύπωση.



Σχήμα 12

Το θεώρημα του Πάππου

Είδαμε ότι υπάρχει μια ευρεία γενίκευση της πρώτης πρότασης του αρχικού μας προβλήματος. Η δεύτερη πρόταση είναι ειδική περίπτωση ενός ακόμη περισσότερο εντυπωσιακού και θεμελιώδους γεγονότος. Δεν χρειαζόμαστε ορθές γωνίες ή κύκλους για να είναι αληθής. Το μόνο ουσιώδες μέρος του σχηματισμού είναι μια τριάδα παράλληλων ευθειών που τέμνονται από μια άλλη τριάδα παράλληλων ευθειών. Αυτές οι τριάδες σχηματίζουν ένα πλήθος παραλληλογράμμων (πόσα;). Διαλέγουμε τρία παραλληλόγραμμα έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο από αυτά να έχουν μία και μόνο κοινή κορυφή. Αν ενώσουμε αυτές τις κορυφές, θα πάρουμε ένα τρίγωνο του οποίου οι πλευρές είναι διαγώνιοι των παραλληλογράμμων μας (το κόκκινο τρίγωνο του Σχήματος 12). *Τότε, οι επεκτάσεις των τριών άλλων διαγωνίων τέμνονται στο ίδιο σημείο.*

Θα αποδείξω την πρόταση για τα παραλληλόγραμμα $ALCP$, $BNDP$ και $KLMN$ του Σχήματος 12, το οποίο αντιστοιχεί στο αρχικό πρόβλημα. Η απόδειξη, όμως, ισχύει και για κάθε άλλη επιλογή παραλληλογράμμων, έπειτα από την κατάλληλη αλλαγή της ονομασίας των σημείων.

Συμβολίζουμε το σημείο τομής των BD και LM με U, και το σημείο τομής των CA και KN με V. Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ALC και VBA και της ισότητας των απέναντι πλευρών των παραλληλογράμμων, έχουμε

$$KB/BV = LA/BV = CL/AB = PA/AB.$$

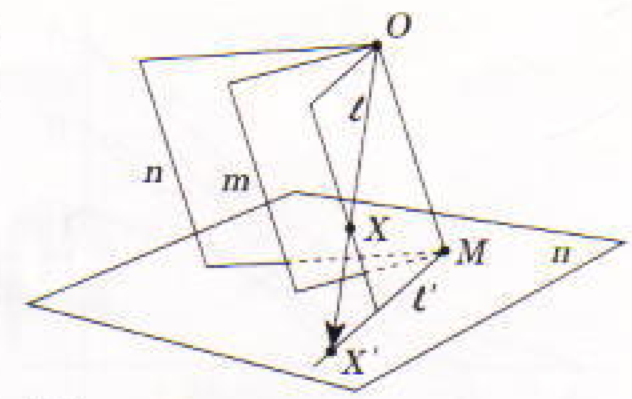
Από την ομοιότητα των τριγώνων AUB και MUD παίρνουμε

$$MU/UA = DM/AB = PA/AB.$$

Επομένως, $KB/BV = MU/UA$, ή $KB/MU = BV/UA$. Έστω J το σημείο τομής των KM και BD, και έστω J' (δεν φαίνεται στο σχήμα) το σημείο τομής των BD και CV. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία J και J' ταυτίζονται (και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο στο σχήμα εμφανίζεται μόνο το J). Αφού τα τρίγωνα KBJ και MUJ είναι όμοια, έχουμε $BJ/JU = KB/MU = BV/UA$. Επίσης, λόγω ομοιότητας των τριγώνων VBJ' και AUJ', έχουμε $BJ'/J'U = BV/AU$. Επομένως, τα σημεία J και J' διαιρούν το τμήμα BU στον ίδιο λόγο, οπότε συμπίπτουν.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τις προεκτάσεις των δύο ζευγών των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου, οι οποίες τέμνονται σε δύο σημεία. Αποδείξτε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει αυτά τα δύο σημεία και τα μέσα των διαγωνίων του τετραπλεύρου είναι συγγραμμικά. (Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα αυτών των τμημάτων ονομάζεται ευθεία Gauss του τετραπλεύρου.)

Πώς σκεφτήκαμε να «εξασθενίσουμε» τις υποθέσεις για την πρόταση της σύγκλισης απαλλάσσοντας το πρόβλημα από όλες τις καθετότητες; Και πάλι μέσω των μετασχηματισμών! Μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα μας (ή και οποιοδήποτε άλλο) σ' ένα επίπεδο και να φέρουμε από κάθε σημείο του παράλληλες ευθείες. Θεωρούμε στη συνέχεια τις τομές αυτών των ευθειών με ένα οποιοδήποτε επίπεδο. Αυτά τα σημεία συνθέτουν ένα νέο σχήμα, την *παράλληλη προβολή* του αρχικού. Οι παράλληλες προβολές διατηρούν την παραλληλία, ενώ αντικείμενα όπως οι ορθές γωνίες και οι κύκλοι γενικά καταστρέφονται μέσω αυτής της απεικόνισης. Επομένως, έπειτα από την παράλληλη προβολή του σχήματος του προβλήματός μας (Σχήμα 1), δεν υπάρχουν ούτε κάθετοι ούτε περιγεγραμμένος κύκλος που περιέχει το σημείο P —απλούστατα, δεν υπάρχει ορθογώνιο για να το περιγράψουμε. Εντούτοις, οι ευθείες γραμμές AC, BD και KM θα εξακολουθήσουν να είναι συγκλίνουσες ευθείες, και το σχήμα που προκύπτει είναι όπως αυτό στο Σχήμα 12. Και όχι μόνο αυτό· αποδεικνύεται ότι



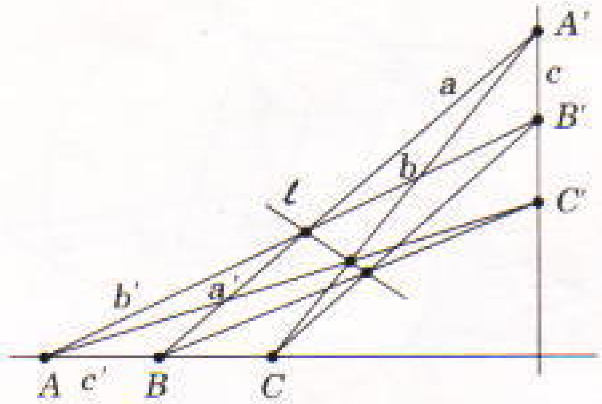
Σχήμα 13

Η κεντρική προβολή από το κέντρο O στο επίπεδο π στέλνει το σημείο X στο X' και την ευθεία ℓ, που διέρχεται από το X, στην ℓ' = X'M, όπου το M είναι σημείο του π τέτοιο ώστε η OM να είναι παράλληλη προς την ℓ. Οι προβολές των παράλληλων προς την ℓ ευθειών, n και m, διέρχονται επίσης από το M.

οποιεσδήποτε τεμνόμενες τριάδες παραλλήλων προκύπτουν ως παράλληλες προβολές των έξι ευθειών του προβλήματος.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την παράλληλη προβολή για να αναδείξουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά της κατάστασης στα οποία οφείλεται η προς απόδειξη σύγκλιση των ευθειών. Μπορούμε να προχωρήσουμε περισσότερο και να προκαλέσουμε μια ακόμη πιο δραματική παραμόρφωση της κατάστασης μέσω μιας *κεντρικής προβολής*. Για να εκτελέσουμε μια κεντρική προβολή, επιλέγουμε ένα σημείο εκτός του επιπέδου του σχήματός μας και συνδέουμε όλα τα σημεία του σχήματος με το δεδομένο σημείο. Προκύπτει ένα σύνολο από (συγκλίνουσες) ευθείες που τις τέμνουμε με ένα επίπεδο. Τα σημεία τομής των ευθειών και του νέου επιπέδου αποτελούν ένα νέο σχήμα, που ονομάζεται κεντρική προβολή του αρχικού. Όπως και η παράλληλη προβολή, η κεντρική διατηρεί τη συγγραμικότητα των σημείων, αλλά, γενικά, απεικονίζει τις παράλληλες ευθείες σε συγκλίνουσες, όπως στο παράδειγμα του Σχήματος 13. Έτσι, το Σχήμα 12 ανατρέπεται μέσω κεντρικής προβολής στο Σχήμα 14, ενώ η αντίστοιχη πρόταση σχετικά με τις συγκλίνουσες διαγωνίους μετατρέπεται στο εξής θεώρημα:

Έστω a, b, c και a', b', c' δύο τριάδες συγκλινουσών ευθειών. Τότε, οι τρεις ευθείες που συνδέουν τα ζεύγη των σημείων τομής $a \cap b'$ και $a' \cap b$, $b \cap c'$ και $b' \cap c$, $c \cap a'$ και $c' \cap a$ συγκλίνουν.



Σχήμα 14

Είναι ενδιαφέρον ότι αυτό το θεώρημα είναι ισοδύναμο με το θεώρημα που προκύπτει από αυτό αν αντικαταστήσουμε τη λέξη «ευθεία» με τη λέξη «σημείο», και τη λέξη «συγκλίνουσες» με τη λέξη «συγγραμμικά»:

Έστω A, B, C και A', B', C' δύο τριάδες συγγραμμικών σημείων. Τότε, τα τρία σημεία τομής των ζευγών των ευθειών AB' και A'B, BC' και B'C, CA' και C'A είναι συγγραμμικά.

Αυτό το γεγονός είναι ένα από τα περισσότερο θεμελιώδη θεωρήματα της προβολικής γεωμετρίας. Ονομάζεται θεώρημα του Πάππου. Δύο προτάσεις που αφορούν ευθείες και σημεία ονομάζονται *δυϊκές* όταν η μια προκύπτει από την άλλη αν εναλλάξουμε τις έννοιες της ευθείας και του σημείου. Στην προβολική γεωμετρία (η οποία μελετά τις ιδιότητες που διατηρούνται κατά την κεντρική προβολή) η δυϊκή πρόταση μιας αληθούς πρότασης είναι πάντα αληθής.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι το θεώρημα του Πάππου και το δυϊκό του αναδιατυπώνουν απλώς το ένα το άλλο (χρησιμοποιήστε το Σχήμα 14). Εξηγήστε γιατί το θεώρημα για τις συγκλίνουσες διαγωνίους των παραλληλογράμμων (Σχήμα 12) είναι ισοδύναμο με το δυϊκό του θεωρήματος του Πάππου.

Δεν θα αποδείξω ανεξάρτητα το θεώρημα του Πάππου. Ένας τρόπος να το επιτύχουμε αυτό είναι να κινηθούμε αντίστροφα από το Σχήμα 14 στο Σχήμα 12 μέσω μιας κατάλληλης κεντρικής προβολής. Μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να «στέλνει τα σημεία A και A' στο άπειρο» —δηλαδή να μετατρέπει σε παράλληλες τις τεμνόμενες σ' αυτά ευθείες. Μπορούμε επίσης να στείλουμε «στο άπειρο» και άλλα στοιχεία της κατασκευής (την ευθεία A'B' ή την ℓ, για παράδειγμα) ανάγοντας έτσι το πρόβλημα σε μια από τις λεγόμενες «ομοπαραλληλικές εκδοχές» του. Είμαι βέβαιος ότι θα απολαύσετε τη δημιουργία και τη μελέτη αυτών των εκδοχών· σας αφήνω με αυτή τη συναρπαστική ενασχόληση, αν και κάθε φορά που θα αναφέρεται το «θεώρημα του Πάππου» εγώ θα έχω μια δικαιολογία να συνεχίσω τη διήγησή μου ξανά και ξανά.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Για να περνά η ώρα

Σ66

Το τελευταίο ψηφίο. Διαγράψτε όλους τους άρτιους παράγοντες και τα πολλαπλάσια του 5 από το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1995 \cdot 1996$. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των αριθμών που απομένουν; (N. Antonovich)

Σ67

Μετρήστε τους ψεύτες. Το νησί Πιανόσα έχει πληθυσμό 100 ατόμων. Μερικοί από τους κατοίκους του λένε πάντα ψέματα ενώ οι υπόλοιποι λένε πάντα την αλήθεια. Κάθε νησιώτης λατρεύει μία από τις εξής τρεις θεότητες: του Ήλιου, της Σελήνης ή της Γης. Μια μέρα ένας ανθρωπολόγος που είχε επισκεφτεί το νησί έκανε σε όλους τους κατοίκους τις επόμενες ερωτήσεις:

1. Λατρεύετε τη θεότητα του Ήλιου;
2. Λατρεύετε τη θεότητα της Σελήνης;
3. Λατρεύετε τη θεότητα της Γης;

Δόθηκαν 60 καταφατικές απαντήσεις στην πρώτη ερώτηση, 40 στη δεύτερη, και 30 στην τρίτη. Πόσοι ψεύτες ζουν στο νησί; (F. Nazarov)

Σ68

Ανοδική πορεία. Χωρίς αμφιβολία έχετε προσέξει πως όταν ρίχνουμε σε ένα ποτήρι με νερό ένα αναβράζον δισκίο (για παράδειγμα, Alka-Seltzer™), στην αρχή βυθίζεται στον πυθμένα, εκλύοντας πολλές φυσαλίδες, αλλά σύντομα φτάνει στην επιφάνεια εξακολουθώντας να ελευθερώνει φυσαλίδες αερίου. Γιατί ακολουθεί αυτή την ανοδική πορεία; (A. Savin)

Σ69

Έξυπνη διευθέτηση. Τοποθετήστε σε έναν κύκλο τέσσερα 1, τρία 2 και τρία 3 έτσι ώστε το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών να μη διαιρείται με το 3. (S. Berlov)

Σ70

Ισόπλευρη διαμέριση. Είναι εύκολο να χωρίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα —φέρουμε απλώς τις διαμέσους του. Είναι όμως δυνατόν να το χωρίσουμε σε 8, 10 ή 11 ισόπλευρα τρίγωνα; Και γενικότερα, σε πόσα ισόπλευρα τρίγωνα μπορούμε να το χωρίσουμε;

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Το παιχνίδι του φωτός

Τι θα συνέβαινε αν αλλάζαμε τους κανόνες;

Dmitry Tarasov και Lev Tarasov

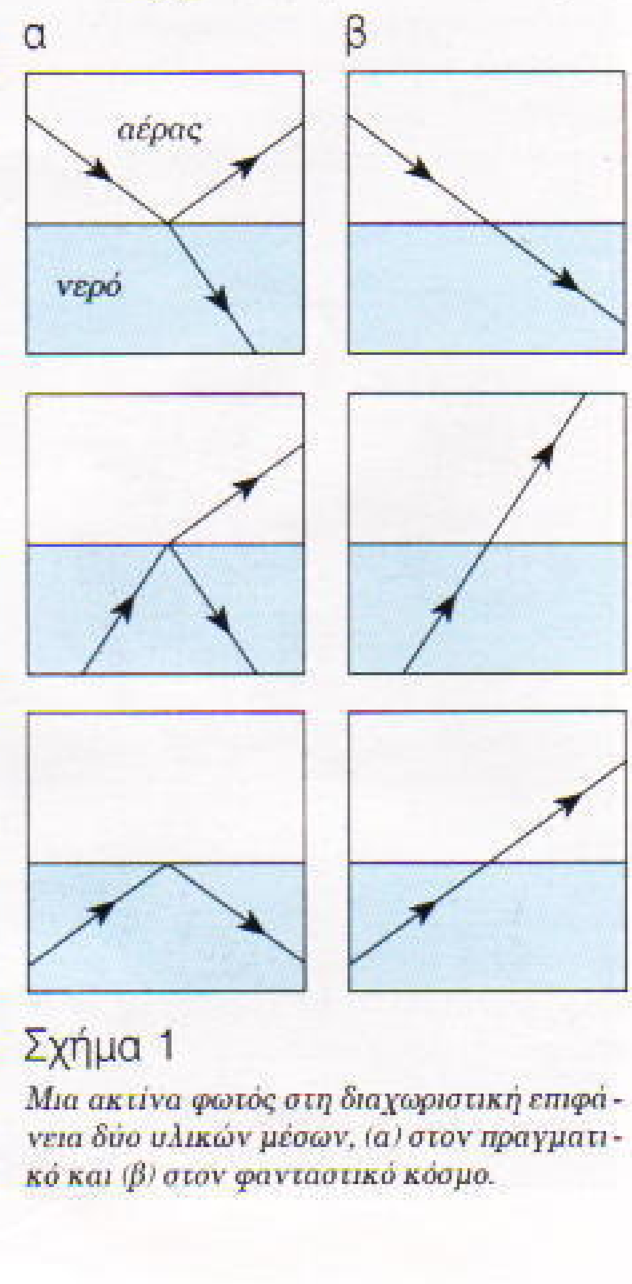
«ΚΑΙ ΤΙ ΘΑ ΓΙΝΟΤΑΝ ΑΝ...;» Τα παιδιά θέτουν συχνά αυτή την ερώτηση. Και οι εκδοχές που ακολουθούν το «αν» παρουσιάζουν εξαιρετική ποικιλία. Πολύ συχνά αφορούν φυσικές διαδικασίες και φαινόμενα. Και κάθε φορά, αυτές οι ερωτήσεις μάς αναγκάζουν να δούμε με άλλο μάτι κάποια φυσική κατάσταση, να αποκομίσουμε μια βαθύτερη κατανόηση του ενός ή του άλλου φαινομένου, ή του ρόλου και του εύρους εφαρμογών κάποιου συγκεκριμένου νόμου της φυσικής.

Τι θα γινόταν, λοιπόν, αν η ταχύτητα του φωτός σ' ένα διαφανές υλικό ήταν ίδια με την ταχύτητα του φωτός στο κενό; Ίσως νομίσετε πως, με βάση τις τρέχουσες γνώσεις μας στη φυσική, πρόκειται για μια αφελή ερώτηση. Αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, για να δώσουμε μια απάντηση, χρειάζεται να αναδιφήσουμε ορισμένες πολύ οικείες και φαινομενικά προφανείς καταστάσεις. Επιπλέον, μόλις πριν από διακόσια χρόνια η εν λόγω ερώτηση μπορούσε να τεθεί με κάθε σοβαρότητα.

Ας θυμηθούμε, όμως, και την καθαρά μηχανιστική προσέγγιση των οπτικών φαινομένων, που κυριαρχούσε τον 17ο και τον 18ο αιώνα. Ορισμένοι επιστήμονες υποστήριζαν τη σωματιδιακή θεωρία του Νεύτωνα για το φως, σύμφωνα με την οποία το φως αποτελεί ροή μικρών, ταχύτατα κινούμενων «σωματιδίων». Άλλοι υποστήριζαν την κυματική θεωρία του Huygens, και θεωρούσαν πως το φως είναι ελαστικά κύματα τα οποία διαδίδονται μέσα σ' ένα συγκεκριμένο υλικό μέσο —τον λεγόμενο «αιθέρα»—, που καταλαμβάνει ολόκληρο το σύμπαν, συμπεριλαμβανομένου του εσωτερικού χώρου των διαφανών αντικειμένων. Παρ' όλα αυτά, για να ερμηνεύσουν γνωστά οπτικά φαινόμενα, χρειαζόταν να αποδώσουν στον αιθέρα παράξενες και, ορισμένες φορές, ανεξήγητες ιδιότητες. Για παράδειγμα, υποχρεώθηκαν να θεωρήσουν πως η ταχύτητα αυτών των «ελαστικών» φωτεινών κυμάτων εξαρτιόταν από το είδος των αντικειμένων που «περιείχαν» τον αιθέρα. Αυτό όμως προκαλούσε σύγχυση: εκ πρώτης όψεως φαινόταν πως η ταχύτητα διάδοσης των ελαστικών διαταραχών στον πανταχού παρόντα αιθέρα έπρεπε να είναι παντού η ίδια. Επομένως, κάλλιστα θα μπορούσε να έχει ανακύψει το ερώτημα: η ταχύτητα του φωτός είναι όντως ίδια στο κενό και στα διάφορα υλικά σώματα;

Εμείς από την πλευρά μας θα υποθέσουμε πως αυτό πράγματι συμβαίνει, και θα παρακολουθήσουμε τις «συνέπειες» αυτής της παραδοχής. Φυσικά, θα χρησιμοποιήσουμε τις τρέχουσες γνώσεις μας για την πραγματική φύση των οπτικών φαινομένων, η οποία αντιστοιχεί στην καθημερινή μας εμπειρία. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα (v) του φωτός σε οποιοδήποτε μέσο είναι πάντοτε μικρότερη από την ταχύτητα (c) του φωτός στο κενό. Δηλαδή, πάντοτε $c > v$. Ο λόγος c/v είναι ο δείκτης διάθλασης n ενός συγκεκριμένου μέσου.

Υποθέστε πως η ταχύτητα του φωτός σε όλα τα διαφανή σώματα είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό: $v = c$. Αυτό θα σήμαινε πως για κάθε μέσο $n = 1$. Σ' αυτό τον καινούργιο κόσμο, λοιπόν, το φως δεν θα διεθλάτο στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών μέσων. Για παρά-



Σχήμα 1

Μια ακτίνα φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια δύο υλικών μέσων, (α) στον πραγματικό και (β) στον φανταστικό κόσμο.

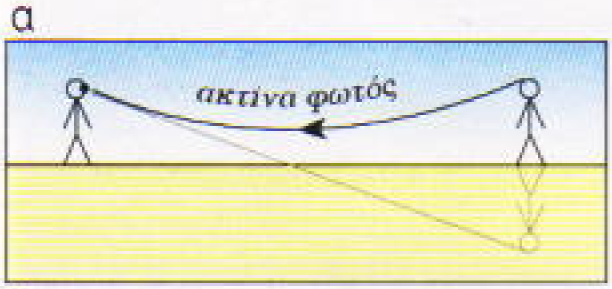
Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova

δειγμα, μια φωτεινή ακτίνα που περνάει από τον αέρα στο νερό δεν θα άλλαζε τη διεύθυνσή της. Ένα κουτάλι μέσα σ' ένα ποτήρι νερό δεν θα φαινόταν «σπασμένο», ένα νόμισμα στο βυθό μιας πισίνας δεν θα φαινόταν πιο κοντά απ' ό,τι είναι στην πραγματικότητα. Δεν θα ίσχυε επίσης το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης, όπως εικονίζεται και στο Σχήμα 1. Στον φανταστικό μας κόσμο, η φωτεινή ακτίνα «δεν δίνει καμιά σημασία» στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων. Όσον αφορά την οπτική, αυτή η επιφάνεια δεν θα υπάρχει καν!

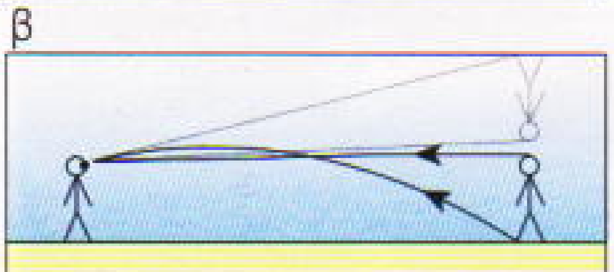
Αυτή η «μεταμόρφωση» θα έχει ως αποτέλεσμα αρκετές απώλειες. Όλες οι οπτικές συσκευές στις οποίες χρησιμοποιούνται φακοί —από τα συνηθισμένα ματογυάλια ώς τα μικροσκόπια υψηλής τεχνολογίας— θα είναι άχρηστες, επειδή οι φακοί δεν θα μπορούν πια να εστιάζουν ή να αφεστιάζουν τις φωτεινές ακτίνες. Επιπλέον, θα αχρηστευτούν οι τηλεπικοινωνίες με οπτικές ίνες, αφού το φως «συγκρατείται» στο εσωτερικό των διαφανών ινών μόνο λόγω του φαινομένου της ολικής εσωτερικής ανάκλασης στα τοιχώματα της ίνας.

Θα υπάρξουν οπωσδήποτε αλλα-

α

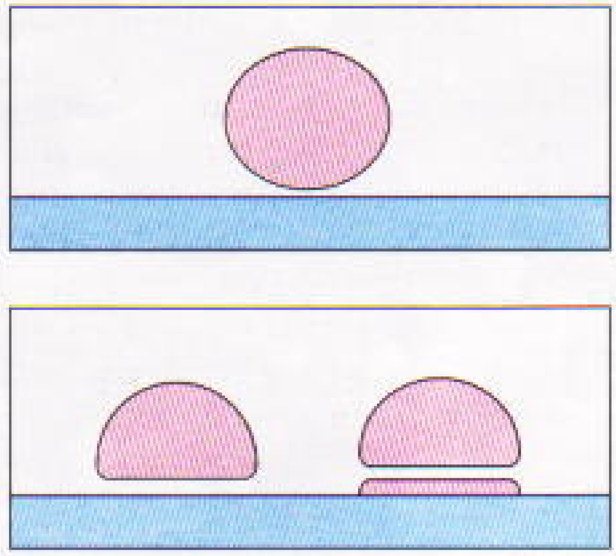


β



Σχήμα 2

Η προέλευση του αντικατοπτρισμού. (α) Ο αέρας είναι θερμότερος κοντά στο έδαφος, και έτσι η πυκνότητά του (άρα και ο δείκτης διάθλασής του) είναι μικρότερη από ό,τι υψηλότερα. Αυτό κάνει την ακτίνα να καμπυλώνεται προς τα πάνω. (β) Αν ο αέρας είναι θερμότερος στα ανώτερα στρώματα, ο δείκτης διάθλασης εκεί είναι μικρότερος, και έτσι οι φωτεινές ακτίνες κυρτώνονται προς τα κάτω.



Σχήμα 3

Τόσο ο «πεπλατυσμένος» δίσκος το ηλιοβασίλεμα, όσο και το κενό στον Ήλιο καθώς δύει αποτελούν συνέπεια της διάθλασης του φωτός στην ατμόσφαιρα της Γης.

γές και σε φυσικά φαινόμενα, κυρίως οπτικά, που λαμβάνουν χώρα στην ατμόσφαιρα της Γης. Όπως γνωρίζετε, η ατμόσφαιρα είναι ένα οπτικώς ετερογενές μέσο: ο δείκτης διάθλασής της μεταβάλλεται με το υψόμετρο, και εξαρτάται επίσης από τη θερμοκρασία, την υγρασία, την παρουσία προσμείξεων και την κίνηση των διαφόρων ατμοσφαιρικών στρωμάτων.

Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης διάθλασης του αέρα μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητάς του. Γι' αυτό οι φωτεινές ακτίνες που διαδίδονται στην ατμόσφαιρα της Γης δεν ακολουθούν ευθείες γραμμές, αλλά ελαφρά καμπυλωμένες τροχιές. (Πρόκειται για το γνωστό μας φαινόμενο που ονομάζεται ατμοσφαιρική διάθλαση του φωτός.) Μπορεί να αποδειχτεί ότι μια φωτεινή ακτίνα κυρτώνεται με τέτοιον τρόπο ώστε η τροχιά της να καμπυλώνεται προς την κατεύθυνση του μεγαλύτερου δείκτη διάθλασης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα αποτελεί τη βάση της δημιουργίας των αντικατοπτρισμών (Σχήμα 2). Η διάθλαση του φωτός στη γήινη ατμόσφαιρα προκαλεί οπτικές απάτες το ηλιοβασίλεμα, όπως την πλάτυνση του ηλιακού δίσκου ή την εμφάνιση ενός οριζόντιου κενού στον Ήλιο (Σχήμα 3). Το τρεμοφέγγισμα των άστρων[1] οφείλεται επίσης στην ατμοσφαιρική διάθλαση.

Στον καινούργιο οπτικό κόσμο που δημιουργήσαμε, η ατμόσφαιρα είναι ένα ομογενές οπτικό μέσο. Ανεξάρτητα από τις μεταβολές στην πυκνότητα του αέρα, ο δείκτης διάθλασης είναι παντού ο ίδιος —ισούται με 1. Επομένως, το φως δεν θα διαθλάται πια μέσα στην ατμόσφαιρα· θα εξαφανιστούν οι αντικατοπτρισμοί, τα αστέρια θα πάψουν να τρεμοφέγγουν, θα εκλείψουν τα ηλιοβασιλέματα που περιγράψαμε.

Γνωρίζουμε ότι μια δέσμη ηλιακού φωτός που διέρχεται μέσα από ένα τριγωνικό πρίσμα αναλύεται σε όλα τα χρώματα του ουράνιου τόξου. Αυτό συμβαίνει διότι ο δείκτης διάθλασης δεν εξαρτάται μόνο από το είδος του οπτικού μέσου, αλλά και από το μήκος κύματος του φωτός (αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως «διασκεδασμός του φωτός»). Το ιώδες φως χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, ενώ το ερυθρό από μικρότερο.

Τώρα, θεωρώντας ότι ο δείκτης διάθλασης είναι πάντοτε ο ίδιος, εννοούμε επίσης ότι δεν εξαρτάται ούτε από το οπτικό μέσο, ούτε από το μήκος κύματος του φωτός, ούτε από κάποιον άλλο παράγοντα. Επομένως, θα εξαφανιστεί επίσης ο διασκεδασμός του φωτός· το πρίσμα δεν θα αναλύει το φως σε διαφορετικά χρώματα (Σχήμα 4). Έτσι, δυστυχώς,

α

β

Σχήμα 4

(α) Το «ουράνιο τόξο» που εμφανίζεται κατά τη διέλευση του φωτός μέσα από ένα γυάλινο πρίσμα είναι αποτέλεσμα του διασκεδασμού του φωτός. (β) Στον φανταστικό μας κόσμο, δεν υπάρχει διασκεδασμός.

1. Δείτε το άρθρο «Τι κάνουν τα μικρά αστέρια» στο τεύχος Μαΐου /Ιουνίου 1994 του ελληνικού *Quantum*.

πολλές συσκευές θα αχρηστευτούν —σχεδόν όλα τα φασματόμετρα και οι φασματογράφοι, για παράδειγμα. Και δεν θα ξαναδούμε το ουράνιο τόξο στον ουρανό...

Έτσι, ο κόσμος έγινε πολύ φτωχότερος αφότου υιοθετήσαμε τα νέα οπτικά μας κριτήρια. Δεν συμβαίνει διάθλαση στις διαχωριστικές επιφάνειες των υλικών μέσων, διάθλαση στην ατμόσφαιρα, διασκεδασμός... Αλλά η ανάκλαση, η απλή ανάκλαση του φωτός στην επιφάνεια ενός διαφανούς υλικού; Λοιπόν, θα εξαφανιζόταν κι αυτή! (Θα μπορούσαμε να το έχουμε ήδη αντιληφθεί κοιτάζοντας το Σχήμα 1β.) Η εικόνα είναι πολύ εντυπωσιακή: αν σταθούμε στις όχθες μιας λίμνης, δεν θα μπορούμε να δούμε τα είδωλα των δέντρων, των θάμνων ή των σύννεφων μέσα στο νερό. Δεν θα μπορούμε να δούμε το φωτεινό μονοπάτι που οδηγεί στη σελήνη όταν αυτή κρέμεται χαμηλά στον ουρανό. Και όχι μόνο αυτό· δεν θα μπορούμε να δούμε το ίδιο το νερό —το μόνο που θα μπορούμε να δούμε θα είναι ο βυθός της λίμνης! Πρέπει να το παραδεχτείτε, το τοπίο θα άλλαζε δραστικά. Και απέχουμε ακόμη πολύ από το τέλος της ιστορίας —θα συμβούν κι άλλες αξιοσημείωτες αλλαγές.

Γιατί ο ουρανός είναι γαλανός; Λόγω της σκέδασης του φωτός στην ατμόσφαιρα. Η ένταση του σκεδασμένου φωτός είναι αντιστρόφως ανάλογη του λ^4, όπου λ είναι το μήκος κύματος του φωτός. Έτσι, σε διάχυτο φως, τα χρώματα που βρίσκονται κοντά στο ιώδες άκρο του φάσματος είναι πιο έντονα. Συνεπώς, το φάσμα του διάχυτου φωτός μοιάζει να είναι μετατοπισμένο προς τα μικρότερα μήκη κύματος: βλέπουμε γαλανό αντί για άσπρο. Όταν κοιτάζουμε τον ουρανό, μας φαίνεται γαλανός. Όταν κοιτάζουμε τον Ήλιο καθώς δύει, δεν αντιλαμβανόμαστε το διάχυτο φως αλλά τις άμεσες ακτίνες του Ήλιου, οι οποίες διαπερνούν το παχύ στρώμα της ατμόσφαιρας χωρίς να σκεδαστούν. Το φάσμα αυτού του φωτός είναι μετατοπισμένο προς τα μεγαλύτερα μήκη κύματος, και γι' αυτό ο Ήλιος που δύει μας φαίνεται κόκκινος, και ο ουρανός γύρω του πορτοκαλοκόκκινος.

Τι θα συμβεί σ' αυτά τα χαρακτηριστικά, λοιπόν, στον καινούργιο οπτικό μας κόσμο; Ας σκεφτούμε: πού οφείλεται η σκέδαση του φωτός στον πραγματικό κόσμο; Στις μεταβολές της πυκνότητας του αέρα, η οποία με τη σειρά της οφείλεται στη χαοτική μοριακή κίνηση. Αυτές οι μεταβολές είναι τυχαίες: η πυκνότητα μεταβάλλεται χαοτικά από σημείο σε σημείο κι από λεπτό σε λεπτό. Η σκέδαση του φωτός προκαλείται από τυχαίες μεταβολές του δείκτη διάθλασης του αέρα, οι οποίες με τη σειρά τους προκαλούνται από μεταβολές της πυκνότητας του αέρα. Με άλλα λόγια, το φως σκεδάζεται σε οπτικώς ετερογενή τμήματα της ατμόσφαιρας, που προκύπτουν εξαιτίας της θερμικής κίνησης των μορίων της.

Στον κόσμο της ανύπαρκτης σκέδασης, οι μεταβολές της πυκνότητας του αέρα δεν προκαλούν οπτικές ανομοιογένειες. Έτσι, το φως δεν θα σκεδάζεται στην ατμόσφαιρα —θα μπορούσαμε να δούμε μόνο τη μαύρη, διάστικτη με αστέρια έκταση του Διαστήματος, και τον φωτεινό, λευκό δίσκο του Ήλιου μέσα σ' αυτήν.

Αν το καλοσκεφτούμε, θα βλέπαμε εν τέλει τίποτε μέσα σ' αυτό τον περίεργο καινούργιο κόσμο; Αν η ταχύτητα του φωτός στο φακό του ματιού μας ήταν ίση με αυτήν στο κενό, τότε ο φακός δεν θα μπορούσε να εκτελέσει τη λειτουργία για την οποία έχει «σχεδιαστεί». Το μάτι μας θα έμοιαζε περισσότερο με τον γνωστό μας «σκοτεινό θάλαμο» (ή τη φωτογραφική μηχανή στενής οπής). Τι θα μπορούσε να διακρίνει μέσα από τη λεπτή του οπή; Τα μακρινά αντικείμενα! Τα κοντινά αντικείμενα, όμως, θα ήταν τυλιγμένα στο σκοτάδι.

Ποιος θα φανταζόταν πως μια τόσο απλή ερώτηση —«Τι θα συνέβαινε αν η ταχύτητα του φωτός ήταν παντού η ίδια, και μάλιστα όση η ταχύτητά του στο κενό;»— θα οδηγούσε στη δημιουργία ενός τόσο παράξενου κόσμου! ◙


$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$
$-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

Οι εκπλήξεις της τριτοβάθμιας

Μια εξίσωση μεγάλης σημασίας και μικρής χρησιμότητας

Dmitry Fuchs και Irene Klumova

Πολλοι από σας που διαβάζετε το *Quantum* θα έχετε ακούσει ότι εκτός από τον τύπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης υπάρχει και τύπος για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις. Είναι πιθανό, όμως, η γνώση σας γι' αυτό τον τύπο να περιορίζεται στο ότι «δεν είναι πραγματικά απαραίτητο να τον γνωρίζετε» (διότι είναι υπερβολικά περίπλοκος και δύσχρηστος). Το βέβαιο είναι, πάντως, ότι δεν θα τον βρείτε στα βιβλία του λυκείου.

Σε κάποιες περιπτώσεις, όμως, συναντάτε ένα πρόβλημα που οδηγεί σε τριτοβάθμια εξίσωση. Τότε αρχίζετε να αναρωτιέστε κατά πόσο είναι «τελείως άχρηστος» ένας τέτοιος τύπος, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητά του. Η αύρα μυστηρίου που τον περιβάλλει κεντρίζει την περιέργειά σας, και αρχίζετε την αναζήτηση σε μαθηματικές εγκυκλοπαίδειες και ειδικά εγχειρίδια.

Και ιδού τι περίπου βρίσκετε:

Πώς μοιάζει ο τύπος;

Μια τριτοβάθμια εξίσωση έχει τη μορφή

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Για να τη λύσουμε, παρατηρούμε αρχικά ότι μια απλή αντικατάσταση απαλείφει τον όρο x^2. Αρκεί μόνο να θέσουμε $x = y - a/3$.[1] Τότε

$$x^3+ax^2+bx+c=\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c$$

$$=y^3-ay^2+\frac{a^2}{3}y-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2}{3}a^2y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c$$

$$=y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)=0.$$

1. Το άθροισμα των ριζών της αρχικής εξίσωσης είναι $-a$· επομένως, αν αυξήσουμε κάθε ρίζα κατά $a/3$, το άθροισμά τους θα ισούται με 0. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στη συγκεκριμένη αντικατάσταση.

Έτσι, κάθε τριτοβάθμια εξίσωση ανάγεται σε μια εξίσωση χωρίς δευτεροβάθμιο όρο —δηλαδή, στη μορφή

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2}$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{3}$$

που συνοδεύεται από την «παραγωγή του τύπου» —μισή σελίδα υπολογισμών.[2]

Κάποιο πρόβλημα υπάρχει εδώ

Ας αγνοήσουμε προς στιγμήν το πώς παράγεται ο τύπος και ας προσπαθήσουμε να τον εφαρμόσουμε σε συγκεκριμένες εξισώσεις.

Παράδειγμα 1.

$$x^3 + 6x - 2 = 0.$$

Εδώ $p = 6$ και $q = -2$. Από τον τύπο μας προκύπτει $x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Πιθανότατα σας έχουν επανειλημμένα τονίσει στο σχολείο ότι οι ρίζες των εξισώσεων πρέπει να εκφράζονται σε πολύ απλή μορφή, και έτσι ίσως θεωρείτε ιδιαίτερα άκομψη αυτή την απάντηση. Πρέπει να ομολογήσετε, όμως, ότι ποτέ δεν θα μαντεύατε ότι μια τέτοια απλή εξίσωση έχει λύση την παραπάνω διαφορά κυβικών ριζών. Επομένως, αυτό το αποτέλεσμα καταχωρίζεται στο ενεργητικό του «ισολογισμού» μας.

Παράδειγμα 2.

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Ο τύπος (3) δίνει

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Εδώ η απάντηση είναι πιο περίπλοκη. Μπορούμε να

2. Μπορείτε να διαβάσετε σχετικά το άρθρο «Η μεγάλη τέχνη» στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1995 του *Quantum*.

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

την υπολογίσουμε προσεγγιστικά, και όσο ακριβέστερος είναι ο υπολογισμός, τόσο το αποτέλεσμα πλησιάζει το 1. Ο λόγος είναι πολύ απλός: η απάντηση *είναι* 1! —αυτό όμως δεν μπορούμε να το διαπιστώσουμε κοιτώντας απλώς τον τύπο,[3] και τούτο είναι ίσως το μειονέκτημά του. Αντίθετα, ο τύπος της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μας φανερώνει πάντα αν είναι ρητή ή όχι η λύση μιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές.

Παράδειγμα 3.

$$(x+1)(x+2)(x-3)=0.$$

Βλέπουμε αμέσως ότι αυτή η εξίσωση έχει τρεις λύσεις: −1, −2, και 3. Ας προσπαθήσουμε όμως να τη λύσουμε με τη βοήθεια του τύπου μας. Διώχνουμε τις παρενθέσεις —

$$x^3-7x-6=0$$

— και εφαρμόζουμε τον τύπο (3):

$$x=\sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}.$$

Τι είναι αυτό; Αρνητικός αριθμός κάτω από το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας! Αν επρόκειτο για δευτεροβάθμια εξίσωση, θα συμπεραίναμε ότι η εξίσωση δεν έχει λύση («δεν έχει πραγματικές λύσεις» θα υποστήριζαν οι πιο ενημερωμένοι αναγνώστες, ωστόσο η ενημέρωση ελάχιστη βοήθεια μπορεί να μας προσφέρει εδώ!). Εντούτοις, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση *έχει* (πραγματικές) λύσεις —και μάλιστα, τρεις. Επομένως, σ' αυτή την περίπτωση[4] ο τύπος μας αποτυγχάνει ολοκληρωτικά.

Αυτά και άλλα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η έλλειψη δημοτικότητας του τύπου (3) δεν οφείλεται στην περιπλοκότητά του (στην πραγματικότητα, δεν είναι καθόλου περίπλοκος) αλλά στη μικρή αξιοπιστία του: μερικές φορές «τα πάει καλά», άλλοτε δεν δίνει λύσεις, και άλλες φορές η μορφή της λύσης δεν είναι ικανοποιητική.

Αυτό το συμπέρασμα είναι κατ' αρχήν σωστό.

Ωστόσο, ας προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τον τύπο μας και να διαπιστώσουμε πότε είναι αξιόπιστος και πότε όχι. Αρχίζουμε με την απλούστερη περίπτωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η παράσταση $q^2/4+p^3/27$ είναι μη αρνητική, τότε το δεξιό μέλος του τύπου (3) είναι λύση της εξίσωσης (2).*

Απόδειξη. Αρχίζουμε την απόδειξη θέτοντας

$$\mu=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3) είναι απλώς το άθροισμα $\mu+v$, ενώ το γινόμενο μv ισούται με $-p/3$:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα το x με $\mu+v$ στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2):

$$(\mu+v)^3+p(\mu+v)+q=\mu^3+v^3+3\mu v(\mu+v)+p(\mu+v)+q$$

$$=\mu^3+v^3-p(\mu+v)+p(\mu+v)+q$$

$$=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}+q=0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πόσες λύσεις υπάρχουν;

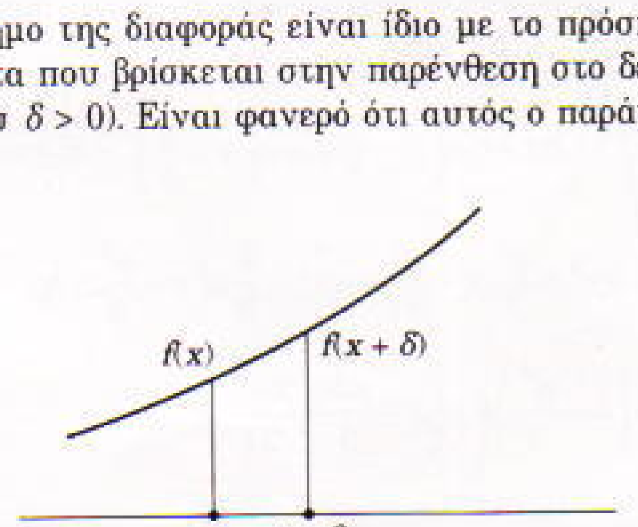
Αυτή είναι μια φυσιολογική ερώτηση, διότι επίλυση μιας εξίσωσης σημαίνει εύρεση όλων των λύσεών της. Επομένως, καλό είναι να γνωρίζουμε το πλήθος των λύσεων μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης.

Όπως γνωρίζουμε, μπορούμε να περιοριστούμε σε εξισώσεις της μορφής (2). Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση του αριστερού μέλους της (2) ($y=x^3+px+q$) και ας βρούμε πού (για ποιες τιμές του x) είναι αύξουσα και πού είναι φθίνουσα. Οι εξοικειωμένοι με τον απειροστικό λογισμό αναγνώστες μπορούν να διεκπεραιώσουν μόνοι αυτή την απλή έρευνα. Για τους υπόλοιπους δίνουμε έναν πιο στοιχειώδη υπολογισμό, που είναι ουσιαστικά ισοδύναμος με την παραγώγιση.

Συγκρίνουμε τις τιμές της συνάρτησής μας σε δύο γειτονικά σημεία x και $x_1=x+\delta$, όπου δ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός (Σχήμα 1). Ποια τιμή είναι μεγαλύτερη, η x^3+px+q ή η $x_1^3+px_1+q$; Ας θεωρήσουμε τη διαφορά αυτών των τιμών:

$$(x+\delta)^3+p(x+\delta)+q-(x^3+px+q)=\delta(3x^2+p+3\delta x+\delta^2).$$

Το πρόσημο της διαφοράς είναι ίδιο με το πρόσημο του παράγοντα που βρίσκεται στην παρένθεση στο δεξιό μέλος (αφού $\delta>0$). Είναι φανερό ότι αυτός ο παράγοντας,



Σχήμα 1

3. Απόδειξη: προφανώς, το 1 είναι ρίζα της εξίσωσής μας, η οποία (όπως θα δούμε στη συνέχεια) έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

4. Αυτή είναι η λεγόμενη *ανάγωγη περίπτωση* που σχολιάστηκε στο άρθρο «Η μεγάλη τέχνη» ως η περίπτωση που δημιούργησε πολλά προβλήματα στον Cardano.

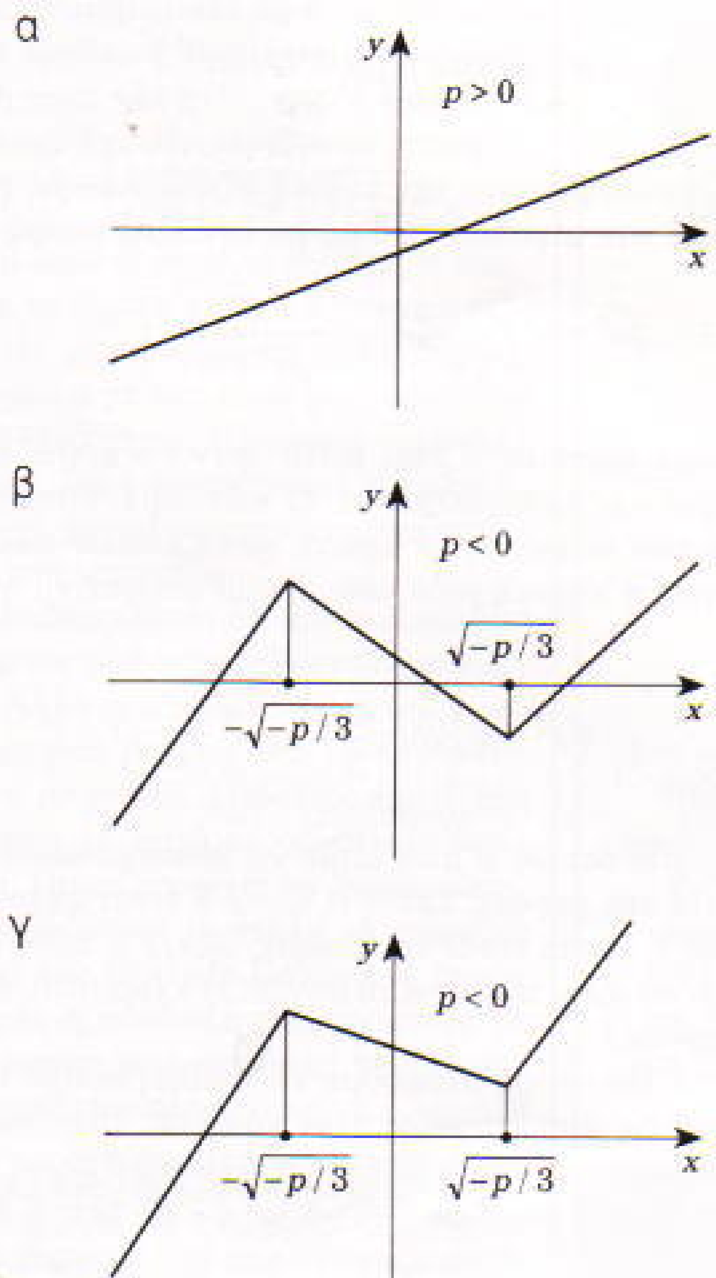
αν $3x^2 + p > 0$, τότε για κατάλληλα μικρό δ είναι θετικός, ενώ αν $3x^2 + p < 0$, τότε για κατάλληλα μικρό δ είναι αρνητικός.

Έτσι, σε κατάλληλα μικρή απόσταση από το σημείο x, η συνάρτηση $y = x^3 + px + q$ είναι *αύξουσα* αν $3x^2 + p > 0$, και *φθίνουσα* αν $3x^2 + p < 0$. Γνωρίζουμε όμως πολύ καλά ότι: (1) $3x^2 + p > 0$ για κάθε x αν $p > 0$, και (2) αν $p < 0$, τότε $3x^2 + p > 0$ για $x > \sqrt{-p/3}$ ή $x < -\sqrt{-p/3}$, και $3x^2 + p < 0$ για $-\sqrt{-p/3} < x < \sqrt{-p/3}$. Συνοψίζοντας:

1. Αν $p > 0$, τότε η συνάρτηση $y = x^3 + px + q$ είναι *αύξουσα* για κάθε x.
2. Αν $p < 0$, τότε η συνάρτηση $y = x^3 + px + q$ είναι *αύξουσα* για $x < -\sqrt{-p/3}$, φθίνουσα για $-\sqrt{-p/3} < x < \sqrt{-p/3}$, και πάλι αύξουσα για $x > \sqrt{-p/3}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτησή μας είναι σίγουρα θετική όταν το x είναι αρκετά μεγάλος θετικός αριθμός και αρνητική για κάθε αρνητικό x με αρκετά μεγάλη απόλυτη τιμή. Μπορούμε τώρα να χαράξουμε προσεγγιστικά τα γραφήματα της συνάρτησης $y = x^3 + px + q$ (Σχήμα 2α-2γ).

Αυτά τα προσεγγιστικά γραφήματα παρουσιάζουν μόνο τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα η συνάρτηση $y = x^3 + px + q$ και, επιπλέον, προβάλλουν το γεγονός ότι είναι αρνητική για τις απομακρυσμένες αρνητικές τιμές του x και θετική για τις απομακρυσμένες θετικές τιμές του x. Τα γραφήματα αυτά, όμως, μας επιτρέπουν να ανακαλύψουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσής μας. Βρίσκουμε ότι



Σχήμα 2

1. Αν $p > 0$ ή $p < 0$ και οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία $-\sqrt{-p/3}$ και $\sqrt{-p/3}$ είναι ομόσημες, τότε η εξίσωση έχει μία και μοναδική λύση (Σχήματα 2α και 2γ).
2. Αν $p < 0$ και οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία $-\sqrt{-p/3}$ και $\sqrt{-p/3}$ είναι ετερόσημες, τότε η εξίσωση έχει τρεις λύσεις (Σχήμα 2β).

Μπορούμε να βρούμε μια περισσότερο εύχρηστη διατύπωση αυτού του αποτελέσματος. Παρατηρήστε ότι οι τιμές στα σημεία $-\sqrt{-p/3}$ και $\sqrt{-p/3}$ που θεωρήσαμε προηγουμένως είναι ομόσημες αν το γινόμενό τους είναι θετικό και ετερόσημες αν είναι αρνητικό. Ας υπολογίσουμε αυτό το γινόμενο:

$$\left[\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q\right]\left[\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right]$$

$$= \left[-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right]\left[\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right]$$

$$= q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

Επομένως, στην περίπτωση κατά την οποία $p < 0$, το πλήθος των λύσεων είναι ένα ή τρία ανάλογα με το αν το $q^2 + 4p^3/27$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του μηδενός. Αφού $q^2 + 4p^3/27 > 0$ για κάθε $p > 0$, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το αποτέλεσμά μας ως εξής:

αν $q^2 + 4p^3/27 > 0$, τότε η εξίσωση (2) έχει μία και μοναδική λύση, και
αν $q^2 + 4p^3/27 < 0$, τότε η εξίσωση (2) έχει τρεις λύσεις.

(Έχουμε αγνοήσει την περίπτωση κατά την οποία κάποια ποσότητα μηδενίζεται. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, αν $q^2 + 4p^3/27 = 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες εκτός από την περίπτωση κατά την οποία $p = q = 0$, όπου έχει μία μόνο ρίζα.)

Μια απρόσμενη συνέπεια

Παρατηρήσατε κάτι εντυπωσιακό στα αποτελέσματά μας; Η παράσταση $q^2 + 4p^3/27$ διαφέρει από την επικίνδυνη παράσταση κάτω από τη ρίζα στον τύπο (3) μόνο κατά έναν ασήμαντο (σε ό,τι αφορά το πρόσημο) παράγοντα:

$$q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Αυτό σημαίνει πως, όταν η εξίσωση έχει τρεις λύσεις, η παράσταση στο υπόρριζο είναι αρνητική και ο τύπος δεν δίνει *τίποτε*. (Αυτό το είδαμε στο τρίτο μας παράδειγμα, τώρα όμως γίνεται φανερό ότι δεν ήταν σύμπτωση.) Διαφορετικά, η εξίσωση έχει μία λύση —αυτή που δίνει ο τύπος.

Επομένως, τώρα εξηγείται το φαινόμενο που παρατηρήσαμε προηγουμένως. Απομένει να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να εξαγάγουμε από τον τύπο μας κάτι που έχει νόημα στην περίπτωση των τριών λύσεων και του αρνητικού υπόρριζου.

Βοήθεια από τους μιγαδικούς αριθμούς

Αυτό το μέρος του άρθρου απευθύνεται σε αναγνώστες εξοικειωμένους με τους μιγαδικούς αριθμούς. Στην πραγματικότητα, «εξοικείωση» με τους μιγαδικούς δεν σημαίνει τίποτε περισσότερο από τη συνήθεια να χρησιμοποιούμε κάποιες συγκεκριμένες λέξεις σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Οι μιγαδικοί εμφανίστηκαν στα μαθηματικά με τον ίδιο σχεδόν τρόπο που εμφανίστηκαν —αρκετά νωρίτερα— οι αρνητικοί και οι κλασματικοί αριθμοί. Αφού δεν μπορούμε να εξαγάγουμε τη ρίζα όλων των αρνητικών αριθμών, είναι βολικό να επεκτείνουμε το «απόθεμα» των αριθμών μας με έναν νέο αριθμό i, του οποίου το τετράγωνο ισούται με -1. (Παρομοίως, οι αρνητικοί αριθμοί εισήχθησαν για να γίνει καθολική η πράξη της αφαίρεσης.) Μαζί με τον αριθμό i εισάγουμε όλους τους αριθμούς της μορφής $a + bi$, όπου a, και b είναι πραγματικοί. Ορίζουμε τότε γι' αυτούς τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις με τους πιο φυσιολογικούς κανόνες:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

(στην τελευταία εξίσωση θεωρήσαμε εξ ορισμού ότι $i^2 = -1$). Οι αριθμοί που κατασκευάσαμε ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί*. Οι αριθμοί a και b ονομάζονται αντίστοιχα *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του μιγαδικού αριθμού $a + bi$. Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσα πραγματικά και ίσα φανταστικά μέρη. Ήρθε επίσης η στιγμή να εισαγάγουμε τον *τύπο του de Moivre* (θα τον χρειαστούμε στη συνέχεια):

$$(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi) = \text{συν}(\theta+\varphi) + i\,\text{ημ}(\theta+\varphi)\cdot$$

αυτός ο τύπος είναι άμεση συνέπεια του τύπου πολλαπλασιασμού των μιγαδικών και κάποιων πολύ γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Ας επιστρέψουμε τώρα στον τύπο (3). Μπορούμε να προσπαθήσουμε να τον εφαρμόσουμε στην εξίσωση (2) στην περίπτωση κατά την οποία $q^2/4 + p^3/27 < 0$ εξάγοντας κυβικές ρίζες μιγαδικών αριθμών.

Η εξαγωγή της κυβικής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού $a + bi$ ισοδυναμεί με την επίλυση της εξίσωσης

$$(x+iy)^3 = a+bi$$

—δηλαδή, της εξίσωσης

$$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = a + bi,$$

που είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων με πραγματικούς αριθμούς

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=a, \\ 3x^2y-y^3=b. \end{cases}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε διάφορους τρόπους για να αναγάγουμε αυτό το σύστημα σε τριτοβάθμια εξίσωση. Για παράδειγμα, ως εξής:

$$y^2=\frac{x^3-a}{3x}\Rightarrow y\left(3x^2-\frac{x^3-a}{3x}\right)=b\Rightarrow y=\frac{3bx}{8x^3+a},$$

$$x^3-3x\frac{9b^2x^2}{\left(8x^3+a\right)^2}=a\Rightarrow\left(x^3-a\right)\left(8x^3+a\right)^2-27b^2x^3=0,$$

ή, θέτωντας $x^3 = z$,

$$(z-a)(8z+a)^2-27b^2z=0. \qquad (4)$$

Φυσικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά τον τύπο (3). Αποδεικνύεται όμως πως, όταν τον εφαρμόζουμε στην εξίσωση (4), οδηγούμαστε πάντα σε αρνητική παράσταση στο υπόρριζο. Και αυτό δεν πρέπει να μας προξενεί έκπληξη: υπάρχουν πάντα τρεις (μιγαδικές) κυβικές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $a + bi$, και οι κύβοι $z = x^3$ των πραγματικών μερών τους είναι οι τρεις (πραγματικές) ρίζες της εξίσωσης (4).

Επομένως, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3) με αυτό τον τρόπο. Μπορεί όμως να μας βοηθήσει σ' έναν προσεγγιστικό υπολογισμό των ριζών της εξίσωσης (2). Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του τύπου του de Moivre, από τον οποίο έπεται ότι

$$\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta=\left(\text{συν}\frac{\theta}{3}+i\,\text{ημ}\frac{\theta}{3}\right)^3.$$

Έτσι, για να εξαγάγουμε την κυβική ρίζα του $a + bi$, γράφουμε αυτό τον μιγαδικό αριθμό με την εξής μορφή:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right).$$

Επιλέγουμε τώρα το θ έτσι ώστε $\text{συν}\theta=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\text{ημ}\theta=b/\sqrt{a^2+b^2}$ (μπορούμε να το κάνουμε, επειδή το άθροισμα των τετραγώνων αυτών των αριθμών ισούται με 1). Τότε, η κυβική ρίζα του $a + bi$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\text{συν}\frac{a}{3}+i\,\text{ημ}\frac{a}{3}\right).$$

(Παρατηρήστε ότι ως θ μπορούμε να θέσουμε οποιαδήποτε γωνία της μορφής $2k\pi + \theta$, όπου k είναι ακέραιος. Επομένως, η γωνία είναι της μορφής $2k\pi/3 + \theta/3$, κάτι που μας δίνει τρεις τιμές για το $\text{συν}(\theta/3) + i\,\text{ημ}(\theta/3)$, όπως και θα έπρεπε.)

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τις κυβικές ρίζες στον τύπο (3). Στην πραγματικότητα, χρειαζόμαστε μόνο το *πραγματικό μέρος μιας από τις δύο*: αν η μια ρίζα ισούται με $c + di$, τότε η άλλη είναι ίση με $c - di$ (αποδείξτε το!), και το άθροισμά τους ισούται με $2c$.

Αυτή όμως η προσεγγιστική μέθοδος (την οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε χρησιμοποιώντας, ας πούμε, μια αριθμομηχανή τσέπης) είναι πιο περίπλοκη και λιγότερο ακριβής απ' ό,τι η μέθοδος δοκιμής και συνεχών επαναλήψεων που εφαρμόζεται συνήθως.

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν απομνημονεύουμε τον τύπο (3) —στην πράξη, δεν είναι το χρησιμότερο εργαλείο για την επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων.

Ποια είναι η χρησιμότητά του;

Η σπουδαιότητα του τύπου της τριτοβάθμιας (ή του «τύπου του Cardano» —τύπος (3)) έγκειται στο ότι μας δίνει απάντηση για «την επιλυσιμότητα με ριζικά των τριτοβάθμιων εξισώσεων». Αλλά τι ακριβώς σημαίνει *αυτό*;

Οι πρώτοι άρρητοι αριθμοί που συναντάμε είναι ρίζες εξισώσεων (και ο πρώτος απ' όλους όσους συναντάμε είναι συνήθως το $\sqrt{2}$, το μήκος της διαγωνίου ενός μοναδιαίου τετραγώνου). Η εξαγωγή ριζών, μαζί με τις αριθμητικές πράξεις, αυξάνει τους αριθμούς που έχουμε στη διάθεσή μας, και έτσι, εκτός από τους ρητούς, έχουμε αριθμούς όπως οι $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5/\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+1}$, κ.ο.κ. Είναι αρκετό αυτό το αυξημένο απόθεμα αριθμών για να λύνουμε εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές; Σύμφωνα με τον τύπο μας, αρκεί για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις —τουλάχιστον, όταν επιτρέπουμε μιγαδικές, και όχι μόνο πραγματικές, παραστάσεις στο υπόρριζο.

Αποδεικνύεται ότι και οι εξισώσεις τέταρτου βαθμού επιλύονται με ριζικά.[5] Αλλά *οι εξισώσεις πέμπτου ή μεγαλύτερου βαθμού δεν είναι επιλύσιμες με ριζικά.* Πιθανώς έχετε ήδη ακούσει γι' αυτό το τελευταίο θεώρημα. Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε διαβάζοντας τη στήλη «Αναδρομές Ι» για τον Évariste Galois στο παρόν τεύχος, η απόδειξή του, αντίθετα με την άποψη που επικρατεί γενικά, είναι αρκετά απλή. ◘

5. Αυτό εξηγήθηκε στο άρθρο «Η μεγάλη τέχνη», όπως και στο «Όσα βάζετε τόσα παίρνετε» του τεύχους Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1995 του *Quantum*.

КВАΝΤΙΚΑ ΧΑΜΟΓΕΛΑ

Μαθηματικοί, φυσικοί και μηχανολόγοι

Επιστημονικά ανέκδοτα στο Internet

ΕΝΑΣ ΑΚΑΤΑΠΟΝΗΤΟΣ ΟΛΛΑΝΔΟΣ, ο Joachim Verhagen, έχει κάνει μια σπουδαία δουλειά για χάρη όλων μας. Επισκεπτόμενος ομάδες ενημέρωσης στο Internet και επικοινωνώντας μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου με μεμονωμένα άτομα έχει συγκεντρώσει εκατοντάδες επιστημονικά ανέκδοτα, και τα προσφέρει σε όλους στο World Wide Web. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα μικρό δείγμα από τη συνεχώς αυξανόμενη ανθολογία του, επιλεγμένο από το τμήμα όπου παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ελαττώματα και τα μικρά αλλά σημαντικά κατορθώματα των διαφόρων επιστημονικών ειδικοτήτων.

Ο Verhagen έχει εντοπίσει μια ενδιαφέρουσα μαθηματική σχέση μεταξύ των διαφόρων επιστημονικών κλάδων. Αν και παρατήρησε ότι κατά το κυνήγι των ανεκδότων επισκέπτεται συχνότερα ομάδες ενημέρωσης για θέματα βιολογίας, αναφέρει: «Το ότι υπάρχουν όλες αυτές οι ομάδες βιολογίας δεν σημαίνει ότι κυκλοφορεί πολύ χιούμορ περί των βιολόγων. Στην πραγματικότητα, όσο πιο "μαθηματική" είναι η επιστήμη, τόσο περισσότερο χιούμορ ανακαλύπτω. Η σχέση είναι περίπου, μαθηματικά : φυσική : χημεία : βιολογία = 8 : 4 : 2 : 1. Φαίνεται πως όσο πιο "μαθηματικές" είναι οι επιστήμες, τόσο περισσότερο χιούμορ έχουν».

Ολόκληρη η συλλογή μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση http://www.fys.ruu.nl/~nienhuys/scijokes. (Προειδοποιούμε ότι κάποια ανέκδοτα μπορεί να σοκάρουν μερικούς, παρότι στη συντριπτική τους πλειοψηφία είναι εντελώς αθώα.)

Η κόκκινη μπάλα

Δίνουν σ' έναν μαθηματικό, έναν φυσικό και έναν μηχανολόγο μια κόκκινη πλαστική μπάλα και τους ζητούν να υπολογίσουν τον όγκο της. Ο μαθηματικός μετρά προσεκτικά τη διάμετρό της και υπολογίζει ένα τριπλό ολοκλήρωμα. Ο φυσικός γεμίζει ένα δοχείο με νερό, βάζει μέσα την μπάλα και μετρά το νερό που εκτοπίζεται. Ο μηχανολόγος ψάχνει για το σχετικό μοντέλο και τον αύξοντα αριθμό του στους πίνακές του για κόκκινες πλαστικές μπάλες. (Προσθήκη ανωνύμου: «Αν συνέβαινε στην εταιρεία μου: ο μηχανολόγος ψάχνει για το μοντέλο και τον αύξοντα αριθμό, δεν τα βρίσκει, και ανακοινώνει στο διευθυντή του: "Δεν υπάρχει τέτοιος όγκος!"».

Βλάβη στην έρημο

Ένας φοιτητής του τμήματος υπολογιστών, ένας φοιτητής του τμήματος μηχανολογίας και ένας φοιτητής του τμήματος μετεωρολογίας διασχίζουν την έρημο με ένα τζιπ. Ξαφνικά το αυτοκίνητο σταματά και απομένουν αποσβολωμένοι να αναρωτιούνται τι συνέβη.

Ο φοιτητής της μηχανολογίας αποφαίνεται: «Πρέπει να έσπασε ο ιμάντας του ανεμιστήρα. Η μηχανή υπερθερμάνθηκε, επομένως πρέπει απλώς να περιμένουμε να κρυώσει, να φτιάξουμε τον ιμάντα, και όλα θα είναι εντάξει».

Ο φοιτητής της μετεωρολογίας απαντά: «Όχι, δεν φταίει αυτό. Είναι απλώς η τρομερή ζέστη της περιοχής, που δεν επιτρέπει τον σωστό εξαερισμό της μηχανής. Πρέπει να περιμένουμε να νυχτώσει».

Ο φοιτητής των υπολογιστών το σκέφτεται για λίγο, και μετά τους απαντά: «Μπορεί να έχετε δίκιο, αλλά τι θα λέγατε να βγούμε, να το κλείσουμε, και να ξαναμπούμε;»

Έρευνα στο σκοτάδι

Στα πλαίσια μιας έρευνας κλείδωσαν σε σκοτεινά δωμάτια έναν πτυχιούχο μαθηματικών, έναν φυσικής, και έναν βιολογίας.

Μία εβδομάδα αργότερα οι ερευνητές άνοιξαν το πρώτο δωμάτιο, ο βιολόγος έκανε την εμφάνισή του και τους ανέφερε: «Λοιπόν, κάθισα κάτω μέχρι που άρχισα να βαριέμαι, οπότε έψαξα το δωμάτιο, βρήκα μια κονσέρβα και την έσπασα στο πάτωμα.

Περιείχε κρέας, και μόλις πείνασα το έφαγα. Αυτό ήταν».

Μετά ελευθέρωσαν τον φυσικό, που τους είπε: «Περπάτησα παράλληλα στους τοίχους για να πάρω μια ιδέα της γεωμετρίας του δωματίου, και στη συνέχεια το έψαξα όλο με προσοχή. Μισό μέτρο αριστερά από την πόρτα και δύο μέτρα προς το εσωτερικό του δωματίου υπήρχε ένας μεταλλικός κύλινδρος. Έμοιαζε με κονσέρβα· την πέταξα στον αριστερό τοίχο με την κατάλληλη γωνία και ταχύτητα ώστε να ανοίξει, και την έφαγα».

Τέλος, οι ερευνητές άνοιξαν την τρίτη πόρτα, οπότε μέσα στο σκοτάδι άκουσαν μια μισοσβησμένη φωνή: «Ας υποθέσουμε πως *K* είναι μια ανοιχτή κονσέρβα...»

Παραδείγματα ορισμών

Τι είναι το π;

Μαθηματικός: «Το π είναι ο αριθμός που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της περιφέρειας ενός κύκλου και της διαμέτρου του».

Φυσικός: «Το π είναι $3{,}1415927 \pm 0{,}000000005$».

Μηχανολόγος: «Το π είναι περίπου 3».

Ό,τι πει ο γιατρός

Ρώτησαν έναν μαθηματικό, έναν φυσικό και έναν γιατρό «πόσο κάνει 2 επί 2».

Ο φυσικός έβγαλε ένα σημειωματάριο και άρχισε να γράφει. Έπειτα από τρεις ημέρες περίπλοκων υπολογισμών βρίσκει, χρησιμοποιώντας την ακτίνα της Γης και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης, ότι «βρίσκεται μεταξύ του π και του διπλάσιου της τετραγωνικής ρίζας του 3».

Ο μαθηματικός επέστρεψε ύστερα από μία εβδομάδα με μαύρους κύκλους κάτω από τα μάτια, και δήλωσε: «Φίλοι μου και συνάδελφοι, όντως υπάρχει λύση».

Ο γιατρός είπε απλά: «Τέσσερα».

Οπότε οι άλλοι, κοιτώντας τον υποτιμητικά: «Καλά τώρα, ας αφήσουμε την παπαγαλία...»

Ο Αϊνστάιν στα Ηλύσια Πεδία

Ο Αϊνστάιν πεθαίνει και πηγαίνει στον Παράδεισο, όπου τον πληροφορούν ότι η σουίτα του δεν είναι ακόμη έτοιμη. «Ελπίζω ότι δεν θα σας ενοχλήσει αν μείνετε μόνο γι' απόψε στον κοιτώνα..», τον ενημερώνει ο θυρωρός (που θα τον λέμε Πέτρο). «Λυπάμαι πολύ, αλλά είναι το καλύτερο που μπορώ να κάνω· πρέπει να μοιραστείτε το δωμάτιο με τους άλλους.»

Ο Αϊνστάιν απαντά ότι δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, και πως δεν θέλει να δημιουργείται ζήτημα για κάτι τόσο απλό. Έτσι, ο Πέτρος τον οδηγεί στον κοιτώνα, και μόλις φτάνουν αρχίζει να του συστήνει τους υπόλοιπους.

«Αυτός είναι ο πρώτος σας συγκάτοικος. Ο δείκτης νοημοσύνης του φτάνει το 180.»

«Υπέροχα!», λέει ο Αϊνστάιν. «Θα μπορούμε να μιλάμε για τα μαθηματικά όλη νύχτα.»

«Και από εδώ είναι ο δεύτερος συγκάτοικός σας. Ο δείκτης νοημοσύνης του είναι 150.»

«Θαυμάσια!», απαντά ο Άλμπερτ. «Θα μιλάμε συνέχεια για φυσική.»

«Και ορίστε ο τρίτος συγκάτοικός σας. Ο δείκτης νοημοσύνης του είναι 100.»

«Καταπληκτικά!», λέει ο Άλμπερτ. «Θα κουβεντιάσουμε για τις τελευταίες θεατρικές παραστάσεις.»

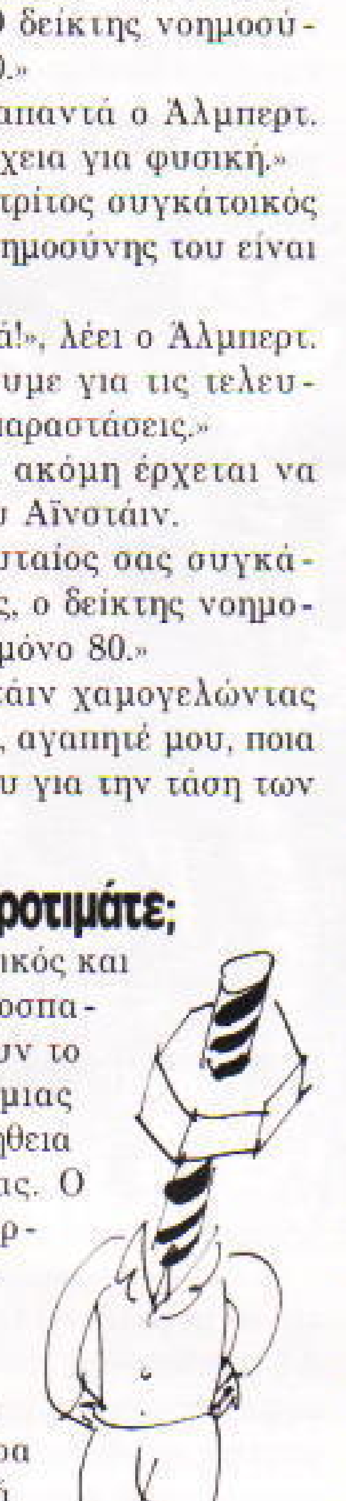
Και τότε ένας ακόμη έρχεται να σφίξει το χέρι του Αϊνστάιν.

«Είμαι ο τελευταίος σας συγκάτοικος. Δυστυχώς, ο δείκτης νοημοσύνης μου είναι μόνο 80.»

Οπότε ο Αϊνστάιν χαμογελώντας του λέει: «Λοιπόν, αγαπητέ μου, ποια είναι η γνώμη σου για την τάση των επιτοκίων;»

Ποια εκδοχή προτιμάτε;

Ένας μαθηματικός και ένας φυσικός προσπαθούν να μετρήσουν το ύψος του ιστού μιας σημαίας με τη βοήθεια μιας μετροταινίας. Ο μαθηματικός παίρνει τη μετροταινία, αρχίζει να σκαρφαλώνει στον ιστό, αλλά δυστυχώς ύστερα από λίγο γλιστρά και πέφτει στο έδαφος.



Ο φυσικός βλέπει παραδίπλα μια σκάλα, τη στηρίζει στον ιστό και διαπιστώνει ότι φτάνει μόνο μέχρι τη μέση του. Ανεβαίνει πρώτα τη σκάλα, και μετά δοκιμάζει να σκαρφαλώσει μέχρι την κορυφή, αλλά δυστυχώς έπειτα από λίγο γλιστρά και αυτός και πέφτει.

Καθώς κάθονται, λοιπόν, δίπλα στη σημαία και αναρωτιούνται τι θα κάνουν, βλέπουν να περνά ένας πολιτικός μηχανικός και αποφασίζουν να του εξηγήσουν το πρόβλημά τους. Ο μηχανικός, όμως, προσέχει μια μανιβέλα στη βάση του ιστού, τη γυρίζει, και ο ιστός ξαπλώνει μαλακά στο έδαφος. Απλώνει τη μετροταινία, μετά υψώνει ξανά τον ιστό και ανακοινώνει στον μαθηματικό και τον φυσικό: «Είναι 15 μέτρα».

Όταν απομακρύνεται ο μηχανικός, ο μαθηματικός γυρνά στον φυσικό και του λέει: «Αυτοί οι πολιτικοί μηχανικοί... τους ζητάς το ύψος και σου μετρούν το μήκος».

Υποκειμενικές εκτιμήσεις

Υπάρχει ένα ποτήρι γεμάτο ώς τη μέση με νερό.

Μαθηματικός: «Το ποτήρι είναι μισογεμάτο».

Φυσικός: «Το ποτήρι είναι μισοάδειο».

Αρχιτέκτονας: «Το ποτήρι είναι πολύ μεγάλο».

Αυτό δεν είναι αστείο!

Ένας μηχανικός, ένας φυσικός, και ένας μαθηματικός ανακάλυψαν ότι συμμετέχουν σ' ένα ανέκδοτο —ένα ανέκδοτο όμοιο με πολλά από αυτά που σίγουρα έχετε ακούσει. Έπειτα από κάποιες παρατηρήσεις και πρόχειρους υπολογισμούς, ο μηχανικός συνειδητοποίησε την κατάσταση και άρχισε να γελάει. Λίγες στιγμές αργότερα το κατάλαβε και ο φυσικός, και ξέσπασε σε γέλια, επειδή τώρα είχε και αρκετές πειραματικές ενδείξεις για να δημοσιεύσει ένα άρθρο.

Αυτό όμως δημιούργησε σύγχυση στον μαθηματικό, διότι είχε παρατηρήσει ευθύς εξαρχής ότι ήταν το θέμα ενός ανεκδότου, οπότε με βάση παρόμοια ανέκδοτα συμπέρανε αμέσως την παρουσία χιούμορ, πόρισμα ιδιαίτερα τετριμμένο για να είναι σημαντικό —πόσο μάλλον αστείο!

ΣΤΟ
ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ Ι

Η φυσική στον Τύπο

Διαφορικός λογισμός, «παχυσαρκία» και νόμοι της σταθερότητας κλίμακας

Albert A. Bartlett

ΤΟ ΣΗΜΕΡΙΝΟ ΑΡΘΡΟ ΕΧΕΙ ΒΑΣΙστεί σ' ένα κείμενο που δημοσιεύτηκε στο δημοφιλές περιοδικό διεθνούς ειδησεογραφίας *The Economist*, στις 16 Σεπτεμβρίου 1995. Ένα σύντομο άρθρο ανέφερε την αυξημένη κατανάλωση λιπαρών από τους νεαρούς Ιάπωνες, και εξηγούσε ότι «το μέσο δεκαεξάχρονο κορίτσι στην Ιαπωνία είναι κατά 4% βαρύτερο σε σχέση με το 1975, όμως μόνο κατά 1% ψηλότερο».

Αυτό δίνει την εντύπωση πως τα νέα κορίτσια στην Ιαπωνία παρουσιάζουν «τάση προς παχυσαρκία». Για να κατανοήσουμε και να αξιολογήσουμε τα παραπάνω, πρέπει να προσδιορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο τάση προς παχυσαρκία. Θα λέμε πως δεν υπάρχει τάση προς παχυσαρκία, αν, για κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, όλες οι γραμμικές διαστάσεις ενός ανθρώπου αυξάνουν κατά το ίδιο ποσοστό. Αν θεωρήσουμε ως ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το ανθρώπινο σώμα, και το μήκος, το πλάτος και το ύψος ενός ατόμου αυξηθούν όλα κατά 1%, τότε δεν υπάρχει τάση προς παχυσαρκία. Παρ' όλα αυτά, αν για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα οι εγκάρσιες διαστάσεις ενός ατόμου —το μήκος και το πλάτος του— αυξηθούν κατά μεγαλύτερο ποσοστό απ' ό,τι το ύψος του, τότε θα λέμε πως υπάρχει τάση προς παχυσαρκία. Μέχρι να εξετάσουμε προσεκτικότερα τα στοιχειώδη μαθηματικά της σταθερότητας κλίμακας, τα δεδομένα ποσοστά 1% και 4% οπωσδήποτε φαίνεται να υποδεικνύουν κάποια τάση προς παχυσαρκία.

Ας ρίξουμε λοιπόν πρώτα μια ματιά σε μεγάλες αλλαγές στο μέγεθος. Ας υποθέσουμε πως έχουμε διαφορετικά αντικείμενα, των οποίων τα μεγέθη υποδεικνύονται από διαφορετικές τιμές ενός μήκους L. Τα εμβαδά των επιφανειών των αντικειμένων θα μεταβάλλονται τότε ανάλογα με το L^2, και οι όγκοι τους με το L^3. Αν τα αντικείμενα είναι όλα κατασκευασμένα από το ίδιο ομογενές υλικό, οι μάζες και τα βάρη τους θα μεταβάλλονται επίσης ανάλογα με το L^3.

Για να κατανοήσουμε περισσότερο τα παραπάνω, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απλά παραδείγματα. Ένας κύβος έχει μήκος ακμής L, εμβαδόν επιφάνειας $6L^2$ και όγκο L^3. Για μια σφαίρα, η ακτίνα R αποτελεί ένα μέτρο του μεγέθους της. Το εμβαδόν της είναι $4\pi R^2$ και ο όγκος της $^4/_3\pi R^3$. Αυτή η γενική εξάρτηση του εμβαδού και του όγκου από τις γραμμικές διαστάσεις ισχύει για όλα τα όμοια αντικείμενα, έστω κι αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδόν ή τον όγκο των σωμάτων. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι αν, ως διά μαγείας, μπορούσαμε να δημιουργήσουμε ένα πλάσμα που έχει διπλάσιο ύψος, μήκος και πλάτος από μένα, τότε θα ίσχυαν τα ακόλουθα:

1. Εφόσον όλες οι γραμμικές διαστάσεις έχουν διπλασιαστεί, το μήκος μιας ζώνης για τη μέση του μεγαλόσωμου ανθρώπου θα πρέπει να έχει διπλάσιο μήκος από τη δική μου ζώνη. Το ίδιο θα ισχύει και για την περιφέρεια του λαιμού, το μήκος των χεριών, κ.ο.κ.

2. Το εμβαδόν του υφάσματος που χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε ρούχα γι' αυτόν θα είναι $2^2 = 4$ φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν του υφάσματος που χρειαζόμαστε για να

φτιάξουμε ρούχα του ίδιου στιλ για μένα.

3. Ο όγκος, η μάζα και το βάρος του θα είναι $2^3 = 8$ φορές ο όγκος, η μάζα και το βάρος μου.

Όλα αυτά έχουν κάποιες ενδιαφέρουσες συνέπειες. Ποια θα είναι η πίεση στις αρθρώσεις του γόνατου του μεγαλόσωμου ανθρώπου, σε σχέση με την πίεση στις δικές μου αρθρώσεις; Το εμβαδόν των αρθρώσεων του γόνατου έχει αυξηθεί κατά παράγοντα 4, ενώ το φορτίο που δέχονται έχει αυξηθεί κατά παράγοντα 8. Εφόσον η πίεση ισούται με τη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας, μπορούμε να συμπεράνουμε πως η πίεση στις αρθρώσεις του γόνατου θα αυξηθεί κατά παράγοντα $8/4 = 2$. Όταν ο μεγαλόσωμος άνθρωπος είναι όρθιος, οι αρθρώσεις του γόνατού του θα δέχονται διπλάσια πίεση από αυτήν που δέχονται οι δικές μου!

Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να κατανοήσουμε έναν ολόκληρο κόσμο φαινομένων. Η φύση έχει αναπτύξει μηχανισμούς για τις αρθρώσεις του γόνατου των οποίων η βέλτιστη λειτουργία επιτυγχάνεται σε ορισμένη περιοχή πιέσεων. Αν η φύση κατασκεύαζε μεγαλόσωμους ανθρώπους, θα έπρεπε να προνοήσει ώστε οι αρθρώσεις του γόνατου να δέχονται περίπου την ίδια πίεση που δέχονται και οι αρθρώσεις των κανονικών ανθρώπων. Εφόσον η άρθρωση του μεγαλόσωμου ανθρώπου πρέπει να δέχεται περίπου 8 φορές περισσότερο φορτίο, το εμβαδόν της άρθρωσης πρέπει να είναι περίπου 8 φορές μεγαλύτερο του αντίστοιχου εμβαδού των κανονικών ανθρώπων. Έτσι, ο άνθρωπος που θα έχει ύψος διπλάσιο από μένα θα πρέπει να έχει διάμετρο άρθρωσης γόνατου $\sqrt{8} = 2{,}8$ φορές μεγαλύτερη από αυτή των δικών μου αρθρώσεων. Τούτο σημαίνει ότι, σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις του σώματός του, η διάμετρος του ποδιού του μεγαλόσωμου ανθρώπου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι η διάμετρος του δικού μου ποδιού, σε σχέση με τις διαστάσεις του δικού μου σώματος.

Θυμηθείτε τα *Ταξίδια του Γκιούλλιβερ*, του Jonathan Swift: οι Λιλιπούτειοι είχαν ύψος μόλις 15 εκατοστών, και οι Μπρομπντιγκάνειοι ήταν πολύ ψηλότεροι από τον Γκιούλλιβερ, ο Swift ωστόσο τους περιέγραφε όλους να έχουν αναλογίες ίδιες με αυτές του Γκιούλλιβερ. Αυτό όμως δεν στέκει. Οι Λιλιπούτειοι θα χρειάζονταν πόδια πολύ μικρής διαμέτρου σε σχέση με το ύψος τους, και οι Μπρομπντιγκάνειοι θα χρειάζονταν πόδια με τεράστια διάμετρο σε σχέση με το ύψος τους. Σε μια πιο γενικευμένη κλίμακα, αυτό εξηγεί γιατί η διάμετρος των ποδιών ενός εντόμου είναι περίπου 1% του μήκους του κορμού του εντόμου, ενώ η διάμετρος του ποδιού ενός ελέφαντα είναι περίπου 10% του μήκους του κορμού του. Στην πιο ακραία περίπτωση, μας εξηγεί γιατί μια φάλαινα δεν μπορεί να περπατήσει. Ίσως κάτω από τον κορμό μιας φάλαινας δεν υπάρχει αρκετός χώρος για τέσσερα πόδια από σάρκα και οστά, επαρκούς διαμέτρου, που θα μπορούσαν να αντέξουν το μεγάλο βάρος του τεράστιου σώματος του κήτους. Ο μόνος τρόπος με τον οποίο μπορούν να κινηθούν οι φάλαινες είναι να βρίσκονται μέσα στο νερό και να εκμεταλλεύονται την αρχή του Αρχιμήδη.

Τι συμβαίνει, όμως, όταν η αύξηση του ύψους είναι μόνο 1%, που απέχει πολύ από το να διπλασιαζόταν; Χρειάζεται να γνωρίζουμε τι συμβαίνει με το εμβαδόν και τον όγκο του σώματος όταν όλες οι άλλες διαστάσεις αυξάνονται κατά το ίδιο μικρό ποσοστό. Για να εξετάσουμε αυτή την περίπτωση, πρέπει να εξαγάγουμε τη σημαντικότερη κατά τη γνώμη μου εξίσωση του διαφορικού λογισμού.

Ας υποθέσουμε πως έχουμε δύο μεταβλητές x και y, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$y = Ax^n, \qquad (1)$$

όπου οι A και n είναι σταθερές. Αν διαφορίσουμε και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης, παίρνουμε

$$\mathrm{d}y = nAx^{n-1}\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη την εξίσωση (2) με την (1), παίρνουμε

$$\frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x}. \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) αποτελεί την πρότασή μου για την «πιο χρήσιμη εξίσωση» του διαφορικού λογισμού.

Για να αποδείξουμε τη χρησιμότητά της, ας θεωρήσουμε την έκφραση για την περίοδο T ενός απλού εκκρεμούς:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (4)$$

Υποθέστε ότι θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα: αν αυξήσουμε το μήκος του εκκρεμούς κατά 1%, πόσο θα μεταβληθεί η περίοδός του; Σ' αυτή την περίπτωση, η ποσότητα A είναι η $2\pi/\sqrt{g}$, και ο n είναι $1/2$. Έτσι, η εξίσωση (3) γίνεται

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L}{L}. \qquad (5)$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει πως αύξηση του L κατά 1% (δηλαδή $\mathrm{d}L/L = 0{,}01$) συνεπάγεται αύξηση της περιόδου T κατά 1/2% (δηλαδή $\mathrm{d}T/T = 0{,}005$).

Μπορούμε στη συνέχεια να διερευνήσουμε τις συνέπειες της αύξησης του g κατά 1%. Η εξίσωση (3) γίνεται

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g}{g}. \qquad (6)$$

Αυτή η εξίσωση μας λέει πως αύξηση κατά 1% στην επιτάχυνση της βαρύτητας έχει ως συνέπεια *μείωση* στην περίοδο του εκκρεμούς κατά 1/2%. (Η μείωση υποδεικνύεται από το αρνητικό πρόσημο.) Η χρησιμότητα της εξίσωσης (3) είναι τεράστια. Αν οι δύο μεταβλητές συνδέονται με μια απλή σχέση όπως την (1), τότε μπορείτε να συμπεράνετε την ποσοστιαία μεταβολή της μιας μεταβλητής για δεδομένη ποσοστιαία μεταβολή της άλλης. Για παράδειγμα, αν θερμάνετε ένα αντικείμενο ώστε το φαινόμενο της θερμικής διαστολής να προκαλέσει αύξηση του μήκους του κατά 1%, τότε αμέσως γνωρίζετε πως το εμβαδόν της επιφάνειάς του αυξάνεται περίπου κατά 2% και ο όγκος του κατά 3%.

Και τώρα, ας επιστρέψουμε στους ανθρώπους. Αν το ύψος και όλες οι

Η συνέχεια στη σελ. 45 ⇨

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Επιστήμη, κοινωνία και συνείδηση

Ο Ilya Prigogine μιλά στο ελληνικό Quantum

Ο νομπελίστας Ilya Prigogine έδωσε αυτή τη συνέντευξη στο συνεργάτη του Quantum *Αιμίλιο Μπουρατίνο σε ένα διάλειμμα του συνεδρίου «Ο Einstein συναντά τον Magritte», που οργάνωσε το Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών αρχές Ιουνίου του 1995. Η συζήτησή τους έλαβε χώρα στο γραφείο του Prigogine στο Πανεπιστήμιο. Ο Αιμίλιος Μπουρατίνος επισημαίνει:*

«Ο αναγνώστης ενδέχεται να αναρωτηθεί τι δικαιολογεί τη σύζευξη κοινωνίας-θεωρητικής φυσικής που επιχειρεί στη συνέντευξή του ο Ilya Prigogine, κατεξοχήν εργάτης και απολογητής της θεωρίας του χάους. Το ερώτημα αυτό ενδέχεται να γίνει ακόμη επιτακτικότερο από τη στιγμή που ο αναγνώστης θα διαπιστώσει ότι ο διακεκριμένος επιστήμονας κάνει επίσης μερικές αναφορές στη συνείδηση —θέμα με έμμεσο μόνο ενδιαφέρον για τους φυσικούς.

»Είναι αλήθεια ότι χαοτικά φαινόμενα έχουν επισημανθεί στη λειτουργία των κοινωνικών μηχανισμών. Είναι επίσης αλήθεια ότι ανάλογα φαινόμενα έχουν επισημανθεί σε διάφορες εγκεφαλικές λειτουργίες από μέλη της επιστημονικής ομάδας Prigogine στα Ινστιτούτα Solvay των Βρυξελλών. Ακόμη, έχει διαπιστωθεί από τους νευροφυσιολόγους ότι η συνείδηση αναδύεται μέσω των εξειδικευμένων περιοχών του εγκεφάλου μάλλον παρά από αυτές. Στην παραπάνω λειτουργία μάλιστα ορισμένοι ειδικοί διαβλέπουν κάποιες κβαντικές διεργασίες.

»Κανένα όμως από τα δεδομένα αυτά δεν δικαιολογεί επαρκώς την τολμηρή σύζευξη που επιχειρεί ο Prigogine στη συνέντευξή του. Ιδίως δεν τη δικαιολογούν αν αναλογιστεί κανείς πως ο συνεντευξιαζόμενος χαολόγος δεν αναμείχθηκε ποτέ σε έρευνες με θέμα την κοινωνία ή τη συνείδηση.

»Πρέπει συνεπώς να διευκρινιστεί ευθύς εξαρχής πως η εισφορά του Prigogine στην κοινωνική προβληματική και τις σπουδές συνείδησης είναι έμμεση. Φορτίζεται από τη ριζοσπαστικότητα του συνολικού επιστημονικού του έργου. Έχοντας εξιχνιάσει ορισμένες καίριες πτυχές της φαινομενολογίας του χάους, ο νομπελίστας μάς προσφέρει πια μερικές πολύτιμες απόψεις για το πώς η εν λόγω φαινομενολογία προεκτείνεται στην κοινωνία και τον τρόπο του σκέπτεσθαι.

»Τούτο σημαίνει πως η εργασία του Prigogine δεν αγγίζει μόνο την πρακτική της επιστήμης. Αγγίζει τη δεοντολογία της. Έχει άμεση σχέση με το πώς πρέπει να λειτουργεί η συνείδηση, αν πρόκειται ο επιστήμονας να αντανακλά σωστά τον τρόπο με τον οποίο η χαολογία λέγει ότι "συμπεριφέρεται" η ύλη. Ως ένα μη γραμμικό, μη αντιστρεπτό, αυθορμήτως αυτοοργανούμενο όλο, ο κόσμος δεν μπορεί να γίνει κατανοητός —ή αντικείμενο ορθού χειρισμού— από έναν γραμμικό, αντιστρεπτό, ντετερμινιστικό και κατακερματίζοντα νου».

Ερ.: *Καθηγητά Prigogine, πολλοί εργάτες των κοινωνικών επιστημών και της φιλοσοφίας της επιστήμης κατηγορούν συχνά τους επιστήμονες ότι αγνοούν το πολιτισμικό υπόβαθρο της δραστηριότητάς τους. Εσείς συχνά δυσφορείτε για την κριτική τους. Εντούτοις, κατά τη διάρκεια της συζήτησής μας στο Hôtel Métropole την Τετάρτη (31 Μαΐου 1995, κατά το επίσημο δείπνο του συνεδρίου), αποσαφηνίσατε τις σκέψεις σας για το θέμα. Από τη μια μεριά αναγνωρίσατε το ρόλο της κοινωνίας στην εξέλιξη της επιστήμης. Από την άλλη επιμείνατε ότι η σωστή επιστήμη διαθέτει μια δική της δυναμική. Αυτή η δυναμική την οδηγεί πέρα από τα κρατούντα κοινωνικά πρότυπα. Η κοινωνία, είπατε, υπαγορεύει στους επιστήμονες τι να επιδιώξουν. Δεν τους υπαγορεύει πώς. Το τελευταίο το καθορίζουν οι ίδιοι. Υπό το κράτος αυτών των σκέψεων, θα ήθελα να σας ρωτήσω το εξής: Κατά την εναρκτήρια ομιλία σας στο συνέδριο, αναφέρατε τη γνωστή θεωρία του Karl Popper περί των δύο Κόσμων —του Κόσμου Α (της γυμνής αντικειμενικής πραγματικότητας) και του Κόσμου Β (της νοητικής του σύλληψης εκ μέρους ημών των ανθρώπων). Κατά τη γνώμη σας, τι ακριβώς επιτρέπει στους επιστήμονες να παρακάμπτουν τον Κόσμο Β και τις κυρίαρχες πολιτισμικές προκαταλήψεις; Τι πρέπει να κάνουν για να πλησιάσουν τον Κόσμο Α του Popper;*

Απ.: Δεν υπάρχει αμφιβολία πως η επιστήμη αντανακλά μια έκφανση του πολιτισμού. Η κινεζική επιστήμη έχει κατευθύνσεις εντελώς διαφορετικές από τη δυτική. Στη Δύση, η απώλεια του σεβασμού για τη φύση επηρεάστηκε σίγουρα από την πολιτισμική πραγματικότητα στα μέρη μας —ειδικά από τη θεολογία του 17ου αιώνα. Ουδείς, λοιπόν, μπορεί να αμφισβητήσει ότι ο πολιτισμός επηρεάζει την επιστήμη.

Ερ.: *Πόσο έντονη είναι η επιρροή αυτή; Καθίσταται ο επιστήμονας απόλυτος δέσμιος του κρατούντος κοινωνικού ήθους;*

Απ.: Όχι εντελώς. Στο πλαίσιο της κυρίαρχης παιδείας —του κυρίαρχου πολιτιστικού εποικοδομήματος— υπάρχει άνετος χώρος για να εκφραστεί κάποια ατομική δημιουργικότητα.

Ερ.: *Ας περάσουμε στους τρόπους με τους οποίους η επιστήμη χειρίζεται τα σήμερα ισχύοντα πρότυπα. Το θέμα αυτό έχει καίρια σημασία όχι μόνο για την επιστημολογία, αλλά και για την ιστορία και την ειδική ποιότητα του πολιτισμού. Δείχνει πως η δυτική επιστήμη έχει αναπτύξει κάποιους τρόπους με τους οποίους μπορεί και υπερβαίνει τις ίδιες τις πολιτισμικές της καταβολές.*

Απ.: Ξέρετε, ακόμη και στη μυθολογία —για να μην αναφέρω άλλους τομείς ανθρώπινου ενδιαφέροντος— συναντάμε ένα διάλογο ανθρώπου-φύσης. Υπάρχει ένας πανίσχυρος δεσμός εδώ. Μόλις χθες το συζητούσα με έναν άλλο φίλο από την Ελλάδα. Μου ανέφερε το παράδειγμα μερικών ψαράδων, οι οποίοι αντλούν τις πληροφορίες τους για τις ομαδικές μετακινήσεις των ψαριών από αφηγήσεις μυθολογικού χαρακτήρα. Άλλοι πάλι ψαράδες, συμπλήρωσε ο φίλος, πιστεύουν ότι η Σελήνη επηρεάζει τις εν λόγω μετακινήσεις.

Το σημαντικό εδώ είναι πως όλα αυτά βγαίνουν από κάποιες εξωτερικές παρατηρήσεις.

Ο Ilya Prigogine γεννήθηκε στη Μόσχα το 1917 και σπούδασε χημεία και φυσική στο Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών. Είναι μία από τις εξέχουσες φυσιογνωμίες της σύγχρονης επιστήμης. Ασχολείται κυρίως με τη θερμοδυναμική των μη αντιστρεπτών διαδικασιών και διατύπωσε τη θεωρία των δομών διασκορπισμού, για την οποία τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ χημείας το 1977. Είναι καθηγητής στο Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών, σε πολλά Πανεπιστήμια της Ευρώπης και της Αμερικής, μέλος των σπουδαιότερων επιστημονικών ακαδημιών και διευθυντής των Ινστιτούτων Solvay και του Κέντρου Στατιστικής Μηχανικής και Θερμοδυναμικής του Πανεπιστημίου του Τέξας. Μεταξύ άλλων έχει γράψει τα βιβλία *Entre le Temps et l'Éternité* και *Order out of Chaos* (Τάξη μέσα από το χάος, Εκδόσεις Κέδρος) μαζί με την Isabelle Stengers, *La Fin des certitudes*, καθώς και πλήθος άρθρων και εργασιών.

Ερ.: *Η εξωτερική επιβεβαίωση αποτελεί το μοναδικό κριτήριο του αντικειμενικώς ορθού;*

Απ.: Η δυτική επιστήμη έχει αναπτύξει και ένα άλλο ισχυρό κριτήριο, που νομίζω ότι αποτελεί ένα είδος κράματος εκείνου που μπορεί να τεκμηριωθεί εξωγενώς και εκείνου που δεν μπορεί. Αυτός ο συνδυασμός εντυπωσιάζει. Σηματοδοτεί την πλήρη μεταστροφή της αντίληψής μας για το σύμπαν.

Ερ.: *Θα θέλατε να επεκταθείτε λίγο περισσότερο σ' αυτό, κύριε καθηγητά;*

Απ.: Η νέα προσέγγιση άρχισε να παίρνει σάρκα και οστά πριν από εκατό χρόνια περίπου. Στις αρχές του αιώνα, το σύμπαν ήταν ακόμη νευτώνειο. Ο χρόνος, ο χώρος, η ύλη θεωρούνταν έννοιες ουσιαστικά ανεξάρτητες.

Τώρα, περί τα τέλη του δικού μας αιώνα, τα πράγματα έχουν αρχίσει ν' αλλάζουν. Η σχετική πορεία ξεκίνησε με τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας, η οποία πάντρεψε τις έννοιες του χρόνου και του χώρου. Συνεχίστηκε με τη γενική σχετικότητα, που έσμιξε το χρόνο, το χώρο και την ύλη. Τώρα, διαθέτουμε και όλες εκείνες τις θεωρίες για την αστάθεια και τα εξελισσόμενα σύμπαντα, που μας εισάγουν σε ό,τι έχει γίνει γνωστό ως «βέλος του χρόνου» —το πέρασμα μονής κατεύθυνσης από το παρελθόν στο μέλλον.

Το βέλος του χρόνου δεν αποτελεί απλή εικασία. Υπάρχουν καταστάσεις, όπως η ακτινοβολία των μαύρων οπών ή η διαστολή του σύμπαντος, που το επιβεβαιώνουν. Ό,τι μπορούμε να συναγάγουμε από τα φαινόμενα αυτά είναι πως η δυτική επιστήμη έχει θεσπίσει έναν μοναδικό διάλογο με τη φύση. Ο διάλογος αυτός διεξάγεται σε μια στάθμη τόσο υψηλή, ώστε μπορούμε να πούμε ότι όμοιός του δεν εμφανίστηκε ποτέ σε άλλον πολιτισμό κατά το παρελθόν. Είναι μοναδικός —και αισιοδοξώ πως θα συνεχιστεί.

Ερ.: *Υπό το φως όλων αυτών, ποιο θεωρείτε εσείς ως το κατεξοχήν χαρακτηριστικό —το βαθύτερο ποιοτικό υπόβαθρο— της επιστήμης του 20ού αιώνα; Σας ερωτώ, επειδή μόλις αναφέρατε την απο-εξαντικειμενίκευση της φύσης.*

Απ.: Τι εννοείτε με τη λέξη «απο-εξαντικειμενίκευση»; Δεν σας καταλαβαίνω.

Ερ.: *Με τον όρο αυτό συνοψίζω την ειδοποιό διαφορά ανάμεσα στην επιστήμη μετά και πριν από τον Αϊνστάιν. Για να γίνω σαφέστερος:*

Πριν από τον 20ό αιώνα, η φύση γινόταν αντιληπτή ως «σκληρά αντικείμενα». Ο Bertand Russell, όμως, έβαλε τον δάκτυλον επί τον τύπον των ήλων όταν είπε ότι η σύγχρονη επιστήμη αφυλοποιεί προοδευτικώς την ύλη. Γίνεται —όπως γλαφυρά έγραψε— σαν το χαμόγελο της Γάτας του Τσεσαΐρ στο Η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων. *Γίνεται δηλαδή σαν ένα χαμόγελο χωρίς κάποιον που χαμογελά!*

Είναι φανερό πως ο Russell εννοούσε ότι παλαιότερα η φύση γινόταν αντιληπτή ως σκληρά και περιγεγραμμένα αντικείμενα. Μετά τον Αϊνστάιν, δεν γίνεται το ίδιο. Αυτό εννοώ με τον όρο «εξαντικειμενίκευση» —και τον αντίθετό του «απο-εξαντικειμενίκευση».

Απ.: Ω, καταλαβαίνω. Λοιπόν, για μένα η φύση σήμερα αποτελεί μέρος μιας πλατιάς αφήγησης. Δεν ξέρω αν εννοούμε το ίδιο πράγμα. Για παράδειγμα, διάβασα πρόσφατα στο *Scientific American* ένα άρθρο για τη «Ζωή στο σύμπαν». Διακρίνει κανείς εκεί πολύ καθαρά μια αλυσίδα από φάσεις: Οι κοσμολογικές διεργασίες παράγουν ύλη, η ύλη παράγει ζωή, η ζωή παράγει άνθρωπο και ο άνθρωπος παράγει εν τέλει νοημοσύνη. Όσο διάβαζα το άρθρο αυτό ήταν αδύνατον να μην έρχεται στο νου μου η «Σεχραζάντ» —μια από τις ιστορίες του *Χίλιες και μία νύχτες*. Εκεί, η μια «αφήγηση» γεννιέται επίσης μέσα από την άλλη, για να γεννήσει με τη σειρά της την επόμενη.

Τα λέω αυτά διότι σήμερα το σύμπαν εμφανίζεται σαν μια διαδοχή αφηγήσεων. Οι περιγραφές της νευτώνειας φυσικής ή της κβαντικής μηχανικής συνιστούν απλουστεύσεις. Δεν αποκαλύπτουν όλες τις πτυχές του σχετικού ιστορικού. Επί παραδείγματι, η κλασική φυσική δίνει έμφαση στη σταθερότητα, την ισορροπία, την επανάληψη, και πάει λέγοντας. Δεν δίνει προσοχή στην αστάθεια, τη μη ισορροπία και τη μη αντιστρεπτότητα του χρόνου. Τώρα, έχει εμφανιστεί ένα νέο στοιχείο στο χώρο της επιστήμης —η χαοτική δυναμική—, με αποτέλεσμα οι παλιές ερμηνείες να μη βρίσκουν πια εφαρμογή.

Ερ.: *Εννοείτε ότι η επιστήμη κατόρθωσε να ξεπεράσει τις συμβάσεις του παρελθόντος;*

Απ.: Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι η ανακάλυψη των νέων στοιχείων που ανέφερα συντελείται σε μια εποχή όπου και η ίδια η ανθρωπότητα υφίσταται τις δικές της μεταλλαγές. Θα έλεγα μάλιστα ότι σήμερα οι δύο αυτές εξελίξεις εκφράζουν ένα είδος παράλληλης πορείας στο πλαίσιο του πολιτισμού.

Είναι αρκετά παράδοξο, διότι δεν υφίσταται κάποιος κανόνας που να λέει λόγου χάρη ότι η πληθυσμιακή έκρηξη, η ανακάλυψη των ασταθών σωματιδίων ή το εξελισσόμενο σύμπαν πρέπει καλά και σώνει να συμβαδίζουν. Τα πράγματα θα μπορούσε να συμβούν και αντίστροφα. Παραδείγματος χάρη, ασταθή σωματίδια θα μπορούσε να ανακαλυφθούν στο πλαίσιο ενός απολύτως σταθερού κοινωνικού καθεστώτος. Είμαστε όμως μάρτυρες ποικίλων παράλληλων εξελίξεων. Κατά κάποιον τρόπο, συμβαίνουν όλες ταυτοχρόνως.

Ερ.: *Επισημαίνετε μήπως σε όλα αυτά ένα είδος γενικότερου «κινήματος»;*

Απ.: Μου φαίνεται ότι είμαστε μάρτυρες μιας δύσκολης καμπής. Η οπτική μας για τη φύση αλλάζει. Το ίδιο ισχύει για πολλά άλλα. Πώς θα εξηγηθούν βεβαίως όλα αυτά είναι κάτι άλλο. Μερικές δυσκολίες οφείλονται στις ίδιες τις επιστημονικές εξελίξεις, μερικές στις ιατρικές, μερικές σε άλλα αίτια. Δεν υπάρχει μία ερμηνεία του φαινομένου, μοναδική και επαρκής. Το μόνο που μπορεί να πει κανείς είναι ότι ορισμένα στοιχεία συνέβαλαν στο Α αποτέλεσμα, ενώ άλλα στο Β. Όπως δεν μπορεί να εξηγηθεί γιατί ο Μότσαρτ έγραψε ένα συγκεκριμένο έργο ή πώς, έτσι δεν είναι δυνατόν να ερμηνευτούν οι ομοιότητες που διέπουν τις τρέχουσες αλλαγές στην επιστήμη, τον πολιτισμό και την κοινωνία.

Ερ.: *Τα όσα λέτε με αγγίζουν ιδιαίτερα. Και τούτο επειδή η μία από τις δύο λέξεις που χρησιμοποιούμε στα αρχαία ελληνικά για την επιστήμη είναι ακριβώς ό,τι εσείς αποκαλείτε «αφήγηση». Το αρχαιοελληνικό αντίστοιχο είναι «ιστορείν», από το οποίο αργότερα προήλθαν οι αγγλικοί όροι «history» και «story». Οι Έλληνες είχαν συλλάβει την επιστήμη ως είδος αφηγηματικής διαδικασίας —ακριβώς όπως τη χαρακτηρίζετε εσείς!*

Απ.: Πρέπει να καταλάβετε, όμως, ότι η επιστήμη ως αφήγηση αντιπροσωπεύει μια εξέλιξη πολύ πρόσφατη. Η κλασική επιστήμη εξέφραζε τα πάντα με στατικούς νόμους. Αυτό κατήντησε προβληματικό στις μέρες μας. Η σύγχρονη κοσμολογία ανοίγει νέους δρόμους. Με ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι θεωρίες που δείχνουν ότι το σύμπαν αναπτύχθηκε είτε μέσα από ασταθείς συνθήκες είτε λόγω κάποιας σημαντικής αλλαγής —όπως εκείνης την οποία μπορεί να επιφέρει η βαρύτητα όταν ενεργεί αρνητικά ως προς τις θετικές ενέργειες του υλικού υποβάθρου.

Ερ.: *Κατά την εναρκτήρια ομιλία σας στο συνέδριο είπατε ότι δεν συμμερίζεστε απολύτως τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης για τη γέννηση του σύμπαντος. Τώρα λέτε ότι το σύμπαν ενσωματώνει ένα είδος ιστορίας, μια αφήγηση που αυτοτροφοδοτείται. Εξελίσσεται πράγματι έτσι, με την αυτοτροφοδότηση;*

Απ.: Απολύτως. Πρόκειται για κάτι που με ωθεί να διαφωνώ με τις θέσεις που εκφράζει ο Paul Davies στο νέο του βιβλίο. Αναφέρει πως μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις του ανθρώπου είναι ότι ο χρόνος ξεκίνησε με τα πράγματα. Η θέση του είναι εντυπωσιακή. Εγώ όμως δεν μπορώ παρά να διαφωνήσω μαζί της.

Ερ.: *Γιατί;*

Απ.: Από τη μια μεριά, η αντίληψη πως ο χρόνος ξεκινάει με τα πράγματα δεν είναι καν το ίδιο σημαντική με την ανακάλυψη της Αμερικής από τον Χριστόφορο Κολόμβο. Ούτε μπορεί να θεωρηθεί ότι διαθέτει το ίδιο βάρος με την ανακάλυψη του πρωτονίου, του ηλεκτρονίου, άλλων νέων σωματιδίων, νέων αξιών ή και ζωικών ειδών άγνωστων μέχρι τώρα.

Από την άλλη, η άποψη του Davies ότι ο χρόνος ξεκινάει με τα πράγματα, που συνυφαίνεται αρρήκτως με την έννοια της Μεγάλης Έκρηξης, δεν αποτελεί τη μοναδική πιθανή ερμηνεία για τη δημιουργία του σύμπαντος. Ο λόγος είναι ότι, αν η Μεγάλη Έκρηξη εκληφθεί ως αφετηρία του χρόνου, γεννιέται το πολύπλοκο ερώτημα πώς δημιουργήθηκε ο ίδιος ο χρόνος —και πώς ή γιατί υπεισήλθε στον κόσμο.

Στο περίφημο βιβλίο του *Το χρονικό του Χρόνου* ο Stephen Hawking μιλάει για το χώρο μέσα στον οποίο γεννήθηκε το σύμπαν. Μετά την αρκτική του δημιουργία, ο χώρος μετασχηματίστηκε τυχαία σε χρόνο. Πιστεύετε πραγματικά ότι ο χρόνος αποτελεί τυχαίο παράγωγο του χώρου;

Βεβαίως, ο καθένας μπορεί να γράψει ό,τι θέλει —και αυτό έκανε ο Hawking. Το χαρτί δεν πρόκειται να διαμαρτυρηθεί! Γεγονός όμως παραμένει ότι ουδείς κατόρθωσε ώς τώρα να συλλάβει ένα μηχανισμό ικανό να επιφέρει τη μετάπτωση του χώρου σε χρόνο.

Ερ.: *Σε πρόσφατη διάλεξή σας τονίσατε ότι κατά τη γνώμη σας ο χρόνος υφίσταται προτού αρχίσει οτιδήποτε να υπάρχει πρακτικά.*

Απ.: Ναι, πρόκειται για μια θεώρηση που κινείται προς τη σωστή κατεύθυνση. Παρ' όλα αυτά, όταν αναφερόμαστε στην αφετηρία του σύμπαντος, θα προτιμούσα να μην είμαι απόλυτος σε τίποτε. Όταν ισχυρίζεται κάποιος ότι κατανοεί την αφετηρία του παντός, εξυπονοείται ήδη μια δεδομένη οπτική. Όπως και το αντίθετο. Παραδείγματος χάρη, εκπλήσσομαι ακούγοντας ανθρώπους, όπως τον Weinberg ή τον Hawking, να μιλούν για το τέλος της επιστήμης στο πλαίσιο μιας θεωρίας διαδοχικών σταδίων εξέλιξης, η γνώση των οποίων υποτίθεται ότι φτάνει τώρα στο τέρμα της. Δεν συμφωνώ. Αντίθετα, πιστεύω ότι βρισκόμαστε ακόμη στην αρχή της επιστήμης. Εξάλλου, η δυτική επιστήμη, όπως την εννοούμε σήμερα τουλάχιστον, είναι μια ιστορία μόλις τριών αιώνων. Είναι δυνατόν να εξάντλησε ήδη τις δυνατότητές της; Είμαι πεπεισμένος ότι έχει ακόμη μακρά πορεία μπροστά της.

Ερ.: *Παραμένουμε δηλαδή σ' ένα αιώνιο ξεκίνημα; Σκέφτομαι τη γνωστή ιστορία του ανθρώπου ο οποίος, για να κάνει το γάιδαρό του να τρέχει, κραδαίνει μπροστά* *στη μύτη του ζώου ένα καρότο κρεμασμένο από ένα καλάμι, που το κρατάει ενώ ο ίδιος βρίσκεται πάνω στο γάιδαρο. Κάπως έτσι μου μοιάζουν όσα λέτε για την αυτοτροφοδοτούμενη δημιουργία του σύμπαντος.*

Απ.: Εγώ θα έλεγα απλώς ότι δεν κατανοώ τη σκέψη πως η επιστήμη φτάνει σήμερα στο τέλος της πορείας της.

Ερ.: *Καλά, η επιστήμη δεν έφτασε στο τέλος της πορείας της. Τι φρονείτε για το μέλλον; Υπάρχει περίπτωση να εξαντλήσει κάποτε τη δυναμική της;*

Απ.: Νομίζω ότι θα αναφύονται συνεχώς νέες μορφές και νέα ερωτήματα. Βλέπουμε κάτι τέτοιο στο πεδίο της βιολογικής εξέλιξης. Όταν η φύση λύνει ένα πρόβλημα εισάγοντας στον κόσμο τα βακτηρίδια —τα οποία, παρεμπιπτόντως, δεν διαφέρουν από τα ανθρώπινα κύτταρα— προχωρεί σε πιο σύνθετες μορφές ζωής. Η πράξη της αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό νεωτερισμό στην πορεία ανάπλασης της φύσης. Έπειτα βέβαια έρχεται η σειρά της παραγωγής πολυκυτταρικών συστημάτων —και ακόμη αργότερα η πολύπλοκη εξειδίκευση του εγκεφάλου.

Αυτό σημαίνει πως η φύση προχωρεί από τον έναν τύπο οργάνωσης της ύλης στον άλλον. Κάτι ανάλογο πιστεύω ότι θα συμβεί με την επιστήμη. Από την αντιμετώπιση ενός τύπου προβλημάτων θα προχωρεί διαρκώς στην αντιμετώπιση κάποιου άλλου. Έτσι, η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί στον αιώνα τον άπαντα. Πάντοτε θα ανακύπτει μια καινούργια κατηγορία —ή επίπεδο— προβλημάτων που θα πρέπει να αντιμετωπιστούν.

Ερ.: *Δεν νομίζετε ότι ένας από τους λόγους για τους οποίους όχι μόνον οι επιστήμονες αλλά και εμείς οι άλλοι κοινοί θνητοί καθηλωνόμαστε στην ιδιαίτερη αντίληψή μας για την πραγματικότητα, είναι ότι από τη στιγμή που κατανοούμε κάτι σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο αντίληψης ή οργάνωσης, ενεργούμε αφαιρετικά απέναντί του και το εξαντικειμενικεύουμε —έτσι ώστε το κατανοηθέν αντικείμενο να γίνεται πλέον αναπόσπαστο εξάρτημα του μυαλού μας και να βλέπουμε τα πάντα υπό τη δική του οπτική; Μου φαίνεται πως αυτές οι σκέψεις απορρέουν από τα λεγόμενά σας, κύριε καθηγητά. Σας καταλαβαίνω όμως σωστά;*

Απ.: Ναι, με καταλαβαίνετε, αφού πιστεύω ότι είναι πρόωρη όλη αυτή η συζήτηση για το τέλος της επιστήμης. Εξάλλου, είναι βέβαιο ότι κανείς δεν μπορεί να εκφράσει κάτι νέο με τους όρους του παλαιού. Το θεωρώ αυτονόητο.

Ξέρετε, με εντυπωσιάζει ιδιαίτερα το γεγονός ότι υπάρχουν μεγάλα χάσματα στη λειτουργία όλων των πραγμάτων. Λόγου χάρη, δεν ανακύπτουν μόνο ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα στην τεχνολογία του ανθρώπου και εκείνη της φύσης. Η δεύτερη αποδεικνύεται πολύ ανώτερη από την πρώτη. Ταυτόχρονα, δεν μπορούμε να ξεχάσουμε ότι εμείς τα ανθρώπινα πλάσματα αποτελούμε μέρος της φύσης. Γι' αυτό και κατανοούμε, μέχρις ενός σημείου, τις δυνάμεις που τη διέπουν. Αυτό αποτελεί για μένα το πιο εντυπωσιακό στοιχείο της σύγχρονης επιστήμης. Τελικά, αρχίζουμε να κατανοούμε κάποιες από τις φυσικές δυνάμεις. Παρ' όλα αυτά, παραμένει το μεγάλο χάσμα ανάμεσα στις εξαιρετικά σύνθετες μη ισόρροπες δομές, που τις παράγουμε οι ίδιοι στα εργαστήριά μας, και στις απλές βιολογικές δυνάμεις, που δρουν αβίαστα στη φύση. Τόσο έκδηλο είναι αυτό το χάσμα, ώστε μερικοί πιστεύουν πως το γεφύρωμά του αποτελεί ένα από τα βασικότερα θέματα που πρέπει να απασχολήσουν την επόμενη γενιά.

Με άλλα λόγια, ξαναγυρίζουμε στο ίδιο πρόβλημα —και ταυτόχρονα στο ίδιο συμπέρασμα. Υπάρχουν χάσματα σε όλους τους τομείς —χάσματα ανάμεσα στη χημεία και τη βιολογία, χάσματα στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο εμφανίζεται η ύλη, χάσματα στο γιατί μια υγιής μορφή έχει αυτές ή εκείνες τις ιδιότητες και όχι άλλες, χάσματα στο γιατί το σύμπαν δημιουργεί σταθερές αξίες...

Αδυνατούμε να καλύψουμε αυτά τα χάσματα. Βγαίνει όμως ένα συμπέρασμα: Ενώ μας προξενούν βαθιά εντύπωση, δεν μας εμποδίζουν να διαλεγόμεθα δημιουργικά με τη φύση. Ο διάλογος αυτός, σημαντικός και πολύτιμος καθ' εαυτόν, αντανακλά την ικανότητά μας να προβλέπουμε τα πράγματα. Όπως ανέφερα προχθές στο Πανεπιστήμιο, για τον θεωρητικό φυσικό η υπέρτατη εμπειρία συνίσταται στο να προβλέπει κάποιες καταστάσεις, να διαπιστώνει ότι οι προβλέψεις του επαληθεύονται και τελικά να επιβεβαιώνει, μέσα από παρόμοιες επαληθεύσεις, την αντίληψή του για τη φύση.

Ερ.: *Ας πάμε λίγο προς τα πίσω, κύριε καθηγητά. Θα ήθελα να πιάσω το νήμα από το σημείο όπου αναφέρατε τη γνώμη σας ότι η επιστήμη συνιστά ένα είδος αυτοτροφοδοτούμενης αφήγησης —μια αέναη ιστορία που διαρκώς αντανακλά (και ξετυλίγει) την πρώτη της ύλη με απρόσμενο τρόπο.*

Η αντίστοιχη ελληνική λέξη για το "mind" είναι νους. Προήλθε από το ουσιαστικό «σνόρος», που χρησιμοποιούνταν αρχικά για τους σκύλους. Όταν ένας σκύλος οσμίζεται την ύπαρξη τροφής, ανακαλύπτει το δρόμο που οδηγεί σ' αυτήν με την όσφρηση. Νά λοιπόν η προέλευση της λέξης νους. Είχε συλληφθεί (αρχικά) ως «ικανότητα να οσμίζεται κανείς την αλήθεια» —και αυτά που μόλις εί-

πατε μου θύμισαν τις αρχαίες ρίζες της λέξης.

Αναφέρω το γεγονός γιατί από τον Αριστοτέλη και μετά η έννοια του νου άλλαξε. Από ιχνευτής γίνεται εξιχνιαστής. Το άτομο δεν βρίσκει πια την αλήθεια, την αποδεικνύει. Δεν τη διαισθάνεται, την οικοδομεί.

Απ.: Συμφωνώ με τα λεγόμενά σας. Δεν πρέπει όμως να λησμονούμε ότι ο νους διαθέτει μια δομή εξαιρετικά πολύπλοκη και επιτυχημένη. Είναι ικανός να χαρτογραφεί τον κόσμο —με αληθοφάνεια. Αλλά είμαι επίσης πεπεισμένος ότι διαθέτει και κάτι παραπάνω.

Ερ.: *Τι είναι αυτό;*

Απ.: Θα σας μιλήσω περιφραστικά. Ας ρίξουμε μια ματιά στην κοινωνία των εντόμων.

Υπάρχει εκεί κάτι εξαρχής ξεκάθαρο: Ό,τι εμείς θεωρούμε ως απλό μυρμηγκάκι, έχει ήδη στη διάθεσή του έναν ενδιαφέροντα χάρτη του κόσμου. Αν αφαιρέσουμε μερικά άτομα από τη μυρμηγκοφωλιά και τα βάλουμε αλλού, μάλλον θα πεθάνουν. Και τούτο, επειδή για να επιβιώσουν τα μυρμήγκια, χρειάζονται την κοινωνία τους. Μόνο σε συνεργασία μ' αυτήν μπορεί να λειτουργήσει το χαρτογραφικό τους σύστημα.

Υπάρχει όμως και κάτι άλλο ενδιαφέρον. Όταν αρχίζουμε να απομακρύνουμε περισσότερα μυρμήγκια —ας πούμε ολόκληρες ομάδες—, η δραστηριότητα της ομάδας που απομένει αλλάζει. Αυτό δείχνει ότι κάθε μυρμήγκι έχει χαρτογραφημένη μέσα του όχι μόνο την ίδια τη μυρμηγκοφωλιά αλλά και τη γύρω περιοχή.

Ερ.: *Έχει αποδειχτεί κάτι τέτοιο πειραματικά;*

Απ.: Ω, ναι. Μια σειρά από πειράματα, για τα οποία θα ήθελα πολύ να μιλήσω, είχαν κεντρικό άξονα το εξής: Χρησιμοποιήθηκαν δύο κουτιά. Στο ένα ο επιβλέπων εντομολόγος έβαλε μια μυρμηγκοφωλιά. Έπειτα προκάλεσε διαταραχή στο κουτί, μεταφέροντας τα μυρμήγκια στο δεύτερο. Παρακολουθώντας τις αντιδράσεις κάθε μυρμηγκιού, ο εντομολόγος παρατήρησε το εξής: Μερικά άτομα μετέφεραν τα αβγά από το παλιό κουτί και άρχισαν να τα εναποθέτουν σε κάποιο σημείο του νέου. Άλλα άτομα, όμως, έδειχναν παντελή έλλειψη ενδιαφέροντος. Γι' αυτό, ο επιβλέπων εντομολόγος αποκάλεσε την τελευταία ομάδα «τεμπέλικα μυρμήγκια», ενώ την πρώτη «ενεργητικά».

Κατόπιν ο εντομολόγος συνέχισε το πείραμα με την ίδια λογική. Χώρισε τα «τεμπέλικα» από τα «ενεργητικά» μυρμήγκια. Το αποτέλεσμα αποδείχτηκε εξαιρετικά ενδιαφέρον: Όταν τα «τεμπέλικα» βρέθηκαν μόνα τους και δεν υπήρχαν πια «ενεργητικά» για να συνεχίσουν τις κανονικές δραστηριότητες, τα «τεμπέλικα» άρχισαν να δραστηριοποιούνται.

Ερ.: *Εννοείτε ότι τα «τεμπέλικα» άτομα αυτοενεργοποιήθηκαν;*

Απ.: Ακριβώς. Έμοιαζαν να γνωρίζουν ότι τα άλλα «ενεργητικά» μυρμήγκια δεν ήταν πια σε θέση να εργάζονται, κι έτσι κάποια στιγμή δραστηριοποιήθηκαν τα ίδια —μόνα τους.

Ερ.: *Πολύ έξυπνο! Εφόσον εσύ δουλεύεις, εγώ έχω την άνεση να χαζεύω. Όταν όμως εσύ σταματάς, αρχίζω να δουλεύω εγώ, θέλω δεν θέλω...*

Απ.: Παρακαλώ, μη βγάζετε βιαστικά συμπεράσματα. Ίσως το να «χαζεύουν» μερικά μυρμήγκια αποτελεί μέρος του τρόπου επιβίωσής τους. Ειδικά, αν με το να «χαζεύουν» (ή με το να «περιπλανώνται» με τρόπο φαινομενικά άσκοπο) προσπαθούν (ενδεχομένως) να ανακαλύψουν νέες πηγές τροφής. Στην περίπτωση αυτή, το να χαζεύουν δεν ισοδυναμεί με αδράνεια. Ισοδυναμεί με τρόπο εξασφάλισης της μακροπρόθεσμης επιβίωσης.

Ερ.: *Πώς δηλαδή;*

Απ.: Κοιτάξτε, έχουμε μια μυρμηγκοφωλιά και τοποθετούμε κάποια ποσότητα τροφής εκεί κοντά. Αν τα μυρμήγκια ήταν ρομπότ (αυτόματα), θα ασχολούνταν όλα με την τροφή εκείνη. Δεν συμβαίνει όμως κάτι τέτοιο. Το βλέπουμε αυτό αν τοποθετήσουμε λίγο μακρύτερα και δεύτερη ποσότητα με τροφή καλύτερης ποιότητας. Τότε τα μυρμήγκια ανακαλύπτουν ταχύτατα τη δεύτερη ποσότητα —απλώς και μόνο επειδή δεν ασχολούνται όλα με την πρώτη.

Ακριβώς το γεγονός ότι μερικά έντομα δεν ασχολούνται καθόλου με την πρώτη πηγή —ότι δηλαδή «τεμπελιάζουν», ή, αν θέλετε, ανιχνεύουν συγκεντρωμένα την περιοχή μέσω κάποιου εγγενούς «χάρτη»— επιτρέπει στην κοινωνία τους να επισημαίνει ταχύτατα την παρουσία κάθε καινούργιας ποσότητας.

Ερ.: *Με ποιο μηχανισμό επιτυγχάνεται το αποτέλεσμα αυτό;*

Απ.: Το σύστημα φαίνεται να λειτουργεί ως εξής: Τα μυρμήγκια δεν εκτελούν όλα την ίδια εργασία. Μερικά κουβαλούν στη φωλιά τροφή από την πηγή που επισημάνθηκε στην αρχή. Άλλα επισκοπούν τον περιβάλλοντα χώρο σε κατάσταση φαινομενικής αδράνειας. Δεν δείχνουν κανένα ενδιαφέρον για το τι κάνουν οι σύντροφοί τους. Τα άτομα της πρώτης κατηγορίας είναι εκείνα που ο επιβλέπων εντομολόγος τα ονόμασε «τεμπέλικα».

Ερ.: *Πιστεύετε δηλαδή ότι τα «τεμπέλικα» άτομα διερευνούν το περιβάλλον ενώ περιδιαβάζουν φαινομενικώς άσκοπα και νωχελικά;*

Απ.: Ίσως, δεν είμαι βέβαιος. Ό,τι έχει σημασία είναι πως, αν αφαιρέσουμε τα «ενεργητικά» άτομα από τη φωλιά, τα «τεμπέλικα» αλλάζουν συμπεριφορά —και ενεργοποιούνται. Αυτό σημαίνει πως όχι μόνο τα τελευταία αλλά όλα τα μυρμήγκια διαθέτουν εγγενώς μια ικανότητα να «χαρτογραφούν» (και να αναχαρτογραφούν) τον περιβάλλοντα χώρο. Βρίσκονται σε συνεχή επαφή με τον έξω κόσμο, έτσι ώστε να μπορούν να επισημαίνουν αμέσως κάθε αλλαγή. Αυτό ακριβώς το βρίσκω συναρπαστικό στα πειράματα που ανέφερα.

Ερ.: *Αν όμως τα μυρμήγκια έχουν προικιστεί με μια παρόμοια ενδιάθετη έφεση, δεν πρέπει να υποθέσουμε ότι και οι άνθρωποι διαθέτουν κάτι αντίστοιχο —έστω και αν σήμερα δεν έχουν συνείδηση της ύπαρξής του;*

Απ.: Βεβαίως. Επιπλέον, έχουμε δημιουργήσει έναν πολιτισμό, ο οποίος μέσα από σωρευτικές προσπάθειες επιτρέπει πλέον να ενεργούμε συνειδητά προς μια τέτοια κατεύθυνση. Με άλλα λόγια, έχουμε εισαγάγει ένα νέο στοιχείο στην ιστορία της βιολογίας —πράγμα που εγείρει το ερώτημα για το πώς εξελίχθηκε βιολογικά ο ανθρώπινος εγκέφαλος ώστε να κατορθώσει να το αναπτύξει.

Ερ.: *Τα πειράματα που μόλις περιγράψατε, κύριε καθηγητά, φανερώνουν ότι τα μυρμήγκια αναπτύσσουν μεγάλη αλληλεγγύη όχι μόνο μεταξύ τους αλλά και με την ίδια την κοινότητά τους. Εμείς οι άνθρωποι έχουμε χάσει την έφεση αυτή.*

Απ.: Έτσι είναι. Όμως τα πειράματα που περιέγραψα δείχνουν και κάτι άλλο: ότι δεν αρκεί η επιταγή της απλής επιβίωσης για να ερμηνευτεί η εξέλιξη ενός είδους.

Όπως μου λένε φίλοι βιολόγοι, η σύνολη βιολογία των μυρμηγκιών αποδεικνύεται μεγαλύτερη από την ανθρώπινη όχι μόνο σε ηλικία αλλά και σε όγκο —αν υπολογιστεί ότι τα μυρμήγκια είναι πολύ μικρά και αντιστοιχούν πολλές δεκάδες χιλιάδες σε κάθε άνθρωπο. Η αντιστοιχία αυτή σημαίνει ότι, από τη σκοπιά της γενετικής απόδοσης, τα μυρμήγκια λειτουργούν το ίδιο αποτελεσματικά με τους ανθρώπους (αν όχι αποτελεσματικότερα).

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι εδώ υπεισέρχονται άλλοι παράγοντες.

Συγκεκριμένα, το θέμα έχει δύο όψεις. Η πρώτη είναι ότι οι άνθρωποι παρουσιάζονται ικανοί να αλληλεπιδρούν γνωστικά με κάθε ξεχωριστό μέρος της φύσης. Η δεύτερη είναι ότι παρουσιάζονται ικανοί να αναγνωρίζουν ό,τι συλλαμβάνουν στο επίπεδο όχι μόνο των αισθήσεων αλλά και της νόησης. Το να λέμε λοιπόν ότι η ανθρωπότητα βρίσκεται σήμερα σε μεταβατική φάση, αποκτά εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Ερ.: *Αυτό σημαίνει ότι θεωρείτε την παρούσα μεταβατική περίοδο πιο ενδιαφέρουσα από άλλες προηγούμενες;*

Απ.: Κατά κάποιον τρόπο, ναι.

Ερ.: *Γιατί, κύριε καθηγητά;*

Απ.: Επειδή κατά την τρέχουσα περίοδο η επιστήμη μάς φέρνει πάλι πιο κοντά στη φύση. Βλέπετε, η κλασική επιστήμη προόδευε πάντα βασιζόμενη σ' ένα είδος δυϊσμού. Από τη μια μεριά αναγνώριζε τη λεγόμενη *res extensa* (εκτατή ουσία), από την άλλη τη *res cogitans* (νοούσα ουσία). Με άλλα λόγια, αντιδιέστελλε τη γεωμετρική διάσταση προς τη γνωστική. Αυτό αλλάζει τώρα. Η αστάθεια που επισημαίνεται πια στη φύση, παράλληλα με τη θεωρία του χάους και τα λοιπά συμπαρομαρτούντα, μας φέρνουν για μία ακόμη φορά πιο κοντά σε ενιαία θεώρηση του κόσμου. Μας υποχρεώνουν να τον δούμε ως σύνολο.

Ερ.: *Θέλετε να πείτε ότι μας αναγκάζουν να απορρίψουμε την παλαιότερη τάση μας για ανεξέλεγκτη γνωστική αφαίρεση;*

Απ.: Μα βεβαιότατα.

Ερ.: *Κύριε καθηγητά, φοβούμαι ότι σας απασχόλησα πολύ περισσότερο απ' ό,τι είχατε αρχικά υπολογίσει. Δεν ξέρω λοιπόν πώς να σας ευχαριστήσω όχι μόνο για το χρόνο που διαθέσατε αλλά για τα όσα συναρπαστικά μου μεταδώσατε. Είναι σίγουρο πως οι σκέψεις σας θα αποτελέσουν την αφετηρία γόνιμου προβληματισμού για πολλούς ανθρώπους.*

Απ.: Δεν νομίζω ότι θά 'πρεπε να πείτε κάτι τέτοιο. Τα όσα σας είπα μου φαίνονται μάλλον τετριμμένα. Εξηγούμαι: Βλέπουμε παντού ανθρώπους οι οποίοι πιστεύουν ότι οφείλουν να συνεχίσουν να σκέφτονται όπως πριν από πενήντα χρόνια —κι αυτό προκαλεί πράγματι εντύπωση. Έχω διαφορετική γνώμη. Οι θεωρίες της αστάθειας, του χάους και της μη ισορροπίας αποδεικνύουν το αντίθετο. Δεν θεωρώ λοιπόν ότι τα δικά μου επιστημονικά συμπεράσματα είναι, κατά κάποιον τρόπο, τόσο απρόσμενα.

Ερ.: *Μπορεί σ' εσάς, κύριε καθηγητά, να μη φαίνονται απρόσμενα. Σ' εμάς, όμως, τους κοινούς θνητούς, φαίνονται —και πολύ μάλιστα! Εσείς είστε τελείως αφοσιωμένος στην έρευνα. Εμείς δεν είμαστε. Μας λείπει η εξοικείωση. Γι' αυτό εντυπωσιάζεστε που οι άλλοι εντυπωσιάζονται μαζί σας —που εισπράττουν τις νέες έννοιες του χάους, της αστάθειας και πιο πρόσφατα της μη αντιστρεπτότητας του χρόνου ως σταθμό εξαιρετικά σημαντικό στην πορεία του πολιτισμού.*

Απ.: Ό,τι έχει πραγματικό ενδιαφέρον είναι κάτι άλλο, κύριε Μπουρατίνε. Πλησιάζουμε στο τέλος του αιώνα και γίνεται φανερό πως η επιστήμη έχει πλέον βαθιές κοινωνικές προεκτάσεις. Μπορεί να θεωρήσετε ουτοπική αυτή την άποψη. Πιστεύω, όμως, ότι η ιστορία της ανθρωπότητας χαρακτηρίζεται μέχρι τώρα από ένα είδος «συγχρονικότητας» (με την έννοια που έδιναν στον όρο οι Jung και Pauli).

Εξηγούμαι και πάλι. Από τη στιγμή που πραγματοποιείται η μετάβαση από τη νεολιθική εποχή στην ιστορική, εισάγεται ένας «πολιτισμός διπλού χαρακτήρα». Ο πρώτος χαρακτήρας εκφράζεται μέσα από δραστηριότητες όπως την τέχνη, την κατασκευή των πυραμίδων, του μεγάλου σινικού τείχους κ.λπ. Ο δεύτερος εκφράζεται μέσα από το διαχωρισμό της εργασίας, τον οποίο συνεπάγονται οι εν λόγω δραστηριότητες. Ο διαχωρισμός αυτός έφερε μαζί του πολλή βία. Κατά κάποιον τρόπο είναι σαν να αποσχίστηκε η ζωή από τον ίδιο της τον εαυτό.

Εκείνο που συνέβη εν τέλει είναι πως η επιστήμη μάς ξανάδωσε σήμερα τη δυνατότητα να ατενίσουμε προς έναν πολιτισμό διαποτισμένο από τις σημαντικές αρετές της φιλίας και της ειρήνης. Δεν ξέρω βέβαια αν τελικά θα γίνει κάτι τέτοιο. Το ελπίζω πάντως. Τα συστατικά στοιχεία —οι δυνατότητες— υπάρχουν. Η ίδια η επιστήμη το πιστοποιεί.

Ερ.: *Όταν αναφερθήκατε προηγουμένως στους αρχαίους πολιτισμούς, τονίσατε την εσωτερική συνοχή που διέθεταν. Μήπως εννοείτε κάτι όπως το διαπιστωμένο γεγονός ότι από την Αγγλία ώς την Ιαπωνία υπήρχαν πρακτικές όπως το μπογιάτισμα των δαπέδων με το ίδιο χρώμα ή παρεμφερή ταφικά έθιμα;*

Απ.: Όχι. Έχω κάτι άλλο υπόψη μου. Σκέφτομαι λόγου χάρη τους κατοίκους της Νέας Γουινέας, όπου ζούσαν αρκετές μικρές φυλές —μερικές από τις οποίες υπάρχουν και σήμερα. Ανάμεσά τους ξεσπούσαν κατά καιρούς πόλεμοι, οι οποίοι όμως πρέπει να ονομαστούν «εθιμικοί». Οφείλονταν στο ότι κάποιοι από μια φυλή σκότωναν ένα μέλος κάποιας άλλης, ή κάτι ανάλογο. Τότε ξεσηκώνονταν τα μέλη της φυλής που είχε προσβληθεί. Εντούτοις, δεν προχωρούσαν σε πραγματικές συγκρούσεις με τα μέλη της φυλής στην οποία ανήκε ο δολοφόνος ή κακοποιός. Ο «πόλεμος» έπαιρνε απλώς τελετουργικό χαρακτήρα και κατέληγε σε περιορισμένη αιματοχυσία —αν γινόταν και αυτή.

Μέσα από παρόμοιες πρακτικές προσφερόταν άλλοτε η δυνατότητα στους ανθρώπους να ελέγχουν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις. Στο πλαίσιο της ίδιας της φυλής, τα πράγματα εξελίσσονταν με τρόπο αρκετά δημοκρατικό. Αυτό φαίνεται από τα έθιμα και τους νόμους των ανθρώπων εκείνων. Η μεταχείριση ήταν ίδια για όλους.

Ερ.: *Πιστεύετε λοιπόν ότι τα χαρακτηριστικά που μόλις αναφέρατε δεν υπήρχαν στους μεγάλους προηγμένους πολιτισμούς της αρχαιότητας;*

Απ.: Φαίνεται πως δεν υπήρχαν. Στην Αίγυπτο των πυραμίδων έχουμε μια ανώνυμη εργατική τάξη που απαρτίζεται από χιλιάδες ανθρώπους και είναι άσχετη με τους άρχοντες και τους Φαραώ. Το φαινόμενο αυτό εξηγεί γιατί οι μεγάλοι προφήτες, όπως ο Ιησούς, ο Βούδας και ο Κομφούκιος, τόνισαν πως ο πολιτισμός νοσεί. Εξηγεί επίσης γιατί η σύγχρονη επιστήμη —και μαζί της το σύγχρονο ήθος— αντιμετωπίζουν τα θέματά τους με ουσιαστική σφαιρικότητα, μεγαλύτερη παγκοσμιότητα και λιγότερη βία. Έχουμε εδώ μια νέα αντίληψη για τον ίδιο τον πολιτισμό: προσλαμβάνεται από μια περισσότερο ολική οπτική.

Ερ.: *Διαβλέπετε ενδεχομένως στην τάση αυτή τα πρώτα ψήγματα μιας νέας θρησκείας —μέσα σε εισαγωγικά βεβαίως;*

Απ.: Μέσα σε εισαγωγικά, ίσως. Ό,τι πραγματικά βλέπω είναι μια νέα βαθμίδα εξέλιξης για την ανθρωπότητα. Δεν είναι όμως απλό το ζήτημα. Δεν είναι κάτι που μπορεί να λάβει σάρκα και οστά μέσα στα επόμενα πενήντα χρόνια. Ο λόγος είναι πως εκείνο που βιώνουμε σήμερα είναι φρικτά βίαιο. Ακόμη και έπειτα από δύο παγκόσμιους πολέμους, βλέπουμε ολόγυρά μας τα κατάλοιπα ιδεολογιών που κηρύσσουν την ανισότητα, τις φυλετικές διακρίσεις, και τόσα άλλα. Δεν νομίζω ότι θα τα ξεπεράσουμε όλα αυτά εύκολα —ή, αν θέλετε, άνετα.

Ερ.: *Ποια στοιχεία σάς ενθαρρύνουν να πιστεύετε πως τα πράγματα θ' αλλάξουν —έστω και μακροπρόθεσμα;*

Απ.: Η επικοινωνία. Πρόκειται για κάτι που ήδη σφραγίζει τη ζωή συνεχώς περισσότερο. Επίσης, η αναγέννηση της Κίνας, της Ινδίας και των χωρών της Νότιας Αμερικής. Αυτά δίνουν φτερά στις ελπίδες για κάτι καλύτερο.

Ερ.: *Κατά τη διάρκεια του συνεδρίου αυτού στις Βρυξέλλες έτρεχα σαν τρελός από τη μία εισήγηση στην άλλη, επειδή πολλοί από τις κοινωνικές επιστήμες και τη φιλοσοφία δανείζονταν βασικές θεωρήσεις από το χώρο των θετικών επιστημών. Προσπαθούσαν να δουν πώς θα τις εφαρμόσουν στους δικούς τους τομείς —και με σαγήνευαν.*

Αναφέρω το γεγονός επειδή επιβεβαιώνει απολύτως ό,τι λέτε. Υπάρχει όντως τεράστιο ενδιαφέρον για ουσιαστικές αλλαγές στην κοινωνία, εμπνευσμένες από τις κατακτήσεις των σύγχρονων θετικών επιστημών.

Απ.: Ναι, έχει ήδη αρχίσει ν' αλλάζει ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται η φύση, τα ζώα και η ζωή γενικότερα. Προοδευτικά αναδύεται ένας νέος πολιτισμός, ένας νέος τύπος ανθρώπου. Αυτό σημαίνει ότι πολλές ορίζουσες συγκλίνουν προς την ίδια κατεύθυνση. Οι ελπίδες για κάτι ουσιαστικά νέο έχουν γερές βάσεις.

Ερ.: *Κύριε καθηγητά, σας ευχαριστώ ιδιαιτέρως που μοιραστήκατε τις σκέψεις αυτές μαζί μου. Αποτελούν ένα πολύ μεγάλο ευεργέτημα. Το μόνο που μπορώ να κάνω, σε αντάλλαγμα, είναι να σας στείλω ένα αντίγραφο της συνέντευξής σας πριν δημοσιευτεί —για την περίπτωση που θα θέλατε να κάνετε κάποιες αλλαγές.*

Απ.: Όχι, δεν χρειάζεται. Έχω εμπιστοσύνη σ' αυτόν που θα κάνει την απομαγνητοφώνηση!

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M66

Αναπαραγωγή μονάδων. Υπάρχει δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n του οποίου η δεκαδική παράσταση αποτελείται μόνο από άσους, να αποτελείται και η δεκαδική παράσταση του $P(n)$ επίσης μόνο από άσους; (A. Perlin)

M67

Αναδρομικά κλάσματα της μονάδας. Είναι δυνατόν να επιλέξουμε μια υπακολουθία με (α) 5, (β) n, (γ) άπειρο πλήθος όρων, από την ακολουθία 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... τέτοια ώστε κάθε όρος της (με εξαίρεση τους δύο πρώτους) να είναι ίσος με τη διαφορά των δύο προηγούμενων; (S. Tokarev)

M68

Αναζήτηση ομοιότητας. Βρείτε όλα τα σημεία X της πλευράς BC ενός τριγώνου ABC τα οποία είναι τέτοια ώστε το τρίγωνο XPQ να είναι όμοιο με το ABC —όπου P και Q είναι (α) τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων, (β) τα κέντρα βάρους, (γ) τα ορθόκεντρα των τριγώνων AXB και AXC. (E. Turkevich)

M69

Εκτίμηση της παραγώγου. Μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη σ' ένα διάστημα $[a, b]$ μήκους 4. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο x στο εσωτερικό του διαστήματος τέτοιο ώστε $f'(x) - (f(x))^2 < 1$ (η $f'(x)$ είναι η παράγωγος της f). (F. Vainshtein)

M70

Τομή πυραμίδας. Η εγκάρσια τομή ενός κανονικού τετραέδρου είναι ένα τετράπλευρο. Αποδείξτε ότι η περίμετρός του είναι μεγαλύτερη ή ίση του διπλάσιου του μήκους της ακμής του τετραέδρου, αλλά μικρότερη από το τριπλάσιό της.
(V. Proizvolov, A. Savin)

Φυσική

Φ66

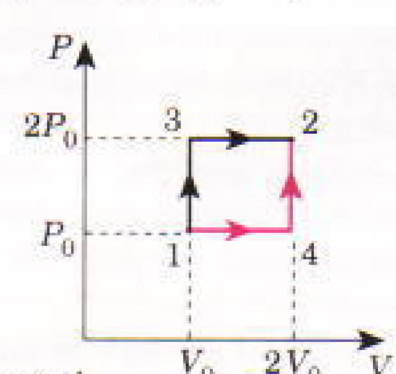
Υποβρύχιες ταλαντώσεις. Μια μικρή ξύλινη σφαίρα είναι στερεωμένη με νήμα σταθερού μήκους $\ell = 30$ cm στον πυθμένα ενός κυλινδρικού δοχείου γεμάτου με νερό. Η απόσταση από το κέντρο του πυθμένα ώς το σημείο όπου έχει στερεωθεί το νήμα είναι $r = 20$ cm. Το δοχείο περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του πυθμένα του. Πόση πρέπει να είναι η γωνιακή ταχύτητα ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία $\alpha = 30^\circ$ με την κατακόρυφο; (V. Mozhayev)

Φ67

Άμμος πάνω σε μεμβράνη. Μια οριζόντια μεμβράνη πασπαλίζεται με λεπτή άμμο. Η μεμβράνη ταλαντώνεται στο κατακόρυφο επίπεδο με συχνότητα $\nu = 500$ Hz. Ποιο είναι το πλάτος των ταλαντώσεων της μεμβράνης αν οι κόκκοι της άμμου εκτινάσσονται σε ύψος $h = 3$ mm ως προς τη θέση ισορροπίας της μεμβράνης; (B. Bukhovtsev)

Φ68

Μεταβολές αερίου. Ένα kmole (χίλια γραμμομόρια) ιδανικού μονοατομικού αερίου που βρίσκεται σε κανονικές συνθήκες μεταβαίνει από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 με δύο διαφορετικούς τρόπους: 1 → 3 → 2 και 1 → 4 → 2 (Σχήμα 1). Βρείτε το λόγο των θερμοτήτων που προσφέρονται στο αέριο κατά τη διάρκεια αυτών των δύο διεργασιών.



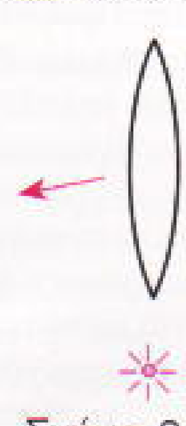
Σχήμα 1

Φ69

Πυκνωτής με ελαττωματική μόνωση. Μια επίπεδη πλάκα με παράλληλες στρώσεις έχει πάχος h και είναι κατασκευασμένη από ένα ελαφρώς αγώγιμο υλικό ειδικής αντίστασης ρ. Αυτή η πλάκα τοποθετείται στο εσωτερικό ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς, χωρίς όμως να έρχεται σε επαφή μαζί τους. Στη συνέχεια, ο πυκνωτής φορτίζεται ώστε η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του να γίνει V_0. Βρείτε το μέγιστο ρεύμα που θα διαπεράσει την αγώγιμη πλάκα όταν ο πυκνωτής βραχυκυκλωθεί. Το εμβαδόν κάθε οπλισμού του πυκνωτή και της αγώγιμης πλάκας είναι S, η απόσταση d ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις των οπλισμών, και $h < d$. (V. Deryabkin)

Φ70

Φακός και κεκλιμένο κάτοπτρο. Μια σημειακή πηγή φωτός τοποθετείται σε κάποια απόσταση κάτω από έναν κυρτό φακό (Σχήμα 2). Πού και πώς πρέπει να τοποθετηθεί ένα επίπεδο κάτοπτρο ώστε να παράγει μια παράλληλη φωτεινή δέσμη η οποία να εξέρχεται από το φακό κατά τη φορά που υποδεικνύει το βέλος; Σχεδιάστε την πορεία των φωτεινών ακτίνων. (V. Aleshkevich)


Σχήμα 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Πόσο διαφωτ

«Οι ακτίνες που εκπέμπουν τα μ
γραμμή.»

«Μια εικόνα σχηματίζεται από α
αντικείμενο και εισέρχονται στο

«Κάθε μικρό μέρος του κύματος
μήκος μιας ευθείας γραμμής π
σημείο. Μ' αυτή την έννοια, οι α
θεωρηθούν ευθείες γραμμές.

«Όσον αφορά το φως, δεν υπο
να διαδίδεται ακολουθώντας κ
προς το εσωτερικό μιας σκιάς.»

ΑΛΗΘΕΙΑ, ΤΙ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΕΙναι «προφανέστερο» από το φως; Ωστόσο, όπως δείχνουν τα παραπάνω αποσπάσματα, ορισμένες φορές τα μεγαλύτερα μυαλά της επιστήμης «περιπλανιούνταν στο σκοτάδι» όσον αφορά τις φωτεινές ακτίνες. Η αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, πειραματικά γνωστή από τα αρχαία χρόνια, αποτελούσε ένα είδος δοκιμασίας για οποιαδήποτε θεωρία φωτός, απαιτώντας μια ούτως ειπείν «ευθεία απάντηση». Οι ιδέες των μακρινών μας προγόνων, όσο αφελείς κι αν φαίνονται σήμερα, προετοίμασαν το έδαφος για την περαιτέρω ανάπτυξη

Christiaan Huygens

της κατανόησης της φύσης του φωτός και των φαινομένων του.

Η έννοια της «φωτεινής ακτίνας» αποτελεί προϊόν της καθημερινής μας εμπειρίας και είναι πράγματι πολύ παλιά. Προήλθε από την παρατήρηση των ουράνιων σωμάτων και των σκιών, από τη μελέτη της προοπτικής, με την οποία ασχολήθηκαν οι καλλιτέχνες και οι αρχιτέκτονες, και από τη μέτρηση εκτάσεων γης. Ακόμη και σήμερα, δεν υπάρχουν άραγε προβλήματα που είναι αδύνατον να λυθούν χωρίς αυτή την κατανόηση;

Το σημερινό Καλειδοσκόπιο σας παρέχει την ευκαιρία να αποκτήσετε μια καλή εικόνα της αρχής της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, που κρύβεται πίσω από το παιχνίδι του φωτός και της σκιάς σε πολλά φαινόμενα.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Ένα στρογγυλό μολύβι και μια κυλινδρική λυχνία φθορισμού τοποθετούνται παράλληλα το ένα στο άλλο. Ποια είναι η περιοχή πλήρους σκίασης του μολυβιού;

2. Γιατί δεν χρησιμοποιούμε κυλινδρικές λυχνίες φθορισμού στις συσκευές προβολής διαφανειών;

3. Με ποιον τρόπο πρέπει να τοποθετηθούν μια σημειακή πηγή, ένα επίπεδο πέτασμα και ένα αντικείμενο, ώστε η σκιά του αντικειμένου στο πέτασμα να είναι όμοια με το περίγραμμα του αντικειμένου;

4. Υπό ποιες συνθήκες ένα αδιαφανές αντικείμενο θα σχηματίζει σκιά χωρίς παρασκιά;

5. Πότε ένα σώμα σχηματίζει *μόνο* παρασκιά;

6. Με ποιον τρόπο μπορείτε να γνωρίζετε ότι βρίσκεστε στην παρασκιά ενός αντικειμένου;

7. Γιατί είναι δυσκολότερο να δείτε την τραχύτητα της επιφάνειας ενός δρόμου κατά τη διάρκεια της ημέρας παρά της νύχτας, οπότε ο δρόμος φωτίζεται από τους προβολείς του αυτοκινήτου σας;

8. Σ' ένα δάσος με ψηλά δέντρα που έχουν πυκνό φύλλωμα, μπορείτε, τις ηλιόλουστες μέρες, να δείτε κύκλους φωτός στο έδαφος. Τι είναι αυτές οι κηλίδες, και γιατί είναι κυκλικές;

9. Η σκιά μιας μπάλας είναι πάντα κυκλική;

10. Γιατί οι σκιές που σχηματίζουν τα πόδια σας στο έδαφος έχουν σαφές περίγραμμα, ενώ η σκιά του κεφαλιού σας είναι θολή;

11. Αν φωτίσουμε ένα αναμμένο κερί με έναν ισχυρό ηλεκτρικό λαμπτήρα, μπορούμε να δούμε πάνω σε μια λευκή οθόνη τη σκιά όχι μόνο του κεριού αλλά και της φλόγας του. Μπορεί μια πηγή φωτός (στην προκειμένη περίπτωση η φλόγα) να σχηματίζει τη δική της σκιά;

12. Ορισμένες φορές οι προβολείς φωτισμού είναι στραμμένοι προς το ταβάνι, και όχι προς το πάτωμα. Για ποιο σκοπό;

13. Οι σκιές που ρίχνουν τα κατακόρυφα δοκάρια ενός τέρματος ποδοσφαίρου είναι μακρύτερα το πρωί και το απόγευμα απ' ό,τι το μεσημέρι. Το μήκος της σκιάς του οριζόντιου δοκαριού αλλάζει κατά τη διάρκεια της ημέρας;

14. Χρησιμοποιώντας μια καρφίτσα, ανοίξτε μια μικρή τρύπα σε ένα κομμάτι χαρτόνι. Κλείστε το ένα μάτι σας, και κρατήστε το χαρτόνι σε απόσταση περίπου 10 εκατοστών μπροστά στο άλλο σας μάτι. Σηκώστε αργά μια καρφίτσα με το κεφάλι της προς τα πάνω, με τέτοιον τρόπο ώστε να αγγίξει τις

σμένοι είστε;

πια διαδίδονται σε ευθεία
—Ευκλείδης

ίνες που εκπέμπονται από ένα
οφθαλμό.» —Αλ-Χάζεν

πρέπει να διαδίδεται κατά
υ αναδύεται από ένα φωτεινό
τίνες φωτός μπορούν να
—Christiaan Huygens

χει περίπτωση κατά την οποία
πύλη διαδρομή ή να κάμπτεται
—Ισαάκ Νεύτων

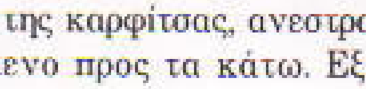
βλεφαρίδες σας. Στο κυκλικό φωτεινό φόντο της τρύπας παρουσιάζεται ένα είδωλο της καρφίτσας, ανεστραμμένο, κινούμενο προς τα κάτω. Εξηγήστε αυτό το φαινόμενο.

15. Μπορείτε να καλύψετε ένα άστρο με ένα σπίρτο; (Φυσικά, θα πραγματοποιήσετε τις παρατηρήσεις σας με το ένα μάτι κλειστό.)

16. Όταν κάθεστε κοντά σε μια φωτιά, γιατί σας φαίνεται πως από την άλλη πλευρά της τα αντικείμενα «τρεμοπαίζουν»;

17. Οι φωτεινές ακτίνες από τον Ήλιο είναι ουσιαστικά παράλληλες όταν φτάνουν στη Γη. Γιατί φαίνεται πως ανοίγουν σαν βεντάλια όταν περνούν μέσα από τα σύννεφα; (Δείτε το ζωγραφικό έργο της «Πινακοθήκης» του παρόντος τεύχους.)

18. Τι μπορείτε να πείτε για το μήκος των δύο μερών της οριζόντιας γραμμής που βλέπετε παρακάτω;



Μικροπειραματισμοί

Τοποθετήστε ένα πέτασμα σε μικρή απόσταση (μέχρι 50 εκατοστά) από ένα αναμμένο κερί. Παρεμβάλετε μεταξύ τους ένα μολύβι —πρώτα κατακόρυφα, στη συνέχεια οριζόντια. Πώς είναι οι σκιές που σχηματίζονται; Γιατί;

Είναι ενδιαφέρον ότι ...

...ο Ευκλείδης πρότεινε την ιδέα της ευθύγραμμης διάδοσης μιας ακτίνας φωτός, που είναι η θεμελιώδης αρχή της γεωμετρικής οπτικής. Στο έργο του *Οπτικά* μελετά προβλήματα όπως το σχηματισμό της σκιάς, τη δημιουργία ειδώλων από πολύ μικρές τρύπες και τον υπολογισμό των φαινόμενων μεγεθών διαφόρων αντικειμένων και των αποστάσεών τους από τον παρατηρητή.

...στην οπτική του Μεσαίωνα, η προοπτική και η μετεωρολογία αποτελούσαν τμήμα του ίδιου επιστημονικού κλάδου. Επικρατούσε σύγχυση όσον αφορά τα οπτικά ζητήματα, και κανείς δεν εμπιστευόταν την οπτική αντίληψη. Η όραση θεωρούνταν η πιο παραπλανητική από τις αισθήσεις.

...η οπτική, με την κυριολεκτική σημασία του όρου, είναι η επιστήμη της όρασης. Ο σκοτεινός θάλαμος, όμως, σήμανε το θάνατο της αντίληψης πως οι φωτεινές ακτίνες προέρχονται από τον ανθρώπινο οφθαλμό. Μετέτρεψε την οπτική στην επιστήμη του φωτός.

...τα θεμέλια της σύγχρονης γεωμετρικής οπτικής τέθηκαν το 1604 από τον Johannes Kepler. Εκείνη την εποχή, έγραψε ένα χειρόγραφο με τον τίτλο *Ad Vitellionem paralipomena*, στο οποίο ερμήνευσε τη λειτουργία του οφθαλμού και οποιασδήποτε άλλης οπτικής συσκευής, θεωρώντας το κάθε σημείο ενός σώματος ως πηγή αποκλινουσών ακτίνων. Η ώθηση για τη δημιουργία αυτής της θεμελιώδους εργασίας προήλθε από τις απαιτήσεις της αστρονομίας.

...ο Huygens διατύπωσε την περίφημη αρχή του για να αποδείξει πως η κυματική θεωρία του φωτός μπορούσε να εξηγήσει τους γνωστούς νόμους της οπτικής, συμπεριλαμβανομένης της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός. Ωστόσο, αυτό το κατάφερε ο Augustine Jean Fresnel καθιστώντας ακριβέστερη την αρχή του Huygens.

...ο πρώτος οπτικός τηλέγραφος (βασισμένος στη χρήση σηματοφόρων) συνέδεε το Παρίσι με τη Λίλλη στα τέλη του 17ου αιώνα. Στα μέσα του περασμένου αιώνα, υπήρχε στη Ρωσία πλήθος γραμμών οπτικού τηλεγράφου, και η μακρύτερη από αυτές ήταν η

Ισαάκ Νεύτων

γραμμή Αγίας Πετρούπολης-Βαρσοβίας, η οποία είχε 149 ενδιάμεσους σταθμούς. Κάθε σήμα χρειαζόταν μόλις λίγα λεπτά για να περάσει από τη μια πόλη στην άλλη —δυστυχώς, μόνο κατά τη διάρκεια της ημέρας, και εφόσον η ορατότητα ήταν καλή.

...η γωνία οράσεως του ανθρώπινου οφθαλμού είναι πολύ μεγαλύτερη απ' όσο ίσως νομίζετε. Μπορούμε να αντιληφθούμε γεγονότα που λαμβάνουν χώρα σε γωνία 90° δεξιά ή αριστερά μας.

...μόνο κατά τον 20ό αιώνα αποδείχτηκε πειραματικά από γιατρούς και φυσικούς ότι ο εγκέφαλος αναστρέφει τα ανεστραμμένα είδωλα που δημιουργεί ο οφθαλμός. Για να το αποδείξουν, οι επιστήμονες φορούσαν ειδικά γυαλιά, που ανέστρεφαν ό,τι έβλεπαν. Έπειτα από λίγες ημέρες ο εγκέφαλος άρχισε να αναστρέφει τα ανεστραμμένα είδωλα.

Alexander Leonovich

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Κόντρα στο ρεύμα

Μια ματιά στις δυνάμεις που προσπαθούν να μας επιβραδύνουν

Alexander Mitrofanov

Με ποιον τροπο ενα κινούμενο σώμα επηρεάζεται από το υλικό που το περιβάλλει; Για παράδειγμα, όταν περπατάτε στο δρόμο, γενικά δεν υπολογίζετε πολύ την οποιαδήποτε αντίσταση μπορεί να ασκεί ο αέρας πάνω σας καθώς κινείστε μέσα σ' αυτόν. Είναι μάλλον απίθανο κάποιος μαθητής που έφτασε αργοπορημένος στο μάθημά του να προβάλλει τη δικαιολογία: «Με καθυστέρησε η αεροδυναμική αντίσταση». Κι όμως, αν βγάλετε το χέρι σας έξω από ένα κινούμενο αυτοκίνητο ή προσπαθήσετε να περπατήσετε όταν φυσάει πολύ δυνατός άνεμος, το θέμα της αντίστασης του αέρα παύει να αποτελεί ανεπαρκή δικαιολογία. Ο αέρας, που συνήθως είναι τόσο άυλος και αιθέριος, γίνεται τελείως διαφορετικός όταν κινείται με μεγάλη ταχύτητα —μοιάζει περισσότερο με έναν ελαστικό τοίχο ή κάποιο ανυπέρβλητο εμπόδιο. Αυτήν ακριβώς την αίσθηση έχει ένας πιλότος όταν αναγκάζεται να εκτιναχθεί από το αεροπλάνο κατά τη διάρκεια της πτήσης. Η αντίσταση που ασκεί ένα υλικό μέσο σε κάποιο κινούμενο αντικείμενο είναι πολύ οικεία, όχι μόνο σε αεροπόρους και αστροναύτες, αλλά και σε πολλούς άλλους ανθρώπους, με πιο «γήινα» επαγγέλματα.

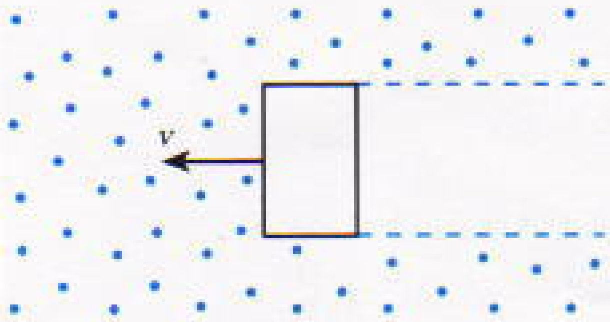
Μια από τις πρώτες επιστημονικές μελέτες που αφορούσαν την αντίσταση των ρευστών πραγματοποιήθηκε από τον Ισαάκ Νεύτωνα. Επειδή εκείνη την εποχή τα δεδομένα σχετικά με την αλληλεπίδραση κινούμενων αντικειμένων σ' ένα υλικό μέσο ήταν λιγοστά, ο Νεύτων αναγκάστηκε να εκτελέσει ο ίδιος τα απαραίτητα πειράματα, εκσφενδονίζοντας διάφορα αντικείμενα και κάνοντας μετρήσεις. Το 1710 και το 1719, στον καθεδρικό ναό του Αγίου Παύλου στο Λονδίνο, πραγματοποίησε δοκιμές με σφαίρες που κινούνταν στο νερό. Από αυτά τα πειράματα υπολόγισε το συντελεστή της αντίστασης που ασκείται σ' ένα σώμα το οποίο κινείται μέσα σ' ένα ρευστό, και τον χρησιμοποίησε στη θεωρητική του εξίσωση.

Στη δική μας εποχή των μέσων μεταφοράς υψηλής ταχύτητας, των υπερηχητικών πτήσεων και των διαστημικών εκτοξεύσεων, πολλά παλιά προβλήματα και πειραματικές μέθοδοι της αεροδυναμικής και της υδροδυναμικής εξακολουθούν να έχουν ζωή μπροστά τους. Ίσως λοιπόν είναι αρκετά διδακτικό να ανακαλέσουμε μερικές από αυτές τις ιδέες του παρελθόντος και να πραγματοποιήσουμε ορισμένα πειράματα που θα σας εισαγάγουν σε κάποια φαινόμενα τα οποία προκύπτουν όταν ένα σώμα κινείται μέσα σ' ένα ρευστό.

Ποια είναι η αντίσταση ενός υλικού μέσου; Ένα σώμα που κινείται μέσα σ' ένα ρευστό (αέριο ή υγρό) επηρεάζει τα σωματίδια του μέσου και μεταβάλλει την ταχύτητά τους. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, πάνω στο σώμα ασκείται μια ίση και αντίθετη «δύναμη αντίστασης». Ας θεωρήσουμε μια συνιστώσα της αντίστασης στη διεύθυνση της κίνησης (ας πούμε, στον άξονα x) — πρόκειται για τη δύναμη που οι πιλότοι ονομάζουν «μετωπική αντίσταση». Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου, στην περίπτωση ευθύγραμμης ομαλής κίνησης δεν έχει σημασία πώς θα υπολογίσουμε αυτή τη δύναμη —είτε θεωρήσουμε ότι το σώμα κινείται μέσα σ' ένα στάσιμο μέσο, είτε ότι το μέσο ρέει με την ίδια ταχύτητα γύρω από ένα στάσιμο αντικείμενο. Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα.

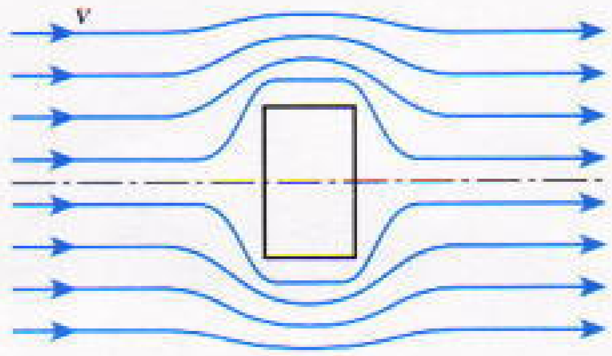
Περίπτωση 1. Έστω ένας δίσκος, σφαίρα ή κύλινδρος ακτίνας R που κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονά του μέσα σε υλικό μέσο το οποίο αποτελείται από πολλά στάσιμα σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο (βλ. Σχήμα 1 — m είναι η μάζα ενός σωματιδίου και n η συγκέντρωση των σωματιδίων). Με τι μοιάζει αυτό το μέσο; Μπορούμε να φανταστούμε ένα ψυχρό αραιό αέριο στο οποίο οι μοριακές κινήσεις είναι αμελητέες. Ένα άλλο χρήσιμο μοντέλο θα μπορούσε να είναι χιονονιφάδες στον αέρα,

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky



Σχήμα 1

Κίνηση ενός σώματος με ταχύτητα v μέσα σε αραιό υλικό μέσο.



Σχήμα 2

Κίνηση ενός σώματος μέσα σε συνεχές υλικό μέσο, όπως φαίνεται από το σύστημα αναφοράς του σώματος.

όπου το πρόβλημα θα έγκειται στο να περιγράψουμε την κίνηση μιας χιονόμπαλας καθώς συγκρούεται με τις χιονονιφάδες. Μπορούμε να βρούμε και άλλες ανάλογες περιπτώσεις.

Το κινούμενο αντικείμενο συγκρούεται με $N = nvS$ σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, όπου $S = \pi R^2$ είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του αντικειμένου. Αν οι συγκρούσεις είναι πλαστικές, η αντίσταση θα δίνεται από τον τύπο

$$F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mvN = 2S\frac{\rho v^2}{2}, \quad (1)$$

όπου $\rho = mn$ είναι η πυκνότητα του μέσου.

Παρόμοια μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση F_x που ασκείται σε σώμα οποιουδήποτε σχήματος, εφόσον γνωρίζουμε την ταχύτητα, την πυκνότητα και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής της στήλης των σωματιδίων που συναντά το σώμα κινούμενο μέσα στο αραιό μέσο.

Τα πράγματα γίνονται κάπως πιο περίπλοκα όταν οι συγκρούσεις είναι ελαστικές —όταν δηλαδή τα σωματίδια αναπηδούν μετά την κρούση τους με μια τυχαία επιφάνεια. Παρ' όλα αυτά, και σε τούτη την περίπτωση η F_x εξακολουθεί να είναι ανάλογη του v^2, παρότι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας στην εξίσωση (1) εξαρτάται γενικά από το σχήμα του σώματος.

Περίπτωση 2. Μέχρι τώρα, εξετάσαμε την κίνηση σε αραιό υλικό μέσο. Τι συμβαίνει αν ένα αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέσα σε ένα υγρό (ας πούμε, νερό) ή ένα πυκνό αέριο (π.χ. αέρα) —δηλαδή σ' ένα συνεχές μέσο; Ποιες είναι οι διαφορές ενός τέτοιου συνεχούς μέσου από ένα σύστημα μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων; Και τα δύο μέσα αποτελούνται από άτομα και μόρια. Παρ' όλα αυτά, ενώ στο αραιό μέσο τα σωματίδια κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και συγκρούονται σπανίως μεταξύ τους, σ' ένα συνεχές μέσο η κίνηση φαίνεται τελείως διαφορετική —εδώ τα σωματίδια συμπεριφέρονται σαν μια ομάδα, ή σύνολο.

Πράγματι, η διαμοριακή απόσταση (για να ακριβολογήσουμε, η *μέση ελεύθερη διαδρομή*) είναι πολύ μικρότερη από τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του αντικειμένου. Εξαιτίας των αμοιβαίων συγκρούσεων και αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων, οι διαταραχές του μέσου κοντά στα όρια του αντικειμένου που οφείλονται στην κίνηση του τελευταίου μεταφέρονται στα γειτονικά στοιχεία του μέσου. Έτσι, το αντικείμενο δεν αλληλεπιδρά μόνο με τα σωματίδια του αερίου ή του υγρού που βρίσκονται άμεσα στην πορεία του· αλληλεπιδρά με τα σωματίδια του μέσου που ωθεί ή παρασύρει κατά την κίνησή του (Σχήμα 2).

Με ποιον τρόπο εξαρτάται η F_x από την ταχύτητα v και από τα χαρακτηριστικά του μέσου; Είναι προφανές πως, αν η ταχύτητα του υλικού μέσου μεταβάλλεται, η μάζα M του ρευστού που συναντά το αντικείμενο ανά μονάδα χρόνου μεταβάλλεται ανάλογα με το v —δηλαδή, $M \sim \rho v S$, όπου S είναι η εγκάρσια διατομή του αντικειμένου και ρ η πυκνότητα του υλικού μέσου. Κάθε στοιχείο αυτής της μάζας μεταφέρει στο αντικείμενο ορμή, που είναι επίσης ανάλογη του v. Συνεπώς, η εξάρτηση της αντίστασης από την ταχύτητα του αντικειμένου, που πρώτος αναζήτησε ο Νεύτων, έχει την εξής μορφή (συγκρίνετε με την εξίσωση (1)):

$$F_x \sim \rho v^2 S,$$

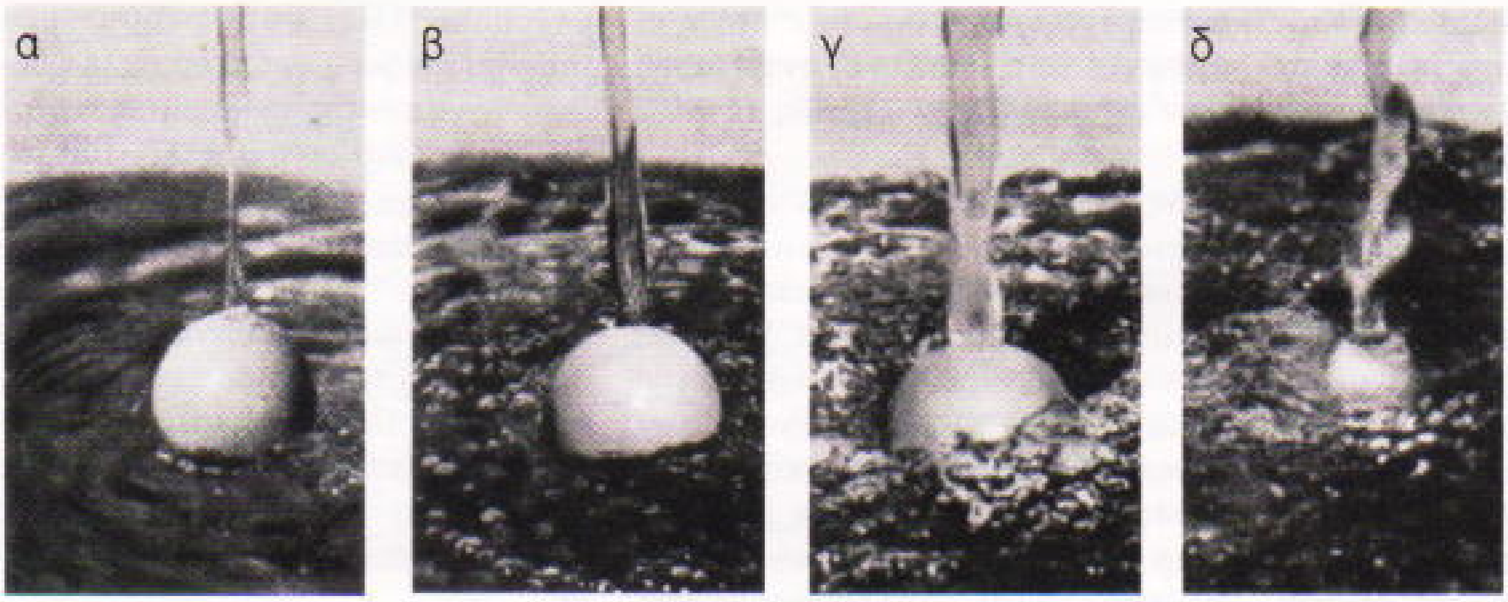
ή, ακριβέστερα,

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (2)$$

όπου η ποσότητα $\rho v^2/2$ είναι γνωστή ως *δυναμική πίεση*. (Πράγματι, η μονάδα μέτρησης αυτής της ποσότητας είναι ίδια με αυτήν της πίεσης, και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ενός κινούμενου υλικού μέσου μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα στάσιμο σώμα.) Ο συντελεστής αναλογίας C_x στην εξίσωση (2) εξαρτάται κυρίως από το σχήμα του αντικειμένου καθώς επίσης και από τη φύση της ροής και την ταχύτητα (όταν παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές), ονομάζεται δε *συντελεστής αντίστασης*.

Συγκρίνετε τα Σχήματα 1 και 2 και παρατηρήστε μια σημαντική διαφορά ανάμεσα σ' αυτά τα δύο παραδείγματα. Στη δεύτερη περίπτωση, το υγρό που ρέει γύρω από το αντικείμενο δεν αφήνει κάποια «σκιά» κενού χώρου πίσω του, αντίθετα απ' ό,τι συμβαίνει στην πρώτη περίπτωση. Έτσι, το συνεχές μέσο ασκεί πίεση στο αντικείμενο όχι μόνο μετωπικά (δηλαδή, κόντρα στην πλώρη, αν το αντικείμενο ήταν πλοίο), αλλά επίσης οπουδήποτε αλλού. Η φορά της δύναμης που ασκείται στο σώμα από πίσω (στην πρύμνη) συμπίπτει με τη φορά κίνησης. Έτσι, η ροή ενός υγρού ή ενός πυκνού αερίου γύρω από ένα αντικείμενο επιφέρει μείωση στη συνολική δύναμη αντίστασης F_x. Ρέοντας γύρω από το σώμα, το υγρό διατηρεί κάποια από την ορμή του, που δεν τη μεταφέρει στο αντικείμενο. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι πολύ σημαντικό. Στο επόμενο πείραμα θα δούμε πώς ο συντελεστής αντίστασης στην υδροδυναμική μειώνεται λόγω της ροής γύρω από ένα αντικείμενο.

Περίπτωση 3. Ας υπολογίσουμε την υδροδυναμική αντίσταση (δηλαδή, την τιμή του C_x) που συναντά μια σφαίρα η οποία έχει τοποθετηθεί σ' ένα ρεύμα υγρού. Το πείραμα είναι απλό και δεν απαιτεί εξεζητημένο εξοπλισμό. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι μια λεκάνη ή μια μπανιέρα, ένα γυάλινο δοχείο γνωστού όγκου, μια μετροταινία, ένα ρολόι με δευτερολεπτοδείκτη και μια ελαφριά



Σχήμα 3

Φωτογραφίες μιας μπάλας μέσα σε υδάτινα ρεύματα διαφορετικών ρυθμών ροής.

μπάλα (ένα μπαλάκι του πινγκ πονγκ ή μια μικρή λαστιχένια μπάλα).

Ανοίξτε τη βρύση και γεμίστε τη λεκάνη ή την μπανιέρα με νερό. Τοποθετήστε την μπάλα στην επιφάνεια του νερού· όπως περιμένατε, αναπηδά ανάλαφρα και απομακρύνεται από το ρεύμα του νερού. Ωστόσο, αν τοποθετήσετε την μπάλα ακριβώς στη θέση όπου το ρεύμα νερού συναντά την ελεύθερη επιφάνεια (ή τη σπρώξετε κοντά σ' αυτήν), η μπάλα παγιδεύεται από αυτό και παραμένει στο συγκεκριμένο σημείο.

Τι θα συμβεί αν μεταβάλετε τη ροή; Όταν η ταχύτητα του ρεύματος είναι μικρή, η μπάλα επιπλέει στην επιφάνεια (Σχήμα 3α) και μπορεί να μείνει μέσα στο ρεύμα για πάντα. Ορισμένες φορές το κέντρο της μπάλας απομακρύνεται από τον άξονα της υδάτινης στήλης —όποτε συμβαίνει αυτό, η μπάλα περιστρέφεται γύρω από έναν οριζόντιο άξονά της, σαν τουρμπίνα.

Όταν αυξάνετε τη ροή του νερού, η μπάλα βυθίζεται βαθύτερα, σταματά να περιστρέφεται, και μένει στο κέντρο του ρεύματος εκτελώντας πολύ μικρές ταλαντώσεις (Σχήματα 3β και 3γ). Τέλος, όταν ανοίγετε ακόμη περισσότερο τη στρόφιγγα της βρύσης, η μπάλα βυθίζεται εντελώς (Σχήμα 3δ).

Η βύθιση της ελαφριάς κούφιας μπάλας οφείλεται κυρίως στην υδροδυναμική αντίσταση —δηλαδή τη δύναμη που ασκείται από τη ροή. Αυτή η δύναμη μπορεί να μετρηθεί εύκολα από το βάθος στο οποίο «καταδύεται» η μπάλα.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι ανοίγουμε τη στρόφιγγα με τέτοιον τρόπο ώστε η μπάλα να βυθιστεί σε συγκεκριμένο βάθος (π.χ. ίσο με την ακτίνα της), και να παραμένει σ' αυτή την κατάσταση ισορροπίας. (Τη βύθιση της μπάλας μπορείτε να την ελέγξετε με το μάτι.) Τότε, προφανώς, η άνωση A εξισορροπεί το βάρος mg της μπάλας και την αντίσταση F_r:

$$mg + F_r = A.$$

Στην εν λόγω εξίσωση, $m = \rho_\mu 4/3\,\pi R^3$, όπου R είναι η ακτίνα της μπάλας και ρ_μ η μέση πυκνότητά της. Η ακτίνα μιας μπάλας του πινγκ πονγκ είναι $R \cong 1{,}9$ cm, και η μάζα της $m \cong 2{,}5$ g —δηλαδή, η πυκνότητά της είναι $\rho_\mu \cong 0{,}09$ g/cm^3, δηλαδή περίπου το 1/11 της πυκνότητας του νερού. (Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η μπάλα επιπλέει χωρίς να βυθίζεται σχεδόν καθόλου, όταν την αφήνετε στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού.) Το μέτρο της άνωσης που ασκείται στη μισοβυθισμένη μπάλα είναι $A = 4/3\,\pi R^3 \rho_v g/2$. Το μέτρο της F_r προκύπτει από την εξίσωση (2), αν θέσουμε $S = \pi r^2$, όπου r είναι η ακτίνα του υδάτινου ρεύματος:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mu g + C_x \pi r^2 \frac{\rho_v v^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_v g,$$

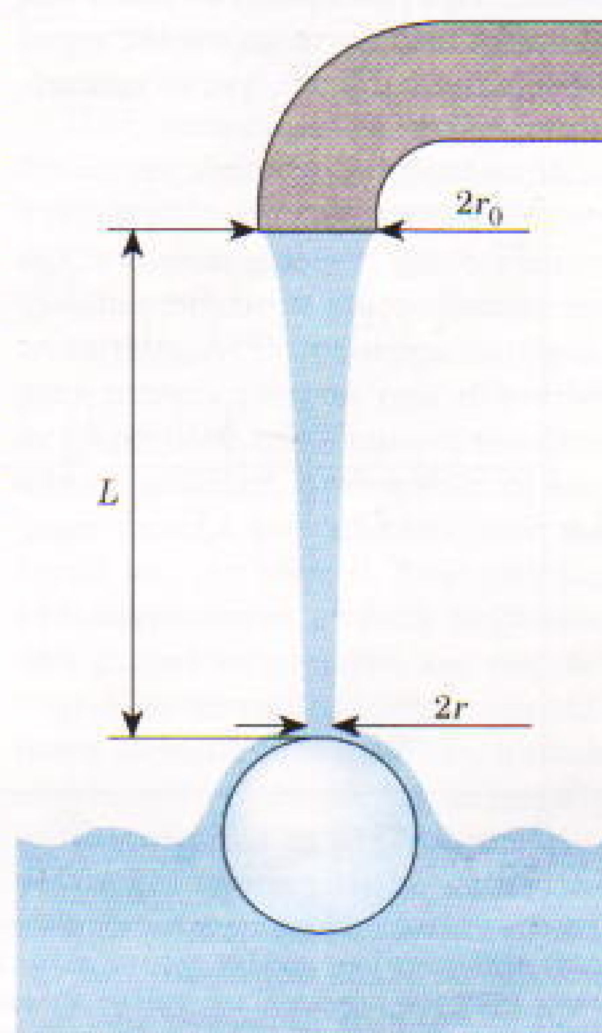
απ' όπου προκύπτει ο συντελεστής αντίστασης C_x:

$$C_x = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{gR}{v^2}\left(1 - 2\frac{\rho_\mu}{\rho_v}\right). \quad (3)$$

Για να υπολογίσουμε το C_x από αυτή την εξίσωση, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τιμές των r και v, που δεν είναι εύκολο να μετρηθούν άμεσα. Μπορούν, όμως, να υπολογιστούν έμμεσα (Σχήμα 4), αν μετρήσουμε την παροχή Q του ρεύματος ($Q = \pi r^2 v$), το μήκος L της υδάτινης στήλης και την αρχική ακτίνα r_0 (κοντά στο στόμιο της βρύσης), και θεωρήσουμε δεδομένο ότι η παροχή του νερού είναι σταθερή κατά μήκος της στήλης (πρόκειται για τη λεγόμενη *εξίσωση της συνέχειας*):

$$r_0^2 v_0 = r^2 v, \quad (4)$$

όπου v_0 είναι η ταχύτητα ροής κοντά στο στόμιο της βρύσης. Μπορούμε να προσδιορίσουμε την παροχή του ρεύματος μετρώντας το χρόνο που απαιτείται για να γεμίσει ένα δοχείο. Γνωρίζοντας τα Q και r_0, μπορούμε να υπολογίσουμε τη $v_0 = Q/\pi r_0^2$. Τότε, η τιμή της v δίνεται από τον τύπο $v = \sqrt{v_0^2 + 2gL}$. Τέλος, μπορούμε να υπολογίσουμε το r από την εξίσωση (4). Πριν εκτελέσετε το πείρα-



Σχήμα 4

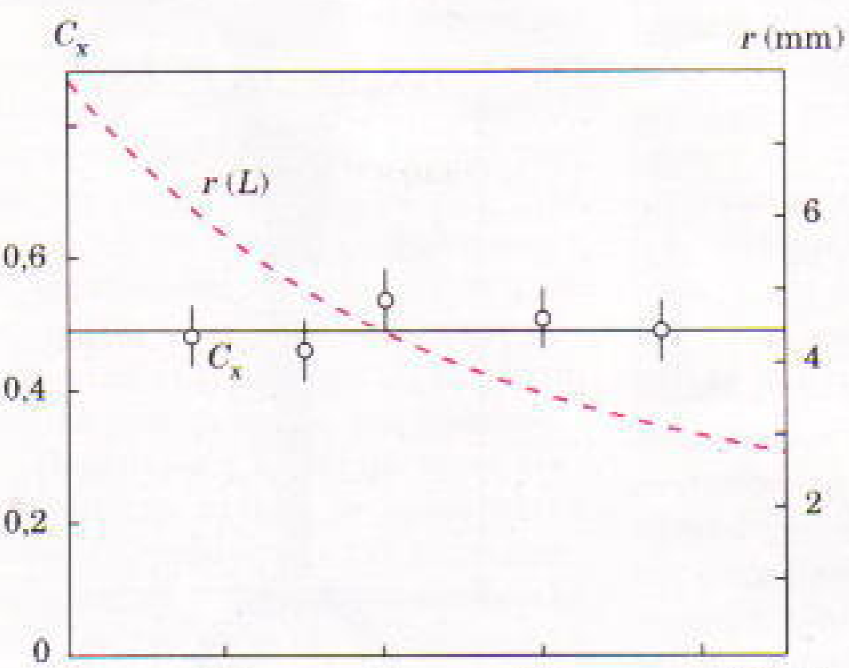
μά σας αναλογιστείτε λίγο τη φυσική σημασία της εξίσωσης (4) και το λόγο για τον οποίο μια στήλη υγρού γίνεται λεπτότερη καθώς το υγρό πέφτει· επίσης, ποια εξίσωση περιγράφει τη μείωση της ακτίνας (βλ. περίπτωση 4).

Μπορείτε τώρα να κάνετε τις μετρήσεις σας.

Ιδού τα δικά μου αποτελέσματα. Για να διατηρήσω βυθισμένη μια μπάλα του πινγκ πονγκ μέχρι το μέσο της κάτω από στήλη νερού της οποίας το μήκος είναι L = 60 cm και η αρχική της ακτίνα (κοντά στο στόμιο της βρύσης) r_0 = 0,8 cm, η παροχή Q του νερού πρέπει να είναι περίπου ίση με 130 cm^3/s. Αυτό μου δίνει $C_x \cong 0{,}5$. Αν μεταβάλουμε το μήκος L της στήλης, πρέπει ταυτόχρονα να μεταβάλουμε τη ροή ώστε η μπάλα να διατηρείται βυθισμένη στο ίδιο βάθος. Ωστόσο, οι πειραματικές τιμές για τον C_x ήταν πρακτικά οι ίδιες, ανεξάρτητα από τη ροή. Τα πειραματικά δεδομένα που έλαβα για διαφορετικές παροχές (που αντιστοιχούν σε διαφορετικά μήκη της στήλης) δίνονται στο Σχήμα 5, όπου η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές της διαμέτρου $D = 2r$ της στήλης εκεί όπου η στήλη συναντά την μπάλα. Πραγματοποιήστε μόνοι σας ορισμένα πειράματα με στήλες νερού διαφορετικού μήκους, για να πειστείτε πως ανεξάρτητα από τα r και v, οι τιμές για το συντελεστή αντίστασης είναι περίπου ίδιες —δηλαδή, $C_x = 0{,}5 \pm 0{,}1$.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία των αποτελεσμάτων μας. Εντοπίσαμε δύο πολύ σημαντικά γεγονότα. Πρώτον, στον υπολογισμό της δύναμης της αντίστασης F_x χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (2) του Νεύτωνα και διαπιστώσαμε ότι περιγράφει με ακρίβεια το πείραμα, διότι ο C_x ήταν σχεδόν σταθερός. Έτσι, επαληθεύσαμε την εν λόγω εξίσωση για την περιοχή τιμών της ταχύτητας $v \cong$ 1-10 m/s. Δεύτερον, κατά τη μέτρηση του C_x βρήκαμε ότι, περιέργως, στην μπάλα μεταφέρεται μόνο το 1/4 της ορμής του ρεύματος —το υπόλοιπο μεταφέρεται στο νερό όπου επιπλέει η μπάλα. Έτσι αποδείχτηκε ότι ο συντελεστής αντίστασης είναι 1/2 και όχι 2, όσο θα ήταν αν η «κρούση» με την μπάλα ήταν πλαστική (βλ. εξίσωση (1)).

Αυτό το πειραματικό γεγονός δεν είναι καθόλου προφανές. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται πως ένα στενό ρεύμα νερού που πέφτει πάνω στη σχεδόν επίπεδη κορυφή της μπάλας ($r << R$) θα πρέπει να μεταφέρει σχεδόν όλη του την ορμή σ' αυτήν. Στην πραγματικότητα, το πείραμα μας έδειξε πως το ρεύμα κυλά γύρω από την μπάλα σχεδόν χωρίς απώλεια της ταχύτητάς του, και κάτω από την μπάλα διατηρεί ένα σημαντικό ποσοστό (3/4) της ορμής του. Επομένως, η ροή γύρω από ένα αντικείμενο όντως μειώνει την υδροδυναμική αντίσταση!



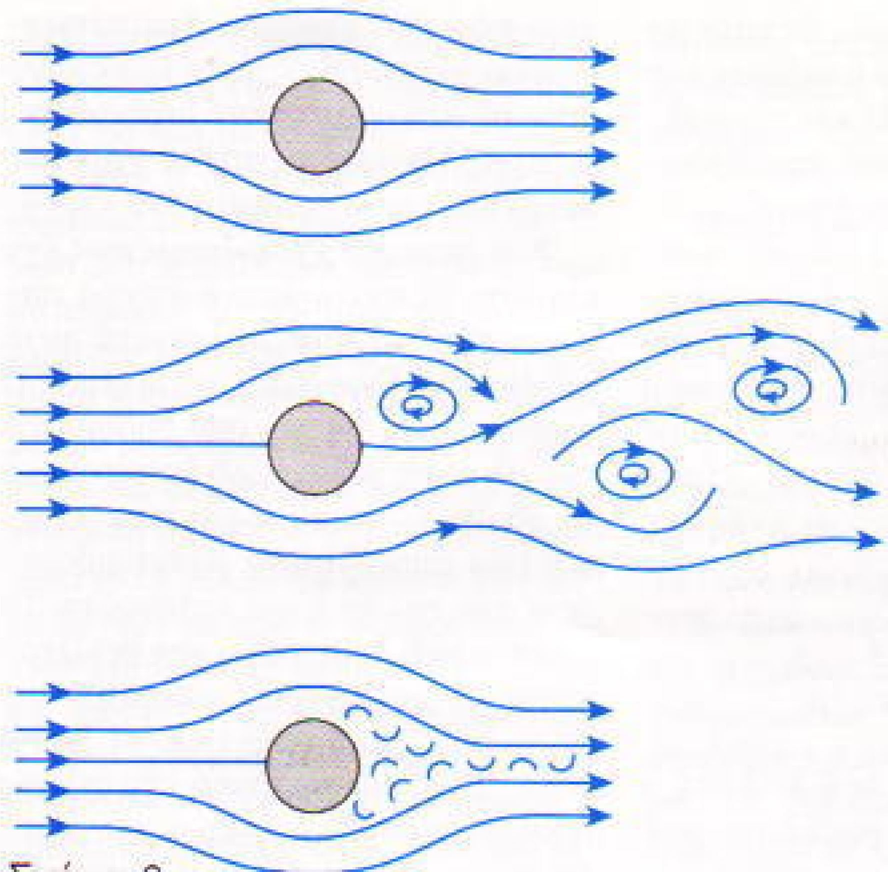
Σχήμα 5

Πειραματικά αποτελέσματα για το συντελεστή αντίστασης C_x (στην περίπτωση μιας μπάλας μέσα σε ρεύμα υγρού) για διάφορες τιμές του μήκους L της στήλης του ρεύματος. Η διακεκομμένη γραμμή εκφράζει τη σχέση της ακτίνας r του ρεύματος (που κρατά βυθισμένη την μπάλα μέχρι το μέσο της) με το μήκος L.

Τώρα, βεβαίως, ορισμένοι λάτρεις της φυσικής θα πουν πως οι συντελεστές 1/4 και 1 είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Πράγματι. Ωστόσο, δεν μπορεί κάθε πρόβλημα να θεωρείται λυμένο μέσα στα περιθώρια μιας τάξης μεγέθους. Όλοι συμφωνούμε πως υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε μια δεξαμενή καυσίμων χωρητικότητας 400 τόνων και σε μια άλλη, 100 τόνων. Το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας που καταναλώνεται σε υποβρύχια, αγωνιστικά αυτοκίνητα και ηλεκτρικά τρένα δαπανάται για να υπερνικηθεί η αντίσταση που παρουσιάζουν τα υλικά μέσα στα οποία κινούνται. Έτσι, μείωση του C_x έστω και κατά λίγες εκατοστιαίες μονάδες μπορεί να θεωρηθεί σημαντική νίκη.

Περίπτωση 4. Η εξίσωση (2) χρησιμοποιείται επιτυχώς στην πράξη όταν, για παράδειγμα, χρειάζεται να εκτιμήσουμε τη δύναμη που ασκεί ο άνεμος σ' ένα ιστίο ή ένα κτίριο, ή την αντίσταση που συναντά ένα κινούμενο αντικείμενο, είτε πρόκειται για αεροπλάνο, είτε για πουλί, αυτοκίνητο, ή υποβρύχιο. Αυτή η εξίσωση περιγράφει έναν από τους θεμελιώδεις νόμους της αεροδυναμικής. Ωστόσο, πρέπει να θυμόμαστε τα ακόλουθα λεπτά σημεία. Εφόσον η πίεση σ' ένα ρευστό εξαρτάται από την ταχύτητά του, η προκύπτουσα δύναμη της υδροδυναμικής ή αεροδυναμικής αντίστασης εξαρτάται από τον τρόπο ροής του ρευστού γύρω από το αντικείμενο —δηλαδή από την ταχύτητα του ρευστού κοντά στην επιφάνεια του αντικειμένου, από το αν η ροή είναι στρωτή (μόνιμη ροή) ή στροβιλώδης (τυρβώδης ροή), από το σημείο της επιφάνειας του αντικειμένου στο οποίο το υλικό μέσο αποχωρίζεται από το αντικείμενο, κ.ο.κ. Η δυσκολία υπολογισμού της F_x και του C_x οφείλεται σ' αυτή την ποικιλία των τρόπων ροής συνεχών υλικών μέσων κοντά σε αντικείμενα (βλ., για παράδειγμα, το Σχήμα 6). Για ορισμένα σώματα, όπως σφαίρες, δίσκους (κάθετους στη ροή), σχετικά κοντούς κυλίνδρους, κ.ο.κ., η τιμή του C_x είναι περίπου 0,1-1 για μια μεγάλη περιοχή ταχυτήτων. Για ένα σώμα που έχει αεροδυναμικό σχήμα, σαν μια επιμηκυμένη σταγόνα με λείο καμπυλωμένο πρόσθιο μέρος, ο συντελεστής δυναμικής αντίστασης έχει τιμή 0,04-0,06.

Στον φυσικό κόσμο μπορεί να βρεθούν ακόμη μικρότερες τιμές για το συντελεστή υδροδυναμικής αντίστασης —σχεδόν 0,01. Το δελφίνι απο-



Σχήμα 6

Ρευματικές γραμμές υγρού που ρέει γύρω από έναν κύλινδρο με διαφορετικές ταχύτητες ροής —μικρές, μέτριες, και σχετικά μεγάλες.

τελεί ένα κλασικό παράδειγμα. Παρ' όλα αυτά, για να μειώσουν την αντίσταση, τα ψάρια και άλλα υδρόβια ζώα δεν έχουν μόνο αεροδυναμικά σχήματα, αλλά μια ολόκληρη «συλλογή από κόλπα», που περιλαμβάνει ειδικά προσαρμοσμένους τύπους δέρματος και λιπαντικών ή βλεννογόνων στα λέπια τους. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούν τους μυς τους για να ρυθμίζουν τη ροή και να εμποδίζουν το σχηματισμό στροβίλων που θα απορροφούσαν όλη τους την ενέργεια. Με αυτά τα φυσικά μέσα τα ζώα «ξεπερνούν» τους επιστήμονες — πολλές από τις «τεχνικές λύσεις» τους θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε συσκευές που έχουν επινοηθεί από ανθρώπους· αλλά έχουμε ακόμη πολύ δρόμο να διανύσουμε...

Περίπτωση 5. Την αυγή της αεροπλοΐας, ανακαλύφθηκε ένα απροσδόκητο φαινόμενο κατά τη διάρκεια πειραμάτων που αποσκοπούσαν στη μέτρηση της μετωπικής αντίστασης σε αεροδυναμικές σήραγγες. Σε σχετικά υψηλές ταχύτητες ανέμου, περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας είχε ως αποτέλεσμα δραστική μείωση (κατά παράγοντα 2, ή ακόμη μεγαλύτερο) της μετωπικής αντίστασης σε σφαίρες και ορισμένα άλλα αντικείμενα. Οι ερευνητές μπόρεσαν να προσδιορίσουν τις αναγκαίες συνθήκες για την πραγματοποίηση μιας τέτοιας αιφνίδιας μετάβασης, να τη μετρήσουν και να την εξηγήσουν. Ανακάλυψαν πως προκαλούνταν από τη μετατόπιση του σημείου όπου συντελούνταν ο διαχωρισμός της ροής στις μεγάλες ταχύτητες και από την αντίστοιχη μείωση του εύρους της περιοχής του στροβίλου πίσω από το σώμα. Με τη βελτίωση των συνθηκών ροής στην πίσω πλευρά του σώματος, ο C_x μειωνόταν άμεσα.

Αυτό το φαινόμενο έχει μια αλλόκοτη συνέπεια. Όπως έχει αποδειχτεί μέσω υπολογισμών, αν υπήρχαν πολύ μεγάλοι κόκκοι χαλάζης στη Γη, και κατά την πτώση τους η διάμετρός τους μεγάλωνε προς την κρίσιμη τιμή $D_{κρ}$ = 13 cm, η ταχύτητα της χαλάζης θα αύξανε αιφνίδια κατά παράγοντα 2,5: από 160 km/h σε 400 km/h! (Άλλες εκτιμήσεις της $D_{κρ}$ δίνουν τιμή ελάχιστα μικρότερη από 10 εκατοστά.) Υπάρχουν ενδείξεις ότι ακόμη και στις μέρες μας οι κόκκοι χαλάζης έχουν μερικές φορές το μέγεθος αβγού κότας ή ακόμη και πορτοκαλιού. Ποιος ξέρει, όμως· μπορεί στο παρελθόν το μέγεθος των κόκκων χαλάζης να ήταν ακόμη μεγαλύτερο. Άραγε είχε πλησιάσει την κρίσιμη τιμή $D_{κρ}$; Στο κάτω κάτω, σε παλαιότερες εποχές η ατμοσφαιρική «μηχανή» του πλανήτη μας λειτουργούσε «σκληρότερα» απ' ό,τι στις μέρες μας, και παρήγε καταιγίδες που ήταν πολύ βίαιες. Είναι δυνατόν να κρύβεται εδώ η απάντηση σ' ένα από τα μεγαλύτερα μυστήρια της επιστήμης; Ίσως οι δεινόσαυροι εξολοθρεύτηκαν από τεράστιους κόκκους χαλάζης που έπεφταν στη Γη με τεράστιες ταχύτητες. Τα μικρότερα ζώα θα μπορούσαν να έχουν βρει εσοχές για να προστατευτούν και να αποφύγουν τη θλιβερή μοίρα των τεράστιων συγκατοίκων τους...

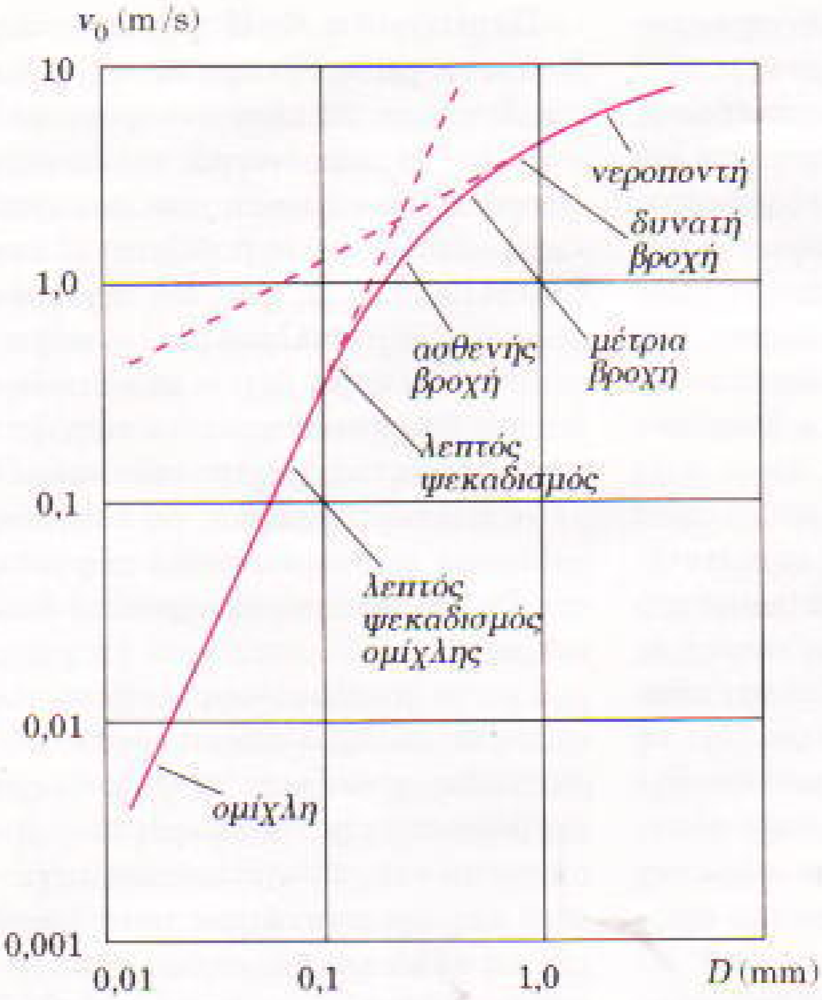
Περίπτωση 6. Η εξίσωση του Νεύτωνα για τη δύναμη της αντίστασης δεν είναι με κανέναν τρόπο καθολική. Για παράδειγμα, υπολογίζει σωστά την αντίσταση που συναντά ένα κουτάλι καθώς βυθίζεται σ' ένα δοχείο με μέλι. Ωστόσο, δεν περιγράφει πώς μια μεταλλική μπίλια πέφτει μέσα σ' ένα ψηλό δοχείο με ελαιόλαδο, και δεν καταφέρνει να εξηγήσει γιατί οι πυκνές ομίχλες (που αποτελούν αιτία ατυχημάτων για οδηγούς, πιλότους και ναυτικούς) πέφτουν στη Γη για τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα.

Για να υπολογίσουμε την αντίσταση σε καθεμιά από αυτές τις περιπτώσεις, χρειάζεται να γνωρίζουμε όχι μόνο το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου, τη σχετική του ταχύτητα και την πυκνότητα του υλικού μέσου, αλλά και μία ακόμη παράμετρο του μέσου —το συντελεστή ιξώδους του, που συνήθως συμβολίζεται με η. Αυτός δείχνει πόσο μεγάλη είναι η εσωτερική τριβή ενός υγρού.

Αν κατά την κίνηση μιας σφαίρας μέσα σ' ένα υλικό μέσο οι δυνάμεις τριβής είναι σημαντικές, η σφαίρα δέχεται μια δύναμη αντίστασης, που πρέπει να υπολογίζεται όχι από την εξίσωση του Νεύτωνα, αλλά από την εξίσωση του Stokes:

$$F_x = 6\pi\eta R v.$$

Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε, όμως, αν ένα συγκεκριμένο μέσο έχει μεγάλο συντελεστή ιξώδους ή όχι, και ποια εξίσωση χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την αντίσταση; Ας θεωρήσουμε μια σφαιρική σταγόνα νερού που πέφτει ελεύθερα μέσα στον αέρα (ή και έναν κόκκο χαλάζης, αγνοώντας τη διαφορά μεταξύ των πυκνοτήτων του νερού και του πάγου). Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ορική ταχύτητα, που μπορεί να μετρηθεί και στη συνέχεια να αντικατασταθεί στην εξίσωση δυναμικής ισορροπίας, η οποία οδηγεί στην εξάρτηση της μετωπικής αντίστασης από το μέγεθος της σταγόνας και την ταχύτητα, καθώς και από τα χαρακτηριστικά του μέσου, την πυκνότητά του και το συντελεστή ιξώδους. Θεωρούμε σταθερή τη μάζα της σταγόνας —δηλαδή αγνοούμε φαινόμενα συμπύκνωσης και εξάτμισης.



Σχήμα 7

Λογαριθμική εξάρτηση της ταχύτητας πτώσης σταγόνων βροχής από τη διάμετρό τους.

Το γράφημα του Σχήματος 7 απεικονίζει την εξάρτηση της ταχύτητας της σταγόνας βροχής από τη διάμετρό της. Τα δεδομένα ελήφθησαν από εγχειρίδια μετεωρολογίας. Σε διάφορα σημεία της καμπύλης αναγράφεται το είδος της ατμοσφαιρικής κατακρήμνισης που αντιστοιχεί σε παρατηρούμενες σταγόνες συγκεκριμένης διαμέτρου.

Από αυτό το σχήμα φαίνεται ότι οι μικρότερες σταγόνες (διαμέτρου 0,01 -0,1 mm) πέφτουν με ταχύτητα $v_0 \sim D^2$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν η αντίσταση υπακούει στο νόμο του Stokes, οπότε εύκολα προκύπτει ο ρυθμός κατακρήμνισης των σταγονιδίων ομίχλης:

$$v_{op} = \frac{1}{18} D^2 \frac{\rho}{\eta} g,$$

όπου $\eta \equiv 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/m · s σε θερμοκρασία $T = 300$ K. Για τον αέρα και άλλα αέρια, ο $\eta \sim \sqrt{T}$, και μεταβάλλεται ελάχιστα με την πυκνότητα του αερίου.

Αύξηση του μεγέθους και της ταχύτητας της σταγόνας συνεπάγεται μείωση της σχετικής συνεισφοράς των δυνάμεων τριβής (που είναι ανάλογες του $\eta v R$) σε σύγκριση με εκείνη των δυνάμεων που είναι ανάλογες του $R^2 (\rho v^2/2)$ και περιγράφονται από την εξίσωση του Νεύτωνα.

Μεγαλύτερες σταγόνες ($D \geq 1$ mm) επηρεάζονται ελάχιστα από την εσωτερική τριβή του αέρα. Η ορική τους ταχύτητα στην ατμόσφαιρα είναι ανάλογη της $\sqrt{D}$:

$$v'_{op} = \sqrt{\frac{4}{3C_x} \frac{\rho}{\rho_{\alpha\varepsilon\rho}} Dg}, \quad (5)$$

όπου $C_x \equiv 0{,}5$. Αυτή η εξίσωση προκύπτει από τη (2).

Πρέπει να σημειωθεί πως η εξίσωση (5) αποτελεί μόνο μια προσέγγιση, διότι το σχήμα των μεγάλων σταγόνων βροχής αποκλίνει σημαντικά από το σφαιρικό, σε αντίθεση με το σχήμα των σταγονιδίων της ομίχλης ή των κόκκων χαλάζης. Η επιφανειακή τάση υπερνικάται από τη δυναμική πίεση της μετωπικής ροής του αέρα, και η σταγόνα παραμορφώνεται. Όταν οι μεγαλύτερες σταγόνες ($D \leq 5$ mm) αποκτούν ταχύτητα 8 m/s, «πατικώνονται» τόσο πολύ ώστε διαχωρίζονται σε μικρότερες σταγόνες.

Οι σταγόνες ενδιάμεσης διαμέτρου (0,1 mm $\leq D \leq$ 1 mm) δεν υπακούουν ούτε στην εξίσωση του Stokes, ούτε σ' αυτήν του Νεύτωνα. Γι' αυτές τις σταγόνες, η αδρανειακή απόκριση του μέσου και οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής είναι συγκρίσιμες.

Περίπτωση 7. Υπάρχει επίσης ένας τρίτος μηχανισμός επιβράδυνσης. Συναντάται σε πολλές περιπτώσεις, και υπό ορισμένες συνθήκες είναι δυνατόν να υπερισχύει. Γεμίστε μια λεκάνη ή μια μπανιέρα με νερό, και βυθίστε κάθετα ένα μολύβι μέχρι κάποιο βάθος. Κινήστε το μολύβι παράλληλα στην επιφάνεια του νερού. Αν η ταχύτητα του μολυβιού είναι μικρή, δεν θα δείτε τίποτε ενδιαφέρον. Αν όμως το μολύβι κινείται γρήγορα, αφήνει πίσω του ένα σύνολο αποκλινόντων κυμάτων, τα οποία καταναλώνουν ενέργεια. Απαιτείται ενέργεια για να παραχθούν τα εν λόγω κύματα, και σ' αυτή την περίπτωση η ενέργεια προέρχεται από το χέρι, που υπερνικά την αντίσταση του νερού.

Από εμπειρία γνωρίζουμε πως ένα κινούμενο αντικείμενο συχνά παράγει κύματα, και τα κύματα αυτά μπορούν να διαφέρουν σημαντικά. Η μορφή των κυμάτων που δημιουργεί ένα πλοίο σε βαθιά νερά διαφέρει από τα αβαθή κύματα επιφανειακής τάσης που μπορούμε να παρατηρήσουμε σ' ένα ποτήρι ή μια κατσαρόλα. Τα κύματα που δημιουργεί μια βενζινάκατος σε ρηχά νερά διαφέρουν από αυτά που σχηματίζονται σε βαθιά νερά. Ένα υπερηχητικό αεροπλάνο παράγει κρουστικό κύμα σ' ένα τρισδιάστατο υλικό (αέρας), ενώ ένα πλοίο δημιουργεί δισδιάστατα κύματα, στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ νερού και αέρα. Επιπλέον, αντίθετα απ' ό,τι συμβαίνει με τα συνήθη υδάτινα κύματα, τα κρουστικά κύματα σ' ένα αέριο συνοδεύονται από ισχυρή συμπίεση του υλικού μέσου, το οποίο θερμαίνεται.

Η αντίσταση από τα κύματα εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο έχουν δημιουργηθεί —δηλαδή, από τις παραμέτρους του υλικού που φέρει τα κύματα, από την ταχύτητα και τον τρόπο με τον οποίο διαδίδονται, και πάνω απ' όλα, από το πρωραίο άκρο και το μέγεθος του αντικειμένου. Συνήθως, η αντίσταση από τα κύματα αυξάνει δραστικά με την ταχύτητα v —εφόσον βέβαια αυτή η αύξηση δεν κάνει το αντικείμενο να πεταχτεί έξω από το νερό, όπως οι εξωλέμβιες βενζινάκατοι και τα ιπτάμενα σκάφη.

Ο υπολογισμός της κυματικής αντίστασης σε κάθε ξεχωριστή περίπτωση αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα, που συνήθως επιλύεται μόνο βάσει πειραματικών δεδομένων. Εντούτοις, είναι μάλλον εύκολο να υπολογίσουμε πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η κυματική αντίσταση.

Θεωρήστε για παράδειγμα την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μιας βενζινακάτου στην επιφάνεια μιας βαθιάς λίμνης. Από την πλώρη και την πρύμνη του σκάφους ξεκινούν δύο λοξά κύματα, συμμετρικά ως προς την πορεία του. Αυτά τα κύματα συμβάλλουν, και δημιουργούν ένα σχηματισμό πολύ οικείο στους ψαράδες και τους κολυμβητές. Η γωνία a που σχηματίζουν τα όρη (ή κορυφές) των κυμάτων και η διεύθυνση κίνησης του σκάφους δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του τελευταίου, και έχει άνοιγμα περίπου 20°. Σε κάθε πλευρά του σκάφους μπορείτε να δείτε δύο ή τρία μικρά όρη. Τα πλάτη των άλλων κυμάτων είναι πολύ μικρότερα, και μπορούμε να τα αγνοήσουμε, αφού η συνεισφορά τους στον τελικό υπολογισμό είναι πολύ μικρή. Τα κύματα που δημιουργούνται από το σκάφος διαδίδονται για αρκετές εκατοντάδες μέτρα και σβήνουν αργά σε μεγάλη απόσταση.

Ένα όρος κύματος μπορεί να προσεγγιστεί από ένα τρίγωνο ύψους H από την ελεύθερη επιφάνεια της λίμνης. Το μήκος της βάσης του τριγώνου είναι $\lambda/2$, όπου λ είναι το μήκος κύματος. Το μήκος του μετώπου του κύματος που δημιουργείται ανά μονάδα χρόνου είναι v συνa. Το έργο που απαιτείται για να παραχθεί το όρος του κύματος αποθηκεύεται με τη μορφή δυναμικής ενέργειας του κύματος. Έχοντας κατά νου πως σε περιοδικές διαδικασίες η μέγιστη δυναμική και η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίσες, μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της ισχύος την οποία χρειάζεται ένα κινούμενο σκάφος για να δημιουργήσει μια ομάδα κυμάτων:

$$P = \frac{1}{2} H \frac{\lambda}{2} v \sigma \upsilon \nu a \cdot \rho g \frac{H}{3} 2 \cdot 2n$$

$$= \frac{1}{3} \rho g H^2 v \lambda n \sigma \upsilon \nu a, \qquad (6)$$

όπου $2n$ είναι το συνολικό πλήθος των ορέων πίσω από το σκάφος. Ο παράγοντας $H/3$ είναι το μέσο ύψος στο οποίο φτάνει το νερό (αφού ληφθεί υπόψη η κατανομή της μάζας σ' ένα όρος κύματος).

Ιδού ένα τυπικό παράδειγμα. Με ταχύτητα 18 km/h, ένα σκάφος παράγει κύματα ύψους 0,3 m και μήκους κύματος περίπου 0,6 m, $n = 3$. Η εξίσωση (6) μας δίνει ισχύ $P \cong 3 \cdot 10^3$ W $\cong$ 4 hp. Αυτή η τιμή δεν απέχει πολύ από την ελάχιστη ισχύ που χρειάζεται να έχει ένας κινητήρας για να επιταχύνει ένα μικρό σκάφος στην παραπάνω ταχύτητα.

Διαπιστώνουμε, δηλαδή, πως απαιτείται μια σημαντική ποσότητα ισχύος απλώς για να δημιουργηθούν κύματα!

Προβλήματα και ερωτήσεις

1. Ο Γαλιλαίος, για να μελετήσει την ελεύθερη πτώση, πετούσε ταυτοχρόνως από έναν ψηλό πύργο μια μπάλα κανονιού με μάζα 80 kg και μια σφαίρα μουσκέτου με μάζα 200 g. Ήταν σημαντική η επίδραση του αέρα στα δύο αντικείμενα κατά την πτώση τους; Το ύψος του πύργου ήταν περίπου 60 m.

2. Ένα νέο μοντέλο σιδηροδρομικής μηχανής διαφέρει από το προηγούμενο στον κινητήρα του, ο οποίος αποδίδει 1,5 φορά περισσότερη ισχύ από τον προκάτοχό του. Πόσο ταχύτερο είναι το καινούργιο μοντέλο;

3. Γιατί τα πειραματικά σημεία στο Σχήμα 5 είναι διεσπαρμένα; Βρείτε την τιμή του συντελεστή C_x στο πείραμα, αν η μπάλα βυθίζεται πλήρως κάτω από το ρεύμα νερού, όπως στην περίπτωση 3 που περιγράψαμε παραπάνω. Τι συμπεράσματα μπορείτε να συναγάγετε από το πείραμά σας; Τι μπορείτε να πείτε σχετικά με την ακρίβεια των δεδομένων σας;

4. Αποδείξτε πως η ακτίνα μιας υδάτινης στήλης σε απόσταση L από το στόμιο εξόδου δίνεται από την εξίσωση $r(L) = r_0 (1 + 2gL/v_0^2)^{-1/4}$, όπου v_0 είναι η ταχύτητα του νερού στο στόμιο εξόδου, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, και r_0 είναι η αρχική ακτίνα της στήλης. (Από τη στήλη δεν εκτινάσσονται σταγονίδια, και η επίδραση της τριβής και της επιφανειακής τάσης μπορούν να αγνοηθούν.)

5. Πώς μπορούμε να δούμε τι μορφή έχει η ροή του νερού κάτω από μια σφαίρα; Πραγματοποιήστε ένα πείραμα χρησιμοποιώντας το ρεύμα νερού από ένα σωλήνα. Ποια είναι η φύση της ροής νερού κάτω από τη σφαίρα;

6. Όταν ένα κουτάλι «ακουμπά» ένα ρεύμα τρεχούμενου νερού, η υδάτινη στήλη αντιδρά διαφορετικά, αναλόγως με το ποια πλευρά του κουταλιού είναι στραμμένη προς την πλευρά του νερού. Γιατί;

7. Πόση είναι η ορική ταχύτητα v_0 μιας μπάλας του πινγκ πονγκ που πέφτει στον αέρα; ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 27*

υπόλοιπες διαστάσεις του σώματος αυξηθούν κατά 1%, τότε ο «μεγαλόσωμος» άνθρωπος θα έχει τις ίδιες αναλογίες με τον «μικρόσωμο», και μπορούμε να λέμε πως δεν υπάρχει τάση προς παχυσαρκία. Αν όλες οι γραμμικές διαστάσεις αυξηθούν κατά 1%, τότε το μήκος της ζώνης θα αυξηθεί κατά 1%, το εμβαδόν του υφάσματος που χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε ρούχα θα αυξηθεί κατά 2%, και ο όγκος, η μάζα και το βάρος του σώματος, όλα θα αυξηθούν κατά 3%. Μπορούμε συνεπώς να δούμε πως από την κατά 4% αύξηση του βάρους, το 3% προέρχεται από την αύξηση του ύψους, και δεν αποτελεί ένδειξη κάποιας τάσης προς παχυσαρκία. Η υπόλοιπη (κατά 4% − 3%) αύξηση του βάρους αποτελεί μια ένδειξη πως οι εγκάρσιες διαστάσεις έχουν αυξηθεί κατά λίγο περισσότερο από 1%, γεγονός που θα μπορούσε να σημαίνει ελαφρά τάση προς παχυσαρκία.

Τι συμβαίνει όμως με την πίεση στις αρθρώσεις των γονάτων; Αν όλες οι γραμμικές διαστάσεις αυξηθούν κατά 1%, οι αρθρώσεις των γονάτων του μεγαλόσωμου θα υφίστανται κατά 1% περισσότερη πίεση. Η κατά 1% αύξηση που οφείλεται στην παχυσαρκία —δηλαδή, η διαφορά (4% − 3%)— θα αυξήσει την πίεση στις αρθρώσεις των γονάτων κατά 1%, και έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε πως η πίεση στις αρθρώσεις των γονάτων θα αυξηθεί συνολικά περίπου κατά 2%.

Είδατε λοιπόν πόσες από τις παρανοήσεις —άμεσες ή έμμεσες— που εμφανίζονται στον Τύπο μπορείτε να εξαλείψετε με μια απλή ανάλυση. Φροντίστε λοιπόν από δω και στο εξής να ασκείτε εξαντλητικό έλεγχο στα «μίντια»! ◙

Σχετικά άρθρα του *Quantum*

Anatoly Mineyev, «Από το ποντίκι στον ελέφαντα», Μάιος/Ιούνιος 1996, σελ. 26.

A. Zherdev, «Νάνοι και γίγαντες», Ιούλιος/Αύγουστος 1994, σελ. 36.

Ο ***Albert A. Bartlett*** είναι καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Κολοράντο.

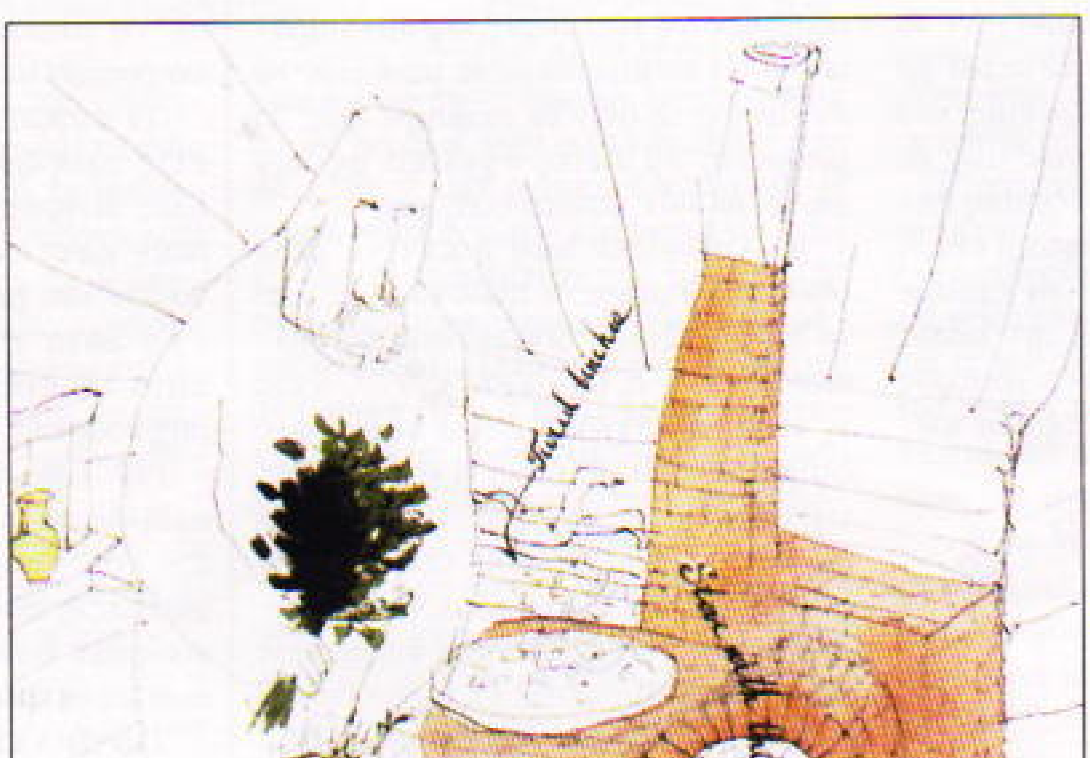
Πρόσκληση για σάουνα

Γνωρίστε αυτό το είδος μπάνιου, και αναζωογονηθείτε από τη φυσική του

I. I. Mazin

«ΣΤΑ ΤΑΞΙΔΙΑ ΜΟΥ, ΠΕΡΙΔΙΑβαίνοντας τις σλαβικές χώρες, είδα κάτι εκπληκτικό», έγραφε ένας ρώσος χρονικογράφος του 11ου αιώνα. «Είδα ξύλινα λουτρά, και τους ανθρώπους να τα θερμαίνουν μέχρι να γίνονται κόκκινοι, να είναι ολόγυμνοι και να ρίχνουν πάνω τους κβας,[1] να παίρνουν πράσινα κλαδιά και να χτυπιούνται μεταξύ τους σε σημείο που βγαίνοντας έξω να είναι μόλις ζωντανοί, και στη συνέχεια να ρίχνουν κρύο νερό πάνω τους, και ν' αναστένονται.»

Εσείς δεν χρειάζεται να απολαύσετε το ατμόλουτρο με τέτοιο «βασανιστικό» ενθουσιασμό. Μπορείτε να το δοκιμάσετε περισσότερο χαλαρωμένοι σε κάποιο γυμναστήριο στη χώρα σας. Αυτό το είδος μπάνιου μπορεί να αποτελεί έθιμο στη Ρωσία ή τη Σκανδιναβία, αλλά είναι πλέον πασίγνωστο σε ολόκληρο το κόσμο. Γιατί το κάνουν; Λοιπόν, υπάρχει η εντύπωση ότι το να εκτίθεται το δέρμα σε ξηρό αέρα υψηλής θερμοκρασίας για σύντομο χρονικό διάστημα είναι ευεργετικό για το σώμα. Στον υγρό αέρα, όμως, η υψηλή θερμοκρασία δεν υποφέρεται ούτε για ελάχιστο χρόνο. Γι' αυτό, στα καλά λουτρά ατμού υπάρχει όχι μόνο θερμή αλλά και ξηρή ατμόσφαιρα. Δεν είναι εύκολο πράγμα να χτίσει κανείς ένα τέτοιο καλό λουτρό, και δεν είναι προφανές το πώς πρέπει να «προετοιμαστεί ο ατμός» (ή, για να μιλήσουμε πιο επιστημονικά, να επιτευχθεί το βέλτιστο μικροκλίμα). Οι πρόγονοί μας ήταν ικανοί για τέτοιες κατασκευές, αλλά σχεδόν αδυνατούσαν να μας εξηγήσουν γιατί όλα αυτά γίνονταν έτσι και όχι αλλιώς. Ωστόσο, στις μέρες μας ακόμη και οι νεαροί σπουδαστές έχουν επαρκή γνώση της φυσικής ώστε να μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα που ανακύπτουν σ' ένα ατμόλουτρο. Και τούτο ακριβώς σας προσκαλώ να κάνουμε. Να περιγράψουμε βήμα προς βήμα αυτή τη διαδικασία, να διατυπώσουμε τα σχετικά φυσικά προβλήματα, και στη συνέχεια να προσπαθήσουμε να τα αναλύσουμε.



Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Λοιπόν, ώρα για μπάνιο! Η εικόνα θα μας βοηθήσει να απολαύσουμε το νοερό λουτρό μας.

Έχουμε μπει στο θάλαμο ατμού

1. Ποτό από ψωμί και σταφίδες που έχει υποστεί μερική ζύμωση.

του λουτρού. Τι ζέστη που κάνει εδώ! Ας καθίσουμε κάτω, χαμηλά, που είναι δροσερότερα, τουλάχιστον για την ώρα.

Τώρα που έχουμε συνηθίσει τη ζέστη, μπορούμε να σηκωθούμε και να καθίσουμε σ' έναν από τους στοιχισμένους πάγκους. Ζέστη ε; Όχι, δεν είναι τόσο ζεστά σήμερα. Κάποιες μέρες δεν μπορείς να περπατήσεις με γυμνά πόδια στο ξύλινο πάτωμα, πόσο μάλλον να καθίσεις στους πάγκους. Αν όμως ο πάγκος είναι καρφωμένος με σιδερένια καρφιά, καλά θα κάνετε να μείνετε μακριά του, ακόμη κι αν ο χώρος δεν είναι πολύ ζεστός. Το κεφάλι του καρφιού, ακόμη και τότε, θα σας προκαλέσει ένα μικρό έγκαυμα.

Ερώτηση 1. *Γιατί είναι πιο δροσερά χαμηλά μέσα στο θάλαμο του ατμού απ' ό,τι πάνω στους πάγκους;*

Ερώτηση 2. *Γιατί μπορεί να καθίσει κανείς σ' ένα πολύ ζεστό ξύλινο αντικείμενο αλλά όχι και σ' ένα σιδερένιο της ίδιας θερμοκρασίας;*

Όλο και περισσότερο συνηθίζουμε το περιβάλλον στο θάλαμο ατμού. Τον αέρα τώρα δεν τον νιώθουμε και τόσο ζεστό. Παρ' όλα αυτά, αισθανόμαστε ότι είναι μάλλον υγρός. Υπάρχουν κηλίδες νερού εδώ κι εκεί πάνω στους πάγκους και στο πάτωμα. Μπορούμε να το διορθώσουμε. Χρειάζεται να «προσθέσουμε τον ατμό»! Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ρίχνουμε λίγο λίγο βραστό νερό πάνω στις πυρωμένες πέτρες του κλιβάνου. Τότε, ένα θερμό κύμα από τον κλίβανο ξεχύνεται αμέσως προς τα πάνω. Αρχίζει να κάνει όλο και περισσότερη ζέστη ψηλά στους πάγκους, και η ζέστη αποξηραίνει τις κηλίδες νερού εκεί, όπως και χαμηλά στο πάτωμα.

Ερώτηση 3. *Γιατί η ατμόσφαιρα γίνεται πιο ξηρή όταν ρίχνουμε νερό στις καυτές πέτρες μέσα στον κλίβανο;*

Ερώτηση 4. *Γιατί πρέπει να χύνουμε το νερό σε μικρές ποσότητες; Γιατί να μη ρίξουμε έναν ολόκληρο κουβά νερό στον κλίβανο;*

Ερώτηση 5. *Γιατί πρέπει να χρησιμοποιούμε βραστό νερό;*

... Έχει περάσει περισσότερο από μία ώρα. Οι άνθρωποι που βρίσκονται στο θάλαμο του ατμού είναι αρκετοί. Ο αέρας έχει πλέον χάσει τη φρεσκάδα του. Είναι πολύ υγρός. Είναι πια καιρός να «καθαρίσουμε» το χώρο. Νά πώς γίνεται. Ο θάλαμος εκκενώνεται για δέκα λεπτά περίπου. Μέσα σ' αυτό το διάστημα πρέπει να σκουπίσουμε το πάτωμα, να το καταβρέξουμε, να ανοίξουμε την πόρτα του θαλάμου, και να ρίξουμε αρκετούς κουβάδες κρύο νερό στο πάτωμα μπροστά στην είσοδο. Τότε αρχίζουμε να «προσθέτουμε τον ατμό». Ο καινούργιος ατμός διώχνει τον παλιό αέρα από το θάλαμο. Τώρα όλα είναι και πάλι έτοιμα· οι επισκέπτες μπορούν να επιστρέψουν και ν' αρχίσουν ξανά τη διασκέδασή τους.

Ερώτηση 6. *Γιατί ρίξαμε νερό στην είσοδο του θαλάμου;*

Ερώτηση 7. *Γιατί ο παλιός αέρας που υπάρχει στο χώρο εκτοπίζεται απ' τον ατμό;*

Τώρα που κατέχετε την «ιεροτελεστία» του ατμόλουτρου, προσπαθήστε να απαντήσετε στις ερωτήσεις.

Η πρώτη ερώτηση είναι τόσο εύκολη, που πιθανώς όλοι σας θα βρήκατε την απάντηση αμέσως. Γι' αυτό ας περάσουμε στη δεύτερη.

Τι συμβαίνει όταν περπατάτε ή κάθεστε σ' έναν ζεστό πάγκο; Η θερμοκρασία σας δεν ξεπερνά τους 40°C, τη στιγμή που σ' ένα θάλαμο ατμού η θερμοκρασία του αέρα, συνεπώς και εκείνη των πάγκων, ποικίλλει ανάμεσα στους 80° με 120°C. Όταν έρχεστε σε επαφή με τον πάγκο, αρχίζει να ρέει θερμότητα από το θερμό σώμα (τον πάγκο) στο ψυχρό (εσάς). Ποιος είναι ο ρυθμός αυτής της διαδικασίας; Εξαρτάται από τη θερμική αγωγιμότητα του θερμού σώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η θερμική του αγωγιμότητα, τόσο πιο γρήγορα διαδίδεται η θερμότητα από τις θερμές στις ψυχρές του περιοχές. Όπως συμβαίνει και με τα άλλα μέταλλα, η θερμική αγωγιμότητα του σιδήρου είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη του ξύλου (κατά παράγοντα περίπου 300). Όταν αγγίζετε έναν θερμό ξύλινο πάγκο, ψύχετε την περιοχή του που ταυτίζεται με την περιοχή της επαφής, απορροφώντας θερμότητα από έναν μικρό μόνο όγκο του πάγκου. Η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική αν υπάρχει ένα καρφί στην περιοχή της επαφής: θερμότητα μετακινείται από όλο το μήκος του και συγκεντρώνεται γρήγορα στην περιοχή επαφής. Επίσης, η ειδική θερμότητα (ή ειδική θερμοχωρητικότητα) του σιδήρου είναι 40 φορές μεγαλύτερη από εκείνη του ξύλου. Έτσι, κάτω από τις ίδιες συνθήκες θερμοκρασίας, απορροφάτε πολύ περισσότερη θερμότητα από ένα σιδερένιο αντικείμενο παρά από ένα ξύλινο της ίδιας μάζας.

Τώρα πιστεύω ότι έχετε τη δυνατότητα να απαντήσετε στην ερώτηση 2. (Θα προσέξατε ότι δεν ανέφερα ούτε την ειδική θερμότητα ούτε τη θερμική αγωγιμότητα του ανθρώπινου σώματος. Προσπαθήστε να αναλύσετε μόνοι σας τη σημασία αυτών των παραμέτρων στη διαδικασία.)

Για να απαντήσουμε στις υπόλοιπες ερωτήσεις, ας θυμηθούμε κάποια ζητήματα μοριακής φυσικής, ιδιαίτερα εκείνα που σχετίζονται με τους υδρατμούς.

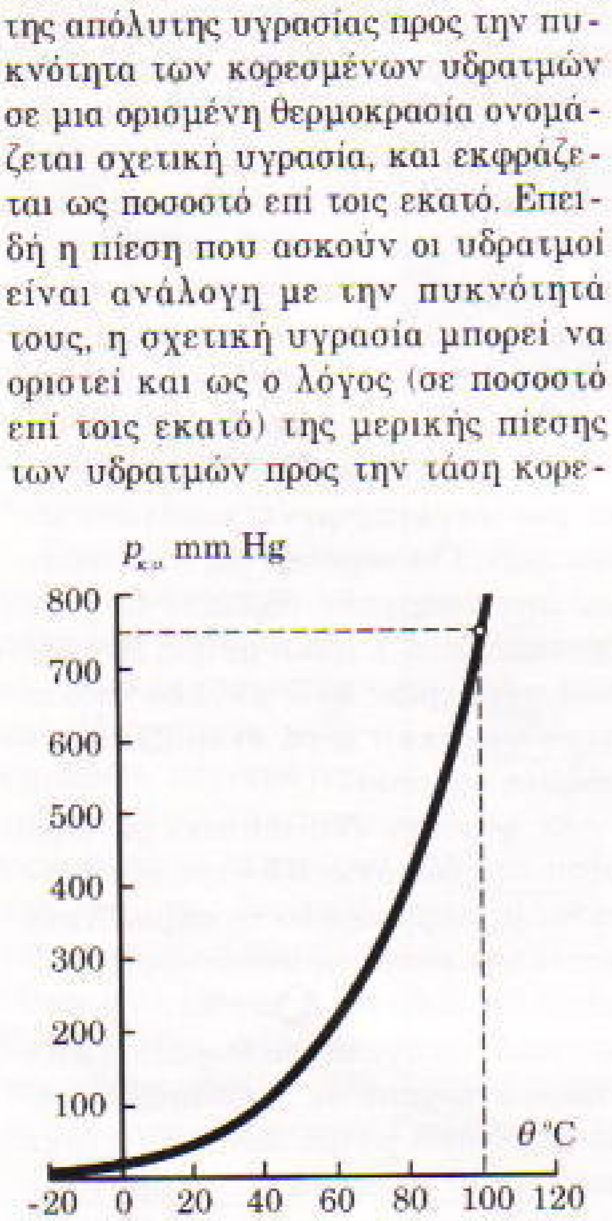
Όπως όλοι ξέρουμε, το νερό υπάρχει σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις: στερεά (πάγος), υγρή (αυτό που εννοούμε όταν λέμε «νερό»), και αέρια (ατμός). Θα παραλείψουμε τον πάγο, αφού δεν σχετίζεται άμεσα με το ατμόλουτρο, και θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη στερεά και την αέρια κατάσταση του νερού.

Η διαδικασία μέσω της οποίας ένα υγρό μετατρέπεται σε αέριο ονομάζεται εξαέρωση, και η αντίστροφη διαδικασία υγροποίηση. Κατά τη διάρκεια της εξαέρωσης η μάζα νερού απορροφά θερμότητα, ενώ κατά την υγροποίηση ίδιας μάζας ατμού απελευθερώνεται ίδια ποσότητα θερμότητας. Η ατμόσφαιρα περιέχει πάντοτε μια συγκεκριμένη ποσότητα υδρατμών. Για παράδειγμα, στο δωμάτιό μας υπάρχουν περίπου 10 g υδρατμών ανά κυβικό μέτρο. Η μάζα των υδρατμών ανά μονάδα όγκου ατμοσφαιρικού αέρα ονομάζεται απόλυτη υγρασία.

Ας φέρουμε ένα πιατάκι με νερό μέσα στο δωμάτιο. Το νερό εξαερώνεται μετατρεπόμενο σε ατμό. Αυτό κάνει την απόλυτη υγρασία στο δωμάτιο να αυξάνεται, αν και όχι σημαντικά — ο όγκος του δωματίου συνήθως ανέρχεται σε περισσότερα από δέκα κυβικά μέτρα. Αν το πιατάκι περιέχει 10 g νερό, η απόλυτη υγρασία αυξάνεται κατά όχι περισσότερο από 1 g/m^3. Τι γίνεται, όμως, αν τοποθετήσουμε το ίδιο πιατάκι μέσα σ' ένα πωματισμένο δοχείο όγκου μόνο 1 lt (10^{-3} m^3); Η ποσότητα του νερού στο πιατάκι θα μειωθεί έως ότου ο χώρος του δοχείου κορεστεί από ατμούς. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ο ρυθμός με τον οποίο τα μόρια εγκαταλείπουν τη μάζα του νερού ισούται με το ρυθμό με τον οποίο τα μόρια επιστρέφουν στο νερό. Από εδώ και στο εξής, η απόλυτη υγρασία του αέρα μέσα στη φιάλη δεν αλλάζει. (Υποτίθεται, βέβαια, ότι η θερμοκρασία της φιάλης παραμένει σταθερή.)

Επομένως, για κάθε σταθερή θερμοκρασία υπάρχει μια μέγιστη απόλυτη υγρασία, που ισούται με την πυκνότητα των κορεσμένων υδρατμών σ' αυτή τη θερμοκρασία. Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, τόσο αυξάνεται και η πυκνότητα των κορεσμένων υδρατμών.

Σ' αυτό το σημείο, ας αναφέρουμε και μια άλλη σχέση που παίζει ρόλο στο ατμόλουτρο: όσο πιο χαμηλή είναι η απόλυτη υγρασία σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της σε ορισμένη θερμοκρασία, τόσο πιο έντονη είναι η διαδικασία της εξαέρωσης. Ο λόγος της απόλυτης υγρασίας προς την πυκνότητα των κορεσμένων υδρατμών σε μια ορισμένη θερμοκρασία ονομάζεται σχετική υγρασία, και εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό. Επειδή η πίεση που ασκούν οι υδρατμοί είναι ανάλογη με την πυκνότητά τους, η σχετική υγρασία μπορεί να οριστεί και ως ο λόγος (σε ποσοστό επί τοις εκατό) της μερικής πίεσης των υδρατμών προς την τάση κορεσμένων υδρατμών σε μια ορισμένη θερμοκρασία.



Σχήμα 1

Τόσο η τάση όσο και η πυκνότητα των κορεσμένων υδρατμών αυξάνεται με τη θερμοκρασία. Αυτή η εξάρτηση φαίνεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 1.

Αύξηση της απόλυτης υγρασίας σε ορισμένη θερμοκρασία αέρα συνεπάγεται και αύξηση της σχετικής υγρασίας. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να πετύχουμε και με άλλον τρόπο —ψύχοντας τον αέρα και διατηρώντας παράλληλα σταθερή την απόλυτη υγρασία— η σχετική υγρασία και σ' αυτή την περίπτωση θα αυξηθεί. Σε κάποια θερμοκρασία, μάλιστα, η σχετική υγρασία θα φτάσει το 100%, οπότε ο χώρος θα είναι πλέον κορεσμένος από υδρατμούς. Η θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται αυτό ονομάζεται σημείο δρόσου.

Τι συμβαίνει όμως εάν και η απόλυτη υγρασία και η θερμοκρασία αυξηθούν; Σ' αυτή την περίπτωση η σχετική υγρασία εξαρτάται από το ποιο μέγεθος θα αυξηθεί γρηγορότερα: η μάζα των υδρατμών στον αέρα ή η τάση κορεσμένων υδρατμών.

Και τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στα ερωτήματά μας.

Έχουμε κάνει σαφές ότι ο ρυθμός εξαέρωσης εξαρτάται από τη σχετική (και όχι την απόλυτη) υγρασία. Εάν ο θάλαμος ατμού γίνει ξηρότερος αφού ρίξουμε το βραστό νερό στον κλίβανο, αυτό σημαίνει ότι η σχετική υγρασία μειώνεται (σε αντίθεση με την απόλυτη υγρασία, που προφανώς αυξάνεται). Γιατί συμβαίνει αυτό; Όταν τινάζουμε μια μικρή ποσότητα νερού μέσα στον κλίβανο, αυτή μετατρέπεται σε σταγονίδια. Καθώς αυτά έρχονται σε επαφή με τις καυτές πέτρες, εξαερώνονται αμέσως, και η θερμοκρασία του σχηματιζόμενου ατμού βρίσκεται πολύ κοντά σ' αυτή των πετρών. Ο ατμός ξεχύνεται από τον κλίβανο, και αυξάνεται η μέση θερμοκρασία του θαλάμου. Υψηλότερη θερμοκρασία μέσα στο θάλαμο συνεπάγεται αύξηση της πυκνότητας των κορεσμένων υδρατμών. Έτσι, παρόλο που έχουμε αύξηση της απόλυτης υγρασίας, η σχετική υγρασία μειώνεται.

Τώρα είναι εύκολο να αντιληφθούμε γιατί το νερό πρέπει να ρίχνεται σε μικρές ποσότητες. Μεγάλη ποσότητα νερού πάνω στις πυρωμένες πέτρες θα έμοιαζε με μια μεγάλη «σταγόνα». Μια τέτοια «σταγόνα» δεν μπορεί να εξαερωθεί τόσο γρήγορα όσο μια μικρή. Αρχίζει να βράζει, και ατμός σχηματίζεται στους 100°C ή και λίγο παραπάνω. Αυτό ακριβώς είναι που προσπαθούμε να αποφύγουμε! Το μυστικό των ατμόλουτρων έγκειται στη γρηγοράδα της διαδικασίας. Για τον ίδιο λόγο, δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κρύο νερό. Εξάλλου, οι πέτρες έχουν χαμηλή θερμική αγωγιμότητα —ακόμη και ένα μικρό σταγονίδιο στους 100°C ψύχει το σημείο επαφής του με την πέτρα, και έτσι ο ατμός που παράγεται έχει χαμηλότερη θερμοκρασία.

Τώρα που έχουμε απαντήσει στις ερωτήσεις 3, 4 και 5 μπορούμε να προχωρήσουμε στην 6 με περισσότερη ευκολία. Γύρω από τη λίμνη της εισόδου η θερμοκρασία βρίσκεται κάτω από το σημείο δρόσου· έτσι, οι «άχρηστοι» υδρατμοί γρήγορα υγροποιούνται, ή καταιονίζονται, στην επιφάνεια της λίμνης. Σε θαλάμους ατμού που είναι καλά σχεδιασμένοι, η πόρτα της εισόδου και ο κλίβανος τοποθετούνται σε σημεία αντιδιαμετρικά, έτσι ώστε ο ατμός που βγαίνει από τον κλίβανο να διασχίζει όλο το θάλαμο, να ψύχεται καθ' οδόν και να καταιονίζεται στην έξοδο.

Φτάσαμε λοιπόν στην τελευταία ερώτηση: γιατί ο φρέσκος ατμός εντοπίζει τον παλιό αέρα από το θάλαμο ατμού; Όταν καθαρίζαμε το θάλαμο, ρίξαμε βραστό νερό (όχι λιγότερο από 10 kg) μέσα στον κλίβανο. Η θερμοκρασία του ατμού που δημιουργήθηκε είναι περίπου 300°C· σ' αυτή τη θερμοκρασία, 10 kg ατμού καταλαμβάνουν όγκο περίπου 25 m^3 υπό πίεση 1 atm. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε μικρό χρονικό διάστημα σχηματίστηκε αρκετός ατμός για να γεμίσει το 1/3 του θαλάμου. Ο ατμός είναι ζεστός, οπότε ανέρχεται και σπρώχνει τον παλιό αέρα προς τα κάτω και έξω από την πόρτα.

Όπως βλέπετε, το λουτρό δεν αποτελεί μόνο ένα μέσο αναζωογόνησης, αλλά και μια αφορμή για επιστημονική μελέτη. Μπορούμε λοιπόν να χαρούμε και τις δύο απολαύσεις που μας προσφέρει.

Η πολυτάραχη ζωή του Évariste Galois

Ένας επαναστάτης της πολιτικής και των μαθηματικών

Y.P. Solovyov

«ΤΗΝ ΑΝΟΙΞΗ ΤΟΥ 1832 ΤΟ Παρίσι έβραζε, έτοιμο για μια επαναστατική έκρηξη, παρόλο που τρεις μήνες αδιάκοπης επιδημίας χολέρας είχαν αμβλύνει τα πνεύματα και είχαν σκεπάσει με μελαγχολική ηρεμία τα αναστατωμένα συναισθήματα του λαού. Η μεγάλη πολιτεία έμοιαζε με γεμάτο κανόνι που δεν ήθελε παρά μία σπίθα για να πυροδοτηθεί.» Το απόσπασμα αυτό προέρχεται από τους *Άθλιους* του Βίκτωρα Ουγκώ, αυτόπτη μάρτυρα των συνταρακτικών γεγονότων που ακολούθησαν. Την Τρίτη, στις 5 Ιουνίου, μια μεγάλη εξέγερση ξέσπασε στο Παρίσι. Ελάχιστοι άνθρωποι πρόσεξαν μια σύντομη είδηση που εμφανίστηκε στις παρισινές εφημερίδες εκείνες τις ταραγμένες μέρες. Όπως ανέφεραν τα δημοσιεύματα, το πρωί της 30ής Μαΐου ο Évariste Galois, ένας νέος είκοσι ετών, διάσημος για τους πολιτικές του ομιλίες και απόφοιτος του Βασιλικού Κολεγίου Louis-le-Grand, σκοτώθηκε σε μονομαχία. Θάφτηκε το Σάββατο, στις 2 Ιουνίου, σ' ένα κοινοτάφιο στο κοιμητήριο του Μονπαρνάς. Σήμερα, δεν υπάρχει καμία ένδειξη για την τοποθεσία του τάφου του.

Πεθαίνοντας, άφησε ένα ανολοκλήρωτο μαθηματικό χειρόγραφο 60 σελίδων, που κατέληξε στα χέρια του φίλου του Auguste Chevalier, ο οποίος δεν έβρισκε κανέναν να το δημοσιεύσει. Έπρεπε να φτάσει το 1846 για να τυπωθεί το χειρόγραφο. Η θεωρία που αναπτυσσόταν στο άρθρο ασκεί βαθιά επίδραση όχι μόνο

Αυτό είναι το μοναδικό πορτρέτο του Galois που έχει σχεδιαστεί ενόσω ακόμη ζούσε. Εδώ είναι σε ηλικία 15 ή 16 ετών.

στα μαθηματικά αλλά και σε όλες τις φυσικές επιστήμες εδώ και 150 χρόνια...

Ζωή και θάνατος

«Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta.»[1]

Ο Évariste Galois γεννήθηκε στις 26 Οκτωβρίου του 1811, στην αρχαία κωμόπολη Μπουρ-λα-Ρεν, περίπου δέκα χιλιόμετρα από το Παρίσι. Ο πατέρας του, Nicholas-Gabriel, ήταν διευθυντής ενός εκπαιδευτικού ιδρύματος για νέους. Το 1815 εξελέγη δήμαρχος της κωμόπολης και διατήρησε το αξίωμα έως το θάνατό του. Τα πρώτα δώδεκα χρόνια της ζωής του ο Évariste ανατράφηκε και μορφώθηκε από τη μητέρα του. Το παιδί μελέτησε ελληνικά και λατινικά, και αφιέρωσε πολύ χρόνο στην ανάγνωση του Πλούταρχου και του Λίβιου.

Τον Οκτώβριο του 1823, ο Évariste εισέρχεται στο Βασιλικό Κολέγιο Louis-le-Grand (σήμερα Λύκειο Louis-le-Grand), ένα φημισμένο εκπαιδευτικό ίδρυμα όπου σπούδασαν ο Μολιέρος, ο Βίκτωρ Ουγκώ, ο Ροβεσπιέρρος και ο Ντελακρουά. Ο Galois έλαβε υποτροφία και εισήχθη οικότροφος στο Κολέγιο. Τα πρώτα τρία χρόνια θεωρήθηκε ένας από τους καλύτερους σπουδαστές, και μελέτησε με ευχαρίστηση γλώσσες, λογοτεχνία και ιστορία. Τον Οκτώβριο του 1825 ο Galois άρχισε να παρακολουθεί τον ανώτερο κύκλο σπουδών της σχολής —την τάξη ρητορικής· αλλά οι ενδείξεις κόπωσης που παρουσίασε οδήγησαν τον διευθυντή να τον συμβουλέψει να επαναλάβει το μάθημα τον Ιανουάριο του 1827. Χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια έγινε και πάλι ένας από τους καλύτερους σπουδαστές, και έλαβε βραβείο για μεταφράσεις ελληνικών κειμένων καθώς και επαίνους για άλλα τέσσερα θέματα. Τα χρόνια αυτά ήταν ένα σημείο καμπής για τον Évariste: ανακάλυψε τον κόσμο των μαθηματικών και εισχώρησε σ' αυτόν.

Πριν από την τάξη της ρητορικής όλοι οι σπουδαστές παρακολουθού-

1. «Φώτα εκθαμβωτικά, μια τρομερή καταιγίδα τριγυρισμένη από το απόλυτο έρεβος.» Με αυτά τα λόγια τελείωνε μια από τις επιστολές που έγραψε ο Évariste Galois την παραμονή της μονομαχίας.

σαν το ίδιο πρόγραμμα σπουδών, που περιλάμβανε κυρίως ανθρωπιστικές επιστήμες και τις στοιχειώδεις μόνο βάσεις των θετικών επιστημών. Όσοι σπουδαστές όμως ενδιαφέρονταν για τις θετικές επιστήμες μπορούσαν να παρακολουθήσουν μια προπαρασκευαστική τάξη μαθηματικών τα τελευταία δύο χρόνια των σπουδών τους. Αυτοί που ήθελαν να αφιερωθούν στα μαθηματικά έπρεπε στη συνέχεια να παρακολουθήσουν ένα ετήσιο πρόγραμμα βασικών μαθηματικών και να σπουδάσουν άλλον ένα χρόνο για να πάρουν μια ειδικότητα. Την εποχή που επανέλαβε το μάθημα, ο Galois βρήκε την ευκαιρία να ξεκινήσει την προπαρασκευαστική τάξη των μαθηματικών. Οι εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητές του αποκαλύφθηκαν σχεδόν αμέσως: χωρίς καμία δυσκολία κατάλαβε το μάλλον περίπλοκο βιβλίο *Αρχές της γεωμετρίας* του Adrien Marie Legendre και άρχισε να μελετά τα έργα του Joseph Louis Lagrange: *Η λύση των αριθμητικών εξισώσεων*, *Θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων* και *Διαλέξεις θεωρίας συναρτήσεων*.

Το φθινόπωρο του 1827 ο Évariste επέστρεψε στην τάξη της ρητορικής και συνέχισε τις σπουδές του στην προπαρασκευαστική τάξη των μαθηματικών. Η σχολική ρουτίνα τού ήταν βάρος· είχε απορροφηθεί ολοκληρωτικά από τα μαθηματικά. Ένας από τους καθηγητές του Galois συμβούλευε: «Τον έχει καταλάβει ένα απέραντο πάθος για τα μαθηματικά. Νομίζω ότι θα ήταν καλύτερο, αν συμφωνούν οι γονείς του, να σπουδάσει μόνο αυτή την επιστήμη: ως σπουδαστής στην τάξη ρητορικής σπαταλά το χρόνο του, ενοχλεί τους καθηγητές του και επισύρει την οργή και την τιμωρία».

Εκείνη την περίοδο ο Galois γνώρισε τα έργα των Abel και Gauss, και αισθάνθηκε ικανός να καταφέρει ακόμη περισσότερα πράγματα. Ήταν απλώς σπουδαστής της προπαρασκευαστικής τάξης, αλλά χωρίς καμία βοήθεια προετοιμαζόταν για τις εισαγωγικές εξετάσεις της Πολυτεχνικής Σχολής —του καλύτερου ιδρύματος ανώτερης εκπαίδευσης στη Γαλλία εκείνη την εποχή. Ο Évariste πίστευε ότι σ' αυτή τη σχολή θα μπορούσε να αξιοποιήσει πλήρως όλη τη δύναμη και την ενέργεια του μυαλού του.

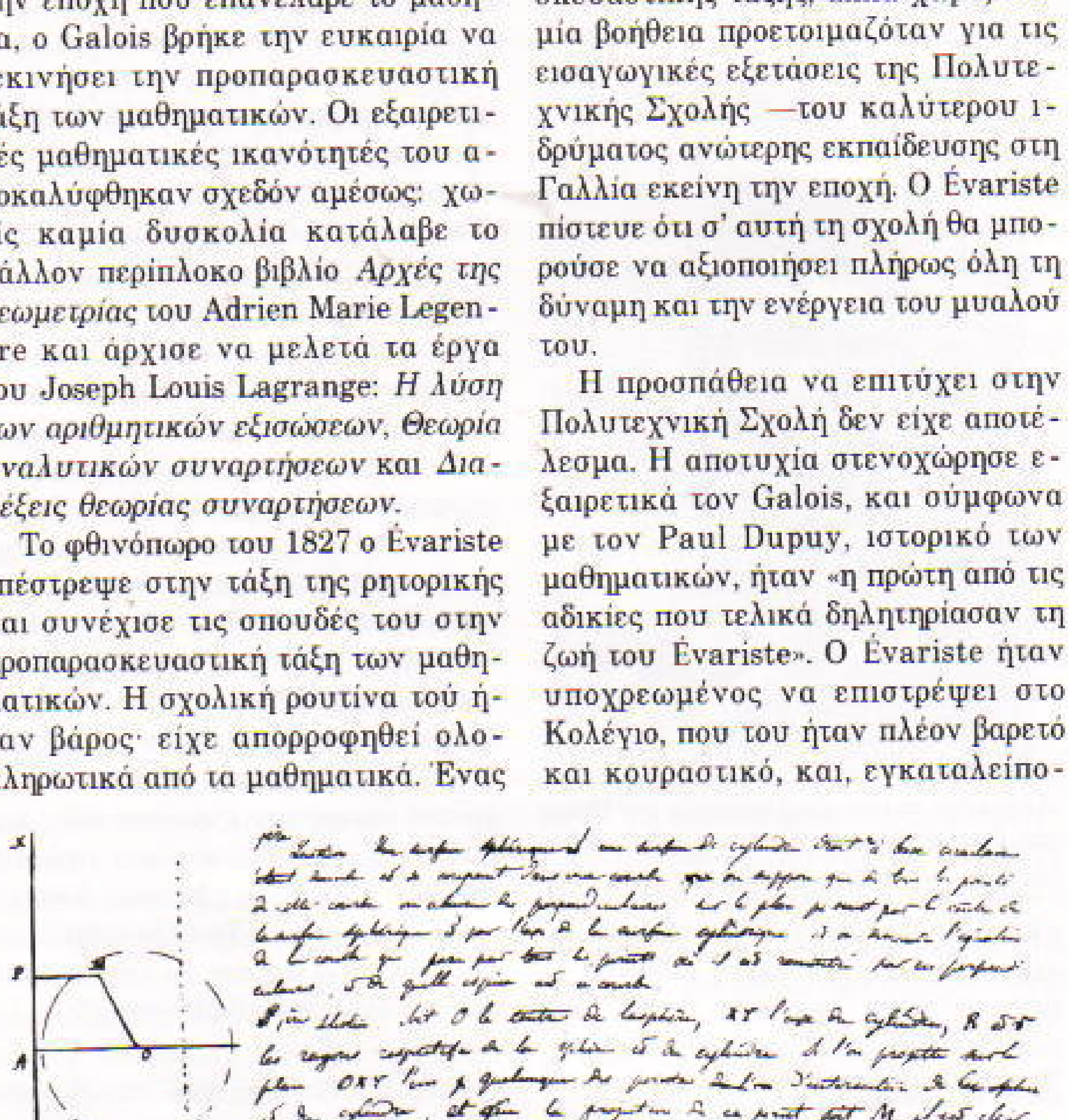
Η προσπάθεια να επιτύχει στην Πολυτεχνική Σχολή δεν είχε αποτέλεσμα. Η αποτυχία στενοχώρησε εξαιρετικά τον Galois, και σύμφωνα με τον Paul Dupuy, ιστορικό των μαθηματικών, ήταν «η πρώτη από τις αδικίες που τελικά δηλητηρίασαν τη ζωή του Évariste». Ο Évariste ήταν υποχρεωμένος να επιστρέψει στο Κολέγιο, που του ήταν πλέον βαρετό και κουραστικό, και, εγκαταλείποντας το βασικό πρόγραμμα, άρχισε να παρακολουθεί την τάξη των εξειδικευμένων μαθηματικών. Εκείνη την εποχή δίδασκε το μάθημα ο Louis-Paul Richard, ένας εξαίρετος δάσκαλος που αγαπούσε με πάθος την επιστήμη του. Εκτός του Galois, μαθητές του υπήρξαν σε διάφορες εποχές ο διάσημος αστρονόμος Leverrier και ο περίφημος μαθηματικός Hermite.

Ο Richard έδειξε μεγάλο ενδιαφέρον για τον νεαρό Galois, τον οποίο θεωρούσε ως τον πιο χαρισματικό απ' όλους τους μαθητές του. Οι παρατηρήσεις του για τον Évariste είναι λακωνικές: «ο Galois ασχολείται μόνο με θέματα ανώτερων μαθηματικών»· «είναι πολύ περισσότερο ταλαντούχος απ' όλους τους συμμαθητές του». Κάτω από την επίβλεψη του Richard, ο Galois έγραψε την πρώτη του επιστημονική εργασία, με τίτλο «Απόδειξη ενός θεωρήματος περί των περιοδικών συνεχών συναρτήσεων», που δημοσιεύτηκε στο *Les annales de mathématiques pures et appliquées* τον Μάρτιο του 1829. Εκείνη την περίοδο, υπό την επίδραση του Lagrange, ο Galois άρχισε να μελετά σοβαρά ένα από τα δυσκολότερα μαθηματικά προβλήματα της εποχής του: την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων με ριζικά.

Αυτό το πρόβλημα έχει μεγάλη ιστορία. Οι Βαβυλώνιοι ήταν αυτοί που ανακάλυψαν τη μέθοδο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$. Με τον σύγχρονο συμβολισμό, οι ρίζες της εκφράζονται από τον τύπο

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

όπου χρησιμοποιούνται τέσσερις αριθμητικές πράξεις επί των συντελεστών καθώς και μία τετραγωνική ρίζα. Στις αρχές του 16ου αιώνα, ο Scipione del Ferro και ο Niccolo Fontana (γνωστός ως Tartaglia) ανακάλυψαν έναν τύπο για τις ρίζες της τριτοβάθμιας εξίσωσης ο οποίος περιλάμβανε τέσσερις αριθμητικές πράξεις μαζί με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες.[2] Λίγο αργότερα, ο Lodovico



Τμήμα από ένα προσχέδιο ενός μαθηματικού χειρογράφου του Galois.

2. Βλ. άρθρο «Η μεγάλη τέχνη» στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1995 του *Quantum*.

Πορτρέτο του Galois που σχεδίασε από μνήμης ο αδελφός του Alfred και δημοσιεύτηκε το 1848 στο Magasin pittoresque. *«Το πορτρέτο αυτό», αναφέρει μια σημείωση στο περιοδικό, «αναπαράγει με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια την έκφραση του προσώπου του Galois. Σχεδιάστηκε από τον Alfred Galois, που εδώ και 16 χρόνια έχει δημιουργήσει ένα πραγματικό ιδεολογικό κίνημα στη μνήμη του άτυχου αδελφού του».*

Ferrari ανακάλυψε έναν τύπο για τις ρίζες μιας εξίσωσης τέταρτου βαθμού στον οποίο χρησιμοποιούσε ριζικά τέταρτης τάξης το πολύ. Ήταν λογικό να υποθέσει κανείς ότι οι ρίζες μιας αλγεβρικής εξίσωσης n βαθμού

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει ριζικών n το πολύ τάξης. Ωστόσο, παρά τις τεράστιες προσπάθειες που κατέβαλαν επί τρεις αιώνες οι σημαντικότεροι μαθηματικοί, δεν ανακαλύφθηκε κανένας τέτοιος τύπος, ούτε καν για τις εξισώσεις πέμπτου βαθμού. Κατά τα τέλη του 18ου αιώνα, οι μαθηματικοί άρχισαν να υποπτεύονται ότι δεν είχε ανακαλυφθεί κανείς τύπος με ριζικά για τις εξισώσεις βαθμού $n \geq 5$ επειδή απλώς δεν υπάρχει τέτοιος τύπος.

Ένα σημαντικό βήμα στη διερεύνηση των αλγεβρικών εξισώσεων επιτεύχθηκε από τον Lagrange, ο οποίος ανακάλυψε ότι η λύση των εξισώσεων με ριζικά συνδέεται στενά με τις μεταθέσεις των ριζών τους. Την ιδέα του Lagrange, που ο ίδιος την ονόμαζε «αληθινή φιλοσοφία της επίλυσης εξισώσεων», την ανέπτυξε ουσιαστικά μια άλλη μαθηματική ιδιοφυΐα, ο νορβηγός Niels Henric Abel. Το 1824, σε ηλικία είκοσι ετών, ο Abel απέδειξε ότι δεν υπήρχαν τύποι επίλυσης για τις αλγεβρικές εξισώσεις γενικής μορφής βαθμού $n \geq 5$ συναρτήσει ριζικών.

Με την εμφάνιση του θεωρήματος του Abel, ανέκυψε ένα άλλο πρόβλημα: να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές $a_0, a_1, ..., a_n$ μιας εξίσωσης ώστε αυτή να επιλύεται με ριζικά.

Ο Évariste έλυσε πλήρως αυτό το εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα κατά την περίοδο 1829-1831. Την άνοιξη του 1829 είχε επιτύχει ήδη τα πρώτα του αποτελέσματα στη θεωρία των εξισώσεων. Ο Galois τα έστειλε στην Ακαδημία των Επιστημών. Την εργασία του επρόκειτο να εξετάσει ένας από τους πλέον διακεκριμένους γάλλους μαθηματικούς, ο Augustin Cauchy, ο οποίος όμως την έχασε!

Αφού ολοκλήρωσε την ειδική τάξη των μαθηματικών, ο Galois προσπάθησε ξανά να εισαχθεί στην Πολυτεχνική Σχολή, αλλά απέτυχε και πάλι. Κανείς δεν ξέρει με βεβαιότητα τι συνέβη στις εξετάσεις. Ο Galois περιέγραψε αργότερα «τα τρελά γέλια των εξεταστών», που διέκοπταν τις απαντήσεις του. Εξεταστές του ήταν ο Binet και ο Lefebvre de Fourcy. Δεν γνωρίζουμε πώς βαθμολόγησαν τον Galois, αλλά ούτως ή άλλως, δεν επέτυχε στην Πολυτεχνική Σχολή.

Κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας του για τις εισαγωγικές εξετάσεις, μια μεγάλη συμφορά χτύπησε τον Évariste. Στις 2 Ιουλίου του 1829, ο πατέρας του, κυνηγημένος από τον τοπικό κλήρο και τους Ιησουίτες, αυτοκτόνησε. Ο Évariste πέρασε αυτή τη δύσκολη περίοδο στο σπίτι του μαζί με τη μητέρα του και το μικρότερό του αδελφό, τον Alfred.

Ο Évariste, ακολουθώντας τη συμβουλή του Richard, αποφάσισε να παρακολουθήσει την Προπαρασκευαστική Σχολή, μια ατυχή μετεξέλιξη του παλαιότερα ένδοξου Διδασκαλείου (École Normale), που είχε ιδρυθεί κατά τη Γαλλική Επανάσταση. Το 1822 οι Βουρβώνοι έκλεισαν το Διδασκαλείο. Άνοιξε ξανά το 1826 μετονομασμένο σε Προπαρασκευαστική Σχολή, για να λειτουργήσει ως συνέχεια του Κολεγίου Louis-le-Grand. Το τριετές πρόγραμμα σπουδών είχε στόχο την εκπαίδευση δασκάλων και δημοσίων υπαλλήλων. Στις 20 Φεβρουαρίου του 1830, ο Évariste Galois έγινε ένας από τους φοιτητές της.

Το πρώτο έτος στην Προπαρασκευαστική Σχολή αποδείχτηκε το πιο επιτυχημένο στη ζωή του Galois. Εκεί γνωρίστηκε με τον Auguste Chevalier και σύντομα έγιναν στενοί φίλοι. Ο Galois μελέτησε μαθηματικά με ενθουσιασμό. Έγραψε τρεις εργασίες, τις οποίες υπέβαλε στην Ακαδημία για να συμμετάσχει σ' ένα διαγωνισμό.

Εντελώς απρόσμενα τον χτυπά άλλη μία κακοτυχία. Το χειρόγραφο του Galois φτάνει στα χέρια του γραμματέα της Ακαδημίας, του Fourier, που πεθαίνει έπειτα από λίγο καιρό. Το έργο του Galois δεν βρέθηκε ανάμεσα στα χαρτιά του Fourier —εξαφανίστηκε όπως και το πρώτο, και μαζί του χάθηκε και η ελπίδα να κερδίσει το πρώτο βραβείο στα μαθηματικά. Είναι αλήθεια ότι ο Évariste είχε κρατήσει αντίγραφα των εργασιών του, οι οποίες κατάφερε να δημοσιευτούν στο *Bulletin of Mathematical Sciences* τον Μάιο και τον Ιούνιο, αυτό όμως ελάχιστα τον παρηγόρησε. Δεν μπορούσε να πιστέψει ότι οι επαναλαμβανόμενες ατυχίες ήταν απλές συμπτώσεις. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ήταν αποτέλεσμα της κακής οργάνωσης της κοινωνίας, μιας οργάνωσης που καταδίκαζε το ταλέντο σε ατέλειωτα βάσανα ενώ η μετριότητα ευημερούσε. Με όλη την ορμή της νιότης, ο Évariste προσχώρησε στον αγώνα για την πολιτική αναμόρφωση της κοινωνίας.

Τον Ιούλιο του 1830, τα σκοτεινά νέφη που είχαν συγκεντρωθεί πάνω από το καθεστώς των Βουρβώνων ξέσπασαν σε επαναστατική καταιγίδα —ο βασιλιάς Κάρολος Ι' εκθρονίστηκε. Ο Galois, συντασσόμενος ολοκληρωτικά με τους δημοκρατικούς, μετείχε ενεργά στις δραστηριότητες των επαναστατικών κύκλων και έγινε μέλος της Εταιρείας των Φίλων του Λαού. Αλλά οι προσδοκίες των δημοκρατικών δεν εκπληρώθηκαν: στην εξουσία ανέβηκε ένας προστατευόμενος των μεγαλοεπιχειρηματιών, «ο αστός βασιλιάς» Λουδοβίκος-Φίλιππος. Το Παρίσι εξακολουθούσε να είναι ανάστατο.

Το φθινόπωρο του 1830 ο Évariste επιτέθηκε δριμύτατα μέσω μιας δημοσίευσης στον Gineot, διευθυντή της Προπαρασκευαστικής Σχολής, καταγγέλλοντας το διπλό παιχνίδι του κατά τα γεγονότα του Ιουλίου. Το αποτέλεσμα ήταν να αποβληθεί από τη Σχολή. Οι ελπίδες του για επαγγελματική σταδιοδρομία στα μαθηματικά εξανεμίστηκαν. Ο Évariste κατατάχθηκε στο πυροβολικό της Εθνοφρουράς, που αποτελούνταν κυρίως από μέλη της Εταιρείας των Φίλων του Λαού. Αυτός ήταν ο στρατός της επανάστασης, και η κυβέρνηση του Λουδοβίκου-Φιλλίπου κινήθηκε γρήγορα για να τον διαλύσει. Ο Évariste απέμεινε χωρίς κανένα μέσο συντήρησης —τα έβγαζε πέρα μόνο με κάποια ιδιαίτερα μαθήματα.

Εκείνη την εποχή, το μυαλό του ήταν κυριευμένο από τις επαναστατικές ιδέες —τα μαθηματικά είχαν έρθει σε δεύτερη μοίρα. Κατάφερε πάντως να βρει το χρόνο και την ενέργεια για να στείλει στην Ακαδημία το χειρόγραφο που είχε χαθεί την προηγούμενη χρονιά. Αυτή τη φορά επρόκειτο να το εξετάσουν δύο ακαδημαϊκοί, οι Lacroix και Poisson. Τελικά, έπειτα από μεγάλη καθυστέρηση, πληροφόρησαν τον Galois ότι το χειρόγραφό του είχε απορριφθεί.

Τον Ιούνιο του 1831 ο Galois οδηγήθηκε σε δίκη με την κατηγορία της «πρόκλησης σε απόπειρα κατά της ζωής του βασιλέα της Γαλλίας μέσω δημόσιων δηλώσεων σε μια συνάντηση». Το δικαστήριο τον αθώωσε, αλλά η μυστική αστυνομία άρχισε να τον παρακολουθεί.

Στις 14 Ιουλίου ο Galois συμμετείχε σε μια πορεία διαμαρτυρίας για την απαγόρευση των διαδηλώσεων από την κυβέρνηση του Λουδοβίκου-Φιλίππου.

Ο Évariste βρισκόταν στις πρώτες γραμμές της διαδήλωσης, ντυμένος με τη στολή της Εθνοφρουράς και οπλισμένος με τουφέκι. Μόλις εμφανίστηκαν οι διαδηλωτές στο κέντρο του Παρισιού, στη γέφυρα Πον-Νεφ, περικυκλώθηκαν από την αστυνομία. Ο Galois και οι υπόλοιποι διαδηλωτές συνελήφθησαν και οδηγήθηκαν στην παρισινή φυλακή της Αγίας Πελαγίας. Αυτή τη φορά καταδικάστηκε σε φυλάκιση εννέα μηνών για αντιποίηση στρατιωτικής στολής και οπλοφορία.

Στη φυλακή της Αγίας Πελαγίας, ο Galois έκλεισε τα 20. Εκεί ολοκλήρωσε τη συγγραφή της θεμελιώδους μαθηματικής πραγματείας του. Στις 16 Μαρτίου του 1832 μεταφέρθηκε στο νοσοκομείο των φυλακών επειδή υποπτεύονταν ότι είχε χολέρα. Στο νοσοκομείο γνώρισε μια νέα γυναίκα που επρόκειτο να παίξει μοιραίο ρόλο στη ζωή του. Ήταν η Stéphanie-Felicie Dumotel, η κόρη του γιατρού των φυλακών.

Στις 29 Απριλίου του 1832, ο Galois εξέτισε την ποινή του, αλλά έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι παρέμεινε στο νοσοκομείο για λίγο ακόμη καιρό. Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο για τη ζωή του κατά τη διάρκεια του Μαΐου του 1832 ούτε και για τη μετέπειτα σχέση του με τη Stéphanie Dumotel. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι η Stéphanie υπήρξε η αιτία της διαμάχης του Galois με δύο φίλους της, που κατέληξε σε μονομαχία. Ο Évariste, σε μια από τις τελευταίες του επιστολές, γράφει: «Πεθαίνω. Είμαι το θύμα μιας κοκέτας χαμηλής υποστάθμης και δύο ανόητων αφοσιωμένων σ' αυτήν». Οι συνθήκες της μονομαχίας είναι σκοτεινές —δεν γνωρίζουμε καν ποιος ήταν ο αντίπαλός του.

Το πρωινό της 30 Μαΐου τον βρήκε ένας περαστικός βαριά πληγωμένο από πιστόλι κοντά στην όχθη της λίμνης Γκλασσιέ, στο παρισινό προάστιο Ζαντιγύ. Ο τραυματίας μεταφέρθηκε στο νοσοκομείο Κοσέν, όπου πέθανε την επόμενη μέρα στις 12 π.μ. έχοντας στο προσκέφαλο τον μικρότερό του αδελφό.

Πριν πεθάνει έγραψε ένα γράμμα στο φίλο του Auguste Chevalier, ζητώντας του να δείξει το χειρόγραφό του στους γερμανούς μαθηματικούς Jacobi και Gauss. Το κείμενο όμως δεν δημοσιεύτηκε παρά έπειτα από δεκατέσσερα χρόνια, και ακόμη και τότε πέρασε ουσιαστικά απαρατήρητο. Οι ιδέες του Galois έγιναν πλήρως αποδεκτές μόνο κατά τη δεκαετία του 1870, μετά την έκδοση του βιβλίου του Camille Jordan *Οι αλγεβρικές εξισώσεις και η θεωρία αντικαταστάσεων*.

Αθανασία

«Στη θεωρία των εξισώσεων εξέτασα τις περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις είναι δυνατόν να επιλυθούν με ριζικά. Αυτό μου έδωσε την ευκαιρία να αναπτύξω πληρέστερα τη θεωρία και να περιγράψω όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς μιας εξίσωσης οι οποίοι είναι αποδεκτοί ακόμη και όταν αυτή είναι αδύνατον να επιλυθεί με ριζικά.»

Αυτό είναι ένα απόσπασμα από το χειρόγραφο του Galois «Πραγματεία περί των συνθηκών για την επίλυση εξισώσεων με ριζικά». Οι ιδέες που περιέχονται στην πραγματεία δεν έγιναν κατανοητές από τους συγχρόνους του Galois και θεωρούνται δύσκολες ακόμη και σήμερα. Πάντως, η διατύπωση του θεωρήματός του δεν είναι περίπλοκη. Είναι όμως απαραίτητο να κατανοήσουμε κάποιες νέες έννοιες —κυρίως την έννοια της ομάδας μεταθέσεων. (Παρεμπιπτόντως, ο Galois ήταν αυτός που εισήγαγε τον όρο «ομάδα», αλλά η ίδια η έννοια πρωτοεμφανίστηκε στις εργασίες του Abel και του Ruffini.) Εδώ θα αναφερθούμε στην ομάδα S_3 των μεταθέσεων τριών αντικειμένων.[3] Υπάρχουν μόνο έξι τέτοιοι μετασχηματισμοί:

---

3. Θεωρούμε ένα σύνολο από n διαφορετικά αντικείμενα. Ας συμβολίσουμε τα αντικείμενα αυτά με αριθμούς και το σύνολό τους με $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Μια μετάθεση i αυτών των αντικειμένων είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση i: $N_n \to N_n$, ή, απλούστερα, μια επαναρίθμηση αυτών των αντικειμένων.

Μια μετάθεση παρουσιάζεται καλύτερα αν τη γράψουμε ως πίνακα:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix},$$

όπου $i_k = i(k)$.

Συμβολίζουμε με S_n το σύνολο όλων των μεταθέσεων n αντικειμένων, το οποίο είναι μια ομάδα που ονομάζεται *ομάδα μεταθέσεων n-οστού βαθμού*. Αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα G είναι ισόμορφη με μια συγκεκριμένη υποομάδα μιας ομάδας μεταθέσεων S_n.

$$p_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Ιδού ο πίνακας πολλαπλασιασμού αυτής της ομάδας:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_0	p_4	p_5	p_3
p_2	p_2	p_0	p_1	p_5	p_3	p_4
p_3	p_3	p_5	p_4	p_0	p_2	p_1
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_0	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

Πίνακας 1

Είναι φανερό ότι, αν εκτελέσουμε, για παράδειγμα, πρώτα την p_2 και μετά την p_3, θα πάρουμε ως αποτέλεσμα την p_5, ενώ, αν εκτελέσουμε αυτές τις μεταθέσεις με αντίστροφη σειρά, θα πάρουμε την p_4. Επομένως, ο αντιμεταθετικός νόμος δεν ισχύει για τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων: δεν ισχύει πάντα ότι $a \cdot b = b \cdot a$. Όταν ισχύει ο νόμος αυτός για κάθε ζεύγος στοιχείων a, b μιας συγκεκριμένης ομάδας G, τότε η G ονομάζεται *αντιμεταθετική* ή *αβελιανή* ομάδα. Μπορείτε να διαπιστώσετε μόνοι σας ότι από όλες τις ομάδες S_n, $n > 1$, μόνο η S_2 είναι αντιμεταθετική.

Ένα τμήμα του πίνακα, στις διασταυρώσεις των γραμμών και των στηλών για τα p_0, p_1 και p_2, είναι χρωματισμένο γαλάζιο. Επιπλέον, όλα τα γαλάζια γράμματα είναι τα p_0, p_1 και p_2. Αυτό σημαίνει ότι οι τρεις συγκεκριμένες μεταθέσεις αποτελούν μόνες τους μια ομάδα, ή, για να είμαστε ακριβέστεροι, μια υποομάδα της ομάδας S_3. Θα τη συμβολίζουμε $\mathbf{Z}_3$. Εκτός από τη $\mathbf{Z}_3$ υπάρχουν τέσσερις επιπλέον υποομάδες της S_3: μια υποομάδα αποτελούμενη από ένα μόνο στοιχείο, την p_0, και τρεις ακόμη υποομάδες αποτελούμενες από δύο στοιχεία: $\{p_0, p_3\}$, $\{p_0, p_4\}$ και $\{p_0, p_5\}$. Όλες αυτές οι υποομάδες είναι αντιμεταθετικές. Μπορείτε να ελέγξετε μόνοι σας ότι δεν υπάρχουν άλλες υποομάδες της S_3. Όταν η H είναι υποομάδα της G, γράφουμε $H \leq G$.

Έστω G μια ομάδα και a, b δύο στοιχεία της. Η παράσταση $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ ονομάζεται *αντιμεταθέτης* των στοιχείων a και b. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διορθωτικός όρος για να εναλλάσσεται η θέση των a και b:

$$ab = [a, b]ba.$$

Όταν $ab = ba$, τότε $[a, b] = e$ (όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας: η ταυτοτική μετάθεση). Είναι προφανές ότι όσο περισσότεροι αντιμεταθέτες μιας ομάδας διαφέρουν από το e, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση της ομάδας από την αντιμεταθετική. Ονομάζουμε *παράγωγη υποομάδα* της ομάδας G την υποομάδα G', που αποτελείται από όλα τα δυνατά γινόμενα της μορφής

$$[a_1, b_1]\cdot[a_2, b_2]\cdot \ldots \cdot[a_k, b_k],$$

όπου $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ είναι στοιχεία της ομάδας G. Είναι φανερό πως, όταν η ομάδα G είναι αντιμεταθετική, τότε η G' αποτελείται μόνο από την ταυτοτική μετάθεση e. Και τώρα, μια απλή άσκηση: επαληθεύστε ότι οι αντιμεταθέτες της ομάδας S_3 δίνονται από τον επόμενο πίνακα:

$[p_i p_j]$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
p_1	p_0	p_0	p_0	p_2	p_2	p_2
p_2	p_0	p_0	p_0	p_1	p_1	p_1
p_3	p_0	p_1	p_2	p_0	p_1	p_2
p_4	p_0	p_1	p_2	p_2	p_0	p_1
p_5	p_0	p_1	p_2	p_1	p_2	p_0

Πίνακας 2

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την παράγωγη ομάδα της G', τη $(G')' = G''$, που ονομάζεται *δεύτερη παράγωγη ομάδα* της ομάδας G. Αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, θα πάρουμε την *k-οστή παράγωγη ομάδα* $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$. Είναι προφανές ότι $G^{(k)} \leq G^{(k-1)}$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει μια αλυσίδα εγκιβωτισμένων υποομάδων:

$$\ldots \leq G^{(k)} \leq G^{(k-1)} \leq \ldots \leq G'' \leq G' \leq G.$$

Αν αυτή η αλυσίδα διακόπτεται σε μια υποομάδα που αποτελείται μόνο από την ταυτοτική μετάθεση —δηλαδή, όταν $G^{(m)} = e$ για κάποιο m—, τότε η ομάδα G ονομάζεται *επιλύσιμη*.

Είναι φανερό ότι *κάθε αντιμεταθετική ομάδα είναι επιλύσιμη*. Ειδικότερα, η ομάδα S_2 είναι επιλύσιμη. Ας δείξουμε ότι και η ομάδα S_3 είναι επίσης επιλύσιμη. Στον Πίνακα 2 βλέπουμε ότι όλοι οι αντιμεταθέτες των στοιχείων της S_3 ανήκουν στο $\mathbf{Z}_3$, επομένως $S_3' = \mathbf{Z}_3$. Από τον Πίνακα 1 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ομάδα $\mathbf{Z}_3$ είναι αντιμεταθετική, άρα $S_3'' = \mathbf{Z}_3' = e$.

Πολλές ομάδες, όμως, δεν είναι επιλύσιμες. Για παράδειγμα, *οι ομάδες S_n είναι επιλύσιμες μόνο όταν $n = 2, 3, 4$.* (Αυτή η κάθε άλλο παρά απλή πρόταση εμφανίζεται για πρώτη φορά στην πραγματεία του Galois.)

Είμαστε τώρα έτοιμοι να εξηγήσουμε το κύριο σημείο της θεωρίας Galois. Έστω

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

μια τυχαία εξίσωση βαθμού n, με δεδομένα $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Ήδη από το τέλος του 18ου αιώνα ο Karl Friedrich Gauss είχε αποδείξει ότι, για κάθε $a_0, a_1, \ldots, a_n$, η δεδομένη εξίσωση έχει n μιγαδικές ρίζες $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Θα θέλαμε να μάθουμε αν υπάρχουν τύποι που εκφράζουν τις ρίζες $\rho_1, \ldots, \rho_n$ συναρτήσει των συντελεστών $a_0, a_1, \ldots, a_n$ με τη χρήση ριζικών και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Ας υποθέσουμε, χάριν απλουστεύσεως, ότι οι $a_0, a_1, \ldots, a_n$ είναι ρητοί αριθμοί και ότι οι ρίζες $\rho_1, \ldots, \rho_n$ είναι όλες διαφορετικές. Θα αντιστοιχίσουμε στο σύστημα των ριζών $\rho_1, \ldots, \rho_n$ το σύνολο $Q(f)$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς της μορφής

$$\frac{P(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)}{R(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)},$$

όπου P και R είναι πολυώνυμα n μεταβλητών με ρητούς συντελεστές. Ας θεωρήσουμε τους μετασχηματισμούς του $Q(f)$ που μεταφέρουν το άθροισμα των αριθμών σε άθροισμα και το γινόμενο σε γινόμενο, ενώ αφήνουν τους ρητούς συντελεστές αμετάβλητους. Αν σ είναι μια ρίζα της εξίσωσής μας —δηλαδή, αν

$$a_0\sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + ... + a_n = 0$$

—και φ είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός, τότε

$$\varphi(a_0\sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + ... + a_n)$$
$$= a_0\varphi(\sigma)^n + a_1\varphi(\sigma)^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $\varphi(\sigma)$ είναι ρίζα της ίδιας εξίσωσης —δηλαδή, ο φ αναδιατάσσει απλώς τις ρίζες $\rho_1, ..., \rho_n$, και επομένως ορίζει μια συγκεκριμένη μετάθεση:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Όλες αυτές οι μεταθέσεις σχηματίζουν μια συγκεκριμένη ομάδα που περιέχεται στην S_n. Αυτή η ομάδα ονομάζεται *ομάδα Galois* της εξίσωσης $f(x) = 0$, και συμβολίζεται με $G(f)$.

Για να δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της $G(f)$, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση έκτου βαθμού

$$f(x) = (x^2 - x + 1)^3 - a(x^2 - x)^2 = 0.$$

Θα τη γράψουμε με δύο διαφορετικές μορφές:

$$(x+1/x-1)^3 - a(x+1/x-2) = 0, \quad (\alpha)$$

$$[(x(1-x)-1]^3 + a[x(1-x)]^2 = 0. \quad (\beta)$$

Από την (α) βλέπουμε ότι, αν το x είναι ρίζα της εξίσωσής μας, τότε είναι ρίζα και το $1/x$. Η (β) μάς λέει ότι θα είναι ρίζα και το $1 - x$. Έτσι, αν συμβολίσουμε με θ μια από τις ρίζες της εξίσωσής μας, τότε οι

$$1/\theta,\ 1-\theta,\ 1/(1-\theta),\ (\theta-1)/\theta,\ \theta/(\theta-1)$$

θα είναι επίσης ρίζες της. Μπορούμε να επιλέξουμε το a έτσι ώστε η εξίσωση να είναι ανάγωγη, οπότε και οι έξι αυτές ρίζες θα είναι διαφορετικές. Διαπιστώνουμε ότι η ομάδα Galois αποτελείται από τους μετασχηματισμούς

$$\varphi_0(u) = u,\ \varphi_1(u) = 1/u,\ \varphi_2(u) = 1 - u,$$
$$\varphi_3(u) = u/(u-1),\ \varphi_4(u) = (u-1)/u,$$
$$\varphi_5(u) = 1/(1-u),$$

οι οποίοι αποτελούν ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης ($\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_k$, αν $\varphi_k(u) = \varphi_i(\varphi_j(u))$) που είναι ισόμορφη με την S_3 (ο φ_i αντιστοιχεί στην p_i —επιβεβαιώστε το μόνοι σας!).

Το θεμελιώδες θεώρημα

Η εξίσωση $f = 0$ είναι επιλύσιμη με ριζικά αν και μόνο αν η ομάδα Galois της εξίσωσης είναι επιλύσιμη.

Η αξία του θεωρήματος του Galois έγκειται στο γεγονός ότι, κατά κανόνα, μπορούμε να υπολογίσουμε την ομάδα $G(f)$ χωρίς να γνωρίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης, βλέποντας απλώς τους συντελεστές της. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την εξίσωση

$$x^3 + bx + c = 0$$

με ρητούς συντελεστές αλλά όχι και ρητές ρίζες. Έστω $\Delta = -4b^3 - 27c^2$. Αν η Δ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε $G(f) = S_3$, διαφορετικά $G(f) = \mathbf{Z}_3$. Και οι δύο ομάδες είναι επιλύσιμες, όπως και η εξίσωση. Όταν επιλέγουμε τους συντελεστές $a_0, a_1, ..., a_n$ λίγο ως πολύ τυχαία, η ομάδα Galois της εξίσωσης $f = 0$ θα είναι η S_n. Αφού η ομάδα S_n δεν είναι επιλύσιμη για $n \geq 5$, *η γενική εξίσωση βαθμού $n \geq 5$ δεν είναι επιλύσιμη με ριζικά.*

Η κύρια αξία της εργασίας του Galois δεν έγκειται στο ότι απάντησε εξαντλητικά σ' ένα ερώτημα που αποτελούσε πρόκληση για κάθε μαθηματικό επί τρεις αιώνες. Το πραγματικά σημαντικό ήταν η μέθοδός του, στην οποία κεντρική θέση έχουν οι έννοιες της ομάδας και της συμμετρίας. Οι ιδέες του Galois αποδείχτηκαν γόνιμες για όλους τους κλάδους των μαθηματικών και της θεωρητικής φυσικής. Το πεδίο εφαρμογής της γενικής ιδέας της συμμετρίας εκτείνεται από την αφηρημένη άλγεβρα έως τη θεωρία στοιχειωδών σωματιδίων. Είναι αδύνατον να βρούμε στην ιστορία των μαθηματικών άλλο παράδειγμα τόσο μικρής εργασίας που να έχει ασκήσει τέτοια τεράστια επίδραση.

Οι σύγχρονοι του Galois τον γνώριζαν απλώς ως έναν παθιασμένο δημοκράτη επαναστάτη. Μόνο μετά το θάνατό του χαρακτηρίστηκε για πρώτη φορά δημόσια «καλός μαθηματικός». Στις 7 Ιουνίου του 1832, δημοσιεύτηκε στην *Gazette des Hôpitaux* μια ανακοίνωση της αστυνομίας: «Ο νεαρός Évariste Galois, 20 ετών, καλός μαθηματικός, διάσημος για τη φλογερή φαντασία του, πέθανε στις 12 π.μ. από οξεία περιτονίτιδα οφειλόμενη σε τραυματισμό από σφαίρα που εβλήθη από απόσταση 25 βημάτων».

... Είχε αρχίσει να ξημερώνει όταν ο Évariste Galois τελείωσε το γράμμα —το τελευταίο που επρόκειτο να γράψει:

«Αγαπημένοι μου φίλοι! Προκλήθηκα από δύο πατριώτες —ήταν αδύνατον να αρνηθώ την πρόκληση. Σας ζητώ συγγνώμη που δεν πήρα τη γνώμη κανενός σας. Οι αντίπαλοί μου, όμως, μου ζήτησαν να δώσω το λόγο της τιμής μου ότι δεν θα ειδοποιήσω κανέναν πατριώτη. Το καθήκον σας είναι πολύ απλό: να αποδείξετε ότι μονομάχησα παρά τη θέλησή μου, και μόνον αφού εξάντλησα κάθε μέσο συμβιβασμού. Τονίστε ότι μου είναι αδύνατον να πω ψέματα, ακόμη και για τα πιο τετριμμένα ζητήματα. Προστατεύστε τη μνήμη μου, αφού η μοίρα δεν θέλησε να μου δώσει αρκετή ζωή για να γνωρίσει η πατρίδα το όνομά μου. Πεθαίνω, παντοτινά φίλος σας».

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ II

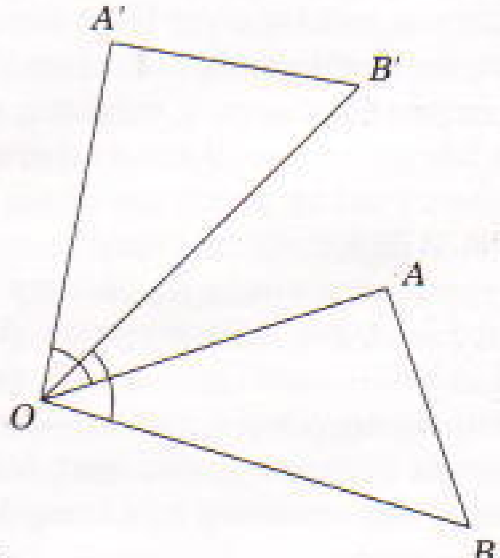
Γύρω από το κέντρο των προβλημάτων

Εφαρμογή της στροφής στην επίλυση προβλημάτων

Boris Pritsker

Η ΣΤΡΟΦΗ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΕΙΔΟΣ ΜΕτασχηματισμού που διατηρεί τις αποστάσεις. Κατά τη στροφή, εξ ορισμού, ολόκληρο το επίπεδο στρέφεται γύρω από ένα σημείο κατά μια δεδομένη γωνία, δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα. Συνεπώς, το μέγεθος και η μορφή ενός σχήματος παραμένουν αναλλοίωτα, ενώ όλα τα σημεία του κινούνται κατά μήκος τόξων ομόκεντρων κύκλων. Το κέντρο (το οποίο είτε «ανήκει» στο σχήμα που περιστρέφεται είτε βρίσκεται έξω από αυτό) είναι το μοναδικό σημείο που παραμένει σταθερό. Αφού η στροφή διατηρεί τις αποστάσεις, μεταφέρει κάθε σχήμα σε ένα ίσο σχήμα. Οι γωνίες μεταξύ των αντίστοιχων ευθειών είναι ίσες μεταξύ τους και με τη δεδομένη γωνία περιστροφής. Αυτές οι πολύ σημαντικές ιδιότητες της στροφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρύτατα στην επίλυση προβλημάτων. Απλοποιούν τις λύσεις πολλών δύσκολων προβλημάτων και τις κάνουν κομψές και όμορφες. Σ' αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μερικές μεθόδους και τεχνικές επίλυσης προβλημάτων που χρησιμοποιούν τη στροφή και τις ιδιότητές της.

Για παράδειγμα, ας εκτελέσουμε μια στροφή ενός δεδομένου τμήματος AB γύρω από ένα δεδομένο σημείο O (το κέντρο) κατά δεδομένη γωνία θ (Σχήμα 1). Το AB μετασχηματίζεται στο $A'B'$. Η γωνία μεταξύ των ευθειών που περιέχουν αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα ισούται με θ, και βάσει των ιδιοτήτων της στροφής $AB = A'B'$.



Σχήμα 1

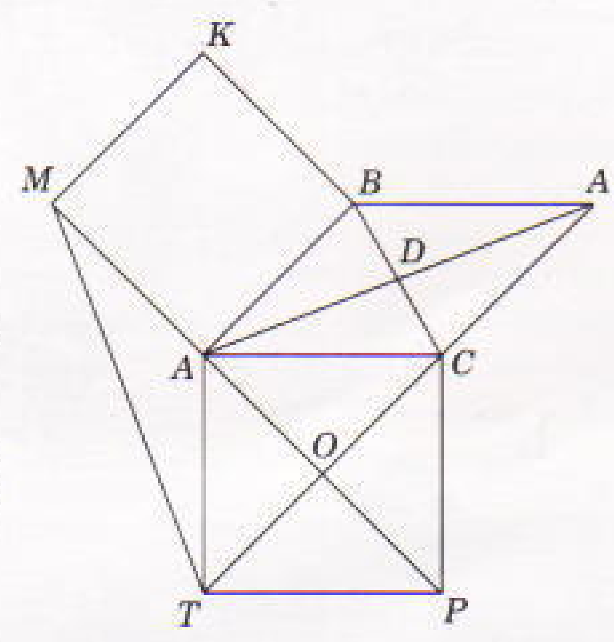
Όλες οι κατασκευές που ακολουθούν βασίζονται σ' αυτά τα αποτελέσματα, και όλες οι αποδείξεις στηρίζονται στις ίδιες ιδιότητες της στροφής.

Πρόβλημα 1. Κατασκευάζουμε εξωτερικά των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC τα τετράγωνα $AMKB$ και $ACPT$. Αποδείξτε ότι η απόσταση μεταξύ των σημείων M και T είναι διπλάσια του μήκους της διαμέσου που φέρουμε προς την πλευρά BC του τριγώνου ABC.

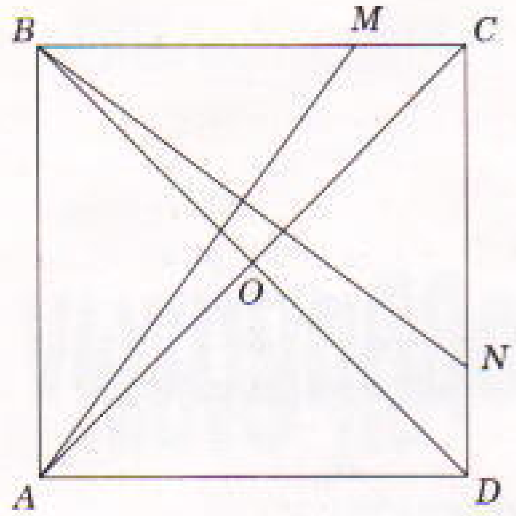
Λύση. Ας συμβολίσουμε με O το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου $ACPT$, και ας θεωρήσουμε τη στροφή του τετραγώνου κατά 90° γύρω από το O, που μεταφέρει το T στο A και το A στο C (δηλαδή τη στροφή κατά 90° δεξιά). Πριν συνεχίσουμε, θα χρειαστούμε μια βοηθητική κατασκευή: φέρουμε από το B μια ευθεία παράλληλη προς την AC και από το C μια παράλληλη προς την AB (Σχήμα 2). Έστω A' το σημείο τομής αυτών των ευθειών, και D το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BC. Έτσι, προκύπτει το παραλληλόγραμμο $ABA'C$, του οποίου κέντρο είναι το σημείο D. Ας δείξουμε ότι η προηγούμενη στροφή μεταφέρει το τμήμα MT στο AA' —έτσι θα αποδείξουμε την πρόταση του προβλήματος.

Αφού $MA = AB$ και $AB = A'C$, έπεται ότι $MA = A'C$. Γνωρίζουμε ότι $MA \perp AB$ και $AB \parallel A'C$, άρα $MA \perp A'C$. Αυτό σημαίνει ότι με τη στροφή το ευθύγραμμο τμήμα MA μεταφέρεται στο τμήμα $A'C$, και επομένως το σημείο M μεταφέρεται στο σημείο A'. Έχουμε ήδη επισημάνει ότι το σημείο T μεταφέρεται στο σημείο A· έτσι, το τμήμα MT μεταφέρεται με τη στροφή στο τμήμα AA'. Άρα, $MT = AA'$, λόγω των ιδιοτήτων της στροφής. Το τμήμα AD είναι η διάμεσος του τριγώνου ABC, και $AD = 1/_2 AA'$ (από την ιδιότητα του παραλληλογράμμου), οπότε $MT = 2AD$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 2. Επιλέγουμε τα ση-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

μεία M και N στις πλευρές BC και CD, αντίστοιχα, ενός τετραγώνου $ABCD$ έτσι ώστε $BM : MC = 3 : 1$ και $CN : ND = 3 : 1$. Αποδείξτε ότι $AM \perp BN$.

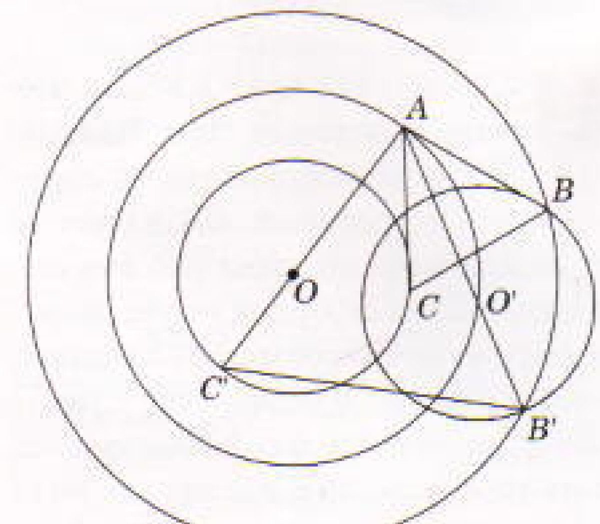
Λύση. Έστω O το κέντρο του τετραγώνου. Η στροφή κατά 90° του τετραγώνου γύρω από το O μεταφέρει το σημείο B στο σημείο C, και το C στο D (Σχήμα 3). Αφού η στροφή μας μεταφέρει το τμήμα BC στο τμήμα CD και αφού $BM : MC = CN : ND$, το σημείο M πρέπει να μεταφέρεται σ' ένα σημείο που διαιρεί το τμήμα CD στον ίδιο λόγο στον οποίο το σημείο M διαιρεί το τμήμα BC —δηλαδή, το M μεταφέρεται στο N. Σύμφωνα με τις ιδιότητες της στροφής, η γωνία μεταξύ των αντίστοιχων ευθειών πρέπει να είναι 90°, και επομένως $AM \perp BN$, που ήταν και το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο έτσι ώστε οι κορυφές του να ανήκουν σε τρεις δεδομένους ομόκεντρους κύκλους.

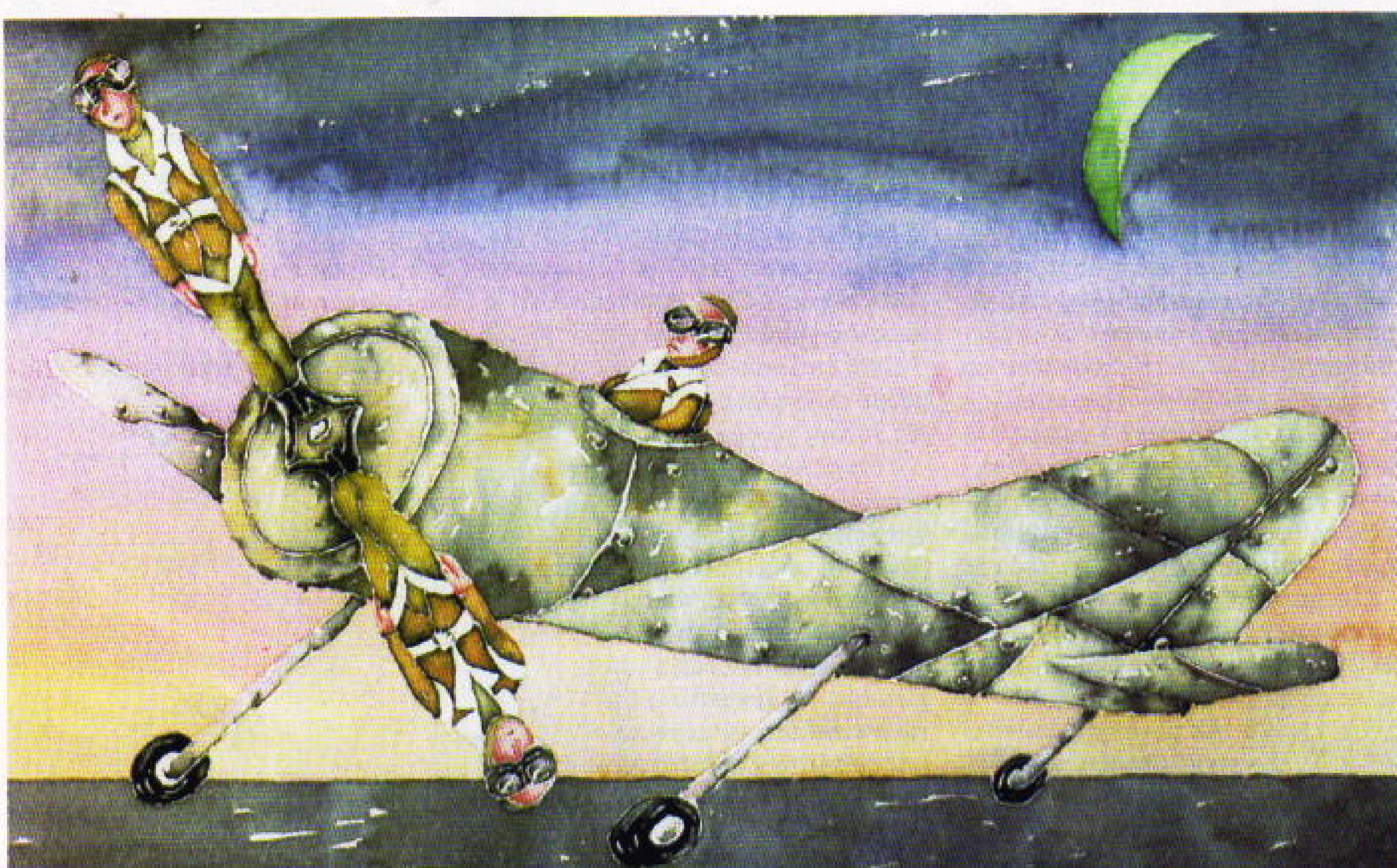
Λύση. Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο A στον μεσαίο κύκλο και περιστρέφουμε τον μικρότερο κύκλο κατά 60° γύρω από το A (Σχήμα 4). Ο κύκλος μετασχηματίζεται σ' έναν κύκλο ίσης ακτίνας με κέντρο O'. Ας συμβολίσουμε τα σημεία τομής του με τον μεγαλύτερο κύκλο B και B'. (Αν υπάρχει ένα μόνο σημείο τομής, το πρόβλημα έχει μία μοναδική λύση, και, αν οι κύκλοι είναι ξένοι μεταξύ τους, το πρόβλημα δεν λύνεται.) Το τελευταίο βήμα είναι η σχεδίαση του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα AB και του κύκλου με κέντρο B' και ακτίνα AB'. Τα σημεία τομής τους με τον μικρότερο κύκλο μάς δίνουν τις τρίτες κορυφές των τριγώνων ABC και $AB'C'$ —των ζητούμενων ισόπλευρων τριγώνων των οποίων οι κορυφές ανήκουν στους τρεις δεδομένους ομόκεντρους κύκλους. Μια καλή εξάσκηση θα ήταν να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Η στροφή με τις πλέον ενδιαφέρουσες ιδιότητες είναι αυτή που μετασχηματίζει κάθε ευθεία σε μια ευθεία παράλληλή της. Αυτή είναι η *ημιστροφή*, ή στροφή κατά 180°, η οποία μετασχηματίζει κάθε ημιευθεία στην αντίθετή της. Είναι φανερό ότι η ημιστροφή καθορίζεται πλήρως από το κέντρο της. Η ημιστροφή ονομάζεται και *κεντρική συμμετρία*. Ένα σημείο και η εικόνα του ονομάζονται *συμμετρικά* ως προς το κέντρο της στροφής.

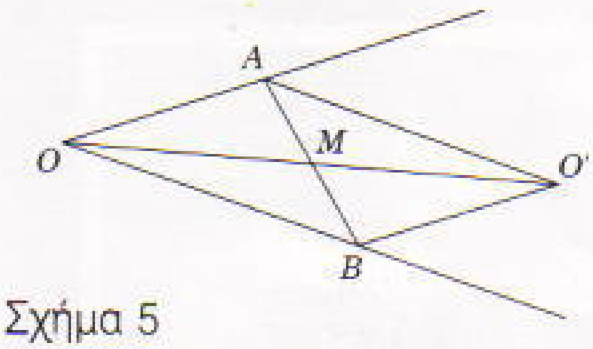
Πρόβλημα 4. Δίνεται μια γωνία



Σχήμα 4



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



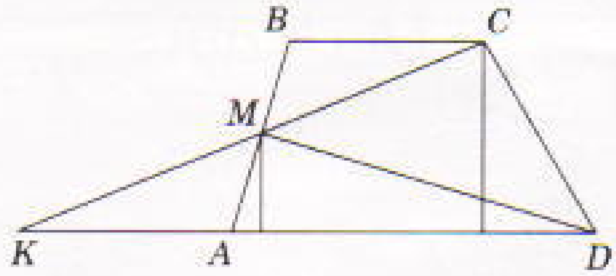
Σχήμα 5

και ένα σημείο M στο εσωτερικό της. Βρείτε ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το M και τα άκρα του ανήκουν στις πλευρές της γωνίας.

Λύση. Έστω O η κορυφή της δεδομένης γωνίας. Η ημιστροφή γύρω από το M μεταφέρει το σημείο O στο O', τέτοιο ώστε $OM = O'M$, και τα τρία σημεία να είναι συγγραμμικά (Σχήμα 5). Από το σημείο O' φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές της γωνίας, και ονομάζουμε A και B τα σημεία τομής τους με αυτές. Τότε, λόγω κατασκευής, το $OAO'B$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού το M είναι μέσο της OO' (λόγω της ιδιότητας της ημιστροφής), είναι και μέσο της δεύτερης διαγωνίου του παραλληλογράμμου $OAO'B$. Επομένως, το AB είναι λύση του προβλήματος. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι δεν υπάρχει άλλη λύση.

Πρόβλημα 5. Συνδέουμε το μέσο M της πλευράς AB ενός τραπεζίου $ABCD$ ($BC \parallel AD$) με τα σημεία C και D. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου MCD ισούται με το μισό του εμβαδού του τραπεζίου $ABCD$.

Λύση. Για να λύσουμε το πρόβλημα, βρίσκουμε πρώτα το συμμετρικό του σημείου C ως προς το M, έστω K (Σχήμα 6). Θα δείξουμε τώρα ότι το σημείο K ανήκει υποχρεωτικά στην επέκταση της πλευράς AD του τραπεζίου. Αφού $BM = MA$ (από τις συνθήκες του προβλήματος), $MC = MK$, και $\angle BMC = \angle AMK$ (από την κατασκευή τους), τα τρίγωνα BMC και AMK είναι ίσα. Επομένως, $\angle MKA = \angle MCB$. Αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες, άρα η KA είναι παράλληλη προς την BC. Αυτό σημαίνει ότι το K ανήκει στην επέκταση της AD. Είναι φανερό ότι τα τρίγωνα AMK και BMC έχουν ίσα εμβαδά. Άρα, το εμβαδόν του τραπέζιου $ABCD$ ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου KCD. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι το εμβαδόν του KCD είναι διπλάσιο

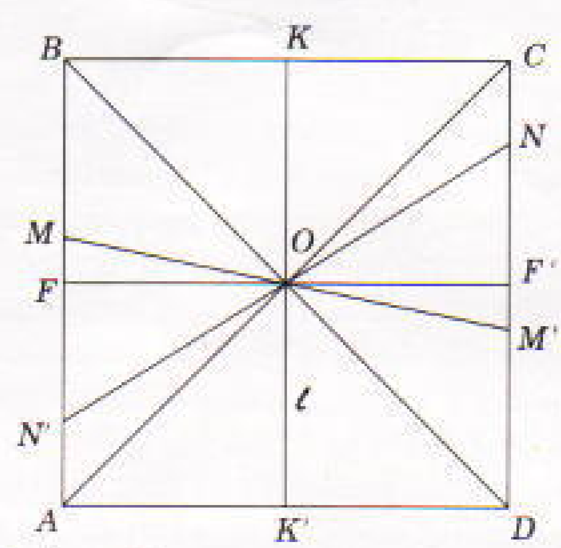


Σχήμα 6

από το εμβαδόν του CMD. Αυτό όμως είναι εύκολο —η DM είναι διάμεσος του τριγώνου KCD, και η διάμεσος διαιρεί πάντα ένα τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα (αφήνω την απόδειξη αυτού του απλού γεγονότος στον αναγνώστη).

Πρόβλημα 6. Δίδονται τρία σημεία O, M και N. Κατασκευάστε ένα τετράγωνο τέτοιο ώστε το σημείο O να είναι το κέντρο του και τα σημεία M, N να ανήκουν σε απέναντι πλευρές του τετραγώνου (ή στις προεκτάσεις τους).

Λύση. Ορίζουμε τα σημεία M' και N', συμμετρικά των M και N, αντίστοιχα, ως προς το O (Σχήμα 7). Βάσει των ιδιοτήτων της κεντρικής συμμετρίας, οι ευθείες MN' και $M'N$ είναι παράλληλες. Κατόπιν φέρουμε την ευθεία FF', που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στις MN' και $M'N$ (το σημείο F ανήκει στην MN' και το σημείο F' στην $M'N$), και την ευθεία ℓ, που διέρχεται από το O και είναι παράλληλη προς τις MN' και $M'N$. Βρίσκουμε σημεία K και K' στην ευθεία ℓ τέτοια ώστε $OK = OK' = OF = OF'$. Συμπληρώνουμε την κατασκευή φέροντας από τα σημεία K και K' ευθείες παράλληλες προς την FF'. Ονομάζουμε B, A, D, και C τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τις MN' και $M'N$, αντίστοιχα. Το $ABCD$ είναι ορθογώνιο, και $AB = BC = CD = DA$ (από την κατασκευή τους). Άρα, το $ABCD$ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.



Σχήμα 7

Μερικές φορές τα M και N ανήκουν στις πλευρές του τετραγώνου, ενώ μερικές φορές ανήκουν στις προεκτάσεις τους. Ο αναγνώστης μπορεί να ερευνήσει τις διάφορες περιπτώσεις. Τι συμβαίνει όταν τα M και N είναι συμμετρικά ως προς το O;

Θα ήθελα τελειώνοντας να σας προσφέρω μερικά προβλήματα προς επίλυση, ώστε να εξοικειωθείτε με αυτές τις ιδιότητες της στροφής.

Πρόβλημα 7. Επιλέγουμε ένα σημείο P εκτός του τετραγώνου $ABCD$ και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα PA, PB, PC, PD. Αποδείξτε ότι οι κάθετοι που φέρουμε από το σημείο A προς την BP, από το σημείο B προς την CP, από το σημείο C προς την DP, και από το σημείο D προς την AP έχουν ένα κοινό σημείο. Είναι αληθής η πρόταση αν επιλέξουμε το σημείο P στο εσωτερικό του τετραγώνου;

Πρόβλημα 8. Το σημείο M είναι ένα τυχαίο σημείο της πλευράς AB του τετραγώνου $ABCD$. Κατασκευάστε ένα τετράγωνο, εγγεγραμμένο στο δεδομένο τετράγωνο, τέτοιο ώστε το σημείο M να είναι κορυφή του.

Πρόβλημα 9. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τέτοιο ώστε οι κορυφές του να ανήκουν σε τρεις δεδομένες παράλληλες ευθείες.

Πρόβλημα 10. Κατασκευάστε ένα τετράγωνο τέτοιο ώστε οι τρεις από τις κορυφές του να ανήκουν σε τρεις δεδομένες παράλληλες ευθείες.

Πρόβλημα 11. Δίνονται δύο κύκλοι και ένα σημείο P που δεν ανήκει σε κανέναν από αυτούς. Σχεδιάστε μια ευθεία που διέρχεται από το P και στην οποία οι δύο κύκλοι αποτέμνουν ένα ευθύγραμμο τμήμα με μέσο το P.

Πρόβλημα 12 (πρόκληση $M4$ στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1994 του *Quantum*). Από την κορυφή ενός τετραγώνου $ABCD$ σχεδιάζουμε δύο ευθείες μέσα στο τετράγωνο. Από τις κορυφές B και D φέρουμε κάθετες προς τις δύο ευθείες: η BK και η DM είναι κάθετες στη μία από αυτές, ενώ οι BL και DN είναι κάθετες στη δεύτερη. Αποδείξτε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα KL και MN είναι μεταξύ τους ίσα και κάθετα.

Ο ***Boris Pritsker*** δίδασκε μαθηματικά στο Κίεβο της Ουκρανίας. Σήμερα ζει στη Νέα Υόρκη.

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κινούμενη ύλη

«Ο Θεός ... δημιούργησε την ύλη προσδίδοντας κίνηση και ακινησία στα μέρη της, και ... τώρα διατηρεί στο Σύμπαν, με τους τακτικούς χειρισμούς Του, όση κίνηση και ακινησία είχε αρχικά δημιουργήσει.»
—*Καρτέσιος*, Principia Philosophiae *(1644)*

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΜΕ ΠΟΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΜΠΟΡΕΙτε να τινάξετε μια μπάλα του μπέιζμπολ; Με πόση ταχύτητα εκτινάσσεται η σφαίρα ενός όπλου; Μπορείτε να έχετε απάντηση και στα δύο ερωτήματα χρησιμοποιώντας μια απλή εργαστηριακή διάταξη· οι μετρήσεις είναι εύκολες, και σας αρκεί η λυκειακή φυσική.

Για παράδειγμα, ένας τρόπος να μετρήσουμε την ταχύτητα της μπάλας του μπέιζμπολ είναι να την πετάξουμε μέσα σε ένα δοχείο που μπορεί να κινηθεί πάνω στην επιφάνεια ενός πάγκου. Το δοχείο θα επιβραδύνει την μπάλα και θα ολισθήσει πάνω στον πάγκο ώσπου να σταματήσει. Μετρώντας την απόσταση που διήνυσε το δοχείο, μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της τριβής. Αυτό στη συνέχεια μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συστήματος δοχείου-μπάλας τη στιγμή που άρχισε να ολισθαίνει. Εφόσον η ορμή διατηρείται σε κάθε είδους κρούση, μπορούμε να προχωρήσουμε ένα ακόμη βήμα και να προσδιορίσουμε την αρχική ταχύτητα της μπάλας, πριν ενσωματωθεί στο δοχείο.

Ας υποθέσουμε πως η μπάλα έχει μάζα $m = 0,5$ kg· το ακίνητο δοχείο έχει μάζα $M = 10$ kg και ολισθαίνει κατά $d = 2$ m πάνω στον πάγκο πριν σταματήσει. Το έργο W της τριβής είναι Td, όπου T η δύναμη της τριβής και d η απόσταση που διήνυσε το δοχείο πάνω στο τραπέζι. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη T ξεχωριστά, έλκοντας το δοχείο πάνω στον πάγκο με ένα δυναμόμετρο ελατηρίου ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα, ή προσδιορίζοντας πρώτα τον συντελεστή τριβής n και την κάθετη δύναμη N. Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη της τριβής είναι 20 N. Η ορμή της μπάλας πριν την κρούση ισούται με τη συνολική ορμή της συσσωμάτωσης μπάλας-δοχείου μετά την κρούση:

$$mv_0 = (m + M)V,$$

όπου v_0 είναι η ταχύτητα της μπάλας, και V η ταχύτητα της συσσωμάτωσης δοχείου-μπάλας. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για τη συσσωμάτωση, έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = T \cdot d.$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταχύτητα της μπάλας προκύπτει ίση περίπου με 60 m/s, ή 216 km/h.

Στην περίπτωση της σφαίρας του όπλου, είναι προτιμότερο να αναρτήσετε το δοχείο με ένα νήμα, όπως ένα εκκρεμές. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Benjamin Robins το 1742, και η διάταξη ονομάζεται βαλλιστικό εκκρεμές.

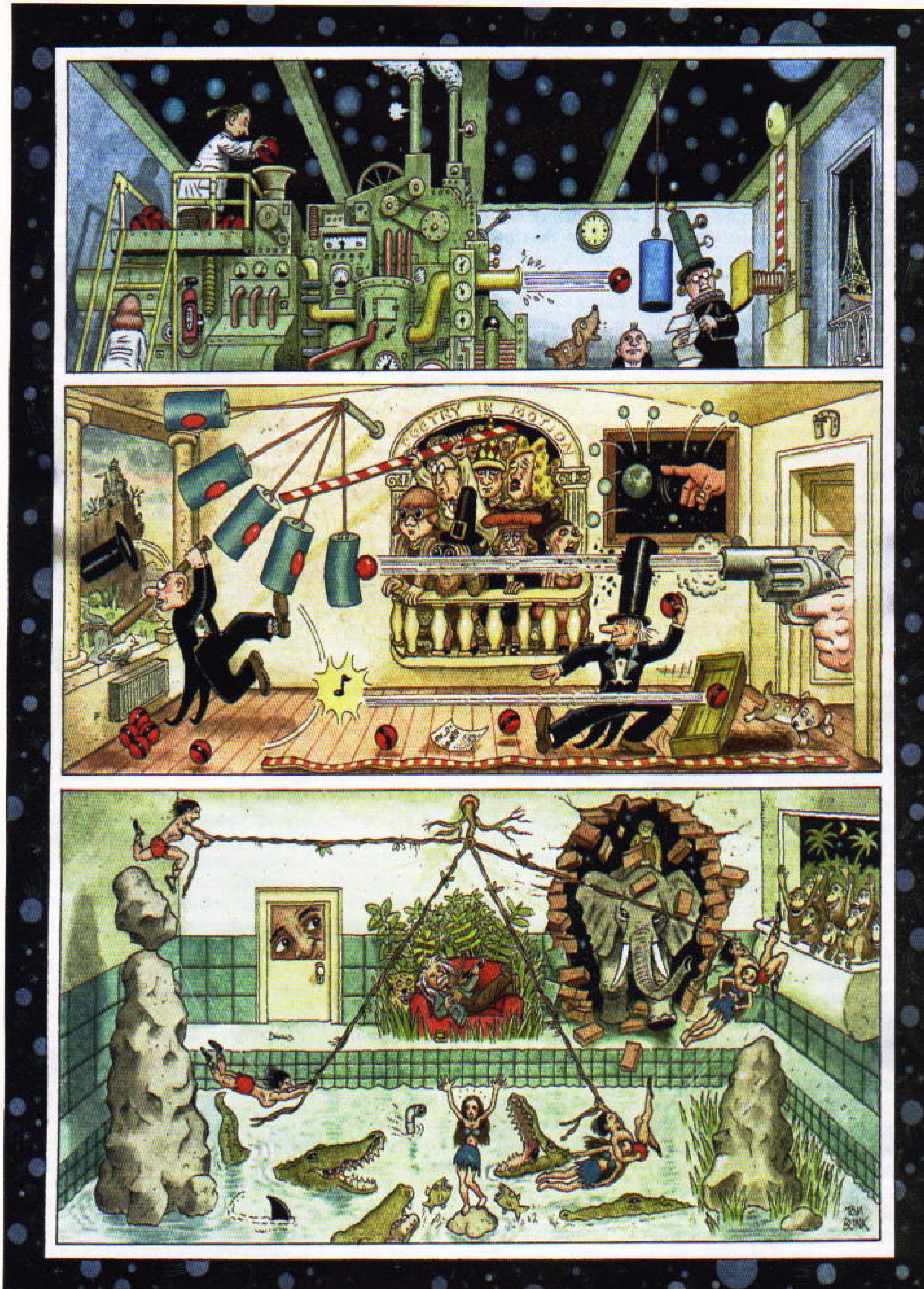
Αφού η σφαίρα ενσωματωθεί στο εκκρεμές, αυτό ανυψώνεται, και η αρχική κινητική ενέργεια της συσσωμάτωσης μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια. Έτσι, για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα της σφαίρας χρειάζεται να μετρήσουμε μόνο την ανύψωση του εκκρεμούς.

Και στα δύο παραδείγματα, ένα σφάλμα που γίνεται συχνά είναι να θεωρείται πως η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος (της μπάλας ή της σφαίρας) ισούται με την κινητική ενέργεια της συσσωμάτωσης μετά την κρούση. Η κρούση είναι πλαστική, και δεν διατηρείται σ' αυτήν η κινητική ενέργεια.

Σε ορισμένες επιδείξεις που πραγματοποιούνται σε σχολικά εργαστήρια, εκτοξεύεται κατά του βαλλιστικού εκκρεμούς ένα βέλος. Η ταχύτητα του βέλους σ' αυτό το πείραμα μπορεί να προσδιοριστεί από μια δεύτερη, ανεξάρτητη προσέγγιση. Η κινητική ενέργεια του βέλους είναι ίση με το έργο που παράγεται από τη χορδή του τόξου, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί μετρώντας τη μέση δύναμη για κάθε εκατοστόμετρο επιμήκυνσης. Όταν δύο ανεξάρτητες προσεγγίσεις παρέχουν ισοδύναμο μέτρο της ταχύτητας του βέλους, ενισχύεται η εμπιστοσύνη μας στην αξία και την αποτελεσματικότητα αυτής της τεχνικής.

Στο πρόβλημα αυτού του μήνα συμμετέχει ο Ταρζάν και η Τζέιν

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


POETRY IN MOTION
TOM BUNK

μέσω μιας άσκησης που χρησιμοποιήσαμε στον πρώτο προκριματικό διαγωνισμό για τη συγκρότηση της Ολυμπιακής Ομάδας Φυσικής των ΗΠΑ. Στη συνέχεια, θα σας προκαλέσουμε να βρείτε την ταχύτητα μιας σφαίρας χρησιμοποιώντας ένα βαλλιστικό εκκρεμές. Τέλος, θα σας ζητήσουμε να σχεδιάσετε μια διάταξη που θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε σχολικά εργαστήρια φυσικής.

Α. Ο Ταρζάν (μάζας = 80 kg) στέκεται πάνω σε ένα βράχο (ύψους = 10 m), όταν αντιλαμβάνεται πως η Τζέιν (μάζας = 40 kg), που βρίσκεται στο έδαφος αρκετά μέτρα μακριά, κινδυνεύει. Αρπάζει μια κληματσίδα και αιωρείται προς την Τζέιν. Αγκαλιάζοντάς την στο κατώτατο σημείο του τόξου που διαγράφει, ελπίζει να φτάσουν στα κλαδιά ενός δέντρου (ύψους = 5 m) που βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά. Θα τα καταφέρει;

Β. Μια σφαίρα μάζας 5 g προσκρούει σε σώμα-στόχο μάζας 5 kg, που μπορεί να αιωρείται ελεύθερα όπως ένα εκκρεμές. Το νήμα από το οποίο κρέμεται ο στόχος έχει μήκος 5 m. Η σφαίρα ενσωματώνεται στον στόχο σε ελάχιστο χρόνο, και το σύστημα κινείται οριζόντια καλύπτοντας απόσταση 30 cm. Υπολογίστε την ταχύτητα της σφαίρας.

Γ. Επιθυμείτε να σχεδιάσετε μια εργαστηριακή διάταξη που εκτοξεύει μια μπάλα μέσω της συμπίεσης ενός ελατηρίου. Η μπάλα αφού διανύει πολύ μικρή απόσταση προσκρούει σε σώμα-στόχο που αιωρείται ελεύθερα ως εκκρεμές. Ποιες είναι οι σχετικές μάζες της μπάλας και του στόχου ώστε να προκαλείται η μέγιστη μετακίνηση του στόχου, για δεδομένη αρχική συμπίεση του ελατηρίου;

Δ. Μια παραλλαγή της προηγούμενης εργαστηριακής διάταξης περιλαμβάνει ομογενή κατακόρυφη ράβδο, στη βάση της οποίας προσκολλάται (με κολλητική ταινία τύπου Velcro™) η μπάλα. Ποια είναι η σχέση της τελικής γωνίας εκτροπής της ράβδου με τη μάζα της μπάλας και τη μάζα της ράβδου;

Ε. Τώρα αποφασίζετε να διασκεδάσετε για τα καλά επινοώντας ένα παιχνίδι σκοποβολής. Η διάταξη προώθησης της προηγούμενης ερώτησης στερεώνεται στην άκρη ενός τραπεζιού και εκτινάσσει βώλους οριζόντια, με σκοπό να χτυπήσει έναν στόχο που βρίσκεται στο πάτωμα. Στην πρώτη σας προσπάθεια συμπιέζετε το ελατήριο κατά 1 cm και ο βώλος πέφτει 30 cm πριν από το στόχο (ο στόχος απέχει 3 m από την άκρη του τραπεζιού όπου στηρίζεται η διάταξη προώθησης). Πόσο πρέπει να συμπιέσετε το ελατήριο στη δεύτερη προσπάθεια ώστε να πετύχετε το στόχο;

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* ώς τις 10 Αυγούστου 1996. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

Οι μηχανές του Atwood

Α. Στο δισορθογώνιο σύστημα αξόνων του Σχήματος 1 επιλέγουμε θετικές τις φορές προς τα αριστερά και προς τα κάτω. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για κάθε μάζα δίνει

$$Mg - T = M\Gamma, \qquad (1)$$

$$T = m\gamma. \qquad (2)$$

Προφανώς,

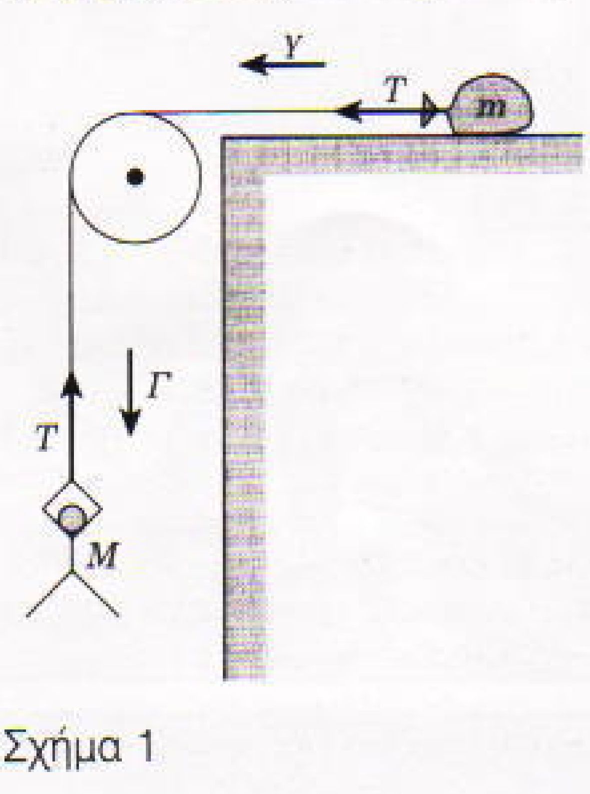
$$\Gamma = \gamma. \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων, λαμβάνουμε

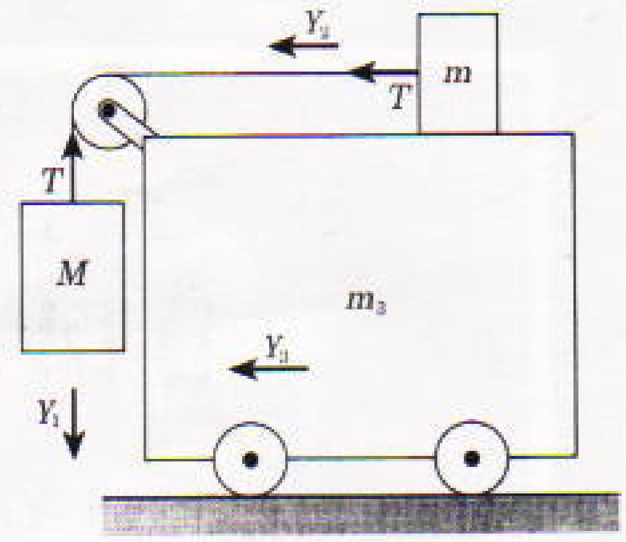
$$\Gamma = \left(\frac{M}{M+m}\right)g = \frac{2}{3}g,$$

$$T = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)g = \frac{1}{3}Mg.$$

Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση του συστήματος σ' αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερη απ' όση υπολογίσαμε για την κανονική μηχανή του Atwood. Ο λόγος είναι ότι τώρα το βάρος του σάκου δεν αντιτίθεται στην κίνηση του συστήματος.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Β. Έχοντας επιλέξει για το δισορθογώνιο σύστημα αξόνων του Σχήματος 2 θετικές τις φορές προς τα δεξιά και προς τα κάτω, μπορούμε να γράψουμε:

$$Mg - T = M\gamma_1, \qquad (4)$$

$$T = m\gamma_2, \qquad (5)$$

$$-T = m_3\gamma_3. \qquad (6)$$

Οι (4), (5) και (6) αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους. Προφανώς χρειαζόμαστε μια σχέση που συνδέει τις επιταχύνσεις των τριών σωμάτων. Αν θεωρήσουμε ότι η μάζα M σε ελάχιστο χρονικό διάστημα μετατοπίζεται προς τα κάτω κατά μήκος d_1, αυτό θα ισούται με τη μετατόπιση d_2 της μάζας m προς τα αριστερά μείον τη μετατόπιση d_3 της μάζας m_3 προς τα δεξιά: $d_1 = d_2 - d_3$. Επομένως,

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_3. \qquad (7)$$

Τώρα πλέον εύκολα βρίσκουμε:

$$T = \frac{mMm_3}{Mm + Mm_3 + mm_3}g,$$

$$\gamma_1 = \frac{M(m+m_3)}{Mm + Mm_3 + mm_3}g,$$

$$\gamma_2 = \frac{Mm_3}{Mm + Mm_3 + mm_3}g,$$

$$\gamma_3 = \frac{-Mm}{Mm + Mm_3 + mm_3}g.$$

Παρατηρείστε ότι αν $m_3 \to \infty$, οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή αυτών του ερωτήματος Α.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

Ο αγωγός ενός συνόλου

Και μερικά νέα προβλήματα που προκύπτουν από αυτόν

George Berzsenyi

ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΔΕΚΑΕΞΙ ΧΡΟΝΙΑ, ΣΤΗΝ βραχύβια Μαθηματική Ολυμπιάδα του Τέξας, που χρησίμευσε ως πρόδρομος του Αμερικανικού Μαθηματικού Διαγωνισμού με Πρόσκληση, έθεσα το εξής πρόβλημα: *Ποιος είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος που δεν μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή $7m + 3n$, όπου τα m, n είναι θετικοί ακέραιοι;* Εκείνη την εποχή γνώριζα το γεγονός ότι, γενικότερα, όταν τα a, b είναι σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι, τότε κάθε ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του $(a - 1)(b - 1)$ μπορεί να παρασταθεί ως $xa + yb$, όπου x, y είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Δεν είχα όμως υπόψη μου τη γενικότερη μορφή του προβλήματος, για την οποία με ενημέρωσε πρόσφατα ο φίλος μου Béla Bajnok του Κολεγίου του Γκέττυσμπεργκ. Ο Béla μού συνέστησε να συμβουλευτώ το απολαυστικό βιβλίο του Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionalology*, Εκδ. Academic Press. Σ' αυτό, στη σελ. 88, ο Wilf ορίζει τον *αγωγό* ενός συνόλου $S = \{a_1, a_2, ..., a_M\}$ σχετικά πρώτων ακεραίων ως τον μικρότερο ακέραιο N, τέτοιον ώστε κάθε ακέραιος $n \geq N$ να παριστάται με τη μορφή

$$n = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_Ma_M,$$

όπου x_1, x_2, ..., x_M είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Σύμφωνα με τον Wilf, η περίπτωση $M = 2$ είναι πλήρως επιλύσιμη, ενώ δεν υπάρχουν γενικοί «τύποι» αν $M \geq 3$, ούτε και κάποιος ικανοποιητικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του αγωγού όταν $M \geq 4$. Ο Béla και δύο φοιτητές που συμμετέχουν στο προπτυχιακό του ερευνητικό πρόγραμμα σημείωσαν κάποια πρόοδο με σύνολα της μορφής $\{a, a + d, a + 2d\}$, $\{a, a + d, a + 3d\}$, όπου a, d είναι θετικοί ακέραιοι. Προκαλώ, λοιπόν, τους αναγνώστες μου να φτάσουν και να ξεπεράσουν τα επιτεύγματά τους.

Ένας άλλος φοιτητής του Béla, ο Charlie Ross, βοήθησε αποφασιστικά στην επίλυση ενός δικού μου προβλήματος, επιτρέποντάς μου έτσι να το χρησιμοποιήσω στο Διαγωνισμό Αναζήτησης Μαθηματικών Ταλέντων:**Αναδιατάξτε τους ακεραίους 1, 2, 3, ..., 97 σε μια ακολουθία a_1, a_2, a_3, ..., a_{97} έτσι ώστε η απόλυτη τιμή των διαφορών των a_{i+1} και a_i να είναι είτε 7 είτε 9 για κάθε $i = 1, 2, 3, ..., 96$.** Ο Charlie, μέλος της νικήτριας ομάδας στον φετινό Μαθηματικό Διαγωνισμό Κατασκευής Μοντέλων, κατάφερε να λύσει το εξής γενικότερο πρόβλημα: *Έστω a, b και k θετικοί ακέραιοι με τους a και b σχετικά πρώτους. Έστω $N = k(a + b) + 1$. Μπορούμε τότε να διατάξουμε τους ακεραίους από το 1 έως το N σε έναν κατάλογο που αρχίζει από το 1 και καταλήγει στο N, έτσι ώστε η διαφορά κάθε ζεύγους γειτονικών αριθμών του καταλόγου να ισούται είτε με a είτε με b.* Όπως και στο πρόβλημα του αγωγού, πρέπει να είναι δυνατόν να επεκτείνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα που αφορά το σύνολο $\{a, b\}$ και σε σύνολα με τρία ή περισσότερα στοιχεία. Παρότι οι δύο περιοχές προβλημάτων δεν έχουν στενή σχέση, ήρθα αντιμέτωπος με το δεύτερο πρόβλημα όταν σκεφτόμουν το πρώτο και αναρωτιόμουν τι θα γίνει αν θεωρήσουμε αφαιρέσεις στο πρόβλημα του αγωγού. Γι' αυτό το λόγο παρουσιάζω μαζί τα δύο προβλήματα.

Ανάδραση

Πληροφορήθηκα με μεγάλη μου χαρά ότι ο Stan Wagon του Κολεγίου του Μακάλεστερ βρήκε το θέμα της στήλης μου στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1995 του *Quantum* αρκετά ενδιαφέρον, ώστε να θέσει το εξής πρόβλημα (ως πρόβλημα 805) στο παρουσιαζόμενο στο Internet πρόγραμμά του «Πρόβλημα της εβδομάδας»: Αληθές ή ψευδές; Αν n θετικός ακέραιος, τότε οι $n^5 + 5$ και $(n + 1)^5 + 5$ είναι σχετικά πρώτοι. Έλαβε αρκετές εμπνευσμένες απαντήσεις σ' αυτό το πρόβλημα. Ειδικότερα, οι έρευνες του Ilan Vardi ήταν οι πιο σημαντικές. Θα προσπαθήσω να τις περιγράψω σε κάποιο μελλοντικό άρθρο, αλλά οι αναγνώστες που θα ήθελαν να μάθουν τα αποτελέσματά του μπορούν να έρθουν άμεσα σε επαφή με τον Ilan μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (vardi@macalstr.edu).

Πληροφορήθηκα επίσης ότι ο Les Reid του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Νοτιοδυτικού Μιζούρι κατόρθωσε να προσδιορίσει το $G(5, k)$ και να συναγάγει τους αντίστοιχους τύπους για τα $G(4, k)$ και $G(7, k)$. Και πάλι, σε κάποιο μελλοντικό άρθρο θα αναφερθώ ειδικότερα σ' αυτά τα ευρήματα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M66

Υπάρχει. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x(9x + 2)$. Αν

$$n = \underbrace{11...11}_{k},$$

τότε

$$9n + 2 = \underbrace{100...001}_{k-1}.$$

Επομένως,

$$P(n) = \underbrace{11...11}_{k} \cdot \underbrace{100...001}_{k-1} = \underbrace{11...11}_{2k}.$$

M67

Η απάντηση είναι καταφατική στις περιπτώσεις (α) και (β), και αρνητική στην περίπτωση (γ). Για να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία n όρων με τις ζητούμενες ιδιότητες, παίρνουμε τους n πρώτους αριθμούς Fibonacci 1, 2, 3, 5, ..., f_n (όπου $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$), αντιστρέφουμε τη σειρά τους και τους διαιρούμε όλους με το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) N. Όλοι οι αριθμοί f_k/N που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο έχουν τη μορφή $1/m$, ενώ για κάθε $k = 1, ..., n-2$ ισχύει

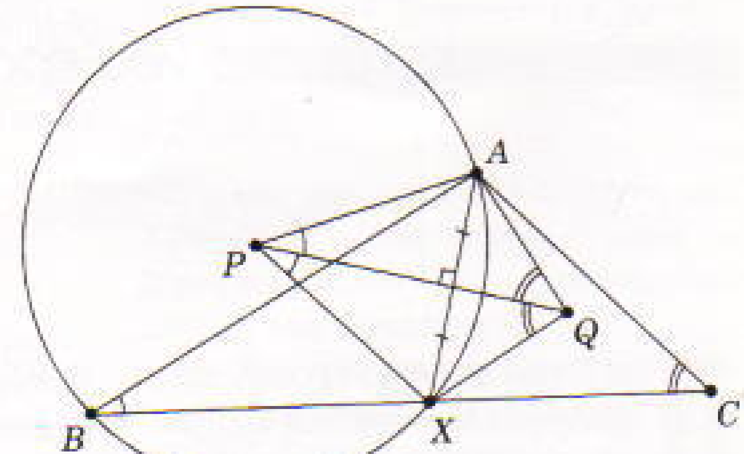
$$\frac{f_k}{N} = \frac{f_{k+2}}{N} - \frac{f_{k+1}}{N}.$$

Για παράδειγμα, για $n = 5$ έχουμε ΕΚΠ(1, 2, 3, 5, 8) = 120, και επομένως μια από τις πολλές δυνατές απαντήσεις είναι η ακολουθία 1/15, 1/24, 1/40, 1/60, 1/120.

Είναι αδύνατον να βρούμε μια τέτοια άπειρη ακολουθία, διότι αν μετατρέψουμε σε ομώνυμους τους δύο πρώτους όρους της και υπολογίσουμε όλους τους επόμενους χωρίς να απλοποιούμε τα κλάσματα που προκύπτουν, θα τους αναπαραστήσουμε όλους με τη μορφή b_k/N, $k = 1, 2, ...$, όπου $N \geq b_1 > b_2 > ...$ (και $b_{k+1} = b_{k-1} - b_k$). Επομένως, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι από N όροι. (N. Vasilyev)

M68

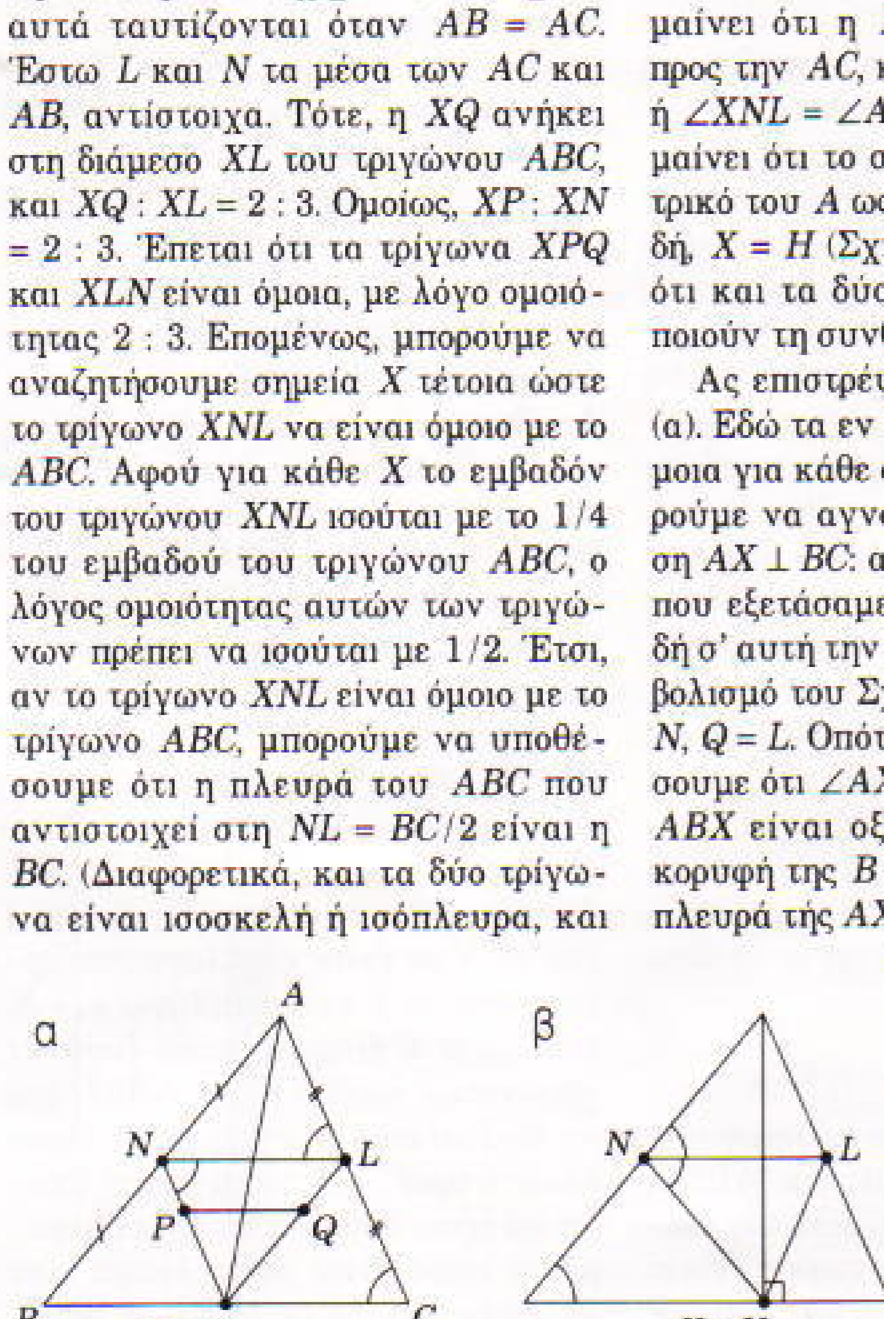
Ας ξεκινήσουμε από το μέρος (β). Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατές δύο θέσεις του σημείου X: το μέσο M της BC και το ίχνος H του ύψους που φέρουμε από την A στην BC (Σχήμα 1). Τα σημεία αυτά ταυτίζονται όταν $AB = AC$. Έστω L και N τα μέσα των AC και AB, αντίστοιχα. Τότε, η XQ ανήκει στη διάμεσο XL του τριγώνου ABC, και $XQ : XL = 2 : 3$. Ομοίως, $XP : XN = 2 : 3$. Έπεται ότι τα τρίγωνα XPQ και XLN είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας 2 : 3. Επομένως, μπορούμε να αναζητήσουμε σημεία X τέτοια ώστε το τρίγωνο XNL να είναι όμοιο με το ABC. Αφού για κάθε X το εμβαδόν του τριγώνου XNL ισούται με το 1/4 του εμβαδού του τριγώνου ABC, ο λόγος ομοιότητας αυτών των τριγώνων πρέπει να ισούται με 1/2. Έτσι, αν το τρίγωνο XNL είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πλευρά του ABC που αντιστοιχεί στη $NL = BC/2$ είναι η BC. (Διαφορετικά, και τα δύο τρίγωνα είναι ισοσκελή ή ισόπλευρα, και



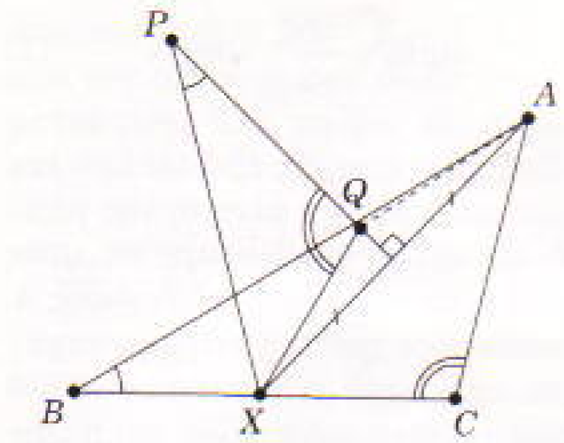
Σχήμα 2

η υπόθεσή μας ισχύει ούτως ή άλλως.) Τώρα υπάρχουν δύο δυνατότητες: $\angle XNL = \angle BCA = \angle NLA$, που σημαίνει ότι η NX είναι παράλληλη προς την AC, και $X = M$ (Σχήμα 1α), ή $\angle XNL = \angle ABC = \angle ANL$, που σημαίνει ότι το σημείο X είναι συμμετρικό του A ως προς την NL —δηλαδή, $X = H$ (Σχήμα 1β). Είναι φανερό ότι και τα δύο σημεία M, H ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο μέρος (α). Εδώ τα εν λόγω τρίγωνα είναι όμοια για κάθε σημείο X της BC. Μπορούμε να αγνοήσουμε την περίπτωση $AX \perp BC$: αυτή είναι η κατάσταση που εξετάσαμε προηγουμένως, επειδή σ' αυτή την περίπτωση, με το συμβολισμό του Σχήματος 1β, $X = H$, $P = N$, $Q = L$. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\angle AXB > 90°$. Τότε, η γωνία ABX είναι οξεία (Σχήμα 2), ενώ η κορυφή της B βρίσκεται από την ίδια πλευρά της AX, όπως το κέντρο P του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABX. Επομένως, από το θεώρημα των εγγεγραμμένων γωνιών, έχουμε $\angle XPA = 2\angle XBA$. Αν η $\angle ACX$ είναι επίσης οξεία, από ένα παρόμοιο επιχείρημα έπεται ότι $\angle XQA = 2\angle XCA$. Απομένει



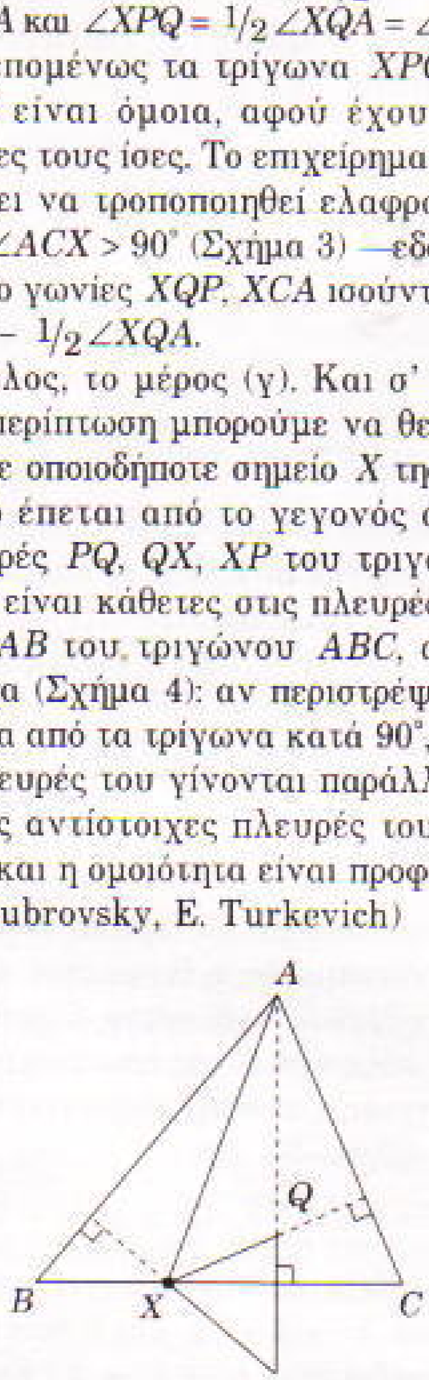
Σχήμα 1



Σχήμα 3

να παρατηρήσουμε ότι η PQ είναι η μεσοκάθετος της AX και ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, τα σημεία P και Q βρίσκονται εκατέρωθεν της AX. Άρα, $\angle XPQ = \frac{1}{2}\angle XPA = \angle CBA$ και $\angle XPQ = \frac{1}{2}\angle XQA = \angle BCA$, και επομένως τα τρίγωνα XPQ και ABC είναι όμοια, αφού έχουν τις γωνίες τους ίσες. Το επιχείρημα αυτό πρέπει να τροποποιηθεί ελαφρώς όταν $\angle ACX > 90^\circ$ (Σχήμα 3) —εδώ και οι δύο γωνίες XQP, XCA ισούνται με $180^\circ - \frac{1}{2}\angle XQA$.

Τέλος, το μέρος (γ). Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο X της BC. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι οι πλευρές PQ, QX, XP του τριγώνου XPQ είναι κάθετες στις πλευρές BC, CA, AB του τριγώνου ABC, αντίστοιχα (Σχήμα 4): αν περιστρέψουμε το ένα από τα τρίγωνα κατά 90°, όλες οι πλευρές του γίνονται παράλληλες με τις αντίστοιχες πλευρές του άλλου, και η ομοιότητα είναι προφανής. (V. Dubrovsky, E. Turkevich)



Σχήμα 4

M69

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει. Τότε

$$f'(x) - (f(x))^2 \geq 1$$

για κάθε σημείο x του δεδομένου διαστήματος. Γράφουμε την ανισότητα ως

$$\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \geq 1,$$

ή

$$\Phi'(x) \geq 0,$$

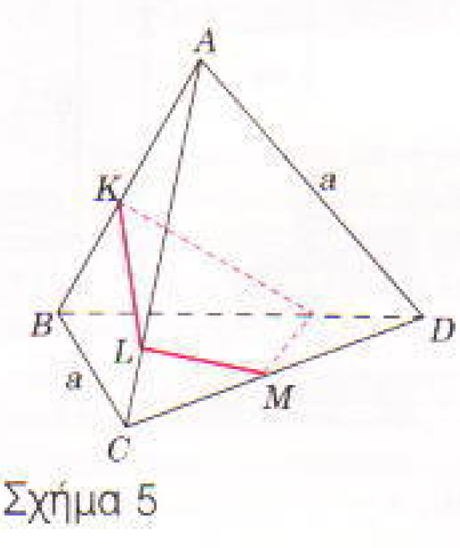
όπου $\Phi(x)$ = τοξεφ$f(x) - x$ (αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι (τοξεφy)$' = 1/(1+y^2)$ και από τον τύπο της παραγώγισης μιας σύνθετης συνάρτησης). Επομένως, η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι αύξουσα και $\Phi(b) - \Phi(a) \geq 0$ — δηλαδή,

$$\text{τοξεφ}f(b) - \text{τοξεφ}f(a) \geq b - a = 4.$$

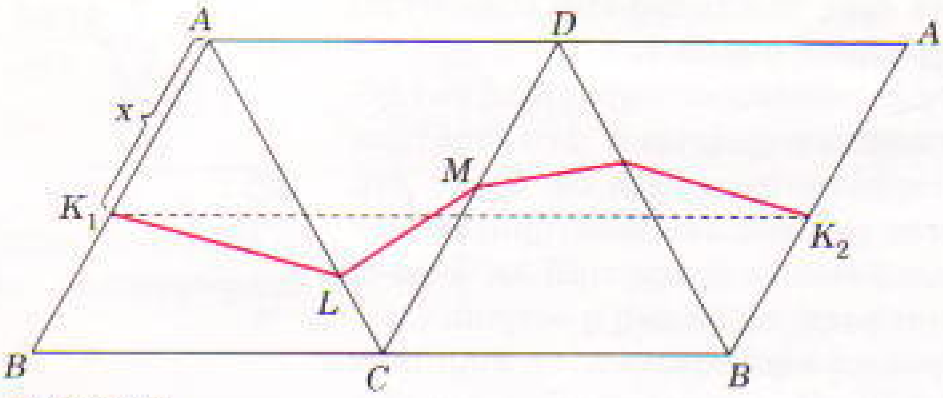
Εντούτοις, η τοξεφy παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, και επομένως η διαφορά των τιμών της σε δύο οποιαδήποτε σημεία δεν μπορεί να υπερβαίνει το $\pi < 4$. Με αυτή την αντίφαση ολοκληρώνεται η απόδειξη. Τώρα είναι φανερό ότι στην αρχική πρόταση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 4 με το π.

M70

Θα καθορίσουμε πρώτα το κάτω φράγμα της περιμέτρου. Αν κόψουμε το τετράεδρο του Σχήματος 5 κατά μήκος των ακμών DA, AB και BC, και το ξεδιπλώσουμε έτσι ώστε να γίνει επίπεδο, θα καταλήξουμε σ' ένα παραλληλόγραμμο. Η περίμετρος P της εγκάρσιας τομής μεταιρέπεται σε μια πολυγωνική διαδρομή K_1K_2 τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα K_1K_2 να είναι παράλληλο με δύο πλευρές του παραλληλογράμμου. Είναι φανερό από το σχήμα ότι $K_1K_2 = 2a$, όπου a είναι το μήκος της ακμής του τετραέδρου, επομένως $P \geq 2a$. Παρατηρήστε ότι $P = 2a$ αν και μόνο αν το επίπεδο της τομής είναι παράλληλο



Σχήμα 5



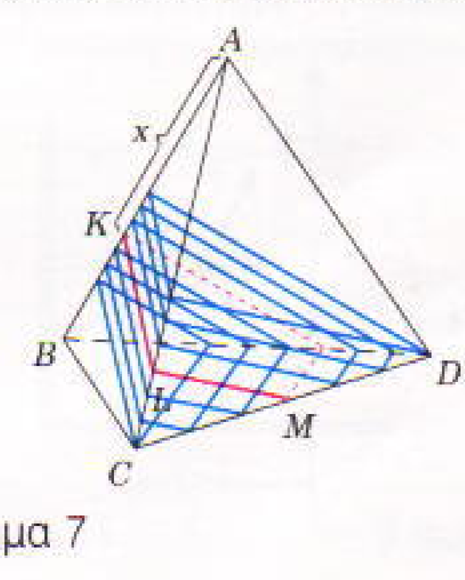
Σχήμα 6

προς τις δύο ακμές (AD και BC) που δεν τέμνει.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα, ας φανταστούμε ότι το επίπεδο που τέμνει την πυραμίδα κινείται παράλληλα προς τον εαυτό του έτσι ώστε η εγκάρσια τομή να παραμένει τετράπλευρο. Οι δύο ακραίες θέσεις είναι αυτές όπου το επίπεδο φτάνει στα άκρα της ακμής του τετραέδρου. Εκεί το τετράπλευρο εκφυλίζεται σε τρίγωνο (ή και σ' ένα διπλό ευθύγραμμο τμήμα). Αλλά η περίμετρος οποιασδήποτε τριγωνικής εγκάρσιας τομής είναι μικρότερη από $3a$, επειδή η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων ενός τριγώνου (εκτός των κορυφών του) είναι μικρότερη από το μήκος της πλευράς του.

Απομένει να δείξουμε ότι η περίμετρος κάθε «ενδιάμεσης» εγκάρσιας τομής είναι το πολύ ίση με μία από τις δύο ακραίες (των τριγώνων). Αν $x = AK$, όπου K είναι η κορυφή της τομής που ανήκει στην ακμή AB (Σχήμα 7), τότε η περίμετρος είναι γραμμική συνάρτηση του x (δηλαδή, $P = kx + b$).

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του Σχήματος 7, το KL είναι ανάλογο προς το $AK = x$ (δηλαδή, $KL = c_1x$). Το ίδιο ισχύει για το AL (δηλαδή, $AL = c_2x$), επομένως $CL = a - c_2x$. Ωστόσο, τα LM και CM είναι ανάλο-



Σχήμα 7

γα προς το CL, και έτσι εξαρτώνται γραμμικά από το x, κ.ο.κ.

Εντούτοις, κάθε γραμμική συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα διάστημα λαμβάνει τη μέγιστή της τιμή σ' ένα από τα άκρα του διαστήματος. Δεν λαμβάνει ποτέ την τιμή $3a$, διότι σ' αυτή την περίπτωση η «ακραία» τριγωνική τομή θα έπρεπε να συμπίπτει με την έδρα της πυραμίδας, και τότε οποιαδήποτε παράλληλη εγκάρσια τομή θα ήταν τριγωνική. Πάντως, το μήκος της περιμέτρου μπορεί να πλησιάσει οσοδήποτε επιθυμούμε το $3a$ αν σχεδιάσουμε το επίπεδο αρκετά κοντά σε μια έδρα.

(N. Vasilyev, V. Proizvolov)

ΦΥΣΙΚΗ

Φ66

Το νήμα με τη σφαίρα θα εκτραπεί προς τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 8). Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ασκούνται στη σφαίρα οι εξής τρεις δυνάμεις: η άνωση $\mathbf{A}_{ολ}$, η τάση του νήματος $\mathbf{T}$, και το βάρος της $\mathbf{B}$ ($B = \rho_o V g$, όπου ρ_o είναι η πυκνότητα της σφαίρας και V ο όγκος της). Το άθροισμα των προβολών αυτών των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα είναι μηδέν:

$$\rho_v V g - \rho_o V g - T\,\text{συν}\alpha = 0, \qquad (1)$$

όπου ρ_v η πυκνότητα του νερού. Η σφαίρα εκτελεί περιστροφική κίνηση διαγράφοντας κύκλο ακτίνας $r - \ell\,\text{ημ}\alpha$, οπότε στον οριζόντιο άξονα θα ισχύει:

$$\rho_o V \omega^2 (r - \ell\,\text{ημ}\alpha) = \rho_v V g\,\text{εφ}\alpha - T\,\text{ημ}\alpha \qquad (2)$$

Αλλά, $$g\,\text{εφ}\alpha = \omega^2 (r - \ell\,\text{ημ}\alpha). \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2), και αφού λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), βρίσκουμε:

Σχήμα 8

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\text{εφ}\alpha}{r - \ell\,\text{ημ}\alpha}} = 10{,}6\ s^{-1}.$$

Φ67

Θεωρήστε πως η μεμβράνη εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, οπότε

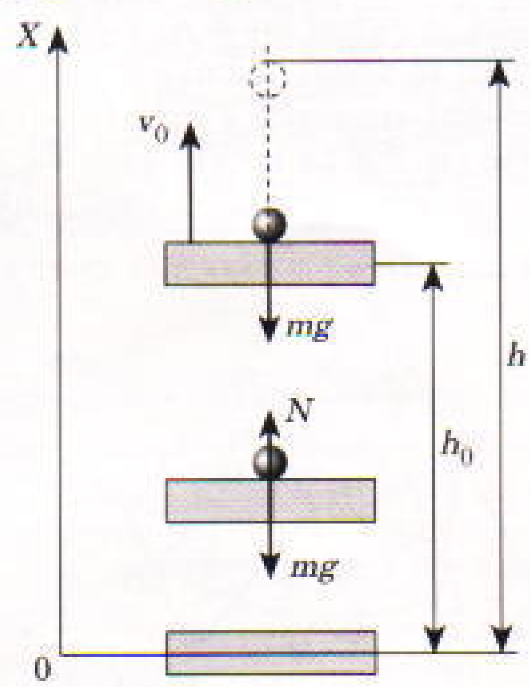
$$x = A\ \text{ημ}\omega t,$$

όπου x είναι η απομάκρυνση της μεμβράνης από τη θέση ισορροπίας, A το πλάτος ταλάντωσης και $\omega = 2\pi\nu$ η κυκλική συχνότητα. Ας θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μεμβράνη περνά από τη θέση ισορροπίας της και κινείται με φορά προς τα πάνω.

Σ' έναν κόκκο άμμου που κινείται μαζί με τη μεμβράνη, ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του $m\mathbf{g}$ και η κάθετη δύναμη $\mathbf{N}$ από τη μεμβράνη (Σχήμα 9). Έτσι, η κίνηση ενός κόκκου άμμου θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathbf{N} - m\mathbf{g} = m\boldsymbol{\gamma}.$$

Τη χρονική στιγμή που ο κόκκος της άμμου χάνει την επαφή του με τη μεμβράνη, η δύναμη $\mathbf{N}$ είναι μηδέν, και συνεπώς, η επιτάχυνση του κόκκου είναι $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{g}$. Τότε, ο κόκκος ανέρχεται σε ύψος h, όπως ένα σώμα που βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω από ύψος h_0 ίσο με την απομάκρυνση της μεμβράνης από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_0, και με αρχική ταχύτητα v_0 ίση με αυτήν της μεμβράνης την ίδια χρονική στιγμή t_0 (βλ. Σχήμα 9). Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θα ισχύει



Σχήμα 9

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την κίνηση της μεμβράνης, και ας συνδέσουμε τις τιμές h_0 και v_0 με το πλάτος ταλάντωσης A. Οποιαδήποτε χρονική στιγμή η ταχύτητα της μεμβράνης είναι $v = \omega A\ \text{ημ}(\omega t + \pi/2) = \omega A\ \text{συν}\omega t$, και η επιτάχυνσή της $\gamma = -\omega^2 x = -A\omega^2\,\text{ημ}\omega t$. Τη στιγμή t_0 της αποκόλλησης, θα ισχύει

$$v = v_0 = \omega A\ \text{συν}\omega t_0,$$

$$\gamma = -g = -\omega^2 A\ \text{ημ}\omega t_0,$$

$$x = h_0 = A\ \text{ημ}\omega t_0.$$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης προκύπτει

$$\text{ημ}\omega t_0 = g/\omega^2 A,$$

συνεπώς

$$h_0 = g/\omega^2,$$

και

$$v_0 = \omega A\ \text{συν}\omega t_0 = \sqrt{\omega^2 A^2 - g^2/\omega^2}\ .$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) τις τιμές για τα h_0 και v_0 παίρνουμε

$$A = \frac{\sqrt{2gh\omega^2 - g^2}}{\omega^2} \cong 77 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\cong 0{,}077\ \text{mm}.$$

Φ68

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, η θερμότητα Q που προσφέρεται στο αέριο διατίθεται στην αύξηση ΔU της εσωτερικής του ενέργειας και στην παραγωγή από αυτό έργου W:

$$Q_{\text{I}} = \Delta U_{\text{I}} + W_{\text{I}},\ Q_{\text{II}} = \Delta U_{\text{II}} + W_{\text{II}}.$$

(Εδώ ο δείκτης I αντιστοιχεί στη διαδικασία $1 \to 3 \to 2$, και ο δείκτης II στη διαδικασία $1 \to 4 \to 2$.) Εφόσον το αέριο είναι μονοατομικό, ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις για ένα του mole:

$$U = \frac{3}{2}RT,\ \Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Τούτο σημαίνει πως η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά τη μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή της θερμοκρασίας του αερίου $\Delta T = T_2 - T_1$ και όχι από τον τρόπο με τον οποίο το αέριο μεταβαίνει από τη μια κατάσταση στην άλλη. Δηλαδή,

$$\Delta U_{\mathrm{I}} = \Delta U_{\mathrm{II}} = \Delta U = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1).$$

Για να βρούμε τις θερμοκρασίες T_1 και T_2, ας γράψουμε την καταστατική εξίσωση για τις καταστάσεις 1 και 2 (βλ. το σχήμα της εκφώνησης):

$$P_0 V_0 = RT_1,\ 2P_0 \cdot 2V_0 = RT_2,$$

απ' όπου προκύπτει

$$T_2 - T_1 = \frac{3P_0V_0}{R},$$

άρα

$$\Delta U = \frac{9}{2} P_0 V_0.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τις τιμές του έργου W_{I} και W_{II} που παράγει το αέριο. Στην πρώτη περίπτωση, το αέριο δεν παράγει έργο κατά την ισόχωρη μεταβολή $1 \to 3$, όμως κατά την ισοβαρή εκτόνωση $3 \to 2$ το έργο που παράγει είναι

$$W_{\mathrm{I}} = P\Delta U = 2P_0(2V_0 - V_0) = 2P_0V_0.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το αέριο παράγει έργο μόνο κατά την ισοβαρή εκτόνωση $1 \to 4$:

$$W_{\mathrm{II}} = P_0(2V_0 - V_0) = P_0V_0.$$

Έτσι,

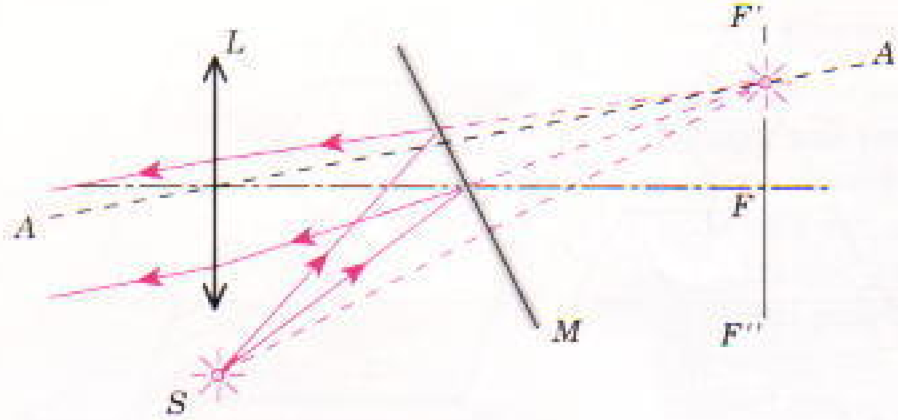
$$Q_{\mathrm{I}} = \Delta U + W_{\mathrm{I}} = \frac{13}{2} P_0V_0,$$

$$Q_{\mathrm{II}} = \Delta U + W_{\mathrm{II}} = \frac{11}{2} P_0V_0.$$

Άρα ο ζητούμενος λόγος είναι $Q_1/Q_2 = 13/11$.

Φ69

Οποιοδήποτε αγώγιμο υλικό τοποθετείται μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή οδηγείται σε ηλεκτροστατική ισορροπία, αφού επάγονται στον αγωγό επιφανειακά ηλεκτρικά φορτία λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή. Έτσι, στο εσωτερικό του αγωγού (έστω κι αν δεν είναι ιδανικός) το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι ακριβώς μηδέν. Όταν ο πυκνωτής



Σχήμα 10

βραχυκυκλώνεται, τα φορτία στους οπλισμούς του αλληλοεξουδετερώνονται σχεδόν ακαριαία. Άρα, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων της αγώγιμης πλάκας θα είναι V_0. Επειδή η αντίσταση της πλάκας είναι $R = \rho h/S$, το ρεύμα που οφείλεται στην εσωτερική μετακίνηση φορτίων από τη μια άκρη της πλάκας στην άλλη θα είναι μέγιστο την αρχική στιγμή, και θα δίνεται από τον τύπο

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 S}{\rho h}.$$

Φ70

Έστω $F'F''$ το εστιακό επίπεδο του φακού (Σχήμα 10). Σχεδιάζουμε έναν δευτερεύοντα οπτικό άξονα AA' παράλληλο στο βέλος, ο οποίος τέμνει το εστιακό επίπεδο στο S'. Αν η φωτεινή πηγή βρισκόταν στο σημείο S', οι φωτεινές ακτίνες θα εξέρχονταν από το φακό σε παράλληλη δέσμη, με διεύθυνση παράλληλη στον άξονα AA'.

Σ' αυτή την περίπτωση, η φωτεινή πηγή για το φακό θα μπορούσε να είναι το είδωλο της πηγής S ως προς το επίπεδο κάτοπτρο. Άρα, το κάτοπτρο πρέπει να τοποθετηθεί στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος SS' και κάθετα σ' αυτό. Η πορεία των φωτεινών ακτίνων εικονίζεται στο Σχήμα 10.

Σπαζοκεφαλιές

Σ66

Μοιράζουμε τους παράγοντες του αρχικού γινομένου σε ομάδες δέκα παραγόντων: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$, $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot ... \cdot 20$, ... Η τελευταία ομάδα δεν θα είναι πλήρης. Αφού απομακρύνουμε τους «ανεπιθύμητους» όρους από αυτά τα γινόμενα, όλα (εκτός από το τελευταίο) θα καταλήγουν στο ίδιο ψηφίο με το $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$, δηλαδή στο 9. Αφού το $9 \cdot 9 = 81$ καταλήγει στο 1 και το πλήθος των πλήρων ομάδων (199) είναι περιττό, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι 9. Το μέρος του γινομένου που απομένει είναι το $1991 \cdot 1993$ που καταλήγει στο 3. Άρα, η απάντηση είναι 7 ($9 \cdot 3 = 27$).

Σ67

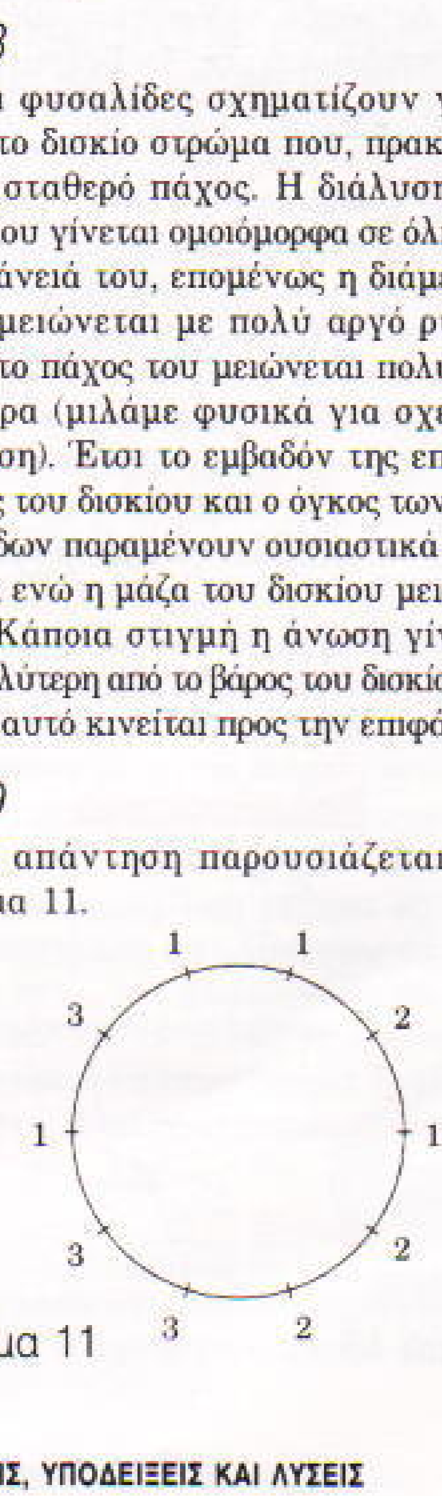
Κάθε ειλικρινής κάτοικος του νησιού απαντά καταφατικά σε μία από τις ερωτήσεις ενώ κάθε ψεύτης σε δύο. Επομένως το συνολικό πλήθος των καταφατικών απαντήσεων 60 + 40 + 30 = 130 ισούται με το πλήθος των ειλικρινών κατοίκων συν το διπλάσιο του πλήθους των ψευτών. Αν απαριθμούσαμε κάθε ψεύτη μία μόνο φορά, θα πέρναμε απλώς το σύνολο του πληθυσμού· δηλαδή, 100. Άρα, το πλήθος των ψευτών είναι 130 − 100 = 30.

Σ68

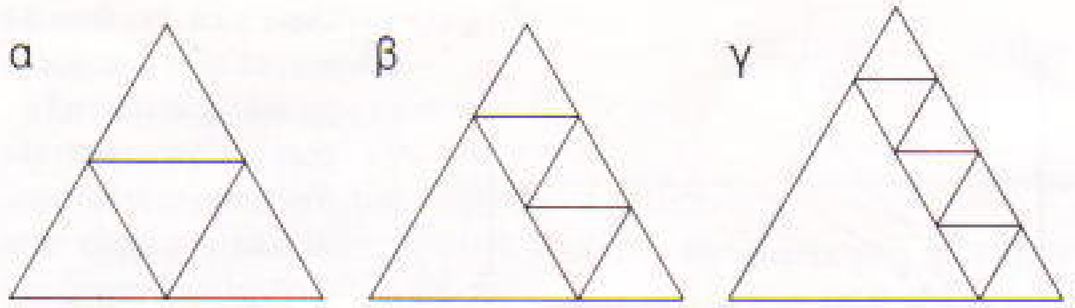
Οι φυσαλίδες σχηματίζουν γύρω από το δισκίο στρώμα που, πρακτικά, έχει σταθερό πάχος. Η διάλυση του δισκίου γίνεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνειά του, επομένως η διάμετρός του μειώνεται με πολύ αργό ρυθμό ενώ το πάχος του μειώνεται πολύ ταχύτερα (μιλάμε φυσικά για σχετική μείωση). Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας του δισκίου και ο όγκος των φυσαλίδων παραμένουν ουσιαστικά σταθερά, ενώ η μάζα του δισκίου μειώνεται. Κάποια στιγμή η άνωση γίνεται μεγαλύτερη από το βάρος του δισκίου, οπότε αυτό κινείται προς την επιφάνεια.

Σ69

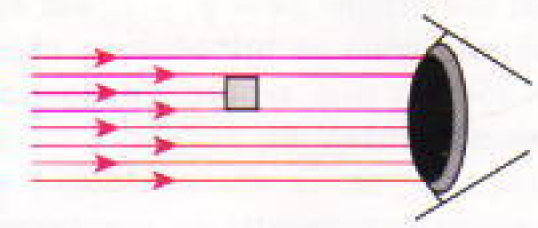
Η απάντηση παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.



Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 15

Σ70

Η απάντηση είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το 3 εκτός του 5. Παρατηρούμε καταρχήν ότι δύο κορυφές του αρχικού τριγώνου δεν μπορεί να ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο της διαμέρισης (δεν λαμβάνουμε υπόψη τη «διαμέριση σε ένα τρίγωνο»), επομένως οι κορυφές ανήκουν σε τρία διαφορετικά τρίγωνα. Αν απομακρύνουμε αυτά τα τρίγωνα, απομένει ένα κυρτό πολύγωνο το οποίο μπορεί να είναι τρίγωνο (τέσσερα μέρη —Σχήμα 12α) αλλά δεν μπορεί ποτέ να είναι ένωση δύο (ισόπλευρων) τριγώνων, διότι μια τέτοια ένωση είναι κυρτή μόνο όταν συνθέτει ένα ρόμβο —πράγμα αδύνατο στην περίπτωσή μας. Τα Σχήματα 12β και 12γ παρουσιάζουν τις διαμερίσεις σε έξι και οκτώ μέρη. Απομένει να παρατηρήσουμε πως όταν υποδιαιρούμε σε τέσσερα τρίγωνα (όπως στο Σχήμα 12α) ένα από τα τρίγωνα που προκύπτουν από τη διαμέριση του αρχικού σε n μέρη, το πλήθος των τμημάτων της διαμέρισης αυξάνεται κατά τρία. Αν εφαρμόσουμε αυτό το τέχνασμα στις διαμερίσεις των σχημάτων, προκύπτουν $4 + 3k$, $6 + 3k$ και $8 + 3k$ τριγωνικά κομμάτια, για κάθε $k \geq 0$ (αυτοί οι αριθμοί διαιρούμενοι με το 4 δίνουν, αντίστοιχα, υπόλοιπο 1, 0 και 2). (V. Dubrovsky)

Καλειδοσκόπιο

1. Βλ. Σχήμα 13.

2. Οι λάμπες που χρησιμοποιούνται σε συσκευές προβολής διαφανειών πρέπει να παράγουν κωνικές δέσμες φωτός. Τέτοιες δέσμες προκύπτουν μόνο από σημειακές φωτεινές πηγές, και όχι από λυχνίες φθορισμού.

3. Πρέπει να τοποθετηθούν στην ίδια ευθεία, που θα πρέπει να είναι κάθετη στο πέτασμα και το αντικείμενο.

4. Όταν το φως προέρχεται από σημειακή πηγή.

5. Όταν οι διαστάσεις της φωτεινής πηγής είναι μεγαλύτερες από αυτές του αντικειμένου, και το πέτασμα απέχει από το αντικείμενο περισσότερο απ' ό,τι η κορυφή του κώνου σκιάς (βλ. Σχήμα 13).

6. Αν μπορείτε να δείτε τμήμα της φωτεινής πηγής από το σημείο που βρίσκεστε.

7. Τα εξογκώματα του οδοστρώματος δημιουργούν σκιές που είναι ορατές από κάποια απόσταση όταν φωτίζονται από τους προβολείς του αυτοκινήτου.

8. Αυτές οι φωτεινές κηλίδες είναι είδωλα του Ήλιου, που σχηματίζονται από πολλούς «σκοτεινούς θαλάμους» (το φως περνάει από τα κενά του φυλλώματος) πάνω στο «πέτασμα» (έδαφος). Όταν το μέγεθος του κενού είναι μεγαλύτερο από το είδωλο του Ήλιου στο έδαφος, το σχήμα των κηλίδων ποικίλλει.

9. Όχι (δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 14).

10. Τα ανεξάρτητα τμήματα μιας εκτεταμένης πηγής φωτός παράγουν επικαλυπτόμενες σκιές. Η προκύπτουσα σκιά θα έχει σαφέστερο περίγραμμα όταν το αντικείμενο βρίσκεται σε μικρή απόσταση από το πέτασμα.

11. Τα αδιαφανή σωματίδια της θερμής φλόγας εμποδίζουν τη διέλευση του φωτός του λαμπτήρα, και ταυτόχρονα εκπέμπουν φως μικρότερης έντασης. Έτσι, το τμήμα του πετάσματος που βρίσκεται πίσω από τη φλόγα είναι λιγότερο φωτισμένο και γίνεται αντιληπτό ως σκιά.

12. Αυτό το είδος φωτισμού παράγει σκιές με όχι σαφές περίγραμμα.

13. Όχι, δεν μεταβάλλονται.

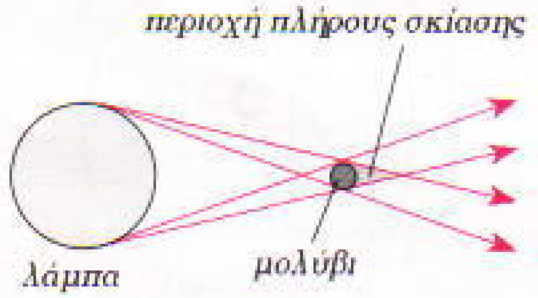
14. Η καρφίτσα δημιουργεί σκιά πάνω στον αμφιβληστροειδή· αυτή έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την καρφίτσα. Ως συνήθως, ο εγκέφαλος αναστρέφει το είδωλο, και έτσι η σκιά γίνεται αντιληπτή ως ανεστραμμένη.

15. Όχι, διότι το φως του άστρου φτάνει σ' εμάς ως παράλληλη δέσμη, και η σκιά ενός σπίρτου δεν καλύπτει τελείως την κόρη του οφθαλμού, η οποία το βράδυ είναι πλήρως διεσταλμένη (Σχήμα 15).

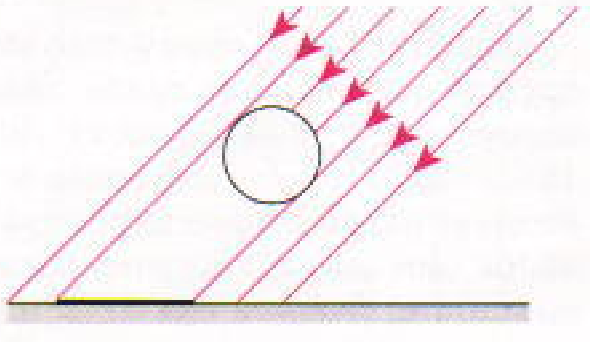
16. Ο αέρας πάνω από τη φωτιά έχει διαφορετικές θερμοκρασίες στα διάφορα σημεία, άρα η πυκνότητά του δεν είναι σταθερή. Οι φωτεινές ακτίνες που διέρχονται μέσα από ένα οπτικά ετερογενές μέσο δεν διαδίδονται σε ευθείες γραμμές, και έτσι παραμορφώνονται τα είδωλα των αντικειμένων.

17. Αυτό είναι η συνέπεια της προοπτικής. Παρόμοια εντύπωση έχετε όταν κοιτάζετε τις ράγες μιας σιδηροδρομικής γραμμής.

18. Αν πραγματοποιήσετε άμεση μέτρηση, μπορείτε να διαπιστώσετε ότι και τα δύο τμήματα είναι ίσα. Η πρώτη σας εντύπωση, όμως, είναι διαφορετική —πρόκειται για μια οφθαλμαπάτη.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Μικροπειραματισμοί

Στην πρώτη περίπτωση η σκιά του μολυβιού έχει σαφέστερο περίγραμμα απ' ό,τι στη δεύτερη, διότι το πλάτος της φλόγας του κεριού είναι μικρότερο από το ύψος της. Δείτε επίσης την απάντηση της ερώτησης 10.

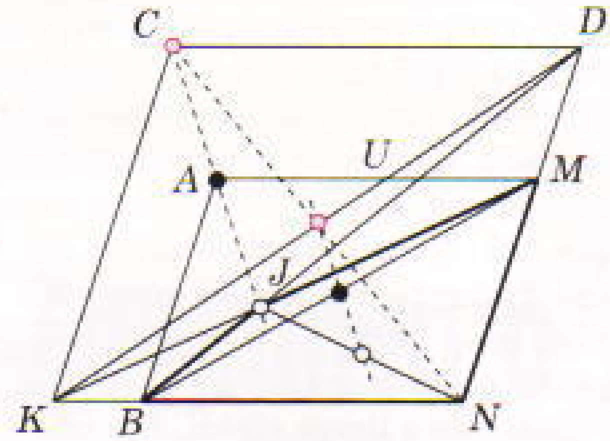
Μαθηματικοί μετασχηματισμοί

1. Τα σημεία A, B, και P, Q είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο του δεδομένου κύκλου που είναι κάθετη προς την AB. Έπεται ότι $AQ = BP = CK$ και $BQ = PA = DM$. Επιπλέον, όλα αυτά τα τμήματα είναι παράλληλα, οπότε τα $AQKC$ και $BQMD$ είναι παραλληλόγραμμα.

2. Έστω M το μέσο του AB και έστω Q το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων. Αφού όλα τα τρίγωνα AQB είναι όμοια μεταξύ τους, το ίδιο ισχύει και για τα τρίγωνα AQM: η γωνία AQM είναι σταθερή, όπως και ο λόγος QM/AM. Επομένως, το σημείο M είναι η εικόνα του A μέσω μιας σπειροειδούς ομοιότητας γύρω από το Q με αυτή τη σταθερή γωνία και αυτό το σταθερό λόγο. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η εικόνα του κύκλου QPA —δηλαδή, ένας συγκεκριμένος κύκλος που διέρχεται από τα Q και P.

3. Η σπειροειδής ομοιότητα γύρω από το Q που μεταφέρει το A στο B απεικονίζει τον έναν κύκλο στον άλλο, και επομένως απεικονίζει την εφαπτομένη AC του πρώτου κύκλου στην BC. Άρα, η γωνία περιστροφής $\angle AQB$ ισούται με μία από τις γωνίες που σχηματίζονται από τις ευθείες AC και BC στο σημείο C. Αν εξετάσουμε πιο προσεκτικά όλες τις δυνατές περιπτώσεις (ή αν χρησιμοποιήσουμε προσανατολισμένες γωνίες), θα διαπιστώσουμε πως όταν τα σημεία Q και C βρίσκονται εκατέρωθεν της AB, τότε $\angle AQB + \angle ACB = \pi$, ενώ όταν τα σημεία Q και C βρίσκονται στην ίδια πλευρά της AB, τότε $\angle AQB = \angle ACB$. Σε κάθε περίπτωση, τα σημεία A, B, Q και C ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

4. Το θεώρημα για την ευθεία Gauss προκύπτει από την πρότασή μας για τις συγκλίνουσες διαγωνίους των παραλληλογράμμων. Πράγματι, έστω ότι το δεδομένο τετράπλευρο είναι το



Σχήμα 16

$MBJM$ (χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του άρθρου). Θα ανακατασκευάσουμε το Σχήμα 12 (του άρθρου) γύρω από αυτό το τετράπλευρο. Προεκτείνουμε τις NB και MJ που τέμνονται στο σημείο K, και τις NM και BJ που τέμνονται στο σημείο D. Κατόπιν, βρίσκουμε σημεία A και C τέτοια ώστε τα $BNMA$ και $KNDC$ να είναι παραλληλόγραμμα (Σχήμα 16). Θεωρούμε την ομοιοθεσία με λόγο 2 και κέντρο N. Αυτή μεταφέρει το μέσο της διαγωνίου BM στο A και το μέσο της KD στο C. Τώρα έχουμε ένα σχήμα παρόμοιο με το Σχήμα 12, και έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι ευθείες AC, BD, και KM συγκλίνουν —με άλλα λόγια, τα σημεία A, C, και J είναι συγγραμμικά. Επομένως, τα δεδομένα σημεία (οι αντίστροφες εικόνες τους μέσω της αρχικής ομοιοθεσίας) ανήκουν στην ίδια ευθεία (μια διάμεσο του τριγώνου NJC).

5. Σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Σχήματος 14 του άρθρου, και οι δύο αμοιβαία δυϊκές προτάσεις ισοδυναμούν με το ίδιο γεγονός: η ευθεία που ενώνει την τομή των $a = AB'$ και $b' = A'B$ με την τομή των $a' = AC'$ και $b = A'C$ διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών BC' και $B'C$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε το δυϊκό του θεωρήματος του Πάππου σ' ένα θεώρημα για συγκλίνουσες διαγωνίους (και αντιστρόφως) μέσω μιας κεντρικής προβολής που μεταφέρει τα σημεία A και A' του Σχήματος 14 στο άπειρο, δημιουργώντας έτσι δύο τριάδες παράλληλων ευθειών (οι ευθείες a, b, c μετατρέπονται, για παράδειγμα, στις ευθείες KC, BP, ND του Σχήματος 12, και οι ευθείες a', b', c' στις LM, CD, KN).

Κόντρα στο ρεύμα

1. Στο πείραμα του Γαλιλαίου η σφαίρα του μουσκέτου και η μπάλα του κανονιού έπεσαν στο έδαφος πρακτικά την ίδια στιγμή. Ωστόσο, αν ο Γαλιλαίος είχε τη δυνατότητα να μετρήσει μικρά χρονικά διαστήματα της τάξης των 10^{-2} s, θα είχε παρατηρήσει πως η σφαίρα του μουσκέτου ήταν ελάχιστα πιο πίσω από αυτήν του κανονιού. Τούτο συνέβαινε διότι η σχετική συνεισφορά της αντίστασης του αέρα στη συνιστάμενη δύναμη που καθορίζει την κίνηση της σφαίρας του μουσκέτου είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συνεισφορά στην κίνηση της μπάλας του κανονιού.

2. Είναι ταχύτερο κατά παράγοντα $\sqrt[3]{1{,}5} \cong 1{,}15$.

5. Αν προσθέσετε μικρή ποσότητα χρωστικής ουσίας στη στήλη του νερού, χωρίς να διαταράξετε τη ροή (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μελάνι ή υπερμαγγανικό κάλιο), μπορείτε να δείτε ότι η ροή κάτω από την μπάλα είναι στροβιλώδης και χαοτική.

6. Ο συντελεστής C_x εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον προσανατολισμό του κουταλιού ως προς την κατεύθυνση του ρεύματος.

7. Αν η μπάλα του πινγκ πονγκ αφεθεί ελεύθερη από μεγάλο ύψος, θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα περίπου 8 m/s σε χρόνο $\tau \cong 2$-3 s.

Διορθώσεις

Μάιος/Ιούνιος 1996

Η λύση της Σπαζοκεφαλιάς *Σ61* περιέχει ένα λάθος. Η εξίσωση στο τέλος της πρώτης παραγράφου έπρεπε να είναι: $5(n+1) = 3[(n+1)+2]$. Σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος, n είναι το πλήθος των ημερών που δούλεψε ο μαστρο-Νικόλας πριν από την Παρασκευή. Ωστόσο, δούλεψε και την Παρασκευή, και έτσι το n στην εξίσωση θα έπρεπε να είναι $n + 1$ (όπως στην επόμενη παράγραφο). Η εξίσωση τώρα δίνει πραγματικά $n = 2$.

* * *

Αρκετοί αναγνώστες έγραψαν για να μας πληροφορήσουν ότι βρήκαν συντομότερη λύση της Σπαζοκεφαλιάς *Σ62*:

1(562)437 → 1(456)237 → 1234567.

Παρατηρούμε ότι και ο συγγραφέας της απάντησης (σελ. 64) και το αγόρι στην εικόνα (σελ. 18) παίρνουν τρεις τόμους από τη μέση, αφήνοντας ένα ζεύγος τόμων σε κάθε άκρη. Αν είναι υποχρεωτικό να πάρουμε τρεις τόμους από τη μέση αφήνοντας δύο σε κάθε άκρη και μετά να τους τοποθετήσουμε είτε στη μια άκρη είτε ανάμεσα στους τόμους μιας άκρης, τότε η απάντηση που δίνεται είναι σωστή. Εντούτοις, αυτός ο περιορισμός δεν διατυπώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος, οπότε η λύση που έστειλαν οι αναγνώστες μας είναι και έγκυρη και συντομότερη.

* * *

Ελληνικό Quantum: Η αρχή της δεύτερης παραγράφου στην τρίτη στήλη της σελίδας 61 έχει ως εξής:

«Πράγματι, ας διαγράψουμε μια από τις ακμές του. Το γράφημα θα διασπαστεί σε δύο ασύνδετα κομμάτια (διαφορετικά, αυτή η ακμή θα ήταν τμήμα κύκλου). Διαγράφουμε μία ακόμη ακμή. Το γράφημα διασπάται σε τρία κομμάτια. Διαγράφοντας k ακμές, θα πάρουμε $k + 1$ κομμάτια.»

Μάρτιος / Απρίλιος 1996

Η απάντηση της πρόκλησης *Φ57* περιέχει λάθος τιμή για μια από τις παραμέτρους. Στη σελίδα 60 στην τρίτη στήλη, τέσσερις γραμμές πριν από το τέλος, αντί για $m_{\text{mole}} = 14{,}5$ g, θα έπρεπε να είναι $m_{\text{mole}} = 29$ g.

Ιανουάριος / Φεβρουάριος 1996

Στο Καλειδοσκόπιο αναφέρονται τα εξής (σελίδα 41):

Ο πολωνός μαθηματικός Kazimierz Kuratowski και ο ρώσος μαθηματικός Lev Pontryagin απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως υπογράφημα κανένα από αυτά τα δύο γραφήματα (το πλήρες γράφημα των 5 κόμβων και το γράφημα «σπιτιών-πηγαδιών»).

Σ' αυτή την πρόταση αναπαράγεται ένα σφάλμα —μια λανθασμένη απόδοση— που χρονολογείται από το 1962. Εκείνη τη χρονιά εκδόθηκε στα ρωσικά, μεταφρασμένο από τον A.A. Zykov, το βιβλίο τού C. Berge *Théorie des graphes et ses applications* (1958) (Θεωρία γραφημάτων και οι εφαρμογές της). Στο σημείο που ο Berge εξετάζει το θεώρημα των επίπεδων γραφημάτων, ο Zykov προσέθεσε την εξής υποσημείωση: «Το θεώρημα εισήγαγε (αλλά δεν δημοσίευσε) ο L.S. Pontryagin το 1927, ενώ το 1930, και ανεξάρτητα από αυτόν, το απέδειξε ξανά ο Kuratowski. Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται θεώρημα Pontryagin-Kuratowski».

Μια σημείωση των Kennedy, Quintas και Syslo στο περιοδικό *Historia Mathematica* (12[1985], σελ. 356-68) ξεκαθαρίζει την ιστορία του θεωρήματος. Το 1929 ο Kuratowski ανακοίνωσε την ανακάλυψή του και το 1930 τη δημοσίευσε. Στο δημοσιευμένο άρθρο του φύτεψε το σπόρο της σύγχυσης που επακολούθησε. Σε μια υποσημείωση ο Kuratowski γράφει: «Έμαθα από τον κύριο Alexandroff ότι πριν από μερικά χρόνια ο κύριος Pontryagin ανακάλυψε ένα θεώρημα για τα γραφήματα, ανάλογο με το δικό μου, το οποίο όμως δεν έχει δημοσιεύσει έως τώρα».

Δεν θα μάθουμε ποτέ αν ο Pontryagin απέδειξε το θεώρημα για τα επίπεδα γραφήματα το 1927. Υπάρχουν ενδείξεις (μερικές προέρχονται από τον ίδιο τον Pontryagin) ότι δούλευε πραγματικά πάνω σε μια αρχική και ατελή εκδοχή του θεωρήματος του Kuratowski, που είχε φτάσει σ' αυτόν μέσω του Alexandroff, και έτσι η θρυλούμενη απόδειξή του θα πήγαζε εξίσου από τον Kuratowski όσο και από τον ίδιο. Πάντως, στο τέλος αναφέρεται ότι «στον Kuratowski ανήκει αναμφισβήτητα η πρώτη γραπτή και ορθή απόδειξη του θεωρήματος» (Kennedy κ.ά., σελ. 363). Πληροφορούμαστε επίσης ότι «πριν από τη μετάφραση του Zykov [του βιβλίου του Berge] όλοι οι σοβιετικοί μαθηματικοί ανέφεραν το θεώρημα ως θεώρημα Kuratowski» (σελ. 364).

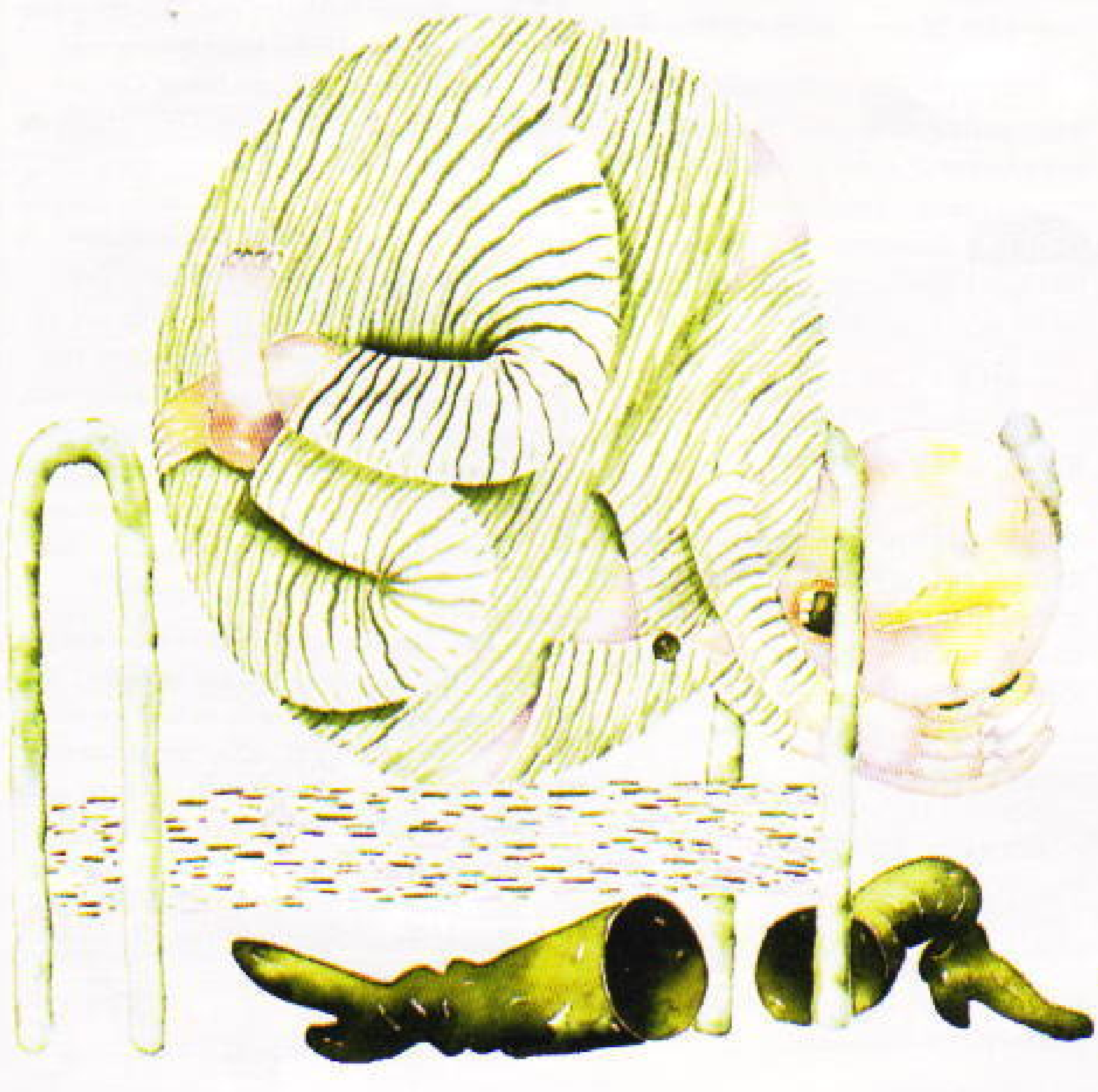
Γιατί ξαγρυπνά ο Άρης;

Είναι το πρόβλημα πραγματικό, ή υπάρχει μόνο μέσα στο κεφάλι του;

L. Borovinsky

ΑΝ ΑΡΧΙΣΕΤΕ ΝΑ ΜΑΘΑΙΝΕΤΕ ΡΩσικά, αργά ή γρήγορα θα συναντήσετε τον μεγάλο Samuel Marshak. Αυτός ο συγγραφέας, ο οποίος μετέφρασε Σαίξπηρ στα ρωσικά, είναι περισσότερο γνωστός για τα πεζά και κυρίως για τα χιουμοριστικά ή διδακτικά ποιήματα που έγραψε για παιδιά. Ίσως δεν υπάρχει ούτε ένας Ρώσος που να μην τον γνωρίζει, και πολλά από τα ποιήματά του είναι απολύτως κατάλληλα για τα εισαγωγικά βιβλία εκμάθησης της ρωσικής.

Στη συνέχεια, σας παρουσιάζουμε ένα ποίημα που έγραψε ο Marshak σχετικά με ένα δημοφιλές παιχνίδι που φαίνεται πως δεν έχει συγκεκριμένη εθνικότητα. Πρόκειται για μια κούκλα που δεν μπορούμε να την οριζοντιώσουμε —σηκώνεται πάντα όρθια.



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Άρης ο παιχνιδιάρης[1]

Για ύπνο πάνε τ' άλογα,
για ύπνο πάνε οι κότες,
και τα πουλάκια στις φωλιές
έπαψαν το τραγούδι.
Μονάχα ο Άρης δεν μπορεί
να γείρει, να πλαγιάσει
—στριφογυρνάει, σηκώνεται,
το μάτι του γαρίδα.

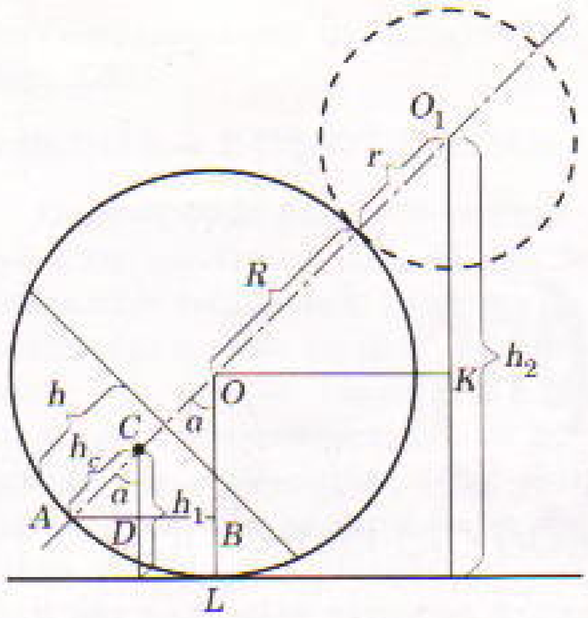
Οι παραμάνες πολεμούν
να τον αποκοιμίσουν,
μα αυτός τους σπάει τα νεύρα τους
και τις κατασυγχύζει.
Πετιέται, αντιστέκεται,
και κούραση καμία
δεν τον κρατάει δέσμιο
τον παιχνιδιάρη Άρη.

Ιδρώνουν οι κακόμοιρες
καλά να τον σκεπάσουν,
πετάει εκείνος μονομιάς
σεντόνι και κουβέρτα.
Σηκώνεται, χοροπηδά,
και το παιχνίδι αρχίζει
—ολημερίς κι ολονυχτίς
μια σβούρα που γυρνάει.

Τον πήγαν σε σοφό γιατρό
για να τον εξετάσει.
Το μέτρησε, το ζύγισε,
γυρνάει και του λέει:
«Άρη μου, παιχνιδιάρη μου,
δεν είσαι σαν τους άλλους:
έχεις κεφάλι ελαφρύ,
γι' αυτό και δεν κοιμάσαι...»

Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσου-

1. Η διασκευή του στα ελληνικά έγινε από τον Παντελή Μπουκάλα. (Σ.τ.ε.)



με, με τη βοήθεια των φυσικών νόμων, τη συμπεριφορά του Άρη και να βρούμε επίσης μια θεραπεία για την αϋπνία του. Θα υπολογίσουμε τι χρειάζεται ο Άρης για να ξαπλώσει —ή, καλύτερα, για να παραμείνει ξαπλωμένος, και να ξεκουραστεί.

Πώς είναι κατασκευασμένη αυτή η πάντοτε όρθια κούκλα; Φανταστείτε δύο κούφιες σφαίρες με ακτίνες R και r ($R > r$ —βλ. το Σχήμα) κολλημένες μεταξύ τους στο σημείο επαφής τους. Η μεγαλύτερη σφαίρα είναι το «σώμα» και η μικρότερη το «κεφάλι». Στο κάτω μέρος του σώματος υπάρχει ένα βαρύ αντικείμενο ύψους h και σχήματος ανεστραμμένου «θόλου». Ο θόλος αυτός ορίζεται αφ' ενός από την κάτω επιφάνεια του σώματος του παιχνιδιού, αφ' ετέρου από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρών και το σημείο επαφής τους.

Αν δοκιμάσουμε να ξαπλώσουμε τον Άρη σε μια οριζόντια επιφάνεια και στη συνέχεια τον αφήσουμε ελεύθερο, σηκώνεται αμέσως όρθιος. Γιατί; Είναι προφανές ότι η κατακόρυφη θέση αντιστοιχεί στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Υπάρχει ένας νόμος της μηχανικής σύμφωνα με τον οποίο «σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, το κέντρο βάρους πρέπει να βρίσκεται στη χαμηλότερη απ' όλες τις δυνατές θέσεις». Αυτό σημαίνει πως η τιμή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας πρέπει να είναι η μικρότερη δυνατή.

Ας βρούμε τη συνθήκη που ελαχιστοποιεί τη δυναμική ενέργεια του Άρη όταν είναι όρθιος. Για το σκοπό αυτό διαταράσσουμε την ισορροπία της κούκλας, κλίνοντας τον άξονά της κατά γωνία a ως προς την κατακόρυφη. Έστω h_c το ύψος του κέντρου βάρους του βαρέος αντικειμένου (του θόλου) στο σώμα του παιχνιδιού όταν ο άξονας είναι κατακόρυφος, M η μάζα αυτού του αντικειμένου, και m η μάζα του κεφαλιού της κούκλας. Η μάζα του κούφιου «σώματος» δεν μας ενδιαφέρει, γιατί το ύψος του κέντρου βάρους του (και συνεπώς η δυναμική του ενέργεια) δεν μεταβάλλεται όταν ο Άρης γέρνει.

Όπως μπορείτε να δείτε από το Σχήμα, το ύψος του κέντρου βάρους του βαρέος αντικειμένου στην επικλινή θέση είναι:

$$\begin{aligned} h_1 &= |CD| + |BL| \\ &= h_c\,\text{συν}a + R - R\,\text{συν}a, \end{aligned}$$

και το ύψος του κέντρου βάρους του κεφαλιού είναι

$$\begin{aligned} h_2 &= |LO| + |KO_1| \\ &= R + (R + r)\,\text{συν}a. \end{aligned}$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια του βαρέος αντικειμένου και του κεφαλιού είναι

$$\begin{aligned} E_\delta &= Mgh_1 + mgh_2 \\ &= (M + m)gR \\ &\quad + [m(R+r) - M(R-h_c)]\,g\,\text{συν}a. \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του Άρη γίνεται ελάχιστη όταν ο άξονάς του είναι κατακόρυφος (δηλαδή, όταν $a = 0$) και η παράσταση με την οποία πολλαπλασιάζουμε την ποσότητα $g\,\text{συν}a$ είναι αρνητική:

$$m(R + r) - M(R - h_c) < 0,$$

ή

$$m < M\frac{R - h_c}{R + r}.$$

Είναι αλήθεια πως η ποσότητα h_c παραμένει άγνωστη, μπορούμε όμως να την εκφράσουμε συναρτήσει των γνωστών παραμέτρων R και h (θα το δεχτούμε χωρίς απόδειξη):

$$h_c = h\frac{8R - 3h}{12R - 4h}.$$

Βρήκαμε λοιπόν την ακριβή μαθηματική συνθήκη που αποδεικνύει πόσο «κουφιοκέφαλος» πρέπει να είναι ο Άρης ώστε να ανακτά την κατακόρυφη θέση οποτεδήποτε τον βάζουν στο κρεβάτι.