

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1998
ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 1
1.700 ΔΡΧ.

- *Πραγματικά αέρια και εξίσωση van der Waals*
- *Η εξαφάνιση των δεινοσαύρων*
- *Είλικρινείς και ψεύτες στα μαθηματικά*
- *Μεσοαστρικές φουσαλίδες*
- *Γιατί έχουν μεγάλα αυτιά οι ελέφαντες;*
- *Μια σφαιρική μελέτη των συζυγών αριθμών*
- *Η πιο ταπεινή και μεγαλειώδης χημική ένωση: το νερό*
- *Περί θερμικής αγωγιμότητας*
- *Πολιτική τέχνη και μαθηματικά*





Συλλογή Samuel H. Kress © 1997 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον.

Η προσκύνηση των Μάγων (περίπου 1508/1519), του Juan de Flandes

ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΩΝ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΩΝ, ΟΛΟΙ ΦΕΡΝΟΥΜΕ στο νου μας τη βιβλική αφήγηση για τη γέννηση του Ιησού. Σύμφωνα με την Καινή Διαθήκη, οι Μάγοι οδηγήθηκαν στο νεογέννητο Μεσσία από τη λάμψη του περίφημου άστρου της Βηθλεέμ. Με ποιο τρόπο θα παρατηρούσαμε σήμερα ένα τέτοιο ουράνιο φαινόμενο; Τι θα αποκάλυπτε η εικόνα ενός τέτοιου άστρου αν είχε ληφθεί από το υπερσύγχρονο τηλεσκόπιο Hubble; Παραδόξως, η απόδοση του συγκεκριμένου φαινομένου από τον Juan de Flandes θα μπορούσε να είναι ακόμη πιο οξυδερκής απ’

όσο θα επιδίωκε ποτέ ο ίδιος ο καλλιτέχνης. Αν αυτό που καθοδήγησε τους Μάγους μέσα στην έρημο ήταν πράγματι μια έκρηξη σουπερνόβα, όπως υποθέτουν ορισμένοι ειδικοί, τότε η φωτεινή άλως που θα είχε εμφανιστεί γύρω από το άστρο θα μπορούσε να αποτελεί μια φουσαλίδα στο μεσοαστρικό αέριο, σχηματισμένη από τον «άνεμο» τον οποίο δημιουργούσε το εκρηγνυόμενο άστρο. Για να μάθετε περισσότερα όσον αφορά τις τρέχουσες έρευνες με αντικείμενο τη δημιουργία τέτοιων φουσαλίδων, διαβάστε το άρθρο της σελίδας 24.

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 1



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Πολλές φορές υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι για να δούμε το ίδιο πράγμα. Και εκείνοι που ανακαλύπτουν νέους τρόπους προς αυτή την κατεύθυνση συχνά προσφέρουν σημαντική υπηρεσία. Για μια τέτοια συμβολή στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο, ο Johannes Diderik van der Waals τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ φυσικής.

Μελετώντας το άρθρο της σελίδας 52 μπορείτε να μάθετε πώς ο μεγάλος φυσικός βελτίωσε την «ιδανική» εικόνα μας για τον κόσμο. Στη συνέχεια, ρίξτε άλλη μια ματιά στο εξώφυλλό μας και συλλογιστείτε πώς η εξίσωση van der Waals βοηθά τους επιστήμονες να περιγράψουν τη μεταπήδηση στον πραγματικό κόσμο που μας περιβάλλει.

ΑΡΘΡΑ

- 5** Επιστημονικές μέθοδοι
Δεινόσαυροι στον αχυρώνα
Stephen Jay Gould
- 12** Θερμική αγωγιμότητα
Ζεστό άγγιγμα
Alexey Byalko
- 18** Ανιχνευτής λογικών σφαλμάτων
Διχαλωτοί δρόμοι και διχαλωτές γλώσσες
P. Blekher
- 24** Μεσοαστρικές φουσαλίδες
Ένα άστρο γεννιέται
S. Silich
- 30** Αλγεβρική εργαλειοθήκη
Ανόμοιοι δίδυμοι
V.N. Vaguten
- 42** Ο κανόνας της πλειοψηφίας
Δημοκρατία και μαθηματικά
Valery Pakhomov

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- | | |
|---|--|
| 2 Ο κόσμος των κβάντων
<i>Το νερό, πηγή ζωής</i> | 52 Αναδρομές
<i>Ο van der Waals και η εξίσωσή του</i> |
| 17 Σπαζοκεφαλιές | 57 Στο μαυροπίνακα I
<i>Τα μέσα και τα έξω των κύκλων</i> |
| 27 Στο εργαστήριο
<i>Κάλαντα στο εργαστήριο</i> | 60 Στο μαυροπίνακα II
<i>Αριθμητικά κελιά</i> |
| 36 Καλειδοσκόπιο
<i>Δυναμικό</i> | 62 Απαντήσεις, Υποδείξεις και λύσεις |
| 38 Στα πεδία της φυσικής
<i>Τα αυτιά των ελεφάντων</i> | 70 Ιππολογισμοί
<i>Εμπνεύσεις</i> |
| 48 Πώς λύνεται; | |
| 50 Gradus ad Parnassum | |

Το νερό, πηγή ζωής

«Ακόμη τα Φώτα δεν είχαν έλθει. Ο Σταυρός δεν είχε πέσει στο γιאלό... Δεν εκαρτερούσε ο απόκοτος δυο-τρεις ημέρες, να φωτισθούν τα νερά, ν' αγιασθούν οι βρύσες και τα ποτάμια...»

—Αλέξανδρος Παπαδιαμάντης, Φώτα-Ολόφωτα

P.W. Atkins

ΑΡΑΓΕ ΤΙ ΝΑ ΠΡΩΤΟΘΑΥΜΑΣΟΥ- με από τούτη την ταπεινή χημική ένωση, το νερό; Η εντυπωσιακή αφθονία του, η ποικιλία των μορφών του ή, ακόμη, ο σημαντικός ρόλος του στη διαμόρφωση του πλανήτη μας και στην εξέλιξη της ζωής, είναι λίγα μόνο από τα γοητευτικά χαρακτηριστικά του. Ωστόσο, αυτό που μαγεύει εμένα είναι το γεγονός ότι οι τόσο εκπληκτικές ιδιότητές του προέρχονται από μια ιδιαίτερα απλή δομή. Και δεν με συναρπάζει μόνο ο πλούτος της «απλότητας» του νερού· με συγκλονίζει η «λεπτότητα» των ιδιοτήτων του. Αυτές οι ασυνήθιστες ιδιότητες είναι καθοριστικές για την εμφάνιση και τη διατήρηση της ζωής.

Το νερό —είτε είναι η θάλασσα, είτε ένα σταγονίδιο της πρωινής ομίχλης, ένας απόκρημνος παγετώνας, μια νιφάδα χιονιού, είτε ο ατμός που σπρώχνει τα πτερύγια του ατμοσφαιρίλου ή αιωρείται μέσα στο χαώδες σύνολο που ονομάζουμε ατμόσφαιρα— αποτελείται από μόρια. Κι όλα τα μόρια νερού στη Γη, ή σ' οποιοδήποτε άλλο σημείο του σύμπαντος κι αν υπάρχουν, είναι ακριβώς τα ίδια. Το καθένα αποτελείται από ένα κεντρικό άτομο οξυγόνου στο οποίο βρίσκονται προσκολλημένα δύο άτομα υδρογόνου. Αυτό είναι όλο. Ωκεανοί, ζωή και ειδυλλιακά τοπία, όλα τους

πηγάζουν από τούτη την απλή μορφή.

Για να αντιληφθούμε πώς μπορεί να σχηματίζονται θάλασσες από αυτή τη μικροσκοπική οντότητα, χρειάζεται να γνωρίζουμε κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με το υδρογόνο, το ελαφρύτερο απ' όλα τα στοιχεία, και το συντροφικό του στοιχείο, το οξυγόνο. Το άτομο του υδρογόνου, λοιπόν, είναι πολύ μικρό· αποτελείται από ένα θετικά φορτισμένο πρωτόνιο, το οποίο περιβάλλεται από ένα ηλεκτρόνιο. Κι επειδή είναι τόσο μικρό, διαθέτει το πλεονέκτημα ο πυρήνας του να μπορεί να βρίσκεται πολύ κοντά στα ηλεκτρόνια των γειτονικών ατόμων. Οι πυρήνες του υδρογόνου έχουν τη δυνατότητα να «τρυπώνουν» σε περιοχές όπου δεν μπορούν να εισχωρήσουν μεγαλύτερα άτομα. Επιπλέον, επειδή στο άτομο του υδρογόνου υπάρχει μόνο ένα ηλεκτρόνιο, το θετικό φορτίο του πυρήνα κατορθώνει να «εκπέμψει μια έλξη» διαμέσου του ομιχλώδους αρνητικού φορτίου του ηλεκτρονικού νέφους προς τα άλλα ηλεκτρόνια που τυχαινει να βρίσκονται τριγύρω.

Όσον αφορά στο άτομο του οξυγόνου, είναι όντως πολύ μεγαλύτερο από το άτομο του υδρογόνου. Ωστόσο, σε σύγκριση με τα άτομα άλλων στοιχείων, όπως του θείου, του χλωρίου, ακόμη και του άνθρακα ή του

αζώτου, παραμένει αρκετά μικρό. Το μέγεθός του οφείλεται στο ισχυρό θετικό φορτίο του πυρήνα του, που συγκρατεί τα ηλεκτρόνια σε πολύ μικρή απόσταση γύρω του. Επιπλέον, επειδή το άτομο του οξυγόνου είναι μικρό και έχει ισχυρά φορτισμένο πυρήνα, μπορεί να «προσελκύει», να τραβά προς το μέρος του, τα ηλεκτρόνια των γειτονικών ατόμων. Και κυρίως καταφέρει να προσελκύει τα ηλεκτρόνια των ατόμων με τα οποία σχηματίζει χημικό δεσμό.

Στο μόριο του νερού, ένα άτομο οξυγόνου συνδέεται με δύο άτομα υδρογόνου. Αυτό σημαίνει πως το άτομο του οξυγόνου, στο κέντρο του μορίου, «ρουφάει» τα ηλεκτρόνια κάθε δεσμού οξυγόνου-υδρογόνου, με συνέπεια τα άτομα του υδρογόνου να είναι εν μέρει απογυμνωμένα από τα ηλεκτρόνιά τους. Κατ' αυτό τον τρόπο, το άτομο του οξυγόνου μπορεί να χαρακτηριστεί «πλούσιο» —ενώ τα άτομα του υδρογόνου «φτωχά»— σε ηλεκτρόνια. Με άλλα λόγια, το άτομο του οξυγόνου έχει περίσσεια αρνητικού φορτίου (που οφείλεται στα επιπλέον ηλεκτρόνια), ενώ τα άτομα του υδρογόνου περίσσεια θετικού φορτίου (εξαιτίας του ότι το θετικό φορτίο των πυρήνων τους δεν εξουδετερώνεται πλέον από τα ηλεκτρόνια που τους περιβάλλουν —ώς ένα βαθμό έχουν

μετατοπιστεί προς την πλευρά του ατόμου του οξυγόνου). Η προκύπτουσα κατανομή φορτίου —αρνητικό το οξυγόνο, θετικό το υδρογόνο— σε συνδυασμό με το μικρό μέγεθος των ατόμων του υδρογόνου ευθύνονται για τις θαυμαστές ιδιότητες του νερού.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που σε συνδυασμό με την κατανομή των ηλεκτρονίων συντελεί στο σχηματισμό των θαλασσών είναι το σχήμα του μορίου του νερού. Μοιάζει με ισοσκελές τρίγωνο, σαν το γράμμα Λ, όπου την κορυφή του κατέχει το άτομο του οξυγόνου. Το σημαντικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου σχήματος —το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί με τη μελέτη της κατανομής των ηλεκτρονίων γύρω από το κεντρικό άτομο του οξυγόνου— είναι ότι η μια πλευρά του ατόμου του οξυγόνου παραμένει ακάλυπτη, έκθετη, και η πλευρά αυτή είναι πλούσια σε ηλεκτρόνια.

Ας δούμε, λοιπόν, πώς τα εν λόγω χαρακτηριστικά αναδύονται στον πραγματικό κόσμο των φαινομένων και των απτών ιδιοτήτων. Το πιο σημαντικό απ' όλα είναι η ικανότητα των μορίων του νερού να «συγκολλώνται» μεταξύ τους. Η πλούσια σε ηλεκτρόνια περιοχή του ατόμου του οξυγόνου δεν είναι παρά περιοχή αρνητικού ηλεκτρικού φορτίου· το εν μέρει απογυμνωμένο άτομο υδρογόνου ενός γειτονικού μορίου νερού αποτελεί περιοχή θετικού φορτίου. Κι εσείς γνωρίζετε ότι τα ετερόνυμα φορτία έλκονται αμοιβαία. Έτσι, η ειδική σύζευξη που δημιουργείται ανάμεσα στα δύο μόρια νερού —με την εν λόγω μεσολάβηση ενός εκ των ατόμων υδρογόνου— ονομάζεται *γέφυρα ή δεσμός υδρογόνου*. Πρόκειται για έναν από τους σημαντικότερους διαμοριακούς δεσμούς, αφού το φάσμα των συνεπειών του εκτείνεται από τη λειτουργία του γενετικού κώδικα (οι δύο κλώνοι της διπλής έλικας του DNA συνδέονται μεταξύ τους με δεσμούς υδρογόνου) ως τη σκληρότητα του ξύλου (οι αλυσίδες της κυτταρίνης διατάσσονται παράλληλα και σχηματίζουν συμπαγείς δομές που σταθεροποιούνται με πλήθος δεσμών υδρογόνου μεταξύ τους) και τις ιδιότητες του νερού —που αποτελούν και

το θέμα μας. Το μόριο νερού είναι τόσο ελαφρύ ώστε, αν δεν υπήρχαν οι δεσμοί υδρογόνου μεταξύ των μορίων του, το νερό θα ήταν αέριο· αντί για ποτάμια, λίμνες και θάλασσες μ' αυτό το πολύτιμο υγρό, θα είχαμε έναν «υδάτινο» ουρανό, γεμάτο «αέριο ύδωρ», που θα περιέβαλλε μια ξηρή και άγονη γη.

Όπως ακριβώς οι δεσμοί υδρογόνου «παγιδεύουν» τα μόρια του νερού ώστε αυτό να παραμένει σε υγρή κατάσταση ακόμη και στις σχετικά υψηλές θερμοκρασίες που βιώνουμε καθημερινά, κατά τον ίδιο τρόπο βοηθούν και στο σχηματισμό του στερεού, συμπαγούς πάγου σε χαμηλότερες θερμοκρασίες. Αλλά όταν το νερό μετατρέπεται σε πάγο, συμβαίνει κάτι παράξενο και καθοριστικό για τη διατήρηση της ζωής. Καθώς μειώνεται η θερμοκρασία, τα μόρια του νερού κινούνται και συγκρούονται μεταξύ τους ασθενέστερα· έτσι, μπορούν να σχηματιστούν δεσμοί υδρογόνου σε μεγαλύτερη έκταση, αλλά και να επιζήσουν περισσότερο. Ως εκ τούτου, τα μόρια παύουν να ρέουν με την ευκολία που χαρακτηρίζει τα υγρά, παύουν να αλλάζουν τις θέσεις και τον προσανατολισμό τους συνεχώς, και σχηματίζουν ένα σταθερό, κρυσταλλικό στερεό. Εδώ ακριβώς «εισβάλλει στη σκηνή» το τριγωνικό σχήμα των μορίων του νερού. Κάθε άτομο οξυγόνου, στην κορυφή του Λ, έχει χώρο ώστε να αναπτύξει δύο δεσμούς υδρογόνου, έναν με καθένα από δύο γειτονικά μόρια νερού. Αποτέλεσμα: κάθε άτομο οξυγόνου συμμετέχει σε τέσσερις δεσμούς —στους δύο συνηθισμένους δεσμούς οξυγόνου-υδρογόνου, και σε δύο δεσμούς υδρογόνου με τους γείτονές του· και αυτοί οι τέσσερις δεσμοί κατευθύνονται προς τις κορυφές ενός τετραέδρου. Η συγκεκριμένη διάταξη, όμως, που συνεχίζεται από μόριο σε μόριο καθ' όλο τον όγκο του στερεού, αφήνει τεράστιο κενό χώρο· στη δομή του πάγου χάσκουν μεγάλα κενά. Έτσι, τα μόρια του νερού διατηρούνται ταυτόχρονα απομακρυσμένα αλλά και ενωμένα, σαν μια ανοιχτή σκαλωσιά από άτομα και δεσμούς. Όταν ο πάγος λιώνει, τούτη η όμορφη κρυσταλλική δομή καταρρέει· τα μόρια του νερού αποκτούν ένα σχεδόν τυ-

χαίο προσανατολισμό, ο οποίος επιτρέπει πολύ πιο πυκνή στοιβαξή τους στο χώρο —το νερό που σχηματίζεται είναι πιο πυκνό από τον πάγο. Όταν πάλι το νερό ψύχεται, η κρυσταλλική δομή που είχε καταρρεύσει ανασυγκροτείται και αναπτύσσεται εκ νέου.

Το νερό στη στερεά κατάσταση (πάγος) είναι λιγότερο πυκνό απ' ό,τι στην υγρή —φαινόμενο που δεν παρατηρείται σχεδόν σε καμία άλλη ουσία! Μια από τις συνέπειες αυτής της ιδιαιτερότητας είναι ότι ο πάγος που σχηματίζεται κατά τους χειμερινούς μήνες στις λίμνες επιπλέει στην επιφάνειά τους. Τούτο το στοιχείο έχει καθοριστική σημασία για τη διατήρηση και την ανάπτυξη της υδρόβιας ζωής: το στρώμα του πάγου λειτουργεί ως κάλυμμα της λίμνης και αποτρέπει την πήξη του υπόλοιπου νερού· η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας μπορεί να είναι πολύ χαμηλή, ωστόσο απλώς αυξάνει το πάχος του επιφανειακού στρώματος πάγου.

Οι δεσμοί υδρογόνου στο νερό και η συνοχή που αναπτύσσεται μεταξύ των μορίων του ευθύνονται και για άλλες ιδιότητες του νερού. Στους συγκεκριμένους δεσμούς μπορεί να αποδοθεί το χρώμα που αποκτά το νερό συγκεντρωμένο σε τεράστιες ποσότητες —αυτή η μοναδική απόχρωση του πλανήτη μας όταν τον βλέπουμε από το Διάστημα. Επίσης, η τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια του νερού με αποτέλεσμα αυτό να καμπυλώνεται στο σχήμα των σταγόνων. Στους ίδιους δεσμούς μπορεί να αποδοθεί η μεγάλη θερμοχωρητικότητα του νερού —ιδιότητα που χρησιμοποιείται στα συστήματα κεντρικής θέρμανσης, όπου μικρή ποσότητα νερού διανέμει μεγάλη ποσότητα θερμικής ενέργειας.

Ένα άλλο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του νερού είναι η ικανότητά του να διαλύει εύκολα ουσίες —είναι εξαιρετικός διαλύτης. Τούτο οφείλεται στην ιδιόμορφη κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου και των ατόμων στο μόριο του νερού. Πολλές ενώσεις αποτελούνται από ιόντα. Το χλωριούχο νάτριο, για παράδειγμα, είναι κρυσταλλικό υλικό που συνίσταται από θετικά ιόντα νατρίου και αρνητικά ιόντα χλωρίου. Στη στερεά κατάσταση, λοιπόν, κάθε θετικό ιόν του περιβάλλεται από αρνητικά ιόντα και κάθε

αρνητικό από θετικά. Το νερό, ωστόσο, με το σύστημα των αρνητικών και θετικών φορτίων που διαθέτει, μπορεί να μιμηθεί τη δράση και των δύο τύπων ιόντων. Έτσι, όταν ένας κρύσταλλος χλωριούχου νατρίου βρεθεί μέσα στο νερό, τα ιόντα του νατρίου καταλήγουν να περιβάλλονται από μόρια νερού με τα αρνητικά φορτισμένα άτομα οξυγόνου στραμμένα προς το μέρος τους, και κατ' αυτό τον τρόπο μιμούνται τα ιόντα χλωρίου. Αντίστοιχα, τα ιόντα χλωρίου περιβάλλονται από τα θετικά φορτισμένα άτομα υδρογόνου των μορίων του νερού, τα οποία κατ' αυτό τον τρόπο μιμούνται τη δράση των ιόντων του νατρίου στον αρχικό κρύσταλλο. Κάθε είδος ιόντος «παραπλανάται» τα ιόντα του νατρίου κινούνται περιτριγυρισμένα από μόρια νερού που μιμούνται τα ιόντα χλωρίου, και τα ιόντα χλωρίου κινούνται περιτριγυρισμένα από μόρια νερού που χρησιμοποιούν τα άτομα υδρογόνου για να μιμηθούν τα ιόντα νατρίου!

Από την προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει και η ικανότητα του νερού να «λαξεύει» τα πετρώματα. Επίσης, να μεταφέρει τα θρεπτικά συστατικά μέσω του εδάφους στα φυτά. Το νερό πλημμυρίζει το σώμα μας, και, χάρη στην ικανότητά του να συντηρεί την ελεύθερη μετακίνηση ιόντων και άλλων μορίων τα οποία διαλύει, αποτελεί κατάλληλο περιβάλλον για την ανάπτυξη ζωής.

Το νερό είναι μια πραγματικά ασυνήθιστη ουσία, εντυπωσιακού «φυσικοχημικού διαμετρήματος», παρά την απλούστατη δομή της. Το πλούσιο ρεπερτόριο των συμπεριφορών τούτης της «ισχνής» οντότητας δημιουργεί έναν ολόκληρο μικρόκοσμο της σύγχρονης επιστήμης, που πάντοτε αναζητεί γίγαντες απλότητας. Γι' αυτό, δικαιολογημένα αποτελεί ένα από τα πιο αξιοθαύμαστα χαρακτηριστικά του υπέροχου κόσμου μας.

Ο **Peter Atkins** είναι λέκτορας φυσικοχημείας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης από το 1965, και επισκέπτης καθηγητής σε πλήθος ινστιτούτων ανά τον κόσμο. Είναι πολυγραφότατος. Στα ελληνικά κυκλοφορούν τα βιβλία του *Η Δημιουργία* και *Το Περιοδικό Βασίλειο* (Εκδ. Κάτοπτρο), και *Μοριακή κβαντική μηχανική* (Εκδ. Τροχαλία).

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντιπροσέλλων εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλάντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Kenneth L. Roberts

Αντιπροσέλλων αρχισυντάκτης

Mike Donaldson

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριδα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάμαλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου** -μαθηματικός, **Γιώργος Μαλάμης** -βιολόγος,

Κώστας Σκανδάλης -μαθηματικός, **Αντώνης Βαλαριστός** -μαθηματικός, **Αγγελική Ηλία** -φυσικός,

Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, **Γιώργος Κατσιλιέρης** -φυσικός, **Θεόδωρος Πιερράτος** -φυσικός,

Αθηνά Τσαγκογιώργα -φυσικός και **Αλέκος Μάμαλης** -φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια

Γιώργος Κυριακόπουλος

Τυπογραφικές διορθώσεις

Σπύρος Καράμπαλης

Τυποτεχνική επιμέλεια

Θανάσης Ντούσης

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Υπεύθυνη λογιστηρίου

Μαρία Μάμαλη

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστημών Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση

Δ. Τερπονέρα

Φιλμ, μοντάζ

Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση

Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

Το **Quantum** εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10 και Διφρομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5 και
Πανεπιστημίου), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 9.000 δρχ. για ιδιώτες, 16.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Δεινόσαυροι στον αχυρώνα

Έχει σημασία αν ένας κόσμος τελειώνει μέσα στη σιγή ή με έκρηξη εκκωφαντική;

Stephen Jay Gould

Η ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΜΟΔΑΣ ΑΝΘΕΙ ΣΤΗ-ριζόμενη στην ανάγκη μας να προβάλλουμε κάποια χαρακτηριστικά του εαυτού μας. Για τους ακαδημαϊκούς, που κατά παράδοση περιφρονούν τις επιταγές της μόδας (αν και συχνά επιτηδευμένα), οι πόρτες των γραφείων τους εξυπηρετούν την ίδια ακριβώς ανάγκη. Οι εισοδοί των πανεπιστημιακών δασκάλων είναι στολισμένες με διακηρύξεις των βαθύτερων πεποιθήσεων και των ισχυρότερων δεσμεύσεών τους. Μπορεί ως επαγγελματίες να φημιζόμαστε για τις μακροσκελείς και μεροληπτικές διακηρύξεις μας, ωστόσο στις πόρτες των γραφείων μας αντανakλάται μια ημιότερη προσέγγιση —μέσω του χιούμορ ή του επιγράμματος. Την πρώτη θέση κατέχουν τα σκίτσα (με τον Gary Larson να είναι αδιαφιλονίκητα η «νούμερο ένα» επιλογή για τις επιστημονικές πόρτες), καθώς και σοφές ρήσεις από γκουρού του επαγγέλματος.

Για κάποιο λόγο, δεν μπόρεσα ποτέ να αφήσω τόσο κοντά στην ψυχή μου την εξυπνάδα κάποιου άλλου. Φορώ ολόλευκα μπλουζάκια, αλλά χωρίς στάμπες, και, μολονότι έχω γράψει την εισαγωγή για μία από τις συλλογές του Gary Larson (της σειράς *Far Side*), δεν θα κοσμούσα ποτέ την είσοδο του γραφείου μου με όποια έκφραση της ευφυΐας του. Εντούτοις, έχω κι εγώ μια αγαπημένη ρήση που θα ταίριαζε να ανέβω και στις στέγες να τη βροντοφωνάξω (πόσο μάλλον να την αναρτήσω στην πόρτα μου).

Η αγαπημένη μου ρήση, που φυσικά είναι του Δαρβίνου, απαιτεί κάποιες εξηγήσεις. Η γεωλογία, στα τέλη του 18ου αιώνα, είχε κατακλυστεί από ένα χείμαρρο εκτενών, αλλά κατά

βάση ανόητων, «θεωριών της Γης», δηλαδή εκτεταμένων εικασιών περί των πάντων, που ως επί το πλείστον διατυπώνονταν από επιστήμονες στρογγυλοκαθισμένους στις πολυθρόνες τους. Όταν ιδρύθηκε η Γεωλογική Εταιρεία του Λονδίνου, στις αρχές του 19ου αιώνα, τα ιδρυτικά μέλη της αντέδρασαν ενεργά σ' αυτή την πανθομολογούμενη μάστιγα, απαγορεύοντας ουσιαστικά κάθε θεωρητική συζήτηση κατά τις εργασίες της. Οι γεωλόγοι, αποφάνθηκαν, όφειλαν πρώτα να εξακριβώσουν με άμεσες παρατηρήσεις τα γεγονότα της ιστορίας του πλανήτη μας, και κατόπιν, σε κάποια μελλοντική στιγμή, όταν πλέον θα είχε συγκεντρωθεί επαρκής όγκος πληροφοριών, να προβούν στη διατύπωση θεωριών και εξηγήσεων.

Ο Δαρβίνος, που με τόση οξυδέρ-



κεια αντιλαμβανόταν τι σημαίνει γόνιμη μέθοδος στην επιστήμη, ήταν βαθύτατα πεπεισμένος ότι η θεωρία και η παρατήρηση είναι σιαμαίες αδερφές. Είναι συνυφασμένες και αλληλεπιδρούν διαρκώς· δεν μπορεί κανείς να ασχοληθεί με τη μια ενώ η άλλη μένει στο παρασκήνιο. Σε μια επιστολή του προς τον Henry Fawcett, το 1861, ο Δαρβίνος εξέθεσε τις απόψεις του για την εσφαλμένη οπτική που είχαν υιοθετήσει οι προγενέστεροι γεωλόγοι, σκιαγραφώντας παράλληλα τη δική του αντίληψη περί ορθής επιστημονικής μεθόδου με την καλύτερη επιγραμματική φράση που διάβασα ποτέ. Η τελευταία πρόταση είναι ανεξίτηλα εντυπωμένη στην είσοδο της ψυχής μου.

Περίπου πριν από τριάντα χρόνια γινόταν πολλή συζήτηση για το ότι οι γεωλόγοι οφείλουν μόνο να παρατηρούν και όχι να διατυπώνουν θεωρίες· και θυμάμαι κάποιον που είπε ότι, με αυτή τη λογική, θα μπορούσε κανείς να κατέβει σε μια τάφο με κροκάλες, να τις καταμετρήσει και να περιγράψει τα χρώματά τους. Πόσο παράξενο είναι να μην αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε παρατήρηση, για να έχει οποιαδήποτε χρησιμότητα, οφείλει να στηρίζει ή να αντικρούει κάποια άποψη!

Η σημασία αυτής της παρατήρησης θα έπρεπε να είναι προφανής. Σύμφωνα με ένα διάσημο ευφυολόγημα του Immanuel Kant, οι έννοιες είναι κενές χωρίς την εμπειρία, ενώ η εμπειρία είναι τυφλή χωρίς τις έννοιες. Ο κόσμος είναι τόσο περίπλοκος· γιατί θα έπρεπε να πασχίζουμε να τον κατανοήσουμε χρησιμοποιώντας μόνο τα μισά από τα εργαλεία μας; Ας αφήσουμε τη νόησή μας να παίξει με τις ιδέες, τις αισθήσεις μας να συλλέξουν πληροφορίες, και την πλούσια, γόνιμη αλληλεπίδραση αυτών των δύο να αναπτυχθεί όπως της αρμόζει (διότι ο νους επεξεργάζεται όσα συλλέγουν οι αισθήσεις, ενώ ένας ασώματος εγκέφαλος, στερημένος από την εισροή πληροφοριών, θα ήταν πράγματι ένα όργανο αξιοθρήνητο).

Παρ' όλα αυτά, οι επιστήμονες εκδηλώνουν μια παράδοξη προτίμηση να τονίζουν το γεγονός εις βάρος της θεωρίας, την εμπειρία εις βάρος της έννοιας —και ο Δαρβίνος έγραψε στον Fawcett για να καταρρίψει αυτή

την παράδοξη, πλην όμως κραταιά, μυθολογία. Οι επιστήμονες συχνά πασχίζουν για μια ιδιαίτερη κατάσταση αξιωνότητας μια μοναδική μορφή αντικειμενικότητας, εγγενούς στη διαδικασία η οποία υποτίθεται ότι έχει καθολική ισχύ και ονομάζεται επιστημονική μέθοδος. Επιτυγχάνουμε την εν λόγω αντικειμενικότητα καθαρίζοντας το μυαλό μας από κάθε προκατάληψη, και κατόπιν παρατηρώντας απλώς, απελευθερωμένοι και ανεπηρέαστοι, ό,τι μας παρουσιάζει η φύση. Αυτή η εικόνα μπορεί να είναι δελεαστική, αλλά η αξίωση των επιστημόνων είναι χιμαιρική, και εν τέλει υπεροπτική και διχαστική. Διότι ο μύθος της καθαρής, ανεπηρέαστης αντίληψης τοποθετεί τον επιστήμονα σ' ένα βάθρο, ψηλότερα από όλους τους υπόλοιπους μαχόμενους στοχαστές, που αναγκάζονται να παραμείνουν εγκλωβισμένοι στους περιορισμούς της κουλτούρας και της ιδιοσυγκρασίας.

Τελικά, οι οπαδοί αυτού του μύθου βλάπτουν και περιορίζουν τους εαυτούς τους, αφού η τεράστια πολυπλοκότητα του κόσμου δεν μπορεί να γίνει κατανοητή ή να μπει σε κάποια τάξη χωρίς τις έννοιες. «Κάθε παρατήρηση, για να έχει οποιαδήποτε χρησιμότητα, οφείλει να στηρίζει ή να αντικρούει κάποια άποψη!» Αντικειμενικότητα δεν σημαίνει ανέφικτη κένωση του νου μας, αλλά προθυμία να εγκαταλείψουμε ένα σύνολο προτιμήσεων όταν ο κόσμος φαίνεται πως λειτουργεί κατά τρόπο αντίθετο.

Αυτή η δαρβινική ιδέα της απαραίτητης αλληλεπίδρασης ανάμεσα στη θεωρία και την παρατήρηση ενισχύεται σημαντικά αν αναλογιστούμε ποια είναι η καθιερωμένη αντίληψη ενός επιστήμονα για την αξία των καινοφανών θεωριών. Βέβαια, τις λατρεύουμε για τους συνηθισμένους «μειζόνες» λόγους —διότι αλλάζουν την ερμηνεία μας για τον κόσμο και μας οδηγούν να διευθετήσουμε τα πράγματα διαφορετικά. Αν ρωτήσετε όμως οποιονδήποτε ενεργό επιστήμονα, το πιθανότερο είναι να σας δώσει έναν διαφορετικό κύριο λόγο, διότι οι λεπτομέρειες και οι ρυθμοί της καθημερινής του εργασίας τον απορροφούν —δεν κάθεται και πολύ συχνά να στοχαστεί για τα ουσιώδη. Λατρεύου-

με τις καινοφανείς θεωρίες διότι προτείνουν νέους, διαφορετικούς και προσιτούς τρόπους να κάνουμε παρατηρήσεις. Θέτοντας νέα ερωτήματα, διευρύνουν το φάσμα της συνηθισμένης μας δραστηριότητας. Οι θεωρίες μας ωθούν να αναζητήσουμε νέες πληροφορίες, οι οποίες αποκτούν σπουδαιότητα ως δεδομένα μόνο όταν χρησιμοποιούνται για να στηρίξουν ή να αντικρούσουν μια επίμαχη ιδέα. Τα δεδομένα κρίνουν τη θεωρία, αλλά και η θεωρία από τη μεριά της καθοδηγεί και εμπνέει την αναζήτηση δεδομένων. Είχαν δίκιο τόσο ο Δαρβίνος όσο και ο Kant.

Το πρόβλημα των μαζικών εξαφανίσεων



Ο λόγος για τον οποίο ανέφερα αυτή τη ρήση του Δαρβίνου, την αγαπημένη μου, είναι το γεγονός ότι ο κλάδος μου, η παλαιοντολογία, έγινε πρόσφατα μάρτυρας ενός λαμπρού παραδείγματος επιβεβαίωσης της θεωρίας από δεδομένα τα οποία ουδείς είχε σκεφτεί ποτέ να συλλέξει προτού η ίδια η θεωρία καταστήσει απαραίτητο έναν τέτοιο έλεγχο. (Προσέξτε, παρακαλώ, τη θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα στο να απαιτείται έλεγχος και στο να παρέχεται εγγύηση για το αποτέλεσμα. Ο έλεγχος θα μπορούσε κάλλιστα να έχει αποτύχει, καταδικάζοντας έτσι τη θεωρία. Οι καλές θεωρίες μας προκαλούν να τις ελέγξουμε, αλλά δεν προκαθορίζουν και το αποτέλεσμα. Στην προκειμένη περίπτωση, ο έλεγχος παρέσχε θετικά αποτελέσματα δύο φορές, ενισχύοντας τη θεωρία.) Η ειρωνεία είναι πως αυτή η συγκεκριμένη νέα θεωρία αποτελεί ανάθεμα για τον ίδιο τον Δαρβίνο, αλλά είμαι βέβαιος πως ένας τόσο καλοπροαίρετος και μεγαλόψυχος άνθρωπος θα δεχόταν πρόθυμα να υποστεί τούτο το αρχικό πλήγμα, με αντάλλαγμα, αφ' ενός, μια τόσο λαμπρή απόδειξη της γενικότερης άποψής του για τη θεωρία και την παρατήρηση, και, αφ' ετέρου, τον ενθουσιασμό που γεννάει κάθε ιδέα τόσο πλούσια σε συναρπαστικές συνέπειες.

Ήδη από την αυγή της σύγχρονης παλαιοντολογίας γνωρίζουμε ότι σύ-

ντομες περίοδοι γεωλογικού χρόνου χαρακτηρίζονται από εξαφανίσεις σημαντικού ποσοστού μορφών ζωής —σχεδόν το 96% των θαλάσσιων ειδών ασπονδύλων εξαφανίστηκαν κατά τη διάρκεια του σημαντικότερου από όλα τα ανάλογα επεισόδια, κατά την πανωλεθρία στα τέλη του Περμίου, πριν από περίπου 225 εκατομμύρια έτη. Αυτές οι «μαζικές εξαφανίσεις» αρχικά εξηγούνταν, κατά γράμμα και σύμφωνα με τον κοινό νομό, ως προϊόντα καταστροφικών γεγονότων και, επομένως, θεωρούνταν πραγματικά αιφνίδια. Μόλις η δαρβινική ιδέα της βαθμιαίας εξέλιξης αντικατέστησε τον εν λόγω καταστροφισμό, οι παλαιοντολόγοι επιδίωξαν να αμβλύνουν τα στοιχεία μαζικού αφανισμού, υιοθετώντας μια ερμηνεία περισσότερο συγγενή στην προτίμηση του Δαρβίνου για το αργό και σταθερό. Δεν αρνήθηκαν την ύπαρξη περιόδων αυξημένης εξαφάνισης —πώς θα μπορούσαν, άλλωστε, αφού διέθεταν τέτοια αδιάσειστα στοιχεία;—, αλλά τις επανερμήνευσαν θεωρώντας τις περισσότερο εκτεταμένες στο χρόνο και λιγότερο έντονες όσον αφορά τα αποτελέσματά τους: εν ολίγοις, τις ερμήνευσαν μάλλον ως αυξήσεις της έντασης κάποιων συνηθισμένων διαδικασιών, παρά ως τις σπάνιες εμφανίσεις ορισμένων πραγματικών καταστροφών.

Στο έργο του *Origin of Species* (Η προέλευση των ειδών, 1859), ο Δαρβίνος απέρριψε «την παλιά ιδέα ότι όλοι οι κάτοικοι της Γης σαρώθηκαν, σε διαδοχικές περιόδους, από καταστροφές», όπως όφειλε, δεδομένης της αντιεξελικτικής ιδέας που συνεπαγόταν η ακραία αυτή άποψη περί ολικού αφανισμού, δηλαδή μια νέα δημιουργία που θα ξεκινούσε τη ζωή από την αρχή. Αλλά οι προτιμήσεις του Δαρβίνου για βαθμιαία αλλαγή ήταν επίσης ακραίες και λανθασμένες:

Έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε... ότι τα είδη και οι ομάδες ειδών εξαφανίζονται βαθμιαία και διαδοχικά, πρώτα από το ένα σημείο, έπειτα από το άλλο, και τελικά από ολόκληρο τον κόσμο.

Ο ίδιος ο Δαρβίνος αναγκάστηκε να αναγνωρίσει τις προφανείς εξαιρέσεις:

Εντούτοις, σε μερικές περιπτώσεις, η εξόντωση ολόκληρων ομάδων από όντα, όπως των αμμωνιτών προς τα τέλη του Μεσοζωικού αιώνα, ήταν εκπληκτικά αιφνίδια.

Τώρα ερχόμαστε στην κεντρική ειρωνεία που ενέπνευσε αυτό το άρθρο. Ενώσω επικρατούσε η δαρβινική ιδέα της βαθμιαίας αλλαγής στην ερμηνεία των μαζικών εξαφανίσεων, τα παλαιοντολογικά δεδομένα, ερμηνευμένα κατά γράμμα, αδυνατούσαν να διαψεύσουν τη βασική προκειμένη της βαθμιαίας αλλαγής —την «εξάλπωση» των εξαφανίσεων σε μια υπολογίσιμη χρονική περίοδο πριν από το όριο, αντί για μια έντονη συγκέντρωση εξαφανίσεων στο ίδιο το όριο. Διότι το γεωλογικό αρχείο είναι εξαιρετικά ατελές, και μόνο ένα απειροελάχιστο ποσοστό από έμβια όντα καταλήγει να απολιθωθεί. Εξαιτίας αυτής της ατέλειας, ακόμη και μια όντως αιφνίδια και ταυτόχρονη εξαφάνιση πολυάριθμων ειδών θα «καταγραφεί» ως μια περισσότερο βαθμιαία παρακμή στο αρχείο των απολιθωμάτων. Αυτός ο ισχυρισμός ίσως ακούγεται παράδοξος, όμως αναλογιστείτε το επιχείρημα και την περίπτωση που εκτίθεται παρακάτω.

Ορισμένα είδη είναι πολύ κοινά, και διατηρούνται εύκολα ως απολιθώματα· μπορούμε, κατά μέσο όρο, να βρούμε δείγματα σε κάθε εκατοστό των γεωλογικών στρωμάτων. Αλλά είδη, όμως, είναι σπανιότερα και διατηρούνται δυσκολότερα, οπότε υπάρχει πιθανότητα να συναντήσουμε απολιθώματά τους μόνο κάθε 30 μέτρα περίπου. Τώρα, ας υποθέσουμε πως όλα αυτά τα είδη πέθαναν ξαφνικά την ίδια στιγμή, ενώ συντελούνταν η απόθεση 120 μέτρων ιζήματος στην ωκεάνια λεκάνη. Θα περιμέναμε να βρούμε τις αμεσότερες ενδείξεις μιας μαζικής εξαφάνισης, δηλαδή απολιθώματα όλων των ειδών και στα 120 μέτρα ιζήματος ως το ανώτερο των διαδοχικών στρωμάτων; Όχι βέβαια.

Τα κοινά είδη θα απαντούσαν σε όλα τα στρώματα, ως το ανώτερο, αφού, όπως αναμένουμε, θα υπάρχουν απολιθώματά τους σε κάθε εκατοστό ιζήματος. Τα σπανιότερα είδη, όμως, ακόμη κι αν είχαν ζήσει ως το τέλος, δεν θα συνέβαλλαν παρά μόνο με ένα απολιθώμα κάθε 30 μέτρα περίπου.

Με άλλα λόγια, ένα σπάνιο είδος μπορεί να είχε ζήσει καθ' όλη τη διάρκεια της απόθεσης των 120 μέτρων ιζήματος, αλλά το τελευταίο απολιθώμα να είχε καταχωθεί 30 μέτρα κάτω από το ανώτερο όριο. Θα μπορούσαμε τότε να υποθέσουμε εσφαλμένα πως αυτό το σπάνιο είδος εξαφανίστηκε με την πάροδο των δύο τρίτων του συνολικού χρόνου.

Γενικεύοντας αυτό το επιχείρημα, μπορούμε να συμπεράνουμε πως όσο σπανιότερο είναι το είδος, τόσο πιθανότερο είναι το τελευταίο απολιθώμα του να εμφανιστεί σε παλαιότερα ιζήματα, ακόμη κι αν το είδος στην πραγματικότητα έζησε ως το ανώτερο όριο. Αν όλα τα είδη πέθαναν διαμιάς, θα βρούμε και πάλι μια κλιμακωτή και φαινομενικά βαθμιαία αλληλουχία εξαφανίσεων, με τα σπανιότερα είδη να εξαφανίζονται πρώτα, και τις περισσότερο κοινές μορφές να επιμένουν ως απολιθώματα μέχρι το ανώτερο όριο. Αυτό το φαινόμενο —ένα κλασικό παράδειγμα εκείνης της παλιάς αρχής, σύμφωνα με την οποία τα πράγματα σπάνια είναι έτσι όπως φαίνονται, και πως το φαινομενικό συχνά συσκοτίζει την πραγματικότητα— έχει το δικό του όνομα: λέγεται φαινόμενο Signor-Lipps, προς τιμήν δύο φίλων μου παλαιοντολόγων, των Phil Signor και Jere Lipps, που πρώτοι επεξεργάστηκαν τις μαθηματικές λεπτομέρειες του τρόπου με τον οποίο μια κατά τα φαινόμενα βαθμιαία εξαφάνιση μπορεί να αντιστοιχεί σ' έναν πραγματικά αιφνίδιο και ταυτόχρονο αφανισμό.

Η υπόθεση Alvarez



Μπορούμε τώρα να συναισθανθούμε την ισχύ του επιχειρήματος του Δαρβίνου για την αναγκαιότητα ύπαρξης θεωριών που να καθοδηγούν τις παρατηρήσεις. Διατεινόμαστε, στο πλαίσιο της μυθολογίας μας, πως οι παλιές θεωρίες πεθαίνουν όταν κάποιες νέες παρατηρήσεις τις κλονίζουν. Εντούτοις, πολύ συχνά, και μάλιστα κατά κανόνα, θα έλεγα, οι θεωρίες δρουν σαν «ζουρλομανδύες» που υποχρεώνουν τις παρατηρήσεις να τις υποστηρίξουν και να αποκαλύψουν δεδομένα, τα οποία, όμως, ίσως και να τις

ανατρέψουν. Τέτοιες θεωρίες δεν μπορούν να απορριφθούν εκ των έσω, διότι δεν μπορούμε να αντιληφθούμε τις παρατηρήσεις που πιθανώς θα τις κατέρριπταν. Αν δεχτούμε τη δαρβινική βαθμιαία αλλαγή στις μαζικές εξαφανίσεις, και επομένως δεν αντιληφθούμε ποτέ ότι μια βαθμιδωτή σειρά εξαφανίσεων απολιθωμάτων θα μπορούσε, μέσω του φαινομένου Signor-Lipps, να αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα έναν αιφνίδιο πλήρη αφανισμό, πώς θα φτάσουμε ποτέ να εξετάσουμε την εναλλακτική υπόθεση μιας καταστροφής; Θα είμαστε αυτάρεσκα ικανοποιημένοι με την ιδέα ότι έχουμε αδιάσειστα στοιχεία που αποδεικνύουν τη βαθμιαία μείωση στο πλήθος των ειδών.

Σ' αυτό το εννοιολογικό πλαίσιο, οι νέες θεωρίες αποτελούν ό,τι οι ζουρλομανδύες για τον Χουντίνι. Δραπετεύουμε εισάγοντας μια νέα θεωρία και πραγματοποιώντας τις διαφορών ειδών παρατηρήσεις που οφείλει να προτείνει οποιαδήποτε καινοτόμος θεώρηση. Διότι «κάθε παρατήρηση, για να έχει οποιαδήποτε χρησιμότητα, οφείλει να στηρίζει ή να αντικρούει κάποια άποψη», και συνεπώς μια νέα άποψη μπορεί να γεννήσει πρωτότυπες παρατηρήσεις. Δεν προβάλλω κάποιο αφηρημένο επιχείρημα, ούτε επιθυμώ απλώς να παινέσω το αγαπημένο μου δαρβινικό απόφθεγμα. Σχετικά πρόσφατα, δύο υπέροχα παραδείγματα που μεταφέρουν το ίδιο μήνυμα δημοσιεύτηκαν από δύο στενότερους συνεργάτες μου: πρόκειται για μελέτες με αντικείμενο τους αμμωνίτες και τους δεινοσαύρους κατά την τελευταία μεγάλη εξαφάνιση.

Οποιοσδήποτε φροντίζει να ενημερώνεται για τις αναφορές στον τύπο σχετικά με τα πιο καυτά ζητήματα της επιστήμης γνωρίζει πως μια νέα θεωρία καταστροφής για τη μαζική εξαφάνιση φώτισε τον κόσμο της παλαιοντολογίας (και λάμπρυνε το εξώφυλλο του περιοδικού *Time*) κατά την περασμένη δεκαετία. Το 1980, η ομάδα —πατέρα και γιου (φυσικού και γεωλόγου, αντίστοιχα)— των Luis και Walter Alvarez δημοσίευσε, σε συνεργασία με τους Frank Asaro και Helen Michel, την άποψη (και τα δεδομένα που την υποστήριζαν) σύμφωνα με την οποία η πρόσκρουση στη

Γη ενός σώματος από το Διάστημα, αστεροειδούς ή κομήτη, αποτέλεσε την αιτία της πιο πρόσφατης από τις μεγάλες μαζικές εξαφανίσεις, η οποία συνέβη κατά το όριο Κρητιδικού-Τριτογενούς, οπότε εξαφανίστηκαν οι δεινόσαυροι μαζί με το 50% περίπου των θαλάσσιων ειδών ασπονδύλων.

Αυτή η πρόταση οδήγησε σε μια σφοδρή διαμάχη που δεν μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά σε μία σελίδα, ούτε καν σε ένα άρθρο ή ακόμη και σε ένα βιβλίο. Εντούτοις, θεωρώ δίκαιο να επισημάνω ότι η συγκεκριμένη ιδέα της πρόσκρουσης ενός σώματος από το Διάστημα αντιμετώπισε επιτυχέστατα τη θύελλα που προκάλεσε, αυξάνοντας συνεχώς την ισχύ της και τα στοιχεία που την υποστήριζαν. Στην παρούσα φάση, ελάχιστοι επιστήμονες αρνούνται ότι συνέβη μια πρόσκρουση, και η διαμάχη, κατά μεγάλο μέρος, έχει μετατοπιστεί στο ερώτημα αν η πρόσκρουση προκάλεσε την εξαφάνιση στο σύνολό της (ή αν λειτούργησε απλώς ως η χαριστική βολή σε μια διαδικασία που ήδη εκτυλισσόταν) και αν είναι πιθανό κάποιες άλλες μαζικές εξαφανίσεις να είχαν παρόμοια αιτία.

Νέες μορφές στοιχείων που υποστηρίζουν την παραπάνω άποψη έχουν δημοσιευτεί σε πολλά τεύχη των εγκυρότερων επιστημονικών περιοδικών. Τις τελευταίες εβδομάδες πληροφορηθήκαμε για την ύπαρξη μικροσκοπικών διαμαντιών σε ιζήματα που ανάγονται χρονικά στο όριο της πρόσκρουσης. Τα διαμάντια είναι μια μορφή καθαρού άνθρακα που σχηματίζεται σε συνθήκες κολοσσικών πιέσεων, τις οποίες μόνο τέτοιες προσκρούσεις μπορούν να παραγάγουν —και καμία άλλη γνωστή ενεργός διαδικασία στην επιφάνεια της Γης. Αυτή η ανακάλυψη θυμίζει το «Lucy in the Sky with Diamonds», το κλασικό τραγούδι των Beatles. Lucy κατά κυριολεξία σημαίνει φως, και σίγουρα ήταν τρομερή η έκρηξη που συνόδευσε την πρόσκρουση. Επιπλέον, τα «ίχνη του εγκλήματος» είναι πιθανό να έχουν πλέον εντοπιστεί —ίσως πρόκειται για έναν ογκώδη κρατήρα στον Κόλπο του Μεξικού, πέρα από τη Χερσόνησο Γιουκατάν.

Η αντίδραση των παλαιοντολόγων, με ελάχιστες εξαιρέσεις, υπήρξε του-

λάχιστον αρνητική, και ο Luis Alvarez, ένα ζωντανό μοντέλο της στερεότυπης εικόνας ενός φυσικού με αυτοπεποίθηση, έγινε έξω φρενών. Εκ των υστέρων αποδείχτηκε ότι ο Luis είχε δίκιο ως επί το πλείστον, οπότε συγχωρώ τις επιθέσεις του ενάντια στον επιστημονικό μου κλάδο. Εγώ, αν μου επιτρέπεται λίγο να παινευτώ, ήμουν ανάμεσα στους λίγους αρχικούς υποστηρικτές του, όμως όχι για τους σωστούς λόγους, δηλαδή επειδή μπορούσα να κατανοήσω καλύτερα τα στοιχεία. Απλά, η καταστροφική εξαφάνιση ταίριαζε με την ιδιοσυγκρασιακή προτίμησή μου για ταχείες εξελίξεις, που γεννήθηκε από τη διαμάχη περί εστιγμένης ισορροπίας.* Άλλωστε, οι συνάδελφοί μου υποστήριζαν επί έναν αιώνα τη δαρβινική ιδέα της βαθμιαίας αλλαγής, και το αρχείο των απολιθωμάτων, αν το ερμήνευε κανείς κατά γράμμα, φαινόταν να υποδηλώνει μια σταδιακή εξαφάνιση των περισσότερων ομάδων πριν από το όριο. Πώς θα μπορούσε μια πρόσκρουση να προκαλέσει την εξαφάνιση, αν τα περισσότερα είδη είχαν ήδη εξαλειφθεί; Ωστόσο, η υπόθεση της πρόσκρουσης σύντομα απέδειξε περίτρανα το σφρίγος της: με βάση το κριτήριο του Δαρβίνου, δηλαδή ωθώντας σε νέες παρατηρήσεις, που κανένας δεν είχε σκεφτεί να πραγματοποιήσει υπό το καθεστώς των προγενέστερων απόψεων. Εν ολίγοις, η θεωρία προκάλεσε και παρήγαγε τον ίδιο τον έλεγχό της, και ελευθερώθηκε από το ζουρλομανδύα της προγενέστερης βεβαιότητας.

Ψάχνοντας σε κάθε γωνιά του αχυρώνα



Βέβαια, οι συνάδελφοί μου έδειξαν αποκάλυπτα την αποστροφή τους για την υπόθεση Alvarez' ωστόσο αποτελούμε μια έντιμη ομάδα, και κα-

* Θεωρία της εξέλιξης που διατυπώθηκε τη δεκαετία του 1970 από τους Eldredge και Gould σύμφωνα με αυτή, η εξέλιξη δεν είναι βαθμιαία, όπως υποστήριζε ο Δαρβίνος, αλλά, αντίθετα, αποτελεί ένα πρότυπο μικρών αλλαγών για μεγάλες χρονικές περιόδους, που διακόπτεται από σύντομες —για τα γεωλογικά μέτρα— περιόδους ταχύτερων αλλαγών, κατά τις οποίες συντελείται η ειδογένεση. (Σ.τ.μ.)

θώς η διαμάχη εντεινόταν και συσσωρεύονταν στοιχεία τα οποία εννοούσαν τη συγκεκριμένη υπόθεση, οι παλαιοντολόγοι υποχρεώθηκαν να ξαναδούν με άλλο μάτι τις προηγούμενες πεποιθήσεις τους. Μπορούν να πραγματοποιηθούν πολλά νέα είδη παρατηρήσεων, όμως ας επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στο απλούστερο, προφανέστερο και αμεσότερο παράδειγμα. Υπό το φως του νέου γοήτρου που απέκτησε η θεωρία της πρόσκρουσης και αιφνίδιας εξολοθρευσης, το φαινόμενο Signor-Lipps άρχισε να γίνεται πλήρως αντιληπτό, και οι παλαιοντολόγοι κατάλαβαν πως οι εξολοθρεύσεις μέσω καταστροφής είναι δυνατόν να καταγραφούν ως σταδιακές παρακμές στο αρχείο των απολιθωμάτων.

Τότε, όμως, πώς υπερβαίνουμε το αδιέξοδο που προκύπτει από την αινιγματική και ευρύτατη παρουσία ενδείξεων σταδιακής εξαφάνισης; Έχουν προταθεί και εφαρμοστεί πολλές μέθοδοι, ορισμένες από τις οποίες είναι μάλλον εξεζητημένες και κατά βάση μαθηματικές· αλλά γιατί να μην ξεκινήσουμε με την αμεσότερη προσέγγιση; Αν τα σπάνια είδη όντως έζησαν ως το όριο της πρόσκρουσης αλλά δεν έχουν ακόμη «καταγραφεί» στα ανώτατα στρώματα του αρχείου, γιατί να μην ερευνήσουμε εντατικότερα; Η αναλογία με τη γνωστή παροιμία είναι προφανής: Αν ψάξω για μία και μοναδική βελόνα μέσα στον αχυρώνα παίρνοντας για δείγμα μια αγκαλιά άχυρου, έχω ελάχιστες πιθανότητες να την εντοπίσω. Αλλά αν ψάξω διεξοδικά ολόκληρη τη θημωνιά, κάθε σπιθαμή με τη σειρά, δεν μπορεί παρά να την ανακαλύψω. Ομοίως, αν ερευνήσω εξονυχιστικά κάθε εκατοστό ιζήματος σε κάθε γνωστή τοποθεσία, υπάρχει πιθανότητα να βρω τελικά και το σπανιότερο είδος κοντά στο όριο —αν όντως επιβίωσε ως τότε.

Όλα αυτά φαίνονται μάλλον πρόδηλα. Δεν θέλω να υποστηρίξω ότι μια τέτοια προσέγγιση ήταν αδιανόητη πριν από την υπόθεση Alvarez. Δεν μπορώ να ισχυριστώ ότι οι εννοιολογικές παρωπίδες της βαθμιαίας αλλαγής κατέστησαν αδύνατον ακόμη και το να διανοηθεί κανείς να ψάξει ολόκληρη τη θημωνιά, αντί να προβαίνει

σε δειγματοληψίες. Αλλά αυτό το παράδειγμα γίνεται τόσο γοητευτικό ακριβώς επειδή είναι εντελώς πεζό. Θα μπορούσα να παραθέσω πολλές φανταχτερές περιπτώσεις καινοτόμων θεωριών που αποκαλύπτουν πρωτόγνωρους κόσμους παρατηρήσεων: αναλογιστείτε το τηλεσκόπιο του Γαλιλαίου και όλα τα απίθανα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν χάρη σ' αυτό. Στην προκειμένη περίπτωση, η θεωρία Alvarez δεν πρότεινε τίποτε άλλο από σκληρή δουλειά.

Γιατί, λοιπόν, δεν είχε καταβληθεί προηγουμένως αυτή η προσπάθεια; Εμείς οι παλαιοντολόγοι είμαστε φιλόπονοι. Μπορεί να έχουμε μπόλικα ελαττώματα, αλλά η τεμπελιά στο πεδίο δεν συγκαταλέγεται ανάμεσά τους. Μας ευχαριστεί αφάνταστα το να βρίσκουμε απολιθώματα· αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι περισσότεροι από μας ακολουθήσαμε σε πρώτη φάση τον συγκεκριμένο κλάδο. Δεν διερευνήσαμε εξονυχιστικά κάθε εκατοστό ιζήματος για τον βασικότερο επιστημονικό λόγο: Η ζωή είναι σύντομη και ο κόσμος τεράστιος· δεν μπορείς να σπαταλήσεις όλη σου τη σταδιοδρομία μέσα σ' ένα φαράγγι. Η ουσία της επιστήμης είναι η ευφυής δειγματοληψία· όχι το να παραμείνεις σε ένα συγκεκριμένο μέρος και να μοχθείς να συλλέξεις ως και το τελευταίο δείγμα. Υπό την επήρεια της δαρβινικής βαθμιαίας αλλαγής, η ευφυής δειγματοληψία ακολουθούσε τη συνηθισμένη μέθοδο της εξέτασης λιγοστών ποσοτήτων σανού από τον αχυρώνα. Τα αποτελέσματα που προέκυπταν συμφωνούσαν άριστα με τις προσδοκίες της θεωρίας εξασφαλίζοντας την ικανοποίησή μας στο εννοιολογικό επίπεδο (εκ των υστέρων, θα μπορούσαμε να τη χαρακτηρίσουμε «οκνηρία»). Τίποτε δεν ωθούσε τους παλαιοντολόγους να ακολουθήσουν την πολύ πιο επίπονη μέθοδο του «ψαξίματος ολόκληρης της θημωνιάς ως το τελευταίο άχυρο», μιας αρκετά ανορθόδοξης προσέγγισης στην επιστήμη. Θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί κατ' αυτό τον τρόπο, αλλά δεν το κάναμε —δεν είχαμε κανένα λόγο. Η θεωρία Alvarez κατέστησε απαραίτητη τούτη την ασυνήθιστη προσέγγιση. Μας ανάγκασε να δούμε τα πράγματα από διαφορετική σκο-

πιά. «Κάθε παρατήρηση, για να έχει οποιαδήποτε χρησιμότητα, οφείλει να στηρίζει ή να αντικρούει κάποια άποψη!»

Αναλογιστείτε δύο εξέχοντα παραδείγματα —τις πιο γνωστές θαλάσσιες και χερσαίες ομάδες οι οποίες χάθηκαν με την εξαφάνιση που συνέβη κατά το όριο Κρητιδικού-Τριτογενούς: τους αμμωνίτες και τους δεινοσαύρους. Και οι δύο ήταν από τα κύρια παραδείγματα που προβάλλονταν για να υποστηριχτεί η βαθμιαία εξαφάνιση προς το όριο. Σε κάθε περίπτωση, η υπόθεση Alvarez παρακίνησε τους ειδικούς να προβούν σε εντατικότερη έρευνα, με τη μέθοδο του «ψαξίματος ολόκληρης της θημωνιάς», και σε κάθε περίπτωση αυτός ο λεπτομερέστερος έλεγχος παρέσχε στοιχεία που μαρτυρούσαν την επιβίωση ως το όριο και την πιθανότητα θανάτου από καταστροφή.

Αμμωνίτες στον Αρμαγεδώνα...



Οι αμμωνίτες είναι κεφαλόποδα (μαλάκια που ταξινομούνται στην ίδια ομάδα με τα καλαμάρια και τα χταπόδια)

με περιελιγμένα, σπειροειδή εξωτερικά κελύφη, που μοιάζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό με το κέλυφος του στενότερου εν ζωή συγγενή τους, του θαλαμωτού ναυτίλου. Αποτελούσαν μια σημαντική και συχνά κυρίαρχη ομάδα θαλάσσιων θηρευτών, και τα όμορφα απολιθωμένα κελύφη τους έχαιραν πάντοτε ιδιαίτερης εκτίμησης από τους συλλέκτες. Εμφανίστηκαν κατά τα μέσα του Παλαιοζωικού αιώνα και, πριν από την οριστική εξαφάνισή τους, κινδύνευσαν να εκλείψουν άλλες δύο φορές —σε δύο προγενέστερους μαζικούς αφανισμούς, κατά τα τέλη του Περμίου και του Τριασικού. Αλλά μία ή δύο γενεαλογικές γραμμές κατάφερναν κάθε φορά να ξεγλιστρούν. Εντούτοις, στο όριο Κρητιδικού-Τριτογενούς, όλες οι γενεαλογικές γραμμές «υπέκυψαν» και, για να μνημονεύσουμε ένα στίχο του Wordsworth που γράφτηκε για διαφορετικό λόγο, τότε «εγκατέλειψαν με λαμπρότητα τα εγκόσμια».

Ο φίλος και συνάδελφος μου Peter Ward, παλαιοντολόγος από το Πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον, είναι ένας

από τους παγκοσμίως αναγνωρισμένους ειδικούς στο θέμα της εξαφάνισης των αμμωνιτών· είναι άνθρωπος δραστήριος, ταγμένος στην έρευνα, και λατρεύει τη δουλειά στο πεδίο —δεν θα μπορούσε ποτέ να κατηγορηθεί για νωθρότητα στην αναζήτηση απολιθωμάτων. Αρχικά, ο Peter δεν είχε δείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρία Alvarez, κυρίως διότι οι αμμωνίτες του φαίνονταν να έχουν εκλείψει σταδιακά, και εξαφανίζονταν ολοσχερώς περίπου δέκα μέτρα κάτω από το όριο στην αγαπημένη του τοποθεσία, τους απότομους βράχους της Θουμάγια στον Βισκαϊκό Κόλπο στην Ισπανία. Το 1983 ο Peter έγραψε ένα άρθρο στο *Scientific American*, με τίτλο «Η εξαφάνιση των αμμωνιτών». Εξέφραζε την αντίθεσή του στη θεωρία Alvarez, που τότε ακόμη ήταν πολύ πρόσφατη και αμφιλεγόμενη, τουλάχιστον ως εξήγηση για το θάνατο των αμμωνιτών:

Ωστόσο, το αρχείο των απολιθωμάτων υποδηλώνει ότι η εξαφάνιση των αμμωνιτών δεν ήταν συνέπεια της συγκεκριμένης καταστροφής, αλλά σαρωτικών αλλαγών στο θαλάσσιο οικοσύστημα του ύστερου Κρητιδικού... Μελέτες των απολιθωμάτων από τις στρωματογραφικές τομές στη Θουμάγια, στην Ισπανία, υποδηλώνουν ότι οι αμμωνίτες είχαν εξαφανιστεί προ πολλού όταν συνέβη η προτεινόμενη πρόσκρουση του μετεωρίτη.

Αλλά ο Peter, όντας ένας από τους ευφυέστερους και εντιμότερους ανθρώπους που γνωρίζω, παραδέχτηκε επίσης τα όρια που έχουν τέτοιες «αρνητικές ενδείξεις». Ένα συμπέρασμα που βασίζεται στο γεγονός ότι δεν βρίσκουμε κάτι διαθέτει το μεγάλο πλεονέκτημα της δύναμει κατηγορηματικής διάψευσης. Ο Peter έγραψε: «Αυτές οι ενδείξεις είναι αρνητικές, και θα μπορούσαν να ανατραπούν με την εύρεση ενός και μόνο δείγματος αμμωνίτη».

Αν δεν υπήρχε η υπόθεση της πρόσκρουσης, ο Peter δεν θα είχε κάτι που να τον παρακινήσει να ερευνήσει επιμελέστερα αυτά τα άνω δέκα μέτρα της τομής. Οι εξαφανίσεις υποτίθεται πως ήταν βαθμιαίες, και φαινόταν απολύτως εύλογο να λείπουν οι αμμωνίτες από αυτά τα δέκα μέτρα· συνεπώς, προς τι να πραγματοποιη-

θεί περαιτέρω έρευνα; Ωστόσο, η υπόθεση της πρόσκρουσης, που προέβλεπε σαφώς την επιβίωση αμμωνιτών μέχρι το ίδιο το όριο, απαιτούσε εξαντλητική έρευνα σ' αυτή τη «δεκάμετρη θημωνιά». Μέχρι το 1986, ο Peter επέμενε να κηρύττει τη διαδοχική εξαφάνιση: «Οι αμμωνίτες... φαίνεται πως εξαφανίστηκαν σ' αυτή τη λεκάνη αρκετά νωρίτερα από το όριο *K/T* (Κρητιδικού-Τριτογενούς), στοιχείο που ενισχύει μια θεώρηση των εξαφανίσεων *K/T* με βάση τη βαθμιαία αλλαγή» (*Palaios*, τόμ. 1, σελ. 87-92).

Εντούτοις, ο Peter και οι συνεργάτες του, εμπνευσμένοι από τον Alvarez (έστω και με την κρυφή σκέψη να αναιρέσουν την υπόθεση της πρόσκρουσης), επιδόθηκαν σε μια διεξοδική έρευνα της θημωνιάς: «Το μέρος της τομής του Κρητιδικού που απέμενε, αποκαλύφθηκε πλήρως και ερευνήθηκε εξονυχιστικά». Εν τέλει, αργότερα, το 1986, βρήκαν ένα μοναδικό δείγμα μόλις ένα μέτρο κάτω από το όριο. Είχε συνθλιβεί, και δεν μπορούσαν να πουν με βεβαιότητα αν επρόκειτο για αμμωνίτη ή για ναυτιλοειδές· ωστόσο, το δείγμα κατέστησε πεστική την ανάγκη για ακόμη επιμελέστερη έρευνα. (Αφού τα ναυτιλοειδή προφανώς επέζησαν της καταστροφής —ο θαλαμωτός ναυτίλος εξακολουθεί να υπάρχει και σήμερα—, ένα απολιθωμά τους ακριβώς στο όριο δεν θα προκαλούσε έκπληξη.)

Ο Peter ξεκίνησε μια πολύ εντατικότερη έρευνα το 1987, και τελικά οι αμμωνίτες άρχισαν να εμφανίζονται —κυρίως δείγματα σε πολύ κακή κατάσταση, και αυτά σπανίως, αλλά σαφώς παρόντα ως το όριο. Ο Peter γράφει σ' ένα βιβλίο του που εκδόθηκε το 1992:

Τελικά, μια βροχερή μέρα, ανακάλυψα ένα θραύσμα αμμωνίτη ελάχιστα εκατοστά από το στρώμα αργίλου που σημάδευε το όριο. Σιγά σιγά, με την πάροδο των ετών, βρέθηκαν πολλά ακόμη στα υψηλότερα επίπεδα των στρωμάτων του Κρητιδικού στη Θουμάγια. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι αμμωνίτες ήταν παρόντες στον Αρμαγεδώνα.

Το επόμενο βήμα του Peter ήταν το προφανέστερο που μπορούσε να κάνει: έψαξε και αλλού. Η Θουμάγια είχε αμμωνίτες ως τα ανώτερα επίπε-

δα των στρωμάτων, αλλά όχι σε αφθονία, ίσως για λόγους που σχετίζονταν με το συγκεκριμένο ενδιαίτημα και όχι με την ποσότητά τους σε ολόκληρο τον πλανήτη. Ο Peter είχε ερευνήσει ζώνες δυτικά της Θουμάγια χωρίς να ανακαλύψει αμμωνίτες του ύστερου Κρητιδικού (έναν επιπλέον λόγο για τον οποίο νωρίτερα είχε αποδεχτεί τη βαθμιαία εξαφάνιση). Αλλά τώρα επεξέτεινε την εργασία του προς τα ανατολικά (προς τα σύνορα Ισπανίας και Γαλλίας). (Και πάλι, αυτές οι ανατολικές στρωματογραφικές τομές ήταν ανέκαθεν γνωστές και κατάλληλες για μελέτη, όμως ο Peter χρειαζόταν την «ώθηση του Alvarez» για να θέσει τα σωστά ερωτήματα και να θεωρήσει αναγκαία τη διεξαγωγή περαιτέρω παρατηρήσεων.) Ο Peter μελέτησε δυο νέες τομές, στην Εντάγυ, στα ισπανογαλλικά σύνορα, και στις παραλίες του Μπαρρίτς (τόπο συγκέντρωσης των γιάπηδων), στη Γαλλία. Βρήκε αφθονία αμμωνιτών κάτω ακριβώς από την οριακή γραμμή της μεγάλης εξαφάνισης. Γράφει, λοιπόν, στο βιβλίο του:

Μετά την εμπειρία μου στη Θουμάγια, όπου έτη έρευνας δεν απέδωσαν παρά αμυδρά στοιχεία... κοντά στο όριο Κρητιδικού-Τριτογενούς, ένιωσα πανευτυχής που ανακάλυψα μια πηγή αμμωνιτών στο τελευταίο μέτρο του πετρώματος του Κρητιδικού, μέσα στην πρώτη κιάλας ώρα μου στην Εντάγυ.

...αλλά και δεινόσαυροι



Εμείς οι επαγγελματίες μπορεί να ενδιαφερόμαστε περισσότερο για τους αμμωνίτες, όμως οι δεινόσαυροι είναι αυτοί που εξάπτουν τη φαντασία του ευρύτερου κοινού. Συνεπώς, κανένα επιχείρημα εναντίον του Alvarez δεν ήταν τόσο διάσημο και πειστικό όσο ο επίμονος ισχυρισμός τον οποίο προέβαλλαν οι περισσότεροι ειδικοί των δεινοσαύρων (αλλά όχι όλοι), ότι δηλαδή αυτά τα τεράστια θηρία, εκτός ίσως από ένα ή δύο είδη που γλίτωσαν από την κοινή μοίρα, είχαν ήδη εξαφανιστεί προ πολλού όταν συνέβη η υποτιθέμενη πρόσκρουση.

Θυμάμαι καλά τους «δεινοσαυρολόγους» να προβάλλουν την κατ' αυ-

τούς αδιάψευστη απόδειξη του «χάσματος των τριών μέτρων» —δηλαδή των «κενών» στρωμάτων που παρεμβάλλονται ανάμεσα στο τελευταίο οστό δεινοσαύρου που έχει ανακαλυφθεί και στο όριο της πρόσκρουσης. Επίσης, θυμάμαι τον Luis Alvarez να εξεγείρεται —και δικαίως, διότι ντράπηκα λίγο για τους παλαιοντολόγους συναδέλφους μου και το κάκιστο επιχείρημά τους. Άλλωστε, το τελευταίο οστό δεν σημαίνει και το τελευταίο ζώο, αλλά μάλλον ένα δείγμα από το οποίο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιθανή μετέπειτα επιβίωση όντων τα οποία δεν έχουν ακόμη ανακαλυφθεί ως απολιθώματα. Στο κάτω κάτω, αν ένας συναδέλφός μου πετάξει χίλια μπουκάλια από ένα πλοίο και αργότερα μαζέψω ένα από αυτά σε κάποιο νησί πενήντα μίλια μακριά, δεν θα υποθέσω ότι έριξε μόνο ένα μπουκάλι. Αν όμως γνώριζα πότε τα πέταξε και τι ρεύματα υπάρχουν στην περιοχή, ίσως μπορούσα να υπολογίσω χονδρικά πόσα μπουκάλια ρίχτηκαν στη θάλασσα. Η πιθανότητα βέβαια να απολιθωθεί οποιοδήποτε ζώο είναι πολύ μικρότερη από την πιθανότητα να βρω έστω και ένα μπουκάλι. Ωστόσο, η επιστήμη στο σύνολό της δεν είναι παρά η ευφυής εξαγωγή συμπερασμάτων: η υπερβολική κατά γράμμα ερμηνεία αποτελεί πλάνη, όχι απλώς ταπεινή υπόκλιση ενώπιον των ενδείξεων.

Για άλλη μία φορά, όπως και στην περίπτωση του Peter Ward με τους αμμωνίτες, η καλύτερη εμπειρική προσέγγιση θα επέβαλλε να πάψουν οι αποδοκιμασίες και να οργανωθεί μια κολοσιαία προσπάθεια προκειμένου να ελεγχθεί ακόμη και η τελευταία γωνιά της θημωνιάς: να αναζητηθούν οστά δεινοσαύρων σε κάθε εκατοστό των πετρωμάτων του ύστερου Κρητιδικού. Το όνομα Peter προέρχεται από την ελληνική λέξη «πέτρα», επομένως όσοι έχουν αυτό το όνομα δεν είναι απίθανο να εμφανίζουν κάποια προδιάθεση για σταδιοδρομία στην παλαιοντολογία. Ένας άλλος Peter, ο φίλος και συνεργάτης μου Peter Sheehan του Κρατικού Μουσείου του Μιλγουόκι, διευθύνει εδώ και χρόνια ένα τέτοιο πρόγραμμα. Το Νοέμβριο του 1991 δημοσίευσε τα πολυπόθητα αποτελέσματά του στο *Science*.

Σχεδόν πάντοτε οι δεινόσαυροι είναι σπανιότεροι από τα θαλάσσια όντα, οπότε η συγκεκριμένη θημωνιά πρέπει πραγματικά να ελεγχθεί εξονυχιστικά, και μάλιστα σε μια εκτεταμένη περιοχή. Οι ομάδες έρευνας του Peter (αποτελούμενες από ειδικευμένο προσωπικό αλλά και από άρτια εκπαιδευμένους εθελοντές) κατέβαλαν 15.000 ώρες κοπιαστικής εργασίας, καρπός της οποίας υπήρξε η πρώτη ικανοποιητική δειγματοληψία απολιθωμάτων δεινοσαύρων από τα πετρώματα του ανώτερου Κρητιδικού.

Οι έρευνες διεξήχθησαν στον ιζηματογενή σχηματισμό Χελ Κρηκ στη Μοντάνα και στη Βόρεια Ντακότα, τα πιο πρόσφορα στρώματα για την αναζήτηση δεινοσαύρων του ύστερου Κρητιδικού. Οι ομάδες ερεύνησαν κάθε περιβάλλον ξεχωριστά, και οι καλύτερες ενδείξεις συλλέχθηκαν στις κοίτες και στις πεδιάδες κατάκλυσης των ποταμών. Χώρισαν ολόκληρη την τομή σε τρίτα, με το άνω τρίτο να εκτείνεται ως το όριο της πρόσκρουσης, και το ερώτημα που έθεσαν ήταν αν και στις τρεις υποτομές είχε συντελεστεί μια σταθερή παρακμή που οδήγησε σε σημαντικό μαρασμό της πανίδας ως τη στιγμή που προσέκρουσε ο αστεροειδής. Παραθέτω αυτολεξεί το σαφές και λακωνικό συμπέρασμά τους:

Αφού δεν υπάρχει αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ του κάτω, του μεσαίου και του άνω τρίτου του σχηματισμού, απορρίπτουμε την υπόθεση ότι το συγκεκριμένο τμήμα του οικοσυστήματος, οι δεινόσαυροι, παρήκμαζε κατά το ύστερο Κρητιδικό. Οι διαπιστώσεις μας είναι συνεπείς με ένα σενάριο αιφνίδιας εξαφάνισης.

Σε κάθε περίπτωση, βέβαια, μπορούμε να πούμε: «Και λοιπόν; Ο T.S. Eliot είχε άδικο. Κάποιοι κόσμοι, τουλάχιστον, τελειώνουν μέσα στη σιγή, και όχι με έκρηξη εκκωφαντική». Αλλά αυτή ακριβώς η διάκριση είναι που δημιουργεί την ειδοποιό διαφορά, διότι η σιγή και η βοή έχουν συνέπειες που αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους. Ο Peter Ward θέτει εύστοχα το ζήτημα περί της μη αναγκαστικής εξαφάνισης των αμμωνιτών:

Η ιστορία τους χαρακτηρίστηκε από

τόσο ασυνήθιστες και ευφυείς προσαρμογές, που θα έπρεπε να είχαν επιβιώσει, κάπου, σε κάποιο μεγάλο βάθος. Τα ναυτιλοειδή το κατόρθωσαν. Είμαι πεπεισμένος ότι και οι αμμωνίτες θα τα κατάφεραν, αν μια καταστροφή δεν άλλαζε τους κανόνες πριν από 66 εκατομμύρια χρόνια. Στη μακρά τους ιστορία επιβίωσαν παρ' όλες τις δυσκολίες που τους προέβαλλε η Γη. Αυτό που τελικά τους αφάνισε ίσως ερχόταν έξω απ' αυτήν —από το μακρινό Διάστημα.

Ο πραγματικά ανίδεος μπορεί και πάλι να έλεγε: «Ε, και λοιπόν; Χωρίς πρόσκρουση θα υπήρχαν ακόμη οι αμμωνίτες όπως και τα ναυτιλοειδή. Και τι με νοιάζει; Δεν είχα καν ξανακούσει για ναυτιλοειδή προτού διαβάσω τούτο το άρθρο». Σκεφτείτε τους δεινοσαύρους και αρχίστε να ενδιαφέρεστε. Αν δεν συνέβαινε καμιά πρόσκρουση, για να τερματίσει την ακμάζουσα ποικιλία τους, μπορεί να είχαν επιβιώσει ως τώρα. (Γιατί όχι; Τα κατάφεραν πολύ καλά για περισσότερο από εκατό εκατομμύρια έτη, και στην ηλικία της Γης δεν έχουν προστεθεί από τότε παρά μόνο άλλα εξήντα έξι εκατομμύρια). Αν επιβίωναν, είναι σχεδόν βέβαιο ότι τα θηλαστικά θα παρέμεναν τόσο μικρά και ασήμαντα όσο ήταν καθ' όλη τη διάρκεια των εκατό εκατομμυρίων ετών της κυριαρχίας των δεινοσαύρων. Και αν τα θηλαστικά παρέμεναν τόσο μικρά, περιορισμένα και στερημένα από συνείδηση, τότε σίγουρα κανένα ανθρώπινο ον δεν θα εμφανιζόταν για να δηλώνει την αδιαφορία του. Ή να βαφτίζει τα αγόρια του Peter. Ή να στοχάζεται για τη φύση της επιστήμης και την ορθή αλληλεπίδραση μεταξύ γεγονότος και θεωρίας. Τα θηλαστικά δεν θα γνώριζαν τίποτε για όλα αυτά, και προφανώς θα ήταν απασχολημένα να εξασφαλίσουν το επόμενο γεύμα τους, κρυφά από τον φοβερό, τον απαίσιο Κομφόγναθο. ■

Ο **Stephen Jay Gould** διδάσκει βιολογία, γεωλογία και ιστορία της επιστήμης στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ. Είναι πολυγραφότατος: μερικά από τα γνωστότερα βιβλία του είναι τα *Ontogeny and Phylogeny*, *The Panda's Thumb*, *The Mismeasure of Man*, *The Flamingo's Smile*, *Dinosaurs in the Haystack* και *Wonderful Life*.

Ζεστό άγγιγμα

«Ένωσα τη βέρα στο μεσιανό του δάχτυλο.

Πρώτη φορά μου παίρνανε τόσο χρυσάφι μέσα από τα χέρια.»

—Άρης Αλεξάνδρου

Alexey Byalko

ΠΩΣ ΘΑ ΕΛΕΓΧΑΤΕ ΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ενός αντικειμένου αν γνωρίζετε πως δεν είναι υπερβολικά ζεστό ή κρύο; Το πιθανότερο, θα το ακουμπούσατε με τα δάχτυλά σας. Μέσα σε κλάσματα του δευτερολέπτου, οι νευρικές απολήξεις των δαχτύλων σας θα σας πληροφορούσαν κατά πόσο το αντικείμενο είναι θερμότερο ή ψυχρότερο από το δέρμα σας (34-36°C).

Ωστόσο, η αντίληψή μας για τη θερμοκρασία επηρεάζεται και από το είδος του υλικού που αγγίζουμε. Σε θερμοκρασία δωματίου τα ξύλινα αντικείμενα μας φαίνονται πιο ζεστά απ' ό,τι τα γυάλινα ή τα πέτρινα· τα μεταλλικά αντικείμενα μας φαίνονται πάντοτε ψυχρότερα. Τι ακριβώς είναι αυτό που αντιλαμβάνονται τα δάχτυλά μας;

Ας θεωρήσουμε καταρχάς την πιο απλή περίπτωση, αυτή κατά την οποία τα αντικείμενα που έρχονται σε επαφή είναι ίδια. Όταν η μητέρα αγγίζει το μέτωπο του άρρωστου παιδιού της, μπορεί να αντιληφθεί ακόμη και κατά 1°C υψηλότερη θερμοκρασία. Καθώς οι δύο δερματικές περιοχές έρχονται σε επαφή, η ψυχρότερη αρχίζει να θερμαίνεται, ενώ η θερμότερη να ψύχεται. Τελικά, η θερμοκρασία στο σημείο επαφής θα γίνει ίση με το μέσο

όρο των δύο θερμοκρασιών:

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2).$$

Σε βάθος 0,3-0,5 mm το δέρμα είναι διάσπαρτο με νευρικούς υποδοχείς διαφόρων ειδών. Αυτοί παράγουν σήματα (νευρικές ώσεις), τα οποία μεταβιβάζουν πληροφορίες για τη θερμοκρασία, την πίεση και τις λοιπές συνθήκες. Ορισμένοι υποδοχείς είναι πολυδεκτικοί—όπως, για παράδειγμα, οι υποδοχείς του πόνου, οι οποίοι αντιδρούν σε πολύ ισχυρά ερεθίσματα μηχανικής, θερμικής ή και χημικής φύσεως. Σε τούτο το άρθρο μας απασχολούν μονάχα τα αισθήματα του ζεστού και του κρύου, γι' αυτό και θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας μόνο στους θερμοϋποδοχείς. Οι εν λόγω υποδοχείς δεν «μετρούν» απόλυτες τιμές θερμοκρασίας, αλλά τη διαφορά στη θερμοκρασία του σώματος πριν από και μετά την επαφή με κάποιο αντικείμενο.

Όταν προσλαμβάνουμε τη θερμοκρασία ενός αντικειμένου, οι πρώτες στιγμές μετά την επαφή είναι οι πλέον σημαντικές. Τότε είναι που η θερμοκρασία του δέρματος (καθώς και εκείνη των απολήξεων των αισθητηρίων νεύρων) αρχίζει να αλλάζει. Έτσι, περνά μια μικρή αλλά διακριτή περίο-

δος έως ότου οι νευρικές απολήξεις μας καταγράψουν κάποια θερμοκρασιακή διαφορά. Ας υπολογίσουμε την εν λόγω καθυστέρηση, δηλαδή το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει η μεταβολή της θερμοκρασίας στους θερμοϋποδοχείς.

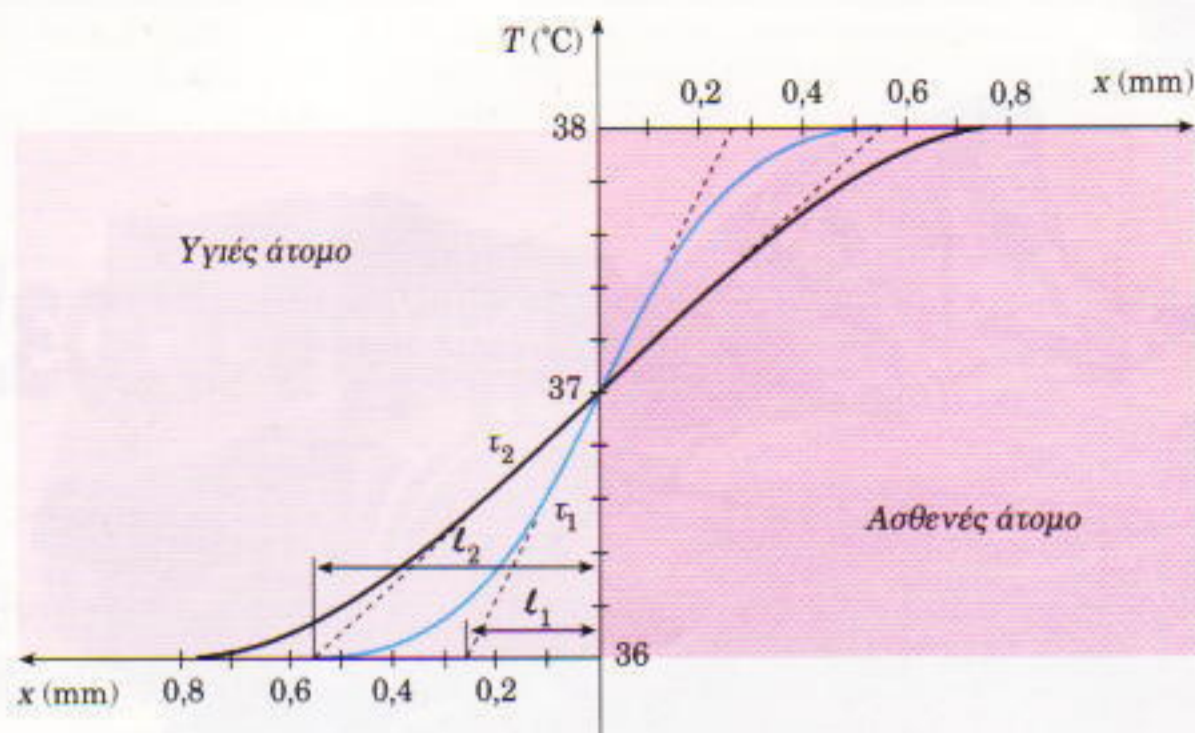
Ας ξεκινήσουμε με μια ανασκόπηση των βασικών αρχών του κεφαλαίου της θερμότητας, και κατά πρώτον με τους ορισμούς της ειδικής θερμότητας και του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Η ειδική θερμότητα c ενός σώματος εκφράζει την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας του σώματος όταν η θερμοκρασία του αυξάνεται κατά ένα βαθμό. Επομένως, αν αυξήσουμε κατά ΔT τη θερμοκρασία σώματος μάζας m , η εσωτερική του ενέργεια θα αυξηθεί κατά

$$\Delta Q = cm \cdot \Delta T.$$

Οι μονάδες της ειδικής θερμότητας είναι J/(kg · K).

Όταν δύο σώματα διαφορετικών θερμοκρασιών έρχονται σε επαφή, αρχίζει η διάδοση της θερμότητας από το ένα στο άλλο με αγωγή. Μάλιστα, η θερμική ενέργεια διαδίδεται πάντοτε από το θερμότερο προς το ψυχρότερο σώμα. Το φυσικό μέγεθος που μας δείχνει το ρυθμό με τον οποίο ά-





Σχήμα 1

Κατανομή της θερμοκρασίας στα στρώματα εκατέρωθεν της επιφάνειας θερμικής επαφής ενός αρρώστου και ενός υγιούς ατόμου, μετά την πάροδο χρόνου $\tau_1 = 0,5 \text{ s}$ και $\tau_2 = 2 \text{ s}$ από την αρχή της επαφής: τα l_1 και l_2 είναι το βάθος διείσδυσης των θερμικών κυμάτων κατά τα διαστήματα τ_1 και τ_2 ($l_1 = \sqrt{\tau_1}$, $l_2 = \sqrt{\tau_2}$).

γεται η θερμική ενέργεια ονομάζεται θερμική ροή. Θερμική ροή q , λοιπόν, είναι η θερμότητα που ρέει στη μονάδα του χρόνου μέσω διατομής ορισμένου εμβαδού, προσανατολισμένης κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσης. Τη θερμική ροή τη μετράμε σε J/s . Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο σωμάτων, πιο συγκεκριμένα όσο μεγαλύτερη είναι η πτώση της θερμοκρασίας ανά μονάδα μήκους (ή, όπως λέμε, η θερμοβαθμίδα), τόσο μεγαλύτερη εί-

ναι η θερμική ροή. Αν, πιο συγκεκριμένα, σε μήκος Δx η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά ΔT , τότε η πυκνότητα θερμικής ροής —δηλαδή η ποσότητα θερμικής ενέργειας που περνάει κάθε δευτερόλεπτο από μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη στη ροή— δίνεται από τον τύπο

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Σ' αυτόν το μείον δείχνει την κατεύθυνση της ενεργειακής ροής (από τις

υψηλότερες προς τις χαμηλότερες θερμοκρασίες). Η σταθερά αναλογίας κ ονομάζεται συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας (ή, απλώς, θερμική αγωγιμότητα). Μονάδα μέτρησης του είναι το $\text{J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$. Ο ρυθμός αγωγής της θερμότητας καθορίζεται τόσο από τις ειδικές θερμότητες και τους συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας των υλικών όσο και από τις πυκνότητές τους.

Ας υπολογίσουμε τώρα το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας κατά τη θερμική επαφή δύο ίδιων σωμάτων με διαφορετικές θερμοκρασίες. Το Σχήμα 1 δείχνει την κατανομή της θερμοκρασίας ως συνάρτηση της απόστασης από την επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων, μετά χρόνο τ , από τη στιγμή της πρώτης επαφής. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, κατά το χρονικό διάστημα τ έχουμε εμφανή μεταβολή της θερμοκρασίας μόνο σε στρώματα πάχους l εκατέρωθεν της επαφής (προφανώς το l εξαρτάται από το χρόνο). Η τιμή της πυκνότητας θερμικής ροής q μια δεδομένη χρονική στιγμή θα είναι περίπου

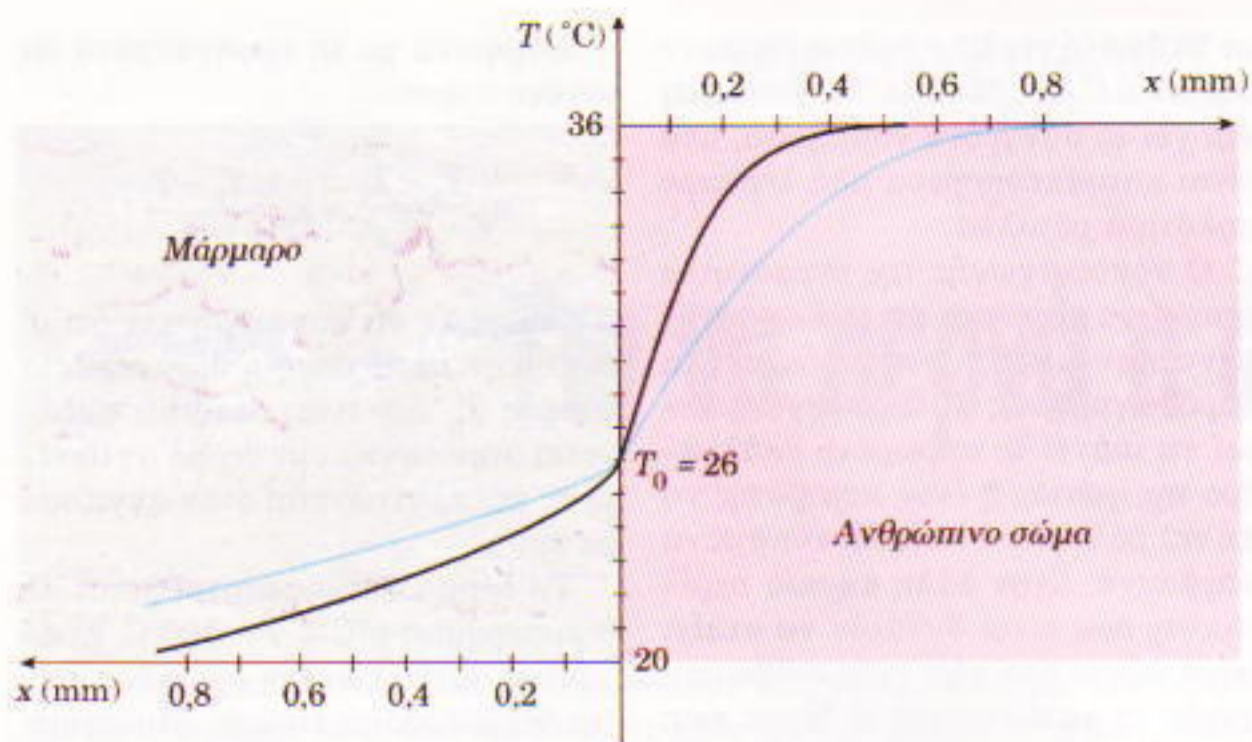
$$q = \kappa \frac{T_2 - T_1}{l}$$

Αυτό σημαίνει ότι, σε χρονικό διάστημα Δt , η ποσότητα θερμότητας που περνάει από μια διατομή εμβαδού S της θερμικής επαφής είναι:

	Ειδική θερμότητα ($\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$)	Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ($\text{J}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$)	Πυκνότητα (kg/m^3)	Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα (m^2/s)	Παράμετρος $v = \sqrt{\frac{c\rho\kappa}{c_0\rho_0\kappa_0}}$	Θερμοκρασία επαφής T_0 (°C)
Νερό	$4,18 \cdot 10^3$	0,631	$1,0 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	1,0	28
Αέρας	$1,01 \cdot 10^3$	0,026	1,2	$2,1 \cdot 10^{-5}$	0,0035	35,9
Ξύλο	$9 \cdot 10^2$	0,13	$5 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-7}$	0,15	34
Γυαλί	$8 \cdot 10^2$	0,65	$2,6 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-7}$	0,72	29
Γρανίτης	$8,2 \cdot 10^2$	1,4	$2,7 \cdot 10^3$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	1,1	28
Μάρμαρο	$9,0 \cdot 10^2$	3,0	$2,7 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	1,7	26
Αργίλιο	38	236	$2,7 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	3,0	24
Σίδηρος	$4,4 \cdot 10^2$	74	$7,9 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	10	21,5
Χρυσός	$1,3 \cdot 10^2$	310	$19,3 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	17	20,9

Πίνακας 1

Θερμικές ιδιότητες διαφόρων υλικών.



Σχήμα 2

Κατανομή της θερμοκρασίας στα στρώματα εκατέρωθεν της επιφάνειας θερμικής επαφής ανθρώπινου δέρματος και μαρμάρου μετά την πάροδο 0,5 s (μαύρη καμπύλη) και 2 s (μπλε καμπύλη) από την αρχή της επαφής. Η θερμοκρασία T_0 στην επιφάνεια επαφής είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$\Delta Q = qS \cdot \Delta t \equiv \frac{\kappa(T_2 - T_1)S \cdot \Delta t}{l}$$

Η συγκεκριμένη ποσότητα θερμικής ενέργειας, όμως, είναι αυτή που δαπανάται για να ανέλθει η θερμοκρασία του στρώματος μάζας $m = \rho l S$ κατά $\Delta T = T_2 - T_1$. Άρα, μπορεί να γραφτεί και ως $\Delta Q = c\rho l S \cdot \Delta T$. Οπότε,

$$\frac{\kappa S \cdot \Delta t \cdot \Delta T}{l} \equiv c\rho l S \cdot \Delta T$$

Σ' αυτή τη σχέση απλοποιείται η επιφάνεια S και η πτώση θερμοκρασίας ΔT . Επιπλέον, μπορούμε να αντικαταστήσουμε κατά προσέγγιση το χρονικό διάστημα Δt με το χρόνο τ που έχει διαρρεύσει από τη στιγμή που άρχισε η θερμική επαφή. Επομένως,

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{\kappa}{c\rho} \cdot \tau} \quad (1)$$

Το σύμβολο ίσον δεν είναι λάθος: αυτός είναι ο ακριβής τύπος, ανεξάρτητα από τις προσεγγίσεις (τα μικρά σφάλματα αντισταθμίζονται). Οι καμπύλες στο Σχήμα 1 είναι επίσης ακριβείς.

Ο χρόνος που απαιτείται για να αποκτήσει η θερμοκρασία σε βάθος l την τιμή που έχει η θερμοκρασία στην επιφάνεια επαφής εξαρτάται μόνο από τις τιμές των κ , c και ρ , οι οποίες

καθορίζονται εξ ολοκλήρου από τις ιδιότητες των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Ο συνδυασμός με τον οποίο εμφανίζονται αυτές οι σταθερές στην υπόρριξη ποσότητα της σχέσης (1), το $\delta \equiv \kappa / c\rho$, ονομάζεται θερμοκρασιακή αγωγιμότητα ενός δεδομένου υλικού. Για παράδειγμα, το νερό έχει τιμή $\delta = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των υλικών τα οποία περιλαμβάνει ο Πίνακας 1 της προηγούμενης σελίδας.

Η δομή του «δερματικού ιστού» είναι αρκετά περίπλοκη: δεν υπάρχει ομοιογένεια και οι θερμικές ιδιότητες του καθορίζονται από το πάχος του δέρματος. Ωστόσο, εφόσον οι βιολογικοί ιστοί περιέχουν περισσότερο από 90% νερό, θα θεωρήσουμε πως έχουν τις ίδιες θερμικές ιδιότητες με το νερό. Τώρα, πλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο χρόνο χρειάζεται το θερμικό κύμα που δημιουργείται στην επιφάνεια του δέρματος να φτάσει στους θερμοϋποδοχείς ($l_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$). Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία κοντά στις νευρικές απολήξεις είναι:

$$\tau_0 = \frac{l_0^2}{\delta_0} \equiv 1 \text{ s.}$$

Επομένως, για ποιο λόγο διάφορα υλικά ίδιας θερμοκρασίας μάς προ-

καλούν διαφορετικά θερμικά αισθήματα όταν τα αγγίζουμε; Κοιτάξτε το Σχήμα 2. Δείχνει την κατανομή της θερμοκρασίας κατά την επαφή μας με μάρμαρο, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Σημειώστε πως η θερμοκρασία της επαφής είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται με το χρόνο· καθορίζεται μάλιστα εξ ολοκλήρου από τις θερμικές ιδιότητες του υλικού το οποίο αγγίζουμε.

Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο και να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία επαφής για διαφορετικά υλικά.

Για κάποια χρονική στιγμή, το βάθος στο οποίο θα έχουν διεισδύσει τα θερμικά κύματα στο δέρμα και σ' ένα αντικείμενο (ας πούμε από μάρμαρο), αντίστοιχα, θα είναι

$$l_0 = \sqrt{\delta_0 \cdot \tau}$$

και

$$l_\mu = \sqrt{\delta_\mu \cdot \tau}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, οι θερμοκρασίες T_a (του ανθρώπινου σώματος) και T_μ (του μαρμάρου) σε μεγαλύτερα βάθη μπορούν να θεωρηθούν σταθερές. Στο σημείο επαφής η πυκνότητα της θερμικής ροής έχει την ίδια τιμή και για τις δύο επαπτόμενες επιφάνειες. Σύμφωνα με την εξίσωση αγωγής της θερμότητας, έχουμε

$$q = \kappa_0 \frac{T_0 - T_a}{\sqrt{\delta_0 \tau}} = \kappa_\mu \frac{T_\mu - T_0}{\sqrt{\delta_\mu \tau}},$$

όπου με T_0 συμβολίζουμε τη θερμοκρασία στην επιφάνεια επαφής. Έτσι, η παρακάτω εξίσωση δίνει την απάντηση στο ερώτημα γιατί διαφορετικά υλικά μάς προκαλούν διαφορετικά θερμικά αισθήματα:

$$T_0 = \frac{T_a + v T_\mu}{1 + v},$$

όπου

$$v = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_0} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_\mu}} = \sqrt{\frac{\kappa_\mu c_\mu \rho_\mu}{\kappa_0 c_0 \rho_0}}$$

Παρατηρήστε πως δεν υποθέσαμε εκ των προτέρων ότι η θερμοκρασία της επαφής είναι σταθερή —η σταθερότη-

τά της οφείλεται στην απαλοιφή του χρόνου t από την εξίσωση.

Οι τιμές της θερμοκρασίας επαφής T_0 (της θερμοκρασίας την οποία αισθανόμαστε) για διαφορετικά υλικά δίνονται στον Πίνακα 1. Σ' αυτόν θεωρούμε πως τα υλικά βρίσκονται σε θερμοκρασία δωματίου (20°C) και ότι το ανθρώπινο σώμα έχει θερμοκρασία 36°C .

Όπως βλέπετε στον πίνακα, δεν αντιλαμβανόμαστε μέσω των αισθήσεών μας το στατικό αέρα σε θερμοκρασία δωματίου, ενώ τα ξύλινα αντικείμενα μας φαίνονται μονάχα ελαφρώς ψυχρότερα από το σώμα μας. Αντίθετα, τα γυάλινα και τα πέτρινα μας φαίνονται κρύα, ενώ τα μεταλλικά «παγωμένα». Τη μέγιστη τιμή του v την κατέχει ο χρυσός. Αν αγγίξουμε μια χρυσή ράβδο, η θερμοκρασία επαφής θα είναι πολύ πιο κοντά στη θερμοκρασία του χρυσού παρά στη θερμοκρασία του σώματος.

Έχετε αγγίξει ποτέ ένα μεταλλικό αντικείμενο μια μέρα που να κάνει μεγάλη παγωνιά; Προσέξτε! Τα δάχτυλά σας μπορεί να κολλήσουν πάνω του. Το συγκεκριμένο φαινόμενο οφείλεται στο πάγωμα ενός λεπτού υμενίου νερού στην επιφάνεια των δαχτύλων σας, γεγονός που σημαίνει ότι η θερμοκρασία επαφής είναι αρνητική ($T_0 < 0^\circ\text{C}$). Ας υπολογίσουμε σε πόσο χαμηλή θερμοκρασία θα αρχίσει το πάγωμα των δαχτύλων. Ο τύπος (2) μας πληροφορεί ότι μπορεί να δημιουργηθούν προβλήματα στην περίπτωση που $T < T_0/v$. Για παράδειγμα, οι άκρες των δαχτύλων σας θα κολλούσαν πάνω σε σιδερένια αντικείμενα στους $-3,5^\circ\text{C}$, σε αλουμίνιο στους -12°C και σε χρυσά αντικείμενα στους -2°C .

Σε αυτό το σημείο, ας αναφερθούμε σ' ένα ιστορικό πρόβλημα. Πριν από τη Ρωσική Επανάσταση, όταν τα χρυσά νομίσματα ήταν ακόμη σε κυκλοφορία, γιατί κατά τη διάρκεια των δριμύτατων χειμώνων δεν κολλούσαν στα δάχτυλα των ανθρώπων; Η απάντηση είναι απλή: τα χρυσά νομίσματα δεν κολλούσαν, διότι αυτά τα μικρά αντικείμενα θερμαίνονταν πολύ γρήγορα από τη «ζεστασιά» των χεριών. Για παράδειγμα, ένα χρυσό νόμισμα πάχους $l \approx 2 \text{ mm}$ θα θερμανθεί πολύ γρήγορα όταν το πιάσουμε

με τα δύο δάχτυλα: ο χρόνος θέρμανσης είναι $l^2/4\delta_{Au} \approx 10^{-2} \text{ s}$. Το ίδιο ισχύει και για τα σύγχρονα νομίσματα, που είναι κατασκευασμένα από λιγότερο πολύτιμα μέταλλα.

Ο νόμος αγωγής της θερμότητας μπορεί να εξηγήσει και άλλα φαινόμενα που μοιάζουν παράδοξα. Για παράδειγμα, πώς ο σιδηρουργός μπορεί να πάνει το πυρωμένο σκάλεθρο της φωτιάς ή ένας πυροβάτης να κάνει βόλτες πάνω στα αναμμένα κάρβουνα; Στην άλλη ακραία περίπτωση, πώς είναι δυνατόν να στάξει υγρό άζωτο στο χέρι ενός ανθρώπου χωρίς να καταστραφεί το δέρμα του; Οι σκληρύνσεις του δέρματος παρέχουν ενδεχομένως κάποια προστασία, όχι όμως αρκετή για να αντιμετωπιστούν αυτές οι ακραίες θερμοκρασίες.

Η απάντηση βρίσκεται στο λεπτό στρώμα ατμού που δημιουργείται όταν το δέρμα έρχεται σε επαφή με πολύ θερμά ή πολύ ψυχρά αντικείμενα (στην περίπτωση του υγρού αζώτου το εν λόγω στρώμα είναι το άζωτο που έχει εξατμιστεί στην περίπτωση του σιδηρουργού ή του πυροβάτη, ο ατμός που δημιουργείται καθώς θερμαίνονται οι εξωτερικές δερματικές στιβάδες). Αυτό το στρώμα ατμού είναι κακός αγωγός της θερμότητας, και μολονότι το πάχος του είναι μικρότερο από $0,1 \text{ mm}$, η πίεσή του είναι τόσο μεγάλη, που μπορεί να στηρίξει το βάρος ολόκληρου του ανθρώπινου σώματος.

Για πόσο χρόνο, όμως, μπορεί αυτό το στρώμα να προστατεύει το δέρμα από τόσο ακραίες θερμοκρασίες; Γνωρίζουμε ήδη πως το πάχος του προστατευτικού στρώματος ατμού είναι $l = 10^{-4} \text{ m}$. Ας θεωρήσουμε επιπλέον ότι οι εξωτερικές στιβάδες του δέρματος μπορούν να αντέξουν σε θερμοκρασίες μεταξύ 0°C και 100°C , χωρίς να παθαίνουν κρουπαγήματα ή να βγάζουν φουσκάλες.

Εντός του στρώματος ατμού, η θερμοκρασία κατανέμεται γραμμικά από τη θερμοκρασία του υγρού αζώτου (ή ενός πυρωμένου αντικειμένου) T_1 μέχρι τη θερμοκρασία επαφής T_0 . Επομένως, η πυκνότητα θερμικής ροής είναι

$$q = \kappa_{\text{ατμ}} \frac{T_0 - T_1}{l}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα ισχύει:

$$\kappa_0 \frac{T_a - T_0}{\sqrt{\delta_0 t}} = \kappa_{\text{ατμ}} \frac{T_0 - T_1}{l}$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι σ' αυτή την περίπτωση η θερμοκρασία επαφής T_0 δεν είναι σταθερή: αυξάνεται όταν αγγίζουμε θερμά αντικείμενα και ελαττώνεται όταν αγγίζουμε κρύα.

Το δέρμα δεν καταστρέφεται σε θερμοκρασίες $0^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$. Επομένως, αυτές είναι οι οριακές τιμές της θερμοκρασίας επαφής. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε πόσος χρόνος απαιτείται για να φτάσει η θερμοκρασία του δέρματος σε τέτοιες θερμοκρασίες:

$$t_{\text{max}} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{ατμ}}} \cdot \frac{T_a T_0}{T_0 - T_1} \cdot l \right)^2$$

Οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας των διαφόρων αερίων έχουν σχεδόν παραπλήσιες τιμές. Στον υπολογισμό μας, επομένως, ως τιμή του $\kappa_{\text{ατμ}}$ θα χρησιμοποιήσουμε αυτή του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας του αέρα: $\kappa_{\text{αερ}} = 0,026 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι, για να ανέλθει η θερμοκρασία του δέρματος στους 100°C μέσω της επαφής με ένα αντικείμενο θερμοκρασίας 600°C , απαιτείται χρόνος μικρότερος από $0,5 \text{ s}$, χρόνος που είναι αρκετός για να μετακινήσει ο σιδηρουργός το πυρωμένο σίδερο από τη φωτιά στο αμόνι ή για να κάνει ο πυροβάτης άλλο ένα βήμα πάνω στα αναμμένα κάρβουνα.

Στην περίπτωση του υγρού αζώτου ($T_1 = -196^\circ\text{C}$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$) χρειάζονται $1,3 \text{ s}$ για να ψυχθεί το δέρμα σε θερμοκρασίες κάτω από 0°C , χρόνος υπεραρκετός για να μείνουν άφωνοι οι ανυποψίαστοι (αλλά όχι εσείς). Μια σταγόνα υγρού αζώτου μπορεί, ακίνδυνα, να έρχεται σε επαφή με το δέρμα για ακόμη μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, αν την κινούμε διαρκώς γύρω-γύρω στην παλάμη. Ωστόσο, τα χέρια μας είναι εξαιρετικά πολύτιμα για να τα διακινδυνεύουμε σε επιδείξεις τέτοιου είδους. Λοιπόν, ξανασκεφτείτε το!

Για να περνά η ώρα

Σ111

Τα μαθηματικά των ζαριών. Ας υποθέσουμε πως έχετε δύο ζάρια και ότι μπορείτε να δείτε τις τρεις μόνο από τις πλευρές κάθε ζαριού. Έστω ότι το συνολικό πλήθος των κουκκίδων σ' αυτές τις πλευρές ισούται με 27. Ποιο είναι το πλήθος των κουκκίδων που βλέπετε σε κάθε ζάρι;

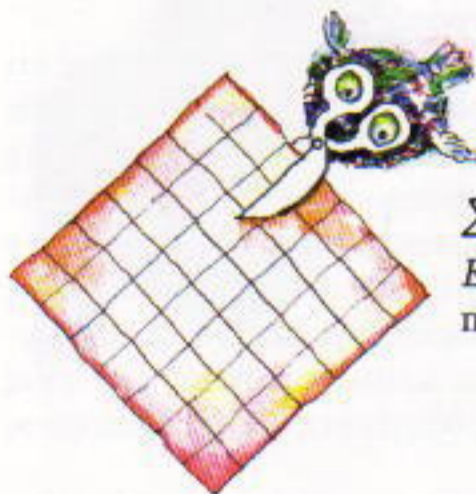


Σ112

Περιεκτικές καμπύλες. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία A και B στο επίπεδο, με $AB = 5$. Επιλέγουμε τα σημεία C και D του επιπέδου, έτσι ώστε στο τετράπλευρο $ABCD$ που προκύπτει να έχουμε $BC = 6$, $CD = 4$ και $DA = 1$. Σχεδιάστε τις καμπύλες που περιέχουν όλες τις δυνατές θέσεις των C και D .

Σ113

Αφράτο χιόνι. Τις πολύ κρύες μέρες του χειμώνα το φρέσκο χιόνι τρίζει κάτω από τα πόδια μας. Γιατί συμβαίνει αυτό;



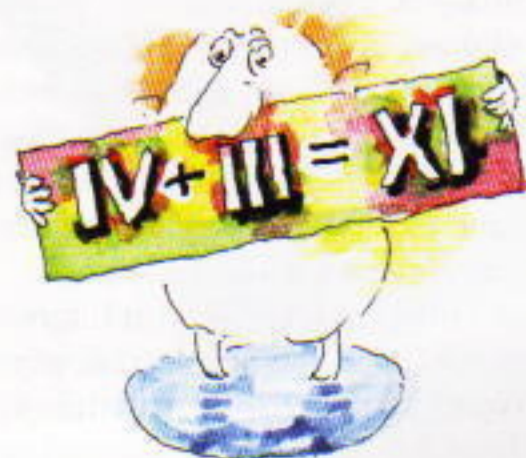
Σ114

Επιστροφή στο χαρτί και το μολύβι. Υπολογίστε την παρακάτω ποσότητα με ακρίβεια πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, χωρίς να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας:

$$(\sqrt[3]{2} + 1) \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} - 1)}$$

Σ115

Αφαίρεση ενός κελιού. Δίνεται τετράγωνο διαστάσεων 7×7 που αποτελείται από σαράντα εννέα μοναδιαία κελιά. Αφαιρέστε ένα από τα κελιά, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να μοιράσουμε τα υπόλοιπα σε λωρίδες διαστάσεων 1×4 .



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Διχαλωτοί δρόμοι και διχαλωτές γλώσσες

Ένας μαθηματικός χάρτης προς την αλήθεια

P. Blekher

ΜΕΤΑΞΥ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ τύπων σπαζοκεφαλιών, τα προβλήματα λογικής είναι ιδιαίτερα δημοφιλή. Κατά κανόνα, δεν χρειάζεται κανείς ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις για να τα επιλύσει. Ακόμη και όσοι έχουν ελάχιστη σχέση με τα μαθηματικά, μπορούν να καταλάβουν τη «φύση» των συγκεκριμένων προβλημάτων.

Σε τούτο το άρθρο αναλύουμε τέσσερα προβλήματα λογικής. Σε όλα αυτά συναντούμε δύο είδη ανθρώπων: ειλικρινείς, που λένε μόνο την αλήθεια, και ψεύτες, που λένε μόνο ψέματα. Αλλά, όπως θα δούμε, τα πιο δύσκολα και ενδιαφέροντα από αυτά τα προβλήματα είναι εκείνα που περιλαμβάνουν δολοπλόκους, ανθρώπους που μπορούν να πουν οτιδήποτε, μόνο και μόνο για να μπερδέψουν εκείνον που θέτει τις ερωτήσεις.



Πρόβλημα 1. Ένας δρόμος διακλαδίζεται. Το ένα μονοπάτι οδηγεί στην πόλη Α, η οποία κατοικείται μόνο από ειλικρινείς.

Το άλλο μονοπάτι οδηγεί στην πόλη Β, που κατοικείται μόνο από ψεύτες. Ένας μαθηματικός συναντά στη διακλάδωση έναν κάτοικο της μιας από τις δύο πόλεις. Ο μαθηματικός θέλει να μάθει ποιος δρόμος οδηγεί στην πόλη Α. Μπορεί να τον βρει κάνοντας μόνο μία ερώτηση;

Όπως συμβαίνει, ο μαθηματικός μπορεί να τον βρει κάνοντας μόνο μία ερώτηση, ακόμη κι αν επιβάλουμε έναν επιπλέον όρο: η ερώτηση πρέπει

να διατυπωθεί έτσι ώστε η απάντησή της να είναι «ναι» ή «όχι». Ο συγκεκριμένος περιορισμός εξυπακούεται σε ολόκληρο το άρθρο.

Ο μαθηματικός λύνει το πρόβλημα αν δείξει προς έναν από τους δρόμους και ρωτήσει: «Πηγαίνει αυτός ο δρόμος στην πόλη σου;» Μια καταφατική απάντηση σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος δρόμος οδηγεί στην Α, και μια αρνητική απάντηση σημαίνει ότι οδηγεί στη Β. Ειδικότερα, αν εκείνος που απάντησε ζει στην Α, τότε το «ναι» του σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στην Α ενώ το «όχι» του σημαίνει ότι οδηγεί στη Β, αφού λέει μόνο την αλήθεια. Από την άλλη, αν ζει στη Β, τότε είναι ψεύτης και το «ναι» του σημαίνει ότι ο δρόμος δεν οδηγεί στη Β (και επομένως οδηγεί στην Α) ενώ το «όχι» του σημαίνει ότι οδηγεί στη Β, στην οποία κατοικεί. Σε κάθε περίπτωση, η απάντηση «ναι» σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στην Α και η απάντηση «όχι» σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στη Β.

Σημειώστε ότι ο μαθηματικός δεν μπορεί να αποφασίσει από την απάντηση αν μιλάει με κάτοικο της πόλης Α ή της πόλης Β. Ωστόσο, δεν του χρειάζεται. Ο συγγραφέας γνωρίζει μερικές ακόμη λύσεις του Προβλήματος 1, όμως όλες χρησιμοποιούν την ιδέα ότι η ερώτηση (για το αν ο δεδομένος δρόμος οδηγεί στην Α) πρέπει να διατυπωθεί έτσι ώστε ο ψεύτης να πρέπει να δώσει μια «διπλή αρνητική» απάντηση σ' αυτήν. Αφού η διπλή άρνηση ισοδυναμεί με θετική απάντηση, η απάντηση του ψεύτη θα συμπί-

πτει με εκείνη του ειλικρινούς. Αυτό ακριβώς συμβαίνει στην προαναφερθείσα λύση.

Το δεύτερο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι μια περίπλοκη παραλλαγή του πρώτου. Η δυσκολία έγκειται στην παρουσία ενός δολοπλόκου ανάμεσα σε όσους απαντούν.



Πρόβλημα 2. Υποθέστε ότι ο μαθηματικός συναντά τρεις ανθρώπους στη διακλάδωση του δρόμου.

Ο μαθηματικός γνωρίζει ότι ένας από αυτούς είναι κάτοικος της πόλης Α, ένας δεύτερος της πόλης Β, ενώ ο τρίτος είναι δολοπλόκος. Ωστόσο, δεν ξέρει ποιος είναι ποιος. Μπορεί να ανακαλύψει ποιος από τους δύο δρόμους οδηγεί στην Α κάνοντας μόνο δύο ερωτήσεις;

Πρέπει να καταστήσουμε σαφές ότι ο μαθηματικός μπορεί να κάνει κάθε ερώτηση σε οποιονδήποτε από τους τρεις ανθρώπους, και ότι μόνο το πρόσωπο που ερωτάται θα απαντήσει στην ερώτηση. Επιπλέον, καθένας από τους τρεις γνωρίζει την ταυτότητα των άλλων δύο, καθώς και ποιος από τους δρόμους οδηγεί στην πόλη Α και ποιος στη Β.

Η λύση του Προβλήματος 1 μας υποβάλλει την εξής ιδέα: Είναι δυνατόν να ανακαλύψουμε με την πρώτη ερώτηση ποιος από τους τρεις είναι ο δολοπλόκος; Αν ναι, το Πρόβλημα 2 ανάγεται στο Πρόβλημα 1, και μπορούμε να βρούμε το δρόμο για την Α κάνοντας την ερώτηση του Προβλήματος 1 σε έναν από τους δύο, εκτός



του δολοπλόκου. Θα δούμε ότι μια τέτοια πρώτη ερώτηση υπάρχει, αν και, κατά τη γνώμη του γράφοντος, δεν είναι εύκολο να τη μαντέψουμε.

Για ευκολία, ας αριθμήσουμε τους τρεις ανθρώπους. Στο πρώτο πρόσωπο πρέπει να τεθεί η εξής ερώτηση: «Εστω ότι ο καθένας από σας θα πάει στην A ή στη B σύμφωνα με τους παρακάτω όρους: Ο κάτοικος της A θα πάει στην A , ο κάτοικος της B θα πάει στη B και ο δολοπλόκος, με την προϋπόθεση ότι δεν είσαι εσύ, θα σε ακολουθήσει. Αν εσύ είσαι ο δολοπλόκος, τότε θα πας όπου θέλεις. Θα πάει αυτό το πρόσωπο (δείχνουμε το δεύτερο πρόσωπο) στην A ;»

Αν η απάντηση σ' αυτή την ερώτηση είναι «ναι», τότε ο τρίτος άνθρωπος δεν είναι ο δολοπλόκος· αν η απάντηση είναι «όχι», τότε ο δεύτερος άνθρωπος δεν είναι ο δολοπλόκος. Πράγματι, αν η ερώτηση τέθηκε στο δολοπλόκο, τότε ο τρίτος και ο δεύτερος άνθρωπος δεν είναι δολοπλόκοι. Επιπλέον, αν η ερώτηση τέθηκε στον ειλικρινή, τότε το «ναι» του σημαίνει ότι ο δεύτερος άνθρωπος είναι ο δολοπλόκος, και συνεπώς όχι ο τρίτος. Από την άλλη, το «όχι» του ειλικρινούς σημαίνει ότι ο δεύτερος άνθρωπος είναι ο ψεύτης (αφού μόνο ο ψεύτης δεν θα πάει μαζί του). Τέλος, αν η ερώτηση τέθηκε στον ψεύτη, τότε το «ναι» του σημαίνει ότι ο δεύτερος άνθρωπος είναι ο δολοπλόκος, και ο τρίτος είναι ο ειλικρινής, διότι ο δολοπλόκος πρέπει να πάει στη B και ο ειλικρινής πηγαίνει στην A . Απεναντίας, το «όχι» του ψεύτη σημαίνει ότι ο δεύτερος άνθρωπος είναι ο ειλικρινής και ο τρίτος είναι ο δολοπλόκος.

Αναλύοντας όλες τις περιπτώσεις, βλέπουμε ότι το τρίτο πρόσωπο δεν είναι ο δολοπλόκος αν η απάντηση είναι «ναι». Ομοίως, το δεύτερο πρόσωπο δεν είναι ο δολοπλόκος αν η απάντηση είναι «όχι». Έτσι, μπορούμε να διαλέξουμε ένα πρόσωπο που δεν είναι ο δολοπλόκος, και το Πρόβλημα 2 λύθηκε.

Σημειώστε ότι για μία ακόμη φορά η βασική ιδέα ήταν να υποχρεώσουμε τον ψεύτη να προβεί σε διπλή άρνηση, έτσι ώστε οι απαντήσεις του να συμφωνούν με εκείνες του ειλικρινούς, και να διακρίνουμε μεταξύ δο-

λοπλόκων και μη δολοπλόκων.



Πρόβλημα 3. Σ' ένα συνέδριο χημείας συμμετέχουν N επιστήμονες —μερικοί από τους οποίους είναι χημικοί και οι υπόλοιποι αλχημιστές. Είναι γνωστό

ότι συμμετέχουν περισσότεροι χημικοί παρά αλχημιστές, και ότι οι χημικοί απαντούν σε όλες τις ερωτήσεις με ειλικρίνεια, ενώ οι αλχημιστές ψεύδονται πάντοτε. Ένας μαθηματικός που παρακολουθεί το συνέδριο θέλει να ξέρει για κάθε επιστήμονα αν είναι χημικός ή αλχημιστής. Για το σκοπό αυτό, μπορεί να ρωτήσει οποιονδήποτε επιστήμονα τι είναι οποιονδήποτε άλλος επιστήμονας. Προτείνετε μια μέθοδο που θα επιτρέψει στο μαθηματικό να βρει ποιος είναι ποιος, κάνοντας $(N - 1)$ ερωτήσεις.

Η λύση στο Πρόβλημα 3 είναι σχετικά εύκολη. Αρχίζουμε ρωτώντας οποιονδήποτε από τους επιστήμονες (για ευκολία, θα τον ονομάσουμε πρώτο επιστήμονα) για όλους τους υπόλοιπους επιστήμονες. Αυτοί οι $(N - 1)$ επιστήμονες θα χωριστούν σε δύο ομάδες: μία ομάδα αποτελούμενη από αυτούς που ο πρώτος επιστήμονας χαρακτήρισε χημικούς και μία ομάδα από εκείνους που αποκάλεσε αλχημιστές. Στη συνέχεια, τοποθετούμε τον πρώτο επιστήμονα στην πρώτη ομάδα και διαλέγουμε τη μεγαλύτερη από τις δύο ομάδες. Τότε, οι επιστήμονες της μεγαλύτερης ομάδας είναι οι χημικοί, και οι επιστήμονες της άλλης ομάδας είναι οι αλχημιστές (δείτε αν μπορείτε να το αποδείξετε)! Το πρόβλημα λύθηκε.



Πρόβλημα 4. Ερχόμαστε τώρα στο κεντρικό πρόβλημα του άρθρου. Οι συνθήκες είναι οι ίδιες με εκείνες του Προβλήματος 3, αλλά τώρα οι αλχημιστές είναι δολοπλόκοι, και όχι ψεύτες. Το ζήτημα είναι να βρείτε ποιος είναι ποιος στο συνέδριο, με τη βοήθεια όχι περισσότερων από $3N/2$ ερωτήσεων.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι εξαιρετικά πολυπλοκότερο από το Πρόβλημα 3. Βέβαια, οι απαντήσεις ενός ψεύτη είναι εσφαλμένες, αλλά είναι πάντοτε εσφαλμένες, κάτι που επιτρέπει σε κάποιον να αποσπάσει

όσες πληροφορίες θα έπαιρνε από τις απαντήσεις ενός ειλικρινούς. Αν στο πρόβλημα εισχωρήσουν δολοπλόκοι, αυξάνει η πολυπλοκότητα, διότι οι απαντήσεις ενός δολοπλόκου είναι εντελώς αυθαίρετες, και η εξασφάλιση οποιασδήποτε πληροφορίας από αυτές είναι πολύ πιο δύσκολη.

Η λύση που ακολουθεί επιτρέπει σε κάποιον να ανακαλύψει ποιος είναι χημικός και ποιος αλχημιστής θέτοντας ακόμη λιγότερες από $3N/2$ ερωτήσεις. Πράγματι, ο αριθμός των ερωτήσεων που απαιτούνται είναι $3k$, αν το $N = 2k + 1$ είναι περιττό, και $3(k - 1)$, αν το $N = 2k$ είναι άρτιο.

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το N είναι περιττό. Θα οδηγηθούμε στη λύση με επαγωγή στο k . Αν στο συνέδριο μετείχε μόνο $N = 1$ επιστήμονας ($k = 0$), τότε αυτός, προφανώς, θα ήταν χημικός, αφού υπάρχουν περισσότεροι χημικοί απ' ό,τι αλχημιστές. Σ' αυτή την περίπτωση, δεν χρειάζονται ερωτήσεις: $q = 0 = 3 \times 0$.

Υποθέτουμε ότι για όλους τους περιττούς αριθμούς μικρότερους του $N = 2k + 1$ έχουμε ήδη επινοήσει μια μέθοδο που επιτρέπει σε κάποιον να λύσει το πρόβλημα με τον αναγκαίο αριθμό ερωτήσεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια λύση για τον αριθμό $N = 2k + 1$.

Ας αριθμήσουμε, για ευκολία, όλους τους συμμετέχοντες στο συνέδριο, και ας ξεκινήσουμε να ρωτάμε τον δεύτερο επιστήμονα, τον τρίτο επιστήμονα, και ούτω καθεξής, αν ο πρώτος είναι χημικός ή αλχημιστής. Συνεχίζουμε αυτή τη σφυγμομέτρηση ώσπου να συμβεί ένα από τα δύο παρακάτω γεγονότα:

Γεγονός Α: Η πλειοψηφία των μέχρι τότε ερωτηθέντων είπε ότι ο πρώτος επιστήμονας είναι αλχημιστής.

Γεγονός Β: Ο αριθμός των επιστημόνων που είπαν ότι ο πρώτος επιστήμονας είναι χημικός είναι ίσος με k .

Ας υποθέσουμε ότι μόλις τώρα συνέβη το γεγονός Α. Αν, αυτή τη στιγμή, t επιστήμονες είπαν ότι ο πρώτος ήταν χημικός και f είπαν ότι ήταν αλχημιστής, τότε $f = t + 1$. Πράγματι, έχουμε $f > t$, και, αν ήταν $f \geq t + 2$, τότε το γεγονός Α θα είχε συμβεί τουλάχιστον μία ερώτηση νωρίτερα. Επίσης, ο συνολικός αριθμός των ερωτή-

σεων που έγιναν κατά τη διάρκεια αυτής της σφυγμομέτρησης είναι

$$q_1 = f + t = 2f - 1.$$

(Η κατάσταση κατά την οποία ο δεύτερος επιστήμονας αναφέρει ήδη ότι ο πρώτος είναι αλημιστής αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γεγονότος A για $t = 0$ και $f = 1$.)

Αν συνέβη το γεγονός B , και ο αριθμός των επιστημόνων που είχαν ήδη πει ότι ο πρώτος επιστήμονας είναι αλημιστής ήταν f , τότε ο συνολικός αριθμός των ερωτήσεων θα είναι

$$q_1 = k + f.$$

Μπορούμε να δούμε ότι η σφυγμομέτρηση θα διακοπεί προτού ερωτηθούν όλοι οι παρευρισκόμενοι στο συνέδριο επιστήμονες. Πράγματι, ας υποθέσουμε το αντίθετο: ότι ούτε το A ούτε το B είχε συμβεί προτού ερωτηθεί ο τελευταίος επιστήμονας. Έστω ότι μέχρι εκείνη τη στιγμή t επιστήμονες είχαν πει ότι ο πρώτος επιστήμονας ήταν χημικός και f είχαν πει ότι ήταν αλημιστής. Επειδή το γεγονός A δεν είχε συμβεί, πρέπει να ισχύει $f \leq t$. Και επειδή ούτε το γεγονός B είχε συμβεί, έχουμε $t \leq k - 1$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός των ερωτηθέντων επιστημόνων είναι

$$f + t \leq 2(k - 1).$$

Αν προσθέσουμε σ' αυτούς τον πρώτο και τον τελευταίο επιστήμονα, βρίσκουμε ότι ο συνολικός αριθμός των επιστημόνων στο συνέδριο είναι το πολύ $2k$, ενώ στην πραγματικότητα είναι $2k + 1$. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει ότι ή το γεγονός A ή το γεγονός B πρέπει να συμβούν πριν ερωτηθεί ο τελευταίος επιστήμονας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι συνέβη το γεγονός A . Τότε, μπορούμε να πούμε ότι, στην ομάδα που συγκροτήθηκε από τον πρώτο επιστήμονα και όλους τους ερωτηθέντες, ο αριθμός των χημικών δεν ξεπερνά τον αριθμό των αλημιστών.

Στην πραγματικότητα, αν ο πρώτος επιστήμονας είναι χημικός, τότε εκείνοι οι f επιστήμονες, που είπαν ότι είναι αλημιστής, είναι οι ίδιοι αλημιστές. Σ' αυτή την περίπτωση —αφού ο συνολικός αριθμός των επιστημόνων στη συγκεκριμένη ομάδα είναι $1 + t + f = 2f$ — ο αριθμός των αλημι-

στών στην ομάδα δεν είναι μικρότερος από τον αριθμό των χημικών. Και αν ο πρώτος επιστήμονας είναι αλημιστής, τότε οι t επιστήμονες, που έχουν πει ότι είναι χημικός, είναι επίσης αλημιστές. Έτσι, ο αριθμός των αλημιστών δεν είναι μικρότερος από $1 + t = f$, δηλαδή τουλάχιστον οι μισοί.

Επιπλέον, σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος, ο συνολικός αριθμός των χημικών είναι μεγαλύτερος από τον συνολικό αριθμό των αλημιστών. Έτσι, στην εναπομείνσα ομάδα των

$$N - 2f = 2(k - f) + 1$$

επιστημόνων ο αριθμός των χημικών πρέπει επίσης να είναι μεγαλύτερος του αριθμού των αλημιστών. Ο αριθμός $N - 2f$ είναι περιττός και μικρότερος του N . επομένως, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μέθοδος για να βρούμε ποιος είναι χημικός και ποιος αλημιστής κάνοντας $q_2 = 3(k - f)$ ερωτήσεις. Ας διαλέξουμε ένα χημικό στην τύχη από τούτη την ομάδα (πρέπει να υπάρχει ένας χημικός σ' αυτήν) και ας τον ρωτήσουμε τι είναι ο πρώτος επιστήμονας (αυτό θα μας κοστίζει ακόμη $q_3 = 1$ ερώτηση).

Αν ο πρώτος επιστήμονας είναι αλημιστής, τότε εκείνοι οι t επιστήμονες, που είπαν ότι είναι χημικός, είναι αλημιστές. Συνεπώς, χρειάζεται να ρωτήσουμε μόνο το χημικό που διαλέξαμε, για να ξεχωρίσουμε τους χημικούς από τους αλημιστές μεταξύ των f επιστημόνων, που είπαν ότι ο πρώτος είναι αλημιστής (τούτο θα μας κοστίζει ακόμη $q_4 = f$ ερωτήσεις). Έτσι, μπορούμε να βρούμε την πλήρη κατανομή χημικών και αλημιστών στο συνέδριο με

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2f - 1 + 3(k - f) + 1 + f = 3k \text{ ερωτήσεις}$$

—αυτό ακριβώς που είχαμε προτείνει.

Αν, πάλι, ο πρώτος επιστήμονας είναι χημικός, τότε εκείνοι οι f επιστήμονες που είπαν ότι είναι αλημιστής είναι οι ίδιοι αλημιστές. Επομένως, χρειάζεται να ζητήσουμε μόνο από το χημικό που βρήκαμε να διακρίνει τους χημικούς από τους αλημιστές μεταξύ των t επιστημόνων, που είπαν ότι ο πρώτος είναι χημικός. Θα κάνουμε ακόμη $q_4 = t$ ερωτήσεις γι' αυτό.

Στην προκειμένη περίπτωση, ο συνολικός αριθμός ερωτήσεων είναι

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2f - 1 + 3(k - f) + 1 + t = 3k - 1,$$

που είναι ακόμη μικρότερος του αριθμού των ερωτήσεων τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύμφωνα με την απόφαση του προβλήματος. Συνεπώς, ερευνήθηκε πλήρως η περίπτωση κατά την οποία συμβαίνει το γεγονός A .

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία συμβαίνει το γεγονός B . Τότε, δηλώνουμε ότι ο πρώτος επιστήμονας πρέπει να είναι χημικός. Αν ήταν αλημιστής, τότε οι k επιστήμονες, που δήλωσαν ότι είναι χημικός, θα ήταν αλημιστές, και ο συνολικός αριθμός των αλημιστών θα ήταν τουλάχιστον $k + 1$, δηλαδή περισσότεροι από τους μισούς συνέδρους θα ήταν αλημιστές. Τούτο αντιφάσκει με την υπόθεση του προβλήματος.

Ο πρώτος επιστήμονας, λοιπόν, είναι χημικός, και οι f επιστήμονες που είπαν ότι είναι αλημιστής, είναι οι ίδιοι αλημιστές. Τώρα, ζητάμε από τον πρώτο επιστήμονα να διακρίνει τους χημικούς και τους αλημιστές μεταξύ των k επιστημόνων που είπαν ότι είναι χημικός (αυτό θα κοστίζει $q_2 = k$ ερωτήσεις). Ζητούμε στη συνέχεια από τον πρώτο επιστήμονα να διακρίνει τους χημικούς από τους αλημιστές μεταξύ των επιστημόνων που δεν πήραν μέρος στη σφυγμομέτρηση (αυτό θα κοστίζει $q_3 = N - (1 + k + f) = 2k + 1 - 1 - k - f = k - f$ ερωτήσεις).

Με τούτο τον τρόπο θα βρούμε ποιος είναι ποιος στο συνέδριο με

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = k + f + k + k - f = 3k \text{ ερωτήσεις.}$$

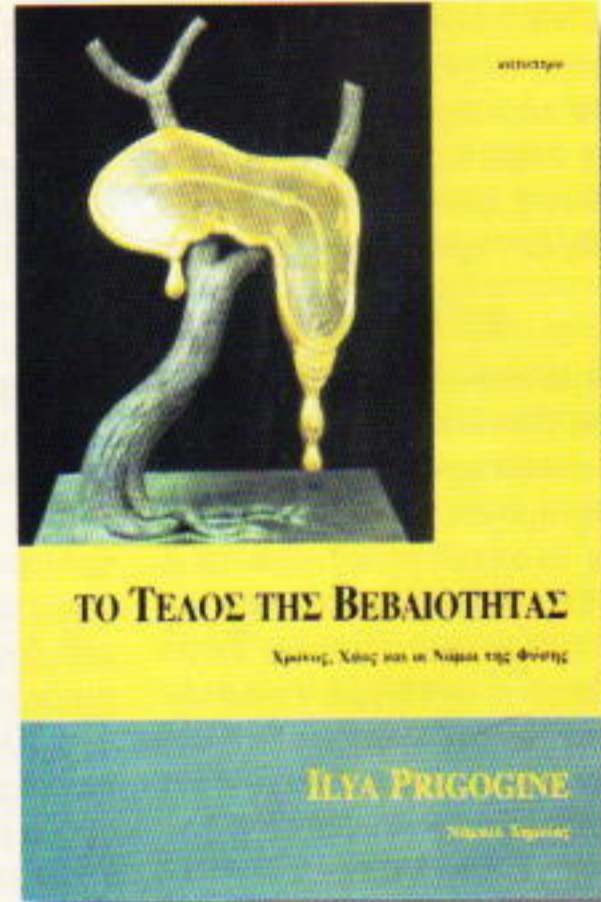
Έτσι, έχουμε εξετάσει και τις δύο περιπτώσεις —όταν συμβαίνει το γεγονός A και όταν συμβαίνει το γεγονός B . Το πρόβλημα είναι πλήρως λυμένο για περιττό N .

Αν το N είναι άρτιο, η λύση αποτελεί σχεδόν λέξη προς λέξη επανάληψη αυτής για περιττό N , και την αφήνουμε ως άσκηση για όσους θέλουν να πετύχουν μια βαθύτερη κατανόηση των συλλογισμών μας. ■

Ilya Prigogine

ΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Χρόνος, Χάος και οι Νόμοι της Φύσης



Σελ.: 232, Μέγ.: 14 x 21 εκ., 5.000 δρχ.

Ο χρόνος, σύμφωνα με την κοινή λογική, κινείται πάντοτε προς τα εμπρός, ποτέ προς τα πίσω. Ωστόσο, ο Αϊνστάιν είπε ότι ο χρόνος αποτελεί πλάνη, και ο Νεύτων περιέγραψε ένα άχρονο, ντετερμινιστικό σίμπαν. Οι δύο μεγάλοι φυσικοί υποστήριξαν ότι ο χρόνος είναι αναστρέψιμος και στερείται νοήματος. Παραταύτα, οι επιστήμονες διαπιστώνουν συνεχώς ότι στον πραγματικό κόσμο οι χρονικά αναστρέψιμες διαδικασίες σπανίζουν· η μη αναστρεψιμότητα αποτελεί τον κανόνα. Ο νομπελίστας Ilya Prigogine, μάλιστα, υπήρξε ο πρώτος που κατόρθωσε να συμπεριλάβει αυτή την προφανή, μη αναστρέψιμη ροή του χρόνου στους νόμους της φυσικής. Στο παρόν βιβλίο ο Prigogine παρουσιάζει τη ρήξη του με την κλασική περιγραφή της φύσης, ελέγχει την παραδοσιακή προσέγγιση του χρόνου και μας δείχνει πώς, μέσω των πιθανοκρατικών διαδικασιών, υπερβαίνουμε την «απονεκρωμένη μηχανική» του ντετερμινισμού. Αναλύοντας τα επιχειρήματά του, μας οδηγεί σε μια απολαυστική διανοητική περιπέτεια, που αρχίζει από τις ιδέες των αρχαίων ελλήνων φιλοσόφων, συνεχίζεται με τη νευτώνεια τροχιά και το ντετερμινιστικό χάος, και φτάνει ως τα ύψη μιας ενοποιημένης διατύπωσης της κβαντικής θεωρίας και της κοσμολογίας. Το Τέλος της Βεβαιότητας είναι ένα βιβλίο πολύτιμο τόσο για τον επιστήμονα όσο και για τον μη ειδικό αναγνώστη.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

«Το έργο του Prigogine ίσως διανοίξει το δρόμο για να κατανοήσουμε γιατί η δημιουργικότητα της ζωής δεν αντιφάσκει με τους νόμους της φυσικής.»

—Σερ KARL POPPER

«Η επιστημονική κοινότητα πρέπει να ευγνωμονεί τον Prigogine για την πολυετή, επίμονη και σχεδόν μοναχική ενασχόλησή του με τα προβλήματα της πολυπλοκότητας και των διαδικασιών μακράν της ισορροπίας, τη λύση των οποίων περιγράφει με αριστουργηματικό τρόπο σε τούτο το βιβλίο.»

—Σερ JOHN MADDOX, *Nature*

«Ο Prigogine είναι ένας πρωτοπόρος στον τομέα του χάους και της θεωρίας της αυτοοργάνωσης· οι απόψεις του είναι τόσο επαναστατικές και θεμελιώδεις όσο εκείνες του Δαρβίνου. Το Τέλος της Βεβαιότητας, συνδυάζοντας αρμονικά το εννοιολογικό, το ιστορικό και το προσωπικό στοιχείο, μας οδηγεί στις συναρπαστικότερες επιστημονικές συλλήψεις του καιρού μας.»

—OLIVER SACKS, νευροβιολόγος

«Αυτό που μας αιχμαλωτίζει κατά την ανάγνωση του βιβλίου είναι ότι παρακολουθούμε πώς γεννιέται και αναπτύσσεται μια ιδέα σ' ένα εντυπωσιακά δημιουργικό μυαλό, πώς από διαισθητικός συλλογισμός μετασχηματίζεται σε ώριμη φυσική θεωρία.»

—YUVAL NE'EMAN, φυσικός,

«Ο Heisenberg αρεσκόταν να θέτει το ερώτημα “ποια είναι η διαφορά ανάμεσα σ' έναν ζωγράφο της αφηρημένης τέχνης και σ' έναν καλό θεωρητικό φυσικό”· και απαντούσε ο ίδιος: “ο ζωγράφος προσπαθεί να είναι όσο το δυνατόν πρωτότυπος, ενώ ο καλός φυσικός οφείλει να είναι όσο το δυνατόν πιο συντηρητικός”. Στο παρόν βιβλίο θέλησα να συμμορφωθώ με αυτή τη συμβουλή και, στην προσπάθεια να λύσουμε το παράδοξο του χρόνου, να ακολουθήσω λιγότερο ριζοσπαστική γραμμή απ' ό,τι άλλοι...»

—ILYA PRIGOGINE



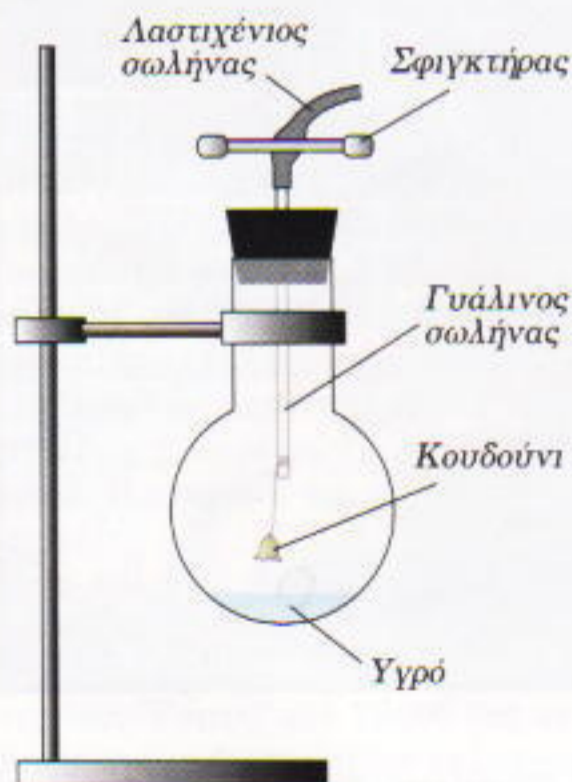
Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε στο βιβλιοπωλείο των Εκδόσεων Κάτοπτρο, στη Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), τηλ.: 3247785, καθώς επίσης και σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε· τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς. Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα. Τηλ.: 3643272, 3645098 Fax: 3641864

Κάηλντα στο εργαστήριο

Παράγει ήχο ένα κουδούνι στο κενό;

N. Paravyan

ΔΟΥ ΕΝΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ΠΕΙΡΑΜΑ που μπορείτε να εκτελέσετε στο σχολικό εργαστήριο. Χρονολογείται από τον 17ο αιώνα, όμως δεν έχει χάσει τίποτε από τη γοητεία του. Ξεκινήστε τις ετοιμασίες για το πείραμα στερεώνοντας σ' έναν ορθοστάτη μια σφαιρική φιάλη 250-300 ml, ώστε ο πυθμένας της να ακουμπά πάνω σ' ένα ηλεκτρικό μάτι. Ρίξτε μέσα στη φιάλη 20-25 ml νερού. Στη συνέχεια, περάστε στην οπή του ελαστικού πώματος της φιάλης έναν λεπτό γυάλινο σωλήνα, μήκους 15-20 cm. Στην άκρη του σωλήνα που προεξέχει πάνω από το πώμα προσαρμόστε ένα μικρό κομμάτι λαστιχένιου σωλήνα. Στην κάτω άκρη του γυάλινου σωλήνα κρεμάστε με κλωστή ένα μικρό κουδούνι —τόσο μικρό που να χωράει να περάσει από το στόμιο της φιάλης. Είστε πλέον έτοιμοι να εκτελέσετε το πείραμα.

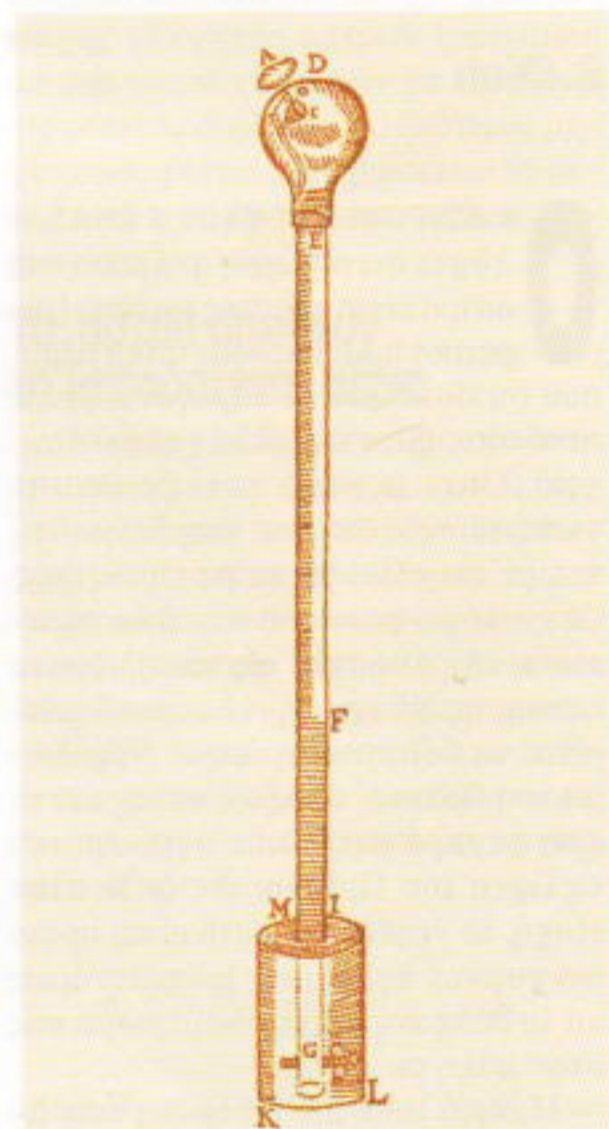


Σχήμα 1

Θερμάνετε τη φιάλη ώστε το νερό που περιέχει να αρχίσει να βράζει. (Παρατήρηση: Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε και λύχνο οιοπνεύματος, αλλά με προσοχή —το γυαλί μπορεί να σπάσει αν το φυτίλι έρθει σε επαφή με τη φιάλη.) Αφήστε το νερό να βράσει επί τρία λεπτά, οπότε λυγίστε την άκρη του λαστιχένιου σωλήνα και δέστε τη σφιχτά με σπάγκο· έτσι, σφραγίσατε τη φιάλη. (Παρατήρηση: Γι' αυτό το σκοπό θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε και κάποιον σφιγκτήρα.) Απομακρύνετε γρήγορα το ηλεκτρικό μάτι, και αφήστε τη φιάλη να ψυχθεί σε θερμοκρασία δωματίου. Τώρα μπορείτε να απομακρύνετε και τον ορθοστάτη, και να αναταράξετε τη φιάλη (με προσοχή). Θα ακούσετε το καμπανάκι να χτυπά, αλλά ο ήχος θα είναι πολύ αδύνατος.

Το κουδούνι ηχεί τόσο σιγά, επειδή η διαδικασία της ψύξης και συμπύκνωσης των υδρατμών ελαχιστοποίησε τον αέρα μέσα στη φιάλη, παράγοντας ένα σχετικό κενό. Απελευθερώστε τώρα την άκρη του λαστιχένιου σωλήνα, περιμένετε μερικά δευτερόλεπτα και μετά ξανακλείστε την. Αν ανακινήσετε και πάλι τη φιάλη, θα ακούσετε το κουδούνι να ηχεί σαφώς δυνατότερα. Γιατί άραγε; Επειδή επιτρέψατε να περάσει αέρας μέσα στη φιάλη, και έτσι να αυξηθεί η πυκνότητα του μέσου διάδοσης του ήχου.

Για να συνεχίσετε το πείραμα, αδειάστε το νερό και αντικαταστήστε το με 20-25 ml άνυδρης γλυκερίνης ή γλυκόλης. Επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία θέρμανσης και ψύξης του υγρού. Σε θερμοκρασία δωματίου, η πυκνότητα των ατμών αυτών των ουσιών είναι αρκετά μι-



Γκραβούρα που αναπαριστά μια παραλλαγή της συσκευής του Σχήματος 1. Προκειμένου να κινηθεί το γλωσσίδι (C) του κουδουνιού χρησιμοποιούνταν ένα κομμάτι μαγνητίτη (A). (Από το *Musurgia Universalis sive Ars Magna Consoni et Dissoni* του A. Kircher —Ρώμη, 1650.)

κρότερη από την πυκνότητα των υδρατμών. Το κενό, επομένως, θα είναι υψηλότερο από εκείνου του προηγούμενου πειράματος, και τα αποτελέσματα που θα παρατηρήσουμε θα είναι πιο έκδηλα: από απόσταση ενός μέτρου δεν θα μπορείτε να ακούσετε καθόλου το κουδούνι. ●

Ένα άστρο γεννιέται

Ιδόντες δε τον αστέρα εκάρησαν χαράν μεγάλην σφόδρα.

—Ματθ. 2, 10

S. Silich

ΟΙ ΑΣΤΡΟΝΟΜΟΙ ΕΧΟΥΝ ΑΝΑΚΑλύψει ότι ο χώρος ανάμεσα στα άστρα είναι γεμάτος με ένα εξαιρετικά αραιό μεσοαστρικό αέριο, που συνίσταται από υδρογόνο, μικρή ποσότητα ηλίου και άλλα χημικά στοιχεία. Όταν το αέριο αυτό βρεθεί στη γειτονιά ενός άστρου υπερθερμαίνεται, με αποτέλεσμα να εκπέμπει φως. Οι εν λόγω περιοχές του Διαστήματος είναι γνωστές ως νεφελώματα εκπομπής. Στο χειμερινό ουρανό μπορείτε να δείτε το περίφημο Νεφέλωμα του Ωρίωνα, ακριβώς κάτω από τα τρία λαμπρά άστρα που σχηματίζουν τη ζώνη του Ωρίωνα. Αν ζείτε στην εξοχή, το νεφέλωμα αυτό είναι ορατό διά γυμνού οφθαλμού· μπορείτε όμως να το δείτε και από το διαμέρισμά σας στην πόλη με κιάλια.

Μακριά από την επίδραση των άστρων, το μεσοαστρικό αέριο ψύχεται σε μερικούς μόνο βαθμούς Kelvin και συμπυκνώνεται δημιουργώντας ψυχρά αδιαφανή νέφη, τα οποία αδυνατεί να διαπεράσει το φως. Το καλοκαίρι, σ' εκείνη την περιοχή του Γαλαξία μας που διασταυρώνεται με τον αστερισμό του Κύκνου μπορείτε όντως να δείτε μια σκοτεινή «σφήνα» που χωρίζει το Γαλαξία στα δύο. Η σφήνα αυτή είναι στην πραγματικότητα μεσοαστρικό νέφος το οποίο αποκόπτει το φως των άστρων που βρίσκονται πίσω του.

Μοιάζει ο Γαλαξίας με αφρό...;

Μολονότι ο Γαλαξίας μας περιέχει μικρή ποσότητα μεσοαστρικού αερίου

(περίπου 5% της συνολικής μάζας του), το αέριο αυτό διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη δημιουργία των άστρων. Όταν σε μια περιοχή συγκεντρωθεί αρκετό μεσοαστρικό αέριο, γεννιέται ένα αστέρι. Πού συγκεντρώνεται όμως το εν λόγω αέριο; Γι'

αυτό ισχύει κάτι ανάλογο με το νερό: έλκεται από βαρυτικές δυνάμεις μέσα σε πηγάδια δυναμικού. Ωστόσο, ενώ ένα αέριο έλκεται προς το κέντρο της Γης εξαιτίας του βαρυτικού πεδίου της, συγκρατείται από την επιφάνειά της —κι έτσι γίνεται μέρος της γήινης



Σχήμα 1

Πολύ πρόσφατος σχηματισμός άστρου (πριν από 300.000 έτη) μέσα στο Μεγάλο Νεφέλωμα του Ωρίωνα. Η τολύπη αερίου στο κάτω αριστερό μέρος της εικόνας είναι αποτέλεσμα της εκβολής ύλης από ένα πρόσφατα σχηματισμένο άστρο.

ατμόσφαιρας. Αντίθετα, την πτώση του μεσοαστρικού αερίου προς το κέντρο του Γαλαξία σταματά αφ' ενός η πίεση του αερίου, και αφ' ετέρου η φυγόκεντρος δύναμη που αναπτύσσεται εξαιτίας της περιστροφής του Γαλαξία. Το συγκεκριμένο γεγονός έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό ενός στρώματος μεσοαστρικού αερίου στο γαλαξιακό επίπεδο. Τούτη η λεπτή περιστρεφόμενη «τηγανίτα» —με διάμετρο 30 kiloparsec και πάχος μόνο 150 με 200 parsec (το 1 parsec ισοδύναται με $3 \cdot 10^6$ m)— είναι η περιοχή όπου γεννιούνται τα άστρα.

Από τη στιγμή που γεννιέται ένα αστέρι, επηρεάζεται αμέσως το μεσοαστρικό αέριο που το περιβάλλει. Από τον νέο ήλιο εκπέμπεται ηλιακός άνεμος ακτινοβολίας και σωματιδίων ο οποίος απωθεί το μεσοαστρικό αέριο και το αναγκάζει να σχηματίσει μια μικρή (για τη γαλαξιακή κλίμακα) φυσαλίδα. Οι μεσοαστρικές φυσαλίδες γύρω από τον Ήλιο μας και από παρόμοια τυπικά άστρα είναι μάλλον μικρές. Ωστόσο, οι φυσαλίδες τις οποίες «φουσκώνουν» άστρα λαμπρότερα, περισσότερο ενεργά και με μεγαλύτερη μάζα είναι αξιοσημείωτα μεγαλύτερες. Αυτός ο ετερογενής τρόπος σχηματισμού φυσαλίδων κάνει το μεσοαστρικό αέριο να μοιάζει με αφρό —μεγάλες φυσαλίδες περιβάλλουν μεγάλα άστρα και μικρές φυσαλίδες περιβάλλουν μικρά άστρα. Εντούτοις, η παραπάνω περιγραφή, από τη στιγμή που κατανοήσαμε την αληθινή φύση του μεσοαστρικού αερίου, αποδεικνύεται υπεραπλουστευτική.

... Η με συγκοινωνούσες σήραγγες...;

Κλείνοντας τον κύκλο της ζωής του, ένα αστέρι μεγάλης μάζας καταλήγει σε μια έκρηξη σουπερνόβα (υπερκαινοφανή) εξακοντίζοντας τα ανώτερα στρώματά του με ταχύτητα χιλιάδων χιλιομέτρων ανά δευτερόλεπτο. Η ενέργεια της έκρηξης είναι της τάξης των 10^{44} J. Το εκτινασμένο κέλυφος διαστέλλεται βίαια, ισοπεδώνοντας στο πέρασμά του το μεσοαστρικό αέριο που βρίσκεται μπροστά του. Ύστερα από 12.000 έτη περίπου, όταν η διαστολή του κελύφους θα έχει ελαττωθεί, θα έχει σχηματιστεί μια μεγάλη κοιλότητα γύρω από

το χώρο της έκρηξης (οι αστρονόμοι ονομάζουν αυτές τις κοιλότητες *υπολείμματα σουπερνόβα*). Εύκολα μπορεί κανείς να φανταστεί μια ανάλογη κατάσταση: δημιουργήστε μια μεγάλη σαπουνόφουσκα φυσώντας μέσα από ένα καλάμακι και συγκρίνετέ τη με τις μικρές φυσαλίδες του αφρού.

Κάθε φυσαλίδα διατηρείται όσο το αέριο στο εσωτερικό της παραμένει ζεστό και μπορεί να ανθίσταται στην πίεση του περιβάλλοντος αέρα. Όταν το αέριο κρυώσει, η φυσαλίδα καταρρέει. Οι εκρήξεις σουπερνόβα είναι μάλλον συνηθισμένες στο Γαλαξία μας, καθώς συμβαίνουν μία ή δύο φορές κάθε αιώνα. Και επειδή απαιτούνται πολλές χιλιάδες έτη για να κρυώσει το θερμό αέριο των φυσαλίδων ώστε να καταρρεύσουν, οι χρόνοι ζωής των φυσαλίδων αλληλοεπικαλύπτονται. Στην πραγματικότητα, όταν μια νέα φυσαλίδα σχηματίζεται στη γειτονιά μιας γηραιότερης, συχνά, η νέα φυσαλίδα διατρύπα το κέλυφος της και της εγχέει θερμό αέριο. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια να παρατείνεται η ζωή της γηραιότερης φυσαλίδας. Συνεπώς, σχηματίζεται μια αλυσίδα αλληλοσυνδεόμενων φυσαλίδων, που μοιάζει με το δαιδαλώδες σύστημα σηράγγων ενός ορυχείου. Ωστόσο, ούτε η ιδέα αυτή, ενός μεσοαστρικού μέσου γεμάτου με σήραγγες, κράτησε για πολύ.

... Η μήπως με ελβετικό τυρί...;

Ραδιοαστρονομικές παρατηρήσεις που έγιναν την τελευταία δεκαετία κατέδειξαν ότι, πέρα από τη λεπτή δομή αφρού και τις συγκοινωνούσες σήραγγες, υπάρχουν στον μεσοαστρικό χώρο κοιλότητες με διάμετρο εκατοντάδων parsec ή ακόμη και kiloparsec. Το ηλιακό μας σύστημα βρίσκεται στο χείλος μιας τέτοιας γιγάντιας κοιλότητας με διάμετρο περίπου 300 parsec. Παρόμοιες παρατηρήσεις έχουν γίνει και σε γειτονικούς γαλαξίες, οι δίσκοι αερίου των οποίων μοιάζουν με ελβετικό τυρί όπου οι τρύπες προβάλλουν προς τα έξω.

Ποια είναι, όμως, η δύναμη που απωθεί το μεσοαστρικό αέριο μακριά από το γαλαξιακό δίσκο; Για να δημιουργηθεί μια κοιλότητα με διάμετρο 1 kiloparsec απαιτείται ενέργεια 10^{17} J —πολύ περισσότερη απ' όση μετα-

φέρεται στο διαστελλόμενο κέλυφος κατά μια έκρηξη σουπερνόβα. Οι αστροφυσικοί έχουν προτείνει μερικούς μηχανισμούς έκλυσης ενέργειας βάσει των οποίων θα μπορούσε να απελευθερωθεί η ενέργεια που απαιτείται για το σχηματισμό γιγάντιων μεσοαστρικών φυσαλίδων. Οι δύο πιο πολλά υποσχόμενες θεωρίες εμπλέκουν την πρόσκρουση ενός νέφους αερίου μεγάλης μάζας πάνω στο δίσκο ενός γαλαξία (παρόμοια με την πρόσκρουση ενός μετεωρίτη πάνω σ' έναν πλανήτη) ή τις διαδοχικές εκρήξεις σουπερνόβα στο κέντρο μιας περιοχής γέννησης άστρων (παρόμοια με μια σειρά εκρήξεων σε αποθήκη στρατιωτικού υλικού). Ο δεύτερος μηχανισμός φαίνεται να βρίσκεται σε μεγαλύτερη συμφωνία με τα παρατηρούμενα φαινόμενα.

Τα άστρα απωθούν το μεσοαστρικό αέριο

Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός άστρου, τόσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία του και τόσο εντονότερα πραγματοποιείται η καύση του πυρηνικού υλικού στο εσωτερικό του. Συνεπώς, τα άστρα μεγαλύτερης μάζας καίγονται γρήγορα και έχουν σχετικά μικρή διάρκεια ζωής. Ο αναμενόμενος χρόνος ζωής (το προσδόκιμο επιβίωσης), t_z , εξαρτάται από την αρχική μάζα M του άστρου:

$$t_z = 5 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{10M_H} \right)^{-1.6} \text{ έτη,}$$

όπου $M_H = 2 \cdot 10^{30}$ kg είναι η μάζα του Ήλιου. Προς το τέλος της ζωής τους, τα άστρα που έχουν μάζα $M \geq 7M_H$ γίνονται ασταθή και εκρήγνυνται ως σουπερνόβα, χάνοντας την περισσότερη από την ύλη τους. Ας μελετήσουμε, λοιπόν, λεπτομερώς πώς η ύλη που εξακοντίζεται με την έκρηξη αλληλεπιδρά με το περιβάλλον μεσοαστρικό αέριο.

Μετά την έκρηξη, ένα κρουστικό κύμα διαδίδεται με υπερηχητική ταχύτητα μέσα στο μεσοαστρικό αέριο, προκαλώντας σχεδόν ακαριαίες μεταβολές στη θερμοκρασία, την πίεση, την πυκνότητα και την ταχύτητα της ύλης σε στενά στρώματα με πάχος της τάξης της μέσης ελεύθερης διαδρομής των ατόμων του αερίου. Κατά τη διάρ-

κεια της διαδικασίας αυτής, μεγάλο μέρος της κινητικής ενέργειας του κινούμενου αερίου μετατρέπεται σε θερμότητα. Έτσι, μετά τη διέλευση του μετώπου κύματος, το μεσοαστρικό αέριο είναι πολύ πιο θερμό. Κατόπιν, σταδιακά, το αέριο ψύχεται καθώς η ενέργειά του διαφεύγει υπό τη μορφή ακτινοβολίας και καταναλώνεται κατά τη διαστολή. Η ταχύτητα του κρουστικού κύματος μειώνεται, και τελικά η διαστολή της θερμής φουσαλίδας γύρω από το άστρο σταματά εντελώς.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η ενέργεια που απελευθερώνεται από μία μόνο έκρηξη σουπερνόβα δεν αρκεί για να απομακρύνει αρκετό μεσοαστρικό αέριο, ώστε να δημιουργηθούν οι «τρύπες μέσα στο ελβετικό τυρί». Επομένως, θεωρείται ότι, προκειμένου να δημιουργηθούν αυτές οι φουσαλίδες, πρέπει να χρησιμοποιηθεί

η ενέργεια που απελευθερώνεται από μια διαδοχή σουπερνόβα. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Κατά κανόνα, τα άστρα γεννιούνται ως τμήμα μεγάλων αστρικών ομάδων στο εσωτερικό ψυχρών νεφών. Σχηματίζονται ταυτόχρονα χιλιάδες άστρα «ίδιου τύπου» (άστρα της ίδιας μάζας). Καθώς η διάρκεια ζωής ενός άστρου εξαρτάται από τη μάζα του, τα άστρα του ίδιου τύπου μέσα σε μια αστρική ομάδα θα εξελιχθούν ταυτόχρονα σε σουπερνόβα. Πρώτα εκρήγνυνται τα άστρα μεγαλύτερης μάζας, κατόπιν τα μικρότερα.

Στο ξεκίνημα της ζωής ενός αστρικού σμήνους, το μέσο θερμαίνεται από την ισχυρή ακτινοβολία που εκπέμπουν τα θερμά άστρα μεγάλης μάζας. Αργότερα, κατά τη διάρκεια της ζωής τους, τα άστρα μεγάλης μάζας αρχίζουν να αποβάλλουν ύλη υπό τη μορφή αστρικών ανέμων, οι οποίοι

απωθούν το περιβάλλον μεσοαστρικό αέριο. Μικρές κοιλότητες που περιβάλλουν μεμονωμένα άστρα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και δημιουργούν ένα κοινό κέλυφος. Ύστερα από αυτό το στάδιο, ξεκινάει η πιο δυναμική διαδικασία — οι εκρήξεις σουπερνόβα. Τα άστρα εκρήγνυνται το ένα μετά το άλλο, αρχίζοντας από αυτά με τη μεγαλύτερη μάζα. Πρώτα σ' αυτή τη διαδοχή είναι τα άστρα με μάζες 30-50 M_{\odot} , τα οποία εκρήγνυνται 4 με 5 εκατομμύρια έτη μετά τη γέννηση του αστρικού σμήνους. Επόμενα στη σειρά είναι τα μικρότερα άστρα του σμήνους, με μάζες 7-8 M_{\odot} , τα οποία εκρήγνυνται 40 με 60 εκατομμύρια έτη μετά τη γέννησή τους. Καθώς εκατοντάδες εκρήξεις πραγματοποιούνται η μια μετά την άλλη, ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί συνεχής. Ο σταθερός ρυθμός παραγωγής ενέργειας από αυτή τη διαδικασία εκφράζεται ως

$$L_{\odot} = 6,3 \cdot 10^{36} N E_{44} \text{ J/s,}$$

όπου N είναι το πλήθος των μεγάλης μάζας άστρων του σμήνους, και E_{44} η ενέργεια μιας έκρηξης σουπερνόβα εκπεφρασμένη σε μονάδες των 10^{44} J. Έπειτα από 50 εκατομμύρια έτη, όταν έχει γίνει και η τελευταία έκρηξη σουπερνόβα, η πηγή ενέργειας εξαντλείται. Εντούτοις, το κοινό κέλυφος, λόγω της συσσωρευμένης θερμότητας και κινητικής ενέργειας, συνεχίζει να διαστέλλεται για κάποια χρονική περίοδο, οδηγώντας τελικά στο σχηματισμό μιας γιγάντιας μεσοαστρικής φουσαλίδας. Και τώρα πλέον, ας παρακολουθήσουμε την εξέλιξη μιας τέτοιας φουσαλίδας.

Η απλούστερη φουσαλίδα είναι σφαίρα

Τα προβλήματα που αφορούν τη διάδοση του κρουστικού κύματος το οποίο δημιουργήθηκε από μια έκρηξη σ' ένα σημείο είναι πολύ δύσκολα και μπορούν να λυθούν μόνο μέσω ολοκλήρωσης ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων που περιγράφουν τη δυναμική του αερίου μέσου. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει γενική αναλυτική λύση. Προς τα τέλη της δεκαετίας του 1940, μετά την ανάπτυξη των πρώτων πυρηνικών όπλων, οι



Σχήμα 2

Κύματα αερίου και νέφη σκόνης εκπέμπονται από το πάρα πολύ μεγάλης μάζας άστρο η Τρόπιδος. Αυτή η γιγάντια έκρηξη συνέβη περίπου πριν από 150 χρόνια, δημιουργώντας δύο πολικούς λοβούς και έναν μεγάλο λεπτό δίσκο στον ισημερινό, που απομακρύνονται με ταχύτητα περίπου 230 εκατομμύρια χιλιόμετρα ανά ώρα.

επιστήμονες έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στην ανάλυση των κρουστικών κυμάτων.

Κατ' αρχάς, ας πάρουμε την απλούστερη περίπτωση: μια ισχυρή έκρηξη που συμβαίνει σ' ένα σημείο μέσα σε ομογενές μέσο. Η έκρηξη αυτού του τύπου χαρακτηρίζεται από ένα σφαιρικά συμμετρικό κρουστικό κύμα και κέλυφος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύθηκε από τον L.I. Sedon και τον J. Taylor. Οι λύσεις προϋποθέτουν δύο παραδοχές. Πρώτον, σχεδόν όλο το αέριο που απωθείται από το κρουστικό κύμα συσσωρεύεται μέσα σ' ένα λεπτό στρώμα ακριβώς μπροστά από το κρουστικό κύμα. Δεύτερον, η πίεση μέσα στην κοιλότητα είναι σχεδόν παντού σταθερή. Αυτό οφείλεται στην υψηλή θερμοκρασία στην οποία θερμαίνεται το αέριο από το κρουστικό κύμα, αλλά και στη γρήγορη διασπορά των πιθανών ανομοιογενειών. Οι παραπάνω ιδιότητες απλοποιούν δραστικά το πρόβλημα της ισχυρής έκρηξης μέσα σε ομογενές μέσο. Αποτελούν δε τη βάση της προσέγγισης *λεπτού στρώματος*, η οποία εφαρμόζεται ευρέως στην αστροφυσική και στη φυσική πλάσματος. Η θεωρία αυτή είναι επίσης γνωστή ως «μοντέλο του εκχιονιστήρα», μια και θεωρείται ότι το αέριο συγκεντρώνεται μπροστά από το κύμα όπως ακριβώς το χιόνι στο «μαχαίρι» του εκχιονιστικού μηχανήματος.

Η προσέγγιση λεπτού στρώματος βασίζεται σε δύο αξιώματα. Θεωρείται ότι αφ' ενός όλο το αέριο συγκεντρώνεται σ' ένα απειροστά λεπτό στρώμα μπροστά ακριβώς από το μέτωπο του κρουστικού κύματος, αφ' ετέρου η πίεση μέσα στην κοιλότητα είναι παντού η ίδια και εξαρτάται μόνο από το χρόνο. Η ίδια προσέγγιση μπορεί να χρησιμεύσει για να κατασκευάσουμε και το μοντέλο μιας έκρηξης σε ανομοιογενές μέσο, που θα έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό ενός μη σφαιρικού κελύφους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, όταν χρησιμοποιείται η προσέγγιση που ήδη περιγράψαμε, χάνεται κάθε πληροφορία σχετική με την κατανομή υδροδυναμικών μεγεθών μέσα στη φουσαλίδα, και μπορούμε να μιλάμε μόνο για μέση τιμή της πίεσης στο εσωτερικό της. Μολαταύτα, η εν λόγω μέθοδος

καθιστά δυνατή την περιγραφή μερικών σημαντικών ιδιοτήτων των μεσοαστρικών κελυφών, όπως είναι το σχήμα τους, οι ταχύτητες διαστολής τους και οι κατανομές των επιφανειακών πυκνοτήτων τους.

Είναι ενδιαφέρον ότι η εξάρτηση της ακτίνας R_x του σφαιρικού κελύφους από το χρόνο και τις αρχικές συνθήκες μπορεί να εξαχθεί με την πολύ απλή μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης. Προφανώς, μια έκρηξη χαρακτηρίζεται μόνο από την ενέργειά της E_0 και την πυκνότητα ρ_0 του μέσου στο οποίο εκτυλίσσεται, καθώς η πίεσή του και η θερμοκρασία του είναι μάλλον μικρές. Έτσι, η εξάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως

$$R_x = A \cdot E_0^a \cdot t^\gamma \cdot \rho_0^\beta,$$

όπου A είναι μια αδιάστατη σταθερά. Η ίδια εξίσωση ισχύει και για τις μονάδες μέτρησης των αντίστοιχων μεταβλητών:

$$m = J^a \cdot (\text{kg}/\text{m}^3)^\beta \cdot \text{s}^\gamma = m^{2a-3\beta} \cdot \text{kg}^{a+\beta} \cdot \text{s}^{\gamma-2a}.$$

Εξισώνοντας τους εκθέτες παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2a - 3\beta &= 1 \\ a + \beta &= 0 \\ \gamma - 2a &= 0, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $a = 1/5$, $\beta = -1/5$ και $\gamma = 2/5$. Επομένως,

$$R_x = \left(\frac{E_0}{\rho_0} \right)^{1/5} \cdot t^{2/5}.$$

Παίρνοντας την παράγωγο της R_x ως προς το χρόνο, βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διαστολής του κελύφους μειώνεται με το χρόνο

$$v_x = \left(\frac{E_0}{\rho_0} \right)^{1/5} \cdot t^{-3/5}.$$

Αυτός λοιπόν είναι ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται η μεσοαστρική φουσαλίδα που σχηματίστηκε σε ομογενές μέσο από μια στιγμιαία απελευθέρωση ενέργειας —όπως είναι, για παράδειγμα, μια έκρηξη σουπερνόβα.

Ο αστρικός άνεμος

Σε διάφορα στάδια της εξέλιξής τους, και ειδικά στο τελικό στάδιο, τα άστρα χάνουν μέρος της μάζας τους. Στα άστρα μεγάλης μάζας ο ρυθμός ε-

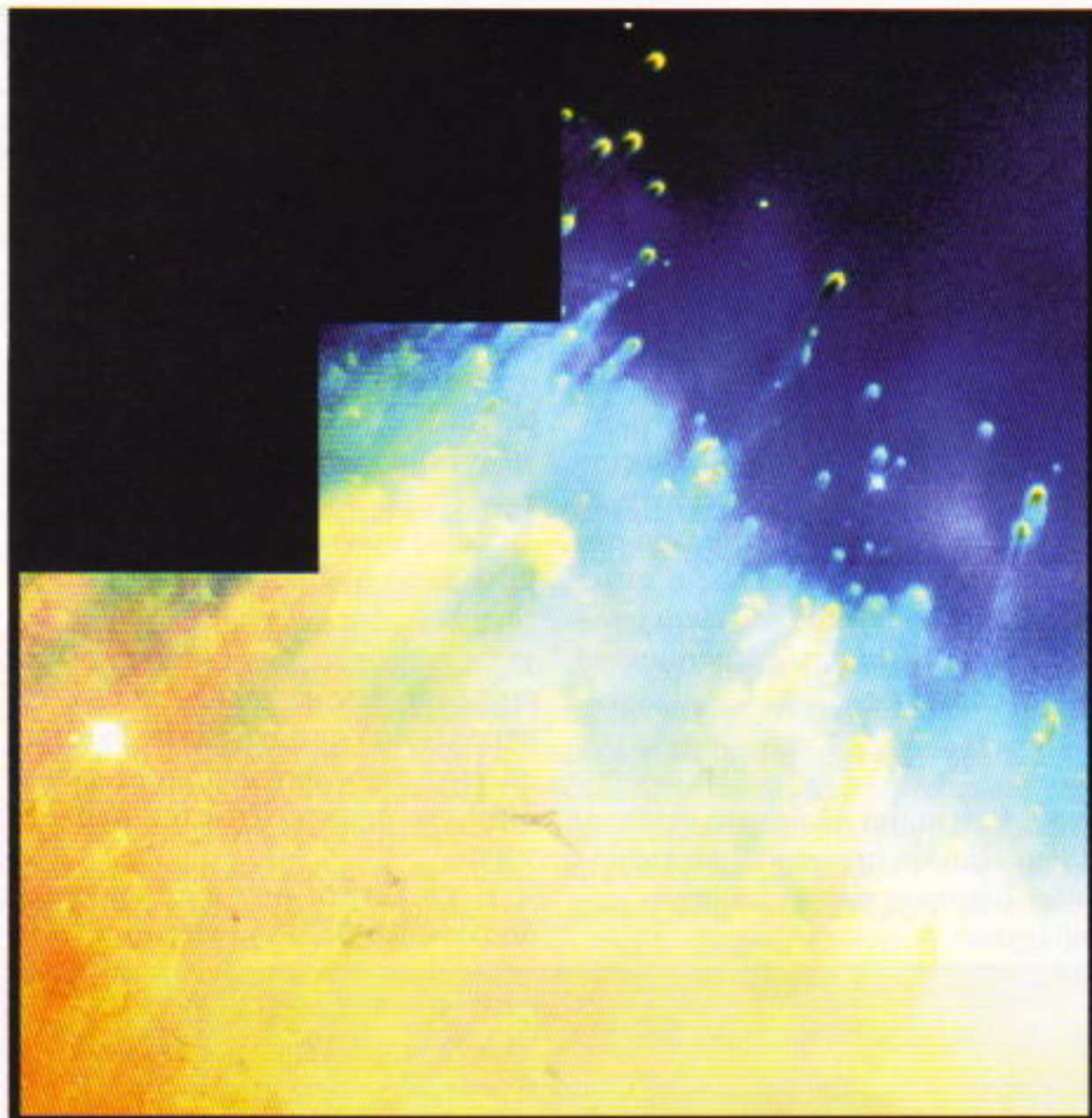
κροής της ύλης φτάνει τα 1.000 km/s, κι έτσι η ολική ενέργεια που εκλύεται για χιλιάδες χρόνια στο Διάστημα ως αστρικός άνεμος είναι σχεδόν συγκρίσιμη με την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια έκρηξη σουπερνόβα. Επειδή η ενέργεια που απομακρύνεται με τον αστρικό άνεμο εκλύεται βαθμιαία, στερείται της καταστρεπτικής δύναμης ενός σουπερνόβα. Ωστόσο, οι κοιλότητες που σχηματίζονται στο μεσοαστρικό μέσο από τους αστρικούς ανέμους έχουν πολλά κοινά στοιχεία με αυτές που σχηματίζονται από σουπερνόβα. Εντούτοις, λόγω της διαρκούς εισροής ενέργειας μέσα στην κοιλότητα, η εσωτερική δομή μιας φουσαλίδας που «φουσκώνει» από αστρικό άνεμο διαφέρει από την εσωτερική δομή μιας φουσαλίδας που δημιουργείται από σουπερνόβα.

Η κοιλότητα που δημιουργείται από αστρικό άνεμο χωρίζεται σε τέσσερις ζώνες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Η εσωτερική ζώνη (α) είναι η περιοχή του ελεύθερα διαστελλόμενου αστρικού ανέμου που κινείται με σταθερή ταχύτητα· οροθετείται από το εσωτερικό κρουστικό κύμα. Η ακτίνα της ζώνης αυτής είναι μικρή σε σύγκριση με το μέγεθος ολόκληρης της κοιλότητας. Η επόμενη ζώνη (β) είναι γεμάτη με θερμό αέριο, σχεδόν σταθερής πίεσης, το οποίο διαφεύγει κυρίως από το εσωτερικό σύνορο του ψυχρού και πυκνού κελύφους (γ). Το ψυχρό και πυκνό κέλυφος (γ) διαχω-



Σχήμα 3

Αναπαράσταση κοιλότητας που σχηματίστηκε από αστρικό άνεμο. (1) μεσοαστρικό αέριο· (2) εσωτερικό κρουστικό κύμα (ΚΚ)· (3) εξωτερικό κρουστικό κύμα (ΚΚ)· (4) επιφάνεια ασυνέχειας (ΕΑ).



Σχήμα 4

Η σύγκρουση δύο αερίων κοντά σ' ένα άστρο που πεθαίνει. Οι αστρονόμοι θεωρούν ότι οι κομητοειδείς κόμβοι στην πάνω δεξιά γωνία σχηματίστηκαν όταν αέριο που εξακοντίστηκε από την επιφάνεια του «καταδικασμένου» άστρου συγκρούστηκε με ψυχρότερο αέριο, που είχε εκτοξευτεί από το άστρο σχεδόν 10.000 έτη νωρίτερα.

ρίζεται από τη ζώνη (β) με την επιφάνεια ασυνέχειας, και αποτελείται από μεσοαστρικό αέριο (δ) το οποίο έχει συμπιεστεί από το εξωτερικό κρουστικό κύμα.

Όπως και με τη διαστολή που συμβαίνει εξαιτίας μιας έκρηξης σ' ένα σημείο, η κίνηση ενός τέτοιου κελύφους περιγράφεται από τους νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Στην περίπτωση του αστρικού ανέμου, όμως, η ολική ενέργεια των υπολειμμάτων δεν διατηρείται. Μπροστά από ένα εσωτερικό κρουστικό κύμα, η κινητική ενέργεια της αστρικής ύλης που απομακρύνεται από την επιφάνεια του άστρου μετατρέπεται σε θερμότητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη θέρμανση του αερίου της ζώνης (β), η οποία ενεργεί σαν ελαστικός προφυλακτήρας που απωθεί το εξωτερικό πυκνό κέλυφος. Η μεταβολή της θερμικής ενέργειας του

εν λόγω προφυλακτήρα προσδιορίζεται από την ισχύ L του αστρικού ανέμου. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της διαστατικής ανάλυσης, εξαγάγουμε εύκολα την εξάρτηση της ακτίνας του κελύφους από το χρόνο, την πυκνότητα του περιβάλλοντος αερίου και την ισχύ του αστρικού ανέμου

$$R_x = \left(\frac{L}{\rho_0} \right)^{1/5} \cdot t^{3/5}.$$

Όπως βλέπουμε, η διαρκής εισροή ενέργειας μέσα στην κοιλότητα κάνει τη διαστολή περισσότερο ομοιόμορφη.

Από το σφαιρικό στο πραγματικό σχήμα

Οι τύποι (1) έως (3) δείχνουν πώς εξαρτάται ο ρυθμός διαστολής του κελύφους από την πυκνότητα του περιβάλλοντος αερίου: όταν οι υπόλοιπες συνθήκες παραμένουν αμετά-

βλητες, όσο μειώνεται η πυκνότητα του αερίου, τόσο αυξάνεται ο ρυθμός διαστολής. Στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσαμε ότι το αέριο έξω από τις φυσαλίδες είχε σταθερή πυκνότητα σε όλη την έκτασή του. Τι θα μπορούσε να συμβεί, όμως, αν η πυκνότητα του αερίου έξω από μια φυσαλίδα μεταβαλλόταν από σημείο σε σημείο; Γιγάντιες φυσαλίδες που υπόκεινται σε τέτοιες συνθήκες αδυνατούν να διατηρήσουν το σφαιρικό τους σχήμα. Προκειμένου να κάνουμε έναν πρόχειρο υπολογισμό για το πώς θα εξελιχθεί η μορφή της φυσαλίδας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε τμήμα του κελύφους είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, και να εφαρμόσουμε τους προηγούμενους τύπους για να προβλέψουμε το ρυθμό διαστολής τους. Σε περιοχές όπου το εξωτερικό αέριο είναι λιγότερο πυκνό, το κέλυφος θα διασταλεί πιο γρήγορα. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε επιμήκυνση του κελύφους στις περιοχές αυτές.

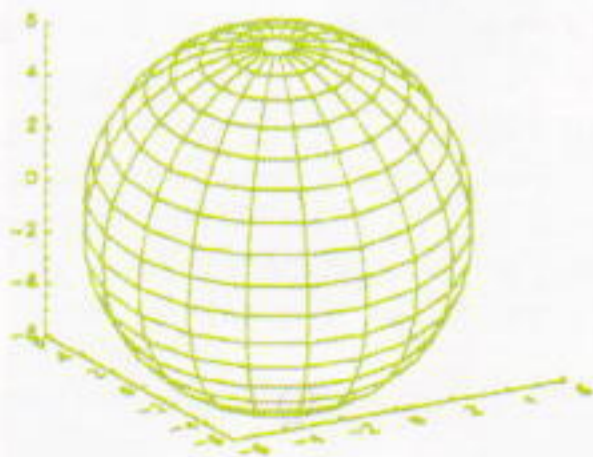
Στον γαλαξιακό δίσκο, η έλξη προς τον πυρήνα σχεδόν αντισταθμίζεται από τη φυγόκεντρο δύναμη, και μόνο η επιτάχυνση έξω από το γαλαξιακό επίπεδο μένει χωρίς να εξισορροπείται. Τόσο η πίεση όσο και η πυκνότητα του μεσοαστρικού αερίου μειώνονται με την απόσταση από το γαλαξιακό επίπεδο —παρόμοια με ό,τι συμβαίνει στην ατμόσφαιρα της Γης σε μεγάλα ύψη. Συνεπώς, μεγάλα κελύφη διαστέλλονται πιο γρήγορα σε περιοχές που βρίσκονται μακριά από το γαλαξιακό επίπεδο.

Η διαστολή μιας φυσαλίδας επηρεάζεται επίσης από την ανόμοια, ή διαφορετική, περιστροφή των διαφόρων στοιχείων μέσα στο γαλαξία. Όπως οι πλανήτες σ' ένα ηλιακό σύστημα περιφέρονται γύρω από τον ήλιο με διαφορετικές ταχύτητες, διαφορετικά στοιχεία σ' ένα γαλαξία περιφέρονται γύρω από το κέντρο του γαλαξία επίσης με διαφορετικές ταχύτητες. Όταν η μεσοαστρική φυσαλίδα διαστέλλεται μέχρι ένα αρκετά μεγάλο μέγεθος, εξαναγκάζει το περιβάλλον αέριο κατά μήκος του γαλαξιακού επιπέδου να βραδυπορεί ή να προηγείται κατά την περιστροφή του. Συνεπώς, οι φυσαλίδες τείνουν να επιμηκυνθούν προς εκείνη την κατεύθυνση της γα-

λαξιακής περιστροφής όπου το αέριο έχει απωθηθεί και έχει καταστεί αραιότερο.

Για να περιγράψουμε με ακρίβεια τη διαστολή μεγάλων γαλαξιακών κελυφών, χρειάζεται να λύσουμε τρισδιάστατα προβλήματα της δυναμικής αερίων. Η προσπάθεια λύσης τέτοιων προβλημάτων οδηγεί στην ανάπτυξη νέων αριθμητικών μεθόδων και αντίστοιχων εφαρμογών στην αστροφυσική. Ωστόσο, η ανάπτυξη αλγορίθμων που θα προσομοιώσουν με ακρίβεια μεγάλα γαλαξιακά κελύφη είναι εξαιρετικά δύσκολη και απαιτεί τεράστια ποσότητα υπολογισμών, χρόνου και προσπάθειας. Για παράδειγμα, οι υπολογισμοί που έγιναν για να προβλέψουν την εξέλιξη δισδιάστατων κελυφών μίας μόνο μορφής —πραγματοποιήθηκαν τη δεκαετία του 1980 από τους αμερικανούς αστροφυσικούς MacCray, MacLow και Norman— απαιτήσαν 6 με 12 ώρες υπολογισμών με τον πιο ισχυρό υπερυπολογιστή της εποχής. Η πλήρης λύση τρισδιάστατων προβλημάτων αντιμετωπίζει τεράστια υπολογιστικά προβλήματα, ακόμη κι όταν χρησιμοποιούνται πολύ γρήγοροι υπολογιστές.

Επομένως, για πρακτικούς λόγους, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο τις γενικές μεθόδους επίλυσης των πολυδιάστατων προβλημάτων οι οποίες στηρίζονται στις προσεγγίσεις λεπτού στρώματος, όπως περιγράφηκαν παραπάνω. Υπάρχουν δύο μέθοδοι για να λύσουμε προβλήματα της δυναμικής αερίων. Σύμφωνα με τη μέθοδο του Euler, καταγράφονται οι μεταβολές όλων των φυσικών ποσοτήτων σε συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο. Η

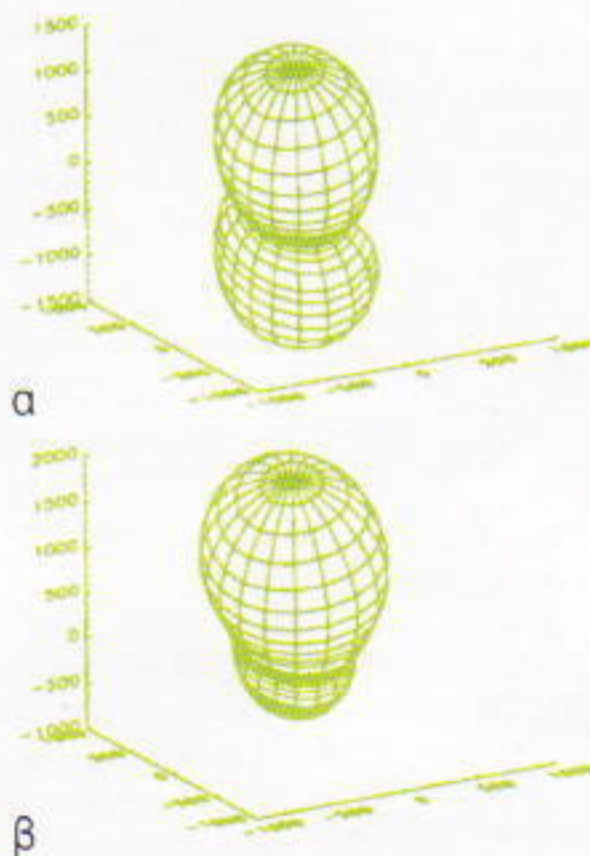


Σχήμα 5

Διαίρεση, κατά την έναρξη των υπολογισμών, ενός σφαιρικού κελύφους σε «λαγκρανζιανά σωματίδια».

ροή των ρευστών περιγράφεται από τα χρονομεταβαλλόμενα πεδία της ταχύτητας, της πυκνότητας και της θερμοκρασίας. Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange, καταγράφονται οι κινήσεις των σωματιδίων που συνιστούν το μέσο. Για τη μελέτη της κίνησης των πολυδιάστατων κελυφών σύμφωνα με την προσέγγιση λεπτού στρώματος, χρησιμοποιείται η μέθοδος του Lagrange. Προκειμένου να κάνουμε τους υπολογισμούς, χωρίζουμε ολόκληρο το κέλυφος σε N «λαγκρανζιανά σωματίδια». Η κίνηση κάθε «σωματιδίου» περιγράφεται από τους νόμους διατήρησης της μάζας και της ορμής, όπως ακριβώς και για ολόκληρο το σφαιρικό κέλυφος μέσα σε ομογενές μέσο. Εντούτοις, αντί για ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφουν τη μεταβολή της ακτίνας του σφαιρικού κελύφους, έχουμε ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση των «σωματιδίων» του κελύφους.

Για να πετύχουμε ικανοποιητικά ακριβή υπολογισμό, διαιρούμε το κέλυφος σε 1.600 «λαγκρανζιανά σωματίδια». Η διαίρεση αυτή οδηγεί σ' ένα σύστημα 11.200 συνήθων διαφορικών



Σχήμα 6

(α) Κέλυφος το οποίο σχηματίστηκε από την έκρηξη 100 σχεδόν σουπερνόβα που βρίσκονταν στο γαλαξιακό επίπεδο, σε απόσταση 8,5 parsec από το κέντρο του γαλαξία. (β) Ίδιες αρχικές συνθήκες με το (α), αλλά οι σουπερνόβα βρίσκονται 50 parsec πάνω από το γαλαξιακό επίπεδο.

εξισώσεων —δεδομένου ότι η κίνηση κάθε «σωματιδίου» περιγράφεται από επτά εξισώσεις (μία για τη διατήρηση της μάζας, τρεις για τις συνιστώσες της ορμής, τρεις για τις συνιστώσες της ταχύτητας)— συν μία εξίσωση για τη διατήρηση της ενέργειας που αφορά όλα τα «σωματίδια» μαζί. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια ενός καλού υπολογιστή και τη χρήση ειδικών εξισώσεων που έχουν αναπτυχθεί από τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Στο Σχήμα 6 φαίνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για την εξέλιξη κελυφών του δικού μας Γαλαξία. Εμφανίζονται κελύφη που βρίσκονται τοποθετημένα στην ίδια απόσταση από το γαλαξιακό κέντρο με τον Ήλιο μας. Την ενέργεια στην κοιλότητα παρέχει ένα σμήνος 100 περίπου άστρων μεγάλης μάζας. Το Σχήμα 6α αναπαριστά ένα κέλυφος που σχηματίζεται γύρω από σμήνος το οποίο βρίσκεται στο γαλαξιακό επίπεδο. Στο Σχήμα 6β, το αστρικό σμήνος είναι μετατοπισμένο μόλις 50 parsec πάνω από το γαλαξιακό επίπεδο. Είναι φανερό ότι η μορφή του κελύφους εξαρτάται ισχυρά από τη θέση που καταλαμβάνει το σμήνος. Όπως φαίνεται, οι μορφές των κελυφών παραμορφώνονται λόγω της διαφορικής περιστροφής του γαλαξιακού δίσκου.

Όπως μπορείτε να δείτε, οι τεράστιες μεσοαστρικές φουσαλίδες τείνουν να πάρουν το σχήμα κλεψύδρας. Κατά τα τελευταία στάδια ανάπτυξης, σχηματίζεται στο κέλυφος, κοντά στο γαλαξιακό επίπεδο, ένας λαιμός· πρόκειται για ένα στενό στρώμα που περιέχει την περισσότερη από τη συσσωρευμένη μεσοαστρική ύλη. Μέσα σ' αυτό το στρώμα επικρατούν οι κατάλληλες συνθήκες για να γεννηθούν μεγάλα μεσοαστρικά νέφη. Και μέσα απ' αυτά τα νέφη είναι που αναδύονται νεαρές ομάδες άστρων. Άρα, η τεράστια μεσοαστρική φουσαλίδα που ήρθε στη ζωή ως αποτέλεσμα αστρικών εκρήξεων γίνεται η μήτρα όπου μια νέα γενιά άστρα ξεκινούν τη ζωή τους. Ο κύκλος της κοσμικής εξέλιξης έκλεισε. ■

Το άρθρο επιμελήθηκε για μαθητές και προπτυχιακούς σπουδαστές ο V. Surdin.

Ανόμοιοι δίδυμοι

Χρησιμοποιώντας συζυγείς αριθμούς για να δαμάσουμε τους άρρητους

V.N. Vaguten

ΠΟΛΛΑ ΔΥΣΚΟΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΠΟΡΟΥΝ να λυθούν αν παρατηρήσουμε τις συμμετρίες διαφόρων τύπων στο δεδομένο σχήμα. Μελέτες της συμμετρίας μπορούν επίσης να αποδειχτούν χρήσιμες σε προβλήματα στα οποία εμπλέκεται η άλγεβρα.

Από τα διάφορα ζητήματα που εξετάζονται σε τούτο το άρθρο προκύπτει ότι είναι χρήσιμο να αντικαθιστούμε έναν αριθμό της μορφής $a + b\sqrt{d}$ με το συζυγή του $a - b\sqrt{d}$. Αυτό το απλό τέχνασμα —η αλλαγή του προσήμου πριν από το ριζικό— βοηθάει να λύσουμε διάφορα προβλήματα στην άλγεβρα και τον απειροστικό λογισμό, από απλούς υπολογισμούς μέχρι και περίπλοκα προβλήματα ολυμπιάδων. Τα περισσότερα από τα παραδείγματά μας είναι χρήσιμα ως εισαγωγή σε ορισμένες αξιοσημείωτες μαθηματικές θεωρίες.

Ζεύγη συζυγών αριθμών εμφανίζονται όταν λύνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση η διακρίνουσα της οποίας δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$ έχει το ζεύγος των συζυγών ριζών

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Θα επανέλθουμε σ' αυτό αργότερα. Ας αρχίσουμε, όμως, με παραδείγματα άλλου τύπου.

... Από τον αριθμητή στον παρονομαστή (και αντίστροφα)

Υποθέστε ότι λύνετε κάποιο πρόβλημα από ένα βιβλίο, και βρίσκετε την απάντηση $1 / (3 - \sqrt{7})$, αλλά στο βιβλίο δίνουν την απάντηση $(3 + \sqrt{7}) / 2$. Μη βιαστείτε να ψάξετε για λάθος στη λύση σας: αυτοί οι αριθμοί είναι ίσοι, διότι

$$(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 3^2 - 7 = 2.$$

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα στα οποία αποδεικνύεται ωφέλιμο να μετατοπίζουμε την «αρρητότητα» α-

πό τον αριθμητή στον παρονομαστή, ή αντιστρόφως.

1. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{2})} + \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{99} + \sqrt{100})}.$$

Το άθροισμα υπολογίζεται αμέσως αν το ξαναγράψουμε ως

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = -1 + 10 = 9.$$

(Το άθροισμα είναι «τηλεσκοπικό»: ύστερα από απλοποίηση των ενδιάμεσων όρων, παραμένουν μόνο οι δύο ακραίοι όροι, -1 και $\sqrt{100}$.)

2. Αποδείξτε ότι για όλους τους φυσικούς m και n ισχύει

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{an^2}, \quad (1)$$

όπου $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η ανισότητα

$$\left| \frac{m - n\sqrt{2}}{n} \right| = \frac{|m^2 - 2n^2|}{(m + n\sqrt{2})n} \geq \frac{1}{(m + n\sqrt{2})n} \quad (2)$$

ισχύει πάντοτε, διότι ο αριθμός $|m^2 - 2n^2|$ είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος (η ισότητα $m^2 = 2n^2$ είναι αδύνατη). Αποδεικνύουμε την ισότητα (1) με εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δυο φυσικοί αριθμοί m και n για τους οποίους η ανισότητα δεν είναι αληθής. Τότε,

$$\frac{-1}{an^2} < \frac{m}{n} - \sqrt{2} < \frac{1}{an^2}.$$

Αν πάρουμε τη δεξιά ανισότητα και την πολλαπλασιάσουμε με n , προκύπτει $m < n\sqrt{2} + 1/an$. Προσθέτοντας $n\sqrt{2}$ και στα δύο μέλη και πολλαπλασιάζοντας πάλι με n , λαμβάνουμε

$$n(m+n\sqrt{2}) < n\left(2n\sqrt{2} + \frac{1}{an}\right) = 2n^2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$= 2n^2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι $2n^2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq n^2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = an^2$. Πράγματι, η συγκεκριμένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με τη $n^2\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq n^2\sqrt{3} + \sqrt{2}$, ή $\sqrt{3} - \sqrt{2} \leq n^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, που είναι αληθής, αφού το $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ είναι θετικό και το n^2 είναι φυσικός αριθμός.

Έχουμε, λοιπόν, $n(m+n\sqrt{2}) \leq an^2$. Αντιστρέφοντας, παίρνουμε $1/an^2 < 1/(m+n\sqrt{2})n \leq |(m-n\sqrt{2})|/n$ (από την ανισότητα (2)), το οποίο σημαίνει ότι η ανισότητα (1) είναι τελικά αληθής για κάθε m και n .

Η ανισότητα (1) δείχνει ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν προσεγγίζεται καλά από κλάσματα με μικρούς παρονομαστές. Κάτι ανάλογο με αυτή την ανισότητα (για κάποιο άλλο a) ισχύει για κάθε «τετραγωνική αρρητιότητα», και όχι μόνο για το $\sqrt{2}$. Η ανισότητα (1) ισχύει για κάθε $a > \sqrt{3} + \sqrt{2}$, αλλά, παρ' όλα αυτά, το $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ δεν είναι η καλύτερη δυνατή σταθερά. Τα ζητήματα που αφορούν την προσέγγιση τετραγωνικών αρρητιοτήτων από ρητούς αριθμούς αποτελούν σημαντικό και περίτεχνο τμήμα της θεωρίας αριθμών. Στα προβλήματα που ακολουθούν θα συναντή-

σουμε για μία ακόμη φορά προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$.

3. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = (\sqrt{n^2+1} - n)n$. (Υποθέτουμε ότι είστε εξοικειωμένοι με την έννοια των ορίων, τουλάχιστον διαισθητικά.) Ας ξαναγράψουμε την a_n ως

$$(\sqrt{n^2+1} - n)n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{1 + \sqrt{1+1/n^2}}.$$

Είναι τώρα προφανές ότι η (a_n) είναι αύξουσα και τείνει στο $1/2$.

4. Θεωρήστε τις δύο ακολουθίες $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ και $b_n = \sqrt{4n+2}$. Αποδείξτε ότι

(α) $[a_n] = [b_n]$, όπου το $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x .

(β) $0 < b_n - a_n < 1/(16n\sqrt{n})$.

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $(a_n)^2 < (b_n)^2$. Πράγματι, αυτό σημαίνει ότι $2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2$. Ένας σύντομος υπολογισμός θα δείξει ότι η συγκεκριμένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $4n^2+4n < 4n^2+4n+1$, που είναι αληθής. Έτσι, $(a_n)^2 < (b_n)^2$, και (αφού και τα δύο είναι θετικά) $a_n < b_n$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $(a_n)^2 > 4n+1$. Και πάλι, η ανισότητα $2n+1+2\sqrt{n(n+1)} > 4n+1$ είναι ισοδύναμη με την $\sqrt{n(n+1)} > n = \sqrt{n} \cdot n$,



που προφανώς αληθεύει. Επίσης, ο αριθμός $(b_n)^2 = 4n + 2$ δίνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθεί με το 4, και έτσι δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ενός ακεραίου (ο αναγνώστης καλείται να το ελέγξει αυτό άμεσα). Επομένως, το τετράγωνο του ακεραίου $[b_n]$ είναι το πολύ $4n + 1$.

Έχουμε τώρα τις εξής ανισότητες: $[b_n] \leq \sqrt{4(n+1)} < a_n < b_n$. Τούτο σημαίνει ότι το a_n είναι «φραγμένο μεταξύ» των $[b_n]$ και b_n , ένα διάστημα μήκους μικρότερου του 1. Συνεπώς, έχουμε $[a_n] = [b_n]$, που αποδεικνύει την (α).

Τώρα χρειάζεται μόνο να βρούμε ένα άνω φράγμα για τη διαφορά $b_n - a_n$. Στο παρακάτω αλγεβρικό επιχείρημα, παρατηρήστε πώς μετατοπίζουμε συζυγείς αριθμούς από αριθμητή σε παρονομαστή δύο φορές:

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \sqrt{4n+2} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \\ &= \frac{[\sqrt{4n+2} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})][\sqrt{4n+2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})]}{\sqrt{4n+2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \cdot \frac{2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4n+2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \cdot \frac{1}{2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}} \end{aligned}$$

(ευτυχώς $[(2n+1) - 2\sqrt{n(n+1)}][(2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}] = 1$).
Τώρα,

$$\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > \sqrt{4n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n}$$

και

$$2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} > 2n+1 + 2\sqrt{n \cdot n} = 4n+1 > 4n.$$

Έτσι, αυτό το τελευταίο γινόμενο δύο κλασμάτων φράσσεται από

$$\frac{1}{[2\sqrt{n} + \sqrt{n}](4n)} = \frac{1}{16n\sqrt{n}},$$

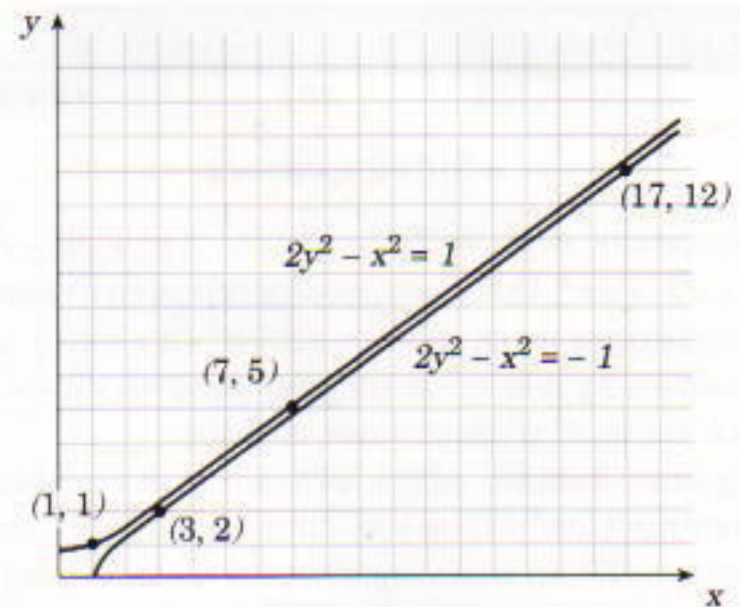
το οποίο είναι το ζητούμενο άνω φράγμα.

Παρατηρήστε επίσης ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής. Αλλά, για να επιτύχει κανείς καλύτερα φράγματα (και να εξετάσει συναρτήσεις με πολλαπλά ριζικά), πρέπει να χρησιμοποιήσει μεθόδους απειροστικού λογισμού.

Εναλλάσσοντας συν με πλην

Αν μια παράσταση στην οποία εμπλέκεται το \sqrt{d} είναι ίση με $p + q\sqrt{d}$, και αντικαταστήσουμε το \sqrt{d} με το $-\sqrt{d}$ σε ολόκληρη την παράσταση, τότε η νέα παράσταση που προκύπτει ισούται με το συζυγή αριθμό $p - q\sqrt{d}$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά την ακόλουθη περίπτωση αυτής της αρχής: Αν οι a και b είναι ρητοί αριθμοί και το \sqrt{d} δεν είναι, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$(a + b\sqrt{d})^n = p + q\sqrt{d} \Rightarrow (a - b\sqrt{d})^n = p - q\sqrt{d}. \quad (4)$$



Σχήμα 1

5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5},$$

στην οποία οι x, y, z και t είναι ρητοί αριθμοί, δεν έχει λύσεις.

Φυσικά, μπορούμε να επιχειρήσουμε να βρούμε ξεχωριστά το άθροισμα των όρων που δεν περιλαμβάνουν $\sqrt{5}$ στο αριστερό μέλος, και να το θέσουμε ίσο με 2, και κατόπιν το συντελεστή του $\sqrt{5}$, και να τον θέσουμε ίσο με 1. Αλλά δεν είναι σαφές τι θα κάνουμε με το πολύπλοκο σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει με τούτο τον τρόπο. Αντ' αυτού, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή (4), και θα αλλάξουμε το πρόσημο του $\sqrt{5}$:

$$(x - y\sqrt{5})^4 + (z - t\sqrt{5})^4 = 2 - \sqrt{5}.$$

Ο αριθμός στα αριστερά είναι θετικός, ενώ ο αριθμός στα δεξιά αρνητικός! Η συγκεκριμένη αντίφαση αποδεικνύει ότι οι ρητοί αριθμοί x, y, z και t δεν υπάρχουν.

6. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρα στο πλήθος ζεύγη (x, y) φυσικών αριθμών για τους οποίους

$$|x^2 - 2y^2| = 1. \quad (5)$$

Είναι εύκολο να βρούμε διάφορα ζεύγη αυτού του τύπου για μικρά x και y : $(1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12), \dots$ (Σχήμα 1). Αλλά πώς μπορούμε να συνεχίσουμε τη συγκεκριμένη διαδικασία; Είναι δυνατόν να βρούμε ένα γενικό τύπο για να περιγράψουμε τούτες τις λύσεις;

Ο αριθμός $1 + \sqrt{2}$ θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε σ' αυτά τα ερωτήματα. Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει τον κανόνα που μας επιτρέπει να συνεχίζουμε να βρίσκουμε νέες λύσεις (x, y) . Πώς θα συμπληρωθεί η έκτη γραμμή του πίνακα;

Βλέπουμε ότι οι συντελεστές x_n και y_n του αριθμού

$$x_n + y_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$$

δίνουν το απαραίτητο ζεύγος.

Για να το αποδείξουμε, κοιτάμε τη στήλη των συζυγών αριθμών στον πίνακα (χρησιμοποιούμε και πάλι την αρχή (4)):

n	$(1 + \sqrt{2})^n$	x_n	y_n	$x_n^2 - 2y_n^2$	$(1 - \sqrt{2})^n$
1	$1 + \sqrt{2}$	1	1	$1 - 2 = -1$	$1 - \sqrt{2}$
2	$3 + 2\sqrt{2}$	3	2	$9 - 8 = 1$	$3 - 2\sqrt{2}$
3	$7 + 5\sqrt{2}$	7	5	$49 - 50 = -1$	$7 - 5\sqrt{2}$
4	$17 + 12\sqrt{2}$	17	12	$289 - 288 = 1$	$17 - 12\sqrt{2}$
5	$41 + 29\sqrt{2}$	41	29	$1681 - 1682 = -1$	$41 - 29\sqrt{2}$
...

$$x_n - y_n \sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις, λαμβάνουμε

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = [(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})]^n = (-1)^n,$$

και έτσι, η παράσταση που μας ενδιαφέρει ισούται εναλλάξ με 1 και -1. Προσθέτοντας αυτές τις δύο εξισώσεις και αφαιρώντας κατόπιν τη δεύτερη από την πρώτη, λαμβάνουμε τελικά παράσταση για τα x_n και y_n σε κλειστή μορφή:

$$x_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}, \quad y_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

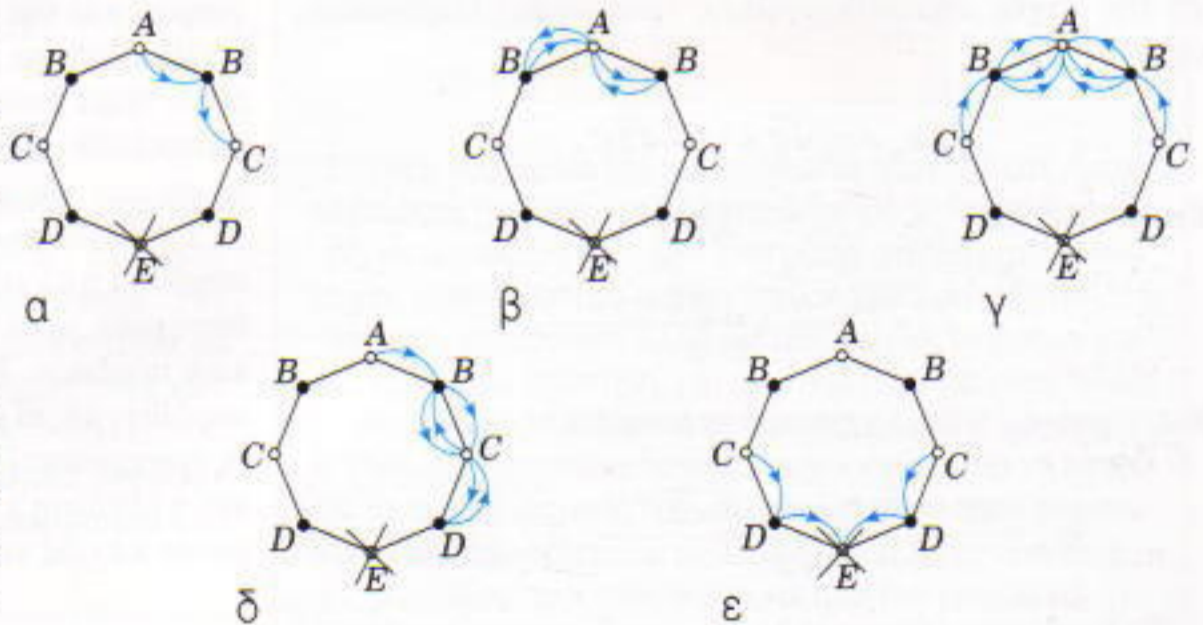
Είναι δυνατόν να λύσουμε τούτο το πρόβλημα χωρίς να καταφύγουμε στους άρρητους αριθμούς $1 + \sqrt{2}$ και $1 - \sqrt{2}$; Τώρα που ξέρουμε την απάντηση δεν είναι δύσκολο να εκφράσουμε το ζεύγος (x_{n+1}, y_{n+1}) (με τη βοήθεια του προηγούμενου ζεύγους (x_n, y_n)): έχουμε ότι $x_{n+1} + y_{n+1} \sqrt{2} = (x_n + y_n \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$, και έτσι

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n. \quad (6)$$

Θα μπορούσε πιθανόν κάποιος να μαντέψει αυτή την αναδρομική σχέση εξετάζοντας κάποιες αρχικές λύσεις και ελέγχοντας κατόπιν ότι

$$|x_n^2 - 2y_n^2| = |x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2|.$$

Αν θέσουμε τις αρχικές συνθήκες $x_1 = 1$ και $y_1 = 1$, μπορούμε να συμπεράνουμε με επαγωγή ότι $|x_n^2 - 2y_n^2| = 1$ για κάθε n .* Επιπλέον, εκφράζοντας αντιστρόφως το (x_n, y_n) μέσω του (x_{n+1}, y_{n+1}) και χρησιμοποιώντας τη «μέθοδο της καθόδου», μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο



Σχήμα 2

λύσεων της εξίσωσης (5) εξαντλείται από τη σειρά που βρήκαμε. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να λύσουμε οποιαδήποτε από τις «εξισώσεις του Pell», δηλαδή μια διοφαντική εξίσωση της μορφής $x^2 - dy^2 = c$ (και κάθε τετραγωνική εξίσωση μπορεί να αναχθεί στη συγκεκριμένη μορφή), μολονότι αυτή η εξίσωση μπορεί να έχει αρκετές διαφορετικές σειρές λύσεων.

Αναδρομικές σχέσεις παρόμοιες με την (6) εμφανίζονται όχι μόνο στη θεωρία αριθμών, αλλά επίσης σε ποικίλα προβλήματα ανάλυσης και θεωρίας πιθανοτήτων. Ιδού ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του τύπου προβλήματος συνδυαστικής, που δόθηκε στους συμμετέχοντες στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα στο Λονδίνο το 1979:

7. Ένας βάτραχος κάθεται στην κορυφή A ενός κανονικού οκταγώνου. Ο βάτραχος μπορεί να πηδάει από κάθε κορυφή του οκταγώνου, εκτός από την E , δηλαδή την κορυφή απέναντι στην A , σε οποιαδήποτε από τις δύο γειτονικές κορυφές. Όταν ο βάτραχος φτάσει στην E , μένει εκεί για πάντα. Βρείτε τον αριθμό e_m των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους ο βάτραχος μπορεί να πάει από την A στην E πηδώντας ακριβώς m φορές.

Αν χρωματίσουμε τις κορυφές του οκταγώνου μαύρες και άσπρες εναλλάξ (Σχήμα 2) γίνεται φανερό ότι $e_{2k-1} = 0$. Δηλαδή, ο βάτραχος δεν μπορεί να πηδήξει από την A στην E με περιττό αριθμό κινήσεων, αφού έπειτα από κάθε άλμα αλλάζει το χρώμα της κορυφής στην οποία βρίσκεται, ενώ τα χρώματα των A και E είναι ίδια.

Ας συμβολίζουμε με c_n τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους ο βάτραχος μπορεί να πάει από την A σε οποιαδήποτε από τις κορυφές που είναι σημειωμένες με C κάνοντας ακριβώς $2n$ άλματα (λόγω συμμετρίας, δεν έχει σημασία ποια κορυφή C διαλέγουμε). Παρομοίως, συμβολίζουμε με a_n τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους ο βάτραχος μπορεί να πάει από το A πίσω στο A με $2n$ άλματα. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $a_1 = 2$ και $c_1 = 1$ (βλ. Σχήματα 2α-2β).

* Ακριβώς η ίδια διαδικασία περιγράφεται από τον Θέωνα τον Σμυρναίο στο *Περί των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν* (παρ. 42.10-44.17) σχετικά με τους «πλευρικούς» και «διαμετρικούς» αριθμούς, όπου επιλύεται η παραπάνω εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 1$. (Σημ. επισ. συμβ.)

Μπορούμε επίσης να εξαγάγουμε μια αναδρομική σχέση για το a_{n+1} μέσω των a_n και c_n . Έστω ότι ο βάτραχος έχει επιστρέψει στο σημείο A με $2(n+1)$ κινήσεις. Πού βρισκόταν ο βάτραχος πριν από 2 κινήσεις; Είτε στο σημείο A είτε σε κάποια από τις κορυφές C . Αν ήταν στο A , τότε υπήρχαν δύο τρόποι για να ξαναγυρίσει στο A (μέσω της αριστερής ή δεξιάς κορυφής που ονομάζουμε B). Και ο βάτραχος θα τα κατάφερνε να φτάσει στο A με τις πρώτες $2n$ κινήσεις με a_n διαφορετικούς τρόπους. Επομένως,

$$a_{2n+1} = 2a_n + 2c_n. \quad (7a)$$

Ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι

$$c_{2n+1} = a_n + 2c_n. \quad (7b)$$

Και ο αριθμός που ζητείται από το πρόβλημα, e_{2n} , είναι ακριβώς ίσος με $2c_{n-1}$.

Αλλά πώς μπορούμε να βρούμε κλειστούς τύπους για τα a_n και c_n ; Ας μεταγράψουμε τις σχέσεις (7a) και (7b) στην ακόλουθη μορφή:

$$a_{n+1} + c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + c_n\sqrt{2})(2 + \sqrt{2}). \quad (8)$$

Κατόπιν, σύμφωνα με την αρχή της εναλλαγής του συν με το πλην, έχουμε

$$a_{n+1} - c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n - c_n\sqrt{2})(2 - \sqrt{2}). \quad (9)$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε από τους παραπάνω τύπους ότι

$$\begin{aligned} a_2 + c_2\sqrt{2} &= (2 + \sqrt{2})^2, \\ a_3 + c_3\sqrt{2} &= (2 + \sqrt{2})^3, \end{aligned}$$

και γενικά ότι

$$a_n + c_n\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^n.$$

(Μια πιο τυπική απόδειξη θα περιλάμβανε απλή εφαρμογή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής.) Παρομοίως, έχουμε

$$a_n - c_n\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^n.$$

Επομένως,

$$c_n = \frac{(2 + \sqrt{2})^n - (2 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

και, αφού $e_{2n} = 2c_{n-1}$, έχουμε τελικά ότι

$$e_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}, \quad e_{2n-1} = 0$$

Το πρόβλημα λύθηκε. Αλλά ακόμη δεν είναι σαφές πώς ήταν δυνατόν να σκεφτούμε την ιδέα της χρησιμοποίησης των τύπων που περιέχουν το $\pm\sqrt{2}$ σε τούτο το πρόβλημα (καθώς και στο προηγούμενο), ενώ η εκφώνηση του προβλήματος αναφέρει μόνο ακέραιους.

Αποδεικνύεται ότι η εμφάνιση των συζυγών αριθμών

στη λύση των αναδρομικών σχέσεων, όπως οι (7a) και (7b), είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας συνηθισμένης μεθόδου λύσης από τη γραμμική άλγεβρα. Η εν λόγω μέθοδος μας επιτρέπει να βρούμε αρχικά όλες τις γεωμετρικές προόδους ($a_n = a_0\lambda^n$, $c_n = c_0\lambda^n$) που ικανοποιούν την αναδρομή. Οι τιμές του λ για τις οποίες υπάρχουν τέτοιες προόδοι ονομάζονται *χαρακτηριστικές τιμές* ή *ιδιοτιμές*, και προσδιορίζονται από μια συγκεκριμένη *χαρακτηριστική εξίσωση*. Για το σύστημα (7a, 7b), αυτή η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με ακέραιους συντελεστές, και οι ρίζες της είναι ακριβώς $2 + \sqrt{2}$ και $2 - \sqrt{2}$. Όπως προκύπτει, αν γνωρίζουμε τούτες τις ρίζες, είναι δυνατόν να εκφράσουμε κάθε λύση της αναδρομικής σχέσης (χρησιμοποιώντας το λεγόμενο «γραμμικό συνδυασμό» των αντίστοιχων γεωμετρικών προόδων). Τέλος, οι αρχικές συνθήκες (εν προκειμένω $a_1 = 2$, $c_1 = 1$) προσδιορίζουν τη λύση μονοσήμαντα.

Αποδεικνύεται επίσης ότι πολλές απλές αναδρομικές ακολουθίες ακεραίων έχουν χαρακτηριστικές εξισώσεις που είναι δευτεροβάθμιες με ακέραιους συντελεστές. Έτσι, οι χαρακτηριστικές τιμές τους είναι συζυγείς «τετραγωνικές αρρητότητες». Ο αναγνώστης καλείται να ερευνήσει τη λύση που μας δίνει η συγκεκριμένη μέθοδος για την περίφημη ακολουθία Fibonacci.

Σημειώστε ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή καθορίζει το ρυθμό αύξησης της ακολουθίας: όταν το n στο Πρόβλημα 7 είναι μεγάλο, έχουμε $e_{2n} \approx (2 + \sqrt{2})^{n-1}/\sqrt{2}$.

Με άλλα λόγια, έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{2(n+1)}/e_{2n} = 2 + \sqrt{2}$.

Ένα ανάλογο αυτής της παρατήρησης για το Πρόβλημα 6 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = \sqrt{2}$) δείχνει ότι και οι δύο όροι του αθροίσματος $x_n + y_n\sqrt{2}$ είναι περίπου ίσοι μεταξύ τους όταν το n είναι μεγάλο.

Αλγεβρικός επίλογος

Έχουμε ερευνήσει διάφορα παραδείγματα που συνδέονται με κοινό πεδίο της άλγεβρας, του απειροστικού λογισμού και της θεωρίας αριθμών. (Στην πραγματικότητα, καθένα από τα ζητήματα που εξετάσαμε θα μπορούσε να είναι θέμα ενός ξεχωριστού άρθρου στο *Quantum!*) Εν κατακλείδι, ας εξετάσουμε τους συζυγείς αριθμούς από τη σκοπιά της αφηρημένης άλγεβρας.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο P από αριθμούς ή σύμβολα ή αλγεβρικές παραστάσεις που μπορούν να συνδυαστούν μέσω των τεσσάρων συνηθισμένων αριθμητικών πράξεων. Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται *σώμα*.¹ Για παράδειγμα, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν σώμα· το ίδιο και οι πραγματικοί. Αν d είναι ένα στοιχείο του σώματος P και η εξίσωση $x^2 - d = 0$ δεν έχει λύση στο P , τότε θα μπορούσε κανείς να *επεκτείνει* το P «επινοώντας» κάποιο νέο

1. Ακριβέστερα, σώμα P είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις (τις ονομάζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό) που ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

1. Το P είναι κλειστό ως προς τις δύο πράξεις.
2. Οι δύο πράξεις είναι αντιμεταθετικές.
3. Οι δύο πράξεις είναι προσεταιριστικές.

αντικείμενο \sqrt{d} , το οποίο αποφέρει το d όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του. Στη συνέχεια, μπορούμε να θεωρήσουμε όλες τις παραστάσεις της μορφής $p + q\sqrt{d}$, όπου p και q είναι στοιχεία του P . Σ' αυτό γράφουμε $(p + q\sqrt{d})(p' + q'\sqrt{d}) = (pp' + qq'd) + (pq' + qp')\sqrt{d}$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το νέο σύνολο P_1 , που περιλαμβάνει στοιχεία της μορφής $p + q\sqrt{d}$, αποτελεί σώμα. Αυτό το νέο σώμα εμπεριέχει ένα «αντίγραφο» του παλιού σώματος P , συγκεκριμένα τα στοιχεία $p + 0\sqrt{d}$. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ως P το σώμα των πραγματικών αριθμών και θεωρήσουμε την εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ (έτσι ώστε $d = -1$), τότε το P_1 είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Το νέο σώμα P_1 (που καλείται «τετραγωνική επέκταση του P ») είναι εφοδιασμένο με μια ενδιαφέρουσα απεικόνιση:

$$\lambda = p + q\sqrt{d} \rightarrow \bar{\lambda} = p - q\sqrt{d}.$$

Ονομάζεται *συζυγής απεικόνιση*, και οι βασικές ιδιότητές της είναι οι εξής:

1. Όλα τα στοιχεία του παλιού σώματος P απεικονίζονται στον εαυτό τους.
2. Όλες οι εξισώσεις που περιλαμβάνουν αριθμητικές πράξεις διατηρούνται από την απεικόνιση:

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}, \text{ και } \overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}. \quad (10)$$

Η απεικόνιση αυτή αποτελεί μία ειδική περίπτωση των αυτομορφισμών Galois της επέκτασης P_1 του σώματος P — προς τιμήν του γάλλου μαθηματικού Évariste Galois.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε «διπλές επεκτάσεις» ενός σώματος. Για παράδειγμα, μπορούμε να επεκτείνουμε το σώμα των ρητών αριθμών με τα σύμβολα $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$. Λαμβάνουμε τότε ένα σώμα με περισσότερους αυτομορφισμούς Galois. Εκτός από την ταυτοτική απεικόνιση (που περιέχεται στο σύνολο), υπάρχουν άλλες τρεις:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} &\rightarrow -\sqrt{2}, \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}), \\ (\sqrt{2} &\rightarrow \sqrt{2}, \sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3}), \\ (\sqrt{2} &\rightarrow -\sqrt{2}, \sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Η σύνθεση δύο οποιωνδήποτε από αυτές τις τέσσερις απεικονίσεις είναι μια άλλη από τις ίδιες. Στην πραγματικότητα, όταν τις συνδυάζουμε με σύνθεση, κατασκευάζεται μια ομάδα, που ουσιαστικά είναι η ίδια ομάδα με εκείνη η οποία σχηματίζεται από τις συμμετρίες ενός παραλληλογράμμου.

Αποδεικνύεται ότι οι ρίζες κάθε πολυωνύμου μπορούν να προστεθούν στο βασικό σώμα P . Οι αυτομορφισμοί του

4. Κάθε πράξη έχει ένα ουδέτερο στοιχείο (0 για την πρόσθεση, 1 για τον πολλαπλασιασμό).

5. Κάθε στοιχείο p του P έχει ένα αντίστροφο ως προς κάθε πράξη ($-p$ για την πρόσθεση, $1/p$ για τον πολλαπλασιασμό), εκτός από το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, που δεν έχει αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

6. Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

νέου σώματος που εμφανίζονται με τούτο τον τρόπο συνιστούν το θέμα ενός από τους πιο ενδιαφέροντες κλάδους της άλγεβρας του 19ου και του 20ού αιώνα: της θεωρίας Galois. Ειδικότερα, η εν λόγω θεωρία μάς επιτρέπει να φέρουμε στο προσκήνιο το ζήτημα της επιλυσιμότητας εξισώσεων από ριζικά.

Για να εμπλουτίσουμε τα θέματα του παρόντος άρθρου, σας προσφέρουμε τις παρακάτω ασκήσεις για διασκέδασή σας.

Ασκήσεις.

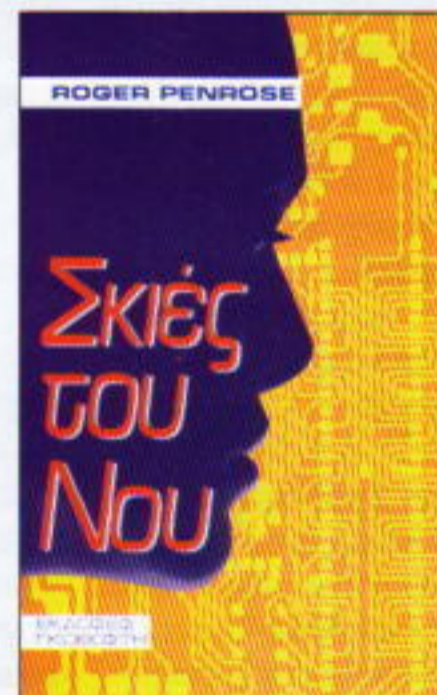
1. Ποιος από τους αριθμούς $\sqrt{1996} + \sqrt{1997}$ και $\sqrt{1995} + \sqrt{1998}$ είναι μεγαλύτερος;
2. Αποδείξτε ότι για όλα τα θετικά x ισχύει

$$\left| \sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{2}x \right| < \frac{1}{8}x^3.$$

3. Βρείτε τα πρώτα εκατό δεκαδικά ψηφία της δεκαδικής αναπαράστασης του αριθμού $(\sqrt{50} + 7)^{100}$.

4. Απαλείψτε την αρρητότητα από τον παρονομαστή του παρακάτω κλάσματος: $1 / (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. ■

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Στο νέο του βιβλίο [το προηγούμενο ήταν *Ο Νέος Αυτοκράτορας(;)*] ο μαθηματικός της Οξφόρδης Roger Penrose ρίχνει μια ακόμα όλο ζωντάνια ματιά στη σύγχρονη επιστήμη, εξαπολύοντας μια πιο ισχυρή επίθεση ενάντια στην τεχνητή νοημοσύνη. Αλλά και μας δείχνει το δρόμο για μια καινούρια επιστήμη, μια επιστήμη που θα είναι τελικά ικανή να ερμηνεύσει τα φυσικά θεμέλια της νόησης. Ο Penrose διατυπώνει ισχυρά επιχειρήματα για να στηρίξει τα συμπεράσματά του, ότι κάτι υπάρχει στην ενσυνείδητη δραστηριότητα του εγκεφάλου που ξεπερνάει τις διαδικασίες του υπολογιστή και που δεν μπορεί να το εξηγήσει η σημερινή επιστήμη.

Ένα βιβλίο που πρέπει να διαβάσει κάθε σκεπτόμενος άνθρωπος.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΓΚΟΒΟΣΤΗ

Ζωοδόχου Πηγής 21, 106 81 Αθήνα,
τηλ.: 3815433, 3822251, fax: 3816661

Μια έννοια με πολ

ΔΙΑΚΟΣΙΑ ΠΕΡΙΠΟΥ ΧΡΟΝΙΑ ΧΩΡΙΖΟΥΝ την πρώτη από την τελευταία φράση που διαβάζετε στο διπλανό πλαίσιο. Όπως αντιλαμβάνεστε, υπήρξε πολύ δύσκολο για την έννοια του «δυναμικού» να αποκτήσει σταθερό περιεχόμενο. Αρχικά εμφανίστηκε ως τάση, και κατόπιν μεταμορφώθηκε σε ηλεκτρεγερτική δύναμη και μυστηριώδη συνάρτηση. Συχνά εμφανίζεται με διάφορες μεταφράσεις, ως διαφορά δυναμικού επαφής, δυναμικό ιονισμού ή βαρυτικό δυναμικό. Ίσως γνωρίζετε τις επίπονες προσπάθειες λαμπρών επιστημόνων—Euler, Laplace, Poisson, Green, Gauss— να ξεδιαλύνουν τη σύγχυση της ορολογίας που περιβάλλει τη συγκεκριμένη έννοια. Μάλιστα, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι η εν λόγω έννοια προσείλκυσε θαυμαστές από τα πεδία τόσο των μαθηματικών όσο και της φυσικής. Και γιατί όχι; Ο παγκόσμιος χαρακτήρας της συνδέεται με πλήθος γόνιμων εφαρμογών, όπως η αγωγή της θερμότητας, η δυναμική των ρευστών, ο υπολογισμός του βαρυτικού, του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Καθώς θα λύσετε τα επόμενα στοιχειώδη προβλήματα, έχετε κατά νου ότι η σύγχρονη θεωρία δυναμικού αποτελεί θεμέλιο για το οικοδόμημα ενός ολόκληρου πεδίου μελέτης—αυτού της μαθηματικής φυσικής.

Ερωτήσεις και προβλήματα

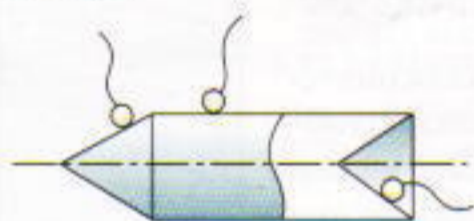
1. Το ηλεκτροστατικό δυναμικό που δημιουργεί ένα συγκεκριμένο φορτίο μειώνεται με την απόσταση από αυτό. Ποιο είναι το πρόσημο του φορτίου;
2. Υπάρχει πάντοτε διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο αγωγούς, ο ένας από τους οποίους είναι φορτισμένος θετικά και ο άλλος αρνητικά;
3. Ένα σημειακό φορτίο q τοποθετείται σε απόσταση r από το κέντρο μεμονωμένου αφόρτιστου σφαιρικού αγωγού. Ποιο είναι το δυναμικό του αγωγού;
4. Εξαρτάται το δυναμικό στο κέντρο μιας φορτισμένης σφαίρας από την κατανομή του φορτίου στην επιφάνειά της;
5. Μικρό φορτισμένο μεταλλικό σφαιρίδιο τοποθετείται στο εσωτερικό φορτισμένης αγωγίμης κοίλης σφαίρας, μέσω μικρού ανοίγματος στην επιφάνειά της, χωρίς να έρθει σε επαφή μαζί της. Τα φορτία του σφαιριδίου και της

σφαίρας είναι ίσα αλλά αντίθετου προσήμου. Πώς θα μεταβληθεί το δυναμικό της σφαίρας;

6. Πώς μεταβάλλεται το δυναμικό ενός σφαιρικού πυκνωτή σε σχέση με την απόσταση r από το κέντρο των ομόκεντρων σφαιρικών κελυφών, αν ο εσωτερικός οπλισμός, ακτίνας R_1 , φέρει φορτίο $+q$, και ο εξωτερικός, ακτίνας R_2 , φορτίο $-q$; Παραστήστε γραφικά την εν λόγω μεταβολή.

7. Δύο αγωγοί φέρουν θετικά φορτία, έτσι ώστε το δυναμικό του ενός να είναι 100 V και του άλλου 50 V. Αν έρθουν σε αγωγή επαφή, θα υπάρξει μετακίνηση θετικών φορτίων από τον πρώτο προς τον δεύτερο αγωγό; Δεν υπάρχουν άλλα αντικείμενα κοντά στους συγκεκριμένους αγωγούς.

8. Το σφαιρίδιο ενός ηλεκτροσκοπίου κινείται κατά μήκος της επιφάνειας του φορτισμένου αντικειμένου που εικονίζεται στο Σχήμα 1. Θα μεταβάλλεται η ένδειξη του ηλεκτρομέτρου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας; Γιατί το συρμάτινο νήμα του ηλεκτροσκοπίου σ' αυτό το πείραμα πρέπει να είναι μακρύ;



Σχήμα 1

9. Μια μικρή αγωγίμη και αφόρτιστη σφαίρα τοποθετείται στο εσωτερικό του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς, έτσι ώστε το κέντρο της να ισαπέχει από τους οπλισμούς. Τα δυναμικά των οπλισμών είναι +100 V και -100 V. Τι μορφή θα έχει η επιφάνεια μηδενικού δυναμικού;

10. Μια μεταλλική σφαίρα με φορτίο q βρίσκεται στερεωμένη πάνω σε μονωμένο ελαστικό υποστήριγμα. Μια δεύτερη όμοια σφαίρα, που φέρει ίδιο φορτίο, αφήνεται από ύψος h να πέσει πάνω της. Σε τι ύψος θα αναπηδήσει η δεύτερη σφαίρα μετά την κρούση, αν αυτή υποτεθεί ελαστική;

11. Ένα μικρό αντικείμενο που φέρει φορτίο $-q$ γλιστράει κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου, με γωνία κλίσης 45° . Θα επηρεαστεί η ταχύτητα του αντικειμένου από την παρουσία



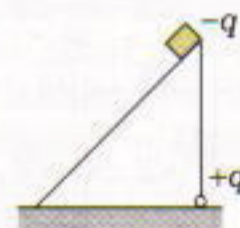
«Τάση είναι η προσπάθεια που σώματος καθώς επιχειρεί να μεταβιάσει σε άλλα σώματα»
—Alessandro Volta

«Η ηλεκτρεγερτική δράση εκδηλώνεται»
Θα ονομα



«Υπάρχει ένας αριθμός για να μετρηθεί η δύναμη που μεταβάλλεται ταχύτερα. Θα ονομασθεί»
—Richard Feynman

φορτίου $+q$, στερεωμένου όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, καθώς θα φθάνει στο οριζόντιο επίπεδο;



Σχήμα 2

12. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B σ' ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει πυκνωτές συνδεδεμένους κατά σειρά είναι V . Αν ένας πυκνωτής χωρητικότητας C συνδεθεί στο κύκλωμα στα συγκεκριμένα σημεία, το φορτίο του θα είναι ίσο με CV ;

13. Μια αφόρτιστη μεταλλική πλάκα εισάγεται στο εσωτερικό φορτισμένου πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς οι οποίοι δεν είναι συνδεδεμένοι με πηγή. Το πάχος της πλάκας είναι ίσο με το μισό της απόστασης μεταξύ των οπλισμών. Κατά πόσο θα μεταβληθεί η

ΜΙΚΟ

πλές μεταμφιέσεις.

αταβάλλει κάθε σημείο ενός ηλεκτρισμένου
αλλαγεί από τον ηλεκτρισμό του και να τον

εται σε δύο είδη φαινομένων.
ω το πρώτο ηλεκτρική τάση...»

—Andre-Marie Ampere



θε σημείο του χώρου, και, καθώς περνάμε
αυτός ο αριθμός μεταβάλλεται. Ένα
κάποιο σημείο του χώρου θα δεχτεί τη δράση
εκείνη κατά την οποία ο εν λόγω αριθμός
αφέρομαι σ' αυτό τον αριθμό με το
αμικό.»

διαφορά δυναμικού του πυκνωτή:

14. Αν ήταν ανάγκη να πλησιάσετε σε μια κομμένη γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος που έχει πέσει στο έδαφος, γιατί θα έπρεπε να περπατάτε με εξαιρετικά μικρά βήματα;

15. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων ενός ομογενούς συρμάτινου δακτυλίου είναι μηδέν· ωστόσο, το δακτύλιο διαρρέει μη μηδενικό ρεύμα. Πώς είναι δυνατόν κάτι τέτοιο;

16. Είναι δυνατόν, ενώ πετάμε με αεροπλάνο μέσα στο μαγνητικό πεδίο της Γης, να μετρήσουμε τη διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται ανάμεσα στα άκρα των πτερύγων του;

Μικροπειραματισμοί

Στο επίπεδο της θάλασσας, η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στη μύτη σας και τα δάχτυλα των ποδιών σας είναι



περίπου 200 V. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτή τη διαφορά δυναμικού για να ανάψετε έναν ηλεκτρικό λαμπτήρα; Είναι επικίνδυνη για σας η συγκεκριμένη διαφορά δυναμικού;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...Ο Volta —που ανακάλυψε την τάση επαφής, δημιούργησε τον όρο δυναμικό και είχε την τιμή να δοθεί το όνομά του στη μονάδα της διαφοράς δυναμικού— δεν είχε την παραμικρή ιδέα για το πώς και γιατί λειτουργούσε η εφεύρεσή του, η «βολταϊκή στήλη». Ο γάλλος επιστήμονας Dominique Arago περιέγραψε αυτή την εφεύρεση ως την ωραιότερη συσκευή που ανακάλυψε ποτέ ο άνθρωπος, με εξαίρεση το τηλεσκόπιο και την ατμομηχανή.

...η διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από ηλεκτρολυτική συσκευή έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ηλεκτρεγερτικής δύναμης με πολικότητα αντίθετη από εκείνη που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια. Το φαινόμενο (που είναι γνωστό ως «γαλβανική πόλωση») ανακαλύφθηκε στις αρχές του 19ου αιώνα, και αργότερα οδήγησε στην ανακάλυψη των συσσωρευτών μολύβδου.



...το πρόβλημα της κατανομής φορτίου σ' έναν αγωγό ορισμένου σχήματος διατυπώθηκε για πρώτη φορά τον 18ο αιώνα από τον γάλλο φυσικό Charles Augustin de Coulomb. Αργότερα, ο Poisson, προσπαθώντας να λύσει αυτό το είδος προβλήματος, συνήγαγε την ομώνυμη διαφορική εξίσωση για μια συνάρτηση που εξαρτάται ισχυρά από το σύστημα συντεταγμένων και διατηρεί σταθερή τιμή στην επιφάνεια του αγωγού.

...ο George Green, συγγραφέας του βιβλίου *Μια προσπάθεια εφαρμογής της μαθηματικής ανάλυσης στις θεωρίες του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού*, ήταν αυτοδίδακτος. Πριν εισαχθεί στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, σε ηλικία 40 ετών, εργαζόταν ως μηχανικός και φούρναρης, και μελετούσε τις φυσικές επιστήμες στον ελεύθερο χρόνο του. Είναι αξιοσημείωτο ότι, ενώ εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης δυναμικού, δεν τη συνέδεσε με το έργο, έννοια που δεν χρησιμοποιούνταν ακόμη στη φυσική.

...το ηλεκτρικό ρεύμα όχι μόνο είναι δυνατόν να διαρρέει κάποιο κύκλωμα στο οποίο η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων είναι μηδέν, αλλά μπορεί επίσης να κινείται από σημείο χαμηλότερου προς σημείο υψηλότερου ηλεκτρικού δυναμικού, όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, στο εσωτερικό μιας μπαταρίας.

...υπάρχουν ηλεκτρικά πεδία στα οποία μπορεί κανείς να μετρήσει τη διαφορά δυναμικού, όχι όμως το ίδιο το δυναμικό. Για παράδειγμα, τα πεδία που δημιουργούνται από μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία, όπως εκείνα τα οποία παράγονται στους μετασχηματιστές και τους ηλεκτρικούς κινητήρες (ηλεκτρομαγνητική επαγωγή).

...ένα μεγάλο ηλεκτροφόρο χέλι μπορεί να παράγει διαφορά δυναμικού μέχρι 600 V και ηλεκτρικό ρεύμα περίπου



1 A. Αυτή η εντυπωσιακή εκδήλωση ισχύος είναι το αποτέλεσμα ενός μεγάλου πλήθους μικροκυκλωμάτων, καθένα από τα οποία περιέχει ηλεκτρικά στοιχεία (ηλεκτρεγερτικής δύναμης 0,15 V) συνδεδεμένα σε σειρά· τα εν λόγω κυκλώματα συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα. Το ισχυρό ηλεκτρικό ρεύμα που μπορεί να παράγει αυτή η φυσική ηλεκτρική «γεννήτρια» είναι ικανό να παραλύσει ή ακόμη και να σκοτώσει το θύμα.

...σέρνοντας τα πόδια σας σ' ένα χαλί και αγγίζοντας κάποιο άλλο αντικείμενο μπορείτε να δημιουργήσετε ηλεκτρική εκκένωση μήκους μέχρι 1 cm, που σημαίνει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό σας είναι της τάξης των 10.000 έως 20.000 V.

... όταν ξεσπά ένας κεραυνός ανάμεσα σ' ένα σύννεφο και το έδαφος, η διαφορά δυναμικού φτάνει τα 4 δισεκατομμύρια βολτ και το ηλεκτρικό ρεύμα της έχει μέση ένταση 20 χιλιάδες αμπερ.



Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- Albert Stasenko, «Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάιος/Ιούνιος 1996.
- A. Leonovich, «Φορτισμένα πνεύματα», Μάρτιος/Απρίλιος 1997.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Τα αυτιά των ελεφάντων

«Ο Ισαάκ Νεύτων ήταν πολύ μικρότερος από έναν ιπποπόταμο, όμως δεν τον εκτιμούμε λιγότερο εξαιτίας αυτού.»
—Bertrand Russell (1872-1970)

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΓΙΑΤΙ, ΑΡΑΓΕ, ΕΧΟΥΝ ΜΕΓΑΛΑ ΑΥΤΙΑ οι ελέφαντες; Και γιατί έχουν τόσο χοντρά πόδια; Με άλλα λόγια, γιατί οι ελέφαντες έχουν τόσο διαφορετικό σχήμα από τα άλογα; Σ' αυτά και σε άλλα ερωτήματα μπορούμε να απαντήσουμε χρησιμοποιώντας τους νόμους της ανακλιμάκωσης (scaling) που μαθαίνουμε στη φυσική.

Τα οστά των ελεφάντων αποτελούνται από την ίδια βασική ουσία με τα ανθρώπινα. Επομένως, τα οστά του ελέφαντα πρέπει να είναι χοντρότερα, ώστε να υποστηρίξουν την πρόσθετη μάζα του ζώου. Πόσο χοντρότερα όμως; Ας συγκρίνουμε λοιπόν έναν ελέφαντα μ' ένα άλογο. Η μάζα ενός τυπικού αλόγου ανέρχεται σε 600 kg περίπου, ενώ ένας τυπικός ελέφαντας έχει μάζα 4.200 kg περίπου, δηλαδή κάπου 7 φορές μεγαλύτερη. Εφόσον όλα τα θηλαστικά έχουν σχεδόν την ίδια πυκνότητα —η οποία προσεγγίζει εκείνη του νερού—, ο όγκος του ελέφαντα θα πρέπει να είναι επταπλάσιος του όγκου του αλόγου. Εάν δεχτούμε ότι και τα δύο ζώα έχουν το ίδιο σχήμα (αν μη τι άλλο, είναι τετράποδα!), οι γραμμικές διαστάσεις του ελέφαντα θα πρέπει να είναι $\sqrt[3]{7} = 1,9$ φορές μεγαλύτερες από

τις αντίστοιχες διαστάσεις του αλόγου.

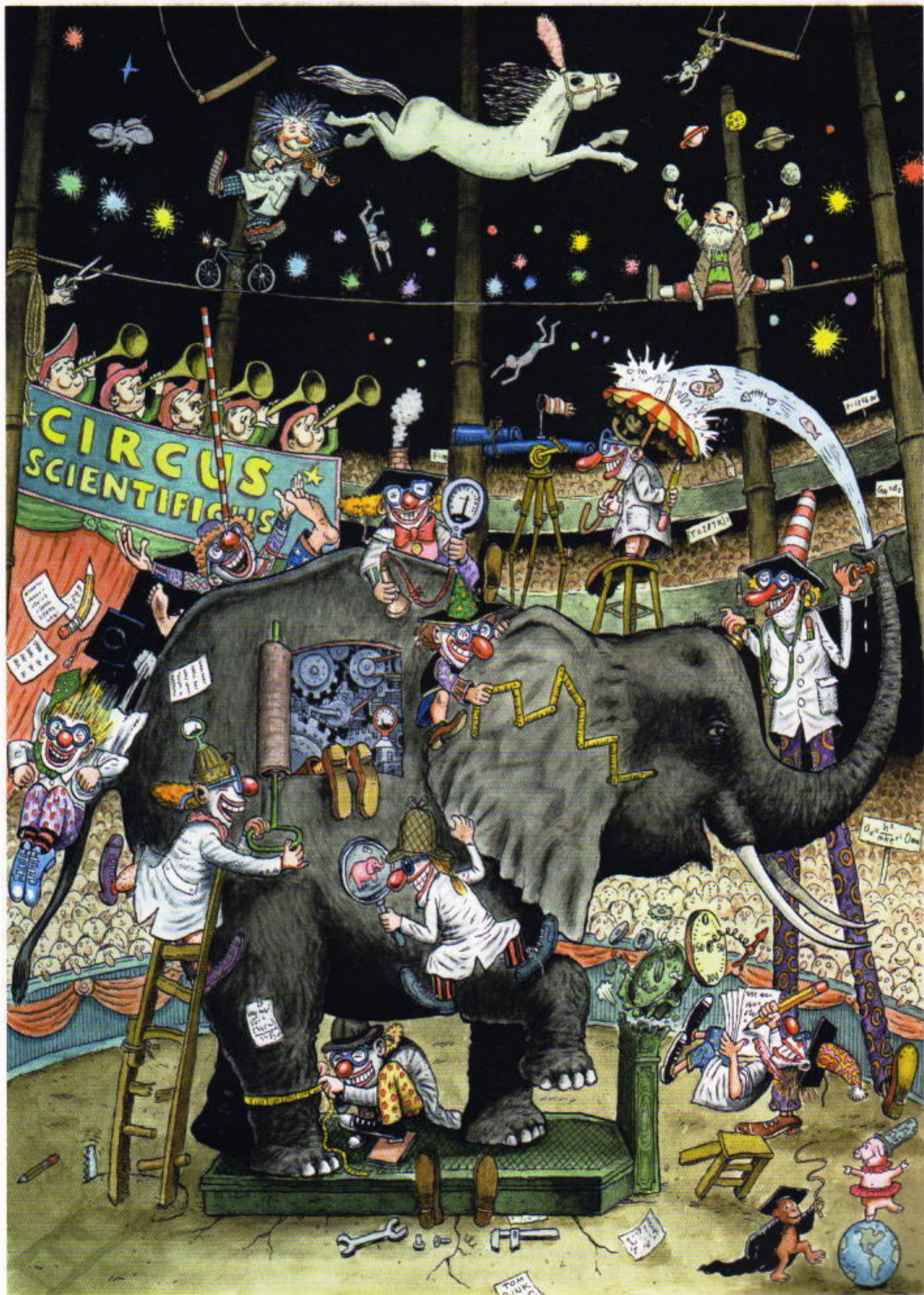
Κάθε πόδι του ελέφαντα πρέπει να υποστηρίζει 7 φορές μεγαλύτερο βάρος απ' ό,τι κάθε πόδι του αλόγου. Επειδή η δύναμη συμπίεσης που μπορεί να αντέξει μια δοκός είναι ανάλογη με το εμβαδόν της διατομής της, το πόδι του ελέφαντα πρέπει να έχει επταπλάσιο εμβαδόν διατομής από το πόδι του αλόγου. Με άλλα λόγια, το οστό του ποδιού του ελέφαντα πρέπει να έχει 2,6 φορές μεγαλύτερη διάμετρο απ' ό,τι το πόδι του αλόγου. Σημειώστε ότι ο ελέφαντας και το άλογο δεν είναι δυνατόν να έχουν το ίδιο σχήμα· ο λόγος των διαμέτρων των ποδιών τους πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το λόγο των τυπικών γραμμικών διαστάσεών τους. Η σύγκριση θα απέβαινε ακόμη δραματικότερη αν συγκρίναμε τον ελέφαντα με ένα ποντίκι!

Αυτό εξηγεί γιατί οι ελέφαντες έχουν τόσο χοντρότερα πόδια. Τι συμβαίνει όμως με τα αυτιά; Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι ένας ελέφαντας τρώει 7 φορές περισσότερο από ένα άλογο. Κατά το μεταβολισμό της συγκεκριμένης τροφής από το σώμα παράγεται θερμότητα. Γνωρίζουμε ότι οι θερμικές απώλειες είναι ανάλογες

τόσο με τη διαφορά θερμοκρασίας που επικρατεί στις δύο «όψεις» του δέρματος όσο και με το εμβαδόν του δέρματος. Το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε στερεού μπορεί να θεωρηθεί ανάλογο του τετραγώνου των γραμμικών του διαστάσεων, οπότε ο ελέφαντας έχει μόλις $1,9^2$ φορές μεγαλύτερο εμβαδόν επιφάνειας. Αυτό σημαίνει ότι ο ελέφαντας είτε πρέπει να έχει πολύ μεγαλύτερη θερμοκρασία σώματος είτε να διαθέτει κάποιον εναλλακτικό τρόπο αποβολής θερμικής ενέργειας. Και αυτός ακριβώς είναι ένας από τους σκοπούς τους οποίους εξυπηρετούν τα μεγάλα αυτιά: Αυξάνουν το εμβαδόν της επιφάνειας και, με την κίνησή τους, δεν επιτρέπουν να ανέβει πάρα πολύ η θερμοκρασία του αέρα πλησίον του δέρματος. Συντοίμως άλλως, ο ελέφαντας καταναλώνει λιγότερη τροφή ανά μονάδα μάζας απ' ό,τι το άλογο.

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως, παρότι οι ελέφαντες επικοινωνούν με υπερήχους, ωστόσο δεν τους χρειάζονται μεγάλα αυτιά για το συγκεκριμένο σκοπό.

Η ανακλιμάκωση δεν αφορά αποκλειστικά τα μήκη. Μπορούμε να επεκτείνουμε την εξέτασή μας, ώστε να συμπεριλάβει τόσο την ανακλιμά-



κωση οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους, όσο και τις συνέπειές της σε άλλα φυσικά μεγέθη που εξαρτώνται από αυτό. Σε πολλές περιπτώσεις θα διαπιστώσουμε ότι ανακλιμακώνονται —τουλάχιστον κατά προσέγγιση— και τα εξαρτώμενα φυσικά μεγέθη· ο παράγοντας ανακλιμακώσής τους είναι συνήθως κάποια δύναμη του αντίστοιχου παράγοντα του αρχικού μεγέθους. Η γνώση τέτοιων μορφών συμπεριφοράς όχι μόνο μας διευκολύνει σε συγκεκριμένα προβλήματα, αλλά οξύνει τη φυσική μας διαίσθηση και μας προικίζει με την ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε το ουσιώδες σε περιπτώσεις ιδιαίτερα περίπλοκες. Για παράδειγμα, η ακτίνα Bohr για το άτομο του υδρογόνου δίνεται από την έκφραση

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0,0529 \text{ nm},$$

όπου $\hbar = h/(2\pi)$ είναι η ανηγμένη σταθερά του Planck, m η μάζα του ηλεκτρονίου, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ η σταθερά που εμφανίζεται στο νόμο του Coulomb και e το φορτίο του ηλεκτρονίου. Ποια θα ήταν η νέα ακτίνα αν το ηλεκτρόνιο το αντικαθιστούσε ένα μιονίο, που έχει μάζα 207 φορές μεγαλύτερη; (Υποθέτουμε ότι η μάζα του πρωτονίου είναι μεγάλη σε σύγκριση με τη μάζα του μιονίου.) Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τη νέα ακτίνα εξαρχής· αρκεί να γνωρίζουμε μόνο ότι η ακτίνα ανακλιμακώνεται αντίστροφα προς τη μάζα. Επομένως, η ακτίνα Bohr για το μιονικό άτομο του υδρογόνου ισούται με

$$a_\mu = a_0 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) = \frac{a_0}{207} = 0,256 \text{ pm}.$$

Αυτό μαζί με άλλα τέσσερα ερωτήματα με θέμα την ανακλιμακώση συναποτέλεσαν ένα από τα τρία θεωρητικά προβλήματα που τέθηκαν στην τελευταία Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, η οποία διοργανώθηκε στο Σάντιμπερ του Καναδά τον περασμένο Ιούλιο. Τα θεωρητικά προβλήματα συνετέθησαν υπό την καθοδήγηση του Chris Waltham, ο οποίος είναι μέλος του διδακτικού προσωπικού του Πανεπιστημίου της Βρετανικής Κολομβίας. Τρία από τα υπόλοιπα ε-

ρωτήματα με θέμα την ανακλιμακώση απαρτίζουν το πρόβλημα αυτού του τεύχους.

A. Στην επιφάνεια της Γης επικρατεί κατά μέσο όρο θερμοκρασία $T = 287 \text{ K}$. Ποια θα ήταν η νέα μέση θερμοκρασία T' , αν η μέση απόσταση μεταξύ της Γης και του Ήλιου μειωνόταν κατά 1%;

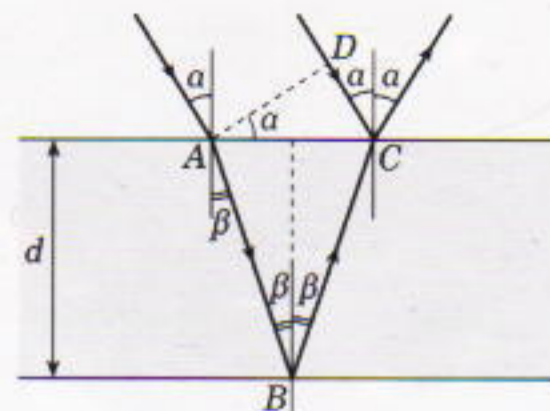
B. Μια μέρα, ο αέρας είναι ξηρός και έχει πυκνότητα $\rho = 1,2500 \text{ kg/m}^3$. Την επομένη, η υγρασία έχει αυξηθεί, οπότε ο αέρας περιέχει υδατμούς σε αναλογία 2% κατά βάρος. Η πίεση και η θερμοκρασία διατηρούνται ίδιες όπως και την προηγούμενη. Ποια είναι η νέα πυκνότητα ρ' του αέρα; Θεωρήστε ότι ο ξηρός αέρας και οι υδατμοί συμπεριφέρονται ως ιδανικά αέρια. Το μέσο μοριακό βάρος του ξηρού αέρα ισούται με 28 g/mole , και το μοριακό βάρος του νερού με 18 g/mole .

Γ. Ένας τύπος ελικοπτερου μπορεί να αιωρείται αν η μηχανική ισχύς που παρέχει ο κινητήρας του ισούται με P . Εάν κατασκευαστεί κάποιο άλλο ελικόπτερο, ακριβές αντίγραφο του πρώτου (σε όλες τις γραμμικές διαστάσεις), υπό κλίμακα 1:2, ποια μηχανική ισχύς P' απαιτείται για να αιωρείται;

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Δημιουργία χρωμάτων

Στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1997, ζητήσαμε από τους αναγνώστες να λύσουν δύο προβλήματα που αφορούσαν φαινόμενα συμβολής σε λεπτά υμένια. Στο πρώτο πρόβλημα, το φως προσέπιπε στο λεπτό υμένιο υπό γωνία 30° . Αρκετοί αναγνώστες που απέστειλαν λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα υιοθέτησαν μερικές απλουστευτικές υποθέσεις προκειμένου να διευκολυνθούν στην επίλυση. Συγκεκριμένα, υπέθεσαν ότι η ολική απόσταση που διανύει το φως κατά τη διέλευσή του μέσω του υμενίου από σαπουνοδιάλυμα είναι διπλάσια από το πάχος του, αγνοώντας τη γωνία υπό την οποία διαδιδόταν. Υπέθεσαν, επίσης, ότι η ακτίνα που ανακλάται στην πάνω επιφάνεια και η ακτίνα που εισέρχεται στο υμένιο και ανακλάται στην κάτω επιφάνεια συμβάλλουν μεταξύ τους, μολονότι



Σχήμα 1

είναι μετατοπισμένες η μια ως προς την άλλη. Ας παρουσιάσουμε ολοκληρωμένα μια λεπτομερέστερη ανάλυση αυτού του κλασικού προβλήματος.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, η δέσμη του φωτός που προσπίπτει στο σημείο A διαθλάται καθώς εισέρχεται στο υμένιο, ανακλάται στο σημείο B, και κατόπιν εξέρχεται από το υμένιο στο σημείο C. Μια δεύτερη ακτίνα ανακλάται μερικώς στο C, και αυτές οι δύο ακτίνες συμβάλλουν. Η διαφορά οπτικού δρόμου ανάμεσα στις δύο ακτίνες καθορίζει κατά πόσον θα συμβεί ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή. Τα σημεία της δέσμης που βρίσκονται επί της διακεκομμένης AD είναι σε συμφωνία φάσης.

Παρατηρούμε ότι, για να φτάσουν οι δύο ακτίνες στο C, η επιπλέον απόσταση που πρέπει να διανύσουν είναι για τη μεν διαθλασθείσα $AB + BC$, για τη δε ανακλασθείσα DC . Από τη γεωμετρία του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι

$$AB + BC = \frac{2d}{\sin\beta}.$$

Το μήκος κύματος στο υμένιο είναι μικρότερο από το μήκος κύματος στον αέρα κατά παράγοντα n , όπου n ο δείκτης διάθλασης. Συνεπώς, ο οπτικός δρόμος, μετρημένος με μονάδα το μήκος κύματος του φωτός στο κενό, ισούται με

$$\frac{2d}{\sin\beta} = \frac{2dn}{\lambda_0 \sin\beta},$$

όπου β είναι η γωνία πρόσπτωσης στην κάτω επιφάνεια. Το μήκος DC δίνεται από τη σχέση

$$DC = AC \sin \alpha = 2d \epsilon \phi \beta \eta \mu \alpha,$$

όπου α είναι η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας στην πάνω επιφάνεια. Ο αριθμός των μηκών κύματος που αντιστοιχούν στην εν λόγω απόσταση ισούται με

$$\frac{2d \epsilon \phi \beta \eta \mu \alpha}{\lambda_0}$$

Επειδή το κύμα αυτό ανακλάται από μέσο με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, η φάση του πραγματοποιεί άλμα 180° . Έτσι, ο ολικός αριθμός των μηκών κύματος ισούται με

$$\frac{2d \eta \mu \beta \eta \mu \alpha}{\lambda_0} + \frac{1}{2}$$

Ενισχυτική συμβολή θα σημειωθεί εάν η διαφορά δρόμου ισούται με ακέραιο αριθμό (k) μηκών κύματος:

$$k = \frac{2dn}{\lambda_0 \sin \beta} - \frac{2d \eta \mu \beta \eta \mu \alpha}{\lambda_0 \sin \beta} - \frac{1}{2}$$

Εφόσον οι ακτίνες αυτές ικανοποιούν το νόμο του Snell, γνωρίζουμε ότι $\eta \mu \alpha = n \eta \mu \beta$. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό k :

$$k = \frac{2dn}{\lambda_0 \sin \beta} (1 - \eta \mu^2 \beta) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2dn}{\lambda_0 \sin \beta} \cos^2 \beta - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2dn \cos \beta}{\lambda_0} - \frac{1}{2}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Snell και την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta \mu^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση συναρτήσει της γωνίας α :

$$2k + 1 = \frac{4d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \eta \mu^2 \alpha}$$

Εάν ισχύει $k = 0$, τότε βρίσκουμε

$$d = \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{\sqrt{n^2 - \eta \mu^2 \alpha}} = 0,1 \mu\text{m}.$$

Για μια ακτίνα που προσπίπτει κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, βρίσκουμε

$$\lambda_0 = 4d \sqrt{n^2 - \eta \mu^2 0} = 4dn.$$

Επειδή $d = 0,1 \mu\text{m}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_0 = 0,53 \mu\text{m}$. Το φως αυτό είναι πρασινοκίτρινο.

Στο μέρος Β του προβλήματος ζητούμενο ήταν το ελάχιστο πάχος ενός υμενίου ακετόνης ($n = 1,25$) που βρίσκεται τοποθετημένο πάνω σε γυαλί ($n = 1,50$), έτσι ώστε για φως που προσπίπτει κάθετα στο υμένιο να έχουμε πλήρως αποσβεστική συμβολή στα 600 nm και πλήρως ενισχυτική συμβολή στα 700 nm .

Η διαφορά οπτικού δρόμου ανάμεσα στις δύο ακτίνες που ανακλώνται από την πάνω και την κάτω επιφάνεια του υμενίου της ακετόνης, αντίστοιχα, ισούται απλώς με $2dn$. Επειδή και οι δύο ανακλάσεις πραγματοποιούνται σε επιφάνειες που διαχωρίζουν το μέσο στο οποίο διαδίδεται το φως από οπτικά πυκνότερο μέσο, παρατηρείται άλμα φάσης και στις δύο επιφάνειες, οπότε ο όρος $1/2$ δεν εμφανίζεται στην εξίσωσή μας.

Για να έχουμε πλήρως ενισχυτική συμβολή, η διαφορά οπτικού δρόμου $2dn$ πρέπει να ισούται με ακέραιο αριθμό μηκών κύματος $\lambda_{\text{εν}}$:

$$k = \frac{2dn}{\lambda_{\text{εν}}}$$

Στην περίπτωση της πλήρως αποσβεστικής συμβολής, η διαφορά οπτικού δρόμου $2dn$ θα πρέπει να ισούται με ημιακέραιο αριθμό μηκών κύματος $\lambda_{\text{απ}}$:

$$k + \frac{1}{2} = \frac{2dn}{\lambda_{\text{απ}}}$$

Εάν απαλείψουμε το k από τις δύο παραπάνω εξισώσεις και λύσουμε ως προς το πάχος, βρίσκουμε

$$d = \frac{\frac{1}{2}}{2n \left(\frac{1}{\lambda_{\text{απ}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{εν}}} \right)} = 840 \text{ nm}.$$

Τούτο είναι το ελάχιστο πάχος. Υπάρχουν και άλλα πιθανά πάχη. Προσπαθείστε να βρείτε μόνοι σας μερικά από αυτά. \square

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Κάτοπτρο ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, δημιουργήθηκε ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους. Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο —μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης— άνοιξαν ένα βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

Νέα στοά Αρσακείου
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου
5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

Δημοκρατία και μαθηματικά

Προβλήματα και παράδοξα των ελεύθερων εκλογών

Valery Pakhomov

ΥΠΟΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΟΤΙ Η ΠΟΛΙΤΙΚΗ είναι τέχνη, και ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αληθεύει σε μεγάλο βαθμό. Η πολιτική, όμως, δεν είναι απλώς μια τέχνη. Ο ρόλος των μαθηματικών σ' αυτήν είναι περισσότερο σημαντικός απ' όσο ίσως πιστεύετε. Όλοι γνωρίζουμε τη βασική αρχή της δημοκρατίας: οι σημαντικότερες αποφάσεις πρέπει να λαμβάνονται με άμεση ψηφοφορία όσο το δυνατόν ευρύτερων κοινωνικών στρωμάτων. Αυτή η προσέγγιση φαίνεται πως ικανοποιεί τους πάντες. Στην πραγματικότητα, όμως, έπειτα από κάθε εκλογή το πλήθος των δυσαρεστημένων ψηφοφόρων είναι συγκρίσιμο, αν όχι μεγαλύτερο, με το πλήθος όσων έχουν ικανοποιηθεί από το αποτέλεσμα. Άραγε το φαινόμενο είναι τυχαίο; Τα μαθηματικά θα μας βοηθήσουν να εξετάσουμε λεπτομερώς το ερώτημα.

Οι κανόνες της νίκης

Θα αρχίσω με το πρόβλημα της επιλογής, θεωρώντας τη λέξη στην ευρύτερη έννοιά της. Μπορεί να πρόκειται για επιλογή ενός αξιωματούχου, του συντάγματος ή ενός νόμου, του τρό-

που πολεοδομικής ανάπτυξης, του νικητή ενός διαγωνισμού, «της προσωπικότητας της χρονιάς», και ούτω καθεξής. Αυτό που έχει πραγματικά σημασία είναι ότι πρέπει να επιλεγεί μία μόνο μεταξύ διαφόρων εναλλακτικών δυνατοτήτων, και τούτο πρέπει υποχρεωτικά να γίνει μέσω ψηφοφορίας.

Για να μιλήσουμε πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια περίπτωση εκλογών. Έστω ότι έχουμε n ψηφοφόρους και m υποψηφίους. Κάθε ψηφοφόρος κατατάσσει τους υποψηφίους σε συγκεκριμένη σειρά, σύμφωνα με την προτίμησή του. Για έναν συγκεκριμένο ψηφοφόρο x και, ας πούμε, για τρεις υποψηφίους a, b, c , αυτό το σύστημα ατομικής προτίμησης γράφεται

$$a^x > b^x > c^x,$$

όπου a είναι ο υποψήφιος τον οποίο προτιμά περισσότερο ο πολίτης x , b είναι ο δεύτερος στη σειρά προτίμησής του, ενώ ο c είναι, κατά τη γνώμη του x , ο χειρότερος (το « $a^x > b^x$ » συμβολίζει ότι «ο a είναι (για τον x) καλύτερος από τον b »). Αν συνοψίσουμε σ' έναν

πίνακα το σύστημα των ατομικών προτιμήσεων όλων των ψηφοφόρων, προκύπτει η εικόνα ψηφοφορίας. Αν, για παράδειγμα, υπάρχουν $n = 17$ ψηφοφόροι, που επιλέγουν μεταξύ $m = 4$ υποψηφίων a, b, c , και d , και αν 5 ψηφοφόροι κατατάσσουν τους υποψηφίους με τη σειρά $a > d > c > b$, άλλοι 3 με τη σειρά $a > d > b > c$, κάποιιοι άλλοι 5 στη σειρά $b > c > d > a$, ενώ οι υπόλοιποι 4 τους αξιολογούν ως $c > d > b > a$, παίρνουμε τη συγκεντρωτική εικόνα A της ψηφοφορίας, που παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Η συγκεκριμένη εικόνα θα αποτελέσει την κύρια «βάση» διαφόρων κανόνων ψηφοφορίας. Θα διαπιστώσουμε ότι η αντιμετώπιση αυτής της τελείως συνηθισμένης περίπτωσης με διαφορετικούς κανόνες, που όλοι τους φαίνονται απόλυτα εύλογοι και τίμιοι, οδηγεί σε απροσδόκητα διαφορετικά, ή και αντίθετα, αποτελέσματα.

Κανόνας της σχετικής πλειοψηφίας. Κάθε ψηφοφόρος δίνει μία μόνο ψήφο σε έναν από τους υποψηφίους. Κερδίζει ο υποψήφιος που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο πλήθος ψήφων.

Σ' αυτή την περίπτωση, για να καθορίσουμε το νικητή χρειαζόμαστε

Πίνακας 1

Κατάταξη	Πλήθος ψηφοφόρων				Βαθμοί
	5	3	5	4	
1	a	a	b	c	3
2	d	d	c	d	2
3	c	b	d	b	1
4	b	c	a	a	0

Εικόνα A

Πίνακας 2

Υποψήφιος	Πλήθος πρώτων θέσεων	Βαθμολογία	Μονομαχία με			
			a	b	c	d
a	8	24	-	8:9	8:9	8:9
b	5	22	9:8	-	8:9	5:12
c	4	27	9:8	9:8	-	9:8
d	0	29	9:8	12:5	8:9	-

Εφαρμογή των κανόνων νίκης στην εικόνα ψηφοφορίας A. Οι έντονοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν νίκες.



μόνο την πρώτη σειρά της εικόνας ψηφοφορίας. Για την περίπτωση της εικόνας *A*, το συνολικό πλήθος των ψήφων που έλαβε κάθε υποψήφιος εμφανίζεται στη δεύτερη στήλη του Πίνακα 2. Επομένως, σύμφωνα με αυτό τον κανόνα, νικητής είναι ο υποψήφιος *a*.

Κανόνας της απόλυτης πλειοψηφίας. Και πάλι, κάθε ψηφοφόρος δίνει μία μόνο ψήφο σε έναν υποψήφιο. Αλλά τώρα, για να κερδίσει ένας υποψήφιος, πρέπει να συγκεντρώσει περισσότερες από τις μισές ψήφους. Αν δεν συμβεί αυτό, διεξάγεται δεύτερος γύρος ψηφοφορίας, στον οποίο συμμετέχουν οι δύο υποψήφιοι που είχαν τις περισσότερες ψήφους. Στο δεύτερο γύρο, νικητής είναι εκείνος που πλειοψηφεί (επομένως έχει κατ' ανάγκη συγκεντρώσει περισσότερες από τις μισές ψήφους).

Αν εφαρμόσουμε αυτό τον κανόνα στην εικόνα *A*, βλέπουμε ότι νικητές του πρώτου γύρου είναι οι υποψήφιοι *a* (8 ψήφοι) και *b* (5 ψήφοι —δείτε τη δεύτερη στήλη του Πίνακα 2). Με τη διαγραφή των *c* και *d* από την εικόνα παίρνουμε την εικόνα *A'* για το δεύτερο γύρο:

Πλήθος ψηφοφόρων			
5	3	5	4
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

=

8	9
<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>

Εικόνα A'

Από την εικόνα *A'* προκύπτει ότι ο *b* κερδίζει τις εκλογές.

Σ' αυτή την περίπτωση, εκτός από την πρώτη σειρά της εικόνας *A*, χρειαστήκαμε επιπλέον πληροφορίες για το πώς κατατάσσουν οι ψηφοφόροι τους νικητές (τους *a* και *b*) του πρώτου γύρου. Για να χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο κανόνα, πρέπει να γνωρίζουμε το συνολικό πλήθος πρώτων, δεύτερων, κ.λπ. θέσεων που καταλαμβάνει κάθε υποψήφιος σε όλα τα συστήματα ατομικής προτίμησης.

Κανόνας της υψηλότερης βαθμολογίας. Κάθε ψηφοφόρος παρουσιάζει ολόκληρο το σύστημα προτίμησης του. Ένας υποψήφιος παίρνει 0 βαθμούς για την τελευταία θέση, 1 βαθμό για την προτελευταία, 2 βαθμούς για την αμέσως επόμενη, και ούτω καθεξής (η τελευταία στήλη του Πίνακα 1). Κερ-

δίζει ο υποψήφιος που συγκεντρώνει την υψηλότερη βαθμολογία.

Μια παραλλαγή αυτού του κανόνα χρησιμοποιείται συχνά σε αθλητικούς αγώνες όπου οι διαγωνιζόμενοι κατατάσσονται πρώτοι, δεύτεροι, τρίτοι, και ούτω καθεξής, από μια επιτροπή κριτών. Νικητής είναι εκείνος που καταλαμβάνει τις θέσεις οι οποίες δίνουν το μικρότερο άθροισμα. Στην περίπτωση της εικόνας *A*, οι βαθμολογίες των υποψηφίων δίνονται στην τρίτη στήλη του Πίνακα 2: νικητής είναι ο *d*, ο *c* είναι δεύτερος, ενώ οι *a* και *b*, οι προηγούμενοι νικητές, χάνουν με μεγάλη διαφορά.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να συγκρίνουμε ανά δύο τους υποψηφίους. Ποια είναι η γνώμη των ψηφοφόρων για τους *d* και *a*, ας πούμε; Σύμφωνα με την εικόνα *A*, 8 ψηφοφόροι προτιμούν τον *a* από τον *d*, αλλά 9 πιστεύουν ότι ο *d* είναι καλύτερος. Μπορούμε να πούμε ότι ο *d* κερδίζει τη «μονομαχία» με τον *a* με 9 προς 8 ψήφους. Ομοίως, αν συγκρίνουμε τους *d* και *b*, βλέπουμε ότι τώρα η νίκη του *d* είναι ακόμη πιο καθαρή: με 12 προς 5 ψήφους. Τα αποτελέσματα όλων των μονομαχιών παρουσιάζονται στο δεξιό τμήμα του Πίνακα 2: ο υποψήφιος *c* κερδίζει τις μονομαχίες με όλους του αντιπάλους του.

Κανόνας του Condorcet. Ο υποψήφιος που υπερικχύει σε όλες τις μονομαχίες κερδίζει τις εκλογές.

Ο κανόνας αυτός ονομάζεται έτσι προς τιμή του μαρκησιού de Condorcet (1743-1794), γάλλου φιλοσόφου, μαθηματικού και πολιτικού της εποχής του Διαφωτισμού, ο οποίος παρατήρησε τα παράδοξα τα οποία προκύπτουν όταν ο νικητής των εκλογών αναδεικνύεται σύμφωνα με τον «κανόνα της μονομαχίας».

Στο παράδειγμά μας, ο κανόνας του Condorcet οδηγεί σε νίκη του υποψηφίου *c*. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις που ο κανόνας δεν μπορεί να καθορίσει το νικητή: ο ίδιος ο Condorcet ανακάλυψε ότι μερικές κατανομές ψήφων δημιουργούν «φαύλους κύκλους» —όταν, ας πούμε, ο *a* κερδίζει τον *b*, ο *b* τον *c*, και ο *c* τον *a*. Ωστόσο, και οι άλλοι τρεις κανόνες δεν έχουν καθολική εφαρμογή —είναι δυνατόν να αποτύχουν όταν δύο ή περισσότεροι υποψήφιοι συγκεντρώ-

νουν το ίδιο πλήθος ψήφων (περίπτωση σπάνια όταν το πλήθος των ψηφοφόρων είναι μεγάλο).

Παράδοξα της ψηφοφορίας

Οι τέσσερις κανόνες που εξετάσαμε αντιπροσωπεύουν τέσσερις διαφορετικές αντιλήψεις για το ποια είναι η καλύτερη επιλογή σύμφωνα με την οπτική γωνία του «συλλογικού ψηφοφόρου». Μάλιστα, όχι μόνο μας δίνουν διαφορετικούς νικητές, αλλά ο καλύτερος σύμφωνα με κάποιον κανόνα υποψήφιος αποδεικνύεται χειρότερος σύμφωνα με κάποιον άλλο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της εικόνας ψηφοφορίας *A*, ο νικητής σύμφωνα με τον κανόνα της σχετικής πλειοψηφίας είναι ο χειρότερος σύμφωνα με τον Condorcet, ενώ εκείνος που κερδίζει την απόλυτη πλειοψηφία έχει τη μικρότερη βαθμολογία. Συνεπώς, γι' αυτή την εικόνα ψηφοφορίας, και ανεξάρτητα από τον κανόνα που θα χρησιμοποιήσουμε, ο νικητής μπορεί να μην ικανοποιήσει περισσότερους από τους μισούς ψηφοφόρους (οι οποίοι, όπως είναι φυσικό, θα πιστεύουν ότι κάποιος άλλος κανόνας είναι περισσότερο τίμιος)! Ωστόσο, το πρόβλημα της επιλογής περιπλέκεται από ακόμη εντυπωσιακότερες καταστάσεις για τους υποψηφίους.

Όπως ήδη γνωρίζουμε, όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα της απόλυτης πλειοψηφίας, νικητής της εικόνας *A* είναι ο υποψήφιος *b*. Ο υποψήφιος *a*, ο οποίος δεν έχει καμία πιθανότητα επιτυχίας, δεν είναι απίθανο να αποσύρει την υποψηφιότητά του. Αν διαγράψουμε τον *a* από τον Πίνακα 1, θα πάρουμε την εικόνα ψηφοφορίας *B* (Πίνακας 3). Παρατηρούμε ότι τώρα προκρίνονται στο δεύτερο γύρο οι υποψήφιοι *d* και *b* (που παίρνουν 8 και 5 από τις 17 ψήφους, αντίστοιχα), όπου κερδίζει ο *d* (δείτε την εικόνα *B'* στον Πίνακα 3) με 7 ψήφους! Επομένως, ο *a* έχει τη δυνατότητα να διαμορφώσει το αποτέλεσμα των εκλογών, παρόλο που δεν μπορεί να τις κερδίσει.

Πρόβλημα 1. Βρείτε έναν παρόμοιο τρόπο διαμόρφωσης του αποτελέσματος όταν χρησιμοποιούμε τον κανόνα της υψηλότερης βαθμολογίας.

Στο τέλος, η κατάσταση καταλήγει παράλογη.

Πίνακας 3

Πλήθος ψηφοφόρων			
5	3	5	4
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>

⇒

12	5
<i>d</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>d</i>

Εικόνα Β

Εικόνα Β'

Ο υποψήφιος *a* αποσύρεται. Η εικόνα Β δείχνει τον πρώτο γύρο μιας εκλογής με τον κανόνα της απόλυτης πλειοψηφίας: η εικόνα Β', το δεύτερο γύρο, όπου κερδίζει ο *d*.

Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει δύο εικόνες ψηφοφορίας, τις *C* και *D*, οι οποίες διαφέρουν μόνο στην τελευταία στήλη, όπου εναλλάσσουν τη θέση τους οι *a* και *b*. Μπορούμε να φανταστούμε ότι η πειστική προπαγάνδα για τη νίκη του *a* προκάλεσε τη μεταστροφή των δύο ψηφοφόρων που αντιπροσωπεύονται από την τελευταία στήλη. Σύμφωνα με τον κανόνα της σχετικής πλειοψηφίας, στην εικόνα *C* έχουμε ισοπαλία μεταξύ των υποψηφίων *a* και *b* —μία ισοπαλία που δεν προβλέπει ο κανόνας, και επομένως δεν είναι αντιμετωπίσιμη—, ενώ η προπαγάνδα υπέρ του *a* οδηγεί σε νίκη του (εικόνα ψηφοφορίας *D*). Ας υποθέσουμε, όμως, ότι ο νικητής καθορίζεται από τον κανόνα της απόλυτης πλειοψηφίας. Τότε, στην εικόνα ψηφοφορίας *C*, νικητές του πρώτου γύρου είναι οι *a* και *b*, και ο *a* κερδίζει στο δεύτερο γύρο (επαληθεύστε το!). Ωστόσο, στην εικόνα *D*, η προπαγάνδα που μετέστρεψε υπέρ του *a* τους δύο ψηφοφόρους του *b* έχει ως αποτέλεσμα την ήττα του: οι *a* και *c* είναι οι νικητές του πρώτου γύρου, και ο *c* του δεύτερου!

Θα μπορούσα να σας δώσω πολλά ακόμη παραδείγματα κανόνων ψη-

Πίνακας 4

Πλήθος ψηφοφόρων			
6	5	4	2
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

Εικόνα C

Πλήθος ψηφοφόρων			
6	5	4	2
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

Εικόνα D

Δύο ψηφοφόροι (δεξιά στήλη) αλλάζουν γνώμη υπέρ του *a*, και αυτός χάνει τις εκλογές που γίνονται με τον κανόνα της απόλυτης πλειοψηφίας.

φοφορίας και παραδόξων, για να σας πείσω ότι δεν υπάρχουν τέλει κανόνες. Όλες αυτές οι σκέψεις μάς οδηγούν στο δυσάρεστο (για πολλούς) συμπέρασμα ότι η δημοκρατία —ως έκφραση της θέλησης της πλειοψηφίας— είναι ανύπαρκτη, διότι, όπως διαπιστώσαμε, είναι ανύπαρκτη αυτή καθ' εαυτήν η έννοια της «άποψης της πλειοψηφίας». Ποιο είναι, λοιπόν, το προτέρημα της δημοκρατίας; Ίσως, αυτό που αποτελεί και τον κίνδυνο γι' αυτήν —η δυνατότητα «αλλοίωσης» και επηρεασμού του αποτελέσματος των εκλογών χωρίς την παραβίαση του νόμου.

Μια συνάρτηση συλλογικής προτίμησης

Ας φανταστούμε τώρα ότι *n* μέλη ενός κοινοβουλίου πρέπει να καθορίσουν τη σειρά με την οποία θα χρηματοδοτήσει η πολιτεία ένα πλήθος κοινωνικών προγραμμάτων. Για παράδειγμα, μπορούν να δώσουν προτεραιότητα στη δημόσια υγεία, να δώσουν έπειτα κεφάλαια για ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα, στη συνέχεια από το υπόλοιπο του προϋπολογισμού να χρηματοδοτήσουν ένα οικιστικό πρόγραμμα, και ούτω καθεξής: ή, μπορεί να διαλέξουν μια διαφορετική σειρά υλοποίησης των προγραμμάτων. Κάθε μέλος του κοινοβουλίου έχει προσωπική άποψη για το πώς πρέπει να ιεραρχηθούν τα προγράμματα. Το πρόβλημα έγκειται στη δημιουργία μιας κατάταξης που θα αντανάκλα τη συλλογική άποψη του κοινοβουλίου.

Για τα μαθηματικά δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ της κατάταξης προγραμμάτων και της κατάταξης υποψηφίων, και έτσι θα μιλήσουμε για *n* ψηφοφόρους και *m* υποψηφίους, όπως και προηγουμένως. Η πραγματική διαφορά είναι ότι τώρα δεν χρειαζόμαστε μόνο τον «καλύτερο» υποψήφιο (ή πρόγραμμα), αλλά έναν κατά-

λογο όλων των υποψηφίων σε σειρά «συλλογικής προτίμησης». Για να είμαστε πιο τυπικοί, θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν κανόνα, τον οποίο θα ονομάσουμε *συνάρτηση συλλογικής προτίμησης*, που θα αντιστοιχίζει μια συγκεκριμένη «συλλογική» διάταξη $a \stackrel{P}{\geq} b$ σε κάθε δυνατή εικόνα ψηφο-

φορίας *P*. Δηλαδή, με δεδομένα μια εικόνα ψηφοφορίας *P* και ένα ζεύγος υποψηφίων *a* και *b*, αυτός ο κανόνας πρέπει να αποφαινεται αν ο *a* είναι καλύτερος από τον *b* ($a \stackrel{P}{>} b$), αν ο *a* είναι «ισάξιος» του *b* ($a \stackrel{P}{=} b$), ή αν ο *a* είναι χειρότερος από τον *b* ($a \stackrel{P}{<} b$). (Επομένως, σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε και μια τρίτη δυνατότητα: «το σώμα των εκλεκτόρων, ως σύνολο, δείχνει την ίδια προτίμηση στους *a* και *b*».) Όταν είναι προφανές σε ποια εικόνα ψηφοφορίας *P* αναφερόμαστε, θα παραλείπω το *P* πάνω από τα σύμβολα $\geq, >$, κ.λπ.

Όπως είναι φυσικό, μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες απαιτήσεις. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που έχουμε δύο υποψηφίους *a* και *b*, ο μοναδικός εύλογος τρόπος ορισμού μιας εικόνας ψηφοφορίας είναι να απαριθμήσουμε το πλήθος n_a των ψηφοφόρων που προτιμούν τον *a* από τον *b* και το πλήθος n_b όσων προτιμούν τον *b* από τον *a*, και να θέσουμε $a > b$, $a = b$ ή $a < b$ αν $n_a > n_b$, $n_a = n_b$ ή $n_a < n_b$, αντιστοίχα. Παρεμπιπτόντως, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση οι τέσσερις κανόνες ψηφοφορίας τους οποίους εξετάσαμε προηγουμένως συμπίπτουν και πως η συνάρτησή μας μπορεί να οριστεί πολύ απλά: «Αν υπάρχει νικητής στις εκλογές, τότε ο νικητής είναι καλύτερος από τον ηττημένο. Διαφορετικά, οι υποψήφιοι είναι ισάξιοι.»

Όταν έχουμε περισσότερους από δύο υποψηφίους, ο απλούστερος τρόπος επέκτασης αυτού του ορισμού είναι ο εξής: Έστω *S* το σύνολο των υποψηφίων και *R* κάποιος κανόνας «ανάδειξης νικητή» στις εκλογές. Αν $R(S)$ είναι το σύνολο των νικητών σύμφωνα με τούτο τον κανόνα (μπορεί να υπάρχουν αρκετοί), τότε όλοι αυτοί θεωρούνται ισάξιοι και καλύτεροι από όλους τους υπόλοιπους. Στη συνέχεια εξαιρούμε αυτούς τους νικητές από το σύνολο *S*—τυπικά, θεωρούμε τη «διαφορά» $S_1 = S \setminus R(S)$ των συνόλων *S* και $R(S)$ — και εφαρμόζουμε τον κανόνα μας στο υπόλοιπο S_1 , για να πάρουμε το σύνολο $R(S_1)$ των υποψηφίων που κερδίζουν τη δεύτερη θέση. Κατόπιν, θεωρούμε τη διαφορά $S_2 = S_1 \setminus R(S_1)$ και καθορίζου-

με όσους παίρνουν τα «χάλκινα μετάλλια», και ούτω καθεξής.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε 3 ψηφοφόρους, 4 υποψηφίους a, b, c, d και την εξής εικόνα ψηφοφορίας, E :

Πλήθος ψηφοφόρων		
1	1	1
a	d	b
b	a	c
c	b	d
d	c	a

Εικόνα E

Έστω R ο κανόνας της σχετικής πλειοψηφίας. Τότε, καθένας από τους υποψηφίους a, b, d παίρνει μία ψήφο, και $R(S) = \{a, b, d\}$. Αυτοί καταλαμβάνουν την πρώτη θέση, και ο υποψήφιος c τη δεύτερη, οπότε μπορούμε να γράψουμε τη συλλογική προτίμηση ως $a = b = d > c$.

Πρόβλημα 2. Εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο των «διαδοχικών αποκλεισμών» στην εικόνα ψηφοφορίας A (Πίνακας 1) θεωρώντας ως R καθέναν από τους τέσσερις κανόνες που εξετάσαμε προηγουμένως. Επαληθεύστε ότι με τον κανόνα της σχετικής πλειοψηφίας προκύπτει η κατάταξη $a > d > c > b$, με τον κανόνα της απόλυτης πλειοψηφίας η $b > c > d > a$, με τον κανόνα της υψηλότερης βαθμολογίας η $d > c > b > a$, και με τον κανόνα του Condorcet η $c > d > b > a$.

Αυτό το πρόβλημα μας δείχνει και πάλι ότι διαφορετικοί κανόνες οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα (τα πρώτα δύο είναι αντίθετα). Παρατηρήστε ότι οι κανόνες της σχετικής πλειοψηφίας και της υψηλότερης βαθμολογίας επιτρέπουν την άμεση κατάταξη των υποψηφίων ανάλογα με το πλήθος των ψήφων ή τη βαθμολογία που συγκεντρώνουν, αλλά και αυτές οι μέθοδοι δίνουν νέες κατατάξεις: $a > b > c > d$ και $d > c > a > b$! Επιπλέον, οι κανόνες της απόλυτης πλειοψηφίας και του Condorcet είναι ανεφάρμοστοι σε μερικές εικόνες ψηφοφορίας (όπως η E προηγουμένως), παρότι επιτρέψαμε την ισοδυναμία των υποψηφίων.

Οι προηγούμενες διερευνήσεις μας πρέπει να σας προετοίμασαν για τέτοιες «ελάσσονες» αντιφάσεις. Έρχομαι όμως τώρα σ' ένα θεώρημα που θα σας

καταπλήξει. Σε γενικές γραμμές, μας λέει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση συλλογικής προτίμησης που να συμφωνεί με τη συμβατική έννοια της δημοκρατίας και, ταυτόχρονα, να ικανοποιεί μερικές απολύτως εύλογες απαιτήσεις!

Θα παρουσιάσω αυτές τις φυσιολογικές απαιτήσεις ως ένα σύνολο τεσσάρων αξιωμάτων συλλογικής προτίμησης.

ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ. Η σειρά συλλογικής προτίμησης πρέπει να ορίζεται για κάθε ζεύγος υποψηφίων.

ΑΞΙΩΜΑ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ. Αν $a \geq b$ και $b \geq c$, τότε $a \geq c$.

Με άλλα λόγια, επιθυμούμε να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ οποιωνδήποτε υποψηφίων, και η διάταξη να είναι διάταξη —δηλαδή, θέλουμε να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου ο a είναι καλύτερος από τον b , ο b είναι καλύτερος από τον c , αλλά ο c είναι καλύτερος από τον a .

ΑΞΙΩΜΑ ΟΜΟΦΩΝΙΑΣ. Αν όλοι οι ψηφοφόροι πιστεύουν ότι ο a είναι καλύτερος από τον b , τότε και η συλλογική άποψη πρέπει να είναι η ίδια: $a > b$.

Αυτή η αδιαμφισβήτητη απαίτηση αποκλείει τη συνάρτηση που ανακηρύσσει ισάξιους όλους τους υποψηφίους, ανεξάρτητα από την εικόνα της ψηφοφορίας.

ΑΞΙΩΜΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ. Η τελική (συλλογική) κατάταξη δύο υποψηφίων εξαρτάται μόνο από την κατάταξη τους στις ατομικές προτιμήσεις, και είναι ανεξάρτητη από τη διευθέτηση των υπόλοιπων υποψηφίων.

Το αξίωμα αυτό αποκλείει τη δυνατότητα «αλλοίωσης» —για παράδειγμα, όταν η αποχώρηση ενός υποψηφίου επηρεάζει τη σειρά των άλλων υποψηφίων.

Ένα παράδειγμα συνάρτησης που ικανοποιεί και τα τέσσερα αξιώματα είναι ο κανόνας του δικτάτορα, σύμφωνα με τον οποίο η κατάταξη καθορίζεται από ένα συγκεκριμένο ψηφοφόρο (το «δικτάτορα») χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η γνώμη των άλλων ψηφοφόρων. Φυσικά, δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε «δημοκρατικό» έναν τέτοιο κανόνα.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο κανόνας για τους δύο υποψηφίους που εξετάσαμε προηγουμένως (στην προκειμένη περίπτωση, η μεταβατικότητα

και η ανεξαρτησία είναι αυτονόητες). Όμως, αυτός είναι στην πραγματικότητα κανόνας επιλογής και όχι κατάταξης —δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν έχουμε περισσότερους υποψηφίους.

Το θεώρημα του Arrow

Το απροσδόκητο αποτέλεσμα το οποίο πρόκειται να αποδείξω είναι ότι, παρόλο που οι προϋποθέσεις μας είναι εύλογες, ο μοναδικός κανόνας που τις ικανοποιεί (και μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε πλήθος υποψηφίων) είναι ο κανόνας του δικτάτορα! Η πατρότητα αυτής της ιδέας ανήκει στον αμερικανό οικονομολόγο Kenneth Arrow (γεν. 1921).

Θα αποδείξω το θεώρημα του Arrow σε τρία βήματα. Πρώτα, όμως, χρειάζεται να εισαγάγουμε μερικούς σημαντικούς ορισμούς. Θα ονομάσουμε **συνασπισμό** κάθε υποσύνολο C του συνόλου V όλων των ψηφοφόρων. Ένας συνασπισμός C θα ονομάζεται **αποφασιστικός για τον υποψήφιο a έναντι του b** , αν $a > b$ κάθε φορά που όλα τα μέλη του συνασπισμού προτιμούν τον a αντί του b , ενώ όλοι οι άλλοι ψηφοφόροι προτιμούν τον b αντί του a . Και τέλος, κάθε συνασπισμός που είναι αποφασιστικός για κάθε ζεύγος υποψηφίων θα ονομάζεται απλώς **αποφασιστικός**.

Ένας αποφασιστικός συνασπισμός είναι σχεδόν δικτατορικός: δεδομένου ότι όλοι οι άλλοι ψηφοφόροι έχουν αντίθετη γνώμη, επιβάλλει την άποψή του για κάθε υποψήφιο. Θα αποδείξω ότι είναι πάντοτε δυνατόν να βρούμε έναν αποφασιστικό συνασπισμό που αποτελείται από ένα μόνο ψηφοφόρο και ότι, στην πραγματικότητα, η γνώμη των υπόλοιπων ψηφοφόρων είναι αδιάφορη.

Βήμα 1. Υπάρχουν δύο υποψήφιοι a και b και ένας ψηφοφόρος τέτοιος, ώστε ο συνασπισμός που αποτελείται μόνο από αυτόν να είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του b .

Υπάρχει ένας τουλάχιστον συνασπισμός που είναι αποφασιστικός για ένα ζεύγος υποψηφίων —ο συνασπισμός V όλων των ψηφοφόρων (είναι αποφασιστικός λόγω του αξιώματος της ομοφωνίας). Αφού το σύνολο αυτών των συνασπισμών περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, μπορούμε να

επιλέξουμε εκείνο το συνασπισμό (ας τον ονομάσουμε D) που έχει το μικρότερο πλήθος μελών από κάθε άλλο συνασπισμό ο οποίος είναι αποφασιστικός για κάποιο ζεύγος υποψηφίων. Το πλήθος αυτό είναι μεγαλύτερο του μηδενός, διότι ο κενός συνασπισμός δεν μπορεί να είναι αποφασιστικός για κανένα a και b (αν δεν προτιμά κανείς τον a έναντι του b , τότε όλοι προτιμούν τον b έναντι του a , επομένως, από το αξίωμα της ομοφωνίας προκύπτει $a < b$, και όχι $a \geq b$).

Από την άλλη πλευρά, ο ελάχιστος συνασπισμός D που επιλέξαμε είναι αδύνατον να περιέχει περισσότερους από έναν ψηφοφόρους. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει. Χωρίζουμε τον D σε ένα συνασπισμό ενός ψηφοφόρου $\{v\}$ και στο μη κενό συνασπισμό E που περιέχει όλους τους υπόλοιπους ψηφοφόρους του D . Ας υποθέσουμε ότι ο D είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του b , και ας θεωρήσουμε την εξής εικόνα ψηφοφορίας:

Συνασπισμός D		
$\{v\}$	E	$V \setminus D$
a	c	b
b	a	c
c	b	a
...

(Εδώ ο c είναι ένας οποιοσδήποτε υποψήφιος διαφορετικός από τους a και b , ενώ οι τελείες παριστούν μια τυχαία διευθέτηση των άλλων υποψηφίων — που δεν έχει σημασία λόγω του αξιώματος της ανεξαρτησίας.) Αφού ο D είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του b , όλοι οι ψηφοφόροι που ανήκουν στον D προτιμούν τον a από τον b , όλοι οι άλλοι ψηφοφόροι προτιμούν τον b από τον a , και έχουμε $a \geq b$. Αν $c \geq b$, τότε ο συνασπισμός E θα ήταν αποφασιστικός για τον c έναντι του b , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του D ως του συνασπισμού με το ελάχιστο μέγεθος (διότι ο E αποτελείται από λιγότερους ψηφοφόρους, και επιλέξαμε τον D ως τον ελάχιστο για κάθε ζεύγος υποψηφίων). Επομένως, $b > c$.

Έχουμε λοιπόν $a \geq b$, $b > c$, και επομένως, λόγω της μεταβατικότητας, $a > c$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι ο συνασπισμός $\{v\}$ είναι αποφασιστικός

για τον a έναντι του c , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με το ελάχιστο του D ! Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει το Βήμα 1: ο D αποτελείται από ένα μόνο ψηφοφόρο. Ας ονομάσουμε αυτό τον ψηφόρο k .

Βήμα 2. Ο συνασπισμός $D = \{k\}$ του Βήματος 1 είναι αποφασιστικός.

Γνωρίζουμε ότι ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του b . Παίρνουμε έναν οποιοδήποτε άλλο υποψήφιο c , και θεωρούμε την εξής εικόνα ψηφοφορίας:

$\{k\}$	$V \setminus \{k\}$
a	b
b	c
c	a
...	...

Σύμφωνα με την επιλογή του $\{k\}$, $a \geq b$, και, λόγω του αξιώματος της ομοφωνίας, $b > c$. Από το αξίωμα της μεταβατικότητας έπεται ότι $a \geq c$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν πρέπει να εξαρτάται από τη θέση του υποψηφίου b (λόγω του αξιώματος της ανεξαρτησίας), και επομένως η συνάρτησή μας της συλλογικής προτίμησης πρέπει να δηλώνει ότι $a \geq c$ όποτε ο k προτιμά τον a από τον c και όλοι οι υπόλοιποι ψηφοφόροι προτιμούν τον c από τον a . Τούτο σημαίνει ότι ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του c , για κάθε υποψήφιο c .

Πρόβλημα 3. Χρησιμοποιήστε ένα παρόμοιο επιχείρημα για να αποδείξετε ότι ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός για τον d έναντι του c , για κάθε υποψήφιο d .

Επομένως, ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός για κάθε d έναντι κάθε c , επομένως είμαστε έτοιμοι να κάνουμε το τελευταίο βήμα.

Βήμα 3. Ο ψηφοφόρος k είναι δικτάτορας.

Μέχρι στιγμής δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η συλλογική γνώμη συμπίπτει πάντοτε με τη γνώμη του k : έχουμε αποδείξει ότι αυτό ισχύει μόνο όταν όλες οι υπόλοιπες ατομικές γνώμες είναι αντίθετες από του k . Το μόνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι αυτή η εξάρτηση από τη γνώμη των άλλων ψηφοφόρων είναι φαινομενική.

Ας υποθέσουμε ότι ο k προτιμά τον a από τον c και τον c από τον b . Ας

επιτρέψουμε στους υπόλοιπους ψηφοφόρους να πιστεύουν ότι ο c είναι ο καλύτερος υποψήφιος και να έχουν όποια γνώμη θέλουν για τους υπόλοιπους υποψηφίους (των a και b συμπεριλαμβανομένων). Αφού ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός συνασπισμός, και εφόσον ο a , σύμφωνα με τον k , είναι καλύτερος από τον c , ενώ για όλους τους άλλους ψηφοφόρους είναι χειρότερος, $a \geq c$. Βάσει του αξιώματος της ομοφωνίας, $c > b$, ενώ λόγω της μεταβατικότητας, $a \geq b$. Από το αξίωμα της ανεξαρτησίας γνωρίζουμε ότι η συλλογική γνώμη για τους a και b δεν εξαρτάται από τον c . Συνεπώς, αποδείξαμε για κάθε ζεύγος υποψηφίων a και b ότι, αν ο k προτιμά τον a από τον b , τότε, οποιαδήποτε και αν είναι η γνώμη των άλλων ψηφοφόρων για τους a και b , η συλλογική γνώμη θεωρεί ανώτερο τον a από τον b . Και έτσι, συμπληρώσαμε την απόδειξη του θεωρήματος του Arrow.

Πού έχουμε καταλήξει λοιπόν; Μολονότι η δικτατορία είναι μια αρκετά σαφής έννοια που ικανοποιεί απλές αρχές, η δημοκρατία δεν μπορεί να οριστεί παρά μόνο ως το αντίθετο της δικτατορίας. Εντούτοις, η δημοκρατία ελκύει τους ανθρώπους διότι αποτελεί το φυσικό πολιτικό περιβάλλον για την ανάπτυξη της κοινωνίας. Μόνο σ' αυτό το περιβάλλον είναι δυνατόν να επιλεγούν φυσικά οι «ισχυρότεροι» και οι «σοφότεροι», διότι, για να κερδίσετε τις εκλογές ή για να πείσετε τους άλλους να ακολουθήσουν τις επιλογές σας, χρειάζεται συχνά κάτι περισσότερο από την ικανότητα της πειθούς — απαιτείται η ικανότητα του υπολογισμού.

Αυτή, όμως, είναι και η μαστίγα της δημοκρατίας. Ο υπολογισμός επιτρέπει πολύ συχνά την «αλλοίωση» των αποτελεσμάτων. Και τούτο, ίσως, αποτελεί την αιτία για την οποία τα πολιτικά ρεύματα στην κοινωνία ταλαντεύονται διαρκώς μεταξύ δημοκρατίας και δικτατορίας. ■

Ο Valery Pakhomov έχει εργαστεί ως καθηγητής μαθηματικών στο οικονομικό τμήμα του Κρατικού Πανεπιστημίου της Μόσχας και στη Σχολή Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Kolmogorov.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M111

Εναλλαγή θέσεων. Λύστε την εξίσωση

$$x2^{1/x} + \frac{1}{x}2^x = 4.$$

M112

Βόλτα με ποδήλατα. Η πόλη *A* απέχει 30 km από την πόλη *B*. Τρεις φίλοι θέλουν να ταξιδέψουν από τη μια πόλη στην άλλη. Έχουν δύο ποδήλατα: ένα αγωνιστικό, με το οποίο οποιοσδήποτε από τους τρεις μπορεί να ταξιδέψει με 30 km/h, και ένα ποδήλατο αναβάσεων, με το οποίο μπορούν να τρέξουν με 20 km/h. Καθένας τους μπορεί να περπατά με ρυθμό 6 km/h, και, επιπλέον, μπορεί να αφήσει το ποδήλατο στην άκρη του δρόμου, όπου θα παραμένει χωρίς κίνδυνο να το πειράξει κανείς, ώσπου να έρθει να το πάρει ένας από τους δύο άλλους. Οι τρεις φίλοι θέλουν να ελαχιστοποιήσουν το χρόνο της εκδρομής τους (το ταξίδι τελειώνει όταν φτάσει και ο τελευταίος στην πόλη *B*). Πόσος είναι ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για τη διαδρομή τους;

M113

Συναντήσεις κύκλων. Έστω *M* το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου *ABCD*. Θεωρούμε τρεις κύκλους που διέρχονται από το *M*: ο πρώτος και ο δεύτερος εφάπτονται της *AB* στα σημεία *A* και *B*, αντίστοιχα, και ο τρίτος διέρχεται από τα *C* και *D*. Έστω *P* και *Q* τα σημεία τομής (εκτός του *M*) του τρίτου κύκλου με τον πρώτο και το δεύτερο. Αποδείξτε ότι η *PQ* εφάπτεται στον πρώτο και στο δεύτερο κύκλο.

M114

Ανάπτυγμα πολυέδρου. Έστω *ABCD*

μια κανονική τριγωνική πυραμίδα (δηλαδή το *ABC* είναι ισόπλευρο τρίγωνο, και οι ακμές *AD*, *BD*, *CD* είναι ίσες), και έστω ότι οι επίπεδες γωνίες στην κορυφή *D* ισούνται με *a*. Ένα επίπεδο παράλληλο στο *ABC* τέμνει τις *AD*, *BD*, και *CD* στα σημεία *A*₁, *B*₁ και *C*₁, αντίστοιχα. Χωρίζουμε την επιφάνεια του πολυέδρου *ABCA*₁*B*₁*C*₁ κατά μήκος των πέντε ακμών *A*₁*B*₁, *B*₁*C*₁, *C*₁*C*, *CA*, *AB*, και το αναπτύσσουμε στο επίπεδο. Βρείτε όλες τις τιμές της *a* για τις οποίες αλληλεπικαλύπτονται τμήματα του αναπτύγματος.

M115

Περιστροφή γραφήματος (για φίλους του απειροστικού λογισμού). Περιστρέφουμε κατά 45° γύρω από κάποιο σημείο το γράφημα της $y = x^3 + ax^2 + 19x + 97$. Το γράφημα που προκύπτει παριστά μια συνάρτηση $y = f(x)$ (δηλαδή, κάθε τιμή του *x* αντιστοιχεί σε μία μοναδική τιμή του *y*). Βρείτε όλα τα *a* για τα οποία αυτό είναι αληθές.

Φυσική

Φ111

Χάντρα σε δακτύλιο. Μια μικρή χάντρα ωθείται κατά μήκος ενός λεπτού συρμάτινου δακτυλίου ο οποίος ηρεμεί. Ο συντελεστής τριβής *μ* ανάμεσα στη χάντρα και το δακτύλιο ισούται με 0,1· θεωρήστε ότι στο περιβάλλον της άσκησης επικρατούν συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Πόσο θα επιβραδυνθεί η χάντρα εάν διαγράψει τρεις φορές το δακτύλιο; Εάν δεν κατορθώσετε να επιλύσετε το πρόβλημα επακριβώς, προσπαθήστε να επινοήσετε κάποια προσεγγιστική λύση. (M. Yermilov)

Φ112

Αέριο σε δοχείο. Η θερμοκρασία των

τοιχωμάτων ενός δοχείου γεμάτου με μονοατομικό αέριο είναι *T*, και η θερμοκρασία του περιεχόμενου αερίου είναι *T*₁. Σε ποια περίπτωση θα ασκεί το αέριο μεγαλύτερη πίεση στα τοιχώματα του δοχείου: όταν τα τοιχώματα είναι ψυχρότερα από το αέριο (*T* < *T*₁) ή όταν είναι θερμότερα (*T* > *T*₁); (G. Myakishev)

Φ113

Φορτισμένη σφαίρα και μικρό αφόρτιστο αντικείμενο. Ένα μικρό αφόρτιστο και αγωγίμο αντικείμενο τοποθετείται κοντά σε μια φορτισμένη αγωγίμη σφαίρα. Προτού εισαχθεί το εν λόγω αντικείμενο στο ηλεκτρικό πεδίο της σφαίρας, το δυναμικό στο σημείο όπου πρόκειται να τοποθετηθεί ισούται με *V* = 10.000 V. Μετά την εισαγωγή του, το δυναμικό της σφαίρας μεταβάλλεται κατά $\Delta V = 1V$. Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα τη στιγμή εκείνη. Θεωρήστε ότι το αφόρτιστο αντικείμενο έχει γραμμικές διαστάσεις πολύ μικρότερες από τη διάμετρο της φορτισμένης σφαίρας.

(A. Zilberman)

Φ114

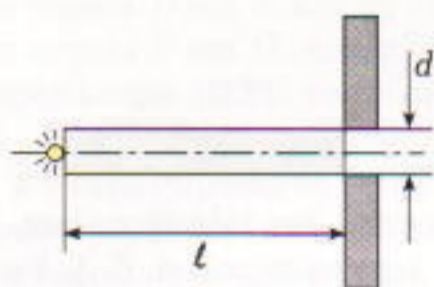
Δακτύλιος εντός μαγνητικού πεδίου. Λεπτός συρμάτινος δακτύλιος διαμέτρου *d* και ωμικής αντίστασης *R* τοποθετείται εντός μαγνητικού πεδίου *B*, παράλληλου προς το επίπεδο του δακτυλίου. Μια πηγή τάσης *V*₀ πρόκειται να συνδεθεί σε δύο σημεία του δακτυλίου. Σε ποια σημεία θα επιλέγατε να τη συνδέσετε, προκειμένου να μεγιστοποιήσετε τη δύναμη που ασκείται στο δακτύλιο λόγω της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου; (A. Zilberman)

Φ115

Φωταγωγός. Σημειακή πηγή φωτός

βρίσκεται σε απόσταση $\ell = 1 \text{ m}$ από μια οθόνη, η οποία έχει άνοιγμα διαμέτρου $d = 1 \text{ cm}$, ακριβώς απέναντι από την πηγή. Πώς θα μεταβληθεί η ποσότητα του φωτός που διέρχεται από το άνοιγμα, αν ένας διαφανής γυάλινος κύλινδρος, με δείκτη διάθλασης $n = 1,5$, τοποθετηθεί ανάμεσα στην πηγή και την οθόνη με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο σχήμα; Ο κύλινδρος έχει μήκος $\ell = 1 \text{ m}$ και διάμετρο βάσης $d = 1 \text{ cm}$, και η φωτεινή πηγή κείται επί του άξονός του.

(A. Butov)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

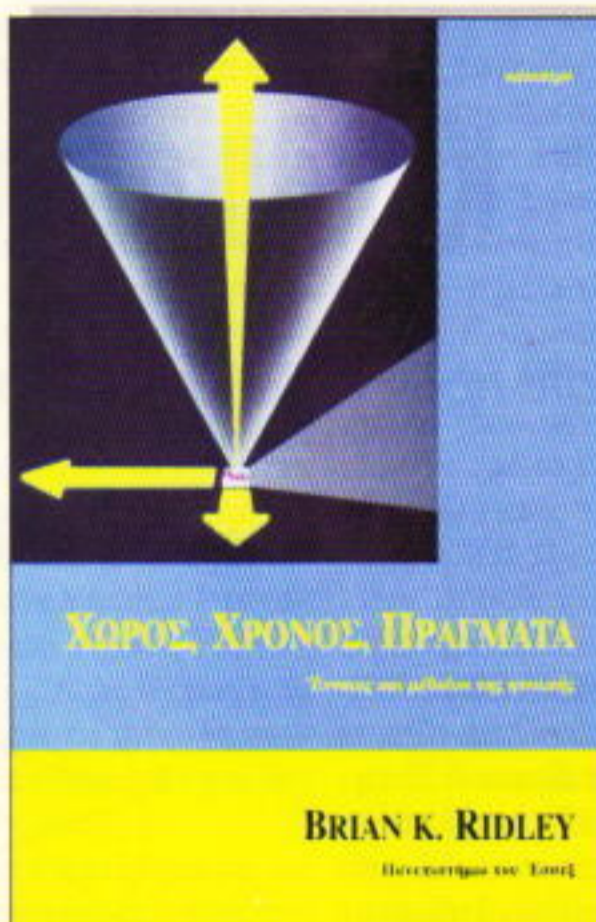
ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994.

Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι τρία τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του. Τώρα μπορείτε να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας. (Η θήκη του 1998 θα είναι διαθέσιμη από τα τέλη Φεβρουαρίου του τρέχοντος έτους.)

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Brian Ridley

ΧΩΡΟΣ, ΧΡΟΝΟΣ, ΠΡΑΓΜΑΤΑ

Έννοιες και μέθοδοι της φυσικής

«Είναι εντυπωσιακός ο τρόπος με τον οποίο ο Ridley διεισδύει στα βαθύτερα ζητήματα της επιστήμης χωρίς να χάνει την επαφή του με τον μη ειδικό αναγνώστη... Επιτυγχάνει ό,τι ακριβώς κατόρθωσε ο Arthur Eddington το 1928 με το *The Nature of the Physical World*.»

—*The New Scientist*

«Εξαιρετικό βιβλίο... Η σαφήνεια του ύφους κάνει πραγματικά απολαυστική την ανάγνωση.»

—*Physics Education*

«Πρέπει να το προτείνουμε σε όσους επιθυμούν να εντρυφήσουν στην επιστήμη της φυσικής.»

—*American Journal of Physics*

«Θα μπορούσα να το χαρακτηρίσω "συνοπτική εγκυκλοπαίδεια της φυσικής". Αναλύει με τον πιο εύληπτο τρόπο τις θεμελιώδεις επιστημονικές έννοιες, αλλά ταυτόχρονα αναφέρεται σε όλες τις νεότερες εξελίξεις... Ένα έξοχο δείγμα εκλαΐκευσης της επιστήμης.»

—*Θ.Μ. Χρησιδής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*

Σελ.: 248, 14 × 21 εκ., 5.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Περσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Κυκλικοί συλλογισμοί

Έντεκα βήματα προς τη βαθύτερη κατανόηση των εγγεγραμμένων γωνιών

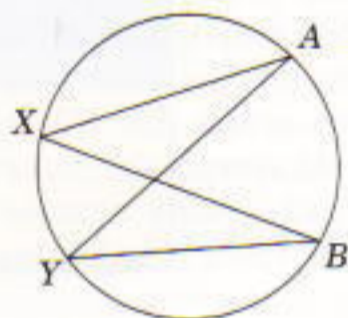
Mark Saul και Benji Fisher

ΣΑΣ ΚΑΛΩΣΟΡΙΖΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΚΑΙ-
νούργια στήλη του *Quantum*, το
«Gradus ad Parnassum».¹ Σ' αυ-
τήν θα παρουσιάζουμε προβλή-
ματα και θεωρήματα που συνδέονται
στενά με τη συνηθισμένη λυκειακή
ύλη των μαθηματικών, αλλά στις πε-
ρισσότερες σχολικές τάξεις δεν εξετά-
ζονται ιδιαίτερα.

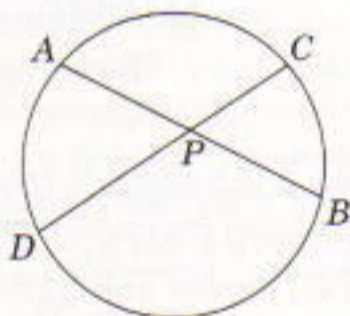
Τα προβλήματα θα ομαδοποιούνται
κατά θέματα. Για παράδειγμα, το θέμα
του παρόντος τεύχους είναι το μέτρο
των γωνιών σ' έναν κύκλο. Αν δεν έ-
χετε μελετήσει ήδη αυτά τα θεωρήμα-
τα, μπορείτε να τα βρείτε σε οποιοδή-
ποτε εγχειρίδιο γεωμετρίας.

Σ' αυτό το τεύχος έχουμε προσκε-
κλημένο ένα συγγραφέα που συνέβα-
λε στην παρουσίαση των προβλημά-
των. Πρόκειται για τον Benji Fisher,
ο οποίος έκανε το διδακτορικό του στο
Πανεπιστήμιο του Πρίνστον και έχει
διδάξει στο Πανεπιστήμιο της Κολού-
μπια, στο Λύκειο θετικών επιστημών
του Μπρονξ και στη Σχολή της Κοι-
νοπολιτείας στη Βοστώνη. Οι συγγρα-
φείς του άρθρου θέλουν επίσης να
ευχαριστήσουν την τάξη γεωμετρίας

1. Η φράση *gradus ad Parnassum* σημαί-
νει στην κυριολεξία «βήματα προς τον Παρ-
νασσό» και αναφέρεται σε μια σειρά ασκήσεων
αυξανόμενης δυσκολίας που βοηθούν κάποιον
να βελτιώσει την επιδεξιότητά του. (Σύμφωνα
με τη μυθολογία, ο Παρνασσός ήταν κατοικία
του Απόλλωνα και των Μουσών.) Ο αυστρια-
κός συνθέτης Johann Joseph Fux χρησιμο-
ποίησε αυτή τη φράση ως τίτλο μιας πραγμα-
τείας του για την αντίστιξη, ένα εισαγωγικό
βιβλίο που χρησιμοποίησαν ο Χάιντν, ο Μό-
τσαρτ και άλλοι συνθέτες του 18ου αιώνα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

του Λυκείου του Μπρόνξβιλ για τη βο-
ήθειά της.

Στη συνέχεια, το σύμβολο τοξ AB
θα αναφέρεται στο έλασσον τόξο AB
(εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά). Θα
χρησιμοποιήσουμε τα εξής αποτελέ-
σματα:

A. Μια εγγεγραμμένη γωνία έχει
το μισό μέτρο του αντίστοιχού της τό-
ξου.

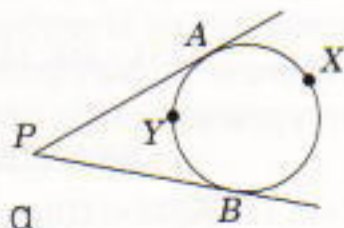
B. Οι εγγεγραμμένες γωνίες που

βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Στο
Σχήμα 1, αν τα σημεία A, B, X, Y ανή-
κουν στον ίδιο κύκλο, τότε $\angle XAY =$
 $\angle XBY = \frac{1}{2}$ τοξ XY . Λέμε ότι το σημείο
 X βλέπει υπό γωνία $\angle XAY$ το τόξο
 AB (ή το ευθύγραμμο τμήμα AB), ενώ
το σημείο Y υπό γωνία $\angle AYB$.

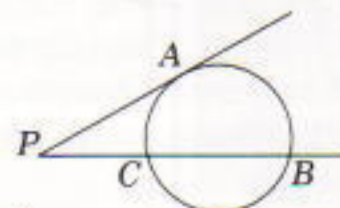
Γ. Αντίστροφα, αν μια γωνία βαι-
νει σε τόξο που ισούται με το διπλά-
σιο του μέτρου της, τότε είναι εγγε-
γραμμένη (δηλαδή, η κορυφή της α-
νήκει στον κύκλο). Στο Σχήμα 1, αν
τα σημεία A, X, Y ανήκουν στον κύ-
κλο και $\angle XAY = \angle XBY$, τότε το ση-
μείο B ανήκει επίσης στον κύκλο.

Δ. Η γωνία που σχηματίζουν δύο
χορδές ισούται με το ημίθροισμα των
τόξων που αποτέμνουν στον κύκλο.
Στο Σχήμα 2 έχουμε $\angle APD = \frac{1}{2}$ (τοξ AD
+ τοξ BC).

Ε. Η γωνία την οποία σχηματίζουν
δύο εφαπτόμενες, μία εφαπτομένη
και μία τέμνουσα ή δύο τέμνουσες
ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων
που αποτέμνουν στον κύκλο. Στο
Σχήμα 3α είναι $\angle APB = \frac{1}{2}$ (τοξ AXB -
τοξ AYB), στο Σχήμα 3β είναι $\angle APB =$
 $\frac{1}{2}$ (τοξ AB - τοξ AC), και στο Σχήμα 3γ
 $\angle APB = \frac{1}{2}$ (τοξ AB - τοξ CD).



α



β



γ

Σχήμα 3

1. Δείξτε ότι, αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Αληθεύει η αντίστροφη πρόταση;

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένα τετράπλευρο ονομάζεται εγγράψιμο αν υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του.

2. Δείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τυχαίου τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

3. Φέρουμε από το μέσο M του τόξου AB ενός κύκλου δύο τυχαίες ευθείες οι οποίες τέμνουν τον κύκλο στα σημεία D και E , και τη χορδή AB στα σημεία F και G . Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $DEFG$ είναι εγγράψιμο.

4. Γνωρίζουμε ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το ονομαζόμενο ορθόκεντρο. Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε τρίγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό του ορθοκέντρου ως προς οποιαδήποτε από τις πλευρές του τριγώνου ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο.

5. Στο τρίγωνο ABC , τα AP και BQ είναι ύψη. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $ABPQ$ είναι εγγράψιμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Φέρουμε τα τρία ύψη ενός τριγώνου και σχηματίζουμε ένα

νέο τρίγωνο ενώνοντας τα ίχνη των υψών. Αυτό το καινούργιο τρίγωνο ονομάζεται ποδικό τρίγωνο του αρχικού.

6. Αποδείξτε ότι τα ύψη του αρχικού τριγώνου είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του ποδικού τριγώνου.

7. Επιλέγουμε ένα σταθερό σημείο στο εσωτερικό ενός κύκλου και φέρουμε όλες τις χορδές που διέρχονται από αυτό. Κατόπιν, επιλέγουμε τα μέσα όλων αυτών των χορδών. Ποιο σχήμα δημιουργείται από όλα αυτά τα σημεία;

Με τεχνική ορολογία, το ερώτημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών ενός κύκλου που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο; Γεωμετρικός τόπος είναι απλώς ο όρος που χρησιμοποιούμε για το σύνολο των σημείων τα οποία ικανοποιούν μια δεδομένη ιδιότητα.

Τι θα συμβεί αν επιλέξουμε ως σταθερό σημείο το κέντρο του κύκλου;

Μπορείτε να διατυπώσετε ένα παρόμοιο πρόβλημα, αλλά με το αρχικό σημείο στο εξωτερικό του κύκλου;

8. Έστω τρία σημεία A, B, C σ' έναν κύκλο. Ενώνουμε τα μέσα των τόξων AB και AC . Η ευθεία αυτή τέμνει το τμήμα AB στο X και το τμή-

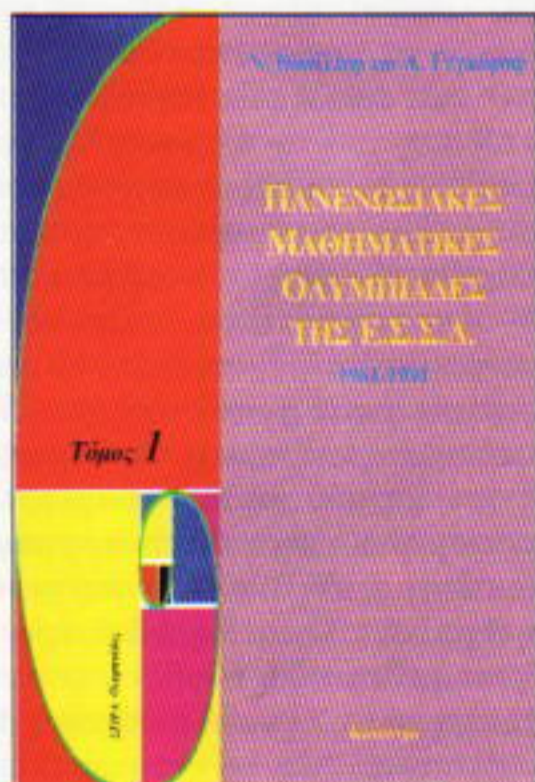
μα AC στο Y . Αποδείξτε ότι $AX = AY$.

9. Δίδεται ένας κύκλος, μια σταθερή χορδή AB και μια μεταβλητή χορδή CD , σταθερού μήκους. (α) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής I των ευθειών AC και BD . (β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής K των ευθειών AD και BC .

10. (α) Έστω A και B δύο σταθερά σημεία ενός κύκλου και M ένα μεταβλητό σημείο του μείζονος τόξου AB . Έστω P σημείο του τμήματος AM τέτοιο ώστε $MP = MB$. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων P . (β) Προεκτείνουμε το τμήμα AM μέχρι το σημείο Q εκτός του κύκλου, έτσι ώστε $MQ = MB$. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Q . (γ) Απαντήστε στα ερωτήματα (α) και (β) όταν το σημείο M ανήκει στο έλασσον τόξο AB .

11. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Μια ευθεία που τέμνει τους δύο κύκλους και διέρχεται από το A , τέμνει ξανά τον πρώτο κύκλο στο P και το δεύτερο στο Q . Μια δεύτερη τέμνουσα διέρχεται από το B , τέμνει ξανά τον πρώτο κύκλο στο R και το δεύτερο στο S . Αποδείξτε ότι η PR είναι παράλληλη της QS . ■

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62



Τόμος 1. Σελ.: 166, 17 x 21 εκ., 4.200 δρχ.

ΣΕΙΡΑ: Ολυμπιάδες

• «Όσο σπουδαίες και αν είναι οι γενικές έννοιες και προτάσεις με τις οποίες το σύγχρονο φίλεργο πάθος για αξιωματικοποίηση και γενίκευση μας έχει "εφοδιάσει"... μολαταύτα είμαι πεπεισμένος ότι τα μεμονωμένα προβλήματα, με όλη τους την πολυπλοκότητα, συνιστούν την πρώτη ύλη και τον πυρήνα των μαθηματικών για να υπερνικήσεις τη δυσκολία τους, χρειάζεται η πιο σκληρή εργασία.»

— Hermann Weyl

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Σελ.: 152, 17 x 21 εκ., 3.900 δρχ.

Ο van der Waals και η εξίσωσή του

Πώς ένα ιδανικό αέριο γίνεται πραγματικό

B. Yavelov

ΣΤΙΣ 23 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1837, ΣΤΗΝ πόλη Λέυντεν της Ολλανδίας, γεννήθηκε το πρώτο από τα εννέα παιδιά του ξυλουργού Yakobus van der Waals. Το αγόρι αυτό, ο Johannes Diderik van der Waals, έμελλε να γίνει ένα από τα λαμπρά αστέρια της ευρωπαϊκής επιστημονικής κοινότητας και ιδρυτής της σύγχρονης μοριακής φυσικής.

Επειδή το χαμηλό εισόδημα του πατέρα του δεν του επέτρεπε να ακολουθήσει την τυπική εκπαιδευτική διαδικασία μετά τη στοιχειώδη εκπαίδευση, ο van der Waals αναγκάστηκε να διδάσκει ο ίδιος. Ενώ εργαζόταν ως δάσκαλος, κατάφερε να παρακολουθεί διαλέξεις μαθηματικών, αστρονομίας και φυσικής στο παλιό Πανεπιστήμιο του Λέυντεν. Σ' αυτό ακριβώς το πανεπιστήμιο, στις 14 Ιουνίου 1873, ο van der Waals παρουσίασε τη διδακτορική του διατριβή με τίτλο «Για το συνεχές της υγρής και της αέριας κατάστασης» (αποτέλεσμα της πρώτης ανεξάρτητης μελέτης του και πρώτη του επιστημονική δημοσίευση). Η παρουσίαση είχε επιτυχία, αλλά τα διακεκριμένα μέλη του Επιστημονικού Συμβουλίου δεν έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εργασία του van der Waals. Δέκα χρόνια αργότερα, ολόκληρη η ευρωπαϊκή επιστημονική κοινότητα άρχισε να συνειδητοποιεί ότι η συγκεκριμένη εργασία εξασφάλιζε στο συγγραφέα της μια θέση στο πάνθεον της επιστήμης. Το 1910 ο van der Waals τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ φυσικής.



Πώς κατέκτησε ο van der Waals τέτοια δόξα; Στη μαθηματική γλώσσα η απάντηση είναι απλή. Πριν από τον van der Waals η συμπεριφορά των αερίων περιγραφόταν μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων:

$$PV = RT. \quad (1)$$

Μετά τη δημοσίευση της διατριβής του, κατέστη δυνατόν να περιγραφεί η συμπεριφορά και των πραγματικών αερίων:

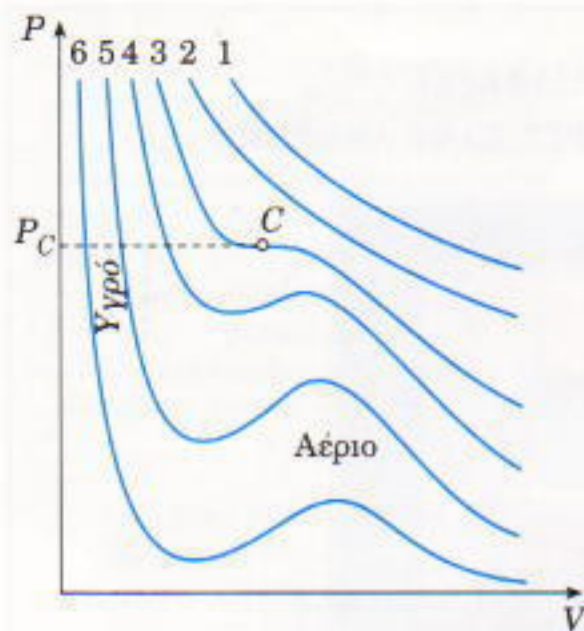
$$(P + a/V^2)(V - b) = RT, \quad (2)$$

όπου V είναι ο όγκος ενός mole του αερίου, T η απόλυτη θερμοκρασία του, P η πίεσή του, R η παγκόσμια σταθερά των αερίων, και a, b σταθερές που προσδιορίζονται εμπειρικά για κάθε αέριο και σχετίζονται με τις ενδομοριακές έλξεις και τον όγκο που καταλαμβάνουν τα ίδια τα μόρια.

Παρότι η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων είναι εξαιρετικά

χρήσιμη στη φυσική, για τα πραγματικά αέρια απλώς οδηγεί σε χονδρική προσέγγιση των ιδιοτήτων τους. Αποτελέσματα με σχετική ακρίβεια παρέχει μόνο στις περιπτώσεις αερίων με πολύ χαμηλές πυκνότητες, όπου το μέγεθος και η αλληλεπίδραση των μορίων τους είναι αμελητέα. Από την άλλη, η εξίσωση van der Waals (ή καταστατική εξίσωση των πραγματικών αερίων) αποτελεί για τα πραγματικά αέρια πολύ πιο ρεαλιστικό μοντέλο. Κατ' αυτό, τα μόρια θεωρούνται τέλειες σκληρές σφαίρες, με μικρές αλλά σημαντικές διαμέτρους, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις συνοχής (δυνάμεις van der Waals) και οι οποίες εξασθενούν γρήγορα με την απόσταση.

Ο van der Waals περιέγραψε τη μετάβαση από την εξίσωση (1) στην εξίσωση (2) ως «εφαρμογή διορθώσεων». Έτσι, κατά πρώτον, η τροποποιημένη εξίσωσή του λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι, εκτός από την εξωτερική πίεση P , υπάρχει και μια εσωτερική πίεση (ενδοπίεση) a/V^2 αυτή προκύπτει από την ενδομοριακή συνοχή, που τείνει να συγκρατήσει τα μόρια σ' ένα ενιαίο συμπαγές σύμπλεγμα, αντιτιθέμενη στη хаοτική θερμική κίνηση. Κατά δεύτερον, η θερμική κίνηση δεν λαμβάνει χώρα σε ολόκληρο τον όγκο του δοχείου στο οποίο περιέχεται το αέριο, αλλά σ' αυτόν που προκύπτει αν από τον ολικό όγκο αφαιρέσουμε τον όγκο που καταλαμβάνουν τα ίδια τα μόρια· ο όγκος των μορίων του πραγματικού

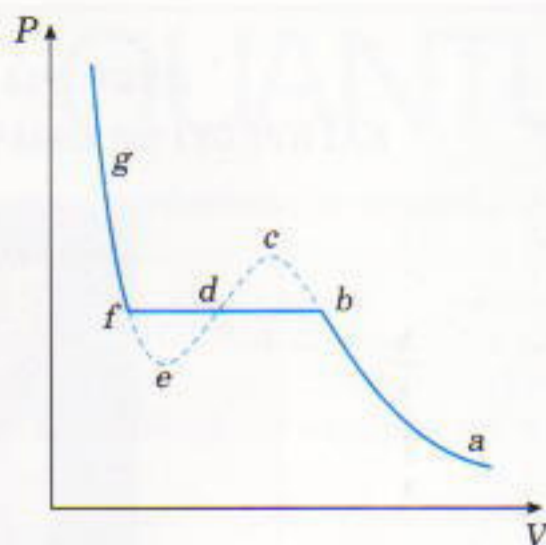


Σχήμα 1

αερίου δεν μπορεί να θεωρείται αμελητέος. Χάρη στις εν λόγω διορθώσεις του van der Waals, λοιπόν, μια εξίσωση που μπορούσε να περιγράψει μόνο ανύπαρκτα θεωρητικά αντικείμενα μετασχηματίστηκε σε εξίσωση η οποία μπορεί να περιγράψει τη συμπεριφορά των πραγματικών ρευστών, με πυκνότητες που κυμαίνονται από τα αραιά αέρια μέχρι την υγρή κατάσταση. Επιπλέον, οι διορθώσεις του van der Waals επέτρεψαν στους επιστήμονες να υπολογίσουν τις τιμές των ενδομοριακών δυνάμεων και να προσεγγίσουν τα μεγέθη των μορίων.

Το Σχήμα 1 απεικονίζει ισόθερμες που προέκυψαν από την εξίσωση van der Waals για διάφορες θερμοκρασίες. Οι μεγαλύτερες τιμές του V αντιστοιχούν σε ρευστά που βρίσκονται στην αέρια κατάσταση, και οι μικρότερες τιμές σε ρευστά που βρίσκονται στην υγρή κατάσταση. Οι ισόθερμες 1, 2 και 3 δείχνουν ότι σε θερμοκρασίες T μεγαλύτερες από μια κρίσιμη τιμή (T_c), κάθε τιμή της πίεσης P αντιστοιχεί σε μία και μόνο τιμή του όγκου V . Με άλλα λόγια, η μετάβαση από την αέρια στην υγρή φάση είναι συνεχής, έτσι ώστε σε τέτοιες θερμοκρασίες η κατηγοριοποίηση της ύλης σε υγρή ή αέρια να είναι άσκοπη. Σε θερμοκρασίες μικρότερες της T_c συμβαίνει κάτι εντελώς διαφορετικό. Σ' αυτή τη θερμοκρασιακή περιοχή, οι ισόθερμες έχουν τμήματα όπου σε κάθε τιμή της P αντιστοιχούν τρεις διαφορετικές τιμές του V — «κυματοειδή» τμήματα των ισόθερμων 4, 5 και 6.

Ας αναφερθούμε λεπτομερέστερα σε μια ισόθερμη θερμοκρασίας $T < T_c$



Σχήμα 2

(Σχήμα 2). Το κυματοειδές τμήμα ec (που παριστάται με τη διακεκομμένη γραμμή) περιγράφει ένα αφύσικο φαινόμενο: η συμπίεση προκαλεί πτώση της πίεσης. Πρόκειται σαφώς για ασυμφωνία ανάμεσα στις προβλέψεις της εξίσωσης van der Waals και το πείραμα, για μια μαθηματική ανωμαλία της εξίσωσης — μερικές φορές, όμως, τέτοιες ανωμαλίες οδηγούν σε ανακαλύψεις. Στην πραγματικότητα, το παράδοξο τμήμα ec δείχνει ότι, κατά τη διάρκεια της βαθμιαίας μείωσης του όγκου σ' αυτό το τμήμα, η ύλη δεν μπορεί, καθ' όλο το χρόνο, να είναι ομογενής — το αέριο και το υγρό συνυπάρχουν. Επομένως, η σωστή ισόθερμη είναι η ασυνεχής γραμμή $abfg$ μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα bf για την περιοχή του κυματοειδούς τμήματος. Το εν λόγω οριζόντιο τμήμα συνδέει τον κλάδο ab , που αντιστοιχεί στην αέρια κατάσταση, και τον κλάδο fg , που περιγράφει την υγρή κατάσταση. Το τμήμα bf αντιστοιχεί στη μετατροπή του αερίου σε υγρό (και αντιστρόφως) σε δεδομένη θερμοκρασία και υπό σταθερή πίεση.

Ποια είναι όμως επακριβώς η πίεση που αφορά το οριζόντιο τμήμα bf ; Η εξίσωση van der Waals δεν μπορεί να απαντήσει σ' αυτό το ερώτημα. Η θέση του οριζόντιου τμήματος καθορίζεται από τον κανόνα που ανακάλυψαν ανεξάρτητα οι J. Maxwell (1831-1879) και R. Clausius (1822-1888): η θέση του τμήματος bf πρέπει να είναι τέτοια ώστε τα χωρία bcd και def να έχουν ίσα εμβαδά.

Καθώς η πίεση αυξάνεται, το ευθύγραμμο τμήμα γίνεται ολοένα μικρότερο, ώσπου καταλήγει σε ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο C , για το οποίο $T = T_c$ (Σχήμα 1). Σύμφωνα με την

εξίσωση van der Waals, η κρίσιμη θερμοκρασία είναι

$$T_c = \frac{8a}{27bR},$$

και η αντίστοιχη κρίσιμη πίεση

$$P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Στην περίπτωση του νερού, για παράδειγμα, η $T_c = 647,3 \text{ K}$ και η $P_c = 22,13 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$b = \frac{RT_c}{8P_c} = 30,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mole}.$$

Για τα μόρια του νερού, αν θεωρηθούν τέλειες σκληρές σφαίρες, η εξίσωση δίνει διάμετρο $d = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, τιμή λογική ως προς την τάξη μεγέθους.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί χρησιμοποιούν ευρέως την εξίσωση van der Waals. Είναι εύκολη στη χρήση της, και τους επιτρέπει να περιγράφουν τις ιδιότητες της ύλης σε μεγάλη περιοχή συνθηκών. Επιπλέον, βασίζεται σ' ένα απλοποιημένο, αλλά ρεαλιστικό μοντέλο της ύλης, το οποίο εύκολα μπορεί να ερμηνευτεί. Ωστόσο, πόσο ακριβής είναι η εξίσωση van der Waals; Σε υψηλές θερμοκρασίες και χαμηλές πιέσεις είναι πολύ ακριβής· αλλά όταν η πυκνότητα του αερίου πλησιάζει εκείνη της υγρής φάσης, η εξίσωση στην καλύτερη περίπτωση μπορεί να δώσει μια ποιοτική περιγραφή.

Η εξίσωση van der Waals δημιούργησε ένα πρόβλημα στο οποίο ο συγγραφέας του άρθρου δεν μπορούσε να βρει λογική λύση, μολονότι ήταν σε θέση να λύσει το πρόβλημα διαισθητικά. Για πολλά χρόνια μετά τη διατύπωσή του, ουδείς ήταν σε θέση να δώσει αυστηρά μαθηματική απόδειξη. Πώς μπορούσε να υπάρχει μια τέτοια εμπειρική εξίσωση χωρίς στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο; Μερικοί φυσικοί έτειναν να πιστέψουν ότι έπρεπε να αναζητηθεί κάποια «μεταφυσική» απάντηση.

Μόνο το 1966 εξήχθη αυστηρά η εξίσωση van der Waals. Κι όμως, κάποιο αίνιγμα παρέμεινε ανεξιχνίαστο μέχρι τις μέρες μας. Η πρόσφατη εξίσωση αποδείχτηκε αυστηρά για ένα μοντέλο στο οποίο απόλυτα σκληρές σφαίρες (τα μόρια) συνδέονται μετα-

ξύ τους με πολύ ασθενείς ελκτικές δυνάμεις άπειρης εμβέλειας. Ο ίδιος ο van der Waals επέμενε ότι οι ελκτικές δυνάμεις που περιγράφονται απ' την εξίσωσή του δεν έχουν μεγάλη εμβέλεια —δρουν σε απόσταση λίγων μοριακών διαμέτρων. Η κατάσταση αυτή προξενεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αν μη τι άλλο επειδή αποδεικνύει ότι η φυσική διαίσθηση του επιστήμονα δεν μπορεί ακόμη να ξεπεραστεί από τις πλέον περίπλοκες μαθηματικές μεθόδους. Πράγματι, η σύγκριση πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα υπολογισμών μέσω υπολογιστή έδειξε ότι η εξίσωση van der Waals μπορεί να ισχύει και για μικρής εμβέλειας ενδομοριακή έλξη, χωρίς απαραίτητως η έλξη να είναι ασθενής.

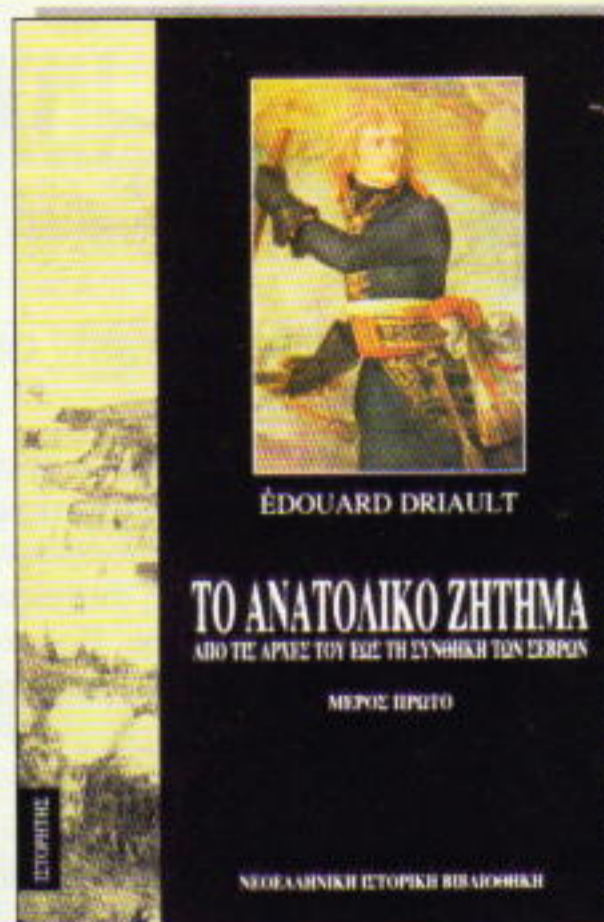
Ποια ήταν η τύχη του van der Waals μετά την παρουσίαση της περίφημης διατριβής του; Το 1875 έγινε ακαδημαϊκός, και δύο χρόνια αργότερα καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Άμστερνταμ. Εργάστηκε σ' αυτή τη θέση μέχρι το 1908, οπότε εξαναγκάστηκε σε αποχώρηση, σε ηλικία 70 χρόνων. Εκτός από την καταστατική εξίσωση των πραγματικών αερίων, ο van der Waals είχε και πλήθος άλλων σημαντικών επιστημονικών ανακαλύψεων, κάποιες από τις οποίες εκτιμήθηκαν μόνο στη σύγχρονη εποχή. Συνέχισε την επιστημονική εργασία του μέχρι το 1916, αλλά, καθώς τα χρόνια περνούσαν, φάνηκε να κάμπτεται από φυσική και πνευματική κόπωση. Όταν πέθανε, το 1922, η εργασία του στη μοριακή φυσική είχε επισκιαστεί από τις νέες εξελίξεις στην κβαντική θεωρία και την ατομική και πυρηνική φυσική. Σήμερα, όμως, για μία ακόμη φορά, η εργασία του αποτελεί θέμα συζήτησης στην κοινότητα των φυσικών, και σίγουρα θα ανοίξει το δρόμο για νέες σημαντικές εξελίξεις στο συγκεκριμένο πεδίο. ●

ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το φυσικομαθηματικό
βιβλιοπωλείο

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,
τηλ.: 3628492

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ,
ΚΑΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ, ΚΑΘΕ ΑΝΘΡΩΠΟ



Éduard Driault

ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών

Ο Édouard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας και της γεωγραφίας στη Σορβόνη, δημοσίευσε συμπληρωμένο το μνημιώδες έργο του Το Ανατολικό ζήτημα το 1921. Από τότε το βιβλίο του θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση όλων εκείνων των βαθύτερων αιτίων που προκάλεσαν — και εξακολουθούν να προκαλούν — εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και των κρατών, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη. Σ' αυτό εξετάζεται αναλυτικά και σφαιρικά η ιστορία του Ανατολικού ζητήματος, από τις απαρχές του κατά τους χρόνους του Βυζαντίου, την παγίωσή του επί Οθωμανικής αυτοκρατορίας, μέχρι και τη Συνθήκη των Σεβρών (1920). Αξιο προσοχής είναι το ότι μελετά το συγκρουσιακό πρότυπο που ορίζει τις σχέσεις των Μεγάλων Δυνάμεων, με όλες τις εναλλαγές τους κατά τις διάφορες ιστορικές περιόδους, αλλά και τη δυναμική που αναπτύσσεται στο διεθνές πολιτικό πεδίο. Ενδιαφέρει ιδιαίτερος το σύγχρονο αναγνώστη, διότι στις σελίδες του εξηγούνται σημερινές καταστάσεις και προβλήματα της Βαλκανικής χερσονήσου και των λαών της· τέλος, ερμηνεύεται με τρόπο διαφωτιστικό και η σημερινή ελληνοτουρκική αντιπαράθεση.

Σελ.: 527, Εικ.: Α/Μ, 14 × 21 εκ., 7.000 δρχ.

ΙΣΤΟΡΗΤΗΣ / ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Τα μέσα και τα έξω των κύκλων

Τι κοινά έχουν μεταξύ τους εγγεγραμμένοι και περιγεγραμμένοι κύκλοι;

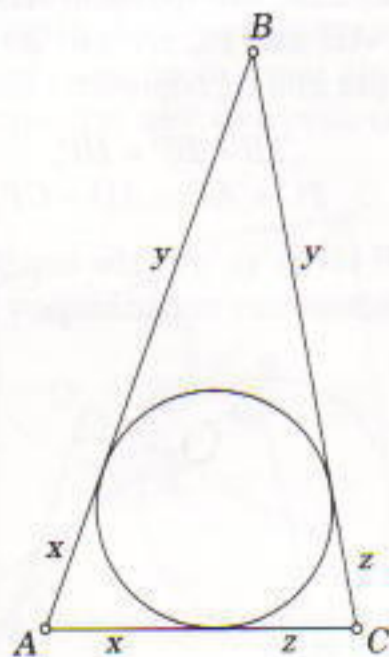
I.F. Sharygin

ΟΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΙ κύκλοι παρουσιάζουν πολλές κοινές ιδιότητες. Το παρόν άρθρο εστιάζεται στις ομοιότητές τους, και τα δύο προβλήματα που ακολουθούν θα φανερώσουν τις κοινές ιδιότητές τους.

Πρόβλημα 1. Έστω ότι οι πλευρές του τριγώνου ABC είναι $BC = a$, $CA = b$ και $AB = c$. Βρείτε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία οι πλευρές του διαιρούνται από τα σημεία στα οποία ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται του τριγώνου.

Πρόβλημα 2. Έστω ότι οι γωνίες A , B και C ενός τριγώνου ABC είναι γνωστές. Βρείτε τις γωνίες μεταξύ των πλευρών του τριγώνου και τις ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου που διέρχονται από τις αντίστοιχες κορυφές.

Ας λύσουμε το πρώτο πρόβλημα. Αν δύο από τα ευθύγραμμα τμήματα που περιγράφονται στο παραπάνω



Σχήμα 1

πρόβλημα έχουν ένα κοινό σημείο (μία κορυφή του τριγώνου), τότε αυτά είναι ίσα (Σχήμα 1). Τα εν λόγω ευθύγραμμα τμήματα τα συμβολίζουμε με x , y και z . Αυτό μας επιτρέπει να λάβουμε το σύστημα

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Προσθέτοντας τις τρεις εξισώσεις κατά μέλη, βρίσκουμε

$$2x + 2y + 2z = a + b + c,$$

και άρα

$$x + y + z = (1/2)(a + b + c).$$

Θέτουμε την τελευταία ποσότητα ίση με τ (ημiperίμετρος) και αφαιρούμε καθεμιά από τις αρχικές εξισώσεις. Βρίσκουμε ότι

$$x = \tau - a, \quad y = \tau - b \quad \text{και} \quad z = \tau - c.$$

Αυτοί οι τύποι ανήκουν σε μια ομάδα από «πρακτικούς» τύπους που μπορούν να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι αν έχετε να λύσετε ένα δύσκολο πρόβλημα.

Θα μπορούσε κανείς να λύσει το δεύτερο πρόβλημα με παρόμοιο τρόπο (Σχήμα 2). Οι παρακείμενες γωνίες σε μία πλευρά του τριγώνου είναι ίσες. Συμβολίζοντάς τες με x , y και z , καταλήγουμε στο σύστημα

$$x + y = C, \quad y + z = A, \quad x + z = B,$$

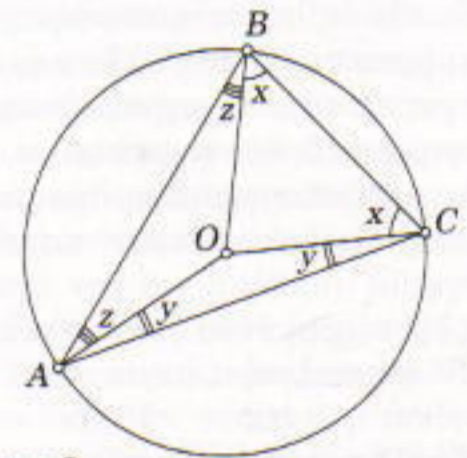
από το οποίο υπολογίζουμε

$$x = \frac{1}{2}(B + C - A) = \frac{\pi}{2} - A,$$

$$y = \frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{\pi}{2} - B,$$

$$z = \frac{1}{2}(A + B - C) = \frac{\pi}{2} - C.$$

Στην πραγματικότητα, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση,



Σχήμα 2

μπορεί οι τιμές κάποιων γωνιών να είναι αρνητικές (αυτό συμβαίνει όταν θεωρήσουμε προσανατολισμένες γωνίες). Έτσι, οι προσκείμενες γωνίες προς τη μεγαλύτερη πλευρά ενός αμβλυγώνιου τριγώνου θα είναι αρνητικές. Μπορείτε εύκολα να καταλήξετε στις σχέσεις που προέκυψαν στο Πρόβλημα 2 από τη βασική ιδιότητα των επίκεντρων και εγγεγραμμένων γωνιών ($\angle BOC = 2\angle BAC$). Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει αντιληφθεί ότι η άλγεβρα που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε τα δύο προβλήματα είναι ακριβώς η ίδια (ειδικά αν συμβολίσουμε με d το ημιάθροισμα των γωνιών του τριγώνου αντί για $\pi/2$ και λάβουμε υπόψη μας τις προφανείς αναλογίες μεταξύ των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κύκλων).

Και στις δύο περιπτώσεις, χρησιμοποιήσαμε μόνο τη βασική ιδιότητα ισοσκελούς τριγώνου, η οποία ισχύει όχι μόνο στη συνήθη ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά επίσης στην υπερβολική γεωμετρία του Lobachevsky. Γι' αυτό το λόγο, οι σχέσεις που προσδιορίσαμε παραμένουν αληθείς σε σφαι-

ρικά τρίγωνα, για τα οποία η «δυσικότητα» των γωνιών και πλευρών τους είναι βασική. Η δυσικότητα αυτή οδηγεί στη δυσικότητα των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κύκλων τους.

Ας προχωρήσουμε σε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα τετράπλευρα. Μπορούμε να εξετάσουμε τις ιδιότητες τους εργαζόμενοι στα δύο παρακάτω προβλήματα:

Πρόβλημα 3. Έστω $ABCD$ ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο. Τότε, $AB + CD = AD + BC$.

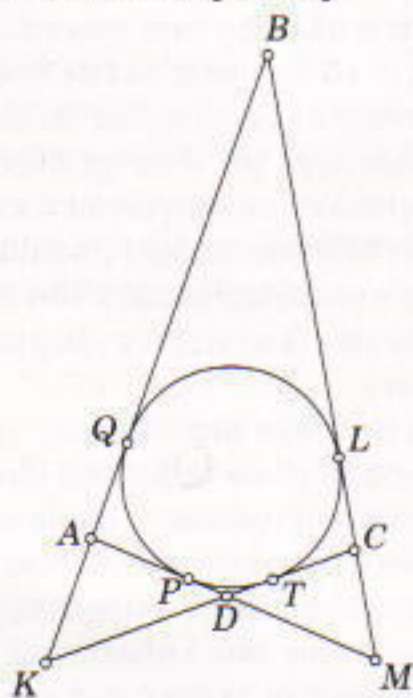
Πρόβλημα 4. Έστω $ABCD$ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Τότε, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. ($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.)

Επιπλέον, αυτές οι συνθήκες δεν είναι μόνο αναγκαίες αλλά και ικανές για να είναι περιγράψιμο (ή εγγράψιμο) το δοθέν τετράπλευρο.

Ας αποδείξουμε τώρα δύο ακόμη σχέσεις, οι οποίες δίνουν ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός εγγεγραμμένου κύκλου μέσα σε δοθέν τετράπλευρο, αν το τελευταίο δεν είναι τραπέζιο.

Πρόβλημα 3'. Αν οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου $ABCD$ προεκταθούν, τότε αυτές τέμνονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Δείξτε ότι, αν το $ABCD$ είναι περιγεγραμμένο τετράπλευρο, τότε $KA + AM = KC + CM$ και $KD + BM = MD + KB$. Αντίστροφα, αν ικανοποιείται μία από τις δύο αυτές ισότητες, τότε το τετράπλευρο $ABCD$ είναι περιγράψιμο.

Αντίστοιχες σχέσεις αποδεικνύονται και για ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Το αφήνουμε για διερεύνηση από τον αναγνώστη.



Σχήμα 3

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, ας αποδείξουμε ότι οι σχέσεις του Προβλήματος 3' είναι αναγκαίες. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι δύο εφαπτόμενες που φέρονται από ένα σημείο προς έναν κύκλο είναι ίσες, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} KA + AM &= KQ - AQ + AP + PM = \\ &KT + ML = KC - CT + CL + MC = \\ &KC + MC. \end{aligned}$$

Το ότι οι συνθήκες των Προβλημάτων 3, 3' και 4 είναι ικανές αποδεικνύεται συνήθως με εις άτοπον απαγωγή. Εντούτοις, θα προτείνουμε έναν διαφορετικό τρόπο, που θα δώσει μεγαλύτερη έμφαση στη στενή σχέση μεταξύ των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κύκλων.

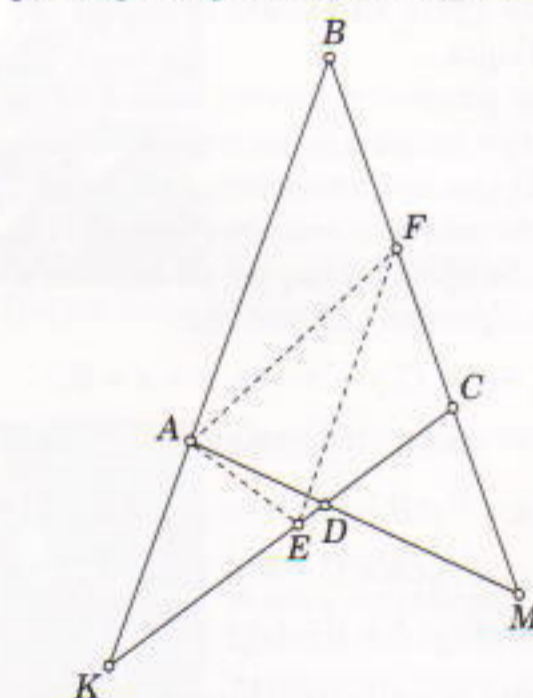
Ας αποδείξουμε ότι η πρώτη συνθήκη του Προβλήματος 3' είναι ικανή. Υποθέτουμε ότι στο τετράπλευρο $ABCD$ (Σχήμα 4) είναι $KA + AM = KC + CM$. Παίρνουμε τμήμα $KE = KA$ πάνω στην ευθεία KC , και $MF = MA$ πάνω στην MB . Από την ισότητα

$$KA + AM = KC + CM,$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} CF &= MF - MC = MA - MC \\ &= KC - KA = EC. \end{aligned}$$

Αφού τα KA , MA και CE είναι ίσα με τα KE , MF και CF αντίστοιχα, οι διχοτόμοι των γωνιών AKD , AMB και BCD συμπίπτουν με τις μεσοκαθέτους των AE , AF και FE . Έτσι, αυτές οι διχοτόμοι τέμνονται σε ένα σημείο: το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο AEF . Το σημείο αυτό, ευρισκόμενο πάνω στις διχοτόμους τριών γωνιών, ισαπέχει από τα



Σχήμα 4

KB και KC , KC και BC , και BC και AM . Συνεπώς, ισαπέχει από τις πλευρές του τετραπλεύρου $ABCD$. Με άλλα λόγια, είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου μέσα σε αυτό κύκλου.

Για να αποδείξουμε ότι οι συνθήκες του Προβλήματος 4 είναι ικανές, ας υποθέσουμε ότι τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών του τετραπλεύρου $ABCD$ είναι ίσα μεταξύ τους, και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $D < C$, $A < B$. Φέρουμε ευθείες που διέρχονται από τα σημεία C και B , έτσι ώστε οι γωνίες μεταξύ αυτών και των πλευρών DC και AB του τετραπλεύρου να είναι ίσες με τις γωνίες D και C αντίστοιχα (Σχήμα 5). Παίρνουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα CMD ($CM = MD$) και ABK ($AK = BK$). Το τρίγωνο BEC είναι επίσης ισοσκελές ($\angle CBE = \angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle CDA = \angle BCE$). Οι κάθετες που φέρονται στις πλευρές AB , BC και CD από τα K , E και M , αντίστοιχα, συμπίπτουν με τις διχοτόμους των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου MEK , και επομένως συναντώνται σε ένα σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις τέσσερις κορυφές του τετραπλεύρου. Με άλλα λόγια, είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, καθώς επίσης και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο MEK .

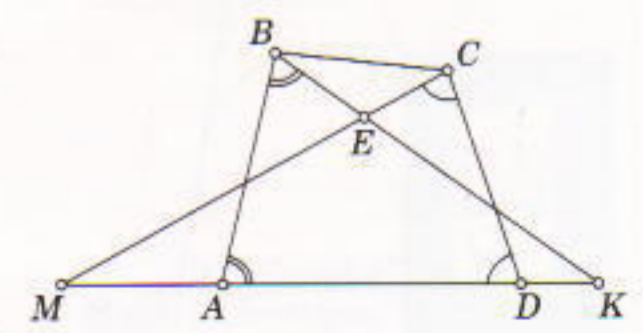
Φαίνεται ότι, σ' αυτές τις δύο αποδείξεις, οι εγγεγραμμένοι και περιγεγραμμένοι κύκλοι υποκλίνονται με αβρότητα ο ένας στον άλλον.

Αν το $ABCD$ είναι τραπέζιο, τότε υπάρχουν μερικά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

Πρόβλημα 5. Υπάρχει εγγεγραμμένος κύκλος στο τραπέζιο $ABCD$ με βάσεις AD και BC αν και μόνο αν ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad TB + BP &= DP, \\ TC + AP &= AD + CP, \end{aligned}$$

όπου P είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των παράπλευρων πλευ-



Σχήμα 5

ρών του τραπέζιου και T είναι η προβολή του D πάνω στη γραμμή BC .

$$(β) \quad \frac{AD}{BC} = \sigma\phi \frac{A}{2} \sigma\phi \frac{B}{2}$$

Προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας αυτές τις προτάσεις.

Ας ολοκληρώσουμε το άρθρο με δύο ακόμη προβλήματα.

Πρόβλημα 6. Έστω $ABCD$ ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο. Αποδείξτε ότι οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ABC και CDA εφάπτονται μεταξύ τους.

Απόδειξη. Έστω ότι οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ABC και CDA εφάπτονται της AC στα σημεία K και M αντίστοιχα (Σχήμα 6). Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία K και M συμπίπτουν, χρειαζόμαστε τη βοήθεια του τύπου του Προβλήματος 1:

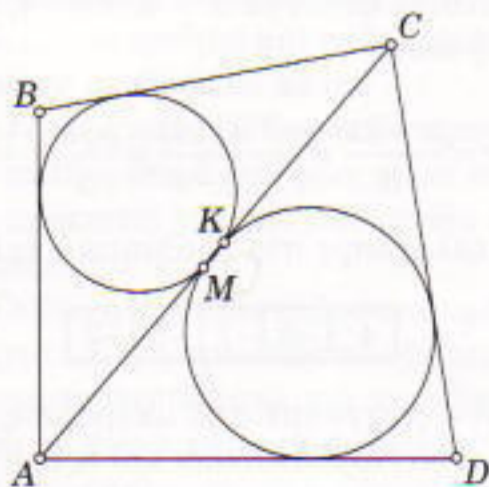
$$MK = |AM - AK| = \left| \frac{1}{2}(AB + AC - BC) - \frac{1}{2}(AC + AD - CD) \right| = \frac{1}{2}|AB + CD - BC - AD| = 0.$$

Πρόβλημα 7. Από τις κορυφές A και C ενός τετραπλεύρου $ABCD$ φέρονται ευθείες παράλληλες προς τις DC και AB αντίστοιχα. Η πρώτη από αυτές συναντά την ευθεία BC στο σημείο B_1 και η δεύτερη συναντά την ευθεία AD στο σημείο D_1 . Να αποδείξετε ότι:

(α) αν το $ABCD$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο, τότε είναι επίσης και το AB_1CD_1 ,

(β) αν το $ABCD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, τότε είναι επίσης και το AB_1CD_1 .

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο το (β), αφήνοντας το (α), που είναι ευκολότερο, για τον αναγνώστη. Πε-



Σχήμα 6

ριορίζομαστε στην περίπτωση όπου το $ABCD$ δεν είναι τραπέζιο. Συμβολίζουμε τα σημεία στα οποία οι ευθείες AD και BC καθώς και AB και CD συναντώνται με τα K και M αντίστοιχα. Πρέπει να διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις (Σχήμα 7 και Σχήμα 8).

Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB_1 και CD_1 . Σ' αυτή την περίπτωση (Σχήμα 7), $PA = CM$, $PC = AM$. Αφού το $ABCD$ είναι περιγεγραμμένο τετράπλευρο, $KA + AM = KC + CM$ (σύμφωνα με την πρώτη ισότητα που αποδείχτηκε στο Πρόβλημα 3'). Αντικαθιστώντας τις AM και CM με τις PC και PA , παίρνουμε $KA + PC = KC + PA$. Στη συνέχεια, σύμφωνα με τη δεύτερη ισότητα του Προβλήματος 3', το τετράπλευρο AB_1CD_1 είναι περιγράψιμο.

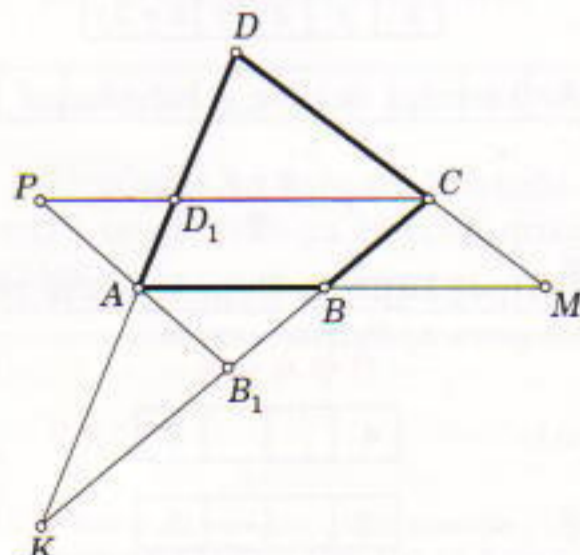
Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 8), εφαρμόζοντας τη δεύτερη απόφαση της ισότητας του Προβλήματος 3' στο τετράπλευρο $ABCD$, καταλήγουμε στο ότι η πρώτη συνθήκη του ίδιου προβλήματος ικανοποιείται από το τετράπλευρο AB_1CD_1 .

Ας τελειώσουμε με μερικά ακόμη προβλήματα.

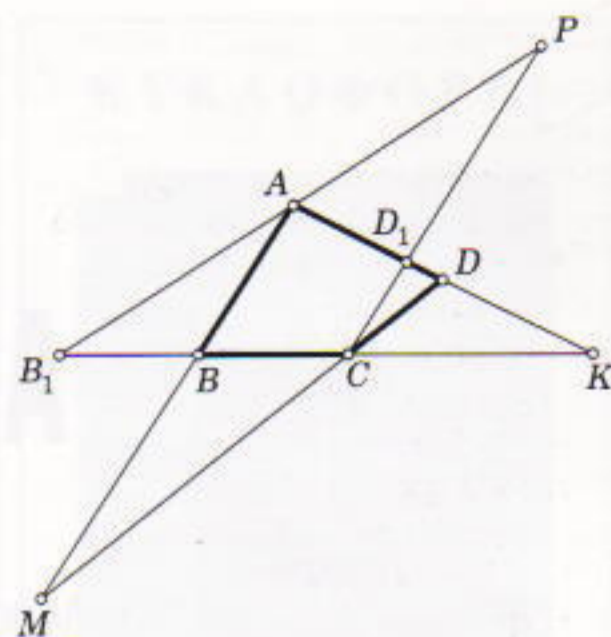
Προβλήματα.

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC και σημείο M πάνω στη βάση AC . Αν $AM = a$ και $MC = b$, βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων στα οποία οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ABM και CBM εφάπτονται της πλευράς BM .

2. Οι πλευρές ενός περιγεγραμμένου πενταγώνου έχουν μήκη a, b, c, d και e . Βρείτε τα μήκη των τμημάτων στα οποία η πλευρά a διαιρείται από το σημείο στο οποίο αυτή εφάπτεται του κύκλου.



Σχήμα 7



Σχήμα 8

3. Θεωρήστε ένα περιγεγραμμένο πολύγωνο με άρτιο αριθμό πλευρών. Αριθμήστε διαδοχικά τις πλευρές του και προσθέστε ξεχωριστά τα μήκη των περιττά αριθμημένων πλευρών και των άρτια αριθμημένων πλευρών. Αποδείξτε ότι αυτά τα αθροίσματα είναι ίσα.

4. Ευθείες τέμνουν τις πλευρές AB και CD ενός παραλληλογράμμου $ABCD$, και το διαιρούν σε μερικά τραπέζια, έτσι ώστε σε καθένα από αυτά να είναι εγγράψιμος ένας κύκλος. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των τμημάτων στα οποία διαιρείται η πλευρά AB από τις ευθείες ισούται με το γινόμενο των τμημάτων στα οποία διαιρείται η πλευρά CD .

5. Τα σημεία A_1, B_1 και C_1 βρίσκονται κατά μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ABC , έτσι ώστε οι ευθείες AA_1, BB_1 και CC_1 να τέμνονται σε εσωτερικό σημείο M του τριγώνου. Θεωρήστε τα τρία τετράπλευρα AB_1MC_1, BC_1MA_1 και CA_1MB_1 . Δείξτε ότι, αν δύο από αυτά τα τετράπλευρα είναι περιγεγραμμένα, τότε και το τρίτο θα είναι επίσης περιγεγραμμένο.

6. Αποδείξτε ότι, αν οι παράπλευρες ακμές μιας τετράπλευρης πυραμίδας είναι ίσες, τότε το άθροισμα των δύο διέδρων γωνιών των απέναντι παράπλευρων ακμών της πυραμίδας είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων διέδρων γωνιών.

7. Θεωρήστε δυο ακτίνες OA και OB . Βρείτε το γεωμετρικό τόπο της ακτίνας OC έτσι ώστε η ποσότητα $a + b - \gamma$ (όπου a, b και γ είναι οι διέδρες γωνίες των ακμών OA, OB και OC αντίστοιχα) της αντίστοιχης στερεάς γωνίας να είναι σταθερή. ■

Αριθμητικά κελιά

Μπορείτε να ενώσετε τα δύο άκρα;

Thomas Hagspihl

ΔΟΥ ΜΙΑ ΜΙΚΡΗ ΕΡΕΥΝΑ ΜΕ ΤΗΝ Ο-
ποία ασχολήθηκαν ο Νίκος και ο
Πέτρος, δυο δεκατετράχρονοι φί-
λοι. Ξεκινάμε με μια κενή σειρά
κελιών, στην οποία συμπληρώνουμε
τα δύο πρώτα κελιά με το 3 και το 4:

3	4			
---	---	--	--	--

Στη συνέχεια, προσθέτουμε το 3
και το 4, και παίρνουμε το 7, το 7 με
το 4, και παίρνουμε 11, ...

3	4	7	11	18
---	---	---	----	----

Αν, όμως, μας δώσουν μόνο τον
πρώτο και τον τελευταίο αριθμό,

8				52
---	--	--	--	----

πώς θα βρούμε τους αριθμούς που
λείπουν;

Ιδού μερικά παραδείγματα αριθμη-
τικών κελιών (στο άρθρο ονομάζου-
με αριθμητικά κελιά κάθε σειρά κε-
λιών που έχει συμπληρωθεί σύμφωνα
με τον κανόνα μας):

1	2	3	5
---	---	---	---

3	1	4	5
---	---	---	---

Οι δύο φίλοι αντιλήφθηκαν σύντομα
ότι το πραγματικό πρόβλημα κατά τη
συμπλήρωση των αριθμητικών κε-
λιών είναι η ανακάλυψη του δεύτε-
ρου αριθμού —η συνέχεια είναι απλή.

Πρόβλημα 1. Χωρίς να διαβάσετε
παρακάτω, συμπληρώστε την επόμε-
νη σειρά:

2				7
---	--	--	--	---

Λύση. Με δοκιμές, ή με λίγη σκέ-
ψη, βρίσκουμε:

2	1	3	4	7
---	---	---	---	---

Ο Νίκος και ο Πέτρος αποφάσισαν
να γενικεύσουν. Αρχισαν από την
περίπτωση των τεσσάρων κελιών (α-
φού η περίπτωση των τριών είναι τε-
τριμμένη). Ονόμασαν x τον πρώτο και
 z τον τελευταίο αριθμό. Έστω y ο
δεύτερος αριθμός —δηλαδή,

x	y		z
-----	-----	--	-----

Η κενή θέση πρέπει να περιέχει το
 $x + y$, και $z = x + 2y$:

x	y	$x + y$	$x + 2y$
-----	-----	---------	----------

Αν λύσουμε ως προς y , παίρνουμε

$$y = \frac{z - x}{2}$$

Πρόβλημα 2. Συμπληρώστε τα
επόμενα αριθμητικά κελιά:

(α)

4			6
---	--	--	---

(β)

-3			5
----	--	--	---

Λύση. (α) Αν θέσουμε $x = 4$, $z = 6$,

παίρνουμε $y = (6 - 4)/2 = 1$, οπότε
έχουμε

4	1	5	6
---	---	---	---

(β) Αν θέσουμε $x = -3$, $z = 5$, παίρ-
νουμε $y = (5 - (-3))/2 = 4$, και κατα-
λήγουμε στο

-3	4	1	5
----	---	---	---

Η γενική περίπτωση για τα πέντε
κελιά είναι η εξής:

x	y	$x + y$	$x + 2y$	$2x + 3y$
-----	-----	---------	----------	-----------

Επομένως, $z = 2x + 3y$, ή

$$y = \frac{z - 2x}{3}$$

Πρόβλημα 3. Λύστε το

4				-7
---	--	--	--	----

Λύση. Θέτουμε $x = 4$, $z = -7$, και
παίρνουμε

$$y = \frac{z - 2x}{3} = \frac{-7 - 2(4)}{3} = \frac{-15}{3} = -5.$$

Καταλήγουμε στα αριθμητικά κελιά

4	-5	-1	-6	-7
---	----	----	----	----

Αν ξεκινούμε από ακέραιους, θα
είναι πάντοτε ακέραιοι και οι αριθμοί
τους οποίους βρίσκουμε; Μερικά πα-
ραδείγματα θα μας οδηγήσουν σύ-

ντομα στο συμπέρασμα ότι η απάντηση είναι αρνητική. Υπάρχει, όμως, τρόπος να γνωρίζουμε πότε καταλήγουμε σε ακραίους; Για παράδειγμα, στην περίπτωση των πέντε κελιών είναι φανερό ότι, για να βρούμε ακραίους, πρέπει το $z - 2x$ να διαιρείται με το 3. Ο Νίκος και ο Πέτρος συνέχισαν την έρευνά τους προσπαθώντας να βρουν τύπους για τις περιπτώσεις των έξι και των επτά κελιών.

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι για τα έξι κελιά ισχύει

$$y = \frac{z - 3x}{5},$$

ενώ για τα επτά

$$y = \frac{z - 5x}{8}.$$

Αν συγκεντρώσουμε τις εξισώσεις που έχουμε βρει, αρχίζουν να αποκαλύπτονται πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία:

$$y = \frac{z - x}{1} \quad (3 \text{ κελιά}),$$

$$y = \frac{z - x}{2} \quad (4 \text{ κελιά}),$$

$$y = \frac{z - 2x}{3} \quad (5 \text{ κελιά}),$$

$$y = \frac{z - 3x}{5} \quad (6 \text{ κελιά}),$$

$$y = \frac{z - 5x}{8} \quad (7 \text{ κελιά}).$$

Παρατηρήστε τους παρονομαστές των κλασμάτων: 1, 2, 3, 5, 8, ... —οι αριθμοί συμπληρώνουν αριθμητικά κελιά!

Προσέξτε επίσης τους συντελεστές του x (αγνοήστε το πρόσημο): 1, 1, 2, 3, 5, ... —οι αριθμοί και πάλι συμπληρώνουν αριθμητικά κελιά!

Ο Νίκος και ο Πέτρος παρατήρησαν ότι αυτή η σειρά αριθμών είναι ειδική: πρόκειται για την ακολουθία Fibonacci.

Οι δύο φίλοι προσπάθησαν στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουν τα παραπάνω αποτελέσματα για να οδηγηθούν σ' έναν τύπο που θα δίνει το δεύτερο αριθμό σε οποιαδήποτε σειρά αριθμητικών κελιών, ανεξάρτητα από

το μήκος της και τους αρχικούς αριθμούς. Έστω x το πλήθος των κελιών και N_x ο τελευταίος από τους αριθμούς (N_1, N_2, \dots είναι ο πρώτος αριθμός, ο δεύτερος, ... κ.λπ.) Έστω επίσης F_x ο x -οστός αριθμός Fibonacci. Ο τύπος είναι

$$N_2 = \frac{N_x - F_{x-2}(N_1)}{F_{x-1}}.$$

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε τον τύπο του Νίκου και του Πέτρου.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι ο τύπος εφαρμόζεται στην επόμενη σειρά κελιών:

-3						17
----	--	--	--	--	--	----

Λύση. $x = 7, N_x = 17, N_1 = -3, F_{x-2}$ είναι ο πέμπτος αριθμός της ακολουθίας Fibonacci —δηλαδή το 5—, και F_{x-1} ο έκτος —δηλαδή το 8. Συνεπώς, έχουμε

$$N_2 = \frac{17 - 5(-3)}{8} = \frac{32}{8} = 4.$$

Και καταλήγουμε στο

-3	4	1	5	6	11	17
----	---	---	---	---	----	----

Πρόβλημα 7. Συμπληρώστε τα επόμενα αριθμητικά κελιά:

5						2
---	--	--	--	--	--	---

Λύση. $x = 9, N_x = 2, N_1 = 5, F_{x-2} = F_7 = 13, F_{x-1} = F_8 = 21$. Επομένως,

$$N_2 = \frac{2 - 13(5)}{21} = \frac{-63}{21} = -3.$$

Και τα αριθμητικά κελιά είναι

5	-3	2	-1	1	0	1	1	2
---	----	---	----	---	---	---	---	---

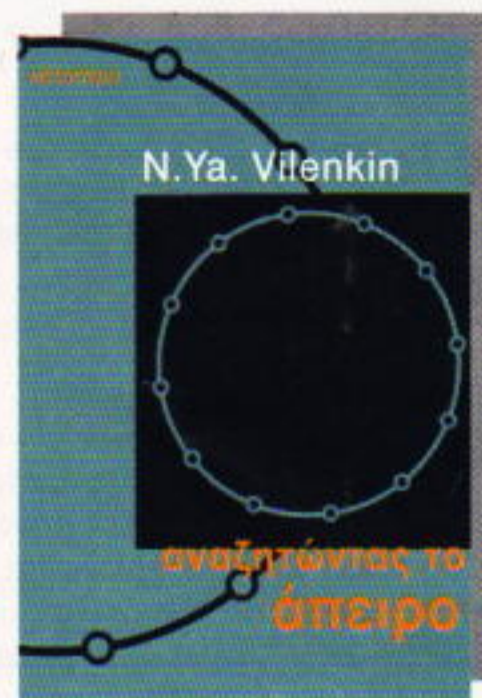
Ελπίζουμε να βρήκατε διασκεδαστικό το παιχνίδι με τα αριθμητικά κελιά. ●

—ΚΟΡΦΗ—

Βιβλία για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης

Κεντρική πώληση: Βιβλιοπωλείο Gutenberg, Σόλωνος 103, 106 78 Αθήνα, τηλ.: 3800127, fax: 3800798

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



N.Ya. Vilenkin

Αναζητώντας το άπειρο

Το άπειρο υπήρξε για αιώνες μια από τις πιο γοητευτικές και αινιγματικές ιδέες που αιχμαλώτιζαν τη σκέψη των επιστημόνων, αλλά και των απλών ανθρώπων. Ήδη από την αρχαιότητα, η αντιφατική του φύση αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους. Στα μαθηματικά, οι αντιφάσεις που συνδέονται με το άπειρο εντάθηκαν μετά τη δημιουργία της θεωρίας των απειροσυνόλων —κατά τα τέλη του 19ου αιώνα—, η οποία οδήγησε σε μια σειρά παραδόξων εξαιτίας των οποίων αμφισβητήθηκε ακόμη και η ίδια η θεμελίωσή της. Σε τούτο το βιβλίο περιγράφεται η διαδρομή που ακολούθησε η ανθρώπινη σκέψη —από τον Ζήωνα και τον Αριστοτέλη μέχρι τον Cantor και τον Russell— στην προσπάθειά της να κατανοήσει την ιδέα του απείρου στα μαθηματικά και τη φυσική. Ο Vilenkin, γράφοντας με αξιοθαύμαστη δεξιοτεχνία και διαύγεια, βοηθάει ακόμη και το μη ειδικό αναγνώστη να συλλάβει τη βαθύτερη φύση του ζητήματος και τη σπουδαιότητά του για την κατανόηση του κόσμου μας.

«Διεισδυτικό, εμβριθές αλλά και προσιτό στον μη ειδικό. Δεν μπορώ να φανταστώ καλύτερη εισαγωγή στην έννοια του απείρου.»

— American Mathematical Monthly

Σελ.: 218, 14 × 21 εκ., 4.700 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M111

Προφανώς $x > 0$. Με τη βοήθεια της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε να εκτιμήσουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης. Η ανισότητα αυτή μας λέει ότι, αν οι a και b είναι δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $a = b$. Θέτουμε $a = x2^{1/x}$, $b = (1/x)2^x$, και βρίσκουμε

$$x2^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)2^x \geq 2\sqrt{2^{\left(\frac{x+1}{x}\right)}}.$$

Πόσο μεγάλο, όμως, μπορεί να γίνει το δεξί μέλος αυτής της παράστασης; Χρησιμοποιούμε και πάλι την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν θέσουμε $a = x$, $b = 1/x$, βρίσκουμε

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x\left(\frac{1}{x}\right)} = 2,$$

με την ισότητα να ισχύει αν $x = 1/x = 1$. Επομένως, η ποσότητα $x + 1/x$ είναι τουλάχιστον 2, και

$$x2^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)2^x \geq 2\sqrt{2^{\left(\frac{x+1}{x}\right)}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$.

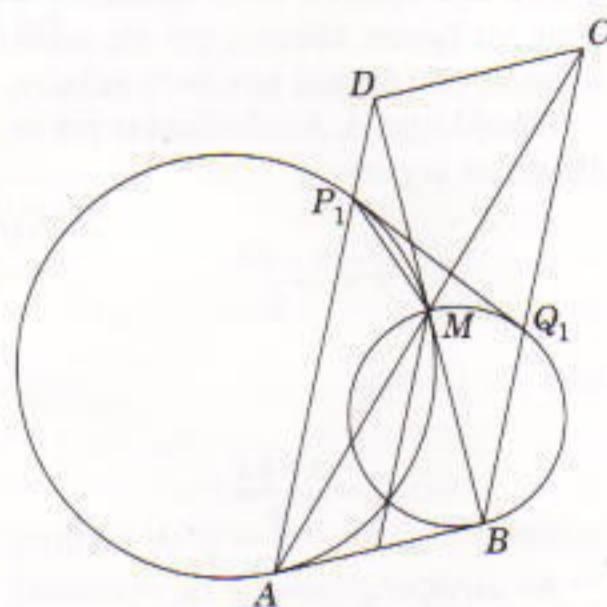
M112

Παρατηρούμε ότι ο καθένας από τους τρεις φίλους πρέπει να καλύψει 30 km, και προφανώς κάθε ποδήλατο πρέπει να καλύψει την ίδια απόσταση. Επίσης, η συνολική απόσταση που θα περπατήσουν είναι και αυτή 30 km. Επομένως, η συνολική διάρκεια του ταξιδιού και των τριών μαζί ισούται με το άθροισμα των χρόνων που περπατούν και οδηγούν τα δύο ποδήλατα —δηλαδή, $1 + 1,5 + 5 = 7,5$ ώρες. Επομένως, το ταξίδι θα διαρκέσει τουλάχιστον 2,5 ώρες, και τούτο θα συμ-

βεί αν και μόνο αν οι τρεις φίλοι φτάσουν ταυτόχρονα στην πόλη B. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να συμβεί κάτι τέτοιο. Έστω ότι ο πρώτος από τους φίλους περπατά για x km και οδηγεί το αγωνιστικό ποδήλατο για τα υπόλοιπα $(30 - x)$ km. Έστω ότι ο δεύτερος χρησιμοποιεί το ποδήλατο αναβάσεων για y km και περπατά τα υπόλοιπα $(30 - y)$ km. Έστω, τέλος, ότι ο τρίτος οδηγεί το αγωνιστικό για x km, περπατά για $(y - x)$ km και οδηγεί το ποδήλατο αναβάσεων για τα υπόλοιπα $(30 - y)$ km. Αφού θέλουμε η διαδρομή για τον καθένα να διαρκέσει 2,5 ώρες (αρκεί να ισχύει αυτό για τους δύο πρώτους), μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τα x και y . Θα πάρουμε $x = (45/4)$ km, $y = (150/7)$ km. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το ταξίδι διαρκεί 2,5 ώρες, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι, με αυτά τα x και y , κάθε ποδηλάτης φτάνει στο σημείο που πρέπει να αφήσει το ποδήλατο πριν από τον αντίστοιχο πεζοπόρο, πράγμα απλό, που το αφήνουμε στον αναγνώστη.

M113

Έστω P_1 και Q_1 τα σημεία τομής του πρώτου και του δεύτερου κύκλου με τις ευθείες AD και BC αντίστοιχα. Ας αποδείξουμε ότι τα σημεία M , C , D , P_1 και Q_1 ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Αυτό θα σημαίνει ότι τα σημεία P_1 και Q_1 συμπίπτουν με τα P και Q αντίστοιχα. Στην περίπτωση του Σχήματος 1 έχουμε $\angle MP_1A = \angle MAB = \angle MCD$ και $\angle MQ_1B = \angle MBA = \angle MDC$. Επομένως η $\angle MP_1D$ είναι παραπληρωματική της $\angle MCD$. Παρομοίως, η $\angle MQ_1C$ είναι παραπληρωματική της $\angle MDC$. Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο MP_1DC είναι εγγράψιμο σε κύκλο, ο οποίος είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα M , C , και D . Ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι αυτός ο κύκλος διέρχεται από το Q_1 . Δηλαδή, ο περι-



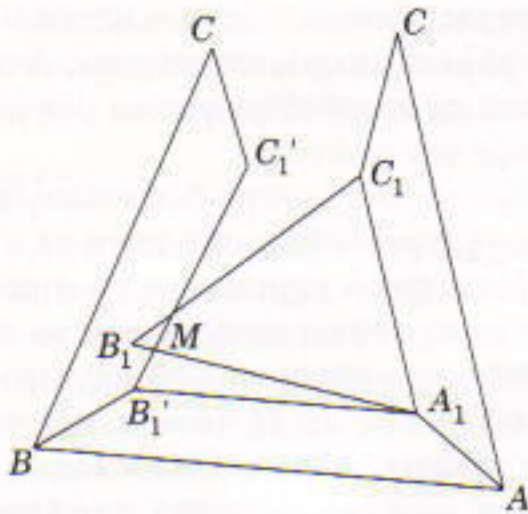
Σχήμα 1

γεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MCD διέρχεται από τα σημεία P και Q . Την περίπτωση κατά την οποία τα P και Q ανήκουν στις προεκτάσεις των AD και BC μπορούμε να την εξετάσουμε με παρόμοιο τρόπο.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η P_1Q_1 εφάπτεται στους κύκλους του Σχήματος 1. Αφού γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο P_1Q_1CD είναι εγγράψιμο σε κύκλο, διαπιστώνουμε ότι η $\angle DP_1Q_1$ είναι παραπληρωματική της $\angle DCQ_1$. Συνεπώς, $\angle AP_1Q_1 = \angle DCQ_1 = \angle P_1AB$. Άρα, $\angle AP_1Q_1 = (1/2)$ τοξ AMP_1 , και η P_1Q_1 πρέπει να εφάπτεται στον κύκλο που διέρχεται από τα A και M . Παρομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η P_1Q_1 εφάπτεται στον κύκλο που διέρχεται από τα B και M . Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε τις άλλες περιπτώσεις.

M114

Η επιφάνεια του πολυέδρου που προκύπτει αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα και τρία ίσα ισοσκελή τραπέζια τα οποία έχουν τις παράτη βάσει γωνίες ίσες με $90^\circ - a/2$. Στο Σχήμα 2 έχουμε θεωρήσει το ανάπτυγμα του πολυέδρου χωρίς το μεγάλο τρίγωνο. Για να ξεχωρίζουμε τα πολλαπλά «αντίγραφα» της ίδιας κορυφής, έχουμε χρησιμοποιήσει τό-



Σχήμα 2

νους. Το ανάπτυγμα θα επικαλύπτει τον εαυτό του αν και μόνο αν τέμνονται τα τμήματα $B_1'C_1'$ και A_1B_1 . Ας υποθέσουμε ότι τέμνονται, και έστω M το σημείο τομής τους. Τότε, στο τρίγωνο A_1MB_1 πρέπει να ισχύει η ανισότητα $A_1M < A_1B_1$. Αν υπολογίσουμε τις γωνίες αυτού του τριγώνου, βρίσκουμε $\angle A_1B_1'C_1' = 360^\circ - 2(90^\circ + a/2) = 180^\circ - a$, $\angle B_1'AM = 360^\circ - [60^\circ + 2(90^\circ + a/2)] = 120^\circ - a$ και $\angle A_1MB_1' = 180^\circ - (180^\circ - a) - (120^\circ - a) = 2a - 120^\circ$. Αν ξαναγράψουμε την ανισότητα συναρτήσει των γωνιών, βρίσκουμε $180^\circ - a < 2a - 120^\circ$. Επομένως, $a > 100^\circ$. Επιπλέον, είναι προφανές ότι $a < 120^\circ$ —διότι, διαφορετικά, το σημείο D θα ανήκε στο ίδιο επίπεδο με τα A, B, C .

M115

Οι συνθήκες του προβλήματος ισοδυναμούν με την εξής πρόταση: κάθε ευθεία παράλληλη με τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου ή με τη διχοτόμο των δύο άλλων τεταρτημορίων (ανάλογα με τη φορά της περιστροφής) τέμνει το γράφημα της (αρχικής) τριτοβάθμιας συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο.

Στην πρώτη περίπτωση, η παράγωγός της είναι είτε πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση του -1 είτε πάντοτε μικρότερη ή ίση του 1 . Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η παράγωγος είναι μεγαλύτερη του 1 στο σημείο x_1 και μικρότερη του 1 στο σημείο x_2 . Τότε, αν φέρουμε από τα αντίστοιχα σημεία του γραφήματος ευθείες παράλληλες προς τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, θα δούμε ότι μία τουλάχιστον από αυτές τέμνει το γράφημα δύο (ή περισσότερες) φορές. Άρα, η παράγωγος είναι το πολύ 1 (πράγ-

μα αδύνατο) ή είναι πάντα τουλάχιστον 1 . Στη δεύτερη περίπτωση: ή είναι πάντοτε το πολύ -1 (που είναι επίσης αδύνατο) ή πάντοτε τουλάχιστον -1 .

Τέλος, ερχόμαστε στο πρόβλημα: για κάθε x , βρείτε όλα τα a για τα οποία έχουμε είτε

$$3x^2 + 2ax + 19 \geq 1, \text{ είτε} \\ 3x^2 + 2ax + 19 \geq -1.$$

Αρκεί να θεωρήσουμε μόνο τη δεύτερη ανισότητα. Έτσι, οδηγούμαστε στην

$$-2\sqrt{15} \leq a \leq 2\sqrt{15}.$$

Φυσική

Φ111

Η δύναμη της τριβής που επιβραδύνει τη χάντρα καθορίζεται από την κάθετη δύναμη την οποία ασκεί ο δακτύλιος στη χάντρα. Στην περίπτωση μας, η εν λόγω δύναμη παίζει ρόλο κεντρομόλου (οπότε έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του δακτυλίου):

$$N = \frac{mv^2}{R},$$

$$T_\varphi = \mu N = \frac{\mu mv^2}{R}.$$

Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt , η ταχύτητα της χάντρας ελαττώνεται κατά

$$\Delta v = \gamma \Delta t = \frac{T_\varphi}{m} \Delta t \\ = \frac{\mu v^2 \Delta t}{R} = \frac{\mu v \Delta s}{R}.$$

Είναι προφανές ότι η ταχύτητα της χάντρας θα υποστεί, για δεδομένο στοιχειώδες διάστημα Δs , μια αντίστοιχη στοιχειώδη μείωση. Για παράδειγμα, εάν η ταχύτητα της χάντρας μειωθεί στο $0,99$ της αρχικής τιμής της αφού διανύσει 1 cm , τότε, αν διανύσει απόσταση 5 cm , η ταχύτητά της θα μειωθεί στο $(0,99)^5$ της αρχικής τιμής της.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα που θα αποκτήσει η χάντρα αφού διανύσει οποιαδήποτε απόσταση κατά μήκος του δακτυλίου. Καταρχάς, ας προσδιορίσουμε τη «μικρή» απόσταση Δs_0

η οποία αντιστοιχεί σε μείωση της ταχύτητας της χάντρας στο, ας πούμε, $1 - 0,001$, ή $0,999$ της αρχικής τιμής της:

$$\Delta s_0 = \frac{0,001R}{\mu}.$$

Η συνολική διαδρομή της χάντρας, $s = 2\pi Rn$, αποτελείται από $N = s/\Delta s_0 = 1.000n \times 2\pi\mu$ τέτοια «μικρά» τμήματα, οπότε η τελική ταχύτητα της χάντρας θα ισούται με

$$v = v_0 \left(1 - \frac{1}{1.000}\right)^N \\ = v_0 \left(1 - \frac{1}{1.000}\right)^{1.000N/1.000}$$

Ένας απλός μετασχηματισμός του εκθέτη αποκαλύπτει (σε όσους δεν τη μάντεψαν ήδη) τη βάση του πασίγνωστου φυσικού λογαρίθμου, $e = 2,71828...$ Μολονότι ξεκινήσαμε με έναν μάλλον μεγάλο αριθμό (1.000), μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με οποιονδήποτε άλλο (μεγαλύτερο) αριθμό, προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το σκεπτικό μας. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο μας με την εξής μορφή:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{1}{1.000}\right)^{1.000N/1.000} \\ = v_0 \left(\frac{1}{e}\right)^{n2\pi\mu} = 0,152v_0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα θέσαμε $n = 3$. Συνεπώς, αφού η χάντρα διαγράψει τρεις φορές το δακτύλιο, η ταχύτητά της θα μειωθεί κατά έναν παράγοντα $1/0,152 \approx 6,58$.

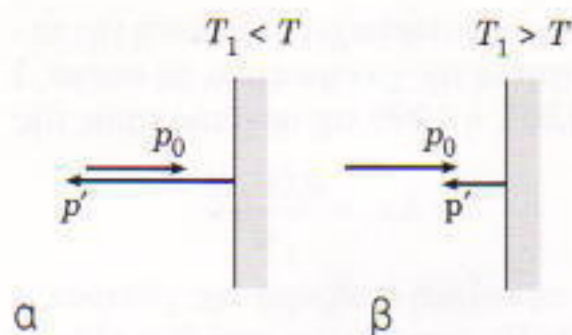
Φ112

Η θερμοκρασία του αερίου προσδιορίζεται από τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων του:

$$mv^2/2 = 3kT/2,$$

όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann. Αυτό σημαίνει ότι όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία του αερίου τόσο υψηλότερη είναι η μέση ταχύτητα και η μέση ορμή των μορίων του.

Εάν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία των τοιχωμάτων του δοχείου ισούται με εκείνη του αερίου, τότε η ορμή κάθε μορίου του αερίου (αν θεωρήσουμε ότι προσπίπτει κάθετα στο τοί-



Σχήμα 3

χωμα) θα αλλάξει φορά (δηλαδή πρόσημο, από p_0 σε $-p_0$), αλλά το μέτρο της θα παραμένει σταθερό. Συνεπώς, η μεταβολή την οποία θα υφίσταται η ορμή του μορίου θα ισούται με $2p_0$. Εάν όμως ισχύει $T > T_1$, τα μόρια του αερίου, όταν θα έρχονται σε επαφή με τα τοιχώματα, θα κερδίζουν ενέργεια και θα αυξάνουν την ταχύτητά τους (Σχήμα 3α). Σ' αυτή την περίπτωση, η μεταβολή της ορμής τους θα είναι μεγαλύτερη από $2p_0$.

Εάν τα τοιχώματα του δοχείου είναι ψυχρότερα από το αέριο, τα μόρια, όταν θα έρχονται σε επαφή με τα τοιχώματα, θα χάνουν ενέργεια και ταχύτητα (Σχήμα 3β). Σ' αυτή την περίπτωση, η μεταβολή της ορμής των μορίων θα είναι μικρότερη από $2p_0$.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η μεταβολή της ορμής των μορίων είναι ανάλογη της μέσης δύναμης που τους ασκεί το τοίχωμα. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η μέση δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στα μόρια ισούται με τη δύναμη την οποία ασκούν σ' αυτό τα μόρια του αερίου. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι, για $T_1 < T$, η πίεση του αερίου στα τοιχώματα του δοχείου είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή ισχύει $T_1 > T$.

Φ113

Το ολικό φορτίο του αφόρτιστου αγωγίμου αντικειμένου είναι μηδέν, οπότε τα ηλεκτρικά φορτία που επάγονται στην επιφάνειά του είναι δυνατόν, από μαθηματική άποψη, να συνδυαστούν σε ζεύγη ίσων και αντίθετων φορτίων —δηλαδή σε δίπολα. Θεωρήστε ένα τέτοιο δίπολο, για το οποίο η απόσταση ανάμεσα στα αντίθετα φορτία του a_i είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση L που χωρίζει το αφόρτιστο αντικείμενο από τη σφαίρα. Ας ονομάσουμε τα φορτία του

εν λόγω δίπολου $+q_i$ και $-q_i$. Το δίπολο προκαλεί μείωση του δυναμικού στο κέντρο της σφαίρας κατά

$$\Delta V_i = \frac{kq_i}{L} - \frac{kq_i}{L+a_i} = \frac{kq_i a_i}{L^2}$$

Το κέντρο της σφαίρας προσφέρεται για τον υπολογισμό επειδή, στο σημείο αυτό, το δυναμικό λόγω των φορτίων της σφαίρας δεν εξαρτάται από τον λεπτομερειακό τρόπο κατανομής τους στην επιφάνειά της.

Η σφαίρα ασκεί δύναμη Coulomb στο δίπολο, η οποία έχει μέτρο

$$F_i = \frac{kQq_i}{L^2} - \frac{kQq_i}{(L+a_i)^2} = \frac{2kQq_i a_i}{L^3} = \frac{2V \Delta V_i}{k}$$

όπου Q είναι το ηλεκτρικό φορτίο της σφαίρας και $V = kQ/L$ το δυναμικό της σε απόσταση L από το κέντρο της. Αθροίζοντας τις δυνάμεις που δρουν στα δίπολα, βρίσκουμε την ολική δύναμη που ασκείται στο μικρό αφόρτιστο αντικείμενο. Ακριβώς η ίδια δύναμη ασκείται και στη σφαίρα —έλκεται προς το αφόρτιστο αντικείμενο που εισαγάγαμε στο ηλεκτρικό πεδίο της. Η άθροιση των μικρών συνεισφορών στο δυναμικό της σφαίρας οδηγεί σε μια συνολική μεταβολή αυτού του δυναμικού —η οποία στην εκφώνηση του προβλήματος δίνεται ίση με $\Delta V = 1 \text{ V}$. Έτσι, καταλήγουμε ότι η ζητούμενη δύναμη ισούται με

$$F = \frac{2V \Delta V}{k} \cong 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ N.}$$

Φ114

Προφανώς η αναφερόμενη δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου. Ένας από τους δυνατούς τρόπους για να προσδιορίσουμε τα σημεία τα οποία αντιστοιχούν στη μέγιστη τιμή της έγκειται στο να θεωρήσουμε δύο τυχαία σημεία, να τοποθετήσουμε το κύκλωμα υπό τυχαία γωνία ως προς το μαγνητικό πεδίο και να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της ολικής μαγνητικής δύναμης. Θα ήταν τότε δυνατόν να προσδιορίσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για τη μεγιστοποίηση της εν λόγω

δύναμης. Ωστόσο, ο δρόμος αυτός είναι μάλλον μακρύς και επίπονος. Αντ' αυτού, ας προσπαθήσουμε να μαντέψουμε την απάντηση!

Προφανώς, έχουμε δύο επιλογές: είτε να συνδέσουμε την πηγή σε αντιδιαμετρικά σημεία και να στρέψουμε τη συγκεκριμένη διάμετρο σε διεύθυνση κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο, είτε να τη συνδέσουμε σε δύο γειτονικά σημεία (ώστε να επιτύχουμε το μέγιστο ρεύμα ανάμεσά τους) και, πάλι, να στρέψουμε το εν λόγω τμήμα κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Και στις δύο περιπτώσεις θα απαιτηθεί να υπολογίσουμε την ολική μαγνητική δύναμη, και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Στο πρώτο ενδεχόμενο (Σχήμα 4), το ρεύμα που διαρρέει καθένα από τα δύο μισά του δακτυλίου ισούται με

$$I_1 = \frac{V_0}{R/2} = \frac{2V_0}{R}$$

Η δύναμη που ασκείται σ' ένα αυθαίρετο τμήμα του δακτυλίου καθορίζεται από την προβολή του μήκους του επί της διαμέτρου, οπότε η ολική δύναμη θα ισούται με

$$F_1 = 2I_1 B d = 4V_0 B d / R$$

Στο δεύτερο ενδεχόμενο (Σχήμα 4β), η δύναμη καθορίζεται εξ ολοκλήρου από τη δράση του πεδίου στο «μικρό» τμήμα του δακτυλίου, επειδή οι δυνάμεις που ασκούνται στα υπόλοιπα τμήματα του δακτυλίου, στην πράξη, αλληλοαναιρούνται. Το ρεύμα που διαρρέει ένα «μικρό» τμήμα του δακτυλίου είναι

$$I_2 = \frac{V_0}{R\varphi/(2\pi)}$$

όπου φ είναι η «μικρή» γωνία υπό την οποία φαίνεται το συγκεκριμένο τμήμα από το κέντρο του δακτυλίου. Η δύναμη που μας ενδιαφέρει ισούται με

$$F_2 = I_2 B \varphi \frac{d}{2} = \frac{\pi V_0 B d}{R} < F_1$$



Σχήμα 4

Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι το πρώτο ενδεχόμενο δίνει τη μέγιστη δύναμη που ασκείται στο δακτύλιο.

Φ115

Αφού διαθλαστούν στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-γυαλιού, όλες οι ακτίνες που κατευθύνονται από την πηγή προς την οθόνη παγιδεύονται μέσα στον κύλινδρο και, έπειτα από πολλαπλές ανακλάσεις στην παράπλευρη επιφάνειά του (στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα), διέρχονται τελικά από το άνοιγμα της οθόνης.

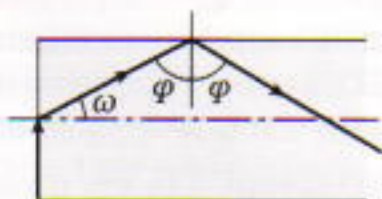
Στην πραγματικότητα, η οριζική ακτίνα που προσπίπτει στη βάση του κυλίνδρου από το μέρος του αέρα υπό γωνία πρόσπτωσης $\pi/2$, αφού διαθλαστεί, θα σχηματίσει μια κρίσιμη γωνία ω με τον άξονα του κυλίνδρου. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη γωνία χρησιμοποιώντας την εξίσωση $n\omega = 1/n$. Η εν λόγω ακτίνα προσπίπτει στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου υπό γωνία $\varphi = (\pi/2) - \omega$ (Σχήμα 5). Εφόσον ισχύει η ανισότητα

$$n\omega = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = n\pi/4,$$

συμπεραίνουμε ότι $\omega < \pi/4$ και $\varphi > \pi/4 > \omega$. Συνεπώς, όταν αυτή η ακτίνα προσπίπτει στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, υφίσταται ολική εσωτερική ανάκλαση. Εν συνεχεία, η συγκεκριμένη ακτίνα θα συνεχίσει να ανακλάται στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ώσπου να φτάσει τελικά στο άλλο άκρο αυτού του «αγωγού φωτός».

Κάθε ακτίνα που προσπίπτει στην πρώτη βάση του κυλίνδρου υπό γωνία μικρότερη από $\pi/2$, αφού διαθλαστεί, θα σχηματίζει με τον άξονα του κυλίνδρου γωνία $\omega' < \omega$. Συνεπώς, στην παράπλευρη επιφάνεια θα προσπίπτει υπό γωνία $\varphi' > \varphi > \omega$, και κατ' ανάγκη θα υφίσταται ολική εσωτερική ανάκλαση.

Έτσι, ο διαφανής κύλινδρος θα



Σχήμα 5

κατευθύνει προς το άνοιγμα όλες τις ακτίνες που εκπέμπονται από την πηγή εντός στερεάς γωνίας 2π στερακτινίων. Αν δεν παρεμβαλλόταν ένας τέτοιος κύλινδρος, μόνο μικρό ποσοστό αυτού του φωτός θα διερχόταν από το άνοιγμα· η φωτεινή ροή θα περιοριζόταν στη στερεά γωνία των $\pi d^2/4l^2$ στερακτινίων. Συνεπώς, ο κύλινδρος αυξάνει την ποσότητα του φωτός που διέρχεται από το άνοιγμα κατά παράγοντα

$$n = \frac{2\pi}{\pi d^2/4l^2} = \frac{8l^2}{d^2} = 8 \cdot 10^4.$$

Σπαζοκεφαλιές

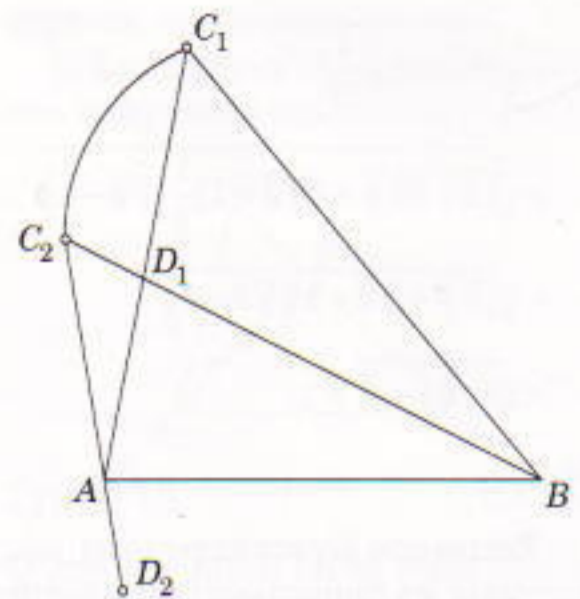
Σ111

Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα σε τρεις πλευρές ενός ζαριού είναι $4 + 5 + 6 = 15$. Επομένως, αναζητούμε δύο αριθμούς μικρότερους ή ίσους του 15, και με άθροισμα 27. Οι μοναδικές δυνατότητες είναι 14 και 13, ή 15 και 12. Όμως, το άθροισμα των τριών ορατών πλευρών ενός ζαριού δεν μπορεί να ισούται με 13· επομένως, το συνολικό πλήθος των κουκίδων στο ένα ζάρι είναι 15 και στο άλλο 12.

Αν εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις, μπορούμε να δούμε γιατί το άθροισμα στις τρεις ορατές πλευρές ενός ζαριού δεν μπορεί να ισούται με 13. Αφού $4 \times 3 = 12 < 13$, πρέπει να υπάρχει ένα 5 ή ένα 6 στο άθροισμα που δίνει 13. Αν ο μεγαλύτερος αριθμός στο άθροισμα είναι 5, οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι $5 + 5 + 3$ ή $5 + 4 + 4$, που αποκλείονται, αφού κάθε αριθμός υπάρχει μόνο μία φορά σε ένα ζάρι. Αν υπάρχει ένα 6, οι δυνατές περιπτώσεις είναι $6 + 4 + 3$, $6 + 5 + 2$ και $6 + 6 + 1$, που αποκλείονται, αφού αριθμοί με άθροισμα 7 βρίσκονται σε απέναντι πλευρές του ζαριού.

Σ112

Μπορούμε να φανταστούμε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου δεν είναι παρά μια κλωστή στην οποία έχουμε περάσει δύο χάντρες, ενώ τα άκρα της είναι δεμένα στα σημεία A και B. Η πρώτη χάντρα, που παριστάνει το σημείο C, απέχει 6 μονάδες από το άκρο B, και η δεύτερη, που παριστάνει το σημείο D, απέχει 1 μονάδα από το σημείο A. Η απόσταση μεταξύ



Σχήμα 6

των C και D είναι 4 μονάδες. Για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο τετράπλευρο, η κλωστή πρέπει να παραμένει τεντωμένη και να μην τέμνει τον εαυτό της ή το τμήμα AB.

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το C κινείται κατά μήκος ενός τόξου του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα 6, ενώ το D κινείται κατά μήκος ενός τόξου του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα 1. Ποια είναι όμως τα άκρα αυτών των τόξων; Για να τα βρούμε, τοποθετούμε την κλωστή σε «ακραίες» θέσεις. Μια ακραία θέση είναι αυτή όπου τα σημεία C, D και A είναι συγγραμμικά (τα C₁D₁ και A στο Σχήμα 6), οπότε το τετράπλευρο είναι στην πραγματικότητα τρίγωνο. Η άλλη ακραία θέση είναι εκείνη που τα σημεία C, D και A είναι και πάλι συγγραμμικά, αλλά το A βρίσκεται μεταξύ των C και D. Την περίπτωση αυτή παριστάνουν τα σημεία C₂ και D₂ του σχήματος. Αν το σημείο D μετακινηθεί κι άλλο προς τα αριστερά πάνω στον κύκλο, η κλωστή που ενώνει τα C και D θα τμήσει το AB.

Η λεπτομερής γεωμετρική περιγραφή είναι αρκετά περιπλοκότερη.

Σ113

Όταν η θερμοκρασία του εδάφους είναι πολύ χαμηλή (-5°C ή μικρότερη), οι κρύσταλλοι του πάγου που αποτελούν το χιόνι δεν λιώνουν κάτω από το βάρος σας· συντρίβονται, και παράγουν το τριξίμο που ακούτε.

Σ114

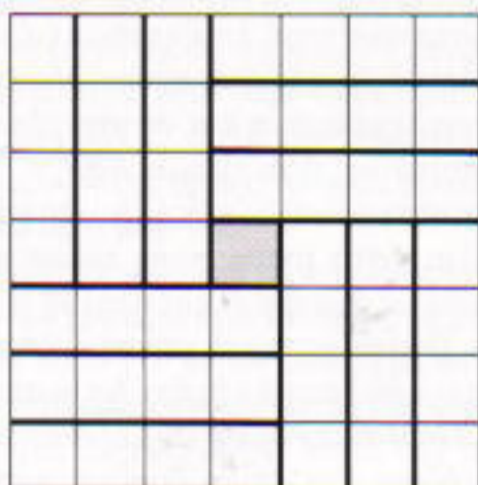
Η ποσότητα αυτή ισούται με 1:

$$(\sqrt[3]{2} + 1)\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} - 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2} + 1)^3 \frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} - 1)} \\
 &= \sqrt[3]{(2 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1) \frac{1}{3} (\sqrt[3]{2} - 1)} \\
 &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)} \\
 &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2})^3 - 1} = 1.
 \end{aligned}$$

Σ115

Έπειτα από λίγους πειραματισμούς, μπορείτε να διαπιστώσετε ότι πρέπει να απομακρυνθεί το κεντρικό κελί (δείτε το Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Καλειδοσκόπιο

1. Θετικό.

2. Όχι, σε κάθε περίπτωση. Είναι δυνατόν να μην υπάρχει διαφορά δυναμικού αν οι αγωγοί είναι τοποθετημένοι μέσα στο πεδίο που δημιουργούν άλλα φορτισμένα σώματα. Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 8, όπου οι

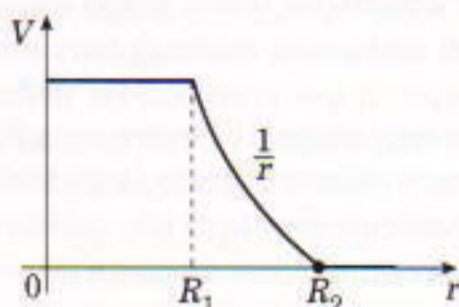


Σχήμα 8

σφαίρες A και B (οι οποίες συνδέονται με αγωγίμο σύρμα) βρίσκονται μέσα σ' ένα εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και είναι φορτισμένες εξ επαγωγής.

3. Ο αγωγός έχει το ίδιο δυναμικό σε όλο τον όγκο του. Είναι ίσο με το δυναμικό που δημιουργείται στο κέντρο του από το σημειακό φορτίο: $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. (Το δυναμικό που δημιουργείται στο κέντρο του αγωγού από τα φορτία που επάγονται στην επιφάνειά του είναι μηδέν.)

4. Όχι.
5. Το δυναμικό της σφαίρας μηδενίζεται.
6. Δείτε το Σχήμα 9.



Σχήμα 9

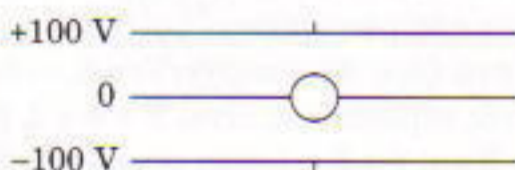
7. Όχι απαραίτητα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που εικονίζεται στο Σχήμα 10, όλο το φορτίο του αγωγού με δυναμικό 50 V θα περάσει στον αγωγό που αρχικά είχε δυναμικό 100 V.



Σχήμα 10

8. Όχι, επειδή το δυναμικό παραμένει ίδιο σε όλη την επιφάνεια του αντικειμένου. Το μακρύ νήμα είναι απαραίτητο για να μην επηρεάζονται οι ενδείξεις του ηλεκτρομέτρου από το δυναμικό του φορτισμένου αντικειμένου.

9. Θα είναι το επίπεδο που ισαπέχει από τους οπλισμούς μαζί με την επιφάνεια της μικρής σφαίρας.

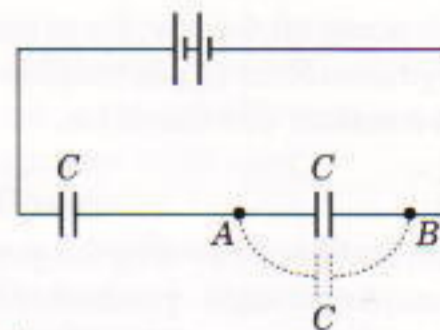


Σχήμα 11

10. Σε ύψος h.

11. Όχι· το αρχικό και τελικό σημείο της τροχιάς του αντικειμένου ανήκουν στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια.

12. Όχι απαραίτητα, επειδή ο εν λόγω πυκνωτής μπορεί να μεταβάλλει τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B (όπως φαίνεται, για παράδειγμα, στο κύκλωμα του Σχήματος 12).



Σχήμα 12

13. Θα μειωθεί κατά παράγοντα δύο.

14. Το φορτίο κατά τη ροή του «απομακρύνεται» συμμετρικά από το κομμένο καλώδιο (Σχήμα 13). Το ρεύμα είναι μεγαλύτερο όσο πιο κοντά βρίσκόμαστε στο καλώδιο, επομένως, τόσο μεγαλύτερη είναι και η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του εδάφους κοντά στο κομμένο καλώδιο—άρα μεγαλύτερος και ο κίνδυνος ηλεκτροπληξίας. Το ίδιο ισχύει και όταν ένας κεραυνός χτυπάει ένα δέντρο.



Σχήμα 13

15. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, σ' ένα δακτύλιο όταν η μαγνητική ροή που τον διαπερνά μεταβάλλεται ανάλογα με το χρόνο.

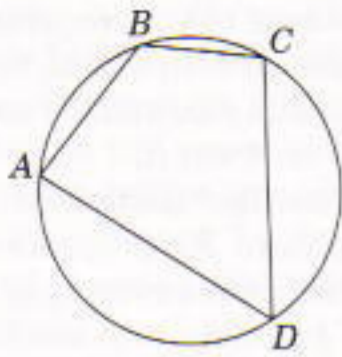
16. Είναι αδύνατον χωρίς ένα καλώδιο που να παραμένει ακίνητο ως προς τη Γη.

Μικροπειραματισμοί

Όχι, διότι, αν συνδέσουμε αυτά τα σημεία μέσω του λαμπτήρα, αμέσως το δυναμικό τους θα εξισωθεί. Δεν είναι επικίνδυνη η εν λόγω διαφορά δυναμικού, επειδή, καθώς στέκεστε πάνω στο έδαφος, σχηματίζετε μαζί του μια ισοδυναμική επιφάνεια· έτσι, η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο κεφάλι και τις φτέρνες σας είναι μηδέν.

Κυκλικοί συλλογισμοί

Ας υποθέσουμε ότι το τετράπλευρο ABCD είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε, η γωνία A έχει μέτρο ίσο με $\frac{1}{2}$ τοξBCD (Σχήμα 14), και η γωνία C έχει μέτρο $\frac{1}{2}$ τοξBAD. Όμως, τοξBAD

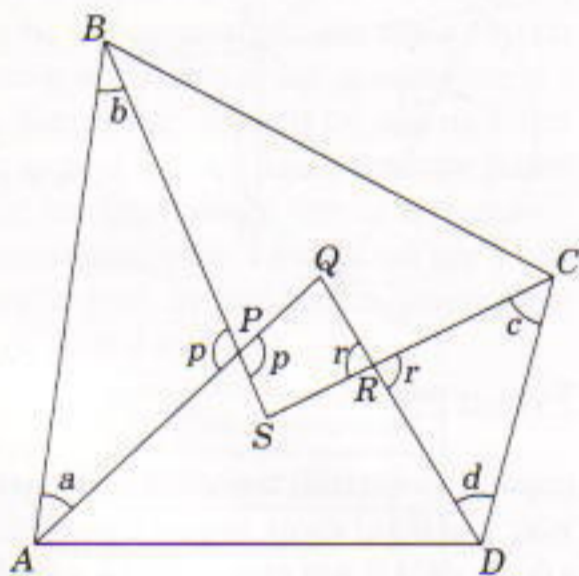


Σχήμα 14

+ τοξBCD = 360° , και επομένως $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360° , έπεται ότι και $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Η αντίστροφη πρόταση είναι και αυτή αληθής. Πράγματι, μπορούμε πάντα να φέρουμε έναν κύκλο από τρεις κορυφές ενός τετραπλεύρου —ας πούμε, τις A, B και D. Έστω a το μέτρο (σε μοίρες) της γωνίας A. Τότε, σ' αυτό τον κύκλο, το μέτρο του τόξου BD (που δεν περιέχει το σημείο A) ισούται με $2a$, και τοξBCD = $360^\circ - 2a$. Αν $\angle A + \angle C = 180^\circ$, τότε $\angle C = 180^\circ - a$ —δηλαδή το μισό του τόξου BCD. Επομένως, το σημείο C πρέπει να ανήκει στον κύκλο που διέρχεται από τα A, B, D.

2. Στο Σχήμα 15, οι AQ, BP, CS και DR είναι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου ABCD. Πρέπει να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο PQRS είναι εγγράψιμο, ή, ισοδύναμα, ότι οι



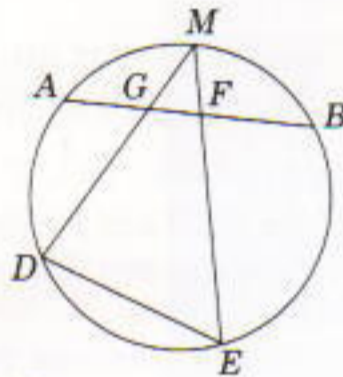
Σχήμα 15

γωνίες QPS, QRS είναι παραπληρωματικές. Έστω p το μέτρο (σε μοίρες) της $\angle QPS$ και r το μέτρο της $\angle QRS$. Τότε, $\angle BPA = p$ και $\angle CRD = r$. Από τα τρίγωνα ABP και CRD (δείτε το Σχήμα 15) έχουμε $p + a + b + r + c + d = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Κάθε όρος του αθροίσματος $a + b + c + d$, όμως, είναι το μισό της αντίστοιχης γωνίας του

τετραπλεύρου, και επομένως το άθροισμα αυτό ισούται με $360^\circ / 2 = 180^\circ$. Έπεται ότι $p + r = 180^\circ$, και συνεπώς το τετράπλευρο PQRS είναι εγγράψιμο.

Ποια μορφή έχει το PQRS όταν το ABCD είναι παραλληλόγραμμο; Ορθογώνιο; Ρόμβος; Τετράγωνο; Τετράπλευρο με δύο ζεύγη ίσων διαδοχικών πλευρών;

3. Στο Σχήμα 16, $\angle E = \frac{1}{2}$ τοξMD. Όμως, $\angle AGD = \frac{1}{2}$ (τοξBM + τοξAD) = $\frac{1}{2}$ (τοξMA + τοξAD) = $\frac{1}{2}$ τοξMD. Άρα, $\angle E = \angle AGD$, πράγμα που σημαίνει ότι

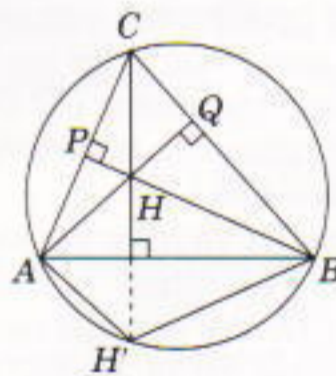


Σχήμα 16

η $\angle E$ είναι παραπληρωματική της γωνίας DGF. Επομένως, το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο.

Τι συμβαίνει αν κάποια από τις ευθείες MD ή ME τέμνει την ευθεία AB εκτός του τμήματος AB;

4. Στο Σχήμα 17, το H' είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την πλευρά AB. Πρέπει να απο-

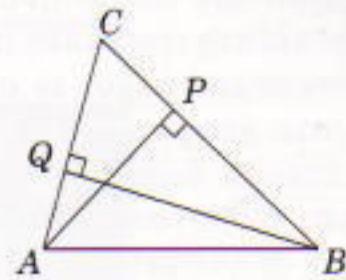


Σχήμα 17

δείξουμε ότι το H' ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC. Αυτό θα αληθεύει αν είναι εγγράψιμο το τετράπλευρο ACBH' ή, ισοδύναμα, αν η γωνία AH'B είναι παραπληρωματική της ACB. Όμως, $\angle AH'B = \angle AHB$ (λόγω συμμετρίας), η οποία ισούται με την $\angle PHQ$, και η γωνία $\angle PHQ$ είναι προφανώς παραπληρωματική της $\angle PCQ$, διότι το τετράπλευρο PCQH είναι εγγράψιμο (οι δύο άλλες γωνίες του είναι ορθές, και ε-

πομένως παραπληρωματικές).

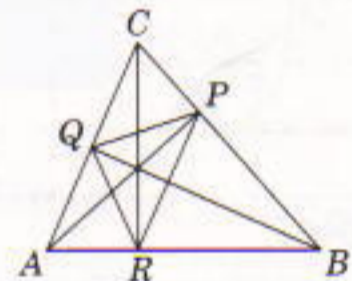
5. Στο Σχήμα 18, η AB φαίνεται υπό ορθή γωνία από το P και από το



Σχήμα 18

Q. Αυτό σημαίνει ότι τα P και Q ανήκουν στον κύκλο διαμέτρου AB.

6. Βάσει του Προβλήματος 5, το τετράπλευρο ABPQ είναι εγγράψιμο. Αυτό σημαίνει ότι $\angle APQ = \angle ABQ$ (αποτέμνουν και οι δύο το τόξο AQ στον κύκλο που διέρχεται από τα A, B, P και Q). Για τον ίδιο λόγο (από το εγγράψιμο τετράπλευρο ACPR) είναι $\angle APR = \angle ACR$ (Σχήμα 19).



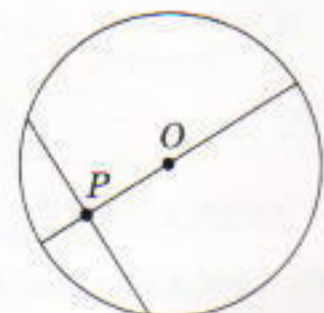
Σχήμα 19

Ωστόσο, η γωνία CAB είναι συμπληρωματική και της $\angle ACR$ (στο τρίγωνο ARC) και της $\angle ABQ$ (στο τρίγωνο AQB). Επομένως, $\angle ACR = \angle ABQ$, και έτσι $\angle APR = \angle ACR$. Συνεπώς, $\angle ACR = \angle ABQ = \angle APQ$ και $\angle APR = \angle APQ$.

Αυτό μας δείχνει ότι η AP διχοτομεί τη γωνία QPR. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι τα άλλα δύο ύψη του τριγώνου ABC είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου PQR.

7. Έστω O το κέντρο του κύκλου, και P το σταθερό σημείο. Ας πειραματιστούμε φέροντας τη διάμετρο που διέρχεται από το P (Σχήμα 20).

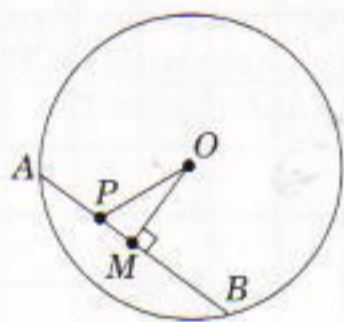
Η «κάθετος» από το O προς αυτή τη



Σχήμα 20

διάμετρο είναι απλώς το ίδιο το σημείο O , το οποίο πρέπει να ανήκει στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Αν φέρουμε τη χορδή που διέρχεται από το P και είναι κάθετη προς αυτή τη διάμετρο, βρίσκουμε ότι και το σημείο P ανήκει στο γεωμετρικό τόπο. Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η διάμετρος OP είναι ευθεία συμμετρίας για το γεωμετρικό τόπο. Όλα αυτά μας γεννούν την υποψία ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο OP .

Για να επιβεβαιώσουμε την υποψία μας, θεωρούμε μια τυχαία χορδή που διέρχεται από το P , και το μέσο της M (Σχήμα 21). Τότε, η ευθεία OM θα είναι κάθετη στην AB . Τούτο σημαίνει ότι το τμήμα OP φαίνεται υπό ορθή

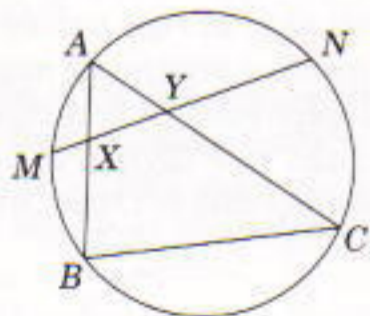


Σχήμα 21

γωνία από το μέσο οποιασδήποτε από τις χορδές μας, και συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των μέσων είναι ένας κύκλος διαμέτρου OP .

Αν το P ανήκει στην περίμετρο του κύκλου, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του δεδομένου κύκλου. Αν το P ανήκει στο εξωτερικό του κύκλου, ο γεωμετρικός τόπος είναι το τμήμα εκείνο του κύκλου OP που βρίσκεται στο εσωτερικό του δεδομένου κύκλου.

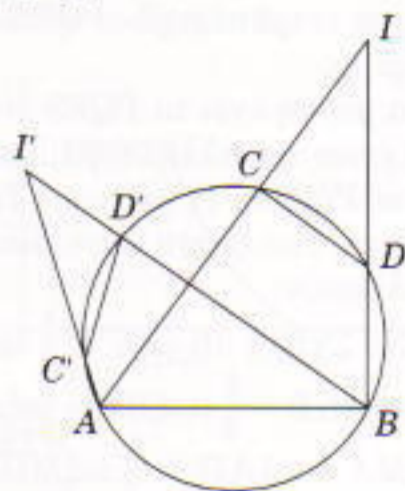
8. Στο Σχήμα 22, τα M και N είναι μέσα των τόξων AB και AC , αντίστοι-



Σχήμα 22

χα. Έτσι $\angle AXN = \angle MXB = \frac{1}{2}(\text{τοξ}MB + \text{τοξ}AN) = \frac{1}{2}(\text{τοξ}AM + \text{τοξ}NC) = \angle AYM$. Άρα, το τρίγωνο AXY είναι ισοσκελές, και $AX = AY$.

9. Στο Σχήμα 23 βλέπουμε την περίπτωση (α) και δύο δυνατές θέσεις της χορδής CD (CD και $C'D'$). Αφού

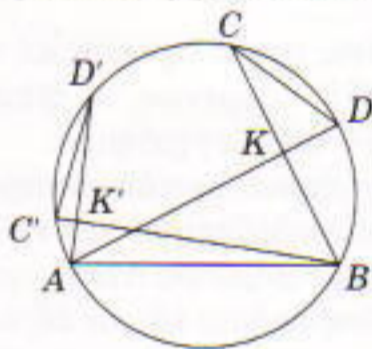


Σχήμα 23

$CD = C'D'$, γνωρίζουμε ότι $\text{τοξ}CD = \text{τοξ}C'D'$. Συνεπώς, $\angle I = \frac{1}{2}(\text{τοξ}AB - \text{τοξ}CD) = \frac{1}{2}(\text{τοξ}AB - \text{τοξ}C'D') = \angle I'$.

Επομένως, τα I και I' ανήκουν σε τόξο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A και B .

Στο Σχήμα 24 βλέπουμε την περίπτωση (β). Εδώ, η γωνία AKB ισού-

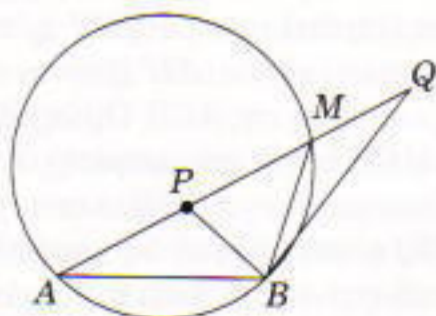


Σχήμα 24

ται με το ημίθροισμα των τόξων CD και AB , επομένως είναι ανεξάρτητη από τη θέση της χορδής CD . Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τόξο ενός άλλου κύκλου.

Τι μπορείτε να πείτε για τα κέντρα και τις ακτίνες αυτών των κύκλων;

10. (α) Έστω a το μέτρο της $\angle AMB$. Παρατηρούμε ότι το a είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M στον κύκλο. Το τρίγωνο PMB είναι ισοσκελές και $\angle APB$ ισούται με $180^\circ - (90^\circ - a/2) = 90^\circ + a/2$ (Σχήμα 25).



Σχήμα 25

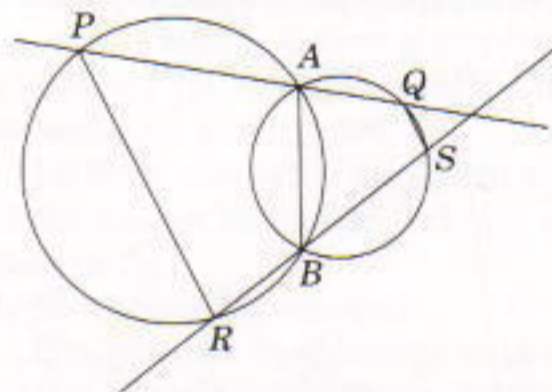
Αφού και αυτό το γεγονός είναι ανεξάρτητο από τη θέση του M , το P βρίσκεται στο τόξο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A και B .

(β) Με τον ίδιο τρόπο (από το ισοσκελές τρίγωνο BMQ) βρίσκουμε ότι $\angle AQB = a/2$, και συνεπώς το Q βρίσκεται σ' ένα άλλο τόξο κύκλου που διέρχεται από τα A και B .

(γ) Με μια ανάλογη απόδειξη βρίσκουμε ότι και αυτοί οι δύο νέοι γεωμετρικοί τόποι είναι τόξα κύκλων. Τα τέσσερα τόξα σχηματίζουν δύο κύκλους. Το εντυπωσιακό είναι ότι ο γεωμετρικός τόπος του P , όταν το M ανήκει στο μείζον τόξο AB , σχηματίζει κύκλο με το γεωμετρικό τόπο του Q , όταν το M ανήκει στο έλασσον τόξο, και αντιστρόφως.

Μπορούμε να μαντέψουμε το γεωμετρικό τόπο θεωρώντας τις ειδικές περιπτώσεις όταν το M συμπίπτει με το A (οπότε η ευθεία MA εφάπτεται στον κύκλο), όταν το M συμπίπτει με το B (οπότε συμπίπτουν και τα P, Q) και όταν το M είναι το μέσο ενός από τα τόξα (οπότε το P συμπίπτει με το A). Παρατηρήστε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η $\angle PBQ$ είναι ορθή.

11. Στο Σχήμα 26, το τετράπλευρο $PABR$ είναι εγγεγραμμένο στο μεγαλύτερο κύκλο. Συνεπώς, η $\angle PRB$ είναι



Σχήμα 26

παραπληρωματική της $\angle PAB$. Προφανώς, η $\angle BAQ$ είναι παραπληρωματική της $\angle PAB$, και έτσι $\angle PRB = \angle QAB$.

Παρομοίως, το τετράπλευρο $ABSQ$ είναι εγγεγραμμένο στο μικρότερο κύκλο· έτσι η $\angle QSB$ είναι παραπληρωματική της $\angle QAB$ και, συνεπώς, παραπληρωματική της $\angle PRB$.

Αυτό, όμως, μας δείχνει ότι $PR \parallel QS$, αφού έχουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

Ο κανόνας της πλειοψηφίας

1. Στην εικόνα ψηφοφορίας P_1 , ο

υποψήφιος a συγκεντρώνει την υψηλότερη βαθμολογία (9 βαθμούς) και ο c είναι δεύτερος, με 8 βαθμούς. Αν ο b αποσύρει την υποψηφιότητά του, προκύπτει η εικόνα ψηφοφορίας P_2 , όπου ο c κερδίζει με 7 βαθμούς. Φυσικά, υπάρχουν και άλλα πολλά παραδείγματα.

Βαθμοί	Πλήθος ψηφοφόρων			
	2	1	2	1
4	a	c	-	-
3	b	d	a	c
2	c	e	c	d
1	d	a	d	e
0	e	b	e	a

Εικόνα P_1 Εικόνα P_2

2. Αν R είναι ο κανόνας της σχετικής πλειοψηφίας, $R(S) = \{a\}$, $S = \{b, c, d\}$, και η εικόνα ψηφοφορίας μετά την εξαίρεση του a είναι η A_1 . Τώρα $R(S) = \{D\}$, και η εικόνα ψηφοφορίας μετά την εξαίρεση του D είναι η A_2 , που μας δείχνει ότι ο c κερδίζει στο τρίτο βήμα και ο b είναι τελευταίος.

Οι άλλοι κανόνες αντιμετωπίζονται με παρόμοιο τρόπο.

3. Θεωρήστε την εικόνα ψηφοφορίας όπου ο k προτιμά τον d από τον a και τον a από τον c , ενώ όλοι οι άλλοι ψηφοφόροι προτιμούν τον c από τον d και τον d από τον a . Αφού ο $\{k\}$ είναι αποφασιστικός για τον a έναντι του c , $a \geq c$. Λόγω της ομοφωνίας, $d > a$. Επομένως, από τη μεταβατικότητα έχουμε $d > c$. Αν απαλείψουμε, βάσει της ανεξαρτησίας, τον a , συμπεραίνουμε πως, όταν ο k προτιμά τον d από τον c , ενώ οι υπόλοιποι ψηφοφόροι όχι, τότε $d > c$.

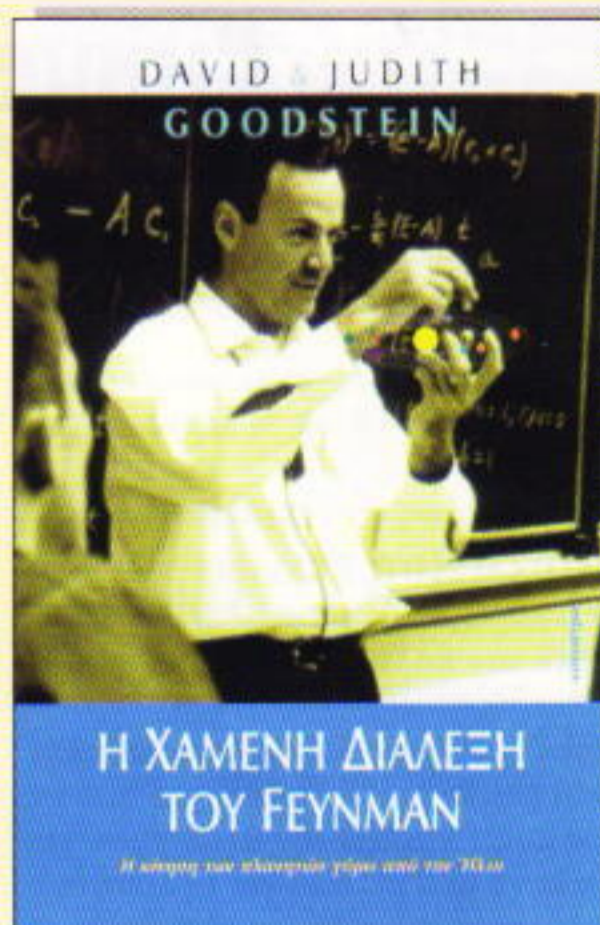
Πλήθος ψηφοφόρων			
5	3	5	4
d	d	b	c
c	b	c	d
b	c	d	b

Εικόνα A_1

Πλήθος ψηφοφόρων			
5	3	5	4
c	b	b	c
b	c	c	b

Εικόνα A_2

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



David και Judith Goodstein

Η ΧΑΜΕΝΗ ΔΙΑΛΕΞΗ ΤΟΥ FEYNMAN

Η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο

«Οι ιδιοφυείς επιστήμονες ανήκουν σε δύο κατηγορίες: οι συνηθισμένοι επιτυγχάνουν σπουδαία πράγματα, αλλά σε αφήνουν να πιστέψεις ότι θα τα κατάφερες κι εσύ, αν είχες δουλέψει αρκετά σκληρά· από την άλλη υπάρχουν οι "μάγοι", που αδυνατείς να ανακαλύψεις την πηγή της έμπνευσής τους. Ο Feynman ήταν ένας "μάγος".»

— HANS BETHE, θεωρητικός φυσικός, βραβείο Νόμπελ

«Οι Goodstein αφηγούνται το αγωνιώδες κινήσι ενός χαμένου ντοκουμέντου και παρουσιάζουν με εναισθησία ένα συγκινητικό πορτρέτο του μεγάλου φυσικού. Επιπλέον, προσφέρουν μια ευχάριστη, προσιτή αλλά και εμπειριστατωμένη εισαγωγή σ' ένα θεμελιώδες επιστημονικό πρόβλημα. Ο Feynman, από τη μεριά του, θα ανταμείψει πλουσιοπάροχα όσους είναι πρόθυμοι να τον παρακολουθήσουν στους συναρπαστικούς συλλογισμούς του.»

— I. BERNARD COHEN, καθηγητής ιστορίας των φυσικών επιστημών στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

Σελ.: 224, 14 × 21 εκ., 4.700 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Εμπνεύσεις

Στερνή μου γνώση να σ' είχα πρώτα

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά.

Τις προάλλες ξεκουραζόμουν στο λιβάδι, όταν με πλησίασε για λίγη κουβέντα η φίλη μου η Μπέσυ, μια από τις αγελάδες του κτήματός μας. Γνωρίζει την αγάπη μου για ιππολογισμούς, και ήθελε να μου μιλήσει για τη λύση που ανακάλυψε σ' ένα πρόβλημα το οποίο της είχε θέσει το αφεντικό μας, ο κύριος Πωλ. Όπως μου εξήγησε, την προηγούμενη εβδομάδα ο κύριος Πωλ την ενημέρωσε ότι οι αγελάδες και οι κότες που είχε στην ιδιοκτησία του έφταναν μαζί τις 100. Σύμφωνα με τα στοιχεία του, όλα αυτά τα ζώα είχαν συνολικά 324 πόδια. Προσπαθούσε

λοιπόν να βρει πόσες αγελάδες και πόσες κότες είχε στο κτήμα του. «Αλλά, Μπέσυ», της είπε, «θέλω να με καταλάβεις... Πάνε τόσα χρόνια που τελείωσα το σχολείο, και, δυστυχώς, ποτέ δεν μου άρεσαν οι εξισώσεις. Μπορείς να κάνεις αυτό τον ιππολογισμό εσύ, χωρίς να χρησιμοποιήσεις εξισώσεις;»

Η Μπέσυ, η οποία περηφανεύεται για τις ασυνήθιστες λύσεις που ανακαλύπτει, σκέφτηκε για λίγο, και μετά του ανακοίνωσε ότι είχε μια έμπνευση. «Ας υποθέσουμε», είπε, «ότι όλες οι αγελάδες στέκονται στα δύο τους πόδια. Τότε είναι προφανές ότι θα έχουμε 200 πόδια στο έδαφος. Αυτό μας κάνει 324 μείον 200, δηλαδή 124 πόδια στον αέρα. Όμως, όλα αυτά τα πόδια ανήκουν σε αγελάδες, οπότε έχουμε 62 αγελάδες και 38 κότες».



Εικονογράφηση: Mark Breneman

Εντυπωσιασμένος από τη λύση της, δεν δίστασα να της δηλώσω πως «πιστεύω ότι μπορείς να τα καταφέρεις με οποιοδήποτε πρόβλημα!» Ακούγοντας το σχόλιό μου, η Μπέσυ χαμογέλασε. «Κι όμως, τον τελευταίο καιρό με απασχολεί ένα πρόβλημα που δεν μπορώ να αντιμετωπίσω. Όπως ίσως γνωρίζεις, μας αρέσει να μαζευόμαστε μερικοί φίλοι και να παίζουμε πόκερ. Είμαι αρκετά συντηρητική, και έτσι έχω υποσχεθεί στον εαυτό μου να μη χάσω ποτέ περισσότερα από 50 δολάρια σε μία βραδιά. Κατά τη διάρκεια του περασμένου μήνα, έχασα ή κέρδισα τα εξής ποσά:

```
winnings = {29, -7, 14, 21, 30, -47, 1, 7,
            -39, 23, -20, -36, -41, 27, -34, 7, 48, 35,
            -46, -16, 32, 18, 5, -33, 27, 28, -22, 1,
            -20, -42}.
```

Άρχισα κερδίζοντας 29 δολάρια την πρώτη μέρα, αλλά κατέληξα χάνοντας 42 δολάρια την τελευταία. Το συνολικό κέρδος μου όλο το μήνα ήταν:

```
Apply[Plus, winnings]
-50
```

Νομίζω ότι 50 δολάρια για λίγες ώρες διασκέδασης κάθε μέρα δεν είναι πολλά, όμως δεν μπορώ να μη σκέφτομαι τα χρήματα που θα κέρδιζα αν γνώριζα πότε να σταματήσω. Για παράδειγμα, αν άρχιζα να παίζω τη 16η μέρα και σταματούσα την 26η, θα είχα κερδίσει 105 δολάρια. Αυτό σημαίνει ότι τώρα η περιουσία μου θα ήταν κατά 155 δολάρια μεγαλύτερη —αρκετά αξιόλογο ποσό.»

Η ιστορία της Μπέσυ μάς φέρνει αντιμέτωπους με ένα ενδιαφέρον πρόβλημα προγραμματισμού:

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Με δεδομένη μια ακολουθία $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ακεραίων, μήκους n , βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο (τάξης n) που θα βρίσκει μια υπακολουθία $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_H\}$ διαδοχικών όρων με το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα. Ο αλγόριθμος να δίνει τους δείκτες του αρχικού και του τελικού όρου, L και H , και το μέγιστο άθροισμα $\sum_{i=L}^H x_i$. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες υπακολουθίες, να δίνει μια οποιαδήποτε από αυτές.

Ένα ραβδόγραμμα

Ιδού μια γραφική παράσταση των κερδών της Μπέσυ:



Πρώτη λύση — ωμή βία

Γιατί να μη δοκιμάσουμε όλες τις πιθανότητες; Για κάθε αρχικό δείκτη L , από το 1 έως το n , και για κάθε τελικό δείκτη H , από το L έως το n , σχηματίζουμε την υπακολουθία $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_H\}$ και βλέπουμε αν το άθροισμά της είναι το καλύτερο από όσα έχουμε βρει μέχρι στιγμής. Αν είναι, το αποθηκεύουμε μαζί με τους δείκτες L και H . Ιδού ο αλγόριθμος γραμμένος στο Mathematica. Μια παραλλαγή αυτού του προβλήματος, και η λύση του, εμφανίζονται στο *Programming Pearls* του John Bentley (Addison-Wesley, 1986).

```
bruteForceOne[X_] := Module[
  {MaxSoFar = 0, L = H = 0, Low = High = 0,
   SubSum = 0,
   n = Length[X], j},
  For[L = 1, L <= n, L++,
    For[H = L, H <= n, H++, SubSum =
      Sum[X[[j]], {j, L, H}];
    If[SubSum >= MaxSoFar, Low = L; High =
      H];
    MaxSoFar = Max[MaxSoFar, SubSum]
  ]
  {MaxSoFar, {Low, High}}
```

```
bruteForceOne[winnings] // Timing
```

```
{0.44 Second, {105, {16, 26}}}
```

Καθόλου άσχημη για πρώτη προσπάθεια, αλλά όχι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Με μεγάλες τιμές του n η επιβράδυνση είναι δραματική, διότι το πλήθος των υπολογιστικών πράξεων (και συνεπώς ο χρόνος) είναι ανάλογο του n^3 . Ένα n για κάθε βρόχο, και ένα n για τον υπολογισμό του αθροίσματος. Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να βρεθεί η απάντηση όταν η ακολουθία έχει μήκος 1.000:

```
Clear[timeInSeconds, timeInHours]
solution = Solve
```

```
[ $\frac{\text{timeInSeconds}}{1000^3} == \frac{.44\text{seconds}}{30^3}, \text{timeInSeconds}$ ]
```

```
{(timeInSeconds → 16296.3 seconds)}
```

```
timeInSeconds = timeInSeconds /. First[solution]
16296.3 seconds
```

```
timeInHours =  $\frac{\text{timeInSeconds}}{3600 \frac{\text{seconds}}{\text{hour}}}$ 
```

```
4.52675 hours.
```

Θα ήθελα να συντομεύσουμε λίγο αυτό το διάστημα. Δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο;

Δεύτερη λύση — βελτιωμένη ωμή βία

Μπορούμε να μειώσουμε το χρόνο κατά μία δύναμη του n , αν υπολογίζουμε το άθροισμα τη στιγμή που το

σχηματίζουμε. Ιδού ο αλγόριθμος που δίνει ο Bentley, με χρόνο εκτέλεσης ανάλογο του n^2 :

```
bruteForceTwo[X_] := Module[
  {MaxSoFar = 0, L = H = 0, Low = High = 0,
   SubSum = 0,
   n = Length[X], j},
  For[L = 1, L <= n, L++,
   SubSum = 0;
   For[H = L, H <= n, H++, SubSum = SubSum +
    X[[H]]];
   If[SubSum >= MaxSoFar, Low = L; High =
    H];
   MaxSoFar = Max[MaxSoFar, SubSum]
  ]
];
{MaxSoFar, {Low, High}}
]
bruteForceTwo[winnings] // Timing
{0.11 Seconds, {105, {16, 26}}}
```

Αυτό είναι λίγο καλύτερο. Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να βρεθεί η απάντηση όταν η ακολουθία έχει μήκος 1.000:

```
Clear[timeInSeconds]
Solve
```

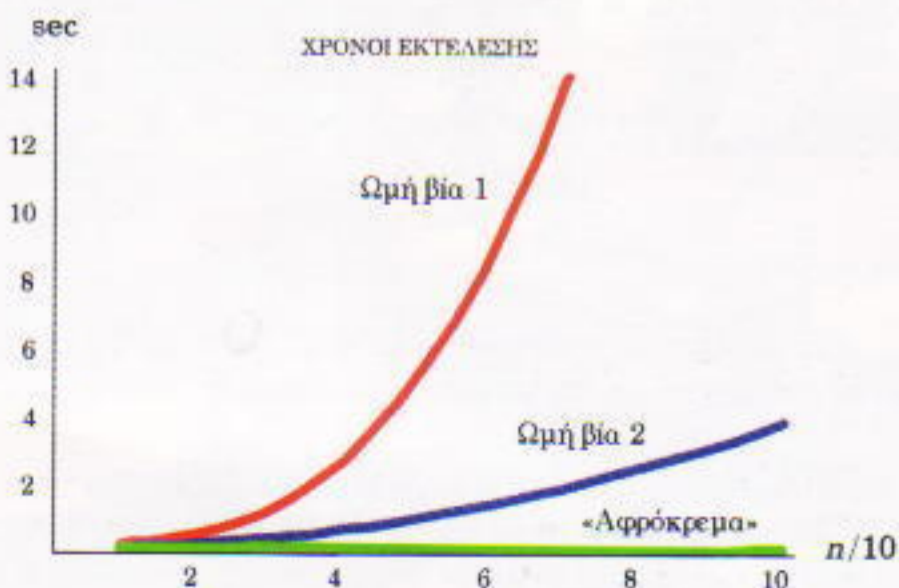
$$\left[\frac{\text{timeInSeconds}}{1000^2} == \frac{.11\text{seconds}}{30^2}, \text{timeInSeconds} \right];$$

```
timeInSeconds
seconds /. First[%]
60
minutes
```

2.03704 minutes.

Η ταχύτητα είναι το παν

Στο επόμενο γράφημα βλέπετε την αύξηση του χρόνου εκτέλεσης συναρτήσει του n για διάφορους αλγόριθμους, από το λιγότερο έως τον περισσότερο αποδοτικό. Η πρόκληση για σας είναι να βρείτε τον πιο αποδοτικό. Θέλω την «αφρόκρεμα» των αλγορίθμων που θα εκτελεστεί σε λιγότερο από 1 sec όταν το n είναι ίσο με 1.000.



Η τέχνη στον υπολογιστή

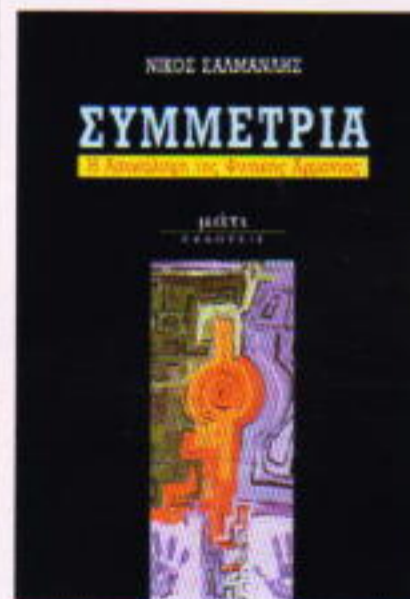
Η εικόνα της Μπέσου που παίζει πόκερ είναι μια πρώτη προσπάθεια του Mark Brennehan να επεκταθεί στις τρεις διαστάσεις. Ο Mark ξεκίνησε χρησιμοποιώντας το λογισμικό Ray Dream Studio για να κατασκευάσει τους τοίχους με τρισδιάστατα στοιχεία, και μετά πρόσθεσε το μπαρ, τις καρέκλες, τα τραπέζια κ.λπ. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε το λογισμικό Poser για να «στήσει» τους παίκτες και να τους μεταφέρει στο Ray Dream Studio. Κατόπιν, δημιούργησε την όμορφη εικόνα της Μπέσου στο Ray Dream Studio ενώνοντας 40 κομμάτια σχεδιασμένα ξεχωριστά. Τα κομμάτια ενώθηκαν με συνδέσμους που επέτρεψαν την τοποθέτηση της Μπέσου στην κατάλληλη πόζα. Με το PhotoShop και το Detailer δημιουργήθηκαν αντικείμενα που προστέθηκαν στις επιφάνειες για να εμπλουτιστεί η εικόνα. Τέλος, συνδέθηκαν τα στοιχεία της σκηνής και καθορίστηκαν 13 πηγές φωτός. Με τη βοήθεια του Ray Tracer προσδιορίστηκε η μορφή κάθε εικονοστοιχείου βάσει όλων των φωτεινών πηγών και αντανακλάσεων. Ο υπολογιστής του Mark, ένας Pentium στα 133 MHz, χρειάστηκε 10 ώρες για να δημιουργήσει την τελική, υψηλής ανάλυσης εικόνα. Ταχύτεροι αλγόριθμοι θα μπορούσαν να προσφέρουν μεγάλη βοήθεια σ' αυτό το πεδίο.

Και τέλος...

Οι υπολογισμοί που στείλατε για το Ιπποπρόβλημα 6 θα παρουσιαστούν στο επόμενο τεύχος. Στο εξής, οι λύσεις του Ιπποπρόβληματος_{n-2} θα εμφανίζονται μαζί με το Ιπποπρόβλημα_n. Αυτό σας δίνει άλλους δύο μήνες περιθώριο πριν στείλετε τις απαντήσεις σας στο drmu@es.uwr.edu. Τις λύσεις των προηγούμενων θεμάτων μπορείτε να τις βρείτε στη διεύθυνση <http://usaco.uwr.edu/cow-culations>. Αν σας ενδιαφέρουν οι διαγωνισμοί με παρόμοια θεματολογία, δείτε τη σελίδα της Ολυμπιάδας Υπολογιστών των ΗΠΑ στη διεύθυνση <http://usaco.uwr.edu>.

Νίκος Σαλμανλής

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ—Η αποκάλυψη της φυσικής αρμονίας



Η παρατήρηση της φύσης, από το αχανές σύμπαν μέχρι τα υποατομικά σωματίδια, οδήγησε στη διαπίστωση της ύπαρξης υψηλής αρμονίας. Χώρος, χρόνος, ύλη, ενέργεια είναι οντότητες που υπακούουν σε καθολικούς νόμους που δημιούργησε η φανερή και κρυφή συμπαντική συμμετρία, η οποία περιγράφεται με γλαφυρό τρόπο στο βιβλίο αυτό.

Ένα βιβλίο για όλες τις βιβλιοθήκες.

Εκδόσεις «Μάτι»

Παρμενίωνος 2, 601 00 Κατερίνη, τηλ.: 0351-31275