

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2000  
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 1  
2.000 ΔΡΧ.

*Βέλτιστη επιλογή και μαθηματικός προγραμματισμός*

- Η φυσική του σκι
- Ο αδύνατος δαίμονας και η κβαντική φύση της θερμότητας
- Συμμετρικές ανισότητες και το θεώρημα Muirhead
- Θερμαίνοντας το νερό από πάνω
- Παιχνίδια με τις πινακίδες κυκλοφορίας
- Οι σύγχρονοι αλεξανδρινοί αστρονόμοι
- Υδραυλικά άλματα στο νεροχύτη
- Οι 64 κύκλοι που εφάπτονται στον κύκλο των εννιά σημείων
- Ο μύθος του Ίκαρου







Μολύβι και μαύρο μελάνι, με ελαφριά επχρωμάτιση. Δωρεά της οικογένειας Neil Phillips, © 1999 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσιγκτον

*Αγόρι πάνω σε έλκηθρο (τέλος της δεκαετίας του 1560), του Jost Amman*

**Τ**ΗΝ ΙΔΙΑ ΣΤΙΓΜΗ ΠΟΥ ΤΟ ΑΓΟΡΙ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΙΚΟΥ ΓΑΙ-  
στρούσε με το έλκηθρό του σε ένα λόφο στη Γερμα-  
νία, ένας άλλος νεαρός, ο Γαλιλαίος (1564-1642), ίσως  
να κατηφόριζε μια πλαγιά στην πίσω πλευρά των Άλ-  
πεων, στην Ιταλία. Πιθανότατα κατά τη διάρκεια μιας  
τέτοιας πεζοπορίας να γεννήθηκε το ενδιαφέρον του  
Γαλιλαίου για τη βραχυστόχρονη, την τροχιά της τα-  
χύτερης κατάβασης από κάποιο σημείο σε ένα άλλο. Ω-  
στόσο, μπορεί απλώς να διασκεδάζε.

Στους αθλητές του αλπικού σκι, του έλκηθρου και  
του μπόμπολεϊ ασκείται μεγάλο πλήθος σύνθετων φυ-  
σικών δυνάμεων, οι οποίες είναι αδύνατον να μελετη-  
θούν κατά τη διάρκεια της αγωνιστικής προσπάθειας.  
Αλλά εσείς μην ανησυχείτε· μπορείτε, απολαμβάνοντας  
τη ζεστή ατμόσφαιρα και την άνεση του χειμερινού σας  
καταλύματος, να ανατρέξετε στη σελίδα 13 για να γνω-  
ρίσετε όλα όσα αντιμετωπίζουν αυτοί οι παράτολμοι α-  
θλητές των πλαγιών.



# QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2000

ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 1



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Συχνά οι μαθητές, στις εξετάσεις ή στο μάθημα, καθώς ακούν την εκφώνηση ενός προβλήματος, χρειάζεται πρώτα να μεταφράσουν τις περιγραφόμενες συνθήκες από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική και έπειτα να προχωρήσουν στη λύση. Καθένα από τα βήματα δεν είναι απλό, και πολλές φορές οι μαθητές αισθάνονται να «γλιστρούν σ' έναν σκοτεινό και δαιδαλώδη λαβύρινθο». Εάν εκείνη τη στιγμή διέθεταν τα κατάλληλα εργαλεία, θα κατάφερναν να αναγνωρίσουν ενδείκτες και να αξιολογήσουν εναλλακτικές οδούς για να διαγράψουν την απαιτούμενη πορεία προς τη λύση. Έτσι εσείς, για να γνωρίσετε μερικά μυστικά που θα σας βοηθήσουν να ξεπερνάτε τους γλωσσικούς φραγμούς των εκφωνήσεων, γυρίστε στη σελίδα 39 και διαβάστε το —διασκεδαστικό, έτσι κι αλλιώς— άρθρο «Η καλύτερη επιλογή».

## ΑΡΘΡΑ

- 6** Εσωτερικοί κύκλοι  
**Το θεώρημα Feuerbach**  
*V. Protasov*
- 13** Αλπικό τοπίο  
**Λύνοντας τις εξισώσεις του σπάλμ**  
*A. Abrikosov*
- 22** Μαθηματική εξοχότητα  
**Carl Friedrich Gauss**  
*S. Gindikin*
- 44** Ο δαίμων του Maxwell  
**Βρίσκοντας την κατεύθυνση στο χάος**  
*V. Mityugov*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2** **Ο κόσμος των κβάντων**  
*Ο μύθος του Ίκαρου*
- 5** **Σπαζοκεφαλιές**
- 29** **Στο μαυροπίνακα I**  
*Η αλεξανδρινή αστρονομία σήμερα*
- 33** **Στο εργαστήριο I**  
*Ένας αβύθιστος δίσκος*
- 35** **Πώς λύνεται;**
- 36** **Καλειδοσκόπιο**  
*Επιστροφή σε προηγούμενη κατάσταση*
- 39** **Στο μαυροπίνακα II**  
*Η καλύτερη επιλογή*
- 49** **Στο εργαστήριο II**  
*Θερμαίνοντας το νερό από πάνω*
- 53** **Απόψεις**  
*Το παιχνίδι που προδιέγραψε την πορεία του Σύμπαντος*
- 56** **Στο μαυροπίνακα III**  
*Συμμετρικές ανισότητες*
- 62** **Στα πεδία της φυσικής**  
*Ένα ζήτημα πολυπλοκότητας*
- 67** **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 71** **Με λίγη φαντασία**  
*Ο Landau και οι πινακίδες κυκλοφορίας*



# Ο μύθος του Ίκαρου

«Πέστε μου τι μπορούσαμε εμείς να κάνουμε,  
κι όταν νομίζαμε ότι ήμασταν πουλιά...»

—Μέλπω Αξιώτη

**Ο**Ι ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΠΕΡΙΟΡΙΖΟΥΝ σε μεγάλο βαθμό τις φυσικές ικανότητες του ανθρώπου —με πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα την αδυναμία μας να πετάξουμε, ακόμη κι αν κινήσουμε τα χέρια μας με εξαιρετική δύναμη και επιμονή. Το πρόβλημα όμως δεν είναι απλώς ότι μας λείπουν οι φτερούγες. Αυξήστε αναλογικά τις διαστάσεις ενός φασιανού σ' αυτές του ανθρώπου, και το πουλί θα πέσει στο έδαφος σαν πέτρα. Ή πάρτε για παράδειγμα τον Ίκαρο. Στην αληθοφανή εικόνα ενός βιβλίου μυθολογίας που διάβασα μικρός, κάθε φτερούγα προσαρτημένη στους ώμους του αγοριού είχε μήκος περίπου ίσο με το ύψος του, ενώ το πλάτος της ήταν τέσσερις φορές μικρότερο —θύμιζε αρκετά τις όλο χάρη αναλογίες των χελιδονιών. Αλλά δυστυχώς, για να δραπετεύσουν από την Κρήτη με τέτοιες φτερούγες ο Ίκαρος και ο Δαίδαλος θα έπρεπε να κινούν τα χέρια τους παράγοντας ισχύ περίπου 1,5 ίππο —τετραπλάσια της μέγιστης ισχύος που μπορεί να αποδώσει ένας καλογυμνασμένος αθλητής.

Τα φυσικά μεγέθη που αφορούν την πτήση ενός σώματος είναι το βάρος, το σχήμα και η διαθέσιμη ισχύς του. Η πλέον προφανής απαίτηση, λοιπόν, είναι η ύπαρξη δυναμικής άνωσης η οποία θα αντισταθμίζει το βάρος. Η συγκεκριμένη δύναμη οφείλεται στην παρουσία του

ατμοσφαιρικού αέρα και την κίνηση του σώματος μέσω αυτού. Ο αέρας έχει βάρος, και στο επίπεδο της θάλασσας ασκεί πίεση προς όλες τις κατευθύνσεις περίπου  $10 \text{ N/cm}^2$ . Έτσι, για να ανυψωθεί ένα σώμα, πρέπει η πίεση του αέρα στο επάνω μέρος του να είναι μειωμένη, ώστε η ολική πίεση να σπρώχνει το σώμα προς τα πάνω. Τόσο τα πουλιά όσο και τα αεροπλάνα το καταφέρνουν χάρη στα κατάλληλα σχεδιασμένα φτερά τους και την κίνησή τους προς τα εμπρός. Το αεροδυναμικό σχήμα του φτερού αναγκάζει τον αέρα να κινείται ταχύτερα στην πάνω πλευρά του παρά στην κάτω, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ολική (δυναμική) πίεση να ωθεί το σώμα προς τα πάνω. Η τιμή της μάλιστα είναι ανάλογη της πυκνότητας του αέρα και του τετραγώνου της ταχύτητας κίνησης —βασικός νόμος της φυσικής, ο οποίος προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Άρα, κάθε φορά που διπλασιάζεται η ταχύτητα πτήσης, η δυναμική πίεση τετραπλασιάζεται.

Με δεδομένη δυναμική πίεση, είναι προφανές ότι τα φτερά πρέπει να διαθέτουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη επιφάνεια. Για παράδειγμα, όταν η δυναμική πίεση είναι περίπου  $0,007 \text{ N/cm}^2$  (που επιτυγχάνεται όταν το σώμα κινείται σε σχέση με τον αέρα με ταχύτητα  $65 \text{ km/h}$ ) και το εμβαδόν της επιφάνειας του φτε-

ρού είναι  $2.600 \text{ cm}^2$ , αναπτύσσεται πάνω του δυναμική άνωση ίση περίπου με  $18 \text{ N}$  —ικανή να ανυψώσει ένα πουλί μέσου βάρους. Εδώ μπορεί να συμβεί μια βολική ανταλλαγή: η αναγκαία δυναμική άνωση μπορεί να επιτευχθεί με μικρότερη επιφάνεια φτερούγων εάν το πτηνό αυξήσει την ταχύτητά του, και αντίστροφα. Τα πουλιά χρησιμοποιούν αυτό το στοιχείο ανάλογα με τις ανάγκες τους. Για παράδειγμα, ο ερωδιός που έχει μεγάλα λεπτά πόδια για να βαδίζει πρέπει να πετά με μικρή ταχύτητα, ώστε να μην τα τραυματίζει καθώς προσγειώνεται· άρα οι φτερούγες του πρέπει να έχουν μεγάλο άνοιγμα. Ο φασιανός, από την άλλη, κάνει ελιγμούς ανάμεσα σε χαμηλή βλάστηση και οι μεγάλες φτερούγες θα του δημιουργούσαν πρόβλημα· προκειμένου να καταφέρνει να πετά με τις κοντές και δυνατές φτερούγες του πρέπει η ταχύτητα πτήσης του να είναι μεγάλη. Για να αποκτήσετε μια εικόνα, ένας μέσος ερωδιός ζυγίζει περίπου  $30 \text{ N}$  και οι φτερούγες του έχουν εμβαδόν  $5.000 \text{ cm}^2$ , ενώ το βάρος ενός τυπικού φασιανού είναι συγκριτικά τριπλάσιο σε σχέση με την επιφάνεια των δικών του φτερούγων. Ο φασιανός όμως πετά με ταχύτητα  $90 \text{ km/h}$ , σχεδόν διπλάσια από εκείνη του ερωδιού.

Τώρα, το πώς τα πουλιά κατορθώνουν να προωθούνται στον αέρα



χωρίς ένα είδος προπέλας δεν είναι προφανές. Το μυστήριο διαλεύκανε στις αρχές του 19ου αιώνα ο George Cayley, πατέρας του σύγχρονου αεροπλάνου. Τα πουλιά ως προωθητικό μέσο έχουν τα «πρωτεύοντα φτερά», που καλύπτουν το μισό εξωτερικό μέρος των φτερούγων. Αυτά μεταβάλλουν το σχήμα και τη θέση τους ανάλογα με την κίνηση των φτερούγων: κατά την κάθοδό τους κινούνται προς τα κάτω και εμπρός, κατά την άνοδό τους προς τα πάνω και πίσω. Τα «πρωτεύοντα φτερά», με βάση τις ίδιες φυσικές αρχές που λειτουργεί η υπόλοιπη φτερούγα, δημιουργούν κυρίως ωστική δύναμη παρά δυναμική άνοση.

Όπως για όλες τις φυσικές δραστηριότητες, έτσι και για το πέταγμα δαπανάται ενέργεια. Ένα πουλί που έχει κατορθώσει να πετά οριζόντια, αν δεν δεχόταν τριβή θα μπορούσε να γλιστρά στον αέρα για πάντα, χωρίς να χρειαστεί να κινήσει ούτε έναν μυ. Χρειάζεται όμως να κινεί διαρκώς πάνω-κάτω τις φτερούγες του και να δαπανά ενέργεια ακριβώς επειδή υπάρχει η αντίσταση του αέρα. Στα αεροσκάφη, ανάλογα βέβαια και με το αεροδυναμικό σχήμα τους, η αντίσταση αντιστοιχεί περίπου στο 1/20 της δυναμικής άνοσης. Για να αντισταθμίσει την αντίσταση, ένας ιπτάμενος ερωδιός πρέπει να δαπανά ενέργεια με τον φειδωλό ρυθμό 0,02 του ίππου. Τα βαρύτερα πουλιά με τις ίδιες αναλογίες χρειάζεται να ξοδεύουν ακόμη περισσότερη ισχύ ανά μονάδα βάρους τους. Αν τετραπλασιάζονταν οι διαστάσεις ενός πουλιού ενώ διατηρούνταν όμοιο το σχήμα του, το βάρος και ο όγκος του θα αυξάνονταν κατά 64 φορές, ενώ η ισχύς που απαιτείται για να πετάξει θα ήταν 128 φορές μεγαλύτερη. Ο μόνος τρόπος λοιπόν να παρακάμψουν τα πουλιά αυτό το πρόβλημα είναι να μεταβάλλουν το σχήμα τους. Για παράδειγμα, διατηρώντας σταθερό τον ολικό όγκο (άρα, και το βάρος) αλλά τετραπλασιάζοντας την επιφάνεια των φτερούγων τους, τα πουλιά θα μπορούσαν να πετάξουν με τη μισή ισχύ. Βέβαια, στις μεγάλες μεταναστευτικές πτήσεις τους, εξοικονο-

μούν ενέργεια πετώντας σε σχηματισμούς στους οποίους καθένα εκμεταλλεύεται το ανοδικό ρεύμα αέρα που αφήνει πίσω του το μπροστινό πουλί, και καταλαμβάνουν εκ περιτροπής τις μπροστινές θέσεις. Όταν όμως πετούν κατά μόνας, η απαιτούμενη ισχύς καθορίζεται αναπόφευκτα από το βάρος και το σχήμα τους.

Από βιολογική άποψη τώρα, διαπιστώνουμε πως, συγκριτικά με το βάρος τους, τα έμβια όντα δεν έχουν τόσο μεγάλη απόδοση στην παραγωγή ωφέλιμης ισχύος όσο οι μηχανές εσωτερικής καύσης. Ο άνθρωπος οργανισμός μπορεί να επιτύχει μέγιστη μηχανική ισχύ ίση μονάχα με το 0,005 εκείνης που παράγει μια μηχανή του ίδιου βάρους. Για να παράγει ένα ανθρώπινο όν ισχύ 12 ίππων —που ισοδυναμεί με την ισχύ της μικρής μηχανής του αεροπλάνου με το οποίο πέταξαν οι αδελφοί Ράιτ το 1933—, θα πρέπει να έχει τις διαστάσεις ελέφαντα!

Ωστόσο, το πρόβλημα της μειωμένης σωματικής ισχύος περιορίζεται καθώς πηγαίνουμε σε ολοένα μικρότερα μεγέθη. Τα ελαφρύτερα ζώα παράγουν περισσότερη ισχύ ανά μονάδα βάρους τους συγκριτικά με τα βαρύτερα. Ας ξεκινήσουμε από ένα άλογο βάρους 2.000 N (200 kp) το οποίο μπορεί να αποδώσει ισχύ 1 ίππου. Κάθε φορά που το βάρος του ζώου ελαττώνεται κατά 50%, η ισχύς που μπορεί να διαθέσει για κινητήριο έργο ελαττώνεται μονάχα κατά 40%. Έτσι, φτάνοντας σε τιμές βάρους μικρότερες των 0,3 N (30 p), διαπιστώνουμε ότι 3.000 ποντίκια, τα οποία ζυγίζουν όσο περίπου ένας άνθρωπος, μπορούν να παρέχουν ισχύ εννέα φορές περισσότερη απ' αυτόν. Πιθανόν να σας ξαφνιάζει, αλλά είναι αναμενόμενο. Σε αντίθεση με τις περισσότερες μηχανές, οι μύες των ζώων παράγουν περισσότερο θερμότητα παρά ωφέλιμο έργο. Εφόσον όμως ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας δεν μπορεί να υπερβαίνει εκείνον της ψύξης του ζώου, αφού δε η ψύξη επιτυγχάνεται μέσω του δέρματος, τα ζώα παράγουν θερμότητα και μηχανικό έργο ανάλογα σχεδόν με το εμβαδόν της ε-

πιφάνειάς τους. Συνεπώς, το πηλίκο της παραγόμενης ισχύος διά του βάρους του είναι περίπου ίσο με το πηλίκο του εμβαδού της επιφάνειας διά του όγκου του. Εξυπακούεται λοιπόν ότι το πηλίκο αυτό είναι μεγαλύτερο στα μικρότερα όντα παρά στα μεγαλύτερα —άρα, τα ελαφρύτερα όντα έχουν πλεονέκτημα όσον αφορά την ικανότητά τους να πετούν. Η Φύση φαίνεται πως έχει εκτιμήσει επαρκώς αυτή την πάλη ανάμεσα στη φυσική και τη βιολογία. Έτσι, παρότι τα πουλιά έχουν εμπειρία εκατό εκατομμυρίων ετών στο πέταγμα, το βαρύτερο πτηνό ικανό να πετά, ο αγριόγαλος, σπανίως ξεπερνά τα 15 kp. Τα ακόμη βαρύτερα πουλιά που πλανάρονται στον αέρα, όπως ο γύπας για παράδειγμα, ανυψώνονται εκμεταλλευόμενα τις ανοδικές θερμές στήλες αέρα —δεν μπορούν από μόνα τους να μεταφέρουν ολόκληρο το βάρος τους. Η στρουθοκάμηλος πάλι, που ζυγίζει περίπου 135 kp, ουδέποτε ανασηκώνεται από το έδαφος· ως μέσο άμυνας έχει επιλέξει το μεγάλο της μέγεθος, όχι το πέταγμα.

Ο Henry Kremer, βρετανός μεγαλοβιομήχανος, παρατηρώντας ότι δεν υπάρχουν πτηνά που το βάρος τους να υπερβαίνει τα 90 kp, θεώρησε πως τα χρήματά του θα παρέμεναν ασφαλή για πολλά χρόνια όταν, το 1959, προσέφερε χρηματικό βραβείο 5.000 αγγλικών λιρών σε όποιον κατόρθωνε να πετάξει με τη βοήθεια της δικής του και μόνο δύναμης. Το 1973, έπειτα από πολλές σοβαρές αλλά ανεπιτυχείς προσπάθειες διεθνώς, το βραβείο Kremer είχε ήδη φτάσει τις 52.000 λίρες. Σύμφωνα με τους αυστηρούς όρους του βραβείου, τους οποίους είχε θέσει η Βασιλική Αεροναυτική Εταιρεία της Αγγλίας, το νικητήριο σκάφος θα έπρεπε να εκτελέσει μια πτήση σχήματος οκτώ γύρω από δύο πυλώνες που απείχαν μεταξύ τους ένα μίλι, χωρίς να αγγίξει το έδαφος, και να περάσει τη γραμμή αφετηρίας και τερματισμού σε ύψος τουλάχιστον τριών μέτρων. Η ισχύς, ασφαλώς, θα έπρεπε να παράγεται από τον άνθρωπο στη θέση του πιλότου.

Στις 23 Αυγούστου 1977, λοιπόν,



στο Σάφτερ της Καλιφόρνιας, ένας αθλητικός νεαρός ανέβηκε σε ένα εύθραυστο, άκομπο αεροσκάφος, το «Γκόσαμερ Κόντορ», προσέδεσε τα πόδια του σε δύο πετάλια που συνδέονταν με προπέλα, και κέρδισε το βραβείο Kremer. Η πτήση του διήρκεσε περίπου επτάμιση λεπτά.

Ο σχεδιαστής του αεροσκάφους Paul McCready είχε κατορθώσει να δημιουργήσει μια εκπληκτικά ελαφριά κατασκευή με εξαιρετικά μεγάλο άνοιγμα πτερύγων. Για να είναι οι πτέρυγες όσο το δυνατόν ελαφρύτερες, τις κατασκεύασε από μεμβράνες mylar δεμένες με λεπτό ατσάλοσυρμα σε αλουμινένιους ορθοστάτες, ενώ το πίσω άκρο ήταν φτιαγμένο από χαρτόνι. Ολόκληρο το αεροσκάφος, μαζί με τα καύσιμα, ζύγιζε περίπου 32 kp (συν 54 kp το βάρος του πλότου). Η κατασκευή είχε ύψος περίπου 1,70 m, ενώ οι «πτερούγες» της πλάτος 3 m και μήκος 30 m. Η Μητέρα Φύση ουδέποτε δημιούργησε ένα πλάσμα ικανό να πετά και του οποίου η διάπλωση να εμφανίζει τέτοια δυσαναλογία! Αν θέλετε μια αριθμητική σύγκριση, ο λόγος του εμβαδού των πτερούγων προς το εμβαδόν του σώματος μόλις που υπερβαίνει το 1 για το φασιανό, το 5 για τον ερωδιό και το 13 για τον γύπα. Για το «Γκόσαμερ Κόντορ» (μαζί με τον πλότο του), ο αντίστοιχος λόγος ήταν 90.

Ο άνθρωπος ανταποκρίνεται πλέον στην ανάγκη πτήσης με τα σύγχρονα μέσα αερομεταφοράς. Στα όνειρά μας, όμως, όταν χρειάζεται να πετάξουμε ψηλά για να αποφύγουμε τον εχθρό ή για να φτάσουμε την αγαπημένη μας, το καταφέρνουμε μόνοι μας, με τις δικές μας σωματικές δυνάμεις, όπως τα πουλιά. Θα έμοιαζε με εφιάλτη, βέβαια, να βλέπαμε τον εαυτό μας με πτερούγες 30 μέτρων στους ώμους, ωστόσο αυτή την απαίτηση προβάλλει η Μητέρα Φύση για να μπορούμε κι εμείς να πετάξουμε σαν τα πουλιά.

—Alan Lightman

Ο Alan Lightman είναι καθηγητής αστροφυσικής στο MIT. Στα ελληνικά κυκλοφορούν τα βιβλία του Τα όνειρα του Αϊνστάιν και Η ώρα των άστρων.

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμφωνη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντιπροσέλλων εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουντάκτης  
Sergey Ivanov

Αντιπροσέλλουσα αρχιουντάκτρια  
Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων  
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχιουντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Yevgeniya Morozova, Αρχιουντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Houry, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής  
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός,

Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, Γιώργος Κατσιλιέρης -φυσικός,

Αθηνά Τσαγκογιώργα -φυσικός και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Γραμματεία  
Κ. Παναδοπούλου

Τυπογραφικές διορθώσεις  
Ν. Μαρινού

Τυποτεχνική επιμέλεια  
Θ. Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστηρίου  
Μ. Μάραλη

Ειδικός συνεργάτης: Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση  
Αβ. Μαχαιρίδης

Φιλμ, μοντάζ  
Χρ. Μήτσος

Εκτύπωση  
Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία  
Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, δημοσίαιο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.  
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ισούρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

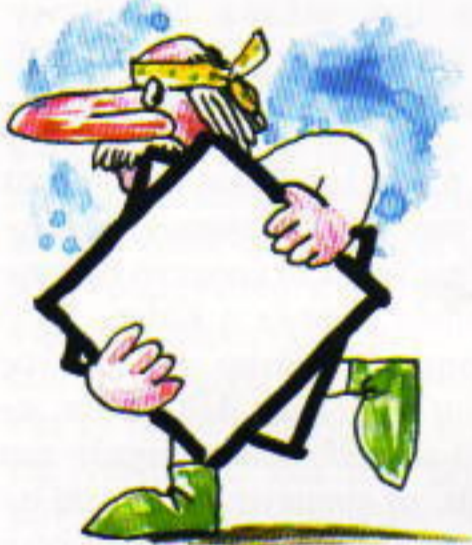
Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για ιδιώτες, 18.500 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.



# Για να περνά η ώρα

Σ171

Επιστροφές μπουκαλιών. Στα πλαίσια ενός προγράμματος ανακύκλωσης, όσοι επιστρέφουν άδεια μπουκάλια από γάλα μπορούν να τα ανταλλάξουν με γερμάτα. Συγκεκριμένα, τα 4 άδεια μπουκάλια ανταλλάσσονται με 1 γερμάτο. Πόσα μπουκάλια γάλα θα πει μια οικογένεια που συγκέντρωσε 24 άδεια μπουκάλια;

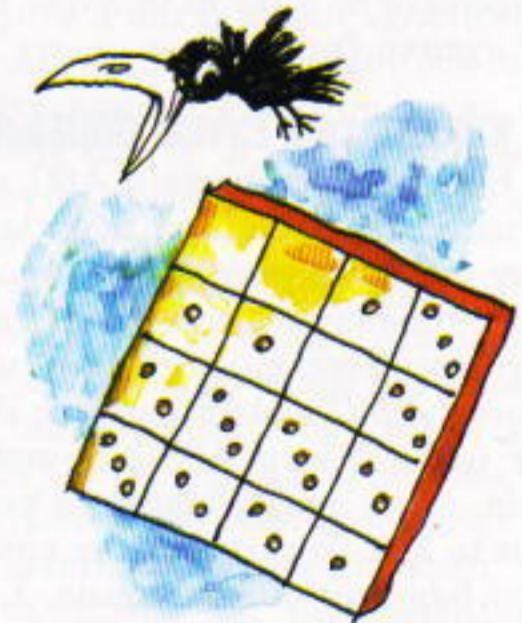


Σ172

Η κάλυψη του πολυγώνου. Είναι δυνατόν να καλύψουμε με τετράγωνα ένα πολύγωνο χωρίς ορθές γωνίες; (Τα τετράγωνα δεν είναι υποχρεωτικά ίσα και επιτρέπεται να τέμνονται.)

Σ173

Η θεωρία του ντόμινο. Οκτώ διαφορετικά ντόμινο βρίσκονται στο επίπεδο. Στη διπλανή εικόνα δεν φαίνεται κανένα από τα περιγράμματά τους. Σχεδιάστε τα περιγράμματα αυτών των ντόμινο.



Σ174

Ένα χαμηλό τρίγωνο. Ένα τρίγωνο έχει και τα τρία ύψη του μικρότερα του 1. Μπορεί το εμβαδόν του να είναι μεγαλύτερο των 1.000 τετραγωνικών μονάδων;

Σ175

Κινούμενα τοπία. Όταν κοιτάτε έξω από το παράθυρο ενός κινούμενου τρένου, οτιδήποτε υπάρχει στο τοπίο φαίνεται να κινείται αντίθετα στη φορά της δικής σας κίνησης. Όμως, όσο μακρύτερα βρίσκεται ένα αντικείμενο τόσο μικρότερη σας φαίνεται η ταχύτητά του. Γιατί;





# Το θεώρημα Feuerbach

Μελέτη των εγγεγραμμένων και παραγεγραμμένων κύκλων τριγώνου

V. Protasov

**Τ**Ο ΠΡΩΤΟ ΗΜΙΣΥ ΤΟΥ ΠΡΟΗΓΟΥ-  
μενου αιώνα, ο γερμανός μα-  
θηματικός Karl Wilhelm Feuer-  
bach απέδειξε ένα από τα κομ-  
ψότερα θεωρήματα της επίπεδης γε-  
ωμετρίας. Το παρόν άρθρο είναι α-  
φιερωμένο σε αυτό το θεώρημα και  
σε σχετικά ζητήματα.

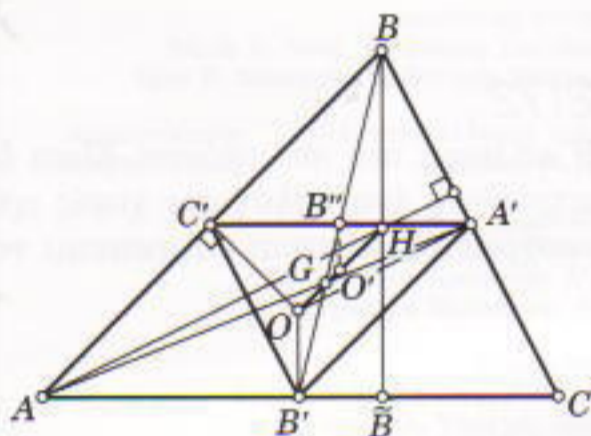
## Ο κύκλος των εννέα σημείων

Θεωρούμε ένα τρίγωνο  $ABC$ , και  
έστω  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  τα μέσα των πλευ-  
ρών του. Το τρίγωνο  $A'B'C'$  ονομά-  
ζεται μεσοτρίγωνο του  $ABC$ . Ο πε-  
ριγεγραμμένος κύκλος  $\gamma$  του τρι-  
γώνου  $A'B'C'$  καλείται κύκλος Eu-  
ler του τριγώνου  $ABC$ . Στη συνέ-  
χεια, όποτε αναφερόμαστε σε έναν  
κύκλο  $XYZ$  θα εννοούμε τον κύκλο  
που διέρχεται από τα σημεία  $X$ ,  $Y$   
και  $Z$ . Πρώτα θα εξετάσουμε λίγες  
εισαγωγικές προτάσεις. Υποθέτουμε  
ότι οι αναγνώστες είναι εξοικειω-  
μένοι με τον κύκλο Euler (ή κύκλο  
των εννέα σημείων) και με την έν-  
νοια της ομοιοθεσίας. Διαφορετικά,  
μπορείτε να ανατρέξετε σε ένα εγ-  
χειρίδιο ανώτερης ευκλείδειας γε-  
ωμετρίας. Οι συμβολισμοί που θα  
χρησιμοποιήσουμε παρουσιάζονται  
στο Σχήμα 1.

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε ότι:

(I) το κέντρο του περιγεγραμμέ-  
νου κύκλου ενός τριγώνου βρίσκε-  
ται στο σημείο τομής των υψών του  
μεσοτρίγωνου του.

(II) η ακτίνα του κύκλου  $\gamma$  ισού-



Σχήμα 1

ται με το ήμισυ της ακτίνας του κύ-  
κλου  $ABC$ .

(III) τα κέντρα βάρους (τα σημεία  
τομής των διαμέσων) των τριγώνων  
 $ABC$  και  $A'B'C'$  συμπίπτουν, και τα  
τρίγωνα  $ABC$  και  $A'B'C'$  είναι ομοι-  
όθετα ως προς το κοινό κέντρο βάρους  
με λόγο ομοιοθεσίας  $-1/2$ .

(IV) (θεώρημα Euler) σε κάθε τρί-  
γωνο  $ABC$  το ορθόκεντρο  $H$ , το κέν-  
τρο  $O$  του κύκλου  $ABC$  και το κέν-  
τρο βάρους  $G$  ανήκουν στην ίδια  
ευθεία (ευθεία Euler), και ισχύει  
 $2OG = GH$ .

(V) το κέντρο του κύκλου Euler  
του τριγώνου  $ABC$  συμπίπτει με το  
μέσο του τμήματος  $OH$ .

**Υπόδειξη.** Η κάθετη στο τμήμα  
 $A'C'$  στο σημείο  $B''$  τέμνει την ευ-  
θεία  $OH$  στο σημείο  $O'$  για το οποίο  
έχουμε ότι  $OG/GO' = B'G/GB'' =$   
 $2/1$  και, άρα,  $B''G = (1/2)B'G$ .

Ομοίως, οι άλλες μεσοκάθετοι του  
 $A'B'C'$  διέρχονται από το σημείο  $O'$ .

Γιατί ο κύκλος Euler ονομάζεται  
κύκλος των εννέα σημείων; Η εξή-  
γηση δίδεται από το επόμενο θεώρη-  
μα, το οποίο γνώριζε ο Euler.

**Θεώρημα 1.** Έστω  $\gamma$  ο κύκλος  
Euler του τριγώνου  $ABC$ . Τότε, ε-  
κτός από τα μέσα των πλευρών του  
τριγώνου, τα επόμενα έξι σημεία α-  
νήκουν σε αυτό τον κύκλο: τα ίχνη  
των υψών του τριγώνου και τα μέ-  
σα των τμημάτων που συνδέουν τις  
κορυφές του με το ορθόκεντρο.

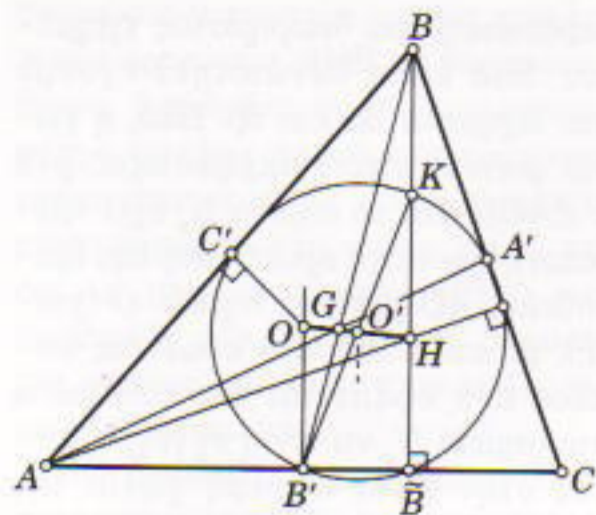
Μπορείτε να αποδείξετε αυτό το  
θεώρημα λύνοντας την επόμενη ά-  
σκηση.

**Άσκηση 2.** Αποδείξτε ότι αν  $\tilde{B}$   
είναι το ίχνος του ύψους που φέ-  
ρουμε από την κορυφή  $B$  και αν η  
ευθεία  $B'O'$  τέμνει την  $\tilde{B}\tilde{B}$  στο ση-  
μείο  $K$ , τότε  $BK = KH = B'O$  και  
 $B'O' = O'K$  (Σχήμα 2) (χρησιμοποι-  
ήστε την Άσκηση 1 —τα μέρη III και  
IV).

Από την Άσκηση 2 έπεται ότι η  
 $B'K$  είναι διάμετρος του κύκλου  
Euler. Άρα, τα σημεία  $\tilde{B}$  και  $K$  ανή-  
κουν σε αυτό τον κύκλο και, επο-  
μένως, το θεώρημα αποδείχθηκε.

Στο άρθρο δεν πρόκειται να χρη-  
σιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του κύ-  
κλου των εννέα σημείων που απο-  
δεικνύονται στις Ασκήσεις 1 και 2.  
Όμως, συνιστούμε να ολοκληρώσε-  
τε αυτές τις ασκήσεις για να γνω-  
ρίσετε καλύτερα το αντικείμενο του  
οποίου τις βαθύτερες ιδιότητες ανα-  
λύουμε σε αυτό το άρθρο.





Σχήμα 2

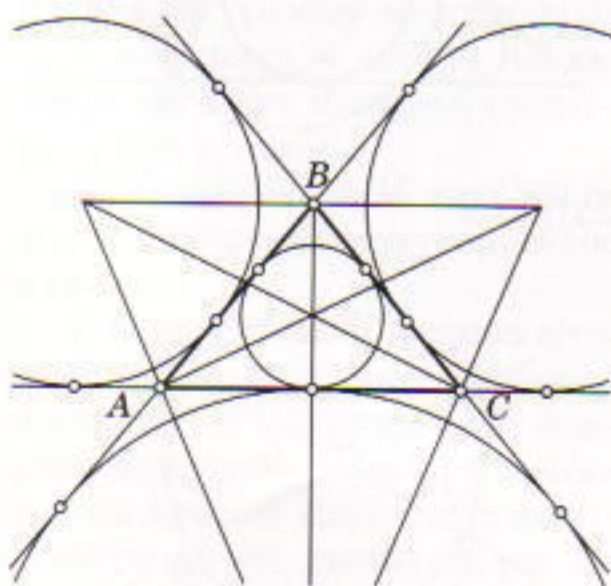
## Το θεώρημα Feuerbach

Υπενθυμίζουμε ότι ο παραγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $ABC$  που αντιστοιχεί στην πλευρά  $AB$  (ή στην κορυφή  $C$ ) είναι ο κύκλος που εφάπτεται στην  $AB$  και στις προεκτάσεις των πλευρών  $AC$  και  $BC$ . Κάθε τρίγωνο έχει τρεις παραγεγραμμένους κύκλους. Το κέντρο του παραγεγραμμένου κύκλου που αντιστοιχεί στην κορυφή  $C$  είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας  $C$  και των διχοτόμων των εξωτερικών γωνιών  $A$  και  $B$  του τριγώνου  $ABC$  (οι αναγνώστες μπορούν να το αποδείξουν).

Άρα, εάν τρεις ευθείες σχηματίζουν ένα τρίγωνο, υπάρχουν τέσσερις ακριβώς κύκλοι που εφάπτονται και στις τρεις ευθείες (Σχήμα 3).

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το κύριο θεώρημα του άρθρου.

**Θεώρημα Feuerbach.** Ο κύκλος των εννέα σημείων εφάπτεται τόσο στον εγγεγραμμένο κύκλο όσο και σε όλους τους παραγεγραμμένους



Σχήμα 3

κύκλους ενός τριγώνου.

Στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι ο κύκλος Euler στην πραγματικότητα δεν εφάπτεται μόνο στους τέσσερις προηγούμενους κύκλους, αλλά και σε εξήντα ακόμη κύκλους που συνδέονται με το τρίγωνο.

## Το θεώρημα τμήματος

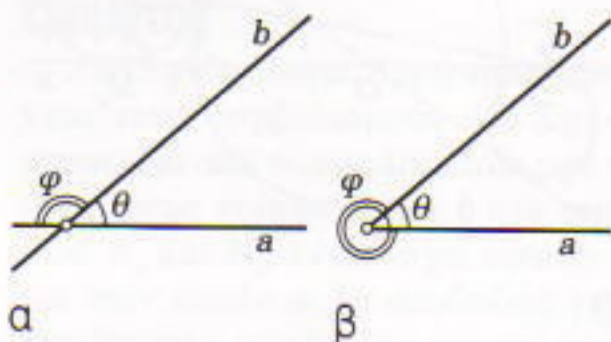
Η ανάλυσή μας θα διευκολυνθεί αν επαναπροσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο μιλάμε για γωνίες και τόξα. Διατυπώνουμε λοιπόν τους επόμενους ορισμούς.

**Ορισμός 1.** Η γωνία μεταξύ δύο διαφορετικών ευθειών  $a$  και  $b$  που τέμνονται στο σημείο  $O$  είναι η γωνία κατά την οποία πρέπει να στρέψουμε αριστερόστροφα την ευθεία  $a$  έως ότου συμπέσει με την ευθεία  $b$  (μια τέτοια γωνία ονομάζεται συχνά προσανατολισμένη γωνία).

Στο Σχήμα 4α, η γωνία μεταξύ των ευθειών  $a$  και  $b$  είναι  $\theta$  και η γωνία μεταξύ των  $b$  και  $a$  είναι  $\varphi$  (προφανώς,  $\theta + \varphi = \pi$ ). Με αυτό τον ορισμό της γωνίας γίνεται φανερό ποια από τις δύο παραπληρωματικές γωνίες χρησιμοποιούμε σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση. Οι γωνίες τις οποίες σχηματίζουν δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζονται με παρόμοιο τρόπο. Στο Σχήμα 4β, η γωνία μεταξύ των ημιευθειών  $a$  και  $b$  είναι  $\theta$  ενώ η γωνία μεταξύ των ημιευθειών  $b$  και  $a$  είναι  $\varphi$  (σε αυτή την περίπτωση  $\theta + \varphi = 2\pi$ ).

**Ορισμός 2.** Το τόξο  $AB$  ενός δεδομένου κύκλου είναι το τόξο που διαγράφει ένα σημείο κινούμενο επί του κύκλου αριστερόστροφα, από το  $A$  στο  $B$ .

Δύο σημεία διαιρούν τον κύκλο σε δύο τόξα. Με αυτό τον ορισμό είναι φανερό σε ποιο από τα δύο τόξα αναφερόμαστε. Είναι προφανές ότι



Σχήμα 4

ολόκληρος ο κύκλος αποτελείται από το τόξο  $AB$  και το τόξο  $BA$ .

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο του τόξου  $AB$  ενός δεδομένου κύκλου είναι η γωνία μεταξύ των ημιευθειών  $OA$  και  $OB$ , όπου  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου, ενώ το μέτρο του τόξου  $BA$  ενός δεδομένου κύκλου είναι η γωνία μεταξύ των ημιευθειών  $OB$  και  $OA$ . Επομένως,  $\text{τόξο } AB + \text{τόξο } BA = 2\pi$ .

Διατυπώνουμε τώρα ένα θεώρημα που θα είναι εξαιρετικά σημαντικό για τη συνέχεια της ανάλυσής μας, αλλά που έχει ενδιαφέρον και από μόνο του.

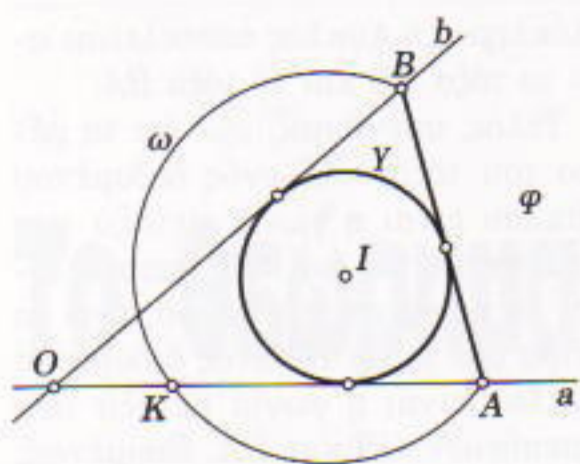
**Θεώρημα 2 (θεώρημα τμήματος).** Δίδεται ένας αριθμός  $\varphi$ , όπου  $0 < \varphi < 2\pi$ , και ένας κύκλος  $\gamma$  με κέντρο το  $I$ , εγγεγραμμένος στη γωνία που σχηματίζουν δύο ευθείες  $a$  και  $b$  (Σχήματα 5-8). Επιλέγουμε τυχαία σημεία  $A$  και  $B$  έτσι ώστε η ευθεία  $AB$  να εφάπτεται του κύκλου  $\gamma$  (Σχήματα 5-7), και φέρουμε έναν κύκλο  $\omega$  που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$  τέτοιον ώστε το τόξο  $AB = \varphi$ . Τότε, υπάρχουν δύο σταθεροί κύκλοι (ανεξάρτητοι από τις θέσεις των  $A$ ,  $B$  και  $\omega$ ) που εφάπτονται στις ευθείες  $AO$  και  $OB$  και στον κύκλο  $\omega$ .

Αν ο ένας από τους κύκλους εφάπτεται με τις ευθείες στα σημεία  $N_a$  και  $N_b$  και ο άλλος στα σημεία  $M_a$  και  $M_b$ , τότε  $\angle AN_aI = \varphi/4$  και  $\angle IM_bO = (2\pi - \varphi)/4$  (και συνεπώς το τρίγωνο  $N_aIM_b$  είναι ορθογώνιο).

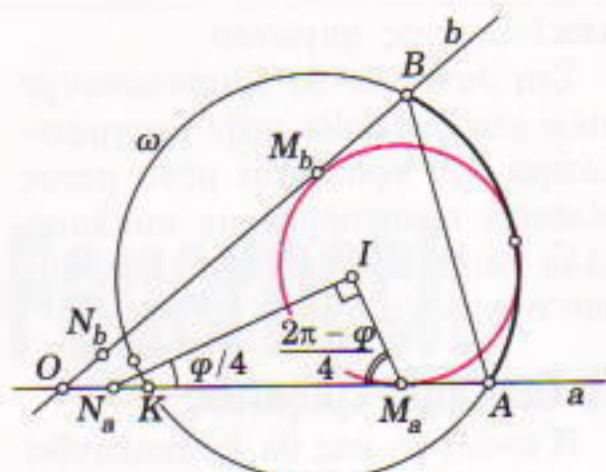
Είναι οπωσδήποτε δύσκολο να καταλάβουμε μια τόσο περίπλοκη πρόταση. Για να αρχίσουμε να την εξετάζουμε, ας φανταστούμε ότι τα σημεία  $A$  και  $B$  κινούνται επί των ημιευθειών  $OA$  και  $OB$  έτσι ώστε ο κύκλος  $\gamma$  να παραμένει εγγεγραμμένος στο τρίγωνο  $AOB$  (Σχήμα 5α). Σε έναν κύκλο που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$  κατασκευάζουμε ένα τόξο μήκους  $\varphi$ , εξωτερικά του τριγώνου  $AOB$  (αυτό το τόξο, μαζί με το τμήμα  $AB$ , φράσσει τη ροζ περιοχή στο Σχήμα 9). Τότε, ο μεταβλητός κύκλος  $\omega$  που περιέχει το τόξο  $\varphi$  εφάπτεται σε δύο σταθερούς κύκλους, τους κόκκινους κύκλους των Σχημάτων 5-9.

Στο Σχήμα 9 παρουσιάζεται μία





α



β

Σχήμα 5

περίπτωση του θεωρήματος τμήματος. Μία άλλη δυνατότητα έχουμε στα Σχήματα 6α και 6β. Εδώ, η γωνία  $\varphi$  είναι μικρή (ακριβέστερα,  $\varphi/2 < \angle AOB$ ) και το σημείο  $N_a$  έχει «μετακινηθεί» στην προέκταση της ημιευθείας  $AO$  μετά το σημείο  $O$  (γιατί;), με αποτέλεσμα ο κόκκινος κύκλος που εφάπτεται της ευθείας  $a$  στο σημείο  $N_a$  να είναι εγγεγραμμένος στην κατά κορυφή γωνία της  $\angle AOB$  και όχι στην ίδια την  $\angle AOB$ .

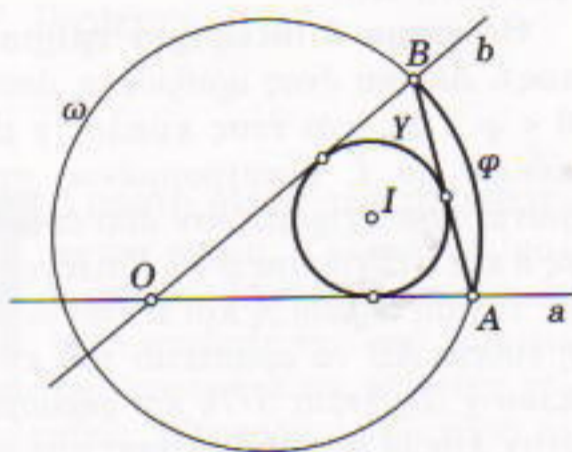
Ο κύκλος  $\gamma$ , τέλος, μπορεί να μην είναι απλώς εγγεγραμμένος στο τρίγωνο  $AOB$  αλλά και παραγεγραμμένος. Οπότε παίρνουμε άλλες δύο περιπτώσεις (Σχήματα 7 και 8).

Οι παραπάνω ορισμοί της γωνίας και του τόξου επέτρεψαν να διατυπώσουμε το θεώρημα τμήματος έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει ταυτόχρονα όλες αυτές τις περιπτώσεις. Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν το θεώρημα τμήματος δεδομένο, χωρίς να το αποδείξουμε, και ας συναγάγουμε διάφορες συνέπειές του.

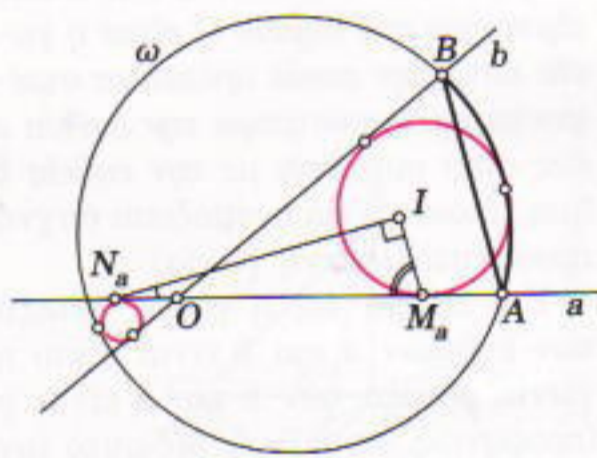
**Ασκήσεις**

3. Αποδείξτε ότι η ευθεία  $BK$  είναι παράλληλη προς την εφαπτόμενη του κύκλου  $\gamma$  που άγεται από το σημείο  $N_a$  (Σχήμα 5β).

4. (I) Τα σημεία  $A$  και  $B$  κινούνται επί των πλευρών της γωνίας  $O$

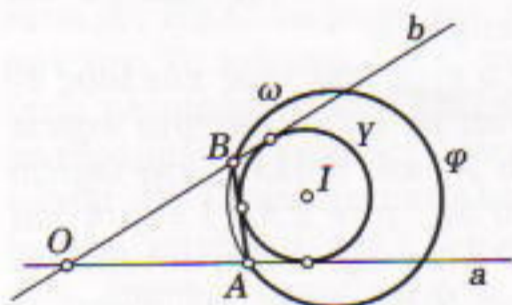


α

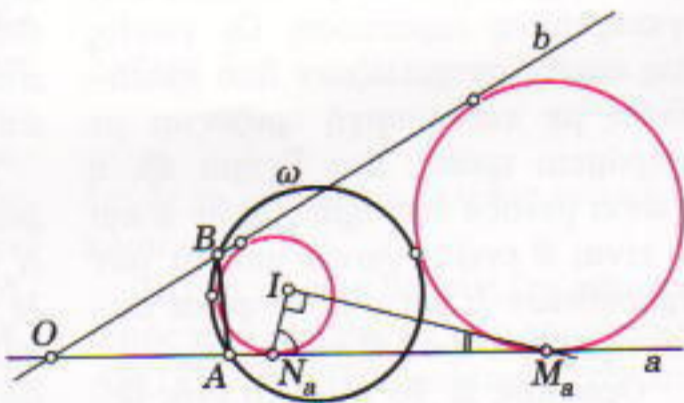


β

Σχήμα 6

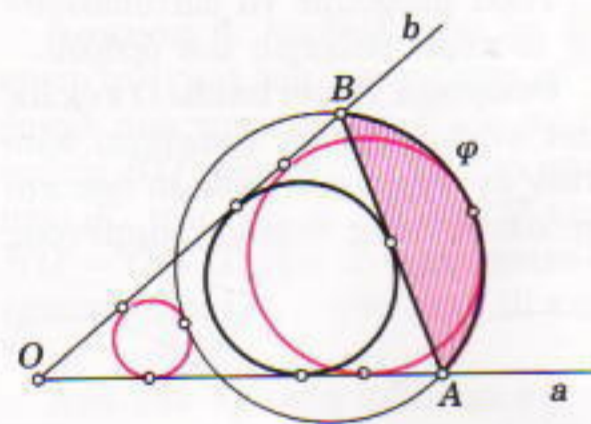


α

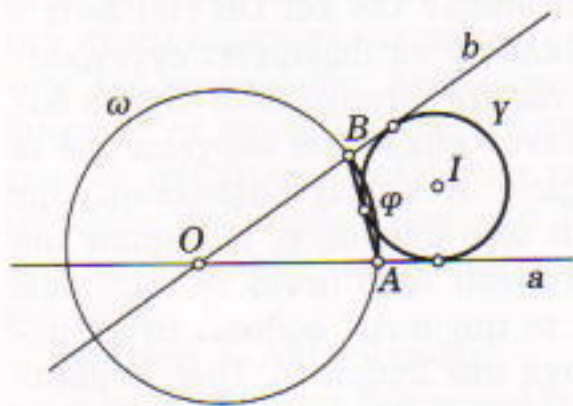


β

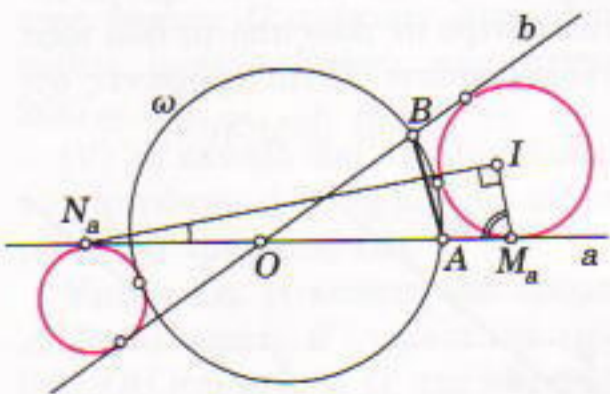
Σχήμα 7



Σχήμα 9

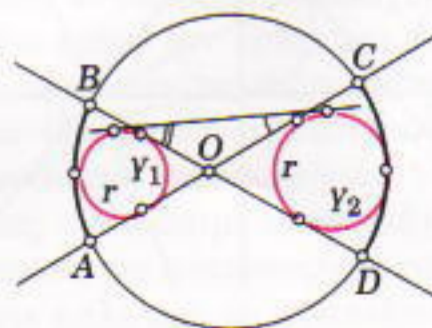


α



β

Σχήμα 8



Σχήμα 10



έτσι ώστε ο εγγεγραμμένος κύκλος  $\gamma$  του τριγώνου  $AOB$  να είναι σταθερός. Αποδείξτε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος αυτού του τριγώνου εφάπτεται σε έναν σταθερό κύκλο εγγεγραμμένο στη γωνία  $AOB$ , και ότι τα σημεία επαφής αυτού του σταθερού κύκλου με τις πλευρές της γωνίας και το κέντρο τού  $\gamma$  είναι συνευθειακά.

(II) Αποδείξτε την πρόταση (I) αν ο  $\gamma$  είναι ο σταθερός παραγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AOB$  που αντιστοιχεί στην κορυφή  $O$ .

5. (I) Αποδείξτε ότι ο κύκλος που εφάπτεται στις κάθετες πλευρές  $CA$ ,  $CB$  ενός ορθογώνιου τριγώνου  $ABC$  και εφάπτεται εσωτερικά στον περιγεγραμμένο του κύκλο είναι ομοιόθετος ως προς το σημείο  $C$  του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$  με λόγο ομοιοθεσίας 2:1.

(II) Αποδείξτε ότι ο κύκλος που εφάπτεται στις κάθετες πλευρές  $CA$ ,  $CB$  ενός ορθογώνιου τριγώνου  $ABC$  και εφάπτεται εξωτερικά στον περιγεγραμμένο του κύκλο είναι ομοιόθετος ως προς το σημείο  $C$  του παραγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$  με λόγο ομοιοθεσίας 2:1.

(III) Αποδείξτε το θεώρημα Feuerbach για ορθογώνια τρίγωνα.

6. Δίδονται δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ . Ένας τυχαίος κύκλος εφάπτεται εξωτερικά στους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  και τέμνει τις κοινές τους εσωτερικές εφαπτόμενες στα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$  (Σχήμα 10). Αποδείξτε ότι

(I) τα μέτρα των τόξων  $AB$  και  $CD$  είναι σταθερά και ίσα με το διπλάσιο των γωνιών που σχηματίζουν αντίστοιχα οι ευθείες  $AC$  και  $BD$  με την κοινή εξωτερική εφαπτομένη των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ .

(II) Τα τρίγωνα  $AOB$  και  $COD$  έχουν σταθερούς εγγεγραμμένους κύκλους.

7. Η προηγούμενη πρόταση είναι απλά η διατύπωση της αντίστροφης πρότασης της περίπτωσης του θεωρήματος τμήματος που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Διατυπώστε και αποδείξτε όμοιες προτάσεις για τις περιπτώσεις των Σχημάτων 7 και 8.

8. Δίδονται δύο κύκλοι  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  που εφάπτονται εξωτερικά στο ση-

μείο  $O$ . Ο κύκλος  $\omega$  εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο. Αποδείξτε ότι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  (που διέρχεται από το σημείο  $O$ ) διαιρεί τον  $\omega$  σε δύο τόξα ίσα αντίστοιχα με το διπλάσιο των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ αυτής της εφαπτομένης και της άλλης κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ .

9 (Πρόβλημα του μηνίσκου). Δίδεται μια γωνία  $\varphi$  με κορυφή στο σημείο  $O$  και δύο αριθμοί  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  τέτοιοι ώστε  $0 < \varphi_1 < 2\pi$  και  $0 < \varphi_2 < 2\pi$ . Τα σημεία  $A$  και  $B$  κινούνται επί των πλευρών της γωνίας, ενώ εξωτερικά του τριγώνου  $AOB$  κατασκευάζουμε δύο τόξα ίσα με  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  τα οποία διέρχονται από τα σημεία  $A$  και  $B$  και σχηματίζουν ένα μηνίσκο. Αποδείξτε ότι αν ο κύκλος που περιέχει το ένα τόξο εφάπτεται σε έναν σταθερό κύκλο εγγεγραμμένο στη γωνία  $O$ , τότε ο κύκλος που περιέχει το άλλο τόξο εφάπτεται σε έναν σταθερό κύκλο εγγεγραμμένο στην ίδια γωνία.

Μπορούμε να διατυπώσουμε αυτή την πρόταση ακόμη ισχυρότερα: ο κύκλος που περιέχει το τόξο  $\varphi_2$  εφάπτεται σε δύο σταθερούς κύκλους (όμως, ο δεύτερος μπορεί να είναι εγγεγραμμένος στην κατά κορυφήν της δεδομένης γωνίας).

Από μια άποψη, η Άσκηση 9 αποτελεί ισχυρή γενίκευση του θεωρήματος τμήματος. Το τελευταίο είναι μια ειδική (ακριβέστερα, οριακή) περίπτωση, όταν  $\varphi_1 = 0$ . Τότε, το ένα από τα τόξα του μηνίσκου εκφυλίζεται σε ευθεία και ο ίδιος ο μηνίσκος εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα. Ούτως ή άλλως, η λύση του γενικού προβλήματος του μηνίσκου έπεται από αυτή την οριακή περίπτωση.

### Απόδειξη του θεωρήματος τμήματος

Ας αποδείξουμε (χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Σχήματος 5β) ότι ο κύκλος που εφάπτεται στις ευθείες  $a$  και  $b$  στα σημεία  $N_a$  και  $N_b$ , αντίστοιχα, εφάπτεται στον κύκλο  $\omega$ . Οι αποδείξεις για τον δεύτερο κύκλο και για τις άλλες περιπτώσεις είναι απολύτως ό-

μοιες. Η επόμενη πρόταση αποτελεί μια ενισχυμένη μορφή της γνωστής πρότασης για τη γωνία χορδής και εφαπτομένης, όπου οι γωνίες λαμβάνονται προσανατολισμένες.

**Λήμμα 1.** Σε έναν κύκλο δίδονται τα σημεία  $A$  και  $B$ . Υποθέτουμε ότι η ευθεία  $e$  εφάπτεται σε αυτό τον κύκλο στο σημείο  $A$ . Τότε, η γωνία μεταξύ των ευθειών  $e$  και  $AB$  ισούται με το ήμισυ του τόξου  $AB$ . Αντιστρόφως, εάν η γωνία μεταξύ μιας ευθείας  $e$  που διέρχεται από το σημείο  $A$  και της χορδής  $AB$  ενός κύκλου (ο οποίος διέρχεται επίσης από το  $A$ ) ισούται με το τόξο  $AB/2$ , τότε η ευθεία  $e$  εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο  $A$ .

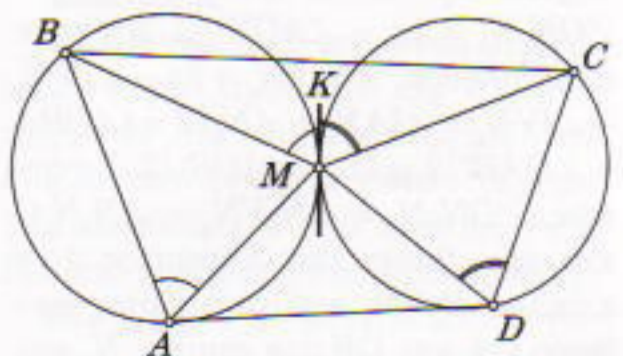
**Άσκηση 10.** Αποδείξτε το Λήμμα 1.

**Λήμμα 2.** Αν  $M$  είναι ένα σημείο στο εσωτερικό ενός κυρτού τετραπλεύρου  $ABCD$  τέτοιο ώστε  $\angle CMB = \angle MAB + \angle MDC$  (Σχήμα 11), τότε οι κύκλοι  $AMB$  και  $CMD$  εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο  $M$ .

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ένα σημείο  $K$  στο εσωτερικό της γωνίας  $CMB$  τέτοιο ώστε  $\angle KMB = \angle MAB$  και  $\angle KMC = \angle MDC$  (η διατύπωση του λήμματος μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει τέτοιο σημείο). Αφού  $\angle KMC = \angle MDC =$  τόξο  $CM/2$ , έχουμε από το Λήμμα 1 ότι ο κύκλος  $CMD$  εφάπτεται στην ευθεία  $MK$  στο σημείο  $M$ . Ομοίως,  $\angle KMB = \angle MAB =$  τόξο  $BM/2$  και, επομένως, ο κύκλος  $MAB$  εφάπτεται στην ευθεία  $MK$  στο σημείο  $M$ .

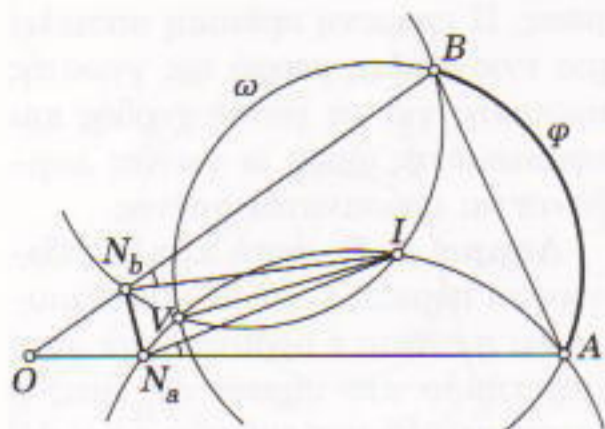
Άρα, οι κύκλοι  $CMD$  και  $BMA$  εφάπτονται μεταξύ τους, διότι η  $KM$  είναι η κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο  $M$ .

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος τμήματος παραθέτουμε διά-



Σχήμα 11





Σχήμα 12

φορες παρατηρήσεις. Στις πλευρές ενός τριγώνου AOB (Σχήμα 12) θεωρούμε σημεία  $N_a$  και  $N_b$  τέτοια ώστε  $ON_a = ON_b$ . Έστω  $I$  το κέντρο του κύκλου  $\gamma$  και  $\angle AN_a I = \angle IN_b B = \theta < \pi/2$ . Έστω  $V$  το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων  $AIN_a$  και  $BN_b I$ . Εφόσον  $\angle IN_b B = \angle IVB$  (ως γωνίες εγγεγραμμένες στον κύκλο  $BN_b I$ ) και, ομοίως,  $\angle AN_a I = \angle AVI$ , διαπιστώνουμε ότι  $\angle AVB = 2\theta$ . Αν φέρουμε τον κύκλο  $ABV$ , παρατηρούμε ότι το τόξο  $AB = 4\theta$  και, επομένως, το μέγεθος του τόξου  $AB$  είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων  $A$  και  $B$ .

Απομένει να θέσουμε  $\varphi = 4\theta$  και να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση: αν  $\angle AN_a I = \angle IN_b B = \varphi/4$ , τότε ο κύκλος που εφάπτεται στις  $AO$  και  $OB$  στα σημεία  $N_a$  και  $N_b$  εφάπτεται και στον κύκλο  $\omega$  στο σημείο  $V$ .

Είμαστε πλέον σε θέση να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 2. Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σημείο  $V$  ανήκει στον κύκλο  $\omega$ . Απομένει να αποδείξουμε ότι ο κύκλος  $N_a VN_b$  εφάπτεται στις ευθείες  $a, b$  και στον κύκλο  $\omega$ .

Η υπόλοιπη απόδειξη βασίζεται στον υπολογισμό διαφόρων γωνιών, τον οποίο θα εκτελέσουμε στη συνέχεια. Πρώτα απ' όλα,  $\angle ON_b N_a = \angle ON_a N_b = (\pi - \angle AOB)/2$ . Απ' την άλλη πλευρά,  $\angle N_b VN_a = 2\pi - \angle IVN_b - \angle IVN_a = \angle IAN_a + \angle N_b BI = (\angle OBA + \angle OAB)/2 = (\pi - \angle AOB)/2$ . Συνεπώς,  $\angle ON_b N_a = \angle N_b VN_a = \angle N_b N_a O$  και άρα, βάσει του Λήμματος 1, ο κύκλος  $N_a VN_b$  εφάπτεται στις ευθείες  $OA$  και  $OB$  στα σημεία  $N_a$  και  $N_b$  αντίστοιχα.

Για να αποδείξουμε το γεγονός

ότι οι κύκλοι  $N_a VN_b$  και  $\omega$  εφάπτονται μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε (Λήμμα 2) ότι

$$\angle VN_a N_b + \angle BAV = \angle BVN_b \quad (1)$$

Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι

$$\angle BAV = \angle BAI + \angle IAV.$$

Ομως,

$$\begin{aligned} \angle IAV &= \angle IN_a V = \angle AN_a V - \angle AN_a I \\ &= \angle AN_a V - \varphi/4. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \angle BAV &= \angle AN_a V - \varphi/4 + \\ &\quad \angle BAO/2. \end{aligned} \quad (2)$$

Βάσει του Λήμματος 1,

$$\angle VN_a N_b = \angle VN_b B. \quad (3)$$

Επομένως, το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1) (λαμβάνοντας υπόψη τις (2) και (3)) ισούται με

$$\begin{aligned} \angle VN_b B + \angle AN_a V - \varphi/4 + \\ \angle BAO/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} \angle BVN_b &= \angle BIN_b = \pi - \angle IN_b B - \\ &\quad \angle N_b BI = \pi - (\varphi/4) - \angle OBA/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Τα τετράπλευρα  $N_a VIA$  και  $N_b VIB$  είναι εγγεγραμμένα (το καθένα στο δικό του κύκλο) και, επομένως,

$$\begin{aligned} \angle AN_a V &= \pi - \angle VIA, \\ \angle VN_b B &= \pi - \angle BIV. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \angle AN_a V + \angle VN_b B &= 2\pi - \\ &\quad \angle VIA - \angle BIV = \angle AIB. \end{aligned}$$

Επομένως, η παράσταση (4) ισούται με  $\angle AIB - (\varphi/4) + \angle BAO/2 = \pi - (\varphi/4) - \angle OBA/2$  και συμπίπτει με το δεξιό μέλος της εξίσωσης (5) —δηλαδή, αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε. Συνεπώς, το θεώρημα τμήματος αποδείχθηκε.

**Άσκηση 11.** Εξετάστε μόνοι σας όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Οι επόμενες ασκήσεις αφορούν ένα τυχαίο καμπυλόγραμμο τρίγωνο  $ABC$ , που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $CA, CB$  και το τόξο  $AB$  ενός κύκλου.

#### Άσκησης

**12.** Κατασκευάστε με κανόνα και διαβήτη κύκλο εγγεγραμμένο σε ένα δεδομένο καμπυλόγραμμο τρι-

γωνο  $ABC$ . Είναι πάντοτε δυνατή αυτή η κατασκευή;

**13.** Ο εγγεγραμμένος κύκλος καμπυλόγραμμου τριγώνου  $ABC$  εφάπτεται στο τόξο  $AB$  στο σημείο  $V$ . Αποδείξτε ότι η διχοτόμος της γωνίας  $AVB$  διέρχεται από το κέντρο του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο ευθύγραμμο τρίγωνο  $ABC$ .

**14.** Ο εγγεγραμμένος κύκλος καμπυλόγραμμου τριγώνου  $ABC$  εφάπτεται της πλευράς  $AC$  στο σημείο  $M$  και του τόξου  $AB$  στο σημείο  $V$ . Αποδείξτε ότι ο κύκλος  $MVA$  διέρχεται από το κέντρο του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο ευθύγραμμο τρίγωνο  $ABC$ .

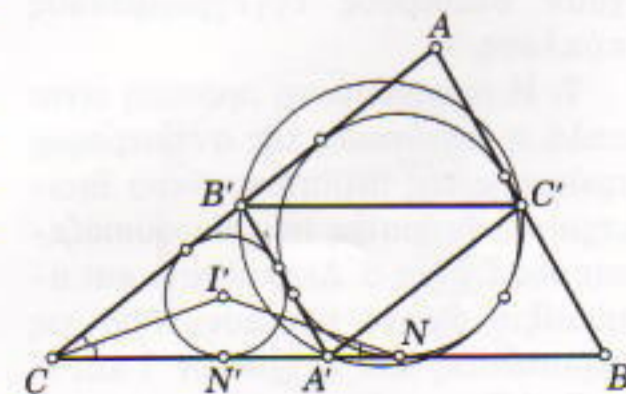
**15.** Έστω  $ABC$  ένα ευθύγραμμο τρίγωνο. Ένας κύκλος εγγεγραμμένος στη γωνία  $C$  εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο  $ABC$  στο σημείο  $M$ . Έστω  $T$  το μέσο του τόξου  $AB$  που περιέχει το σημείο  $C$  και  $I$  το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο  $ABC$  κύκλου. Αποδείξτε ότι τα σημεία  $I, T$  και  $M$  είναι συνευθειακά.

### Απόδειξη του θεωρήματος Feuerbach

Θα διαπιστώσουμε ότι το θεώρημα Feuerbach αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος τμήματος: συγκεκριμένα, όταν η γωνία μεταξύ των ευθειών  $a$  και  $b$  ισούται με  $(2\pi - \varphi)/2$ .

Έστω  $A'B'C'$  το μεσοτρίγωνο του δεδομένου τριγώνου  $ABC$  (Σχήμα 13),  $N$  και  $N'$  τα σημεία επαφής της ευθείας  $BC$  με τους κύκλους που είναι εγγεγραμμένοι στα τρίγωνα  $ABC$  και  $A'B'C'$  αντίστοιχα, και  $I'$  το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $A'B'C'$ .

Θα αποδείξουμε ότι ο εγγεγραμ-



Σχήμα 13



μένος κύκλος του τριγώνου  $ABC$  εφάπτεται στον κύκλο  $A'B'C'$ , δηλαδή στον κύκλο των εννέα σημείων.

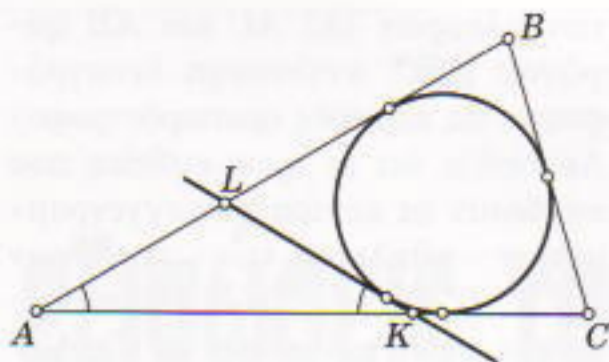
Τα τρίγωνα  $CAB$  και  $CB'A'$ , συνεχώς και οι εγγεγραμμένοι τους κύκλοι, είναι ομοίotheta ως προς το σημείο  $C$  με λόγο ομοιοθεσίας 2:1. Επομένως,  $CN = 2CN'$ ,  $CN' = NN'$  και το τρίγωνο  $CIN$  είναι ισοσκελές. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα τμήματος θέτοντας  $\varphi = 2(\pi - \angle ACB)$ . Έχουμε: τόξο  $A'B' = 2\pi -$  τόξο  $B'A' = 2\pi - 2\angle A'C'B' = 2\pi - 2\angle ACB$  (εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $\angle A'C'B' = \angle ACB$ , διότι το  $CB'C'A'$  είναι παραλληλόγραμμο). Συνεπώς, τόξο  $A'B' = \varphi$ . Επιπλέον,  $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$  (το τρίγωνο  $I'CN$  είναι ισοσκελές και, επομένως, λόγω του τρόπου επιλογής του αριθμού  $\varphi$ , έχουμε  $\angle I'NC = \angle ICN = \angle ABC/2 = (2\pi - \varphi)/4$ ).

Βάσει του θεωρήματος τμήματος, ο κύκλος  $\omega$  που διέρχεται από το σημεία  $A'$  και  $B'$  και για τον οποίο ισχύει τόξο  $A'B' = \varphi$  (αυτός είναι ο κύκλος των εννέα σημείων) πρέπει να εφάπτεται στον κύκλο που είναι εγγεγραμμένος στη γωνία  $ACB$  και στην ευθεία  $CB$  στο σημείο  $N$  (διότι για το σημείο  $N$  έχουμε  $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$ ). Ο τελευταίος είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $ABC$ .

Εάν στην προηγούμενη συλλογιστική αντικαταστήσουμε τη λέξη *εγγεγραμμένος* με τη λέξη *παραγεγραμμένος*, καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα (για τους παραγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων  $ABC$  και  $A'B'C'$  που αντιστοιχούν στην κορυφή  $C$ ). Επομένως, το θεώρημα Feuerbach αποδείχθηκε.

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο μέρος της απόδειξης χρησιμοποιήθηκε μόνο το μισό του θεωρήματος τμήματος (το θεώρημα βεβαιώνει την ύπαρξη δύο σταθερών κύκλων που εφάπτονται στον κύκλο  $\omega$ ). Σε αυτή την περίπτωση, ο ένας είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $ABC$ . Πού βρίσκεται ο δεύτερος κύκλος; Την απάντηση σε τούτο το ερώτημα δίνει η επόμενη άσκηση.

**Άσκηση 16.** Ισοσκελές τρίγωνο  $AKL$ , με βάση  $AK$ , αποκόπεται από



Σχήμα 14

το οξυγώνιο τρίγωνο  $ABC$  με μια ευθεία που εφάπτεται στον εγγεγραμμένο κύκλο (Σχήμα 14). Αποδείξτε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AKL$  εφάπτεται στον κύκλο των εννέα σημείων του τριγώνου  $ABC$ .

Μπορούμε να αποκόψουμε ένα τέτοιο μικρό τρίγωνο από κάθε γωνία του τριγώνου  $ABC$ , και έτσι να προκύψουν τρεις κύκλοι εφαπτόμενοι στον κύκλο των εννέα σημείων. (Παρεμπιπτόντως, γιατί μόνο τρεις και όχι έξι;)

Τι θα γίνει αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για τους παραγεγραμμένους κύκλους;

**Άσκηση 17.** Θεωρούμε τις προεκτάσεις πέρα από την κορυφή  $A$  των πλευρών  $BA$  και  $CA$  ενός οξυγώνιου τριγώνου  $ABC$ . Θεωρούμε τα σημεία  $M$  και  $N$  στις προεκτάσεις των  $BA$  και  $CA$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε η ευθεία  $MN$  να εφάπτεται στον παραγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $ABC$  που αντιστοιχεί στην κορυφή  $C$ , και το τρίγωνο  $AMN$  να είναι ισοσκελές με βάση  $AM$ . Αποδείξτε ότι ο παραγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AMN$  που αντιστοιχεί στην κορυφή  $N$  εφάπτεται στον κύκλο των εννέα σημείων του τριγώνου  $ABC$ .

Θα μπορούσαμε, επίσης, να λάβουμε τα σημεία  $M$  και  $N$  στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $CB$  πέρα από την κορυφή  $B$ , και να βρούμε έναν ακόμη κύκλο που εφάπτεται στον κύκλο των εννέα σημείων.

**Άσκηση 18.** Έστω ότι ο παραγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $ABC$  εφάπτεται στις προεκτάσεις των πλευρών  $CA$  και  $CB$  στα σημεία  $K$  και  $L$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε ένα σημείο  $M$  στο τμήμα  $CK$  και ένα ση-

μείο  $N$  στο τμήμα  $CL$  έτσι ώστε η ευθεία  $MN$  να εφάπτεται σε αυτό τον παραγεγραμμένο κύκλο και το τρίγωνο  $CMN$  να είναι ισοσκελές με βάση  $CM$ . Αποδείξτε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $CMN$  εφάπτεται στον κύκλο των εννέα σημείων του τριγώνου  $ABC$ .

Με τις Ασκήσεις 17 και 18 αντιστοιχούμε σε κάθε παραγεγραμμένο κύκλο τρεις κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο των εννέα σημείων. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις παραγεγραμμένους κύκλους και, επομένως, καταλήγουμε σε 9 κύκλους.

Είναι καιρός πλέον να συνοψίσουμε. Έχουμε ήδη κατασκευάσει τους εξής κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο των εννέα σημείων: τον εγγεγραμμένο κύκλο, τους τρεις παραγεγραμμένους, τους τρεις κύκλους της Άσκησης 16 και τους εννέα κύκλους των Ασκήσεων 17 και 18. Επομένως, καταλήγουμε σε δεκαέξι κύκλους συνολικά.

Και όμως, δεν είναι μόνο αυτοί!

**Άσκηση 19.** Έστω  $H$  το σημείο τομής των υψών τριγώνου  $ABC$ . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα  $ABC$ ,  $AHC$ ,  $AHB$  και  $BHC$  έχουν κοινό κύκλο εννέα σημείων.

Καθένα από τα τρίγωνα της Άσκησης 19 έχει το δικό του σύνολο δεκαέξι κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο των εννέα σημείων. Άρα, παίρνουμε συνολικά εξήντα τέσσερις κύκλους εφαπτόμενους στον κύκλο των εννέα σημείων. Αυτός ο αριθμός αξίζει να μπει στο βιβλίο των ρεκόρ Γκίνες!

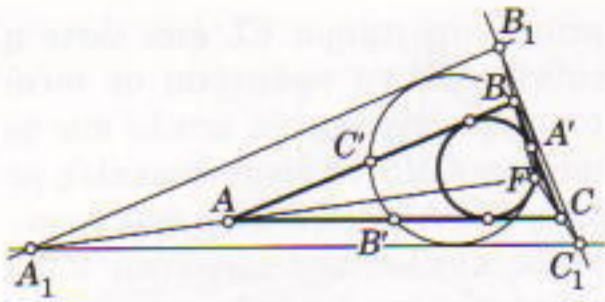
Θα ολοκληρώσουμε σχολιάζοντας τα σημεία επαφής. Στις Ασκήσεις 20-22 συμβολίζουμε με  $F$  το σημείο επαφής του κύκλου των εννέα σημείων του τριγώνου  $ABC$  με τον εγγεγραμμένο κύκλο.

#### Άσκήσεις

**20.** Οι πλευρές τριγώνου  $A_1B_1C_1$  είναι παράλληλες με τις πλευρές τριγώνου  $ABC$  και εφάπτονται στον κύκλο των εννέα σημείων (Σχήμα 15). Αποδείξτε ότι οι ευθείες  $A_1A$ ,  $B_1B$  και  $C_1C$  τέμνονται στο σημείο  $F$ .

**21.** Έστω  $I$  το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου  $ABC$ . Αποδείξτε ότι οι κύκλοι εννέα σημείων των τριγώνων  $AIB$ ,  $BIC$  και





Σχήμα 15

ΟΙ τρεις κύκλοι τέμνονται στο σημείο  $F$ .

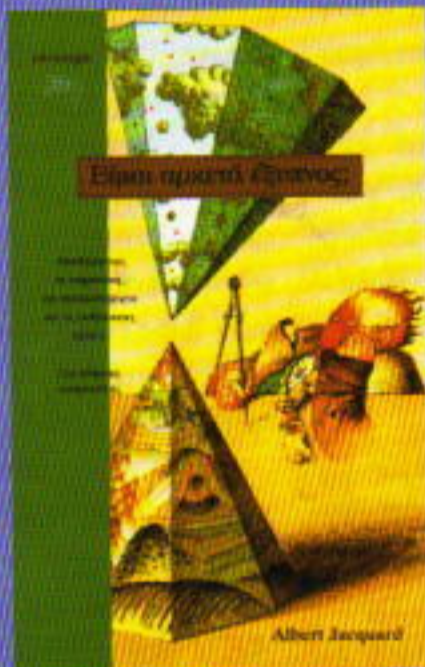
22. Έστω  $A'$ ,  $B'$  και  $C'$  τα μέσα

των πλευρών  $BC$ ,  $AC$  και  $AB$  τριγώνου  $ABC$ , αντίστοιχα (αναγράφουμε τις κορυφές αριστερόστροφα). Αποδείξτε ότι οι τρεις ευθείες που συνδέουν τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων  $AC'B'$ ,  $B'A'C$  και  $C'BA'$  με τα αντίστοιχα μέσα των τόξων  $B'C'$ ,  $A'B'$  και  $C'A'$  του κύκλου των εννέα σημείων του τριγώνου  $ABC$  συντρέχουν στο σημείο  $F$ .

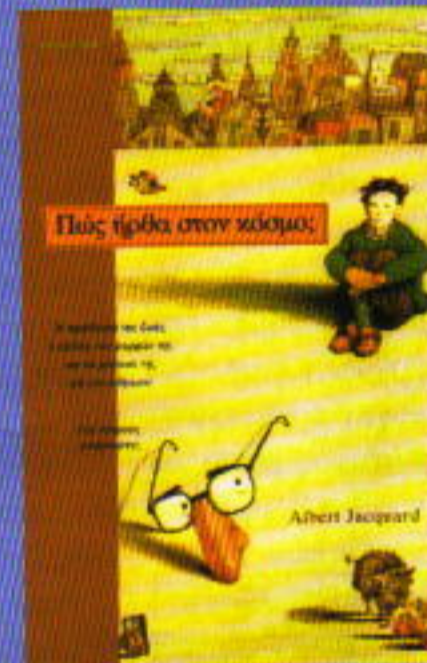
Τελειώνοντας, επισημαίνουμε ότι το θεώρημα τμήματος φαίνεται να έχει πολλές άλλες ενδιαφέρουσες συνέπειες. Υπάρχουν δύο ελεύθερες παράμετροι —η γωνία  $O$  μεταξύ των ευθειών  $a$  και  $b$  και η γωνία  $\varphi$ . Εξετάσαμε δύο μόνο ειδικές περιπτώσεις:  $\angle AOB = \varphi/2$  (Ασκήσεις 4 και 5) και  $\angle AOB = (2\pi - \varphi)/2$  (το θεώρημα Feuerbach). ●

## Γνωρίστε μια εξαιρετική σειρά νεανικών βιβλίων για τις θετικές επιστήμες...

Σελ.: 88,  
16 x 25 εκ.,  
Έγχρωμο,  
Πανόδετο,  
4.000 δρχ.



ΜΟΛΙΣ  
ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΑΝ



Σελ.: 88,  
16 x 25 εκ.,  
Έγχρωμο,  
Πανόδετο,  
4.000 δρχ.

Τι είναι η νοημοσύνη; Μπορούμε να τη μετρήσουμε; Βοηθά ο ύπνος στην ανάπτυξη της νοημοσύνης μας; Μπορεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής να αντικαταστήσει τον ανθρώπινο εγκέφαλο; Και αυτός, με τη σειρά του, πώς λειτουργεί; Πώς διαμορφώνεται η προσωπικότητα κάθε ανθρώπου; Και τι πρέπει να ορίζουμε ως επιτυχία στη ζωή; Γιατί είναι σημαντική η ζεστασιά των φίλων και η συντροφιά; Πώς πρέπει να αντιμετωπίζουμε τους αλλοδαπούς, τους φυλακισμένους, τους διανοητικά καθυστερημένους; Και πόση σημασία πρέπει να δίνουμε στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των ανθρώπων;

Ο γνωστός διανοούμενος Albert Jacquard, επιθυμώντας να μεταδώσει την εμπειρία και τις γνώσεις του στο νεαρό αναγνωστικό κοινό, επιχειρεί, με τρόπο πρωτότυπο και χιουμοριστικό, να απαντήσει σε δεκάδες ερωτήσεις που μας απασχολούν σήμερα.

Πώς και πότε εμφανίστηκε η ζωή στον πλανήτη μας; Πώς εξελίχθηκαν οι διάφοροι οργανισμοί; Είναι αλήθεια ότι ο άνθρωπος προέρχεται από τον πίθηκο; Ποιοι είναι οι μηχανισμοί της κληρονομικότητας; Υπάρχει πιθανότητα να συναντήσετε κάποτε έναν τέλειο σωσία σας; Και γιατί μοιάζετε στους γονείς σας; Γιατί είναι καταστροφικές οι ιδέες για «καθαρές ανθρώπινες φυλές»; Ποιο θα είναι το μέλλον του πλανήτη μας λόγω της εκρηκτικής πληθυσμιακής αύξησης; Θα μπορέσουμε να ξεπεράσουμε τα προβλήματα της μόλυνσης και των πολεμικών συγκρούσεων ώστε να συνεχίσει ο πλανήτης μας να υπάρχει;



Albert Jacquard  
Ο γάμος και ο γάμος του Θεού Λάβραυ



Albert Jacquard  
Οι γάμοι γάμοι και ο Θεός Λάβραυ



Albert Jacquard  
Ο Θεός Λάβραυ και ο γάμος



Albert Jacquard  
Ο Θεός Λάβραυ και ο γάμος του γάμου



Albert Jacquard  
Ταξιδεύοντας με τον κύριο Λάβραυ



Albert Jacquard  
Μαθηματικές ασχολασιές  
3

Στη σειρά περιλαμβάνονται αρκετοί ακόμη τίτλοι. Ζητήστε μας τον σχετικό κατάλογο.

...και χαρίστε τη στα παιδιά σας μόλις τη διαβάσετε.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



# Λύνοντας τις εξισώσεις του σλάλομ

*Άμα κατανοήσετε τις δυνάμεις, από εκεί και πέρα είναι όλο κατηφόρα*

A. Abrikosov

**Σ**ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΧΕΙΜΕΡΙΝΩΝ αθλημάτων, το σκι των καταβάσεων (ή αλπικό σκι), το αγωνιστικό έλκρηθο και το μπόμπλεϊ αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία από μόνα τους. Εάν παρακολουθήσετε αγώνες στα εν λόγω αθλήματα, θα αναρωτηθείτε κατά πόσον υπάρχει λογικός τρόπος για να κατεβείτε έναν χιονισμένο λόφο όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Ο χρόνος της καθόδου σε έναν τέτοιο αγώνα πιθανώς να είναι καθαρά στοχαστικός.

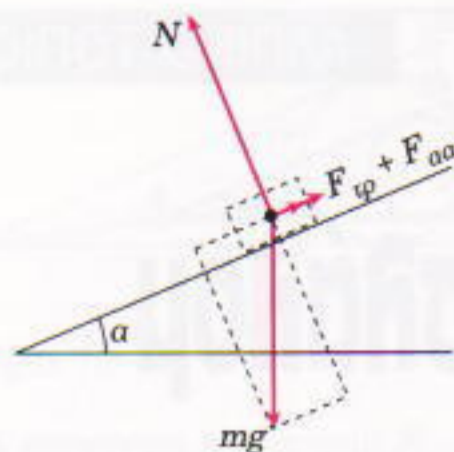
Φαντάζομαι ότι όλοι θα έχετε λύσει το πασίγνωστο πρόβλημα του σώματος που κινείται προς τα κάτω ολισθαίνοντας πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο (Σχήμα 1). Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει αυτή την κίνηση μας δίνει την επιτάχυνση του σώματος κατά την εκκίνησή του, την οριακή του ταχύτητα καθώς και τη διάρκειά της συνολικής κίνησης. Αν στηριχθούμε στην αναλογία αυτή, καταλήγουμε σ' ένα παράδοξο αποτέλεσμα: ο χρόνος της καθόδου δεν εξαρτάται από το πώς θα ενεργήσει ο αγωνιζόμενος. Ωστόσο, στις εν λόγω εξισώσεις δεν έχει ληφθεί υπόψη ο παράγοντας της επιδεξιότητας του σκιέρ. Ας δούμε λοιπόν πώς θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε στην περιγραφή μας και τον συγκεκριμένο παράγοντα.

Προτού ξεκινήσουμε, επιβάλλεται να ασχοληθούμε με την τριβή και



Εικονογράφηση: Pavel Chernusky





Σχήμα 1

Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο:  $mg$  είναι η δύναμη της βαρύτητας,  $N$  η κάθετη δύναμη,  $F_\phi$  και  $F_{aa}$  οι δυνάμεις της τριβής και της αντίστασης του αέρα. Η εξίσωση κίνησης του σώματος γράφεται με τη μορφή  $mg = mg + N + F_\phi + F_{aa}$ .

την αντίσταση του αέρα. Ο συντελεστής τριβής καθορίζεται από την επιλογή του «κεριού». Όσο για την αεροδυναμική, ο ρόλος που παίζει για όσους συμμετέχουν σε αγώνες ελκθήρων και αλμάτων (αλλά και σε αγώνες καταβάσεων και υπεργίγαντιαίου σλάλομ) δεν πρέπει να υποτιμάται. Όχι μόνο έχει ζωτική σημασία το να δώσει ο αθλητής στο σώμα του την κατάλληλη στάση, αλλά αποδεικνύονται σημαντικά ακόμη και το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένη η στολή του ή και το κόψιμό της.

Εντυπωσιακό παράδειγμα αποτελεί η θρυλική νίκη της γαλλικής ομάδας καταβάσεων. Οι Γάλλοι υπήρξαν οι πρώτοι που συνειδητοποίησαν ότι συνιστά ανεπίτρεπτη πολυτέλεια το να φοράει κανείς στο στήθος του ένα νούμερο που ανεμίζει όταν κινείται με ταχύτητα 100 km/h. Έτσι, κάτω από έναν ορμαγδό πειραγμάτων και ειρωνικών σχολίων, οι γάλλοι αθλητές κόλλησαν τα νούμερά τους στις στολές. Περιττεύει να πούμε ότι κανείς δεν γελοούσε όταν κατέφταναν πρώτοι στη γραμμή τερματισμού!

Στις μέρες μας, οι αγώνες κρίνονται με διαφορές χρόνου της τάξεως του εκατοστού του δευτερολέπτου —έτσι, οι παγοδρόμοι φορούν πλέον «υπεραεροδυναμικές» στολές, ενώ φτάσαμε μέχρι του σημείου οι αθλητές των καταβάσεων να δοκιμάζονται σε αεροδυναμικές σήραγγες. Τα κυρτά μπαστούνια βοηθούν

τους σκιέρ να δίνουν στο σώμα τους τη βέλτιστη στάση. Διάρκως δοκιμάζονται νέα είδη κεριού και άλλα υλικά επικάλυψης για τα πέδιλα, ενώ για χάρη των αθλητών του μπόμπλεϊ συντίθενται ολοένα και νέα κράματα. Η κλοπή του κεριού για σκι η οποία περιγράφεται από τον δημοφιλή συγγραφέα παιδικής λογοτεχνίας Leo Kassil στο μυθιστόρημά του *Η κίνηση της λευκής βασίλισσας* ωχριά μπροστά στον ανταγωνισμό για τα χρυσά ολυμπικά μετάλλια.

Ωστόσο, όλοι οι αγωνιζόμενοι διαθέτουν, κατά το μάλλον ή ήττον, ισοδύναμο εξοπλισμό. Έτσι, τον καθοριστικό ρόλο τον διαδραματίζουν τα ατομικά προσόντα του αθλητή: η ισχυρή θέληση για την κατάκτηση της νίκης, η άριστη φυσική κατάσταση και η ειδική προετοιμασία.

Ας δούμε λοιπόν πώς είναι δυνατόν οι νόμοι της μηχανικής να βοηθήσουν έναν αθλητή να μετατρέψει τα φυσικά χαρίσματά του και τον πόθο του για τη νίκη σε πολύτιμα δευτερόλεπτα. Στην ανάλυση των αρχών του σκι που θα επιχειρήσουμε δεν θα μας απασχολήσει το αγώνισμα της κατάβασης, όπου τους βασικούς ρόλους τους παίζουν η αεροδυναμική, ο έλεγχος και η επιλογή της ακολουθητέας διαδρομής, αλλά θα προτιμήσουμε να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στο σλάλομ —αγώνας κατάβασης σε πορεία ζιγκ-ζαγκ. Στους αγώνες σλάλομ, για να κατακτήσει τη νίκη ο αθλητής στηρίζεται πρωτίστως στις ατο-

μικές του προσπάθειες και, ενίοτε, επιδεικνύει ακροβατική δεξιότητα.

## Οι δυνάμεις

Ας επανέλθουμε στις δυνάμεις που δρουν στο σκιέρ. Από τη θέση των θεατών, παρατηρούμε το σκιέρ σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου) στερεωμένο στο λόφο ή τη μηχανή τηλεοπτικής λήψης. Αντιθέτως, οι σκιέρ παρατηρούν τον κόσμο απ' τα δικά τους μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τα οποία είναι σταθερά προσδεδεμένα πάνω τους. Αν και από την άποψη της εκτέλεσης υπολογισμών ένα τέτοιο σύστημα δεν διακρίνεται για την απλότητά του, ας επιχειρήσουμε να δούμε την εξέλιξη μιας κούρσας μέσα από τα μάτια του ίδιου του σκιέρ.

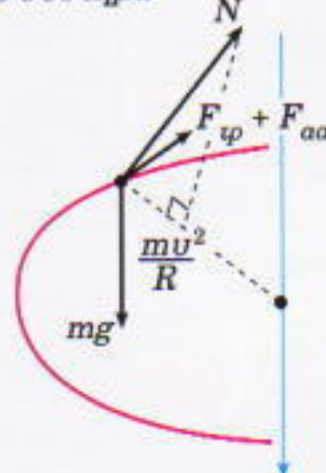
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο σκιέρ γλιστρά ισοταχώς κατά μήκος ενός τόξου. Πέραν των πραγματικών δυνάμεων, που είναι το βάρος, η τριβή, η κάθετη δύναμη του δαπέδου και η αντίσταση του αέρα, στο μη αδρανειακό σύστημα του σκιέρ εμφανίζεται μία ακόμη δύναμη: η φυγόκεντρος  $F_{φκ}$ , η οποία έχει κατεύθυνση από το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς προς το σκιέρ, ενώ το μέτρο της δίνεται από τον τύπο

$$F_{φκ} = mv^2/R,$$

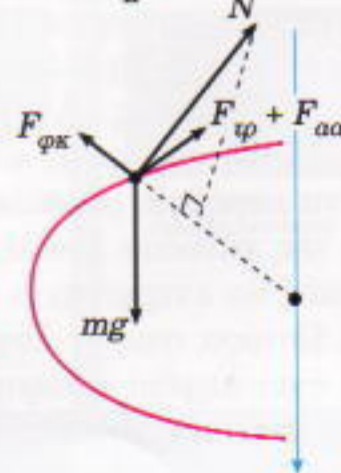
όπου με  $v$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του σκιέρ και με  $R$  την ακτίνα καμπυλότητας (Σχήμα 2).

Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς, το κέντρο μάζας του σκιέρ πα-

αδρανειακό σύστημα



μη αδρανειακό σύστημα



Σχήμα 2

Το αδρανειακό και το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο μη αδρανειακό σύστημα, στο σκιέρ ασκείται και η φυγόκεντρος δύναμη. Εδώ και στα επόμενα σχήματα τα μπλε βέλη υποδεικνύουν την κατεύθυνση της γραμμής πτώσης.



ραμένει ακίνητο. Συνεπώς, το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σκιέρ (η συνισταμένη δύναμη) ισούται με μηδέν για κάθε χρονική στιγμή. Ως εκ τούτου, η δύναμη της αντίδρασης του χιονιού πρέπει να παρουσιάζει κάποια κλίση προς το κέντρο καμπυλότητας, καθότι είναι η μοναδική δύναμη που μπορεί να αντισταθμίσει τη φυγόκεντρο δύναμη  $F_{φκ}$ . Στην περίπτωση του μπόμπολεϊ, την αναγκαία κλίση της αντίδρασης την εξασφαλίζουν οι αθλητές που επιβαίνουν στο έλκνητρο δίνοντας κατάλληλη κλίση στα σώματά τους. Τα πέδιλα του σκι φέρουν μεταλλικές ακμές που βελτιώνουν το κράτημά τους στο χιόνι. Όταν ο σκιέρ στρίβει, στρέφει τα σκι πάνω στις ακμές τους ώστε να «γαντζωθούν» στο χιόνι —ακριβώς όπως οι παγοδρόμοι στον πάγο. Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (σύστημα του εργαστηρίου), η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης της αντίδρασης προσδίδει στο σκιέρ μια κεντρομόλο (κατευθυνόμενη, δηλαδή, προς το κέντρο καμπυλότητας) επιτάχυνση. Οι ακμές των πέδινων, για να προσφέρουν ασφαλές «κράτημα» στις στρωμένες με σκληρό χιόνι ή και παγωμένες πλαγιές —που συχνά επιφυλάσσουν δυσάρεστες εκπλήξεις στο σκιέρ—, πρέπει να ακονίζονται τακτικά, ιδιαίτερα δε πριν από τους αγώνες.

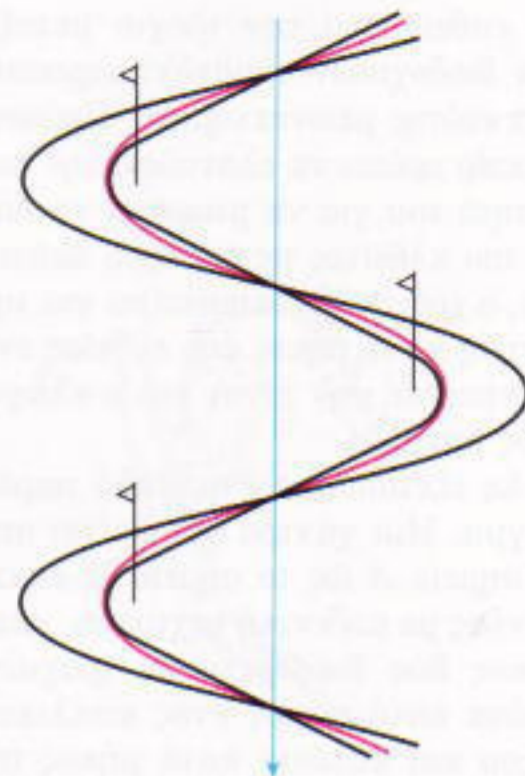
Τι φορτία ασκούνται στο σκιέρ; Ας επιχειρήσουμε να τα εκτιμήσουμε. Στο σλάλομ η μέση ταχύτητα του αθλητή ανέρχεται στα 10 m/s περίπου, ενώ η ακτίνα καμπυλότητας των τόξων που διαγράφει είναι περίπου 5 m· συνεπώς, βρίσκουμε  $F_{φκ} = mv^2/R = m \cdot 20 \text{ m/s}^2$ , δηλαδή τιμή διπλάσια από το βάρος του σκιέρ. Η φυγόκεντρος δύναμη πρέπει να προστεθεί στην κάθετη προς την πλαγιά του λόφου συνιστώσα του βάρους, που η τιμή της ισούται με  $mg \sin \alpha$  (συνήθως  $\alpha < 30^\circ$ , οπότε  $\sin \alpha > 1/2$ ). Έτσι, το ολικό φορτίο υπερβαίνει τα  $2g$  και κατά κύριο λόγο ασκείται στο εξωτερικό πόδι (η προσπάθεια στήριξης στο εσωτερικό πόδι οδηγεί συνήθως σε πτώση). Ως προς το χαρακτήρα τους, αυτά τα

φορτία παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα με τα φορτία τα οποία παράγουν μηχανήματα που χρησιμοποιούνται για τη δοκιμή της αντοχής των υλικών στις δονήσεις. Αντιλαμβάνεστε, λοιπόν, γιατί όσοι ασχολούνται επαγγελματικά με τις καταβάσεις δεν παραλείπουν να γυμνάζουν τους μύες τους ακόμη και το καλοκαίρι (για παράδειγμα, εκτελούν βαθιά ημικαθίσματα κρατώντας βάρη).

## Η τροχιά

Ας προσπαθήσουμε τώρα να αναλύσουμε την επιτυχημένη κούρσα σε επιμέρους συνιστώσες. Γιατί δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το σκιέρ ως μια χάντρα η οποία είναι περασμένη σε ένα λείο καμπυλωμένο σύρμα και ολισθαίνει κατά μήκος του; Πρώτον, επειδή ο κάθε σκιέρ επιλέγει τη διαδρομή την οποία θα ακολουθήσει μέσα στα όρια ενός διαδρόμου που ορίζεται από σημαφόρους πασσάλους στερεωμένους στο χιόνι (ή από τα όρια της πίστας στην περίπτωση του μπόμπολεϊ). Από απόψεως φυσικής, η πλαγιά του λόφου είναι ένας δισδιάστατος χώρος όπου ο σκιέρ (ακόμη και αν τον θεωρήσουμε ως υλικό σημείο) οφείλει να ανακαλύψει τη βέλτιστη τροχιά. Αντιθέτως, στην περίπτωση της κίνησης της χάντρας κατά μήκος του σύρματος έχουμε σαφώς μονοδιάστατη κίνηση. Μια τέτοια κίνηση ενδέχεται να παρέχει επαρκή προσομοίωση για το αγώνισμα του μπόμπολεϊ (πρόκειται για το πλέον «μονοδιάστατο» είδος χειμερινού αγωνίσματος), όπου η τροχιά είναι κατά το μάλλον ή ήττον καθορισμένη και ο χρόνος της καθόδου εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το πόσο επιτυχημένη θα σταθεί η προσπάθεια του πληρώματος να επιταχύνει το μπόμπολεϊ κατά την εκκίνηση.

Στο σλάλομ, τη βέλτιστη τροχιά την καθορίζει ένας συνδυασμός αρκετών παραγόντων. Εν πρώτοις, το επιθυμητό είναι να ακολουθηθεί η συντομότερη δυνατή διαδρομή, γεγονός το οποίο επιτυγχάνεται με την κατά το δυνατόν ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων από τη γραμμή πτώσης (Σχήμα 3). Το όφελος εν



Σχήμα 3

Διάφορες παραλλαγές της διαδρομής σε αγώνα σλάλομ. Με την κόκκινη γραμμή σημειώνεται η βέλτιστη διαδρομή.

προκειμένω προκύπτει όχι μόνο από τη μείωση του μήκους της διαδρομής αλλά και από την αύξηση της μέσης κλίσης της τροχιάς: όσο μεγαλύτερη γίνεται η κλίση, τόσο ενισχύεται η κινητήρια δύναμη και ελαττώνεται η τριβή. Ως εκ τούτου, οι αθλητές του σλάλομ προσπαθούν να κινούνται κατά το δυνατόν εγγύτερα στις σημαίες· φτάνουν μάλιστα στο σημείο να τις ακουμπούν με τον ώμο ή τον κορμό τους.

Η απώλεια χρόνου λόγω της επιμήκυνσης της διανυόμενης διαδρομής μπορεί να εκτιμηθεί. Έστω ότι η απόκλιση από τη βέλτιστη καμπύλη ανέρχεται σε 10 cm μόνο. Στο σλάλομ, η διαδρομή έχει συνήθως πενήντα πύλες. Αν θεωρήσουμε μια μέση ταχύτητα 10 m/s, ο χρόνος που χάνεται είναι αρκετά σημαντικός:

$$\Delta t = (50 \cdot 0,1 \text{ m}) / (10 \text{ m/s}) = 0,5 \text{ s.}$$

Αντιθέτως, στην περίπτωση των αγώνων κατάβασης υψηλής ταχύτητας ή στο γιγαντιαίο σλάλομ, όπου ο αριθμός των πυλών είναι μικρότερος και η μέση ταχύτητα μεγαλύτερη, οι μικρές αποκλίσεις από τη βέλτιστη διαδρομή δεν έχουν τόσο μεγάλη σημασία. Όσο παράξενο κι αν φαίνεται, το να «τρέχει κανείς προς τη σημαία» (δηλαδή το



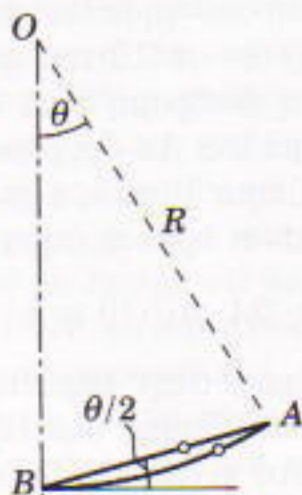
να ευθειοποιεί την τροχιά μεταξύ των διαδοχικών σημαιών) παρουσιάζει επίσης μειονεκτήματα. Πρώτον, ο σκιέρ πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του για να μπορέσει να πάρει πιο κλειστές τις στροφές. Δεύτερον, ο χρόνος που απαιτείται για την κίνηση κατά μήκος της ευθείας ενδέχεται να μην είναι και ο ελάχιστος δυνατός.

Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα. Μια χάντρα ολισθαίνει από το σημείο *A* ως το σημείο *B*, εκκινώντας με μηδενική ταχύτητα, κατά μήκος δύο διαφορετικών τροχιών: πρώτα κατά μήκος ενός κυκλικού τόξου και κατόπιν κατά μήκος της χορδής του ίδιου τόξου (Σχήμα 4). Εφόσον περιοριστούμε σε τόξα μικρού γωνιακού μεγέθους, η διάρκεια της κίνησης στην πρώτη περίπτωση θα ισούται με το ένα τέταρτο της περιόδου ταλάντωσης ενός απλού εκκρεμούς με μήκος *R* (αγνοούμε την τριβή):

$$T_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{R/g}.$$

Το μήκος της χορδής του τόξου ισούται με  $l = 2R \sin(\theta/2)$ , και η επιτάχυνση της χάντρας στη δεύτερη περίπτωση δίνεται από την έκφραση  $\gamma = g \sin(\theta/2)$ . Συνεπώς, ο αντίστοιχος χρόνος καθόδου θα ισούται με

$$T_2 = \sqrt{2l/\gamma} = 2\sqrt{R/g}.$$



Σχήμα 4

Χάντρες περασμένες σε σύρματα. Ο χρόνος που απαιτείται για να κατέλθει μια χάντρα ολισθαίνοντας κατά μήκος του τόξου *AB* είναι μικρότερος απ' ό,τι κατά μήκος της αντίστοιχης χορδής.

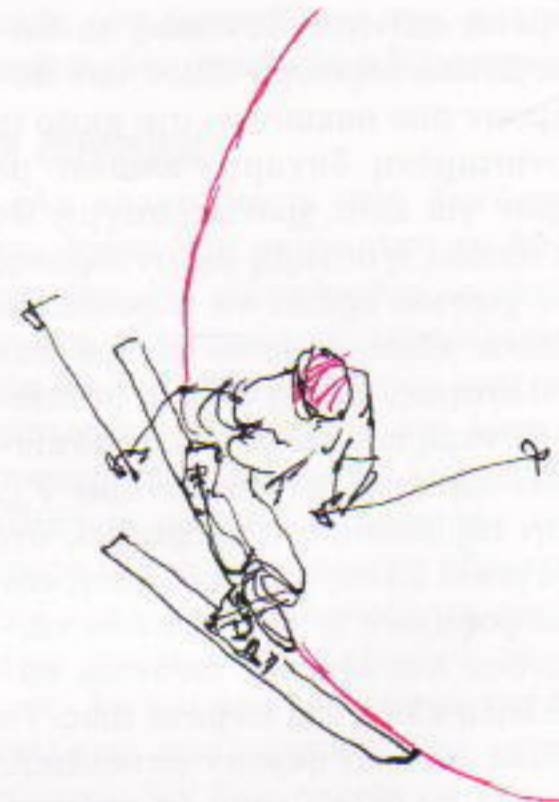
Δεδομένου ότι  $T_1/T_2 = \pi/4 < 1$ , διαπιστώνουμε ότι πρώτη στο τέρμα θα φτάσει η χάντρα που ολισθαίνει κατά μήκος του κυκλικού τόξου!

Δεν πρόκειται για θαύμα: παρότι η διαδρομή κατά μήκος του κυκλικού τόξου είναι μακρότερη, στην αρχή της έχει μεγαλύτερη κλίση. Συνεπώς, η χάντρα επιταχύνεται γρηγορότερα, και στη συγκεκριμένη περίπτωση το πλεονέκτημα της μεγαλύτερης ταχύτητας που επιτυγχάνεται αποδεικνύεται σημαντικότερο από το μειονέκτημα που αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο μήκος της διαδρομής. Φαίνεται, επομένως, εύλογη η εικασία πως μια τροχιά που αποτελείται από δύο ομαλώς συνενωμένα τόξα υπερτερεί έναντι μιας τροχιάς όπου έχουμε μια διαδοχή ευθύγραμμων τμημάτων και κλειστών στροφών.

Ήδη στην εποχή του ο Γαλιλαίος έδειξε ενδιαφέρον για το σχήμα της βραχυστόχρονης καμπύλης, όπως ονομάστηκε η τροχιά της ταχύτερης καθόδου από ένα σημείο σε άλλο. Ο Γαλιλαίος πίστευε ότι η εν λόγω καμπύλη είναι ένα κυκλικό τόξο (όπως στο παράδειγμά μας). Ωστόσο, το 1697 ο Johann Bernoulli απέδειξε ότι, εφόσον δεν υπάρχει τριβή, η «μαγική» αυτή καμπύλη δεν είναι ένα κυκλικό τόξο αλλά μια κυκλοειδής. Η εξίσωση της βραχυστόχρονης χρησιμεύει στη σχεδίαση τόσο των διαδρομών για τους αγώνες μπόμπλεϊ όσο και ορεινών δρόμων με αλληπάλληλες φουρκέτες· ωστόσο είναι αδύνατον να προσδιορίσει κανείς καθαρά θεωρητικά τη βέλτιστη τροχιά του σκιέρ στο αγώνισμα του σλάλομ. Όσοι επιδίδονται στο αγωνιστικό σκι χρειάζονται διαίσθηση και πείρα. Πρέπει να εξετάζουν προσεκτικά τη διάταξη των σημαιών. Όπως συμβούλευε ο διάσημος γάλλος σκιέρ Jean-Claude Killy, «η σκέψη τους πρέπει να τρέχει πέντε πύλες μπροστά».

## Τα σκι

Στο αλπικό σκι, όπως και σε πολλά άλλα αθλήματα, η πρόοδος στην τεχνική του αθλήματος συμβαδίζει με τη βελτίωση του εξοπλισμού. Όπως δεν μπορούσε να διανοηθεί κα-



Σχήμα 5

Στροφή «Τέλεμαρκ»: Ο σκιέρ προχωρά το εξωτερικό σκι κατά ένα βήμα προς τα εμπρός και χρησιμοποιεί τα μπαστούνια και τα χέρια του για να διατηρήσει την ισορροπία του. Ωστόσο, ο σύγχρονος εξοπλισμός για το σκι των καταβάσεων δεν επιτρέπει στο σκιέρ να εκτελέσει τέτοιου είδους στροφή.

νείς άλματα επί κοντώ στα έξι μέτρα προτού επνοηθεί το κοντάρι από φάιμπεργκλας, έτσι δεν θα μπορούσε καν να φανταστεί το στυλ και την τεχνική των σύγχρονων αθλητών του αλπικού σκι με τα παλαιά γερμανικά σκι από αγριοκαρυδιά ή τις δέστρες τύπου «Kandahar».

Τα γρήγορα πέδιλα δεν αρκεί μόνο να γλιστρούν με την ελάχιστη δυνατή τριβή, αλλά πρέπει να «πάνουν» στην πλαγιά και να μη γλιστρούν στην εγκάρσια διεύθυνση. Πράγματι, από τον τύπο για τη φυγόκεντρο δύναμη διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητα σε μια στροφή είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της εγκάρσιας δύναμης αντίδρασης *F* που ασκεί το χιόνι:

$$v = \sqrt{FR/m}.$$

Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι λόγοι που επιβάλλουν να αποφεύγεται η εγκάρσια ολίσθηση —ή, όπως λέγεται, το πλάγιο γλίστρημα—, απ' τους οποίους ο σημαντικότερος έγκειται στο ότι σε τούτο καταναλώνεται άσκοπα ενέργεια —πολύτιμη κινητική ενέργεια ξοδεύεται στην α-





Σχήμα 6

Στροφή με διάσταση «V»: Στηριζόμενος στο εσωτερικό σκι, ο σκιέρ ασκεί ώθηση στο χιόνι με το εξωτερικό σκι.

πόξεση χιονιού από την πλαγιά. Συνήθως οι σκιέρ που καταφεύγουν στο πλάγιο γλίστρημα επιθυμούν να επιβραδύνουν για να περάσουν κάποιο απότομο μέρος που τους εμπνέει ανησυχία (κυρίως οι αρχάριοι) ή και απλώς για να εξομαλύνουν την πίστα κατά την προπόνηση (κυρίως οι μνημένοι). Αν όμως κάποιος σκιέρ γλίστρησει πλάγια σε μια στροφή στη διάρκεια του αγώνα, το χρονόμετρο θα καταγράψει αυτό το γλίστρημα. Τώρα πρέπει να αντιλαμβάνεστε γιατί οι σκιέρ στρέφουν τα πόδια τους έτσι ώστε να σχηματίζουν τη μέγιστη δυνατή γωνία με την πλαγιά και οι ακμές να χώνονται στο χιόνι. (Στις μέρες μας, βέβαια, η ενέργειά τους αυτή αποκαλύπτει και το εμπορικό σήμα του κατασκευαστή στην κάτω επιφάνεια των σκι!)

Ως άθλημα, το σκι των καταβάσεων χρωστά τη γέννησή του στον πολύ Fridtjof Nansen —μεγάλο εξερευνητή των πολικών περιοχών, πολιτικό και κάτοχο του βραβείου Νόμπελ—, ο οποίος υπήρξε και συγγραφέας του πρώτου βιβλίου για τις καταβάσεις.

Στον καιρό του Nansen, οι σκιέρ ήταν εξοπλισμένοι με μαλακές δερμάτινες μπότες προσδεμένες σε



Σχήμα 7

«Παράλληλη» στροφή που εκτελείται με γλίστρημα (Christy). Τα παράλληλα σκι σαρώνουν επιφάνεια μικρότερου εμβαδού εν συγκρίσει προς τη στροφή με διάσταση «V» ως εκ τούτου, ο σκιέρ φρενάρει λιγότερο.

άκαμπτα σκι χωρίς μεταλλικές ακμές. Η πιο χρήσιμη τεχνική για τον αθλητή των καταβάσεων υπήρξε η στροφή «Τέλεμαρκ» (Σχήμα 5). Πρόκειται για μια όμορφη στροφή, η οποία όμως απαιτεί επιδεξιότητα και ενέχει τον κίνδυνο της πτώσης.

Τη στροφή «Τέλεμαρκ» την αντικατέστησε αργότερα η περισσότερο δημοφιλής στροφή με διάσταση «V». Στις μέρες μας, οι περισσότεροι σκιέρ ξεκινούν την εκμάθηση του σκι από αυτήν ακριβώς τη στροφή. Αποτελεί τον απλούστερο τρόπο για να στρίψει κανείς, αλλά δυστυχώς και τον βραδύτερο.

Η «τελευταία λέξη» στις στροφές είναι η «παράλληλη» στροφή, στην οποία τα σκι κρατιούνται παράλληλα. Η «παράλληλη» στροφή βελτιωνόταν διαρκώς, και με την πάροδο του χρόνου εδραιώθηκε ως το βασικό στοιχείο της τεχνικής του σκιέρ των καταβάσεων. Αρχικά, η «παράλληλη» στροφή εκτελούνταν με πλάγιο γλίστρημα (στροφή Christy, Σχήμα 7). Το εσωτερικό σκι δεν δέχεται φορτίο· το σώμα του σκιέρ γέρνει λίγο μπροστά, οπότε η μύτη του σκι κρατά στο χιόνι καλύτερα από ό,τι η ουρά του. Έτσι η ουρά ολι-



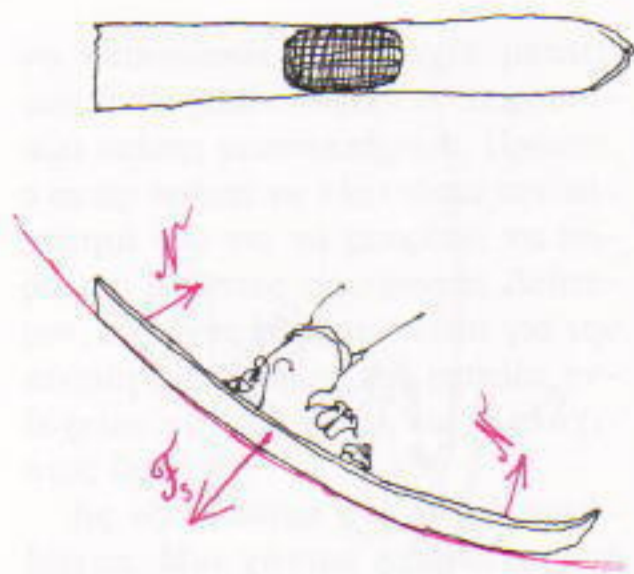
Σχήμα 8

«Χαραχτή» στροφή. Τα σκι είναι λυγισμένα και δεν αποξέουν χιόνι, επιτρέποντας έτσι το ελάχιστο δυνατό φρενάρισμα.

σθαίνει ελαφρώς κατά την εκτέλεση της στροφής. Πρόκειται για μια στροφή που υπερέχει έναντι των προηγούμενων σε ταχύτητα και σε ασφάλεια.

Η περαιτέρω πρόοδος στην τεχνική της στροφής ήρθε φυσιολογικά. Πρόκειται για τη λεγόμενη «χαραχτή» στροφή (Σχήμα 8), όπου η αντίσταση στην κίνηση ελαχιστοποιείται. Καθώς οι ταχύτητες αυξάνονταν, τις παλιές απαιτήσεις αναφορικά με τον εξοπλισμό του σκι τις αντικατέστησαν οι ακριβώς αντίθετες. Οι σύγχρονες μπότες του σκι κατασκευάζονται από στερεό πλαστικό και έχουν ψηλά φόντια. Μεταφέρουν δυνάμεις κατευθείαν από το άκρο πόδι στο πόδιλο και επιτρέπουν καλή κίνηση πάνω στις ακμές. Το ίδιο το πόδιλο έχει γίνει εύκαμπτο, οπότε μπορεί να λυγίζει σύμφωνα με το σχήμα του τόξου, ώστε να εγγράφει τη στροφή αφήνοντας ένα στενό ίχνος χαραγμένο στο χιόνι. Για να μπορεί το σκι ευκολότερα να λαμβάνει σχήμα τόξου, κατασκευάζεται ακριβώς κάτω από την μπότα κάπως στενότερο (Σχήμα 9). Όταν ο σκιέρ κινείται πάνω στις ακμές, τα σκι κρατούν στο χιόνι πιο γερά στις ουρές τους, οπότε η πίεση τα κα-





**Σχήμα 9**

Για να διευκολύνεται το λύγιμά τους στις στροφές, τα σκι κατασκευάζονται με ένα στένωμα στο μέσον τους. Όταν ο σκιέρ κινείται πάνω στις ακμές, η πίεση του ποδιού δίνει στο σκι την κάμψη που χρειάζεται.

μπυλώνει έτσι όπως πρέπει.

Η κατασκευή καλών σκι δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο κατασκευαστής οφείλει να ανταποκριθεί σε δύο τουλάχιστον αλληλοσυγκρουόμενες απαιτήσεις. Πρώτον, το σκι πρέπει να κάμπτεται ελαστικά ώστε να προσαρμόζεται στα τόξα στη διαμήκη διεύθυνση. Δεύτερον, για να αποτρέπεται το πλάγιο γλίστρημά του, το σκι πρέπει να είναι αρκούτως δύσκαμπτο για να μην ενδίδει στη στρέψη που τείνει να του προσδώσει σχήμα προπέλας. Τα σκι πρέπει επίσης να «διατηρούν τη διεύθυνση» και να μην καμπυλώνονται στο επίπεδο της πλαγιάς (δηλαδή, δεν πρέπει να παίρνουν σχήμα σπάθας).

Ο ικανοποιητικός συνδυασμός αυτών και μόνο των δύο χαρακτηριστικών αντιπροσωπεύει για τους κατασκευαστές ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα, που για τη λύση του δεν υπάρχουν σαφείς κανόνες. Στο καθιερωμένο σλάλομ, με τις πιο κλειστές στροφές και τις χαμηλότερες ταχύτητες, οι σκιέρ χρησιμοποιούν πέδιλα κοντότερα και πιο εύκαμπτα από εκείνα που χρησιμοποιούνται στο γιγαντιαίο σλάλομ. Αλλά το χιόνι και οι εκάστοτε καιρικές συνθήκες εγείρουν και τις δικές τους ιδιαίτερες απαιτήσεις. Έτσι, μόλις πριν από την έναρξη της κούρσας, ο μελλοντικός παγκόσμιος

πρωταθλητής θα αποφασίσει με ποιο συγκεκριμένο ζεύγος σκι θα δρέψει τη νίκη, επιλέγοντάς το από ολόκληρη συλλογή ζευγών σκι που έχουν προετοιμαστεί με περισσή επιμέλεια.

Ευτυχώς, όσοι επιδίδονται ερασιτεχνικά στο σκι των καταβάσεων δεν χρειάζεται να ανησυχούν με τέτοιες λεπτομέρειες. Τα ειδικά σκι τα οποία βλέπουμε στην τηλεόραση δεν αντιπροσωπεύουν παρά μόνο την κορυφή του παγόβουνου. Ενώ ο επαγγελματικός αθλητικός εξοπλισμός εγείρει πάρα πολλές απαιτήσεις και δεν συγχωρεί ούτε τα ελάχιστα σφάλματα, εκατομμύρια απλούστερα και πιο άνετα σκι υπηρετούν πιστά τους πολυπληθείς ερασιτέχνες αθλητές που λατρεύουν αυτό το σημαντικό άθλημα.

### Μερικά τεχνάσματα

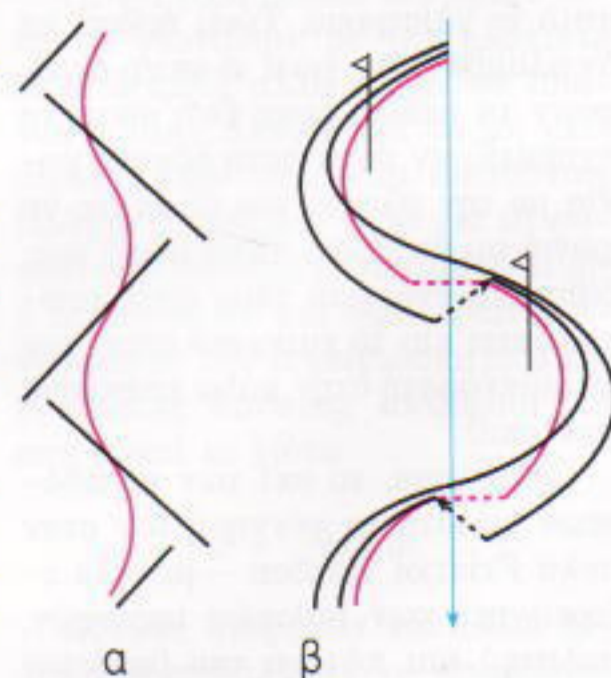
Ας έλθουμε τώρα να εξετάσουμε το σημαντικότερο στοιχείο, χωρίς το οποίο η τεχνική τόσο του σύγχρονου σλάλομ όσο και του γιγαντιαίου θα αποδεικνυόταν αδύνατη. Παρότι είναι σαφείς οι βασικές φυσικές αρχές στις οποίες στηρίζεται αυτό το στοιχείο, μερικά από όσα θα πούμε ενδέχεται να εγείρουν αντιρρήσεις. Ορισμένοι ειδικοί δεν πιστεύουν ότι οι σκιέρ των καταβάσεων μπορούν να αυξήσουν την ταχύτητά τους με τις δικές τους μανούβρες, με αυτές που εκτελούν οι ίδιοι, έστω και αν αυτό φαίνεται να το αποδεικνύουν τα κινηματογραφημένα ντοκουμέντα από την αγωνιστική πρακτική εξεχόντων σκιέρ. Τις κρυμμένες δυνατότητες που υπάρχουν για ενεργητικό σκι τις κατέδειξε ο μεγάλος Ingemar Stenmark ήδη από τις αρχές της φανταστικής του σταδιοδρομίας. Ο «σουηδικός τυφώνας», όπως τον αποκαλούν, άφησε πίσω τους αντιπάλους του κατά ένα ολόκληρο δευτερόλεπτο, ενώ εκείνοι πάλευαν απεγνωσμένα για δέκατα μόνο του δευτερολέπτου.

Τα όσα θα πούμε στη συνέχεια πιθανόν να ηχήσουν απίστευτα σε όσους είναι μυημένοι στο σκι. Μολονότι εκτιμούμε και σεβόμαστε την εμπειρία τους, εδώ θα περιγράψουμε τη διαδικασία έτσι όπως την α-

ντιλαμβανόμαστε εμείς από την άποψη της φυσικής.

Ας αρχίσουμε λοιπόν θέτοντας ένα ερώτημα. Μήπως μπορεί να βρεθεί σε άλλο άθλημα κάποιο στοιχείο το οποίο θα μας βοηθήσει να εξιχνιάσουμε το φαινόμενο της επιτάχυνσης στο αγώνισμα των καταβάσεων; Βεβαίως και μπορεί! Το ζητούμενο στοιχείο μάς το προσφέρει το συνηθισμένο σκι σε ανώμαλο δρόμο. Στην εποχή μας, η τεχνική του «πατινάζ» έχει γίνει πολύ της μόδας (Σχήμα 10α). Πρόκειται για μια τεχνική η οποία οδήγησε σε νέα ρεκόρ αγώνων. Είναι δυνατόν, άραγε, να την προσαρμόσουν στις ανάγκες τους οι αθλητές των σλάλομ;

Πρόκειται για ιδέα αρκετά παλιά. Στην πραγματικότητα, η τεχνική του πατινάζ πρωτοδοκιμάστηκε στο αλπικό σκι προτού διαδοθεί στα πεδινά. Στην κατωφέρεια της λοφοπλαγιάς, η εν λόγω τεχνική λειτουργεί σε αδρές γραμμές ως εξής: κάθε στροφή παίρνεται με ώθηση μόνο του εξωτερικού σκι, οπότε οι τροχιές των δύο σκι αποκλίνουν ελαφρώς από την αρχή του τόξου έως το τέλος του (Σχήμα 10β). Εν προκειμένω, το από πού προέρχεται η αύξηση της ταχύτητας είναι οφθαλμοφανές, αλλά υπάρχουν και οφειλές που πρέπει να εξοφλήσουμε. Κατά πρώτον, για να εφαρμόσει ένας σκι-



**Σχήμα 10**

Η τεχνική του πατινάζ σε επίπεδη τοποθεσία (α) και σε πλαγιά (β). Οι κόκκινες καμπύλες δείχνουν την τροχιά που ακολουθούν τα κέντρα μάζας των σκιέρ, ενώ οι μαύρες καμπύλες είναι οι τροχιές των σκι.



έρ την τεχνική του πατινάζ απαιτείται να διαθέτει εξαιρετο συντονισμό των ποδιών καθώς και την ικανότητα να διατηρεί την ισορροπία του τη στιγμή κατά την οποία το φορτίο μεταφέρεται στο εσωτερικό πόδι. Κατά δεύτερον, η εν λόγω τεχνική παρατείνει τη μετάβαση από τη μια στροφή στην επόμενη. Στα σημεία όπου διασταυρώνεται η τροχιά με τη γραμμή πτώσης, ο σκιέρ εγκαταλείπει το ένα τόξο για να ακολουθήσει το άλλο, και μεταφέρει το κέντρο μάζας του από το ένα σκι στο άλλο. Κατόπιν φτάνει η επόμενη στροφή. Εάν τα σκι είναι πολύ ανοιχτά, η μεταφορά του κέντρου μάζας θα διαρκέσει περισσότερο, οπότε το ευθύγραμμο μέρος της τροχιάς θα μεγαλώσει. Επιπροσθέτως δε, τα σκι επί μακρότερο χρόνο δεν θα έχουν τις ακμές τους γαντζωμένες στο χιόνι, οπότε ο σκιέρ θα επιβραδύνεται λόγω πλάγιου γλιστρήματος. Το φαινόμενο αυτό εκδηλώνεται σε περάσματα όπου είναι πολύ δύσκολο να κρατηθεί κανείς στην πλαγιά. Έτσι, η τεχνική του πατινάζ δεν αποτελεί τον ταχύτερο δυνατό τρόπο κίνησης.

Θα ήταν ιδανικό εάν μπορούσε κανείς και να επιταχύνεται και να κρατά τα σκι πλησιέστερα μεταξύ τους. Μπορεί πραγματικά να επιτευχθεί κάτι τέτοιο; Ας αναλύσουμε την τεχνική του πατινάζ ακόμη μία φορά (Σχήμα 10α). Στους ανώμαλους δρόμους, το κέντρο μάζας του σκιέρ διαγράφει μια κυματοειδή τροχιά (την κόκκινη γραμμή στο Σχήμα 10α). Το σώμα του αθλητή κινείται μπροστά από το σκι όπου στηρίζεται, σχηματίζοντας κάποια γωνία με αυτό. Στη διάρκεια τούτης ακριβώς της περιόδου εκτελεί έργο ο σκιέρ και κερδίζει ταχύτητα —και όχι ενόσω αλλάζει το σκι όπου στηρίζεται.

Δεν συναντήσαμε το ίδιο είδος κίνησης προηγουμένως; Ναι, πράγματι! Ο σκιέρ που αγωνίζεται στο σλάλομ κάνει επίσης μια κίνηση ζιγκ-ζαγκ, και το σώμα του δεν ακολουθεί δουλικά τα σκι. Στο τέλος της στροφής το κέντρο μάζας του προλαβαίνει τα σκι, περνά από πάνω τους και κινείται προς τα εμπρός,

δηλαδή προς το εσωτερικό του επόμενου τόξου. Μπορεί να προστεθεί στην κίνηση αυτή και μια ώθηση; Η απάντηση είναι ναι.

Ωστόσο, πρόκειται για ώθηση πολύ διαφορετική από εκείνη που βλέπουμε στην τεχνική του πατινάζ, και σπάνια τη διακρίνει το άπειρο μάτι. Στην πραγματικότητα, έχουμε έναν ειδικό τύπο κίνησης που εκτελείται σε δύο φάσεις: *λύγισμα* και *τέντωμα*. Αρχικά, όταν οι σκιέρ φτάνουν στο σημείο όπου ενώνονται τα τόξα —στο σημείο όπου η τροχιά τέμνει τη γραμμή πτώσης και όπου το σώμα προλαβαίνει τα σκι—, λυγίζουν τα γόνατά τους σαν να επρόκειτο να απορροφήσουν τον κραδασμό από μια πρόσκρουση. Αυτό το λύγισμα (μερικές φορές είναι μάλλον απότομο) επιτρέπει στο σκιέρ να διατηρήσει την ταχύτητα που κέρδισε και να αποφύγει το πλάγιο γλιστρήμα. Αμέσως μόλις ο σκιέρ περάσει το σημείο όπου συνενώνονται τα τόξα τα γόνατα τεντώνονται, και τούτη η κίνηση ωθεί το σώμα ελαφρώς προς τα εμπρός, προσδίδοντάς του έτσι μια πρόσθετη ώθηση στην κατεύθυνση της γραμμής πτώσης. Στο τέλος του τόξου τα σκι βρίσκονται και πάλι μπροστά από το σκιέρ, και ο κύκλος του λυγίσματος (απορρόφηση του κραδασμού) και του τεντώματος (ώθηση) επαναλαμβάνεται. Η όλη διαδικασία εκτελείται με τα σκι παράλληλα και σε μικρή απόσταση το ένα από το άλλο.

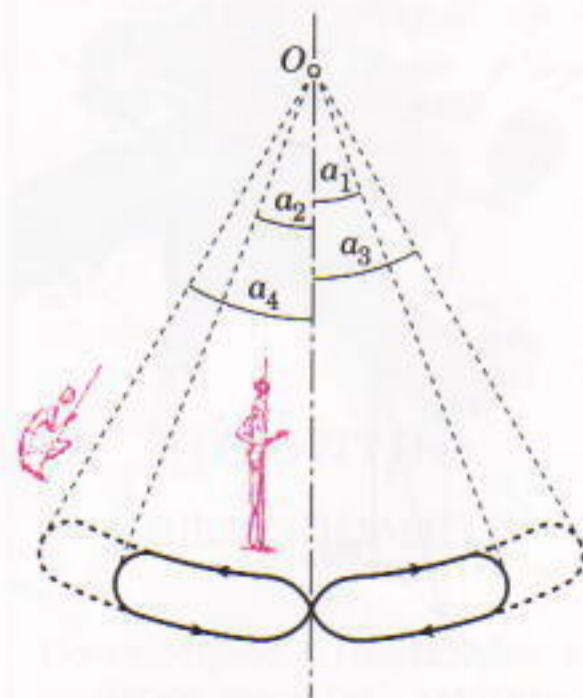
Παρεμπιπτόντως, εάν έτυχε να παρακολουθήσετε αγώνες καταβάσεων, πιθανόν να προσέξατε ότι σε πολλές περιπτώσεις οι σκιέρ κάνουν πλάγια βήματα, από σκι σε σκι. Το συγκεκριμένο γεγονός δεν έρχεται σε αντίφαση με το συλλογισμό μας: πρώτον, η πίστα του σκι δεν είναι απολύτως επίπεδη· δεύτερον, αυτά τα μικρά βήματα βοηθούν τους σκιέρ να διατηρούν την ισορροπία τους· τρίτον, στο κάτω κάτω ακόμη και οι μεγάλοι δεξιότεχνες μπορεί να κάνουν ένα λάθος.

Για να αποσαφηνίσουμε περαιτέρω τη φυσική του σκι, στρεφόμαστε τώρα σε ένα άλλο είδος ψυχαγωγίας που κάθε άλλο παρά στα χειμερινά αθλήματα ανήκει.

## Θερινή αναλογία

Ας αφήσουμε για λίγο τις καταβάσεις και ας θυμηθούμε το ωραίο καλοκαιράκι και τις μεγάλες αιώρες (κούνιες) του πάρκου. Αφού περάσει το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της, η αιώρα ανεβαίνει προς τα πάνω επιβραδύνοντας βαθμιαία την κίνησή της. Τη στιγμή κατά την οποία η αιώρα ακινητοποιείται, στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, καθόμαστε απότομα και ορμάμε προς το έδαφος με τον αέρα να σφυρίζει στ' αυτιά μας. Στο χαμηλότερο σημείο, όπου η υπερφόρτιση γίνεται μέγιστη, σηκωνόμαστε όρθιοι, και νά που πετάμε ξανά προς στον ουρανό με δυνατό καρδιοχτύπι —και το σπουδαιότερο, τούτη τη φορά ανεβαίνουμε λίγο ψηλότερα από πριν. Στη διάρκεια της αιώρησης, το κέντρο βάρους του συστήματος διαγράφει ένα σχήμα που μοιάζει με «οριζοντιωμένο οχτάρι» (Σχήμα 11).

Η αύξηση του πλάτους ενός ταλαντούμενου συστήματος λόγω μεταβολών των παραμέτρων του (στην αιώρησή μας η παράμετρος που μεταβάλλεται είναι η απόσταση του κέντρου μάζας από το σημείο ανάρτησης) καλείται παραμετρικός συντονισμός. Με το να σηκωνόμαστε όρθιοι στο χαμηλότερο σημείο παράγουμε θετικό έργο, το οποίο καταναλώνουν από κοινού η φυγόκεντρος δύναμη και το βάρος (εφόσον



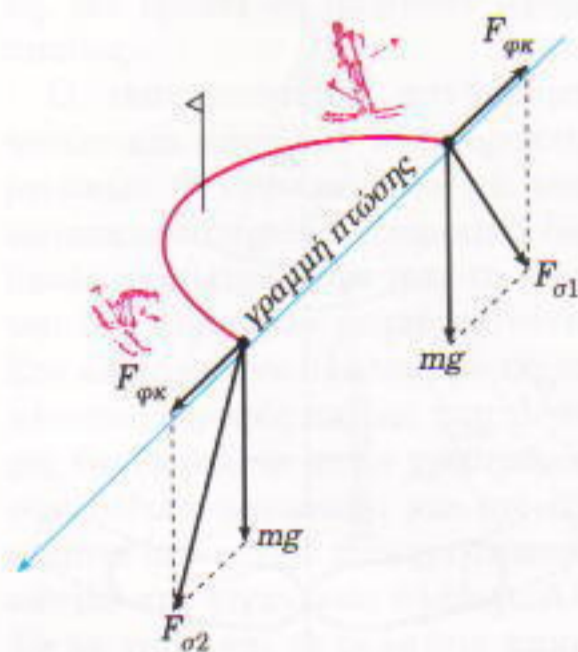
Σχήμα 11

Η τροχιά του κέντρου μάζας κατά την αιώρηση στην κούνια.



θεωρήσουμε την κίνηση στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Στο ανώτατο σημείο η φυγόκεντρος μηδενίζεται, ενώ η μόνη δράση συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης ισούται με  $mg \sin \alpha$ . Έτσι, το αρνητικό έργο που παράγεται όταν καθόμαστε (με το ίδιο πλάτος) είναι μικρότερο κατ' απόλυτη τιμή. Συμπεραίνουμε, συνεπώς, ότι στην πορεία ενός κύκλου παράγεται θετικό ολικό έργο, με αποτέλεσμα να αυξάνεται συνεχώς η ενέργεια του συστήματος.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να επιχειρήσουμε μια εκτίμηση του ενεργειακού ισοζυγίου ενός σκιέρ που εκτελεί κατάβαση. Εδώ μας περιμένει μια έκπληξη. Εκ πρώτης όψης, τα πάντα φαίνονται όμοια με τα όσα συμβαίνουν στην αιώρα. Στο σκιέρ που κινείται κατά μήκος ενός τόξου δρουν τόσο η φυγόκεντρος όσο και η δύναμη της βαρύτητας (Σχήμα 12). Η γωνία μεταξύ αυτών των δυνάμεων μεταβάλλεται, οπότε η συνισταμένη δύναμη γίνεται ελάχιστη στην αρχή του τόξου ( $F_{\sigma 1}$ ), ενώ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της ( $F_{\sigma 2}$ ) στο τέλος του τόξου. Όταν κείται κάτω, ο σκιέρ παράγει αρνητικό έργο, ενώ όταν σηκώνεται πάλι παράγει θετικό έργο. Ωστόσο, όταν ισιώνει το σώμα του στην αρχή του τόξου, του ασκείται μικρότερη δύναμη απ' ό,τι όταν λυγίζει τα πόδια του στο τέλος του τόξου. Έτσι, το



Σχήμα 12

Η συνισταμένη της βαρυτικής και της φυγόκεντρος δύναμης στην αρχή και στο τέλος ενός τόξου:  $F_{\sigma 2} > F_{\sigma 1}$ .

ολικό έργο που παράγεται κατά τη διαδικασία λυγίσματος-τεντώματος (ή απορρόφησης-ώθησης) είναι αρνητικό! Δεν μοιάζει παράδοξο; Θα μας φαινόταν λογικότερο ο σκιέρ να παράγει θετικό έργο προκειμένου να αυξήσει την κινητική του ενέργεια.

Κι όμως, εδώ δεν υπάρχει λάθος: πράγματι, ο σκιέρ παράγει έργο για να μειώσει την ταχύτητά του! Ως τώρα δεν καταπαστήκαμε με το ενεργειακό ισοζύγιο: μας απορρόφησε εντελώς ο στόχος της αύξησης της ταχύτητας και της ελαχιστοποίησης των απωλειών ενέργειας. Με τη θεωρητική βιάση που δείξαμε δεν πρέπει να μας παραξενεύει το ότι σκοντάψαμε. Αλλά ήρθε η ώρα να κάνουμε την ανάλυσή μας με κάθε λεπτομέρεια. Γράφουμε, λοιπόν, το νόμο διατήρησης της ενέργειας για κάποιο τμήμα της διαδρομής, με τη μορφή

$$\Delta E = mg\Delta h + \frac{\Delta(mv^2)}{2} = W_{\varphi} + W_{\sigma\kappa} + W_{\sigma\kappa}$$

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης εμφανίζονται οι μεταβολές της δυναμικής ενέργειας ( $mg\Delta h$ ) και της κινητικής ενέργειας ( $\Delta(mv^2)/2$ ) του σκιέρ, ενώ στο δεξιό έχουμε το έργο που παράγουν ο σκιέρ, η τριβή και η αντίσταση του αέρα (ή οπισθέλκουσα). Τι μπορούμε να πούμε για τις συγκριτικές τιμές αυτών των όρων;

Ας αρχίσουμε την ανάλυσή μας από το αριστερό μέλος της εξίσωσης. Η μέση ταχύτητα ενός σκιέρ δεν μεταβάλλεται πολύ κατά μήκος της διαδρομής. Έτσι, ο δεύτερος όρος δεν συνεισφέρει αισθητά: συνεπώς, μπορούμε να τον διαγράψουμε από την εξίσωση του ενεργειακού ισοζυγίου, πράγμα που σημαίνει ότι θέτουμε  $\Delta(mv^2)/2 \approx 0$ . Αντιθέτως, ο πρώτος όρος είναι μεγάλος. Πράγματι, προκειμένου να κερδίσει την τυπική ταχύτητα για έναν τέτοιο αγώνα ( $v \sim 10 \text{ m/s}$ ), ο αθλητής του σλάλομ πρέπει να κατέβει κατά  $\Delta h = v^2/(2g) = 5 \text{ m}$ . Για τις κούρσες του σλάλομ, όπου οι μειώσεις υψομέτρου ανέρχονται σε εκατοντάδες μέτρα, η εν λόγω τιμή αντιπροσωπεύει κάτι το

ουσιαστικά αμελητέο.

Ας στραφούμε τώρα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης του ενεργειακού ισοζυγίου. Στη «χαρακτή» στροφή τα σκι φρενάρουν πολύ λίγο. Η αντίσταση του αέρα είναι μεγαλύτερη, και εξαρτάται από την ταχύτητα. Ωστόσο, και οι δύο αυτές επιβραδύνουσες δυνάμεις δεν θα εμποδίσουν το σκιέρ να αναπτύξει μια ταχύτητα περίπου  $100 \text{ km/h}$  ( $28 \text{ m/s}$ ). (Παρότι στις στροφές του σλάλομ στα σκι αναπτύσσεται τριβή μεγαλύτερη απ' ό,τι στους αγώνες κατάβασης, η διαφορά δεν είναι αρκούντως μεγάλη ώστε να ανατρέψει το συμπέρασμά μας.) Για κάποιον που κινείται με τέτοια ταχύτητα η διαδρομή θα γινόταν αδιάβατη, αφού οι σημαίες κατά μήκος της θα έμοιαζαν με φράχτη από πασσάλους. Έτσι, η βασική έγνοια του σκιέρ δεν είναι πώς να κερδίσει αλλά πώς να χάσει ταχύτητα! Επομένως, το αρνητικό έργο που παράγει ο σκιέρ στον κύκλο λυγίσματος-τεντώματος αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να ικανοποιηθεί το ενεργειακό ισοζύγιο:

$$W_{\sigma\kappa} < 0.$$

Προκειμένου λοιπόν να νικήσει, ο σκιέρ πρέπει να παράγει έργο, και το αρνητικό του πρόσημο δεν διευκολύνει τα πράγματα. Διαπιστώνουμε ότι και η φυσική συμμορφώνεται με τον γενικό κανόνα: η νίκη απαιτεί σκληρή προσπάθεια!

Γιατί προκρίνεται αυτός ο τρόπος μείωσης της ενέργειας ως αποδοτικότερος έναντι της βαθμιαίας απώλειας που συντελείται στη διάρκεια μιας στροφής με πλάγιο γλίστρημα; Πρώτον, τα στατικά φορτία αντικαθίστανται από δυναμικά, που κουράζουν λιγότερο τον αθλητή. Τώρα δεν χρειάζεται κανείς να πιέζει με όλη του τη δύναμη τις ακμές των σκι κόντρα στο χιόνι και να χάνει ταχύτητα στο τέλος του τόξου. Δεύτερον, θυμηθείτε το παράδειγμά μας με τις δύο χάντρες που κατέβαιναν περασμένες σε σύρματα (Σχήμα 4). Αν η ενέργεια του σκιέρ καταναλωθεί για να υπερνικηθεί η τριβή, η κίνηση κατά μήκος του τόξου μπορεί να θεωρείται κατά προσέγγιση ομαλά επιταχυνόμενη, όπως και της



χάντρας κατά μήκος του ευθύγραμμου σύρματος. Όταν όμως ο σκιέρ επιταχύνεται καθώς διαγράφει τη στροφή, παράγει έργο και κερδίζει ταχύτητα στην αρχή του τόξου, ενώ χάνει ταχύτητα στο τέλος του. Συνεπώς, η μέση ταχύτητά του είναι μεγαλύτερη, και απαιτείται μικρότερος χρόνος για να πάρει τη στροφή (ακριβώς όπως και η χάντρα στο σύρμα σχήματος κυκλικού τόξου). Έτσι, η τεχνική του λυγίσματος και του τεντώματος παρέχει έναν πρόσθετο τρόπο για να ελέγχεται η ταχύτητα.

Εν αντιθέσει προς το έλκνηρο και το μπόμπλεϊ, το σκι των καταβάσεων διακρίνεται για την ελευθερία της κίνησης και τις μοναδικές δυναμικές δυνατότητες που προσφέρει. Από αυτή την άποψη μοιάζει με το σκέιτμπορντ. Παρεμπιπτόντως, το σκέιτμπορντ παρέχει ένα καλό παράδειγμα το οποίο επιβεβαιώνει την άποψη ότι η τεχνική του πατινάζ δεν αποτελεί και τον μοναδικό τρόπο για να επιταχυνθεί κανείς —πού μπορεί να «βάλει δύναμη» κανείς όταν και τα δύο του πόδια στηρίζονται σε ένα μοναδικό πέδιλο; Η επιτάχυνση που κερδίζεται μέσω παραμετρικού συντονισμού επιτρέπει στον αναβάτη του σκέιτμπορντ να ανεβεί σε μικρά ύψη. Η λειτουργία του βασίζεται στον ίδιο μηχανισμό: το σώμα είναι κεκλιμένο προς το εσωτερικό του τόξου, οπότε το λύγισμα στην αρχή του τόξου ακολουθείται από τέντωμα στο τέλος του, και με αυτή τη διαδικασία δίνεται μια συνισταμένη ώθηση στην κατεύθυνση της κίνησης. Δεν θα έπρεπε να παρασυρθεί κανείς από το ότι ο σκεϊτμπορντερ συνοδεύει το λύγισμα με μια έντονη περιστροφή της οσφύος: πρόκειται για ενέργεια που τον βοηθά να μην παρεκκλίνει από το τόξο.

Από την οπτική γωνία του εξωτερικού παρατηρητή, τον βασικό ρόλο τον παίζει η κάθετη (προς τον άξονα του σκέιτμπορντ) συνιστώσα της δύναμης της τριβής, η οποία παρουσιάζει ομοιότητα με τη δύναμη της αντίδρασης του χιονιού κατά την κίνηση πάνω στις ακμές των σκι στις καταβάσεις. Κατά τη διάρ-

κεια μιας κίνησης ζιγκ-ζαγκ, τόσο η τιμή όσο και η κατεύθυνση της δύναμης παρουσιάζουν εναλλαγές: ωστόσο, κατά μέσον όρο η δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα εμπρός.

Έτσι, αποκαλύφθηκε πλέον ολόκληρο το μυστικό. Αλλά μη φανταστείτε ότι μάθατε τα πάντα για το σκι των καταβάσεων: το θεωρητικό μοντέλο μας, που θα μπορούσαμε να το ονομάσουμε μοντέλο «κάτσε κάτω-σήκω πάνω», είναι σε μεγάλο βαθμό υπεραπλουστευτικό. Δεν μπορείς να μάθεις κολύμπι παρά μόνο μπαίνοντας στο νερό! Δεν υπάρχει σκιέρ καταβάσεων που να μην έχει σχηματίσει πολλές στοίβες χιονιού παρασύροντάς το με το ίδιο του το σώμα.

### Συμπεράσματα

Το σκι των καταβάσεων συνοδεύεται από μια απaráμιλλη αίσθηση υπέροχης ελευθερίας, με έναν ολόκληρο κόσμο να ξεχύνεται καταπάνω σου καθώς το παγωμένο χιόνι σπθίζει. Πρόκειται για μια απόλαυση που δεν περιγράφεται με μαθηματικούς τύπους. Τα μικρά παιδιά μαθαίνουν σκι μιμούμενα τους μεγαλύτερους τους, χωρίς να έχουν την παραμικρή γνώση από τη φυσική του σκι. Ωστόσο, η γνώση δεν παύει ποτέ να αποτελεί δύναμη. Έτσι, οι νόμοι του Νεύτωνα μας δείχνουν έναν διαφορετικό δρόμο προς την κατάκτηση μιας άρτιας τεχνικής στο σκι —από το «κεφάλι στα πόδια», που λέει ο λόγος.

Υπάρχουν μερικά σημεία που ούτε καν τα θίξαμε στην ανάλυσή μας. Για παράδειγμα, επί του σκιέρ δεν δρουν μόνον οι δυνάμεις αλλά και οι ροπές τους. Με άλλα λόγια, ο σκιέρ δεν είναι ένα υλικό σημείο, αλλά περιστρεφόμενο φυσικό σώμα. Σε τούτη ίσως την κατεύθυνση θα ανακαλύψουν οι λάτρεις του σκι τις απαντήσεις για κάποια άλματα προβλήματα που τους απασχολούν.

Και αν δεν είστε λάτρης του σκι; Τώρα που γνωρίζετε ορισμένα στοιχεία της θεωρίας του, δεν θα επιθυμούσατε να θέσετε σε εφαρμογή τις γνώσεις σας σε κάποιο άλλο άθλημα; Γιατί να μην προσπαθήσετε; Όσο για μένα, αν το σκι των καταβάσε-

ων δεν είναι η ευτυχία αυτοπροσώπως, τότε χωρίς τον παραμικρό δισταγμό δηλώνω ότι δεν γνωρίζω καλύτερο υποκατάστατό της. ■

**Δείτε ακόμη** τα παρακάτω άρθρα που αναφέρονται στην τριβή, τη διατήρηση της ενέργειας και το συντονισμό:

- Y.G. Pavlenko, «Το παράδοξο του δορυφόρου», Νοέμ./Δεκ. 1996.
- A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Πρωτάθλημα μπόουλινγκ», Σεπτ./Οκτ. 1995.
- A. Chernoutsan, «Μια συναρπαστική ιστορία», Μάιος/Ιούν. 1996.
- A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Κινούμενη ύλη», Ιούλ./Αύγ. 1996.
- A. Chernoutsan, «Γιατί δεν γλιστράει ο σάκος», Ιούλ./Αύγ. 1997.
- L. Turner και J.L. Pratt, «Αιωρείται ένα μολύβι κατά την πτώση του;», Μάιος/Ιούν. 1998.
- B. Stasenko, «Οι οδυνηρές συνέπειες του συντονισμού», Μάιος/Ιούν. 1998.
- A. Stasenko, «Πετροβολώντας την άβυσσο», Ιαν./Φεβ. 1999.

**ΣΤΟΑ  
ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ**



**κάτοπτρο**  
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Πανεπιστημίου & Περσμαζόγλου 5,  
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)  
e-mail: [katoptro@otenet.gr](mailto:katoptro@otenet.gr)



# Carl Friedrich Gauss

«Τίποτα δεν μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρωμένο αν απομένει να γίνει έστω και το ελάχιστο.»

—C.F. Gauss

S. Gindikin

**Τ**Ο 1854 Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΥΓΕΙΑΣ του Gauss επιδεινώθηκε· ο «βασιλικός σύμβουλος» —όπως αποκαλούσαν τον Gauss οι συνάδελφοί του στο Πανεπιστήμιο του Γκαίτινγκεν— σταμάτησε τους περιπάτους από το αστεροσκοπείο ως το μουσείο λογοτεχνίας, που αποτελούσαν μέρος της καθημερινής του ρουτίνας επί είκοσι χρόνια. Ο καθηγητής, που πλησίαζε τα ογδόντα, πείστηκε επιτέλους να συμβουλευτεί ένα γιατρό. Το καλοκαίρι ένιωθε καλύτερα —παραβρέθηκε μάλιστα στα εγκαίνια της σιδηροδρομικής γραμμής Γκαίτινγκεν-Ανόβερου. Τον Ιανουάριο του 1855 συμφώνησε να ποζάρει στον καλλιτέχνη Heseman για ένα μενταγιόν. Μετά το θάνατο του Gauss, τον Φεβρουάριο του 1855, βάσει αυτού του μενταγιόν κατασκευάστηκε προς τιμήν του ένα μετάλλιο το οποίο έφερε την επιγραφή *Mathematicorum princeps* (Πρίγκιψ των Μαθηματικών) κάτω από την ανάγλυφη εικόνα του. Η ιστορία κάθε αληθινού πρίγκιπα αρχίζει με την παιδική ηλικία περιβεβλημένη από θρύλους. Ο Gauss δεν αποτελεί εξαίρεση.

## Μπρούνοβικ, 1777-1795

Ο Gauss δεν κληρονόμησε τον τίτλο του, αν και τα μαθηματικά δεν ήταν τελείως ξένα στον πατέρα του, τον Gerhard Diedrich, έναν πραγ-

ματικό πολυτεχνίτη. Ήταν ειδικός στα σιντριβάνια και δούλευε επίσης ως κηπουρός. Επιπλέον, ήταν γνωστός για την ικανότητά του στους υπολογισμούς. Οι έμποροι χρησιμοποιούσαν τις υπηρεσίες του στις εμποροπανηγύρεις στο Μπρούνοβικ, ακόμη και στη Λειψία, ενώ είχε μόνη εργασία στο μεγαλύτερο γραφείο τελετών του Μπρούνοβικ (θέση που κληροδότησε στο γιο του από τον πρώτο του γάμο —τον Georg— όταν αυτός εγκατέλειψε τη στρατιωτική του καριέρα).

Ο Carl Friedrich γεννήθηκε στις 30 Απριλίου του 1777, στην οικία 1550 του καναλιού Wendergraben στο Μπρούνοβικ της Γερμανίας. Πιστεύεται ότι κληρονόμησε την καλή υγεία από τον πατέρα του και την εξαιρετική ευφυΐα από τη μητέρα του. Ο θείος τού Friedrich, ένας επιδέξιος υφαντουργός, είχε πολύ στενή σχέση με τον μελλοντικό επιστήμονα. Σύμφωνα με τον Gauss, ο θείος του ήταν «γεννημένη ιδιοφυΐα». Για τον εαυτό του, ο Gauss έχει πει ότι μπορούσε να μετρά πριν αρχίσει να μιλά. Ο πρώτος μαθηματικός θρύλος για τον Gauss αναφέρει ότι σε ηλικία τριών ετών, ενώ παρακολουθούσε τον πατέρα του να κανονίζει τους λογαριασμούς με μερικούς κτίστες που δούλευαν με ωρομίσθιο, ξαφνικά τον διόρθωσε —και όπως αποδείχθηκε, σωστά.

Σε ηλικία επτά ετών, ο Carl Friedrich εισήχθη στην Σχολή της Αικατερίνης. Σε αυτό το σχολείο η διδασκαλία της μέτρησης άρχιζε στην τρίτη τάξη, κι έτσι τα πρώτα δύο χρόνια κανείς δεν πρόσεξε τον μικρό Carl.

Συνήθως τα παιδιά έφταναν στην τρίτη τάξη σε ηλικία 10 ετών και παρέμεναν σε αυτή μέχρι το μύρωμα\* (σε ηλικία 15 ετών). Ο δάσκαλος Büttner έπρεπε να παρακολουθεί ταυτόχρονα παιδιά διαφορετικών ηλικιών και γνώσεων. Γι' αυτό έδινε συχνά σε ορισμένους μαθητές ασκήσεις με μακροσκελείς υπολογισμούς ώστε να μπορεί να μιλά με τους υπόλοιπους μαθητές. Κάποτε ζήτησε από μια ομάδα μαθητών, ανάμεσα στους οποίους ήταν και ο Gauss, να υπολογίσουν το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 έως το 100. Οι μαθητές, όταν τελείωναν τους υπολογισμούς τους, τοποθετούσαν τις πλάκες τους στην έδρα του δασκάλου. Η σειρά τους πάνω στην έδρα λαμβανόταν υπόψη στη βαθμολογία. Ο δεκάχρονος Gauss έδωσε τη δική του πλάκα αμέσως μόλις ο Büttner ολοκλήρωσε την εκφώνηση της άσκησης. Προς

\* Τελετή που μεταφέρει τη χάρη του Αγίου Πνεύματος. Στους Προτεστάντες συνοδεύει την πλήρη ένταξη ενός νέου πιστού στην εκκλησία. (Σ.τ.μ.)







γενική κατάπληξη, η μοναδική σωστή απάντηση ήταν αυτή του Gauss. Η εξήγηση είναι απλή: όση ώρα ο δάσκαλος εκφωνούσε την άσκηση, ο Gauss ανακάλυψε ένα τέχνασμα για την άθροιση μιας γενικής αριθμητικής προόδου! Η φήμη του παιδιού-θαύματος διαδόθηκε σε ολόκληρο το Μπρούνοβικ.

Κάποιοι ονόματι Bartels ήταν βοηθός του δασκάλου στο σχολείο. Ως κύριο καθήκον είχε να ξύνει τις μύτες των μολυβιών των μικρών μαθητών. Ο Bartels ενδιαφερόταν για τα μαθηματικά και διέθετε μερικά βιβλία μαθηματικών. Οι Gauss και Bartels, λοιπόν, άρχισαν να μελετούν μαθηματικά μαζί. Έμαθαν το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα, τις απειροσειρές, και όλα τα σχετικά.

Ο κόσμος είναι πολύ μικρός! Ο Bartels έγινε αργότερα καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Καζάν, όπου είχε κάποιον φοιτητή ονόματι Lobachevsky.

Το 1788, ο Gauss μπήκε στο γυμνάσιο. Εκεί όμως οι μαθητές δεν διδάσκονταν τα μαθηματικά· απλώς λάμβαναν κλασική παιδεία. Ο Gauss έμαθε κλασικές γλώσσες με ενθουσιασμό και σημείωσε αξιόλογη πρόοδο —σκεφτόταν μάλιστα να γίνει φιλόλογος.

Ο Gauss έγινε γνωστός στην Αυλή. Τον παρουσίασαν στον Κάρολο Γουλιέλμο Φερδινάνδο, Δούκα του Μπρούνοβικ. Το παιδί επισκέφθηκε το παλάτι και διασκέδασε τους αυλικούς με την ικανότητά του στην τέχνη του υπολογισμού. Χάρη στη χρηματοδότηση του Δούκα, ο Gauss μπόρεσε να εισαχθεί στο Πανεπιστήμιο του Γκαίτινγκεν, τον Οκτώβριο του 1795. Στην αρχή παρακολούθησε κυρίως φιλολογικά μαθήματα, ενώ μαθηματικά δεν παρακολούθησε σχεδόν καθόλου. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι δεν μελετούσε τα μαθηματικά.

## Η «αγαπημένη επιστήμη» των μεγαλύτερων μαθηματικών

Αυτό ήταν ένα από τα αναρίθμητα επίθετα με τα οποία προσαγόρευε ο Gauss την Αριθμητική (τη Θεωρία

Αριθμών). Την εποχή εκείνη η αριθμητική αποτελούσε πλέον κλάδο των μαθηματικών και όχι μια συλλογή ασύνδετων προτάσεων και παρατηρήσεων.

Αργότερα, ο Gauss έγραψε: «Και το κυριότερο, οφείλουμε πολλά στις πρόσφατες έρευνες —οποσδήποτε όχι εξαντλητικές, αλλά άξιες κάθε τιμής— μαθηματικών όπως ο Fermat, ο Euler, ο Lagrange και ο Legendre, οι οποίοι ανακάλυψαν την είσοδο στο θησαυροφυλάκιο αυτής της θεϊκής επιστήμης και μας αποκάλυψαν τα πλούτη της». Για την ώρα όμως, το μεράκι του Μπρούνοβικ τα αγνοούσε όλα αυτά και ανακάλυπτε ξανά με εκπληκτικούς ρυθμούς γεγονότα που οι προγενέστεροι σπουδαίοι επιστήμονες χρειάστηκαν χρόνια για να βρουν. Ιδού μερικά θέματα που ενδιέφεραν τον Gauss εκείνη την εποχή.

Ο Gauss παρατήρησε ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων τετραγώνων ακέραιων αριθμών με έναν πρώτο  $p$  δεν μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Για παράδειγμα, αν ο διαιρέτης είναι το 3, το υπόλοιπο μπορεί να είναι μόνο 0 ή 1. Αν ο διαιρέτης είναι το 5, το υπόλοιπο μπορεί να είναι μόνο 0, 1 ή 4. Όμως, είναι δυνατόν να εξετάσουμε αυτή την κατάσταση και με άλλη οπτική. Μπορούμε να ρωτήσουμε για ποιους πρώτους αριθμούς  $p$  υπάρχουν αριθμοί  $n^2$  οι οποίοι όταν διαιρεθούν διά του  $p$  δίνουν υπόλοιπο  $q$ . Για  $q = 1$ , μας ικανοποιεί οποιοσδήποτε  $p$  ( $n = p + 1$ ). Όμως, μερικές τιμές του  $p$  μπορούν να δώσουν υπόλοιπο  $p - 1$ , ενώ άλλες, όχι. Για παράδειγμα, όταν διαιρούμε το τετράγωνο ενός ακεραίου διά  $p = 3$  δεν εμφανίζεται υπόλοιπο 2, ενώ το  $p = 5$  μπορεί να δώσει υπόλοιπο 4 (όταν  $n = 3$ ). Οι τιμές  $p = 7, 11, 19$  δεν παράγουν υπόλοιπο ίσο με  $p - 1$ , ενώ οι  $p = 13$  και 17 δίνουν τέτοιο υπόλοιπο. Οι παρατηρήσεις οδηγούν στην επόμενη υπόθεση: αν  $p = 4k - 1$ , τότε κανένα  $n^2$  δεν δίνει υπόλοιπο  $p - 1$ , αλλά αν  $p = 4k + 1$ , υπάρχει τέτοιο  $n^2$ . Ο Gauss αγνοούσε ότι η υπόθεση αυτή είχε διατυπωθεί από τον Fermat και είχε αποδειχθεί από τον Euler.

«Βρέθηκα τυχαία αντιμέτωπος με ένα θαυμαστό αριθμητικό γεγονός. Λόγω της κομψότητάς του αυτής καθαυτής, αλλά και επειδή φαινόταν να συνδέεται με άλλα εξαιρετικά γεγονότα, προσπάθησα να το αποδείξω και να ανακαλύψω τις αρχές στις οποίες βασίζεται. Όταν κατάφερα επιτέλους να επιτύχω τούτο το στόχο, η ομορφιά των συγκεκριμένων μελετών με σαγήνευσε, και δεν μπορούσα πλέον να ζήσω χωρίς αυτές.»

Ο Gauss προσπάθησε να καθορίσει τις τιμές του  $p$  για τις οποίες υπάρχουν αριθμοί  $n^2$  που δίνουν υπόλοιπο  $q = 2, q = 3$ , κ.ο.κ. Για  $q = 2$ , μάντεψε ότι το ζήτημα συνδέεται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $p$  διά του 8 (ο Euler δεν κατάφερε να αποδείξει αυτό το γεγονός, η απόδειξη όμως δόθηκε από τον Lagrange). Για  $q = 3$ , εξαρτάται από το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $p$  διά του 12. Η γενική πρόταση βεβαιώνει ότι όλοι οι πρώτοι αριθμοί  $p$  που δίνουν ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται διά του  $4q$  δίνουν είτε όλοι υπόλοιπο  $q$  όταν διαιρούν έναν συγκεκριμένο  $n^2$  είτε κανείς τους. Ο Gauss ονόμαζε αυτή την πρόταση «χρυσό θεώρημα». Σήμερα ονομάζεται νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής.

Η πρώτη επίθεση του νεαρού Gauss εναντίον του «χρυσού θεωρήματος» δεν υπήρξε επιτυχής. Έγραψε ότι το θεώρημα αυτό τον βασάνισε επί έναν ολόκληρο χρόνο, προβάλλοντας αντίσταση και στις πλέον επίμονες προσπάθειές του. Σε αυτό το σημείο όμως, ο Gauss βρισκόταν στο ίδιο επίπεδο με τους μαθηματικούς της εποχής του: όλες οι προσπάθειες των σημαντικότερων μαθηματικών να αποδείξουν το νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής είχαν αποτύχει.

Ιδού ένα άλλο θέμα που μελέτησε ο Gauss. Παρατήρησε ότι αν διαιρούμε το 1 διά του  $p$ , τα δεκαδικά ψηφία επαναλαμβάνονται, δίνοντάς μας ένα άπειρο περιοδικό δεκαδικό κλάσμα. Είναι εύκολο να αποδείξουμε την περιοδικότητα, πώς μπορούμε όμως να βρούμε το μήκος της περιόδου; Ο Gauss μελέτησε τους πρώτους αριθμούς, τον ένα μετά τον



άλλο, και κατέγραψε τις αντίστοιχες περιόδους. Αυτή είναι μια εξαιρετικά κοπιαστική εργασία (για παράδειγμα, το 97 έχει περίοδο μήκους 96 ψηφίων), ο Gauss όμως μελέτησε όλους τους  $p < 1000$ . Ανακάλυψε ότι το μήκος της περιόδου διαιρεί πάντα τον  $p - 1$ . (Αυτό το γεγονός μπορεί να συναχθεί από το «μικρό» θεώρημα του Fermat, το οποίο ο Gauss απέδειξε ανεξάρτητα.) Ο Gauss ενδιαφέρθηκε για εκείνους τους  $p$  για τους οποίους η περίοδος ισούται ακριβώς με  $p - 1$ . Για να ισχύει αυτό, αρκεί το σύνολο των υπολοίπων της διαίρεσης των  $10, 10^2, \dots, 10^{p-1}$  διά του  $p$  να περιέχει όλα τα μη μηδενικά υπόλοιπα. Ακόμη και σήμερα, δεν γνωρίζουμε αν είναι άπειρο ή όχι το πλήθος αυτών των πρώτων.

Ο Gauss παρατήρησε ότι το σύνολο των υπολοίπων της διαίρεσης των αριθμών  $3, 9, 27, \dots, 3^{16}$  διά του 17 περιέχει όλα τα δυνατά μη μηδενικά υπόλοιπα  $1, 2, \dots, 16$ . Αυτή η παρατήρηση οδήγησε στην πρώτη μεγάλη ανακάλυψη που επέτυχε ο Gauss —την κατασκευή του κανονικού 17-γώνου.

Ο Gauss γνώριζε ότι για  $n = 3, 4$  και  $5$  είναι δυνατή η κατασκευή κανονικών  $n$ -γώνων με κανόνα και διαβήτη (ή, ισοδύναμα, ότι ένας κύκλος μπορεί να διαιρεθεί σε  $n$  ίσα τμήματα). Βεβαίως, αυτό είναι επίσης δυνατόν για  $n = 2^k, 2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5$  και  $15$  [αφού  $(1/3) - (1/5) = (2/15)$ ]. Κατά τα φαινόμενα, ο Gauss γνώριζε ότι οι αρχαίοι δεν είχαν καταφέρει να κατασκευάσουν  $n$ -γώνα για οποιοδήποτε άλλο  $n$ .

Τα σύγχρονα μαθηματικά έχουν επιτρέψει την αναγωγή του προβλήματος κατασκευής ενός κανονικού  $n$ -γώνου σε αλγεβρικό πρόβλημα. Η δυνατότητα κατασκευής ενός τέτοιου πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη ανάγεται στην αναπαράσταση των ριζών της εξίσωσης  $z^n - 1 = 0$  συναρτήσει τετραγωνικών ριζών. Ε-



άν αγνοήσουμε τη ρίζα  $z = 1$ , μπορούμε να περιορίσουμε την έρευνά μας στην εξίσωση  $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$ . Αυτό που χρειάζεται στη συνέχεια είναι να εκφράσουμε τις ρίζες με τη βοήθεια ακεραίων εφαρμοζοντας μόνο τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και εξαγωγές τετραγωνικών ριζών (όχι όμως κυβικών ή άλλων ριζών).

Αυτή η αναγωγή μάς επιτρέπει να εξετάσουμε ομοιόμορφα όλες τις περιπτώσεις που γνώριζαν οι αρχαίοι, ενώ οι ίδιοι οι αρχαίοι ήταν υποχρεωμένοι να βρουν μια πρωτότυπη μέθοδο για κάθε μεμονωμένη περίπτωση.

Ο Gauss διερευνούσε την κυκλωτομική εξίσωση (όπως ονομάζεται η προηγούμενη εξίσωση) και ταυτόχρονα μελετούσε την διαιρετότητα των αριθμών. Στις 30 Μαρτίου του

1796, τη στιγμή που ξυπνούσε, συνειδητοποίησε τη σχέση ανάμεσα στα δύο προβλήματα.

Έστω  $n = 17$ . Αν  $\epsilon$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$ , τότε οι  $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^{16}$  είναι οι άλλες ρίζες της. Ο Gauss αναδιέταξε τις ρίζες με τέτοιο τρόπο ώστε η ρίζα  $\epsilon^k$  να αντιστοιχεί στον αριθμό  $k$  αν το  $3^k$  δίνει υπόλοιπο  $l$  όταν διαιρεθεί διά του 17. Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε ρίζα αντιστοιχεί ένας αριθμός. Συμ-





λεπτομερώς και τούτη την κατασκευή. Επίσης, απέδειξε (χωρίς όμως να δημοσιεύσει την απόδειξη) ότι η κατασκευή είναι αδύνατη για τους πρώτους που δεν επιδέχονται τέτοια αναπαράσταση (ειδικά, οι  $n = 7$  και  $n = 11$ ).

Σύντομα έγινε φανερό ότι η μοίρα του ανθρώπου ήταν να καταλήξει μαθηματικός και όχι φιλόλογος. Στα μετέπειτα χρόνια της ζωής του, Ο Gauss θυμόνταν τον τρόπο που ανέβραζαν οι ιδέες στο μυαλό του εκείνη την εποχή. Σχεδόν δεν είχε το χρόνο να κάνει μια, έστω αποσπασματική, καταγραφή τους. Έτσι, άρχισε να κρατά ημερολόγιο. Η πρώτη καταχώρηση έχει ημερομηνία 30 Μαρτίου 1796. Αφορούσε την κατασκευή του κανονικού 17-γώνου. Η δεύτερη (με ημερομηνία 8 Απριλίου) αφορούσε το γεγονός ότι απέδειξε το νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής. Από το ημερολόγιο γνωρίζουμε ότι ο μεγάλος μαθηματικός συνέχιζε να μελετά λύνοντας με ακρίβεια «σχολικές» ασκήσεις.

Το 1798 ο Gauss αποφοίτησε από το πανεπιστήμιο και επέστρεψε στο Μπρουνσβίκ για να συστηματοποιήσει τα αποτελέσματά του στη Θεωρία Αριθμών. Το 1801 δημοσίευσε τις διάσημες *Disquisitiones Arithmeticae* (Αριθμητικές αναζητήσεις). Αυτό το τεράστιο βιβλίο (περισσότερες από

500 σελίδες μεγάλου μεγέθους) περιείχε τα κύρια αποτελέσματα των μελετών του: το νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής, το κυκλοτομικό πρόβλημα και το ερώτημα για τη δυνατότητα αναπαράστασης των ακέραιων στη μορφή  $a^2 + bmn + cn^2$  (και ειδικά, ως άθροισμα δύο τετραγώνων). Το βιβλίο ήταν αφιερωμένο στο Δούκα, ο οποίος είχε προσφέρει τα μέσα για την έκδοσή του. Το έργο τυπωμένο περιείχε επτά μέρη (δεν υπήρχαν αρκετά χρήματα για να τυπωθεί το όγδοο). Αυτό το όγδοο μέρος επρόκειτο να περιέχει μια γενίκευση του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής για δυνάμεις μεγαλύ-

βολίζουμε τις ρίζες που έχουν αριθμηθεί κατ' αυτό τον τρόπο ως  $t_1, t_2, \dots, t_{16}$ . Ορίζουμε  $u_1 = t_1 + t_3 + \dots + t_{15}$ ,  $u_2 = t_2 + t_4 + \dots + t_{16}$ ,  $v_1 = t_1 + t_5 + t_9 + t_{13}$ ,  $v_2 = t_2 + t_6 + t_{10} + t_{14}$ ,  $v_3 = t_3 + t_7 + t_{11} + t_{15}$ ,  $v_4 = t_4 + t_8 + t_{12} + t_{16}$ ,  $w_1 = t_1 + t_9$ ,  $w_2 = t_2 + t_{10}$ , ...,  $w_8 = t_8 + t_{16}$ . Αποδεικνύεται ότι τα  $u_1$  και  $u_2$  είναι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, ενώ τα  $v_1, v_2, v_3$  και  $v_4$  είναι ρίζες δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων με συντελεστές που εκφράζονται συναρτήσει των  $u_1$  και  $u_2$ . Τα  $w_1, \dots, w_8$  εκφράζονται παρομοίως συναρτήσει των  $v_1, v_2, v_3$  και  $v_4$ . Τέλος, τα  $t_1, t_2, \dots, t_{16}$  εκφράζονται συναρτήσει των  $w_1, \dots, w_8$ . Επομένως, προκύπτει η ζητούμενη αναπαράσταση των ριζών της εξίσωσής μας.

Έτσι, ο Gauss έλυσε το πρόβλημα

σημειώνοντας πρόοδο σε ένα θέμα στο οποίο δεν είχε επιτευχθεί τίποτα καινούριο από την εποχή του Ευκλείδη. Αφού η διατύπωση του προβλήματος είναι τελείως στοιχειώδης, η ανακάλυψη αναφέρθηκε στις εφημερίδες. Αργότερα, ο Gauss έδωσε την πλήρη λύση του κυκλοτομικού προβλήματος. Ανάγεται στην περίπτωση που ο  $n$  είναι πρώτος. Για τους πρώτους αριθμούς  $n$  της μορφής  $2^{2^k} + 1$  (αυτοί είναι οι καλούμενοι «πρώτοι του Fermat»), η κατασκευή γίνεται ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην περίπτωση του  $n = 17$ . Ο επόμενος  $n$  αυτής της μορφής είναι ο 257. Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Gauss πραγματοποίησε



τερες του 2 και, ειδικά, το νόμο της διτετραγώνης αντιστροφής. Ο Gauss κατάφερε την πλήρη απόδειξη αυτού του νόμου στις 23 Οκτωβρίου του 1813. Στο ημερολόγιό του σημείωσε ότι το γεγονός αυτό συνέπεσε με τη γέννηση του γιου του.

Πέρα από το *Disquisitiones Arithmeticae*, ο Gauss πρακτικά δεν έκανε στο πεδίο της Θεωρίας Αριθμών άλλη εργασία. Κυρίως συστηματοποίησε και ολοκλήρωσε όσα είχε συλλάβει εκείνα τα χρόνια. Για παράδειγμα, έδωσε έξι ακόμη αποδείξεις του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής. Το *Disquisitiones Arithmeticae* ήταν πολύ πιο μπροστά από την εποχή του. Την περίοδο της συγγραφής του, ο Gauss δεν είχε επαφή με τους σύγχρονους μαθηματικούς, και για μεγάλη περίοδο το βιβλίο έμεινε απρόσιτο στους γερμανούς μαθηματικούς. Στη Γαλλία, όπου το έργο μπορεί να είχε ελκύσει το ενδιαφέρον επιστημόνων όπως οι Lagrange, Legendre κ.λπ., συνέβη μια κακοτυχία. Ο βιβλιοπώλης που θα το διέθετε χρεωκόπησε, και περισσότερα από τα μισά αντίτυπα χάθηκαν. Έτσι, οι μαθητές του Gauss ήταν υποχρεωμένοι να αντιγράφουν αποσπάσματα του βιβλίου με το χέρι. Η κατάσταση στη Γερμανία άρχισε να αλλάζει μόνο μετά το 1840, όταν ο Dirichlet μελέτησε το *Disquisitiones Arithmeticae* και έδωσε διαλέξεις πάνω σε αυτό. Πάντως, το βιβλίο είχε φτάσει στα χέρια του φίλου του Bartels και των μαθητών του ήδη από το 1807.

Το *Disquisitiones Arithmeticae* συνέβαλε εξαιρετικά στην ανάπτυξη της Θεωρίας Αριθμών. Έχοντας ως αφετηρία τον τρόπο που ο Gauss αντιμετώπισε το κυκλοτομικό πρόβλημα, ο Galois μελέτησε το πρόβλημα της επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων με ριζικά. Μέχρι και σήμερα, οι νόμοι της αντιστροφής έχουν κεντρική θέση στην αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.

## Η διατριβή του Χέλμστεντ

Τα μαθηματικά βιβλία ήταν σπάνια στο Μπρουνσβίκ· έτσι ο Gauss ταξίδευε συχνά στο Χέλμστεντ, όπου υπήρχε μια καλή βιβλιοθήκη. Το

1798, εργαζόμενος σ' αυτή τη βιβλιοθήκη, ο Gauss έγραψε μια διατριβή αφιερωμένη στην απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας, το οποίο βεβαιώνει ότι κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς (και ειδικά με πραγματικούς) συντελεστές έχει τουλάχιστον μία ρίζα (που στη γενική περίπτωση είναι μιγαδική).

Αν δεν θελήσουμε να βγούμε από το πεδίο των πραγματικών αριθμών, το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας διατυπώνεται με τον εξής τρόπο: κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο πολυωνύμων πρώτου και δεύτερου βαθμού. Ο Gauss ανέλυσε όλες τις προηγούμενες προσπάθειες απόδειξης αυτού του θεωρήματος και εφάρμοσε μια ιδέα του d'Alembert. Όμως η απόδειξη δεν υπήρξε αλάνθαστη, διότι δεν είχε ακόμη αναπτυχθεί μια αυστηρή θεωρία της συνέχειας.

Αργότερα, ο Gauss πρότεινε τρεις ακόμη αποδείξεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας (την τελευταία μάλιστα το 1848).

## Ο λημνίσκος και ο αριθμητικο-γεωμετρικός μέσος

Σε αυτό το τμήμα του άρθρου θα αναφερθούμε σε μια άλλη κατεύθυνση της έρευνας του Gauss, η οποία ξεκινά ήδη από την παιδική του ηλικία.

Το 1791, όταν ήταν στα 14 χρόνια του, ο Gauss έπαιξε το επόμενο αριθμητικό παιχνίδι: θεώρησε δύο αριθμούς  $a_0$  και  $b_0$  και υπολόγισε τον αριθμητικό τους μέσο

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

και τον γεωμετρικό τους μέσο

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0}.$$

Στη συνέχεια, υπολόγισε τους μέσους των  $a_1$  και  $b_1$ :

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

και

$$b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

κ.ο.κ. Δηλαδή υπολόγισε και τις δύο ακολουθίες με μεγάλη ακρίβεια. Σε λίγα βήματα ήταν αδύνατο να διακριθεί το  $a_n$  από το  $b_n$ : όλα τα υπολογισθέντα δεκαδικά τους ψηφία συνέπιπταν. Με άλλα λόγια, και οι δύο ακολουθίες συνέκλιναν ταχύτατα σε ένα κοινό όριο  $M(a_0, b_0)$ , το οποίο ονομάστηκε *αριθμητικο-γεωμετρικός μέσος*.

Την ίδια εποχή ο Gauss μελετούσε μια καμπύλη γνωστή με το όνομα *λημνίσκος* (ή λημνίσκος του Bernoulli). Πρόκειται για τον γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων το γινόμενο των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία  $O_1$  και  $O_2$  (τις εστίες) είναι σταθερό και ίσο με

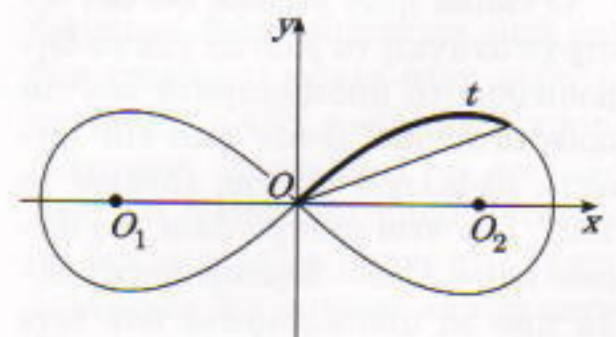
$$\left(\frac{1}{2}|O_1 O_2|\right)^2 \text{ (Σχήμα 1).}$$

Το 1797, ο Gauss άρχισε να μελετά περισσότερο συστηματικά το λημνίσκο. Για μεγάλο διάστημα προσπάθησε να υπολογίσει το μήκος του έως ότου μάντεψε ότι είναι ίσο με

$$\frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 2)}$$

(όπου το  $M$  συμβολίζει τον αριθμητικο-γεωμετρικό μέσο που ορίσαμε προηγουμένως).

Δεν γνωρίζουμε πώς μάντεψε ο Gauss αυτό το γεγονός. Ξέρουμε ότι το κατάφερε στις 30 Μαΐου του 1799. Στην αρχή, δεν είχε κάποια απόδειξη του τύπου, και έτσι υπολόγισε και τις δύο τιμές με ακρίβεια έντεκα δεκαδικών ψηφίων! Επίσης, όρισε για το λημνίσκο συναρτήσεις παρόμοιες με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του κύκλου. Για παράδειγμα, στο λημνίσκο όπου η απόσταση μεταξύ των εστιών ισούται με



Σχήμα 1



$\sqrt{2}$ , το λημνισκοειδές ημίτονο  $\sin l(t)$  είναι απλώς το μήκος της χορδής που αντιστοιχεί στο τόξο μήκους  $t$  (Σχήμα 1). Ο Gauss πέρασε τα τελευταία χρόνια του 18ου αιώνα αναπτύσσοντας τη θεωρία των λημνισκοειδών συναρτήσεων. Βρήκε γι' αυτές θεωρήματα πρόσθεσης και αναγωγής παρόμοια με αυτά των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Τότε, ο Gauss άρχισε να μελετά τις ελλειπτικές συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν γενίκευση των λημνισκοειδών συναρτήσεων. Σύντομα συνειδητοποίησε ότι αυτός ήταν ένας τελείως καινούργιος κλάδος της Μαθηματικής Ανάλυσης. Μετά το 1800, ο Gauss δεν αφιέρωσε αρκετό χρόνο στην θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων και δεν την ανάπτυξε σε βαθμό που θα τον ικανοποιούσε ως προς την πληρότητα και την αυστηρότητα. Από την αρχή είχε αποφασίσει να μη δημοσιεύσει ενδιάμεσα αποτελέσματα, ελπίζοντας να δημοσιεύσει τα πάντα σε ένα οριστικό έργο, όπως έκανε στην περίπτωση της Θεωρίας Αριθμών. Όμως, ποτέ δεν βρήκε το χρόνο να ολοκληρώσει το σχέδιό του.

Το 1808, έγραψε στον φίλο του και μαθητή του Schumacher: «Μπορούμε να χειριστούμε με ευκολία τις τριγωνομετρικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις. Όμως, μια χρυσή πηγή που κρύβει μυστικά ανώτερων συναρτήσεων παραμένει σχεδόν terra incognita. Εργάστηκα σκληρά σε αυτό το θέμα και σκοπεύω να δημοσιεύσω ένα μεγάλο έργο, για το οποίο έχω ήδη κάνει υπαινιγμούς στο Disquisitiones Arithmeticae. Είναι εκπληκτικός ο πλούτος των εξαιρετικά ενδιαφερόντων γεγονότων και σχέσεων που αποκαλύπτουν αυτές οι συναρτήσεις.»

Ο Gauss ήταν βέβαιος ότι δεν υπήρχε ανάγκη να βιαστεί για να δημοσιεύσει τα αποτελέσματά του· τα πράγματα παρέμεναν έτσι επί τριάντα ολόκληρα χρόνια. Ωστόσο το 1827, δύο νέοι μαθηματικοί —ο Jacobi και ο Abel— δημοσίευσαν πολλά από τα αποτελέσματα που είχε ανακαλύψει νωρίτερα ο Gauss. Και αυτός, έγραψε:

«Τα αποτελέσματα που ανακάλυψε ο Jacobi αποτελούν τμήμα του δικού μου μεγάλου έργου το οποίο ελπίζω να δημοσιεύσω εάν ο Ύψιστος μου χαρίσει δύναμη και πνευματική γαλήνη.» (Επιστολή προς τον Schumacher)

«Παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα με μεγάλη σαφήνεια και κομψότητα, ο Abel προέβλεψε ένα μεγάλο μέρος των σκέψεών μου και διευκόλυνε κατά το ένα τρίτο το έργο μου. Ο Abel ακολούθησε τον ίδιο δρόμο με αυτόν που είχα πάρει το 1798 και, επομένως, δεν είναι εκπληκτικό το ότι καταλήγουμε σε παρόμοια αποτελέσματα. Αυτή η ομοιότητα υπάρχει ακόμη και στη μορφή, μερικές φορές και στον συμβολισμό, με αποτέλεσμα πολλοί τύποι να μοιάζουν αντίγραφα των δικών μου. Το εν λόγω γεγονός όμως δεν πρέπει να παρερμηνευθεί. Δεν θυμάμαι ούτε μία φορά να έχω συζητήσει αυτά τα ερωτήματα με ξένους.» (Επιστολή προς τον Bessel)

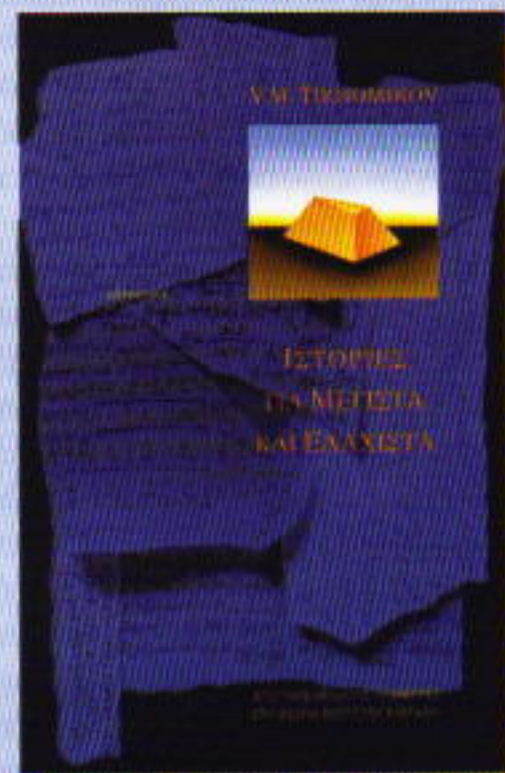
Τέλος, σε μια επιστολή του στον Crelle (τον Μάιο του 1828) ο Gauss έγραψε: «Αφού ο Abel επέδειξε τέτοια έμπνευση και κομψότητα στην παρουσίασή του, θεωρώ ότι δεν πρέπει να δημοσιεύσω τα δικά μου αποτελέσματα.»

Πρέπει να επισημανθεί ότι μια παρατήρηση στο Disquisitiones Arithmeticae —ότι η κυκλοτομική θεωρία μπορεί να επεκταθεί στον λημνίσκο— είχε μεγάλη επίδραση στον Abel. Ο ίδιος μάλιστα έγραψε: «Προβληματιζόμουν επί πολύ με αυτά τα ερωτήματα, και επιτέλους κατόρθωσα να ανασηκώσω το πέπλο του μυστηρίου από την κυκλοτομική θεωρία του Gauss. Τώρα πια η συλλογιστική του μου είναι εντελώς ξεκάθαρη.»

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ



## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



V.M. Tikhomirov

## ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Από τους αρχαίους γεωμέτρους στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου

Οι Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα είναι ένα βιβλίο που θα ενθουσιάσει κάθε λάτρη των μαθηματικών. Γραμμένο πρωτίστως για τους μαθητές των τελευταίων τάξεων της μέσης εκπαίδευσης, αποτελεί μια εξαιρετικά βαθιά εισαγωγή στο πεδίο εκείνο των μαθηματικών που ασχολείται με τα προβλήματα ακροτάτων.

Στο πρώτο μέρος, ο συγγραφέας επιλέγει μερικά από τα πλέον περίφημα προβλήματα ακροτάτων που ανέκυψαν στα μαθηματικά και τη φυσική και τα παρουσιάζει λεπτομερώς μαζί με τις λύσεις που έδωσαν κορυφαίες μορφές της ιστορίας των μαθηματικών όπως ο Ήρων, ο Αρχιμήδης, ο Fermat, ο Leibniz, ο Νεύτων...

Στο δεύτερο μέρος, αφού εισαχθούν τα απαραίτητα στοιχεία του απειροστικού λογισμού, ο συγγραφέας επιστρέφει σε όλα τα προηγούμενα προβλήματα, για να δείξει πώς τα νεοαποκτηθέντα μαθηματικά όπλα επιτρέπουν μια συστηματική αντιμετώπιση απλουστεύοντας το έργο της επίλυσης.

Σελ.: 210, 17 x 25 εκ., 6.800 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



# Η αλεξανδρινή αστρονομία σήμερα

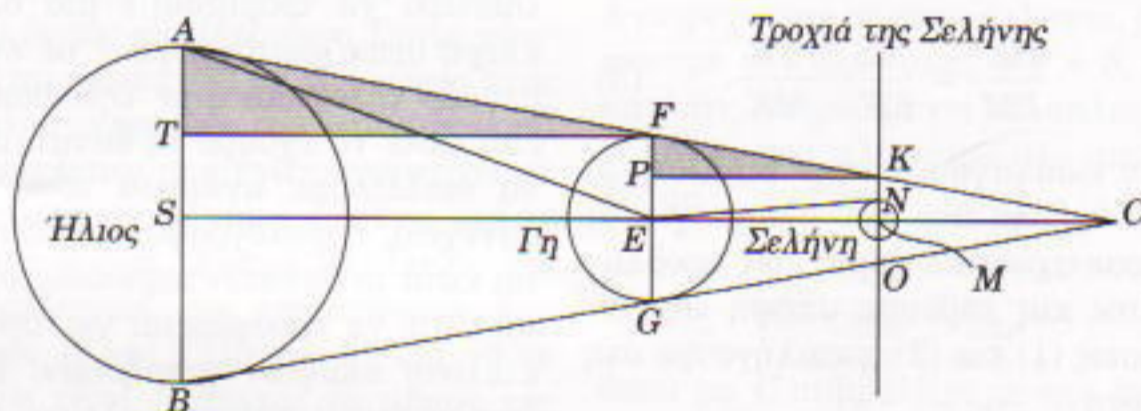
Η πενιχρότητα των μέσων οξύνει την επινοητικότητα

Case Rijdsdijk

**Π**ΛΗΣΙΑΖΕ Η ΣΕΛΗΝΙΑΚΗ ΕΚΛΕΙΨΗ του Απριλίου του 1996, και η περίπτωση καθιστούσε επίκαιρη την ανάπτυξη μιας άσκησης με αντικείμενο τον υπολογισμό του μεγέθους της Σελήνης καθώς και της απόστασής της από τη Γη· η δραστηριότητα αυτή θα εντασσόταν στο πλαίσιο της Πρωτοβουλίας για την Επιστημονική Εκπαίδευση του Νοτιοαφρικανικού Αστεροσκοπείου.

Προσπαθώντας να υλοποιήσω το εν λόγω σχέδιο, υποχρεώθηκα να ανακαλύψω εκ νέου μερικές πλευρές της πρώιμης ελληνικής αστρονομίας, όπως την ασκούσαν οι αστρονόμοι που εργάστηκαν στη μεγάλη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας κατά την περίοδο που χονδρικά εκτείνεται από το 300 π.Χ. ως το 150 μ.Χ. Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος βασίστηκε σε μια σεληνιακή έκλειψη για να εκτιμήσει τη διάμετρο της Σελήνης· αργότερα δε, ο Ίππαρχος ήλθε να βελτιώσει την εκτίμηση αυτή. Την ίδια γεωμετρία χρησιμοποίησε έπειτα από πολλούς αιώνες και ο Κοπέρνικος στο *De Revolutionibus orbium coelestium* (Περί της περιστροφής των ουρανίων σφαιρών).

Αν υπολογίσουμε τη διάμετρο της Γης με τη μέθοδο του Ερατοσθένη (την οποία θα εξηγήσουμε αργότερα στο παρόν άρθρο), τότε η παρατήρηση και η φωτογράφιση μιας



Απόσταση Ήλιου-Γης  $ES = D$   
Απόσταση Γης-Σελήνης  $EM = d$   
Ακτίνα του Ήλιου  $AS = R$

Ακτίνα της Γης  $EF = r$   
Ακτίνα της Σελήνης  $MN = a$   
Ακτίνα της σκιάς της Γης  $MK = s$

Σχήμα 1

σεληνιακής έκλειψης μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τόσο τη διάμετρο της Σελήνης όσο και την απόστασή της από τη Γη χρησιμοποιώντας μερικά απλούστατα όργανα και στηριζόμενοι στη στοιχειώδη γεωμετρία και τριγωνομετρία. Θα απαιτηθεί, βέβαια, να επιδείξουμε και λίγη επινοητικότητα!

## Η γεωμετρία των σεληνιακών εκλείψεων

Το τρίγωνο  $FGC$  (Σχήμα 1) παριστά τη σκιά της Γης, ενώ η γραμμή  $KMO$  παριστά την τροχιά της Σελήνης. Εάν υποθέσουμε ότι ο Ήλιος απέχει από τη Γη απόσταση  $n$  φορές μεγαλύτερη απ' ό,τι η Σελήνη, μπορούμε να γράψουμε

$$SE = n \cdot EM,$$

οπότε, εκτελώντας τις αντικαταστάσεις των μεταβλητών που υποδεικνύονται στο κάτω μέρος του Σχήματος 1, λαμβάνουμε τη σχέση

$$n = \frac{SE}{EM} = \frac{D}{d}. \quad (1)$$

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την παρατήρηση των ηλιακών εκλείψεων, ο Ήλιος και η Σελήνη έχουν την ίδια φαινόμενη διάμετρο, διότι φαίνονται υπό την ίδια (περίπου) γωνία στον ουρανό· συνεπώς,  $\angle AES = \angle MEN$ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα τρίγωνα  $ASE$  και  $NME$  είναι όμοια (έστω και αν δεν φαίνονται όμοια στο Σχήμα 1, το οποίο δεν συνιστά ακριβή απεικόνιση υπό κλίμακα της γεωμετρίας της σεληνιακής έκλειψης.) Οπότε,



βάσει της εξίσωσης (1), λαμβάνουμε τη σχέση

$$AS = n \cdot NM.$$

Αντικαθιστώντας τα μήκη των τμημάτων με τις αντίστοιχες μεταβλητές, έχουμε

$$n = \frac{AS}{MN} = \frac{R}{a}. \quad (2)$$

Τα τρίγωνα  $ATF$  και  $FPK$  είναι επίσης όμοια, οπότε παίρνουμε τις αναλογίες

$$\frac{TF}{PK} = \frac{AT}{FP},$$

$$\frac{SE}{EM} = \frac{AS - TS}{FE - PE}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{SE}{EM} = \frac{AS - FE}{FE - MK}. \quad (3)$$

Εάν εισαγάγουμε στην εξίσωση (3) τα σύμβολα που καθορίσαμε για τα χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος και λάβουμε υπόψη τις εξισώσεις (1) και (2), καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{D}{d} = \frac{nd}{d} = \frac{R - r}{r - s},$$

ή, ισοδύναμα, στην

$$n = \frac{na - r}{r - s}. \quad (4)$$

Μπορούμε να αναδιατάξουμε τους όρους της εξίσωσης (4) έτσι ώστε να τη μετασχηματίσουμε στην

$$n(a + s) = r(n + 1),$$

η οποία μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$a \left(1 + \frac{s}{a}\right) = r \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Επομένως, για να προσδιορίσουμε την απόσταση  $d$  της Σελήνης από τη Γη, απαιτείται να βρούμε τις τιμές των  $r$ ,  $s$  και  $a$  συναρτήσει της  $d$  και του λόγου  $s/a$ . Το λόγο  $s/a$  μπορούμε να τον προσδιορίσουμε με τη βοήθεια παρατηρήσεων που θα πραγματοποιηθούν στη διάρκεια μιας σεληνιακής έκλειψης. Η ακτίνα της

Σελήνης  $r$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της  $d$ , αρκεί να μετρήσουμε τη γωνιακή διάμετρο της Σελήνης. Η μέθοδος του Ερατοσθένη μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ακτίνα  $r$  της Γης. Τέλος, όσον αφορά το  $n$ , θα διαπιστώσουμε ότι υπεισέρχεται με τέτοιο τρόπο στο πρόβλημά μας, ώστε δεν απαιτείται η ακριβής γνώση της τιμής του· θα αρκείσει μια απλή εκτίμηση του μεγέθους του.

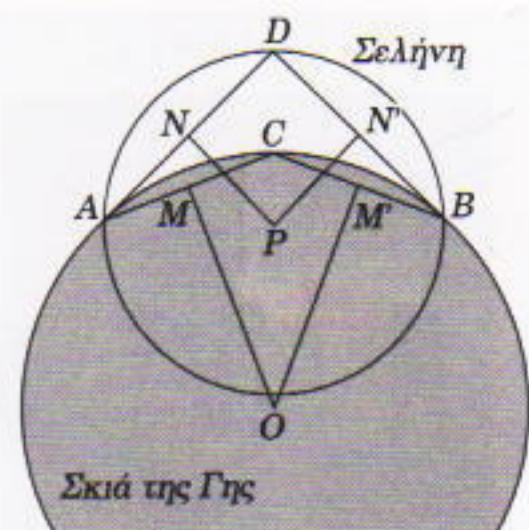
### Σύγκριση των ακτίνων της Σελήνης και της σκιάς της Γης

Στη διάρκεια μιας έκλειψης φωτογραφίζουμε τη Σελήνη καθώς εισέρχεται στη σκιά της Γης· τότε, παίρνουμε μια εικόνα παρόμοια με εκείνη του Σχήματος 2. Είναι προτιμότερο να τραβήξουμε μια ολόκληρη σειρά φωτογραφιών με έναν μεγάλο τηλεφακό ή με τηλεσκόπιο, έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε ανάμεσά τους. Εν συνεχεία, η φωτογραφία μεγεθύνεται κατά το δυνατόν περισσότερο, έτσι ώστε να προσφέρεται για την εκτέλεση ακριβών μετρήσεων. Εάν δεν επίκειται κάποια έκλειψη που να μπορεί να φωτογραφιστεί ικανοποιητικά, μπορούμε απλούστατα να χρησιμοποιήσουμε ένα φωτοαντίγραφο κάποιας εικόνας παλαιότερης έκλειψης, την οποία θα μπορούσαμε να βρούμε σε βιβλία ή περιοδικά.

Η φωτογραφία αυτή μας χρειάζεται για να προσδιορίσουμε το λόγο της ακτίνας της Σελήνης προς την ακτίνα της σκιάς της Γης, ή το πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η διάμετρος της Γης από εκείνη της Σελήνης. Ο σκοπός μας μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους, από τους οποίους ο καλύτερος συνίσταται στο να χρησιμοποιήσουμε έ-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

να σχήμα κατασκευασμένο υπό κλίμακα και να εφαρμόσουμε τις γεωμετρικές γνώσεις μας για τον κύκλο. Αφού, λοιπόν, βγάλουμε ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο φωτοαντίγραφο της φωτογραφίας της έκλειψης, επιλέγουμε τα σημεία C και D έτσι ώστε να κείνται επί της προέκτασης μιας νοητής ακτίνας της σκιάς της Γης και να απέχουν μεταξύ τους κατά το δυνατόν περισσότερο (Σχήμα 3).

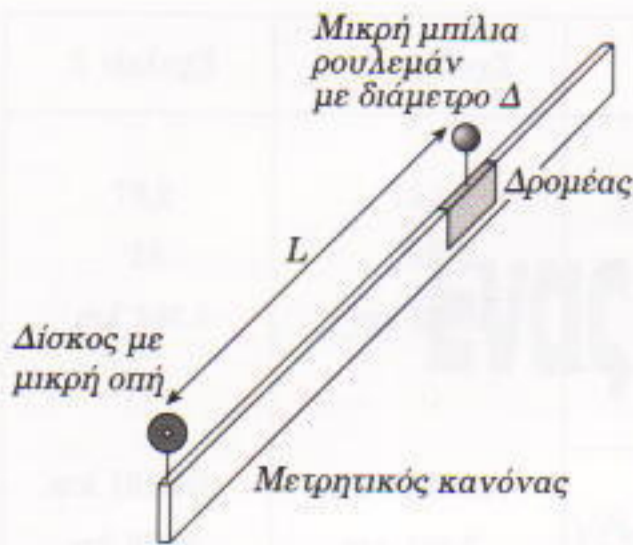
Ονομάζουμε A και B τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Ως γνωστόν, η μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου διέρχεται από το κέντρο του. Αναφερόμενοι στο Σχήμα 3, βλέπουμε ότι τα N και N' είναι αντίστοιχα τα μέσα των AD και DB. Οι κάθετοι που άγονται από αυτά τα σημεία συντρέχουν στο σημείο P, οπότε το τμήμα DP ισούται με την ακτίνα της Σελήνης. Ομοίως, το OC ισούται με την ακτίνα της σκιάς της Γης σε απόσταση ίση με την ακτίνα της τροχιάς της Σελήνης. Έτσι, λοιπόν, επιτυγχάνουμε να προσδιορίσουμε το λόγο  $s/a$ :

$$\frac{OC}{DP} = \frac{s}{a}. \quad (6)$$

### Η γωνιακή διάμετρος της Σελήνης

Η γωνιακή διάμετρος της Σελήνης μπορεί να μετρηθεί έμμεσα ή άμεσα. Για να τη μετρήσουμε άμεσα, χρησιμοποιούμε έναν μετρητικό κανόνα ο οποίος φέρει ένα δρομέα που μπορεί να κινείται ελεύθερα κατά μήκος του. Πάνω στο δρομέα στερεώνεται ένα μικρό χαλύβδινο σφαι-





Σχήμα 4

ρίδιο (π.χ. μια μπίλια ρουλεμάν) διαμέτρου περίπου 6 mm. Στο ένα άκρο του κανόνα προσαρμόζεται ένας δίσκος με μια μικρή οπή, όπως δείχνει το Σχήμα 4. Στηρίζουμε τον κανόνα σε ακλόνητη βάση και παρατηρούμε τη Σελήνη μέσα από τη μικρή οπή του σταθερού δίσκου. Εν συνεχεία μετακινούμε το δρομέα έτσι ώστε το χαλύβδινο σφαιρίδιο να καλύψει ακριβώς το δίσκο της Σελήνης. Στη θέση αυτή, η γωνία υπό την οποία φαίνεται το σφαιρίδιο συμπίπτει με εκείνη υπό την οποία φαίνεται η Σελήνη:

$$\epsilon\varphi\psi = \frac{\Delta}{L}$$

Συνεπώς,

$$\psi = \text{τοξε}\varphi \frac{\Delta}{L} \quad (7)$$

Κατά την εκτέλεση αυτών των μετρήσεων πρέπει να επιδειχθεί μέγιστη προσοχή, δεδομένου ότι από τα αποτελέσματά τους θα κριθεί εν πολλοίς και η ακρίβεια του υπολογισμού μας στο σύνολό του.

Η γωνιακή διάμετρος της Σελήνης μπορεί να μετρηθεί και έμμεσα με τη βοήθεια σκοτεινού θαλάμου. Εφόσον, όπως μας αποκαλύπτουν οι ηλιακές εκλείψεις, ο Ήλιος και η Σελήνη έχουν την ίδια φαινόμενη διάμετρο (φαίνονται υπό την ίδια γωνία), είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε έναν σκοτεινό θάλαμο κατάλληλων διαστάσεων ώστε να μας παρέχει ένα ικανοποιητικό είδωλο του Ήλιου, το οποίο μπορεί να αποτυπωθεί. Τότε, ο λόγος της δια-

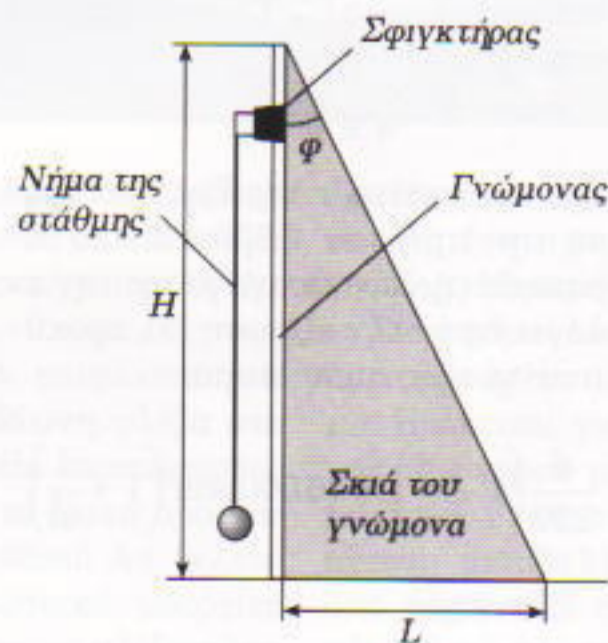
μέτρου του ειδώλου προς την απόστασή του από τη στενωπή (την οπή) μας δίνει τη ζητούμενη γωνία  $\psi$ .

### Μιμούμενοι τον Ερατοσθένη

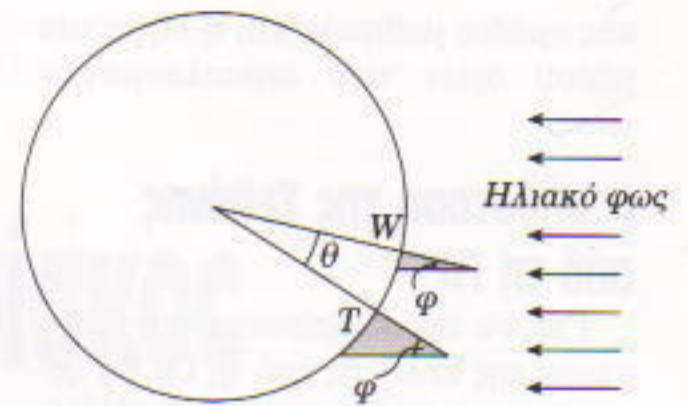
Το πείραμα του Ερατοσθένη μπορεί εύκολα να επαναληφθεί για την πραγματοποίησή του δεν απαιτούνται παρά μερικοί γνώμονες, δηλαδή κατακόρυφες ράβδοι τοποθετημένες σε επίπεδο έδαφος. Πρώτα πρέπει να βρούμε ένα ακόμη σχολείο πάνω στον ίδιο μεσημβρινό που απέχει τουλάχιστον 500 km. Αφού του αποκατασταθεί η επαφή μεταξύ των δύο σχολείων, οι μαθητές πρέπει να μετρήσουν το μήκος της σκιάς που ρίχνει ένας γνώμονας την ίδια χρονική στιγμή. Πρέπει να επιδειχθεί η δέουσα προσοχή ώστε να διασφαλιστεί ότι οι γνώμονες είναι όντως κατακόρυφοι. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια ενός απλού νήματος της στάθμης που αποτελείται από έναν σφιγκτήρα με σιαγόνες, ένα νήμα και ένα μολύβδινο βαρίδι (Σχήμα 5). Έστω, για παράδειγμα, ότι επιλέχθηκαν δύο τόποι  $W$  και  $T$  (Σχήμα 6), και ότι σε κάθε τόπο μετριέται το μήκος της σκιάς  $L$  και το ύψος  $H$  του γνώμονα στις δώδεκα το μεσημέρι. Τα στοιχεία αυτά μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τη γωνία  $\varphi$ :

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{L}{H}$$

ή



Σχήμα 5



Σχήμα 6

$$\varphi = \text{τοξε}\varphi \frac{L}{H}$$

Ομοίως μπορεί να υπολογιστεί και η γωνία  $\beta$  στον τόπο  $T$ . Τότε, είναι εύκολο να αποδείξουμε γεωμετρικά ότι

$$\theta = \beta - \varphi$$

Ανατρέχοντας σε έναν άτλαντα, βρίσκουμε την απόσταση  $WT = S$ , και κατόπιν, στηριζόμενοι σε απλές αναλογίες, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{S}{C} = \frac{\theta}{360} = \frac{S}{2\pi r}$$

όπου με  $C$  συμβολίζουμε την περιμετρο της Γης και με  $r$  την ακτίνα της. Η ανωτέρω σχέση μπορεί να επιλυθεί ως προς  $r$ , οπότε παίρνουμε

$$r = \frac{S \cdot 360}{2\pi\theta} \quad (8)$$

Τα σφάλματα στο πείραμα που μόλις περιγράψαμε προέρχονται από δύο πηγές. Η πρώτη είναι ότι, λόγω της περίθλασης, δύσκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε πού ακριβώς τελειώνει η σκιά· συνήθως το μήκος της ανέρχεται σε 2 cm περίπου. Η δεύτερη πηγή σφάλματος αφορά το ενδεχόμενο να μην είναι ακριβώς κατακόρυφη η ράβδος. Εφόσον επιδειχθεί η δέουσα προσοχή, αυτό το πρόβλημα μπορεί να περιοριστεί στο ελάχιστο. Για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα της πρώτης κατηγορίας, ενδείκνυται να αυξήσουμε κατά το δυνατόν περισσότερο το μήκος της ράβδου και να προσθέσουμε στην κορυφή της ένα τμήμα σχήματος  $T$ . Στην περαιτέρω βελτίωση της ακρίβειας θα συντελέσει και η εκτέλεση πολλών μετρήσεων από διαφορετι-



κές ομάδες μαθητών και η λήψη του μέσου όρων των αποτελεσμάτων τους.

## Η απόσταση της Σελήνης από τη Γη

Για να προσδιορίσουμε την απόσταση της Σελήνης από τη Γη, θα ξεκινήσουμε εισάγοντας στην εξίσωση (5) τις εξής τιμές που έχουμε ήδη βρει:

- Από την εξίσωση (7), τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η Σελήνη. Υπενθυμίζουμε ότι εκείνο το αποτέλεσμα μας αφορούσε τη γωνιακή διάμετρο της Σελήνης· εφόσον εμείς ενδιαφερόμαστε για τη γωνιακή ακτίνα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ήμισυ αυτής της τιμής. Με άλλα λόγια,

$$\epsilon\varphi \frac{\psi}{2} = \frac{a}{d}$$

Συνεπώς,

$$a = d \epsilon\varphi \frac{\psi}{2} \quad (9)$$

- Το λόγο  $s/a$ , που τον υπολογίσαμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6) και αξιοποιώντας παρατηρησιακά στοιχεία από τις σεληνιακές εκλείψεις.

- Την τιμή της  $r$ , που την προσδιορίσαμε μετρώντας το μήκος της σκιάς των γνωμών και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6).

Έτσι, μας λείπει μόνο η τιμή του  $n$ . Ο Αρίσταρχος αντιλήφθηκε ότι ο Ήλιος απείχε από τη Γη περισσότερο απ' όσο η Σελήνη, αλλά αγνοούσε τον ακριβή λόγο των αποστάσεων των δύο ουράνιων σωμάτων. Προσπάθησε λοιπόν να τον υπολογίσει με τις μεθόδους της γεωμετρίας, όμως η τιμή 20 στην οποία κατέληξε υπολείπεται κατά πολύ της πραγματικής. Ωστόσο, αν υποθέσουμε ότι το  $n$  είναι πολύ μεγάλο, μπορούμε να αμελήσουμε το λόγο  $1/n$  θεωρώντας τον απειροελάχιστο. Συνεπώς, παίρνουμε το εξής κάτω φράγμα για την τιμή της Σελήνης:

$$a \left( 1 + \frac{s}{a} \right) = r,$$

από την οποία προκύπτει ως αποτέ-

Στοιχεία που συνελέγησαν	Σχολείο 1	Σχολείο 2
Λόγος ακτίνας της γήινης σκιάς προς την ακτίνα της Σελήνης	2,67	2,67
Γωνιακή διάμετρος της Σελήνης	26'	31'
Ακτίνα της Γης	6.383 km	6.384 km
Υπολογισθείσες τιμές		
Απόσταση της Σελήνης από τη Γη	457.731 km	386.161 km
Διάμετρος της Σελήνης	3.461 km	3.476 km

### Πίνακας 1

λεσμα

$$a = \frac{r}{1 + \frac{s}{a}}$$

Εφόσον οι τιμές όλων των ποσοτήτων που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της ανωτέρω έκφρασης είναι γνωστές, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την τιμή της  $a$ . Άπαξ και βρεθεί η  $a$ , η εξίσωση (9) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την  $d$ . Έτσι, εύκολα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$d = \frac{a}{\epsilon\varphi \frac{\psi}{2}}$$

## Οι τιμές των αλεξανδρινών αστρονόμων

Ο Ίππαρχος χρησιμοποίησε τις τιμές

$$s/a = 8/3 \text{ και } \psi = 31',$$

οπότε  $\psi/2 = 15,5'$ . Έτσι, οδηγήθηκε στη σχέση

$$a \cong d/220.$$

Για την ακτίνα  $r$  της Γης, υιοθέτησε την τιμή των 6.500 km του Ερατοσθένη. Εάν εισαγάγουμε την εν λόγω τιμή στην εξίσωση (5), προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$\frac{d}{220} \left( 1 + \frac{8}{3} \right) = (6.500 \text{ km}) \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Συνεπώς,

$$d = (390.000 \text{ km}) \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Αρα, εάν, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, θεωρήσουμε το  $n$  μεγάλο, καταλήγουμε στο προσεγγιστικό αποτέλεσμα

$$d = 390.000 \text{ km}.$$

Στηριζόμενοι στο γεγονός ότι  $\psi = 31'$ , βρίσκουμε ότι η διάμετρος της Σελήνης ισούται με

$$(390.000 \text{ km}) \epsilon\varphi \psi = 3.517 \text{ km}.$$

Πρόκειται για τιμή που δεν αποκλίνει πολύ από τις τιμές που γίνονται παραδεκτές στις μέρες μας:

Διάμετρος Σελήνης: 3.476 km  
Μέση απόσταση Γης-Σελήνης: 384.404 km (καθώς η Σελήνη περιφέρεται γύρω από τη Γη η απόστασή τους κυμαίνεται μεταξύ 356.400 και 466.700 km).

## Μαθητές-αστρονόμοι

Στο παραπάνω πρόγραμμα έλαβαν μέρος αρκετά σχολεία της Δημοκρατίας της Νότιας Αφρικής· στον Πίνακα 1 παρουσιάζουμε δύο μάλλον τυπικά δείγματα των αποτελεσμάτων στα οποία κατέληξαν.

Παρότι υστερούν σε ακρίβεια, τα εν λόγω αποτελέσματα δίνουν τιμές οι οποίες δεν απέχουν πολύ από τις πραγματικές. Εύκολα διακρίνει κανείς πως το καθοριστικό στοιχείο για την επιτυχία αυτού του πειράματος συνίσταται στην ακρίβεια με την οποία προσδιορίζεται η γωνιακή διάμετρος της Σελήνης. Καθίσταται επίσης προφανές ότι η λήψη του μέσου όρου πολυπληθών μετρήσεων αποτελεί τον καλύτερο τρόπο για να μεγιστοποιηθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος. ●



# Ένας αβύθιστος δίσκος

Υδραυλικά άλματα στο νεροχύτη

A. Luzin

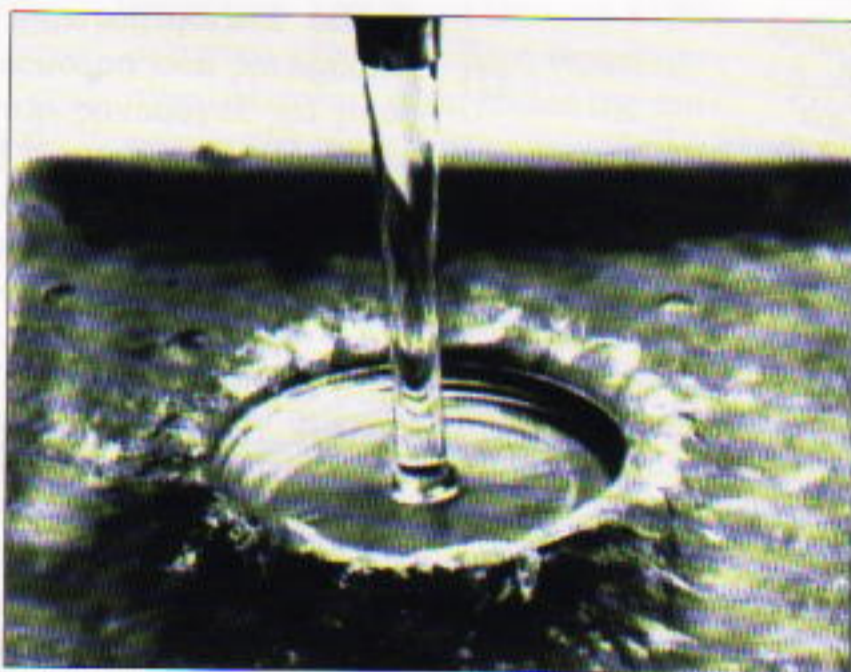
**Γ**ΙΑ ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΜΑΣ ΘΑ ΧΡΕΙΑΣΤΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΛΕΠΤΟ δίσκο με ειδικό βάρος μεγαλύτερο από εκείνο του νερού. Μπορούμε να τον κατασκευάσουμε από μια λεπτή λαμαρίνα πάχους 0,2-0,3 mm, από ένα φύλλο αλουμινίου πάχους 0,2-1,99 mm ή από ένα φύλλο πλεξιγκλάς πάχους 0,3-6 mm. Για να επιτύχουμε την άριστη δυνατή έκβαση των πειραμάτων μας, ο δίσκος μας ενδείκνυται να έχει διάμετρο 90-150 mm. Επιπλέον, στο κέντρο του πρέπει να σχηματίζει κοίλωμα διαμέτρου 12-15 mm και βάθους 1,5-3 mm.

Εάν τοποθετήσουμε προσεκτικά έναν τέτοιο δίσκο στην επιφάνεια του νερού, επιπλέει λόγω της επιφανειακής τάσης του υγρού. Επειδή, όμως, έχει μεγαλύτερο ειδικό βάρος από το νερό, σκέφτεστε ότι αρκεί να τον περιχύσετε με μπόλικο νερό για να βυθιστεί αμέσως. Κρατήστε, λοιπόν, το δίσκο με το χέρι σας και φέρτε τον κάτω από μια φλέβα νερού. Θα παρατηρήσετε ότι το νερό ωθεί το δίσκο προς τα κάτω με δύναμη σχετικά μεγάλη (η οποία οφείλεται στην υδροδυναμική πίεση της φλέβας). Τα αποτελέσματα των πειραμάτων που θα εκτελέσουμε δεν έχουν τίποτε το υπερφυσικό· η φυσική μπορεί κάλλιστα να τα εξηγήσει.

Τοποθετήστε λοιπόν το δίσκο στην επιφάνεια του νερού και κατευθύνετε την ισχυρή υδάτινη φλέβα στο κοίλωμα που υπάρχει στο κέντρο του. Θα παρατηρήσετε κάτι παράδοξο: η φλέβα ναι μεν ωθεί το δίσκο προς τα κάτω, πλην όμως αδυνατεί να τον βυθίσει! Αν θέλετε να κάνετε το πείραμά σας πιο εντυπωσιακό, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα δίσκο από έγχρωμο πλεξιγκλάς μέσα από το οποίο θα φαίνονται ευκρινώς τα διάφορα μικροσκοπικά αντικείμενα που υπάρχουν στον πυθμέ-

να του δοχείου. Ένα τέτοιο πείραμα δεν παρουσιάζει δυσκολίες στην πραγματοποίησή του, αρκεί η ροή του νερού στη φλέβα να είναι σχεδόν ομοιόμορφη, στρωτή και απαλλαγμένη από ορατούς στροβίλους.

Γιατί, λοιπόν, δεν βυθίζεται ο δίσκος; Εάν παρατηρήσετε το φαινόμενο επί μερικά λεπτά, θα προσέξετε ότι στην επιφάνεια του δίσκου έχει σχηματιστεί ένα δακτυλιοειδές υδάτινο τείχος, ένα έπαρμα, το οποίο ωθείται από το λεπτό στρώμα του νερού που ρέει ακτινικά εγκαταλείποντας την κεντρική περιοχή του δίσκου. Ως



εκ τούτου, μεταξύ του κέντρου του δίσκου και του επάρματος εμφανίζεται μια περιοχή ελαττωμένης πίεσης, οπότε η διαφορά των δυνάμεων που ασκούνται στην πάνω και την κάτω επιφάνεια του δίσκου αρκεί για να τον κάνει να επιπλέει, ακόμη και όταν βρίσκεται κάτω από την ισχυρή φλέβα. Πρόκειται για μια μάλλον εντυπωσιακή εκδήλωση των σχέσεων που περιγράφει ο νόμος του Bernoulli, ο οποίος πράγματι προβλέπει ότι ένα

λεπτό ρεύμα υγρού που ρέει ακτινικά είναι δυνατόν να απωθεί ένα υψηλό υδάτινο έπαρμα όπου η ταχύτητα της ροής παραμένει μικρή.

Στην υδραυλική έχει καθιερωθεί ειδικό όνομα για το παρατηρούμενο υδάτινο τείχος: λέγεται *υδραυλικό άλμα*. Πρόκειται για μια απότομη υπερύψωση της στάθμης του νερού με μορφή αναβαθμού η οποία παρατηρείται σε έναν ανοιχτό υδαταγωγό στο σημείο όπου η κίνηση μεταβάλλει το χαρακτήρα της μετατρέπόμενη από ταχεία και τυρβώδης σε ήρεμη και μόνιμη ροή. Το υδραυλικό άλμα μπορεί να παρατηρηθεί στην «προς τα κατάντη» πλευρά ενός φράγματος, αλλά στην περίπτωση αυτή έχει μορφή γραμμική και όχι κυκλική. Ωστό-



σο, είναι δυνατόν να δούμε ένα κυκλικό υδραυλικό άλμα ακόμη και αν δεν διαθέτουμε δίσκο· προς τούτο, αρκεί να αφήσουμε μια κατακόρυφη φλέβα νερού να πέσει στον πυθμένα ενός μεταλλικού νεροχύτη, έστω και αν η επιφάνειά του δεν είναι απολύτως επίπεδη.

Η μαθηματική περιγραφή του υδραυλικού άλματος βασίζεται στο νόμο του Bernoulli, ο οποίος, στην περίπτωση ενός υγρού που ρέει σε οριζόντιο ανοιχτό αγωγό με κατακόρυφα τοιχώματα, μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h_2,$$

ή

$$E_1 = E_2,$$

όπου με  $h$  συμβολίζουμε το βάθος της ροής και με  $v$  την ταχύτητά της σε κάποια διατομή του ανοικτού αγωγού, ενώ η ποσότητα  $E = h + v^2/(2g)$  είναι γνωστή στην υδραυλική ως *ειδική ενέργεια διατομής*. Προκειμένου για μη ιδανικά υγρά με μικρό συντελεστή εσωτερικής τριβής, η ανωτέρω εξίσωση πρέπει να αντικατασταθεί με την ανισότητα  $E_1 > E_2$ . Στην απλούστερη δυνατή περίπτωση όπου το υδραυλικό άλμα έχει ευθύγραμμη μορφή, και εφόσον το πλάτος του αγωγού διατηρείται καθ' όλο το μήκος του σταθερό και ίσο με  $b$ , η ανισότητα προσλαμβάνει τη μορφή  $E(h_1) > E(h_2)$ , όπου η  $E(h)$  δίνεται από τον τύπο

$$E(h) = h + \frac{\Pi^2}{2b^2gh^2}. \quad (1)$$

Στον παραπάνω τύπο, με  $\Pi = vbh$  συμβολίζουμε την παροχή, η οποία στην περίπτωση της μόνιμης ροής παραμένει η ίδια για κάθε διατομή του ανοικτού αγωγού.

Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι η ειδική ενέργεια διατομής  $E$  εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το  $h$ . Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνεται ότι η εξάρτηση αυτή δεν είναι μονότονη. Πράγματι, για κάποιο κρίσιμο βάθος της ροής,  $h_{κρ}$ , η ειδική ενέργεια διατομής παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, ενώ αυξάνεται απεριόριστα καθώς το  $h$  τείνει είτε στο μηδέν είτε στο άπειρο, στη μεν μία περίπτωση λόγω της επικράτησης του πρώτου όρου του δεξιού μέλους της (1), στη δε άλλη λόγω της επικράτησης του δεύτερου όρου. Το κρίσιμο βάθος της ροής μπορεί να προσδιοριστεί εάν επιλύσουμε την εξίσωση  $E'(h_{κρ}) = 0$ , η οποία απαιτεί να μηδενίζεται η παράγωγος της  $E$  ως προς  $h$  για  $h = h_{κρ}$ :

$$h_{κρ} = \sqrt{\frac{\Pi^2}{b^2g}}.$$

Όπως βλέπουμε, είναι δυνατοί δύο τύποι ροής, οι οποίοι αντιστοιχούν (α) στην περίπτωση όπου η ροή έχει ταχύτητα μάλλον υψηλή αλλά σχετικά μικρό βάθος ( $h < h_{κρ}$ ), το οποίο αυξάνει βραδέως κατά μήκος του αγωγού ενώ παράλληλα μειώνεται η ειδική ενέργεια δια-

τομής, και (β) στην περίπτωση όπου η ροή έχει ταχύτητα μάλλον χαμηλή αλλά αρκετά μεγάλο βάθος ( $h > h_{κρ}$ ), το οποίο μειώνεται βραδέως κατά μήκος του αγωγού όπως και η ειδική ενέργεια διατομής. Η εμπειρία δείχνει ότι είναι δυνατή μια «σύνθετη» ροή που συνίσταται από ροές του πρώτου και του δεύτερου τύπου, ανάμεσα στις οποίες παρεμβάλλεται μια μάλλον στενή περιοχή υδραυλικού άλματος.

Πώς σχηματίζεται μια τέτοια περίπλοκη ροή και πώς δημιουργείται το υδραυλικό άλμα; Πρόκειται για προβλήματα δύσκολα που ξεπερνούν τους οριζόντες του παρόντος άρθρου, το οποίο αρκείται σε προσεγγιστικές και ποιοτικές θεωρήσεις. Προφανώς, σε έναν ανοιχτό αγωγό με ομαλό οριζόντιο πυθμένα, υδραυλικό άλμα θα σχηματιστεί μόνο εφόσον σε κάποια διατομή του το υγρό έχει αρκούντως υψηλή κινητική ενέργεια ( $h < h_{κρ}$ ). Στα κατάντη της ροής και σε μεγάλες αποστάσεις από το συγκεκριμένο σημείο, η ενέργεια παρουσιάζει βαθμιαία μείωση λόγω του ιξώδους, ενώ παράλληλα αυξάνεται και το βάθος της ροής ώσπου να λάβει την κρίσιμη τιμή  $h = h_{κρ}$ . Το βάθος της ροής είναι αδύνατον να αυξηθεί περαιτέρω, διότι ένα τέτοιο ενδεχόμενο θα συνεπαγόταν αύξηση της  $E$ , η οποία αντιβαίνει στην ανισότητα  $E_1 > E_2$ . Το ρευστό επιβραδύνεται στην περιοχή όπου  $h \approx h_{κρ}$ , οπότε εξακολουθεί να συγκεντρώνεται εκεί ώσπου η ροή να καταστεί μόνιμη. Ως αποτέλεσμα της διαδικασίας που μόλις περιγράψαμε, το βάθος της ροής αυξάνεται δραστικά.

Μια λεπτομερέστερη θεωρητική πραγμάτευση του πειράματος που παρουσιάσαμε καθίσταται δυνατή στη βάση της λεγόμενης «κυματικής θεωρίας» του υδραυλικού άλματος, η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ύψος του αναβαθμού, την απότομη μεταβολή της πίεσης και την προκύπτουσα δυναμική άνωση που κρατά το δίσκο στην επιφάνεια του νερού. Ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί εκτενέστερα γι' αυτήν μελετώντας το Πρόβλημα 4.56 στο υπέροχο βιβλίο του Jearl Walker *Το πανηγύρι της φυσικής*. ■

#### Διαβάστε ακόμη τα άρθρα:

- S. Kuznin, «Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα», Νοέμ./Δεκ. 1994.
- J. Raskin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμ./Δεκ. 1994.
- I. Vorobyov, «Θόλοι και υπόγεια ρεύματα», Σεπτ./Οκτ. 1995.
- H. Schreiber, «Περί ιξώδους», Ιαν./Φεβ. 1996.
- L. Leonovich, «Υγρά και αέρια σε κίνηση», Μάρ./Απρ. 1996.
- A. Mitrofanov, «Κόντρα στο ρεύμα», Ιούλ./Αύγ. 1996.
- A. Stasenko, «Στρόβιλοι στο διάδρομο απογείωσης», Σεπτ./Οκτ. 1997.
- V.E. Belonuchkin, «Περί των παλιρροιών», Ιούλ./Αύγ. 1998.
- L. Guryashkin και A. Stasenko, «Η ιστορία μιας πτώσης», Ιαν./Φεβ. 1999.



# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

M171

**Πυραμιδική δομή.** Οι πέντε ακμές μιας τριγωνικής πυραμίδας έχουν μήκος 1. Βρείτε την έκτη ακμή εάν δίνεται ότι η ακτίνα της περιγεγραμμένης στην πυραμίδα σφαίρας ισούται με 1.

M172

**Αλγεβρικός γρίφος.** Να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{y-2}{xy-4} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2}$$

M173

**Τριγωνομετρικός γρίφος.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$|\sin 3x - \epsilon \phi x| + |\sin 3x + \epsilon \phi x| = |\epsilon \phi^2 x - 3|$$

M174

**Υπολογιστικός γρίφος.** Χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, ανακαλύψτε ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος: ο  $29^{200} 2^{151}$  ή ο  $5^{279} 3^{300}$ ;

M175

**Ελάχιστη γωνία.** Έστω  $M$  το μέσον της πλευράς  $BC$  του τριγώνου  $ABC$  και  $Q$  το σημείο τομής των διχοτόμων του. Δίνεται ότι  $MQ = QA$ . Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της γωνίας  $MQA$ .

## Φυσική

Φ171

**Ομοίωμα της Γης.** Για τις ανάγκες μιας ταινίας του Σπίλμπεργκ, κατασκευάζεται ομοίωμα της Γης. Έχει το ίδιο μέγεθος και την ίδια μάζα όπως η πραγματική, αλλά διαφορετική κατασκευή: αποτελείται από

μία μικρή σφαίρα με εξαιρετικά πυκνή ύλη κι από μια ελαφριά πλαστική κοίλη σφαίρα που περιβάλλει την πρώτη. Λόγω κάποιας κακοτεχνίας κατά τη συναρμολόγηση, το κέντρο μάζας της βαριάς σφαίρας είναι μετατοπισμένο στο ισημερινό επίπεδο κατά  $d = 100 \text{ km}$  από το κέντρο βάρους του εξωτερικού κελύφους. Να βρεθεί η ελάχιστη περίοδος περιφοράς για ένα δορυφόρο που εκτελεί τροχιά στο ισημερινό επίπεδο. (A. Zilberman)

Φ172

**Φυσαλίδα από σαπούνι.** Μια φυσαλίδα από σαπωνοδιάλυμα περιέχει αέριο άζωτο. Για ποια τιμή της διαμέτρου της θα «πλέει» σε ατμοσφαιρικό αέρα της ίδιας θερμοκρασίας; Δίνονται ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του σαπωνοδιαλύματος  $a = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ , η γραμμομοριακή μάζα του αέρα  $M_a = 28 \text{ g/mol}$ , η γραμμομοριακή μάζα του αζώτου  $M_N = 28 \text{ g/mol}$  και η ατμοσφαιρική πίεση  $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Η μάζα του υμενίου θεωρείται αμελητέα. (A. Sheronov)

Φ173

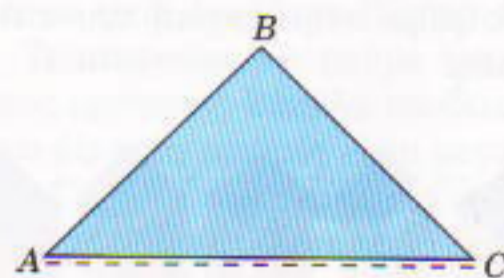
**Ηλεκτρικό σάντουιτς.** Ένας επίπεδος πυκνωτής τύπου σάντουιτς αποτελείται από τρεις παράλληλες μεταλλικές πλάκες, η καθεμιά εμβαδού  $S$ . Τον μεταξύ των πλακών χώρο τον καταλαμβάνουν δύο διηλεκτρικά που χαρακτηρίζονται από τις (σχετικές) διηλεκτρικές σταθερές  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  και τις ειδικές αντιστάσεις  $\rho_1$  και  $\rho_2$ . Τα διηλεκτρικά έχουν πάχη  $d_1$  και  $d_2$ . Ο πυκνωτής συνδέεται στους πόλους πηγής σταθερής τάσης  $V$ . Να βρεθεί το φορτίο στη μεσαία πλάκα όταν το ρεύμα στο κύκλωμα έχει φτάσει πλέον στη μόνιμη του κατάσταση.

Φ174

**Δακτυλιοειδής μετασχηματιστής.** Τρία πανομοιότυπα πηνία περιελίσσονται συμμετρικά σε έναν δακτυλιοειδή πυρήνα. Το ένα από τα πηνία συνδέεται με πηγή εναλλασσόμενης τάσης, το δεύτερο αφήνεται ανοικτό και το τρίτο συνδέεται με ένα βολτόμετρο. Στην προκειμένη περίπτωση, το βολτόμετρο καταγράφει τάση ίση με το ήμισυ της τάσης της πηγής. Ποια θα είναι η ένδειξη του βολτομέτρου αν βραχυκυκλώσουμε το δεύτερο πηνίο; Αγνοήστε την αντίσταση των πηνίων, και θεωρήστε τόσο το βολτόμετρο όσο και την πηγή τάσης ως ιδανικά. Η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα δεν εξαρτάται από τη μαγνητική ροή. (A. Andrianov)

Φ175

**Νέα και απόψεις.** Δίνεται ορθό πρίσμα με διατομή που φαίνεται στο Σχήμα 1 και δείκτη διάθλασης  $n$ . Η  $\angle ABC$  είναι ορθή, και  $\angle BAC = \angle ACB$ . Οι παράπλευρες έδρες  $AC$  και  $BC$  είναι λείες, ενώ η έδρα  $AB$  είναι παγωμένη (Σχήμα 1). Ακουμπάμε το πρίσμα πάνω σε μια εφημερίδα, με την έδρα  $AC$  κάτω. Ποιο κλάσμα του κειμένου (από την αποψη του εμβαδού) μπορούμε να διαβάσουμε διαμέσου της λείας έδρας  $BC$ ; (S. Godryunin, P. Gorkov)



Σχήμα 1

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 67



# Επιστροφή σε προηγούμενη κατάσταση

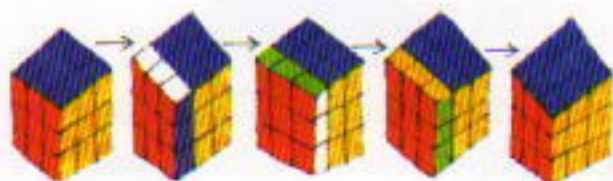
Ο επιμένων νικά

A. Savin

**Ο**ΤΑΝ ΗΜΟΥΝ ΠΑΙΔΙ ΑΓΑΠΟΥΣΑ τα καλειδοσκόπα. Κοιτάζεις μέσα στον μαγικό σωλήνα και αντικρίζεις ένα υπέροχο μωσαϊκό. Στρέφεις ελάχιστα το καλειδοσκόπο και αποκαλύπτεις έναν καινούργιο σχηματισμό· μία νέα στροφή, και άλλος ένας.

Όταν αντίκρισα για πρώτη φορά τον κύβο του Rubic, τον περιέστρεψα όπως ένα καλειδοσκόπο για να θαυμάσω απλώς το χρωματικό παιχνίδι στις έδρες του. Αυτή η άσκοπη περιστροφή με κούρασε σύντομα και προσπάθησα να επαναφέρω τον κύβο στην αρχική του κατάσταση. Αφού επί αρκετές ώρες προσπάθησα —χωρίς επιτυχία— να ανακαλύψω έναν αλγόριθμο για να επανέλθει ο κύβος σε τάξη, διάβασα ένα σχετικό άρθρο, και σε μία ώρα περίπου έμαθα πώς να το πετυχαίνω.

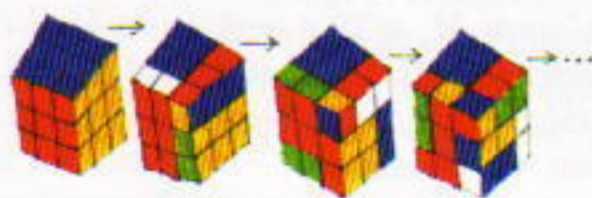
Αρχισα τότε να περιστρέφω τον κύβο πιο προσεκτικά, έτσι ώστε να μπορώ να τον επαναφέρω στην αρχική του κατάσταση. Περιέστρεψα μια έδρα του μία φορά, μετά τρεις ακόμη (Σχήμα 1), και ο κύβος όντως επέστρεψε στην αρχική του κατάσταση.



Σχήμα 1

Τι θα συμβεί αν περιστρέψουμε

δύο γειτονικές του έδρες διαδοχικά με την ίδια φορά; Πρώτη έδρα, δεύτερη έδρα —το πρώτο ζεύγος κινήσεων—, πρώτη έδρα, δεύτερη έδρα —το δεύτερο—, πρώτη έδρα, δεύτερη έδρα —το τρίτο, κ.ο.κ. (Σχήμα 2). Γνώριζα ήδη ότι ο κύβος θα επέστρεφε στην αρχική του κατάσταση μετά ένα συγκεκριμένο πλήθος ζευγών περιστροφών. Τα δάκτυλά μου κουράστηκαν, έχασα το μέτρημα, αλλά ο κύβος δεν είχε επιστρέψει ακόμη στην αρχική θέση του. Τα χρώματα επανήλθαν στην κανονική τους σειρά μόνο έπειτα από 105 ζεύγη περιστροφών.



Σχήμα 2

Γιατί ήμουν τόσο βέβαιος ότι θα έφτανε υποχρεωτικά αυτή η στιγμή; Αφιέρωσα απλώς λίγη σκέψη στο πρόβλημα. Το πλήθος των καταστάσεων του κύβου, αν και πολύ μεγάλο, είναι πεπερασμένο. Επομένως, δεν μπορεί να φτάνει κάθε φορά σε καινούργια κατάσταση —αργά-γρήγορα, θα καταλήξει σε μια κατάσταση που έχει ήδη εμφανιστεί. Θα ονομάσουμε αυτή την κατάσταση *A* και την αρχική κατάσταση του κύβου *E* (Σχήμα 3). Ένα ζεύγος περιστροφών φέρνει τον κύβο στην κατάσταση *B*, ένα ακόμη τον φέρνει



Σχήμα 3

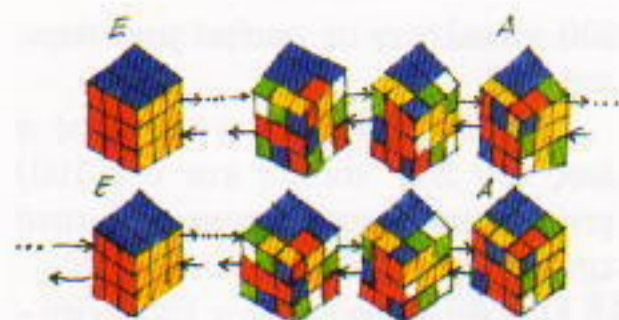
από τη *B* στη *C* κ.λπ., έως ότου επανέλθει στην κατάσταση *A*. Από εκείνη τη στιγμή και μετά, όλα επαναλαμβάνονται. Οι μαθηματικοί λένε ότι οι καταστάσεις του κύβου επαναλαμβάνονται περιοδικά. Θα διατυπώσουμε αυτό το αποτέλεσμα όχι μόνο για τον κύβο του Rubic αλλά και για αντικείμενα οποιουδήποτε είδους.

**Θεώρημα περιοδικότητας:** Υποθέτουμε ότι ένα αντικείμενο μπορεί να βρεθεί σε πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων και ότι έχει οριστεί μια πράξη που μεταφέρει το αντικείμενο από κάθε κατάστασή του σε κάποια άλλη, μονοσήμαντα ορισμένη. Τότε, η διαδοχική εφαρμογή αυτής της πράξης δίνει μια περιοδικά επαναλαμβανόμενη ακολουθία καταστάσεων του αντικειμένου.

Αυτή η πρόταση μοιάζει με νόμο της φύσης ή με μαθηματικό θεώρημα —κι έτσι είναι πράγματι. Επιπλέον, αυτό το θεώρημα μας επιτρέπει να εξαγάγουμε αποτελέσματα εξαιρετικού ενδιαφέροντος.

Πρώτα, όμως, ας ολοκληρώσουμε το συλλογισμό μας για τον κύβο του Rubic. Επσημαίνουμε μια ιδιότητα της πράξης μας: για κάθε κατάσταση μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα την προηγούμενη. Αρκεί





Σχήμα 4

να περιστρέψουμε πρώτα τη δεύτερη έδρα και μετά την πρώτη σε αντίθετη φορά από αυτή που την περιστρέψαμε αρχικά. Παρατηρήστε το Σχήμα 4.

Έστω ότι βρισκόμαστε για πρώτη φορά στην κατάσταση A. Αν μετακινηθούμε προς τα πίσω, έπειτα από ένα πλήθος βημάτων θα συναντήσουμε την κατάσταση E. Συνεπώς, αν μετακινηθούμε προς τα πίσω από τη δεύτερη φορά που συναντάμε την κατάσταση A, θα βρεθούμε στην κατάσταση E έπειτα από το ίδιο πλήθος βημάτων. Επομένως, μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κατάστασης A, ο κύβος «επισκέπτεται» αναγκαστικά την κατάσταση E.

Αυτός ήταν ο συλλογισμός μου πριν ξεκινήσω να περιστρέφω τον κύβο σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα. Φυσικά, το πλήθος των ζευγών περιστροφών θα μπορούσε να είναι πολύ μεγάλο, διότι το συνολικό πλήθος καταστάσεων του κύβου είναι τεράστιο

43.252.003.274.489.856.000.

Προσπάθησα να περιστρέψω τις έδρες του κύβου προς διαφορετικές κατευθύνσεις —τη μία έδρα δεξιόστροφα και την άλλη αριστερόστροφα. Σε αυτή την περίπτωση, ο κύβος επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση έπειτα από 63 ζεύγη περιστροφών. Αν περιστρέψουμε τρεις έδρες κατά την ίδια φορά, ο κύκλος τερματίζεται έπειτα από 80 τριάδες περιστροφών. Αν λοιπόν έχετε έναν κύβο του Rubic, μπορείτε να πειραματιστείτε με διάφορους συνδυασμούς περιστροφών. Εάν όχι, μην το βάζετε κάτω· πάρτε χαρτί και μολύβι και αρχίστε να πειραματίζεστε με αριθμούς. Μια αριθμομηχανή ή ένας υπολογιστής βοηθούν σίγουρα, αλλά μπορούμε να τα καταφέρουμε και χωρίς αυτά.

## Επαναλαμβανόμενα ψηφία

Ας διαιρέσουμε το 136 διά του 11. Επί τη ευκαιρία, γνωρίζετε κάποιο κριτήριο διαιρετότητας διά του 11; Ιδού ένα: ένας αριθμός διαιρείται διά του 11 αν η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των άρτιας τάξης ψηφίων του δεκαδικού του αναπτύγματος και του αθροίσματος των περιττής τάξης ψηφίων του δεκαδικού του αναπτύγματος διαιρείται διά του 11. Στην περίπτωση μας,  $(1 + 6) - 3 = 4$ , και επομένως το 136 δεν διαιρείται διά του 11. Τι θα συμβεί αν προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτή τη διαίρεση (Σχήμα 5); Διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα ψηφία μετά την υποδιαστολή επαναλαμβάνονται περιοδικά. Ένας τέτοιος αριθμός δεν τερματίζεται, και ονομάζεται *άπειρο περιοδικό δεκαδικό κλάσμα*. Συμβολίζετε ως  $12,3\overline{6}$ , όπου τα επαναλαμβανόμενα ψηφία βρίσκονται γραμμένα κάτω από την παύλα.



Σχήμα 5

Ποιοι άλλοι ακέραιοι δίνουν περιοδικά δεκαδικά κλάσματα όταν διαιρεθούν με άλλον ακέραιο; Στην πραγματικότητα, όλοι —με την προϋπόθεση ότι δεν διαιρούμε διά του μηδενός (μπορούμε να θεωρήσουμε ως άπειρο κάθε περιοδικό δεκαδικό κλάσμα εάν επισυνάψουμε άπειρο πλήθος μηδενικών μετά το τελευ-

ταίο μη μηδενικό ψηφίο). Γιατί συμβαίνει αυτό; Θα το αποδείξουμε με τη βοήθεια του θεωρήματος περιοδικότητας που διατυπώσαμε πριν. Ας θεωρήσουμε κάθε μερικό υπόλοιπο που εμφανίζεται κατά τη διαίρεση ως το αντικείμενο που αφορά το θεωρήμα μας. Στην περίπτωση μας το υπόλοιπο είναι 2, μετά 4, μετά 7, μετά ξανά 4, μετά ξανά 7, κ.λπ. Ας δούμε ποια πράξη εκτελούμε με αυτό το αντικείμενο. Πρώτα, επισυνάπτουμε ένα ψηφίο στα δεξιά του, ύστερα αφαιρούμε το μέγιστο πολλαπλάσιο του διαιρέτη που δεν υπερβαίνει αυτό τον νέο αριθμό, και η προκύπτουσα διαφορά είναι το αποτέλεσμα της πράξης.

Στην αρχή, το ψηφίο που επισυνάπτουμε δεξιά εξαρτάται απ' το διαιρετέο, αλλά έπειτα από ένα ορισμένο πλήθος βημάτων (στην περίπτωση μας, μετά το δεύτερο βήμα) είναι πάντα το μηδέν. Τώρα οι συνθήκες της πρότασης ικανοποιούνται: το αντικείμενο (η διαφορά που προκύπτει όταν αφαιρούμε) μπορεί να περιέλθει σε πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων (μη αρνητικοί ακέραιοι μικρότεροι του διαιρέτου). Η πράξη είναι καλώς ορισμένη: μεταφέρει έναν αριθμό σε άλλον. Επομένως, η προκύπτουσα ακολουθία αριθμών επαναλαμβάνεται περιοδικά. Άρα, και τα ψηφία του ηλίκου θα επαναλαμβάνονται περιοδικά. Έτσι, η πρόταση αποδείχθηκε.

## Επαναλαμβανόμενα αθροίσματα

Τι θα συμβεί αν πάρουμε το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού, μετά το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που προκύπτει, κ.ο.κ.; Για παράδειγμα, για τον αριθμό 1987 τα πάντα είναι ξεκάθαρα (Σχήμα 6).

Τι μπορούμε να πούμε για άλλους αριθμούς; Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε αριθμός είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα των ψηφίων του (με εξαίρεση τους μονοψήφιους αριθμούς). Επομένως, η πράξη της άθροισης των ψηφίων ενός αριθμού τον μετατρέπει σε έναν μικρότερο, έως ότου καταλήξουμε σε μονοψήφιο αριθμό, τον οποίο η πράξη μας





Σχήμα 6

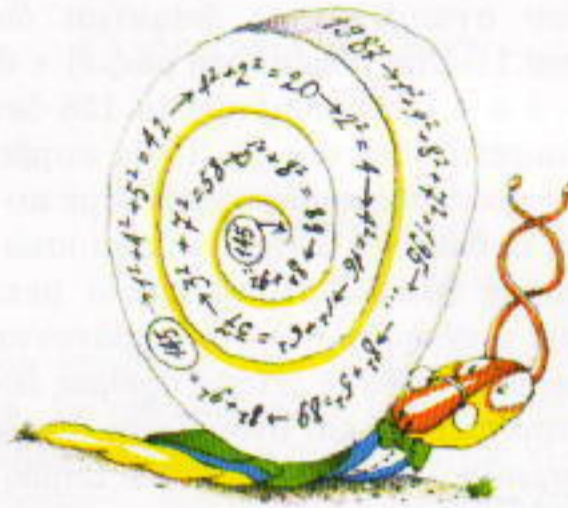
μεταφέρει στον εαυτό του. Αποδείξαμε επομένως ότι, από ένα συγκεκριμένο σημείο και μετά, η προκύπτουσα ακολουθία είναι περιοδική (με περίοδο 1).

Ποιο είναι το επαναλαμβανόμενο ψηφίο στη συγκεκριμένη ακολουθία; Μπορούμε να απαντήσουμε εύκολα το ερώτημα χωρίς να γράψουμε την ακολουθία. Αν ο αρχικός αριθμός δεν διαιρείται από το 9, τότε είναι το υπόλοιπο της διαίρεσής του διά του 9· διαφορετικά, είναι το 9. Και γιατί συμβαίνει αυτό; Η αιτία είναι το κριτήριο της διαιρετότητας διά 9. Κατά πάσα πιθανότητα, γνωρίζετε αυτό το κριτήριο στη «συντομευμένη» του μορφή: Για να διαιρείται ένας αριθμός διά του 9, πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται διά 9. Όμως, ισχύει μια ισχυρότερη πρόταση: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού διά του 9 ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος των ψηφίων του διά 9.

Είναι προφανές πλέον ότι κάθε αριθμός της ακολουθίας δίνει το ίδιο υπόλοιπο με τον αρχικό αριθμό όταν διαιρεθεί με το 9. Όλοι οι μονοψήφιοι αριθμοί, εκτός του 0 και του 9, δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν διά του 9. Όμως, το άθροισμα των ψηφίων ενός μη μηδενικού αριθμού είναι μεγαλύτερο του μηδενός —και, άρα, η πρότασή μας αποδείχθηκε. Μια περιοδική ακολουθία με περίοδο 1 ονομάζεται ακολουθία σταθερού σημείου.

## Τετράγωνα ψηφίων

Τι θα συμβεί αν αντί του αθροίσματος των ψηφίων ενός αριθμού θεωρήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του; Ας πάρουμε και πάλι τον αριθμό 1987 (Σχήμα 7). Προκύπτει η επόμενη περιοδικά επαναλαμβανόμενη ακολουθία: 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.



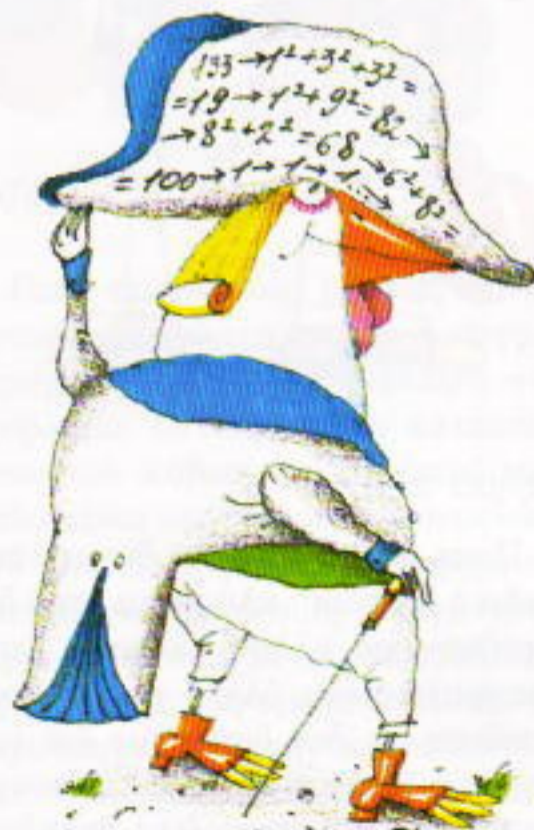
Σχήμα 7

Για τον αριθμό 133, προκύπτει μια ακολουθία με το σταθερό σημείο 1 (Σχήμα 8).

Οδηγεί πάντα σε περιοδική ακολουθία η πράξη της άθροισης των τετραγώνων των ψηφίων, και εάν ναι, τι ακολουθίες προκύπτουν;

Για την εν λόγω πράξη ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

1. Κάθε αριθμός μικρότερος του



Σχήμα 8

200 καταλήγει σε αριθμό μικρότερο του 200.

2. Κάθε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 200 (ακόμη και του 100) γίνεται μικρότερος έπειτα από αυτή την πράξη.

Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε την πρώτη πρόταση. Πράγματι, από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 200, ο 199 έχει το μεγαλύτερο άθροισμα τετραγώνων ψηφίων (ίσο με 163). Επομένως, το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων όλων των αριθμών των μικρότερων του 200 είναι επίσης μικρότερο του 200.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και η δεύτερη πρόταση ισχύει (αρκεί να δοκιμάσετε μερικούς μεγάλους αριθμούς, για να βεβαιωθείτε για την ορθότητά της). Στη συνέχεια δίνουμε μια αυστηρή απόδειξή της.

Υποθέτουμε ότι ένας αριθμός  $N = a_n \dots a_2 a_1 a_0$  είναι μικρότερος από το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του:

$$a_n \cdot 10^n + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + \dots + a_0^2.$$

Τότε,

$$a_n(10^n - a_n) + \dots + a_2(10^2 - a_2) + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0.$$

Σε αυτό το άθροισμα, όλοι οι όροι εκτός του τελευταίου είναι μη αρνητικοί. Ο τελευταίος όρος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του  $9(1 - 9) = -72$ . Έστω ότι ένα τουλάχιστον ψηφίο  $a_n$ , για  $n \geq 2$ , είναι μη μηδενικό ( $1 \leq a_n \leq 9$ ). Τότε έχουμε

$$a_n(10^n - a_n) > 10^n - 9 \geq 91,$$

και το συνολικό άθροισμα είναι θετικό. Επομένως,  $n \leq 1$  και  $N < 100$ .

Από τις Προτάσεις 1 και 2 και το θεώρημα περιοδικότητας έπεται ότι η πράξη της άθροισης των τετραγώνων των ψηφίων ενός αριθμού οδηγεί αναπόφευκτα σε περιοδική ακολουθία.

Απομένει να βρούμε ποιες περιοδικές ακολουθίες προκύπτουν. Αποδεικνύεται ότι, ανεξάρτητα από τον αρχικό αριθμό, η ακολουθία είναι είτε η 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58,

Η συνέχεια στη σελ. 55 ⇨



# Η καλύτερη επιλογή

Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού

V. Gutenmakher και Zh. Rabbot

**Σ**ΥΧΝΑ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ στο σχολείο ή στις εξετάσεις προβλήματα στα οποία καλούνται να σχηματίσουν μια εξίσωση. Ο μαθητής πρέπει πρώτα να μεταφράσει τις συνθήκες του προβλήματος από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική και στη συνέχεια να λύσει τις προκύπτουσες εξισώσεις και ανισώσεις. Μέσα στο πλαίσιο της κατάστασης που περιγράφει το πρόβλημα, ο μαθητής πρέπει να βρει συγκεκριμένες ποσότητες έχοντας ως δεδομένα κάποιες άλλες ποσότητες. Για παράδειγμα, ιδού οι πρώτες και τελευταίες φράσεις μερικών τυπικών προβλημάτων που συναντήσαμε σε σχολικά βιβλία:

*Δύο δακτυλογράφοι πρέπει να πληκτρολογήσουν ένα κείμενο... Πόσες ώρες θα χρειαστεί κάθε δακτυλογράφος για να πληκτρολογήσει το κείμενο;*

*Μια μηχανοκίνητη βάρκα ξεκινά από την αποβάθρα και κινείται ακολουθώντας το ρεύμα του ποταμού... Πόσο χρόνο θα χρειαστεί ο ποδηλάτης για να πάει από την πόλη στο τουριστικό κέντρο;*

*Κράμα χαλκού-ψευδαργύρου το οποίο περιέχει 5 kg ψευδαργύρου αναμειγνύεται με 15 kg ψευδαργύρου... Ποια ήταν η αρχική μάζα του κράματος;*



Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τον τρόπο λύσης τέτοιων προβλημάτων, τα οποία εμφανίζονται συχνά στη βιομηχανία και την οικονομία, όπου χρειάζεται να υπολογίσουμε και να συνδυάσουμε διάφορους δείκτες, να αναλύσουμε την λειτουργία μιας εταιρείας, κ.λπ. Μια τέτοια ανάλυση βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα την τρέχουσα κατάσταση. Το επόμενο βήμα φυσικά είναι να σχεδιάσουμε τις μελλοντικές δραστηριότητες. Εδώ υπάρχουν πολυάριθμες εναλλακτικές δυνατότητες, και συνήθως επιθυμούμε να επιλέξουμε την καλύτερη από αυτές.

Η διατύπωση και η λύση τέτοιων προβλημάτων αποτελεί το αντικεί-

μενο του μαθηματικού προγραμματισμού. Ο ρώσος μαθηματικός L.V. Kantorovich (1912-1986) ήταν ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά για να λύσουν πρακτικά προβλήματα αυτού του είδους. Το 1939 εξέδωσε ένα βιβλίο με τίτλο *Μαθηματικοί μέθοδοι για την οργάνωση και το σχεδιασμό της παραγωγής*. Στην εισαγωγή του σημείωνε:

«Υπάρχουν δύο τρόποι να αυξήσουμε την αποδοτικότητα ενός καταστήματος, ενός εργοστασίου ή ενός ολόκληρου βιομηχανικού κλάδου. Ο πρώτος είναι να βελτιώσουμε την τεχνολογία, δηλαδή να προσδώσουμε νέες ικανότητες στα μεμονωμένα μηχανήματα, να τροποποιήσουμε τις τεχνολογικές διαδικασίες ή να ανακαλύψουμε καινούργιες και καλύτερες πρώτες ύλες. Ο δεύτερος, μη αξιοποιημένος τρόπος, είναι να βελτιώσουμε την οργάνωση και το σχεδιασμό της παραγωγικής διαδικασίας. Η κατανομή των καθηκόντων μεταξύ των μηχανημάτων ενός εργοστασίου, η κατανομή των παραγγελιών μεταξύ των εργοστασίων και η κατανομή των διαφόρων πρώτων υλών, καυσίμων, κ.λπ., εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία.»

Έχουν περάσει πολλά χρόνια από



την έκδοση αυτού του βιβλίου και ο μαθηματικός προγραμματισμός έχει αναπτυχθεί σε έναν μεγάλο κλάδο των μαθηματικών που βασίζεται σε οικονομικές-μαθηματικές μεθόδους και στην εκτεταμένη χρήση υπολογιστών.

Στα πραγματικά προβλήματα σχεδιασμού και διαχείρισης είμαστε υποχρεωμένοι να αντιμετωπίσουμε ταυτόχρονα ένα εξαιρετικά μεγάλο πλήθος μεταβλητών. Στο παρόν άρθρο, όμως, θα εξετάσουμε μόνο απλά παραδείγματα με μικρό πλήθος μεταβλητών. Η λύση σε αυτά μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια μεθόδων που είναι γνωστές ακόμη και σε μαθητές λυκείου, όπως οι αναλογίες, οι ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ο εξαντλητικός έλεγχος ενός μικρού πλήθους εκδοχών και ο κοινός νους.

## Επιλογή της θέσης των λουτρών

Η κωμόπολη του Σάπονος έχει 100 κατοίκους και το χωριό Πετσέτα 50. Επιλέξτε μια θέση για την κατασκευή λουτρών πάνω στο δρόμο που συνδέει τις δύο κοινότητες, έτσι ώστε η απόσταση που θα διασχίζουν και οι 150 κάτοικοι για να πάνε στο λουτρό να είναι ελάχιστη.

Ας επαναδιατυπώσουμε τις συνθήκες του προβλήματος στη γλώσσα των μαθηματικών. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των δύο χωριών είναι  $a$  km και ακόμη ότι τα λουτρά βρίσκονται σε απόσταση  $x$  km από τον Σάπονα. Επομένως,  $0 \leq x \leq a$ . Οι 100 κάτοικοι του Σάπονος πρέπει να περπατήσουν συνολικά  $100x$  km για να πάνε στα λουτρά, ενώ οι 50 κάτοικοι της Πετσέτας  $50(a - x)$  km. Επομένως, η συνολική απόσταση που διασχίζουν όλοι οι κάτοικοι είναι  $s = 100x + 50(a - x)$ .

Έχουμε καταλήξει στο επόμενο μαθηματικό πρόβλημα: Βρείτε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας  $s = 50x + 50a$  όταν  $0 \leq x \leq a$ , όπου το  $a$  είναι σταθερό.

Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ εύκολο. Για να το λύσουμε, παρατηρούμε απλώς ότι το  $s$  μειώνεται όταν μειώνεται το  $x$ . Επομένως, το  $s$

παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή όταν και το  $x$  παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή —δηλαδή,  $x = 0$ . Άρα, τα λουτρά πρέπει να κτιστούν στον Σάπονα.

Ας σχολιάσουμε το αποτέλεσμα. Όποτε τίθεται τούτο το πρόβλημα, σχεδόν όλοι απαντούν ότι τα λουτρά πρέπει να κτιστούν σε μια θέση που βρίσκεται σε διπλάσια απόσταση από την Πετσέτα απ' όσο από τον Σάπονα. Πιθανότατα χρησιμοποιούν το φυσικό μοντέλο μιας απλής τραμπάλας με δύο ανθρώπους στις άκρες της, από τους οποίους ο ένας έχει διπλάσιο βάρος από τον άλλο.

Αν τα λουτρά κτιζόνταν σε απόσταση  $a/3$  από τον Σάπονα, οι κάτοικοί του θα διέσχίζαν συνολικά την ίδια απόσταση με τους κατοίκους της Πετσέτας:  $100 \cdot (a/3) = 50 \cdot (2a/3)$ . Αν λοιπόν, αντί να θεωρήσουμε όλους τους κατοίκους, εξετάσουμε το συμφέρον κάθε χωριού ξεχωριστά και αναζητήσουμε ένα «σημείο ισορροπίας», η λύση αυτή είναι αναμφίβολα δικαιότερη. Ωστόσο, είναι λύση ενός τελείως διαφορετικού μαθηματικού προβλήματος: για ποια τιμή του  $x$  ( $0 \leq x \leq a$ ) η ποσότητα  $f = |100x - 50(a - x)|$  παίρνει την ελάχιστη τιμή;

Είναι φανερό ότι η πρόταση «καλύτερη εναλλακτική λύση» μπορεί να ερμηνευθεί με τρόπους διαφορετικούς. Για να αποδώσουμε συγκεκριμένη σημασία σε αυτή την πρόταση ορίζουμε μια αντικειμενική συνάρτηση. Στο πρόβλημά μας ήταν η συνάρτηση  $s = 50x + 50a$ , ενώ στο άλλο πρόβλημα ήταν η συνάρτηση  $f = |150x - 50a|$ . Ο προσδιορισμός της τιμής του  $x$  για την οποία η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή δίνει το καλύτερο αποτέλεσμα (από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία).

Είναι προφανές ότι οι κάτοικοι της Πετσέτας μπορεί να διαφωνήσουν και με τις δύο λύσεις, και πιθανότατα θα έχουν ισχυρά επιχειρήματα. Για παράδειγμα, ότι υπάρχουν περισσότεροι ηλικιωμένοι και παιδιά στην Πετσέτα παρά στον Σάπονα, ότι υπάρχουν λιγότερα αυτοκίνητα στην Πετσέτα ή ότι υπάρχουν μεγαλύτερα αποθέματα νερού

στην πόλη τους, κ.ο.κ. Εάν λάβουμε υπόψη μας αυτά τα επιχειρήματα, καταλήγουμε σε ένα άλλο μαθηματικό πρόβλημα ή, με άλλα λόγια, σε ένα διαφορετικό μαθηματικό μοντέλο.

Ελπίζουμε ότι οι αναγνώστες δεν θα σχηματίσουν εσφαλμένη εντύπωση από το κάπως εκκεντρικό θέμα του παραδείγματός μας με τα λουτρά. Ιδού μερικά παρόμοια προβλήματα σοβαρού χαρακτήρα: *Επιλέξτε την τοποθεσία του εστιατορίου σε ένα μεγάλο εργοστάσιο με πολλά τμήματα. Ποιο είναι το καλύτερο χρονοδιάγραμμα για την εξυπηρέτηση των εργατών στο εστιατόριο;*

Σε αυτή την περίπτωση, η επιλογή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μάλλον προφανής (η ελαχιστοποίηση του χρόνου σερβιρίσματος). Όμως, το βέλτιστο σχέδιο δεν εξαρτάται μόνο από το πλήθος των εργατών στα διαφορετικά τμήματα αλλά και από τις λεπτομέρειες της παραγωγικής διαδικασίας και άλλα ζητήματα.

## Ο καλύτερος τρόπος για να φτάσετε στο σταθμό

Ο κύριος Σμιθ πρέπει να φτάσει στον σιδηροδρομικό σταθμό το συντομότερο δυνατόν. Έχει τη δυνατότητα ή να καλέσει ταξί, το οποίο θα έρθει σε 24 min και θα τον μεταφέρει στο σταθμό με ταχύτητα 30 km/h, ή να περπατήσει με ταχύτητα 6 km/h. Ποια μέθοδος είναι προτιμότερη αν ο σταθμός απέχει (α) 2 km, (β) 3 km, (γ) 5 km;

Για να συγκρίνουμε ευκολότερα την κίνηση του πεζού και του αυτοκινήτου, θα εισαγάγουμε στο πρόβλημά μας ένα ακόμη πρόσωπο, τη σύζυγο του κυρίου Σμιθ.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο κύριος Σμιθ άρχισε να περπατά για το σταθμό και ότι, μόλις βγήκε από το σπίτι, η σύζυγός του πρόσεξε πως είχε ξεχάσει το εισιτήριό του. Τότε, κάλεσε αμέσως ταξί, περίμενε να έρθει και ξεκίνησε να συναντήσει το σύζυγό της.

Ας υπολογίσουμε το χρόνο που χρειάζεται για να τον προλάβει. Τη χρονική στιγμή  $t$  μετά την αναχώ-



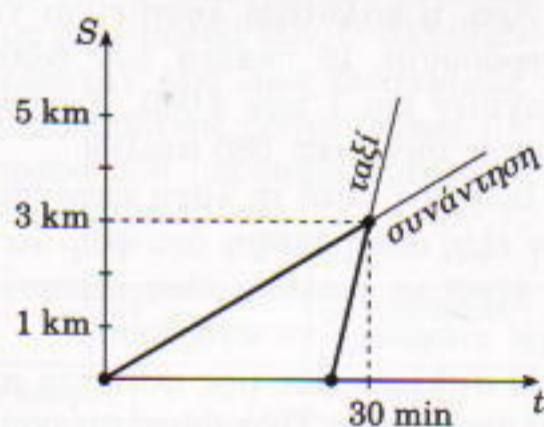
ρησή του, ο κύριος Σμιθ θα βρίσκεται σε απόσταση  $6t$  km από το σπίτι του. Αν  $t > 24 \text{ min} = 2/5 \text{ h}$ , το ταξί θα διανύσει  $30(t - (2/5))$  km.

Το ταξί θα προλάβει τον κύριο Σμιθ όταν

$$6t = 30(t - (2/5)),$$

δηλαδή όταν  $t = 1/2 \text{ h}$ . Αν το περπάτημα μέχρι το σταθμό διαρκέσει λιγότερο από  $1/2 \text{ h}$ , η σύζυγος του κυρίου Σμιθ δεν θα τον προλάβει. Διαφορετικά, θα τον συναντήσει και θα τον πάει στο σιδηροδρομικό σταθμό. Ο κύριος Σμιθ μπορεί να περπατήσει 3 km μέσα σε  $1/2 \text{ h}$ . Συνεπώς καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: αν η απόσταση του σταθμού είναι μικρότερη των 3 km (όπως στην περίπτωση (α)), ο κύριος Σμιθ είναι προτιμότερο να περπατήσει. Αν η απόσταση ισούται με 3 km, το περπάτημα και η μετακίνηση με ταξί είναι ισοδύναμα, ενώ στην περίπτωση (γ) είναι καλύτερα να πάρει ταξί.

Θα κατανοήσουμε καλύτερα τη λύση αν την παραστήσουμε με ένα γράφημα (δείτε το σχήμα).



Κατά τη λύση αυτού του προβλήματος πραγματοποιήσαμε σιωπηρά ορισμένες παραδοχές: ο πεζός και το αυτοκίνητο κινούνται ομαλά, η κλήση και η αναχώρηση του ταξί είναι στιγμιαίες (στην πράξη αυτό δεν ισχύει), κ.λπ. Επιπλέον, υποθέσαμε εμμέσως ότι σημαντικότερος πόρος για τον κύριο Σμιθ είναι ο χρόνος. Ωστόσο, στην περίπτωση (β) οι δύο εναλλακτικές λύσεις είναι ισοδύναμες από αυτή την άποψη. Για να επιλέξουμε μία από αυτές πρέπει να συνυπολογίσουμε άλλα στοιχεία: είτε το κόστος της διαδρομής (οπότε ο κύριος Σμιθ μάλλον θα προτιμήσει να περπατήσει) είτε την άνεση (θα πάρει το ταξί).

## Ποδήλατο για δύο

Δύο αδέρφια, ο Τάσος και ο Μάριος, επιθυμούν να επισκεφθούν τη γιαγιά τους, η οποία μένει 40 km μακριά. Έχουν ένα μόνο ποδήλατο, φορτωμένο με τα πράγματά τους. Ο Τάσος μπορεί να περπατά με ταχύτητα  $6 \text{ km/h}$  και να οδηγεί το ποδήλατο με ταχύτητα  $20 \text{ km/h}$ . Ο Μάριος να περπατά με  $4 \text{ km/h}$  και να οδηγεί με  $30 \text{ km/h}$ . Το ποδήλατο μπορεί να μείνει στο δρόμο αψύλακτο. Ποιος είναι ο ταχύτερος τρόπος για να φτάσουν στη γιαγιά;

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο αδέρφια φτάνουν στο σπίτι της γιαγιάς τους ταυτόχρονα, και ας υπολογίσουμε τον απαιτούμενο χρόνο. Θα αποδείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να φτάσουν και οι δύο σε λιγότερο χρόνο —δηλαδή, αν ο ένας από τους δύο διασχίσει τη διαδρομή σε λιγότερο χρόνο, ο άλλος θα χρειαστεί περισσότερη ώρα από όση απαιτείται όταν φτάνουν και οι δύο ταυτόχρονα.

Ας υποθέσουμε ότι ο Τάσος διήνυσε τα  $x$  km με το ποδήλατο και περπάτησε τα υπόλοιπα  $(40 - x)$  km, ενώ ο Μάριος, αντίθετα, περπάτησε  $x$  km και χρησιμοποίησε το ποδήλατο για  $(40 - x)$  km. Τότε, ο Τάσος ταξίδεψε  $((x/20) + (40 - x)/6)$  ώρες και ο Μάριος  $((x/4) + (40 - x)/30)$  ώρες. Αν φτάσουν ταυτόχρονα, θα έχουμε

$$\frac{x}{20} + \frac{40 - x}{6} = \frac{x}{4} + \frac{40 - x}{30}.$$

Από αυτή την εξίσωση βρίσκουμε ότι  $x = 16 \text{ km}$  και, επομένως, για να φτάσουν στη γιαγιά τους χρειάστηκαν 4,8 ώρες.

Αυτή η λύση μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής. Ο Τάσος ξεκινά από το σπίτι με το ποδήλατο, το οδηγεί επί  $16 \text{ km}$  και το εγκαταλείπει στην άκρη του δρόμου, και συνεχίζει περπατώντας. Ο Μάριος ξεκινά από το σπίτι πεζός, φτάνει μέχρι το σημείο που άφησε ο Θωμάς το ποδήλατο, και συνεχίζει με αυτό.

Ας επαληθεύσουμε ότι είναι αδύνατον να φτάσουν και οι δύο στο σπίτι της γιαγιάς τους σε μικρότερο διάστημα. Πράγματι, εάν ο Τάσος

χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για λιγότερο από  $16 \text{ km}$ , θα πρέπει να διασχίσει την επιπλέον απόσταση με τα πόδια και, επομένως, θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο. Εάν, αντίθετα, χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για περισσότερο από  $16 \text{ km}$ , τότε ο Μάριος πρέπει να περπατήσει την επιπλέον απόσταση και, συνεπώς, θα φτάσει αργότερα απ' ό,τι προηγουμένως.

Σε τούτο το πρόβλημα ένας απλούστατος πρακτικός συλλογισμός μάς οδήγησε στη βέλτιστη λύση: τα αδέρφια πρέπει να φέρουν το ποδήλατο στο σπίτι της γιαγιάς τους και να φτάσουν ταυτόχρονα. Είναι προφανές ότι εάν σταματήσουν για να ξεκουραστούν, απλώς θα καθυστερήσει η άφιξή τους.

Και σε αυτό το πρόβλημα έχουμε διάφορες επιλογές. Στην πραγματικότητα, υπάρχει άπειρο πλήθος λύσεων που δίνουν τον ελάχιστο χρόνο ταξιδιού: Κάθε αδελφός μπορεί να αφήσει πολλές φορές το ποδήλατο για τον άλλο, αρκεί ο Τάσος να περπατήσει συνολικά  $16 \text{ km}$  και ο Μάριος  $24 \text{ km}$ . Μπορείτε να βρείτε μόνοι σας ποια από αυτές είναι η καλύτερη λύση.

## Ελαχιστοποίηση του χαλκού

Σε ένα εργαστήριο υπάρχουν τρία κράματα. Το πρώτο περιέχει 60% νικέλιο και 40% χαλκό, το δεύτερο 60% χαλκό, 40% κοβάλτιο, και το τρίτο 60% κοβάλτιο και 40% νικέλιο (δείτε τον επόμενο πίνακα). Για κάποιο πείραμα απαιτείται  $1 \text{ kg}$  ενός νέου κράματος το οποίο θα περιέχει 40% κοβάλτιο και όσο το δυνατόν λιγότερο χαλκό. Πώς μπορούμε να το παρασκευάσουμε;

	Cu	Ni	Co
I	40%	60%	—
II	60%	—	40%
III	—	40%	60%

Ας κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος. Ας πούμε ότι παίρνουμε  $x \text{ kg}$  του πρώτου κράματος,  $y \text{ kg}$  του δεύτερου και  $z \text{ kg}$  του τρίτου.

Σύμφωνα με το πρόβλημα,  $x + y + z = 1$ . Το νέο κράμα θα περιέχει



$0,4y + 0,6z$  κοβάλτιο. Επομένως,  $0,4y + 0,6z = 0,4$ . Το νέο κράμα θα περιέχει επίσης  $0,4x + 0,6y$  χαλκό.

Συνοπώς, έχουμε το επόμενο μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος: *Βρείτε μη αρνητικούς αριθμούς  $x$ ,  $y$  και  $z$  που ικανοποιούν το επόμενο σύστημα εξισώσεων:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,4y + 0,6z = 0,4 \end{cases}$$

και τέτοιους ώστε η ποσότητα  $m = 0,4x + 0,6y$  να έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

Με τη βοήθεια του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουμε τα  $x$  και  $z$  συναρτήσει του  $y$ , και αντικαθιστούμε στην παράσταση που μας δίνει το  $m$ . Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ελάχιστο της προκύπτουσας συνάρτησης του  $y$  (λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μεταβλητές  $x$ ,  $y$ ,  $z$  πρέπει να είναι μη αρνητικές).

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$z = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}y.$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή στην πρώτη εξίσωση, παίρνουμε

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y.$$

Συνοπώς,

$$m = \frac{2}{15} + \frac{7}{15}y.$$

Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $y$  τόσο μικρότερη είναι η αντίστοιχη τιμή του  $m$ . Όμως, η ελάχιστη δυνατή τιμή του  $y$  είναι 0. Σε αυτή την περίπτωση,  $m = 2/15$  και  $x = 1/3$ ,  $z = 2/3$ . Άρα, πρέπει να πάρουμε  $1/3$  kg από το πρώτο κράμα και  $2/3$  kg από το τρίτο. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε καθόλου το δεύτερο κράμα.

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια γραμμική συνάρτηση,

$$m = \frac{2}{15} + \frac{7}{15}y,$$

η οποία λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν το  $y$  λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή του τιμή (εδώ  $y = 0$ ). Αν

είχαμε εκφράσει το  $m$  συναρτήσει των  $x$  και  $z$ , ο εντοπισμός του διαστήματος στο οποίο θα αναζητούσαμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης θα ήταν δυσκολότερος. Το πρόβλημα της επιλογής της μεταβλητής βάσει της οποίας θα εκφράσουμε την αντικειμενική συνάρτηση είναι εξαιρετικά σημαντικό.

Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε όλες αυτές τις πράξεις αν κάναμε την εξής παρατήρηση: Για να περιέχει το νέο κράμα 40% κοβάλτιο αλλά όσο το δυνατόν λιγότερο χαλκό, πρέπει να περιέχει όσο το δυνατόν περισσότερο νικέλιο. Επομένως, παρόλο που το δεύτερο κράμα φαίνεται κατάλληλο επειδή περιέχει ήδη 40% κοβάλτιο, είναι προτιμότερο να μην το χρησιμοποιήσουμε καθόλου. Άρα, θα αναμιξουμε το πρώτο και το τρίτο κράμα. Αν πάρουμε  $a$  kg από το πρώτο, πρέπει να πάρουμε  $(1 - a)$  kg από το τρίτο. Το νέο κράμα θα περιέχει  $0,6(1 - a)$  kg κοβαλτίου. Επομένως,  $0,6(1 - a) = 0,4$ . Άρα,  $a = 1/3$ , και καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

### Χριστουγεννιάτικο πρόβλημα

Για την αγορά των στολιδιών του χριστουγεννιάτικου δέντρου έχει προβλεφθεί ένα ποσό 100.000 δραχμών. Τα στολίδια πωλούνται σε πακέτα. Το πακέτο που περιέχει 20 κομμάτια κοστίζει 4.000 δραχμές, το πακέτο των 35 κομματιών κοστίζει 6.000 δραχμές και το πακέτο με 50 κομμάτια κοστίζει 9.000 δραχμές. Ποια πακέτα πρέπει να επιλεγούν ώστε να αγοραστεί το μέγιστο δυνατό πλήθος στολιδιών;

Κάθε κομμάτι του πρώτου πακέτου κοστίζει  $1/5$  του χιλιάριου, του δεύτερου  $6/35$  και του τρίτου  $9/50$ . Γράφουμε σε αύξουσα τάξη αυτούς τους αριθμούς:  $6/35 < 9/50 < 1/5$ . Διαπιστώνουμε ότι το δεύτερο πακέτο περιέχει τα φθηνότερα στολίδια, ενώ το πρώτο τα ακριβότερα.

Για να μπορέσουμε να αγοράσουμε το μέγιστο δυνατό πλήθος στολιδιών με 100.000 δραχμές, πρέπει φυσικά να αγοράσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα φθηνά στολίδια. Συνοπώς, μπορούμε να πάρουμε το πολύ 16 πακέτα του δεύτερου

I	II	III
20	35	50
4.000 δρχ.	6.000 δρχ.	9.000 δρχ.

I	II	III
1	1	1
1.000/5 δρχ.	6.000/35 δρχ.	9.000/50 δρχ.

τύπου (αξίας 6.000 δραχμών το καθένα) με συνολικό κόστος 96.000 δραχμές. Και με τις υπόλοιπες 4.000 δραχμές μπορούμε να αγοράσουμε μόνο το πρώτο πακέτο. Επομένως, θα έχουμε τελικά  $16 \cdot 35 + 20 = 580$  στολίδια.

Αυτή μοιάζει να είναι η καλύτερη επιλογή. Για να βεβαιωθούμε, ας δοκιμάσουμε μια άλλη εναλλακτική λύση. Αν αγοράσουμε 15 πακέτα των 6.000 δραχμών, θα μας περισσέψουν 10.000 δραχμές, με τις οποίες μπορούμε να αγοράσουμε είτε ένα πακέτο των 9.000 δραχμών είτε δύο των 4.000 δραχμών. Σε κάθε περίπτωση, το συνολικό πλήθος των στολιδιών είναι μικρότερο του 580.

Άρα, η καλύτερη λύση είναι να αγοράσουμε 16 πακέτα των 6.000 δραχμών και 1 των 4.000. Έτσι θα έχουμε συνολικά 580 στολίδια.

Βρήκαμε αυτή τη λύση κάνοντας την εξής απλή σκέψη: όσο φθηνότερα είναι τα στολίδια τόσο περισσότερα μπορούμε να αγοράσουμε.

Ο συλλογισμός μας φαίνεται απολύτως ορθός. Πώς όμως μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι δεν είναι προτιμότερο να αγοράσουμε 14 από τα φθηνότερα πακέτα; Ας ψάξουμε για μια αυστηρότερη λύση.

Έστω  $x$  το πλήθος των πακέτων τύπου I,  $y$  το πλήθος των πακέτων τύπου II και  $z$  το πλήθος των πακέτων τύπου III. Πρέπει να βρούμε μη αρνητικούς ακεραίους τέτοιους ώστε  $4x + 6y + 9z \leq 100$  και η ποσότητα  $S = 20x + 35y + 50z$  να παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Έχουμε ότι

$$4x + 6y + 9z =$$

$$\frac{6}{35}S + \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}z \geq \frac{6}{35}S$$

και, επομένως,



$$\frac{6}{35} S \leq 100,$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$S \leq 583 \frac{1}{3}.$$

Αφού το  $S$  είναι ακέραιος που διαιρείται διά του 5, έχουμε  $S \leq 580$ . Για  $x = 1$ ,  $y = 16$  και  $z = 0$  ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του προβλήματος, και  $S = 580$ .

Αυτό το πρόβλημα αποτελεί ένα παράδειγμα *ακέραιου προγραμματισμού*, μιας από τις πολυπλοκότερες κατηγορίες μαθηματικού προγραμματισμού.

### Προβλήματα

1. Θα πρέπει να τοποθετήσουμε τρεις υπαλλήλους, τον Γιώργο, τον Ιάκωβο και τον Ηλία, σε τρία τμήματα ενός πολυκαταστήματος: των ραδιοφώνων, των μουσικών οργάνων και των φωτογραφικών μηχανών. Ο διευθυντής ζήτησε τη βοήθεια ενός ψυχολόγου για να κάνει την καλύτερη δυνατή κατανομή. Ο ψυχολόγος έλεγξε τις γνώσεις και τις προτιμήσεις των υπαλλήλων για καθέναν από τους δεδομένους τομείς και τους βαθμολόγησε με τον τρόπο που παρουσιάζεται στον πίνακα.

	ραδιοφώνων	φωτογραφικές μηχανές	μουσικά όργανα
Γιώργος	5	4	7
Ιάκωβος	6	7	3
Ηλίας	8	11	2

Πώς πρέπει να κατανείμει τους υπαλλήλους ο διευθυντής για να πετύχει τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία; (Για παράδειγμα, αν τοποθετήσει τον Γιώργο στο τμήμα των ραδιοφώνων, τον Ιάκωβο στο τμήμα των μουσικών οργάνων και τον Ηλία στο τμήμα των φωτογραφικών μηχανών, η συνολική βαθμολογία θα είναι  $5 + 3 + 11 = 19$ ).

2. Σε μια μικρή σχάρα χωράνε 2 μετρίου μεγέθους μπριζόλες. Μέσα σε δέκα λεπτά μπορούμε να τις ψήσουμε και από τις δύο μεριές. Με ποιον τρόπο μπορούμε να ψήσουμε

ταχύτερα 3 παρόμοιες μπριζόλες σε αυτή τη σχάρα;

3. Τα σημεία  $A$  και  $B$  βρίσκονται στην ίδια πλευρά μιας ευθείας. Πώς θα τοποθετήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $MK$ , μήκους  $a$ , πάνω στην ευθεία ώστε η πολυγωνική γραμμή  $AMKB$  να έχει το ελάχιστο δυνατόν μήκος;

4. Τρεις αδελφοί αγόρασαν ένα ποδήλατο. Πρέπει να το πάνε στο σπίτι τους, που απέχει 30 km από το κατάστημα. Ο καθένας τους περπατά με ταχύτητα 4 km/h και οδηγεί το ποδήλατο με ταχύτητα 20 km/h. Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζονται για να φτάσουν στο σπίτι τους; (Το ποδήλατο μπορεί να μείνει στο δρόμο αφύλακτο.)

5. Ο Νίκος μπορεί να φάει ένα κέικ σε 10 λεπτά, ένα βάζο μαρμελάδα σε 8 λεπτά και να πει ένα μπουκάλι γάλα σε 4 λεπτά. Ο Πέτρος κάνει τα ίδια πράγματα με διπλάσια ταχύτητα. Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζονται για να καταναλώσουν και οι δύο μαζί ένα πρωινό που αποτελείται από ένα κέικ, ένα βάζο μαρμελάδα και ένα μπουκάλι γάλα;

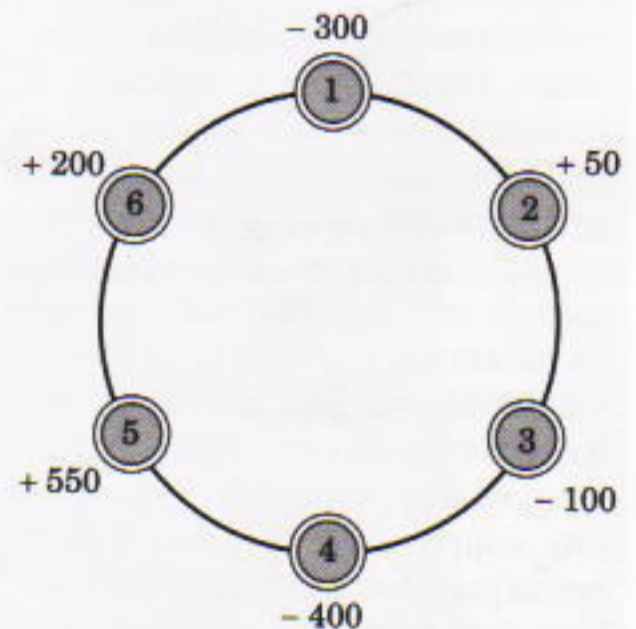
6. Τέσσερα δοχεία περιέχουν από 1 λίτρο υδατικού διαλύματος οξέος. Η περιεκτικότητα των διαλυμάτων σε οξύ είναι 10%, 30%, 60% και 80%, αντιστοίχως. Κάποιος βοηθός του εργαστηρίου πρέπει να προετοιμάσει ένα νέο διάλυμα περιεκτικότητας 50% σε οξύ. Ποια είναι η μέγιστη ποσότητα του νέου διαλύματος που μπορεί να παρασκευάσει αναμειγνύοντας τα δεδομένα διαλύματα;

7. Πρέπει να παρασκευάσουμε ένα κράμα περιεκτικότητας 40% σε κασίτερο. Έχουμε διαθέσιμα τρία κράματα με περιεκτικότητες σε κασίτερο 60%, 10% και 40%, αντίστοιχα. Η τιμή 1 kg αυτών των κραμάτων είναι 430 δραχμές, 580 δραχμές και 550 δραχμές, αντίστοιχα. Ποια κράματα και σε ποια αναλογία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να είναι όσο το δυνατόν φθηνότερο το νέο κράμα;

8. Μπορούμε να οικοδομήσουμε

τρεις τύπους πολυκατοικιών χρησιμοποιώντας προκατασκευασμένα δομικά υλικά δύο τύπων. Για μια πολυκατοικία 12 διαμερισμάτων απαιτούνται 70 δομικά υλικά του πρώτου τύπου και 100 του δεύτερου, για μια πολυκατοικία των 16 διαμερισμάτων 110 του πρώτου τύπου και 150 του δεύτερου, ενώ για την πολυκατοικία των 21 διαμερισμάτων 150 του πρώτου τύπου και 200 του δεύτερου. Υπάρχουν διαθέσιμα 900 δομικά στοιχεία του πρώτου τύπου και 1300 του δεύτερου. Πόσες πολυκατοικίες από κάθε είδος πρέπει να κτίσουμε ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατόν πλήθος διαμερισμάτων;

9. Κατά μήκος ενός κυκλικού δρόμου υπάρχουν τρεις αποθήκες και τρία καταστήματα: η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο γειτονικών χώρων είναι 1 km. Στο σχήμα παρουσιάζονται τα διαθέσιμα αγαθά σε κάθε αποθήκη (συμβολίζονται με θετικό πρόσημο) και η ζήτηση κάθε καταστήματος (συμβολίζεται με αρνητικό πρόσημο). Πρέπει να καταστρώσετε το πλέον αποδοτικό σχέδιο διανομής για να μεταφέρετε όλα τα αγαθά από τις αποθήκες στα καταστήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε το συνολικό άθροισμα των χιλιομετρών (δηλαδή, του πλήθους των χιλιομέτρων που μεταφέρεται ο κάθε τόνος) να έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή. Παρουσιάστε το καλύτερο σχέδιο παράδοσης και εξηγήστε το συλλογισμό σας.



κων χώρων είναι 1 km. Στο σχήμα παρουσιάζονται τα διαθέσιμα αγαθά σε κάθε αποθήκη (συμβολίζονται με θετικό πρόσημο) και η ζήτηση κάθε καταστήματος (συμβολίζεται με αρνητικό πρόσημο). Πρέπει να καταστρώσετε το πλέον αποδοτικό σχέδιο διανομής για να μεταφέρετε όλα τα αγαθά από τις αποθήκες στα καταστήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε το συνολικό άθροισμα των χιλιομετρών (δηλαδή, του πλήθους των χιλιομέτρων που μεταφέρεται ο κάθε τόνος) να έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή. Παρουσιάστε το καλύτερο σχέδιο παράδοσης και εξηγήστε το συλλογισμό σας.



# Βρίσκοντας την κατεύθυνση στο χάος

Περί της κβαντικής φύσεως της θερμότητας

V. Mityugov

**Π**ΡΟΣΦΑΤΩΣ ΕΤΥΧΕ ΝΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΘΩ ότι σε μια σχολική ολυμπιάδα φυσικής ετέθη το εξής πρόβλημα: «Κατασκευάστε ένα σύστημα που να κινείται κατευθυντικά υπό την επίδραση χαοτικών δυνάμεων και επιδείξτε τη λειτουργία του.» Δεν χρειάστηκε να βασανίσω πολύ το μυαλό μου για την απάντηση. Θυμήθηκα τους θερινούς μήνες των μεταπολεμικών χρόνων, που συνήθως τους περνούσα σε κάποιο χωριό μαζί με συγγενικά πρόσωπα. Τα παιδιά της υπαίθρου μου έμαθαν ένα παιχνίδι: όταν έχεις να κάνεις μεγάλο δρόμο, βάλε ένα κομμάτι άχυρο κάτω από το πουκάμισό σου κοντά στη ζώνη και ξέχασέ το εκεί. Μετά από λίγο μπορείς να βρεις το άχυρο σε διάφορα μέρη —στο μανίκι, στην πλάτη ή και όπου αλλού βάλει ο νους σου. Παρότι εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς για ποιο λόγο συμβαίνει κάτι τέτοιο, το αποτέλεσμα προκαλεί πάντοτε έκπληξη.

Μπορούμε να σκεφτούμε πολυάριθμα παραδείγματα τέτοιων «μηχανικών ανορθωτών», δηλαδή διατάξεων οι οποίες μετατρέπουν την ενέργεια των χαοτικών κινήσεων σε μεταφορική κίνηση. Η μηχανική ανόρθωση αποτελεί την αρχή λειτουργίας των παλιρροϊκών σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, οι οποίοι κατασκευάζονται στους θαλάσσιους κόλπους που προσφέρονται για το σκοπό αυτό. Κατά τη φάση της

πλημμυρίδας, οι θυρίδες κάποιου φράγματος κλείνουν απομονώνοντας τον κόλπο από τον ωκεανό, και στη διάρκεια της άμπωτης που ακολουθεί ένας υδροστρόβιλος παράγει εξαιρετικά φθηνή ενέργεια. Στην ημιπερίοδο των παλιρροϊών όπου έχουμε ανύψωση της στάθμης των υδάτων τα πάντα μπορούν να αναστραφούν, οπότε καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα.<sup>1</sup>

Πρόκειται άραγε για ένα εύστοχο παράδειγμα μετατροπής της χαοτικής κίνησης σε κατευθυντική κίνηση; Στην πραγματικότητα, όχι: οι άμπωτες και οι πλημμυρίδες των παλιρροϊών συνδέονται με την κίνηση της Σελήνης και δεν έχουν τίποτε το χαοτικό. Τι θα άλλαζε αν, αντί για τις κανονικές παλίρροιας, είχαμε κάποιες ακανόνιστες διακυμάνσεις της στάθμης του νερού —για παράδειγμα, το ανεμογενές «φούσκωμα» των υδάτων στον Κόλπο της Φινλανδίας (για περισσότερες λεπτομέρειες σας παραπέμπουμε στον *Μπρούντζινο καβαλάρη* του Αλεξάνδρου Πούσκιν). Προφανώς, στην προκειμένη περίπτωση θα καθίστατο αναγκαία η εγκατάσταση πρόσθετων οργάνων, τα οποία θα παρείχαν τα απαιτούμενα δεδομένα

1. Στους παλιρροϊκούς σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας αναφέρεται ένα πρόσφατο άρθρο του *Quantum*: V.E. Belonuchkin, «Περί παλιρροϊών», Ιούλιος/Αύγουστος 1998.

για τον ενδεδειγμένο χειρισμό της θυρίδας.

Ένα εν λειτουργία μοντέλο τέτοιου σταθμού παραγωγής ενέργειας θα μπορούσε να κατασκευαστεί σε μια μικρή λίμνη ή έναν ποταμό όπου υπάρχουν οι κατάλληλες υδροφυσικές συνθήκες, ή ακόμη και σε μια παλιρροϊκή νεωδόχο. Η κλασική μηχανική, και ιδιαίτερα ο τομέας της υδροδυναμικής, γενικά επιτρέπουν την ευρεία χρήση μοντέλων υπό κλίμακα, έτσι ώστε φαινόμενα μεγάλων διαστάσεων να μελετώνται σε μικρά μοντέλα, και αντιστρόφως.

Για παράδειγμα, προτού ναυπηγηθεί ένα μεγάλο πλοίο μελετώνται —με τη βοήθεια ενός μικρού μοντέλου— η υδροδυναμική του ευστάθεια και η συμπεριφορά του όσον αφορά τη διατοίχιση (μπότζι) και τον προνευστασμό (σκαμπανέβασμα) υπό συνθήκες καταιγίδας. Πόσο μικρό μπορεί να είναι αυτό το μοντέλο; Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα οφείλει να λαμβάνει υπόψη τον εξής καθοριστικό παράγοντα: πρέπει οπωσδήποτε να εξασφαλίζεται η απόλυτη ομοιότητα των κυματικών ιδιοτήτων της υδάτινης επιφάνειας με εκείνες που παρουσιάζονται στη διάρκεια μιας καταιγίδας. Το μοντέλο του πλοίου δεν μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρό, διότι στις μικρές κλίμακες η δομή του κύματος εξαρτάται έντονα από την επιφανειακή τάση. Η επιφανειακή



Американская посольства - не много тепла для  
русского





τάση, με τη σειρά της, οφείλεται στη μοριακή έλξη, η οποία περιγράφεται από τους κβαντικούς νόμους.

Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάσαμε ένα πολύ μικρό μοντέλο ενός μεγάλου τόννου. Με έναν κατάλληλο ηλεκτρικό κινητήρα μπορούμε να προσομοιώσουμε όλες τις περιστροφικές κινήσεις του τόννου, εφόσον πρόκειται για τη λειτουργία του άνευ φορτίου. Ωστόσο, αν επιχειρήσουμε να κατεργαστούμε μέταλλο σε ένα τέτοιο μικρό μοντέλο τόννου, θα αποτύχουμε. Η αρχή «του αναλλοιώτου υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας» της κλασικής μηχανικής παύει να ισχύει στην παρούσα περίπτωση λόγω της κοκκώδους πολυκρυσταλλικής δομής των μετάλλων. Αυτή η δομή υπακούει στους νόμους της κβαντικής μηχανικής. Το μικροσκοπικό κοπτικό εργαλείο σε ένα μοντέλο τόννου είναι κατασκευασμένο από πραγματικό μέταλλο, και γι' αυτό δεν μπορεί να λειτουργήσει όπως πρέπει.

Ας επιστρέψουμε, όμως, στη χαοτική (τυχαία, στοχαστική) κίνηση. Το 1871, ο άγγλος φυσικός James Clerk Maxwell επινόησε ένα υποθετικό πλάσμα (που το αποκαλούσε «δαίμονα») το οποίο μπορούσε να ανορθώσει τη χαοτική μοριακή κίνηση ενός θερμού αερίου. Χειριζόμενος μια μικρή θυρίδα, ο δαίμονας του Maxwell μπορούσε να διαχωρίσει τα γρήγορα από τα αργά μόρια και να τα συλλέξει στα δύο διαφορετικά διαμερίσματα στα οποία χωριζόταν ένα δοχείο. Το γεγονός ότι ονόμασε το υποθετικό του πλάσμα δαίμονα φανερώνει πως ο Maxwell θεωρούσε αδύνατη την κατασκευή μιας μικροσκοπικής συσκευής που θα εκτελούσε ένα τέτοιο έργο. Εάν πίστευε ότι ήταν δυνατή —έστω και κατ' αρχήν— η κατασκευή μιας τέτοιας συσκευής, θα είχε ονομάσει το πλάσμα του ελεγκτή, χειριστή, φύλακα ή κάτι παρόμοιο. Συνεπώς διαισθανόταν ότι κάτι δεν πήγαινε καλά μ' αυτό το υποθετικό πλάσμα. Τι δεν πήγαινε καλά, όμως;

Στην εποχή του Maxwell, η κινητική προέλευση του ψύχους και της θερμότητας είχε ήδη γίνει ευρέως γνωστή χάρη στις εργασίες του Da-

niel Bernoulli και του Michael Lomonosov. Με την επικράτηση των απόψεων αυτών περί της φύσεως της θερμότητας —που την έβλεπαν ως έκφανση της χαοτικής κίνησης στην οποία βρίσκονται τα μόρια των θερμών σωμάτων—, εξοβελίστηκε από την επιστήμη άπαξ και διά παντός η έννοια κάποιας ειδικής ουσίας που έπαιζε το ρόλο του φορέα της θερμότητας, του «θερμιδικού», ή ακόμη και κάποιας «αρχής» της καύσης του περίφημου «φλογιστού». Ωστόσο, η γλώσσα (σε μία ακόμη εκδήλωση της έντονης συντηρητικότητας που εκ φύσεως τη χαρακτηρίζει) είχε διατηρήσει κάποια ίχνη της έννοιας αυτής με τη μορφή εκφράσεων όπως «ροή της θερμότητας». Όσον δε αφορά την κβαντική θεωρία, περί αυτής ούτε καν νύξεις δεν υπήρχαν εκείνη την εποχή.

Από πολλές απόψεις, η δομή της κλασικής μηχανικής είναι όμοια με εκείνη της γεωμετρίας, ενός κατ' εξοχήν «μαθηματικού» κλάδου. Και οι δύο έχουν την ιδιότητα του αναλλοιώτου υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας, στην οποία αναφερθήκαμε νωρίτερα. Αυτό σημαίνει ότι μια ταυτόχρονη και αυθαίρετη αλλαγή όλων των χωρικών κλιμάκων δεν διαταράσσει τη φύση των νόμων της κίνησης και τις γεωμετρικές σχέσεις. Πράγματι, οι ιδιότητες των διαμέσων ενός τριγώνου, το πυθαγόρειο θεώρημα και άλλες παρόμοιες σχέσεις δεν εξαρτώνται από την κλίμακα. Κατά τον ίδιο τρόπο, η ελαστική κρούση δύο μικρών σωματιδίων είναι απολύτως όμοια με την ελαστική κρούση δύο μεγάλων. Όταν ο σερ Ernest Rutherford πρότεινε το πασίγνωστο πλανητικό μοντέλο του ατόμου, τούτο ενέπνευσε αμέσως φανταστικές ιστορίες που περιστρέφονταν γύρω από τους νοήμονες κατοίκους των ηλεκτρονίων-πλανητών. Φαίνεται λοιπόν ότι, εφόσον περιοριστούμε αυστηρά στο επίπεδο της κατανόησης των νόμων της φυσικής, τίποτε δεν μπορεί να εμποδίσει τη σχεδίαση μιας λογικής αυτόματης συσκευής που θα λειτουργούσε όπως ο υποθετικός δαίμονας του Maxwell. Ο σκεπτικισμός για την επιτυχία ενός τέτοιου εγ-

χειρήματος προερχόταν από άλλη κατεύθυνση.

Ήδη από το 1824, ένας γάλλος φυσικός ονόματι Sadi Carnot είχε διατυπώσει το περίφημο θεώρημα σχετικά με τον περιορισμένο βαθμό στον οποίο είναι δυνατόν να επιτευχθεί η μετατροπή της θερμότητας σε ωφέλιμο μηχανικό έργο. Δύο δεκαετίες αργότερα, το εν λόγω θεώρημα γενικεύθηκε από τον Rudolf Clausius και τον σερ William Thomson (τον γνωστό και ως λόρδο Kelvin), οι οποίοι το ύψωσαν στην τάξη της θεμελιώδους φυσικής αρχής· έτσι γεννήθηκε ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής. Η θερμοδυναμική μετατράπηκε σε μian αυτάρκη, στέρεα θεμελιωμένη και αξιωματική επιστήμη, που φαινόταν ανεξάρτητη από την κλασική μηχανική. Προσέφερε σαφείς και λογικές απαντήσεις σε σπουδαία πρακτικά προβλήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε θερμική ενέργεια από ένα ψυχρό σώμα και να τη μεταφέρουμε σε ένα θερμό, χωρίς να παραγάγουμε έργο; Όχι, είναι αδύνατον. Μπορούμε να εκμεταλλευθούμε τη θερμοκρασιακή διαφορά δύο σωμάτων για να πάρουμε ωφέλιμο (δηλαδή μακροσκοπικό μηχανικό) έργο; Ναι, μπορούμε.

Το τυπικό σύστημα της θερμοδυναμικής βρισκόταν σε συμφωνία με όλο πρακτικά το φάσμα των παρατηρήσεων στις φυσικές επιστήμες, από τον βιολογικό μεταβολισμό και τις χημικές αντιδράσεις έως τις πλανητικές διαδικασίες επανεκπομπής της ηλιακής ενέργειας στο ψυχρό Διάστημα. Εάν οι θεμελιώδεις αρχές των Clausius, Kelvin και Carnot ετίθεντο υπό αμφιβολία, τότε θα χρειαζόταν να επανεξετάσουμε (με έναν τρόπο που προς το παρόν παραμένει άγνωστος) εκ βάθρων μεγάλο μέρος της κατανόησής μας για τον έμβιο και τον άζωο κόσμο.

Στην πραγματικότητα, η παραβίαση του Δεύτερου Νόμου της θερμοδυναμικής θα σήμαινε ότι θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε, εντελώς «δωρεάν», όλη τη θερμότητα (ή και το ψύχος σε περίπτωση υπερβολικής ζέστης) από τη «θάλασσα» της θερμικής ενέργειας και, αφού θα την



είχαμε χρησιμοποιήσει για τους όποιους σκοπούς μας, να επαναφέρουμε, απλούστατα, αυτή την ενέργεια στην αρχική χαοτική της κατάσταση. Με λίγα λόγια, θα είχαμε ένα αεικίνητο δεύτερου είδους — το οποίο, σημειωτέον, δεν παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας!

Φαίνεται λίαν απίθανη η εκδοχή ότι ο Maxwell αδυνατούσε να συλλάβει τις ριζικές συνέπειες που θα απέρρεαν από την τυχόν υλοποίηση του αντιθερμοδυναμικού του δαίμονα. Περισσότερες πιθανότητες μοιάζει να συγκεντρώνει η υπόθεση πως αυτός ο δαίμονας επινοήθηκε για να καταδειχθεί το κομβικό επιστημονικό παράδοξο που προοιωνιζόταν το λογικό δίλημμα με το οποίο θα έπρεπε να αναμετρηθεί στο προσεχές μέλλον ολόκληρο το σύστημα των φυσικών επιστημών. Ποιο δρόμο να ακολουθήσει κανείς; Μια δυνατότητα είναι να αρνηθούμε τον απόλυτο χαρακτήρα των θερμοδυναμικών περιορισμών αναφορικά με την εξαγωγή ωφέλιμου έργου από το θερμικό χάος. Αν κάτι τέτοιο όντως ίσχυε, θα βρισκόμασταν προ ενός δυσεπίλυτου αινίγματος: θα έπρεπε να διερωτηθούμε πώς εξηγείται ότι κανένα ζωντανό πλάσμα δεν έμαθε να επιτυγχάνει μια τέτοια απεριόριστη εκμετάλλευση της θερμότητας στην πορεία των εκατομμυρίων ετών της εξέλιξης. Η άλλη δυνατότητα είναι να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας νέος θεμελιώδης νόμος ο οποίος λειτουργεί στο ατομικό επίπεδο και δεν μπορεί να συναχθεί βάσει της νευτώνειας μηχανικής. Στα εγγενή χαρακτηριστικά του νέου νόμου θα πρέπει να περιλαμβάνεται και η παραβίαση του αναλλοιώτου υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας κατά τη μετάβαση από τη μακροσκοπική κίνηση στη μοριακή θερμική αναταραχή.

Η στιγμή ενδείκνυται για να σας υπενθυμίσω κάτι. Σκόπημα ξεχάσαμε την κβαντική μηχανική για λίγο — ώστε να συνειδητοποιήσουμε πόσο πολύ τη χρειαζόμαστε για οδηγό μας στο μικρόκοσμο. Στο παρόν άρθρο δεν πρόκειται να υπεισέλθουμε στην ιστορία αυτού του υπέροχου επιστημονικού πεδίου, όσο δραμα-

τική και συναρπαστική και αν στάθηκε. Αντί τούτου, θα εστιάσουμε την προσοχή μας στα επιστημονικά παράδοξα, τα οποία, σαν να είναι μαγικές πύλες, μας οδηγούν σε νέους άγνωστους κόσμους. Η επόμενη «μαγική πύλη» που θα συναντήσουμε στην πορεία μας είναι το περίφημο παράδοξο Einstein-Podolsky-Rosen.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την ελαστική κρούση δύο σωματιδίων. Στην κλασική φυσική, αυτό το εξαιρετικά απλό μοντέλο χρησιμοποιείται ευρέως για τη μελέτη των νόμων διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και της ορμής. Εάν οι ορμές των συγκρουόμενων σωματιδίων πριν από την κρούση θεωρηθούν γνωστές, τότε η νευτώνεια μηχανική μπορεί να υπολογίσει (και συνεπώς να προβλέψει) με απόλυτη ακρίβεια τις αντίστοιχες τιμές μετά την κρούση. Πρόκειται για ένα πρόβλημα σχολικού επιπέδου που δεν κρύβει καμία «παγίδα» — τουλάχιστον εφόσον τα σωματίδια είναι αρκετά μεγάλα ώστε να θεωρούμε πως μοιάζουν με μπίλιες του μπιλιάρδου.

Το παράδοξο ανακύπτει αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την κβαντική μηχανική για να περιγράψουμε την ελαστική κρούση των μικροσκοπικών σωματιδίων. Παρότι στην προκειμένη περίπτωση η ολική ενέργεια και η ορμή διατηρούνται όπως και στην κλασική φυσική, μετά την κρούση είναι αδύνατον να αποδώσουμε συγκεκριμένη ορμή και ενέργεια στο καθένα από τα δύο σωματίδια ξεχωριστά. Δεν σας φαίνεται παράδοξο; Στην πορεία των αιώνων εξέλιξης της, η παλιά κλασική φυσική ουδέποτε γνώρισε περιπτώσεις όπου οι καταστάσεις των υποσυστημάτων (των σωματιδίων) καθίστανται απροσδιόριστες ενώ η κατάσταση ολόκληρου του συστήματος (το οποίο αποτελείται και από τα δύο σωματίδια) είναι πλήρως καθορισμένη από απόψεως φυσικής. Για τον κλασικό φυσικό, ένα τέτοιο ενδεχόμενο θα αποτελούσε πραγματικό εφιάλτη. Παρ' όλα αυτά, η λογική και η μαθηματική δομή της κβαντικής θεωρίας όντως προβλέπουν μια τέτοια δυνατότητα.

Οι προσπάθειες να αναλυθούν τα φαινόμενα του μικρόκοσμου με τη γλώσσα και τις εικόνες της κλασικής φυσικής οδηγούν σε συμπεράσματα που έρχονται σε αντίφαση με τις στοιχειώδεις αρχές του κοινού νου. Ο Werner Heisenberg επανειλημμένως τόνισε πόσο αναγκαίο είναι να αναπτυχθεί μια νέα φυσική διαίσθηση καθώς και μια αντίστοιχη γλώσσα της κβαντικής μηχανικής. Από τη θέση αυτή δεν πρέπει να συμπεράνουμε ότι τις νέες κβαντικές εικόνες τις διακρίνει ένας χαρακτήρας εγγενώς αλλότριος προς τη συνήθη ανθρώπινη σκέψη. Ακόμη και η «παλιά κλασική φυσική» πολύ απέχει από το να είναι απλή για τον ανθρώπινο νου — μας φαίνεται αυτονόητη ακριβώς επειδή εξοικειωθήκαμε με τα πορίσματά της στο διάβα των αιώνων. Στο περίφημο μυθιστόρημα των Ilf και Petrov *Οι δώδεκα καρέκλες* περιγράφεται μια συγκεκριμένη γηραιά κυρία που επιμένει να μαγειρεύει σε ένα καμινέτο μόνο και μόνο επειδή δεν πιστεύει στον ηλεκτρισμό. Αλλά, ας μην πάμε μακριά. Σκεφτείτε μόνο πόσος χρόνος χρειάστηκε ώσπου η ανθρωπότητα να «χωνέψει» την ιδέα ότι η Γη είναι σφαιρική!

Ίσως να έχει δημιουργηθεί στον αναγνώστη η εντύπωση ότι παρεκκλίναμε από την πορεία που προδιαγράψαμε αρχικά. Στην πραγματικότητα, όμως, έχουμε φτάσει στο κρίσιμο σημείο της ιστορίας μας: προφανώς, όταν εισερχόμαστε στην περιοχή του μικρόκοσμου, οφείλουμε να αποβάλουμε την ιδέα του αναλλοιώτου υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας. Εδώ συναντάμε πλέον μιαν ιδιόζουσα απροσδιόριστη, η οποία χαρακτηρίζει εγγενώς την κβαντική μηχανική. Στην περίπτωση των συγκρουόμενων σωματιδίων, η κβαντική μηχανική «διασκορπίζει» την πληροφορία σχετικά με την προϊστορία τους μεταξύ των «βαθμών ελευθερίας». Έτσι, γίνεται σαφές πλέον πόσο απλοϊκή φαντάζει η ιδέα του δαίμονα του Maxwell μετά την ανατροπή του αιτήματος ότι οι φυσικοί νόμοι είναι ανεξάρτητοι από τη χωρική κλίμακα.

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λε-



πτομέρειες, η παραβίαση του αναλλοιώτου υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας μπορεί να καταδειχθεί με τη διαστατική ανάλυση των φυσικών μεγεθών. Για να καταστεί δυνατή μια τέτοια παραβίαση στην περίπτωση των συγκρουόμενων σωματιδίων, πρέπει να υπάρχει ακόμη ένας συνδυασμός των παραμέτρων της κίνησης με διαστάσεις μήκους —πέραν του μεγέθους των σωματιδίων και της έκτασης της περιοχής της ενεργού αλληλεπίδρασης στην κρούση. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν μόνο αν εισαχθεί στη μηχανική μια διαστατική σταθερά παγκόσμιας φύσης. Παρεμπιπτόντως, ας υπογραμμίσουμε ότι οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα δεν περιέχουν καμία τέτοια σταθερά: στην κλασική μηχανική η μάζα, το μήκος και η ενέργεια —ή η ταχύτητα— μετρώνται σε μονάδες που επιλέγονται αυθαίρετως. Συνεπώς, η επιλογή χωροχρονικής κλίμακας (μετρητικοί κανόνες και ρολόγια) παραμένει επίσης αυθαίρετη. Και εδώ βρίσκεται ο βαθύτερος λόγος για τον οποίο η κλασική μηχανική δεν επιβάλλει κανένα περιορισμό στους μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας.

Αντίθετα, η κβαντική μηχανική έχει την αναγκαία σταθερά: πρόκειται βεβαίως για την περίφημη σταθερά του Planck  $h = 6,6310^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Αντί των ακριβών συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται στη νευτώνεια μηχανική, στην κβαντική μηχανική η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται μέσω μιας κυματοσυνάρτησης. Η ελεύθερη κίνηση ενός σωματιδίου μάζας  $m$  και ταχύτητας  $v$  περιγράφεται από τη διάδοση ενός κυματοπακέτου, όπου τις χωρικές ταλαντώσεις τις χαρακτηρίζει το μήκος κύματος de Broglie  $\lambda = h/(mv)$ . Αυτό αναζητούσαμε! Ο λόγος του  $\lambda$  προς το καθαρά γεωμετρικό μήκος προσφέρει τη ζητούμενη αδιάστατη παράμετρο η οποία καθορίζει κατά πόσο σε μια συγκεκριμένη περίπτωση οφείλουμε να εφαρμόσουμε την κλασική ή την κβαντική μηχανική. Για παράδειγμα, αν μια σφαίρα μάζας 9 g έχει ταχύτητα αρκετών εκατοντάδων μέτρων ανά δευτερόλεπτο, τότε το  $\lambda$  είναι της τάξεως των

$10^{-34} \text{ m}$ . Όπως αντιλαμβάνεστε, στην προκειμένη περίπτωση οι νόμοι του Νεύτωνα λειτουργούν με εξαιρετική ακρίβεια. Αντίθετα, για ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια της τάξεως των μερικών ηλεκτρονιοβόλτ, το μήκος κύματος de Broglie έχει τιμή η οποία, ως προς την τάξη μεγέθους, δεν διαφέρει από τη διάμετρο του ατόμου του υδρογόνου ή από το χαρακτηριστικό μήκος της αλληλεπίδρασης δύο συγκρουόμενων ηλεκτρονίων.

Αν και η διαδικασία της κβαντικής κρούσης διακρίνεται για την υπέροχη απλότητά της, παραμένει φαινόμενο όλως ιδιόζον. Ως όλον, το σύστημα των δύο συγκρουόμενων σωματιδίων δεν παρουσιάζει κάποιου είδους «χαστικότητα», ούτε υπό τη μηχανική αλλά ούτε και υπό οποιαδήποτε άλλη έννοια. Ταυτοχρόνως, όμως, η κατάσταση του κάθε ξεχωριστού σωματιδίου παραμένει αβέβαιη, και στην πορεία των κρούσεων και των επαφών με άλλα αντικείμενα (ή με τις συσκευές του παρατηρητή) που θα επακολουθήσουν, το σωματίδιο θα συμπεριφέρεται ως γνήσιο τέκνο του χάους.

Σε τούτο ακριβώς το σημείο μάς δίνεται η δυνατότητα να αποκαταστήσουμε την ενότητα της μηχανικής κίνησης με τις θερμοδυναμικές αρχές. Δεν μπορεί κανείς παρά να θαυμάσει την ομορφιά τούτης της φυσικής εικόνας. Πράγματι, η φύση της θερμότητας θεμελιώνεται σε κάποια υποκείμενη ιδιόζουσα «λιτότητα» που διακρίνει την κβαντική περιγραφή της ύλης. Η κβαντική περιγραφή δεν περιέχει τίποτε πέραν εκείνων που αρκούν προκειμένου να περιγραφούν τα πάντα.

Οι Κινέζοι φημίζονται για την επιδεξιότητά τους στο να χαράζουν στίχους στην επιφάνεια ενός μικροσκοπικού κόκκο ρυζιού. Αντίθετα, είναι αδύνατον να «γράψεις» πάνω σε ένα ηλεκτρόνιο έστω και την παραμικρή πληροφορία που δεν ισοδυναμεί με τις παραμέτρους της κατάστασης του ηλεκτρονίου. Καθώς το ηλεκτρόνιο αποκτά νέα πληροφορία σχετικά με την κατάσταση του «συνεταίρου» του στην κρούση, «λησμονεί» την πληροφορία για τη δική

του πρότερη κατάσταση. Ως εκ τούτου, το μεμονωμένο ηλεκτρόνιο αποτελεί ένα εγγενώς απρόβλεπτο αντικείμενο. Ας υπογραμμίσουμε ακόμη μία φορά πως, παρότι η κοινή γλώσσα δεν έχει λέξεις για να περιγράψει αυτό το κβαντικό φαινόμενο, ο μαθηματικός formalισμός τα καταφέρνει θαυμάσια.

Χρησιμοποιώντας τις νέες αρχές και τον αντίστοιχο μαθηματικό formalισμό της κβαντικής θεωρίας των ανοικτών συστημάτων, οι επιστήμονες προσέφεραν μιαν αυστηρή περιγραφή των θερμοδυναμικών νόμων που συνήχθησαν τον προηγούμενο αιώνα. Ωστόσο, η παλαιότερη εικόνα του μοριακού «θερμικού χάους» απέκτησε μερικά ασυνήθη χαρακτηριστικά. Στο πλαίσιο των μηχανοκρατικών αντιλήψεων, η θερμική κίνηση θεωρούνταν ως καταστροφικό φαινόμενο. Επικρατούσε η εντύπωση ότι οι χαστικές κρούσεις κατέστρεφαν με μη αναστρέψιμο τρόπο τα ίχνη των προηγούμενων καταστάσεων του φυσικού συστήματος, εξαλείφοντας ανεπανόρθωτα κάθε πληροφορία σχετική με αυτές.

Τώρα αποδεικνύεται ότι δεν εξαφανίζεται παρά μόνο η εξατομικευμένη τοπική πληροφορία· αντίθετα, το Σύμπαν θυμάται τα «πάντα». Η καθολική «συνεκτική» μνήμη του δεν διατηρείται απλώς, αλλά και εμπλουτίζεται συνεχώς όσο προχωρεί η ιστορία. Η μετάβαση από το παρελθόν στο μέλλον μοιάζει περισσότερο με το σχηματισμό ενός ολογράμματος παρά με κάποιες μεταθέσεις αναλλοίωτων αντικειμένων.

Καμία αναλογία όμως δεν μπορεί να είναι απολύτως ακριβής. Μόλις καταφέραμε να λύσουμε κάποιους παλιούς γρίφους της φυσικής, και ιδού που βρισκόμαστε ενώπιον νέων! Αλλά αυτή είναι η ομορφιά της επιστήμης! Φαντάζομαι πως συμφωνείτε και εσείς. ■

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

- S.R. Filonovich, «Η δύναμη της ομοιότητας», Μάρ./Απρ. 1997.
- A. Savin, «Μαθηματικά και αέρινη κίνηση», Σεπτ./Οκτ. 1994.
- A. Stasenko, «Δεν έχουν αποκαλυφθεί όλα», Ιαν./Φεβ. 1997.



# Θερμαίνοντας το νερό από πάνω

Μια ματιά στον πολύπλοκο κόσμο των φαινομένων μεταφοράς\*

V. Pentegov

**Ο**Ι ΑΝΘΡΩΠΟΙ ΖΕΣΤΑΙΝΟΥΝ ΝΕΡΟ καθημερινά, και τις περισσότερες φορές τοποθετούν την πηγή θερμότητας κάτω από το δοχείο που περιέχει το νερό. Πρόκειται για μια πράξη απολύτως κατανοητή: σε ολόκληρο τον όγκο του νερού εμφανίζονται φαινόμενα μεταφοράς, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η ομοιόμορφη θέρμανσή του στην επιθυμητή θερμοκρασία.

Τι θα συμβεί όμως αν, αντί να ακολουθήσουμε τη συνήθη πρακτική, τοποθετήσουμε την πηγή θερμότητας πάνω από το νερό; Δεν πρόκειται για ένα ερώτημα ακαδημαϊκής μόνο αξίας. Σας υπενθυμίζω ότι η επιφάνεια της Γης καλύπτεται σε ποσοστό 70% από νερό, που το θερμαίνει ο Ήλιος από ψηλά. Συνεπώς, η θέρμανση από τα πάνω προς τα κάτω είναι ένα φαινόμενο που παρουσιάζεται στη φύση σε μεγάλη κλίμακα. Πολλές από τις διαδικασίες που εμπλέκει αυτός ο τρόπος θέρμανσης εμφανίζουν τέτοια πολυπλοκότητα, ώστε μέχρι στιγμής δεν έχει επιτευχθεί καθολική ομοφωνία ως προς τους μηχανισμούς τους.

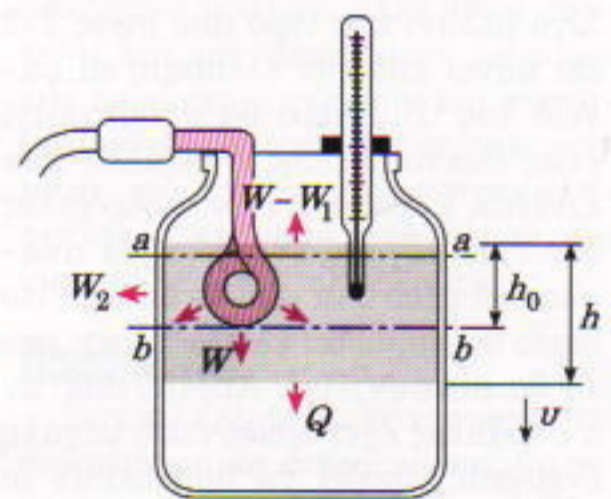
Για παράδειγμα, δεν έχει παρέλθει πολύς καιρός αφότου ανακαλύφθηκε ότι η θερμοκρασία στα βά-

θη των ωκεανών δεν μεταβάλλεται βαθμηδόν αλλά με απότομα «άλματα». Αυτά τα άλματα εμφανίζονται σε πολύ στενές περιοχές που παρεμβάλλονται ανάμεσα σε στρώματα σταθερής θερμοκρασίας. Πλην της θερμοκρασίας, σε κάθε στρώμα διατηρείται σταθερή τόσο η πυκνότητα όσο και η αλατότητα (η συγκέντρωση αλάτων). Με την πάροδο του χρόνου τα άλματα εξομαλύνονται (για τη θερμοκρασία πολύ ταχύτερα απ' ό,τι για την αλατότητα), αλλά οι συνοριακές επιφάνειες των στρωμάτων παραμένουν στη θέση τους και η ύπαρξή τους παρατείνεται για απροσδιόριστο χρόνο.

Είναι φυσικό να απορεί κανείς γιατί συμβαίνει ένα τέτοιο φαινόμενο. Προτού επιχειρήσουμε να το εξηγήσουμε, ας στραφούμε σε μερικά απλά πειράματα και παρατηρήσεις.

## Δύο τελείως διαφορετικά υγρά: το νερό και το... νερό

Πάρτε ένα δοχείο χωρητικότητας τριών λίτρων γεμάτο νερό και έναν εμβυθιζόμενο ηλεκτρικό θερμαντήρα. Βυθίστε το θερμαντήρα όχι πολύ βαθιά στο νερό (Σχήμα 1), θέστε τον σε λειτουργία και περιμένετε ώσπου να δείτε το νερό στο πάνω μέρος του δοχείου είτε να βράζει είτε να έχει πλησιάσει πολύ στο σημείο βρασμού (τη στιγμή αυτή θα σκάζουν μεγάλες φυσαλίδες γύρω από το θερμα-



Σχήμα 1  
Η πειραματική διάταξη.

ντήρα). Χρωματίστε τώρα το νερό με μελάνι. Θα παρατηρήσετε ότι στο νερό σχηματίζονται δύο ζώνες: η πάνω ζώνη είναι έγχρωμη, ενώ η κάτω παραμένει διαυγής. Τις δύο ζώνες τις χωρίζει ένα ευδιάκριτο σύνορο, που δεν το διαπερνούν τα μόρια της χρωστικής ουσίας (Σχήμα 4, α). Οι μετρήσεις της θερμοκρασίας στις δύο ζώνες μας δίνουν τα ακόλουθα δεδομένα: η θερμοκρασία στο πάνω στρώμα είναι παντού η ίδια και ισούται περίπου με το σημείο βρασμού (95°C), ενώ στο κατώτερο στρώμα η θερμοκρασία δεν υπερβαίνει τους 40-45°C. Με άλλα λόγια, στο σύνορο των δύο στρωμάτων υπάρχει ένα θερμοκρασιακό άλμα 50-60°C, ενώ το νερό του πάνω στρώματος και εκείνο το κάτω συμπεριφέρονται σαν δύο διαφορετικά, μη αναμειγνυόμενα υγρά.

\* Όταν έγραψε το παρόν άρθρο, ο συγγραφέας ήταν μαθητής στην τελευταία τάξη του δεκατάξιου σοβιετικού σχολείου μέσης εκπαίδευσης, στο Κίεβο.



## Κύματα κάτω από το νερό

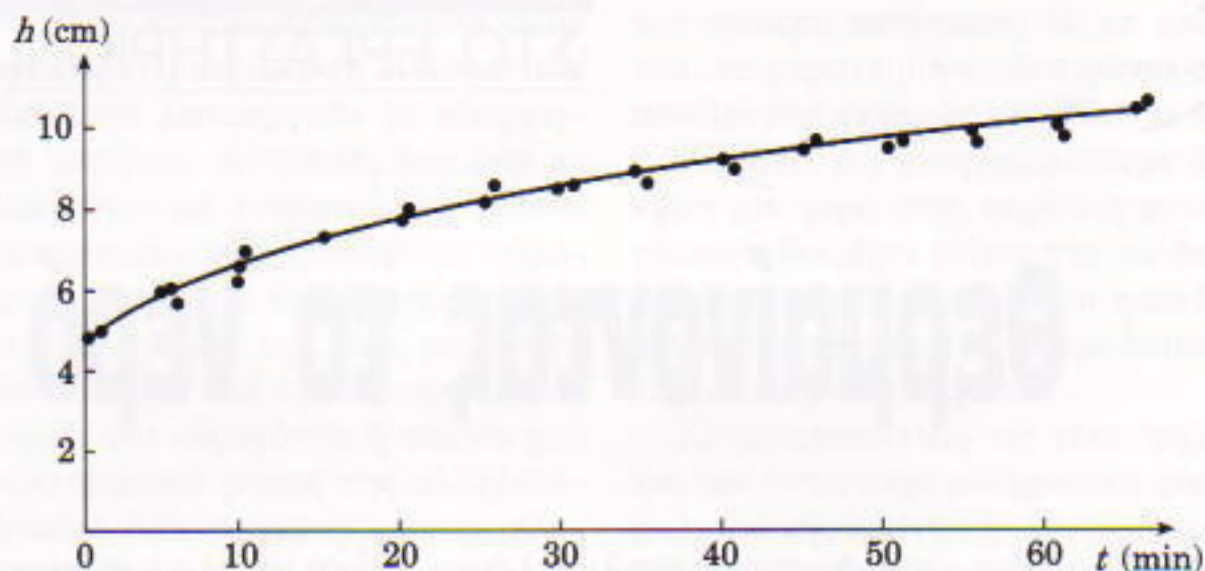
Στη συνοριακή επιφάνεια μπορεί να εμφανιστούν εγκάρσια κύματα. (Παρεμπιπτόντως, ας σημειώσουμε ότι το σύνορο που χωρίζει τα δύο στρώματα μπορεί να παρατηρηθεί ακόμη και αν δεν χρωματίσουμε το νερό· και τούτο, επειδή τα κύματα στη συνοριακή επιφάνεια ανακλούν και διαχέουν το φως.) Αυτό σημαίνει ότι στη συνοριακή επιφάνεια υπάρχει κάποια επιφανειακή τάση, γεγονός που επιμαρτυρείται σαφώς και από την ανάκλαση των δακτυλιοειδών στροβίλων στο σύνορο.

Σβήστε τώρα το θερμαντήρα (για να μειώσετε την κίνηση του νερού στο καυτό στρώμα) και χρησιμοποιήστε ένα σταγονόμετρο για να ρίξετε λίγο μελάνι στο νερό από ύψος 1-2 cm πάνω από την ελεύθερη επιφάνειά του. Στο νερό θα σχηματιστεί ένας δακτυλιοειδής στρόβιλος που κινείται καθοδικά. Εάν ο στρόβιλος δεν έχει μεγάλη ενέργεια, θα ανακλαστεί ελαστικά από το σύνορο (το οποίο θα κυρτωθεί ελαφρώς) και μετά θα αποσυντεθεί. Απεναντίας, αν ο στρόβιλος έχει αρκούντως μεγάλη ενέργεια, μπορεί να διαπεράσει το σύνορο, αλλά μόνο για να διαλυθεί αμέσως κάτω απ' αυτό.

## Κινούμενο σύνορο

Αφού κοιτάξετε αρκετή ώρα το σύνορο μεταξύ των δύο στρωμάτων, θα προσέξετε ότι κινείται. Στα Σχήματα 2 και 3 παρουσιάζονται τα γραφήματα για το πάχος του πάνω στρώματος  $h$  συναρτήσει του χρόνου  $t$  και για την ταχύτητα του συνόρου συναρτήσει του πάχους του πάνω στρώματος, ή ακριβέστερα της υψομετρικής διαφοράς  $h - h_0$ , με βάση τα πειραματικά δεδομένα (Σχήμα 1). Οι μετρήσεις ελήφθησαν για δοχείο χωρητικότητας τριών λίτρων, και χρησιμοποιήθηκε θερμαντήρας ισχύος 120 W περίπου.

Σημαντική μετατόπιση του συνόρου διαπιστώνεται μόνο όταν η θερμοκρασία του πάνω στρώματος προσεγγίζει το σημείο βρασμού: όταν σβήσουμε το θερμαντήρα, το σύνορο παύει να κινείται. Είναι δυνατόν να διατυπωθεί η υπόθεση ότι η κίνηση του συνόρου οφείλεται στην



Σχήμα 2

Το πάχος  $h$  του πάνω στρώματος συναρτήσει του χρόνου  $t$  (δεδομένα δύο πειραμάτων).

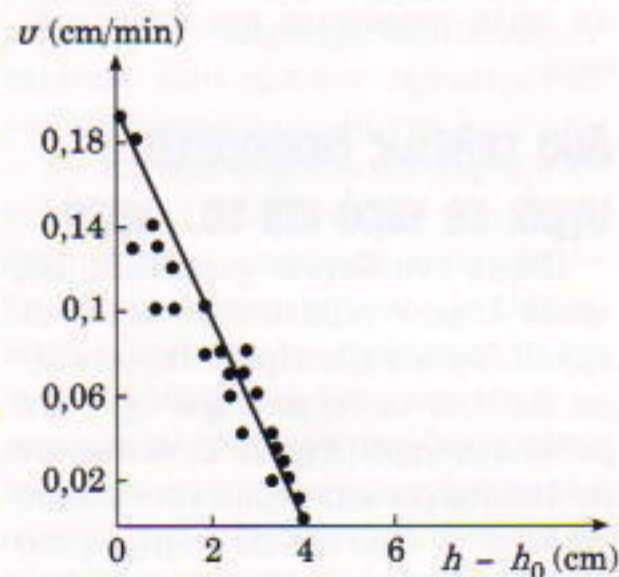
εντατική ανάμειξη που λαμβάνει χώρα στο καυτό στρώμα, η οποία παρουσιάζεται ειδικά στις μεγάλες θερμοκρασίες. Για να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης, ας κάνουμε ακόμη ένα βήμα. Σβήνουμε το θερμαντήρα (οπότε το σύνορο θα σταματήσει να κινείται) και προσεκτικά αρχίζουμε να αναδεύουμε το νερό στο πάνω στρώμα: το σύνορο αρχίζει να κινείται εκ νέου.

Βασιζόμενος στα ανωτέρω γεγονότα, μπορεί κανείς να προτείνει τον εξής μηχανισμό για να εξηγήσει την κίνηση του συνόρου. Ας θεωρήσουμε μια μικρή περιοχή στη συνοριακή επιφάνεια που χωρίζει το καυτό από το ψυχρό υδάτινο στρώμα (Σχήμα 4, α: οι κόκκινες και οι μπλε κουκκίδες παριστάνουν αντίστοιχα μόρια του καυτού και του ψυχρού νερού). Ως αποτέλεσμα της

διάχυσης και των μοριακών κρούσεων, τα «καυτά» μόρια εισχωρούν κάτω από το σύνορο μεταξύ των δύο στρωμάτων. Ένα λεπτό στρώμα νερού αποκτά υψηλή θερμοκρασία, και μετά λίγο απομακρύνεται παρασυρόμενο από ρεύματα μεταφοράς καυτού νερού (Σχήμα 4, β και γ). Αυτή η μοριακή διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα τη βύθιση του συνόρου.

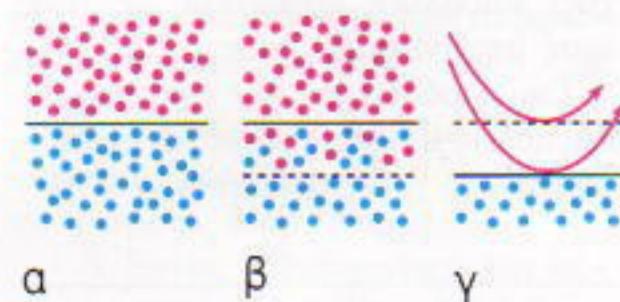
Έτσι, όταν το νερό θερμαίνεται από τα πάνω, η θερμότητα διαδίδεται όχι μόνο μέσω αγωγής (πράγμα απολύτως φυσικό) αλλά και μέσω της κίνησης του συνόρου —η οποία οφείλεται στα ρεύματα μεταφοράς που σχηματίζονται εντός του καυτού στρώματος. Αυτά τα ρεύματα μεταφοράς αποκαθιστούν μια πρακτικά σταθερή θερμοκρασία σε όλα τα μέρη του πάνω στρώματος.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να απαντήσουμε ένα ακόμη ερώτημα που θέτουν τα πειράματα τα οποία περιγράψαμε: κατά πόσον εξαρτάται από την ισχύ του θερμαντήρα η κίνηση του συνόρου των δύο στρωμάτων; Προφανώς, το πάχος του άνω στρώματος αποκλείεται να είναι



Σχήμα 3

Η ταχύτητα  $u$  του συνόρου συναρτήσει του πάχους  $h - h_0$  (δεδομένα δύο πειραμάτων).



Σχήμα 4

Εξήγηση του μηχανισμού ο οποίος προκαλεί τη μετατόπιση του συνόρου.



μικρότερο από το βάθος του επιπέδου  $a-a$  (Σχήμα 1), διότι στο στρώμα το οποίο υπέρκειται του επιπέδου αυτού υπάρχουν πάντα ρεύματα μεταφοράς. Εξάλλου, το αρχικό πάχος δεν μπορεί να υπερβαίνει το βάθος του επιπέδου  $b-b$ , καθότι δεν έχουν σχηματιστεί ακόμη ρεύματα μεταφοράς κάτω απ' αυτό. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το πάνω στρώμα πρέπει να έχει ένα ορισμένο, μη μηδενικό, αρχικό πάχος που καθορίζεται από το βάθος στο οποίο εμβυθίσαμε το θερμαντήρα. Η κίνηση του συνόρου αρχίζει ταυτόχρονα με την έναρξη της ζωηρής ανάμειξης του νερού σ' αυτό το στρώμα. Όπως είπαμε ήδη, η ανάμειξη εμφανίζεται σε μια θερμοκρασία πλησίον του σημείου βρασμού. Κατά συνέπεια, ο θερμαντήρας πρέπει να είναι ικανός να θερμάνει ουσιαστικά μέχρι του σημείου βρασμού ένα στρώμα νερού με πάχος ίσο του αρχικού υπό πραγματικές πειραματικές συνθήκες, όπου υπάρχουν πάντοτε κάποιες θερμικές απώλειες προς το περιβάλλον. Αυτή η συνθήκη καθορίζει την ελάχιστη θερμαντική ισχύ που απαιτείται προκειμένου να παρατηρηθεί η κίνηση του συνόρου.

Τα πειράματα έδειξαν ότι, εφόσον η θερμαντική ισχύς υπερβαίνει την προαναφερθείσα ελάχιστη τιμή, η ταχύτητα της κίνησης μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει της θερμαντικής ισχύος (για περισσότερες λεπτομέρειες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα).

## Πειραματικά αποτελέσματα

Από τα πειράματά μας είναι δυνατόν να εξαχθούν μερικά συμπεράσματα:

1. Το σύνορο μεταξύ του θερμού και του ψυχρού νερού μπορεί να διατηρηθεί επί μακρόν και να διασώσει την ακεραιότητά του μόνο εφόσον πλησίον του υπάρχουν ρεύματα μεταφοράς: αυτά τα ρεύματα αντισταθμίζουν τη διάχυση και συντηρούν το σύνορο.

2. Το σύνορο κινείται με ταχύτητα που καθορίζεται από τη θερμοκρασιακή διαφορά. Καθώς μειώνεται η θερμοκρασιακή διαφορά, μειώνεται και η ταχύτητα του συνόρου,

μέχρις ότου μηδενιστεί. Εντούτοις, αυτό καθαυτό το σύνορο διατηρείται για όσο χρόνο υφίσταται πλησίον του ροή νερού.

3. Στα πειράματά μας, τα μεγάλα θερμοκρασιακά άλματα (και η υψηλή θερμοκρασία του νερού) στάθηκαν αναγκαία μόνο για την παραγωγή έντονων ρευμάτων μεταφοράς στο καυτό νερό. Εφόσον τα υδάτινα ρεύματα εκατέρωθεν του συνόρου συντηρούνται με κάποιον άλλο τρόπο (με μηχανικά μέσα, για παράδειγμα), τα θερμοκρασιακά άλματα μπορεί κάλλιστα να είναι μικρά.

## Εικασίες και υποθέσεις

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα της θέρμανσης των ωκεάνιων υδάτων από τον Ήλιο, και ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε μερικά ερωτήματα. Γιατί στον ωκεάνο παραμένουν στη θέση τους τα σύνορα μεταξύ των διαφορετικών στρωμάτων, παρότι αναπτύσσεται η διαδικασία βαθμιαίας εξίσωσης της θερμοκρασίας και της αλατότητας; Και γιατί η διαδικασία εξίσωσης της αλατότητας απαιτεί τόσο πολύ μακρότερο χρόνο εν συγκρίσει προς την αποκατάσταση της θερμοκρασιακής ισορροπίας;

Πρόκειται και πάλι για φαινόμενα που εξηγούνται βάσει των ρευμάτων μεταφοράς, τα οποία στην περίπτωση του ωκεανού εμφανίζονται σε όλα τα στρώματα (αντίθετα με ό,τι συνέβη στα πειράματά μας, όπου τα ρεύματα μεταφοράς σχηματίζονταν μόνο στο καυτό στρώμα).

Ας θεωρήσουμε δύο γειτνιαζόντα στρώματα. Η διάχυση και οι μοριακές κρούσεις έχουν ως συνέπεια την παρουσία «καυτών» και «ψυχρών» μορίων εκατέρωθεν του συνόρου, τα οποία απομακρύνονται από το σύνορο παρασυρόμενα από τα ρεύματα μεταφοράς. Αν τα ρεύματα μεταφοράς έχουν ίση ισχύ και από τις δύο πλευρές του συνόρου, το σύνορο παραμένει ακίνητο, έστω κι αν συντελείται μεταφορά ενέργειας, η οποία και επιφέρει βαθμιαία την εξίσωση των θερμοκρασιών.

Όσον αφορά την αλατότητα, η αποκατάσταση της ισορροπίας προχωρεί με πολύ βραδύτερο ρυθμό. Αυτό

οφείλεται στην επιφανειακή τάση του συνόρου. Ως γνωστόν, τα αλατούχα διαλύματα παρουσιάζουν μεγαλύτερο συντελεστή επιφανειακής τάσης από το καθαρό νερό. Το σύνορο, όπως και κάθε φυσικό σύστημα, «προσπαθεί» να ελαχιστοποιήσει την ενέργειά του. Συνεπώς, τα ιόντα που παράγονται από τη διάσπαση των μορίων του αλατιού βρίσκονται ως επί το πλείστον μακριά από το σύνορο, και η διάχυσή τους αρχίζει να γίνεται αισθητή μόνο αφού ελαττωθεί σημαντικά η επιφανειακή τάση του συνόρου.

Ο σχηματισμός συνόρου μεταξύ ψυχρού και θερμού νερού θα μπορούσε ενδεχομένως να εξηγήσει όχι μόνο τη διαστρωματωμένη δομή των ωκεάνιων υδάτων, αλλά ίσως αποτελεί και τον υποκείμενο λόγο για την εμφάνιση ευκρινών και ευσταθών συνόρων για τα ωκεάνια ρεύματα, για τους εσχάτως ανακαλυφθέντες ωκεάνιους στροβίλους, και για πολλά άλλα αξιοπερίεργα.

## Παράρτημα

Συμβολίζουμε με  $W$  την ισχύ του θερμαντήρα (η οποία πρέπει να υπερβαίνει την ελάχιστη ισχύ). Μολονότι μέρος της ενέργειας του θερμαντήρα καταναλώνεται στην εξαέρωση νερού, αυτή η απώλεια διατηρείται σταθερή σε συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας. Επομένως, προς διευκόλυνσή μας, ας εισαγάγουμε την καθαρή ισχύ  $W_1$ , η οποία ισούται με τη διαφορά που προκύπτει αν από την ολική ισχύ του θερμαντήρα αφαιρέσουμε την ισχύ που καταναλώνεται στην εξαέρωση. Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι η καθαρή ισχύς διατηρείται σταθερή.

Φαίνεται φυσιολογικό να υποθέσουμε ότι η ισχύς  $W_2$  που διαχέεται στο περιβάλλον μέσω των παραπλευρών τοιχωμάτων του δοχείου είναι ανάλογη προς το πάχος του καυτού στρώματος:  $W_2 = kh$ . Ο συντελεστής αναλογίας εξαρτάται απ' τις πειραματικές συνθήκες, και παραμένει αμετάβλητος καθ' όλη τη διάρκεια κάθε πειράματος.

Έστω λοιπόν ότι το σύνορο μετατοπίζεται κατά απόσταση  $dh$  στο χρονικό διάστημα  $dt$ . Αυτό σημαίνει



ότι η θερμοκρασία ενός υδάτινου στρώματος πάχους  $dh$  αυξήθηκε λόγω θέρμανσης κατά  $\Delta T$  βαθμούς, όσο δηλαδή είναι η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο καυτό και το ψυχρό στρώμα. Η εν λόγω διαδικασία απαιτεί θερμική ενέργεια  $dQ = c\rho S\Delta T dh = k_1 dh$  (όπου με  $c$  συμβολίζουμε την ειδική θερμότητα του νερού, με  $\rho$  την πυκνότητά του και με  $S$  το εμβαδόν της οριζόντιας διατομής του δοχείου). Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$W_1 dt = dQ + W_2 dt,$$

ή

$$W_1 dt = k_1 dh + kh dt.$$

Κατ' αρχάς, μετασχηματίζουμε την εξίσωση ώστε να λάβει τη μορφή

$$\frac{dh}{W_1 - kh} = \frac{dt}{k_1},$$


και, κατόπιν, την ολοκληρώνουμε για να προσδιορίσουμε την εξάρτηση του πάχους  $h$  από το χρόνο:

$$h = a - be^{-\mu t},$$

όπου τα  $a = W_1/k$ ,  $b = W_1/(k - h_0)$  και  $\mu = k/k_1$  είναι σταθεροί συντελεστές, ενώ με  $h_0$  συμβολίζουμε το βάθος όπου σχηματίστηκε αρχικά το σύνορο.

Ας βρούμε τώρα την ταχύτητα  $v$  της κίνησης του συνόρου:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{W_1 - kh}{k_1}.$$

Όπως διαπιστώνουμε, η ταχύτητα του συνόρου εξαρτάται γραμμικά από το πάχος του στρώματος, ενώ για ορισμένη τιμή του πάχους (η οποία ισούται με  $W_1/k$ ) η ταχύτητα πρέπει να μηδενίζεται. Αυτό οφείλεται στο ότι οι απώλειες ενέργειας αυξάνονται αυξανόμενου του πάχους, οπότε κάποτε έρχεται η στιγμή κατά την οποία όλη η ενέργεια που παρέχει ο θερμαντήρας διαρρέει στο περιβάλλον. Στην περιοχή όπου το σύνορο ακινητοποιείται, τα γειτονικά ρεύματα μεταφοράς καθίστανται τόσο ασθενή ώστε η κίνηση του υγρού ουσιαστικά σταματά. Έτσι, το σύνορο βαθμιαία αποσυντίθεται λόγω της διάχυσης και της αγωγής θερμότητας. 

### Κυκλοφορούν δύο μοναδικά βιβλία με υλικό του Quantum.



Ο ΛΥΚΟΣ, Ο ΑΥΝΑΚΛΗΤΗΣ  
ΚΑΙ Ο ΝΕΥΤΟΝ

Σελ.: 284,  
17 x 25 εκ.,  
Α/Μ,  
Πανόδετο,  
6.400 δρχ.



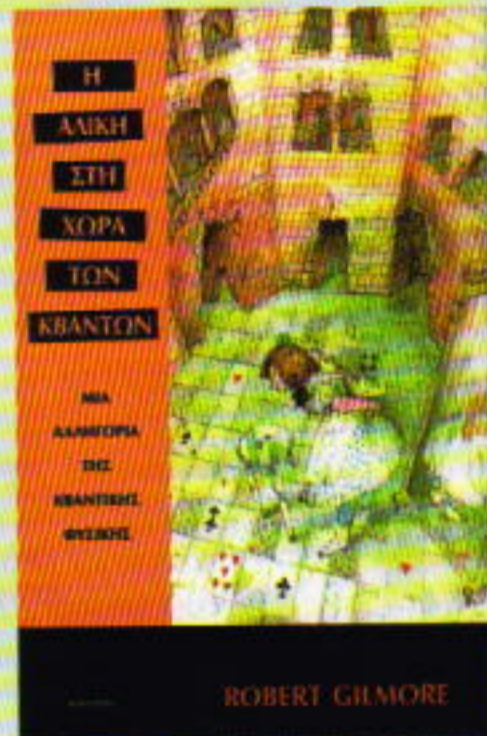
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΓΥΦΟΙ  
1

Σελ.: 148,  
17 x 25 εκ.,  
Έγχρωμο,  
Πανόδετο,  
5.200 δρχ.

Μερικά τεύχη του περιοδικού έχουν ήδη εξαντληθεί· δεν θα αργήσει να γίνει το ίδιο και με τα υπόλοιπα (τώρα, μάλιστα, που ευδόκησαν να τα αγοράζουν και οι νεοσύστατες σχολικές βιβλιοθήκες). Γι' αυτό...

**Φροντίστε να μην τα χάσετε.**

Η Αλίκη στη χώρα των κβάντων είναι μια συναρπαστική φανταστική περιήγηση του R. Gilmore, καθηγητή φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μπρίστολ, στον κόσμο της κβαντικής φυσικής. Το βιβλίο αποτελεί μια εκτενή εισαγωγή στις δύστροπες και ανοίκειες έννοιες του κβαντικού κόσμου: στην αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, τις κυματοσυναρτήσεις, την απαγορευτική αρχή του Pauli, κ.ά. Οι εκτενείς σημειώσεις που συνοδεύουν το καθαρά αφηγηματικό μέρος κάθε κεφαλαίου αποκρυπτογραφούν το βαθύτερο νόημα των περιπετειών της Αλίκης, και προσγειώνουν τη φαντασία μας. Η Αλίκη στη χώρα των κβάντων αποτελεί ένα πρωτότυπο και γοητευτικό ανάγνωσμα. Απευθύνεται πρωτίστως στον μη ειδικό, αλλά είναι βέβαιο ότι θα το απολαύσει και ο σπουδαστής της σύγχρονης φυσικής. Δεν απαιτεί ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις· μόνο υγιή περιέργεια για τον κόσμο που ενοικούμε.



246 σελ., 16 x 25 εκ., Εικ. Α/Μ,  
Πανόδετο, 6.200 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο**



### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 35 τεύχη του.

Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.



# Το παιχνίδι που προδιέγραψε την πορεία του Σύμπαντος

Jef Raskin

**Π**ΡΟΣΦΑΤΑ, ΑΓΟΡΑΣΑ ΕΝΑ ΠΑΙΧΝΪΔΙ. Πρόκειται για μια κοίλη, διάφανη σφαίρα διαμέτρου περίπου 10 cm, μέσα στην οποία τοποθέτησα εξήντα λευκά σφαιρίδια διαμέτρου 5 mm. Κάθε σφαιρίδιο φέρει τυπωμένο έναν αριθμό, από το 1 έως το 60. Η σφαίρα μπορεί να περιστρέφεται με τη βοήθεια ενός κινητήρα και ενός απλού κυκλώματος το οποίο είναι ανεπτυγμένο έτσι ώστε, εάν πατάς ένα πλήκτρο, ένας καμπύλος βραχίονας να ανακατεύει τα σφαιρίδια, ενώ αν πατάς ένα άλλο, ο βραχίονας να κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση και να διαλέγει ένα από τα σφαιρίδια για να το κοιτάξεις.

Τα σφαιρίδια είναι σχεδόν πανομοιότυπα —εν πάση περιπτώσει, οι όποιες διαφορές τους δεν καθιστούν πιθανότερη την επιλογή του ενός αντί του άλλου. Η εν λόγω συσκευή κατασκευάστηκε για τυχερά παιχνίδια, και μπορεί να θεωρείται μια ικανοποιητική διάταξη τυχαίας επιλογής. Την επόμενη μέρα, η φίλη μου η Τζούλι «έτρεξε» τη μηχανή εκατό φορές, κάθε φορά με πλήρες φορτίο σφαιριδίων. Ιδού τα αποτελέσματα που έλαβε:

06, 31, 42, 29, 33, 05, 26, 01, 05, 28, 22, 32, 59, 59, 09, 57, 16, 46, 12, 13, 16, 25, 45, 14, 12, 38, 37, 51, 10, 34, 21, 10, 09, 35, 21, 23, 60, 09, 04, 33, 12, 32, 32, 13, 28,

11, 54, 46, 58, 33, 25, 07, 09, 02, 19, 60, 52, 23, 29, 48, 52, 35, 18, 13, 57, 45, 15, 24, 28, 24, 05, 59, 03, 03, 45, 22, 48, 53, 27, 18, 49, 01, 59, 37, 17, 51, 36, 33, 09, 41, 04, 43, 06, 39, 31, 60, 32, 06, 17, 41.

Η πιθανότητα  $p$  να πάρει κανείς την παραπάνω ακολουθία ισούται με  $1/60^{100}$ , ή περίπου με

$$p = 1,5 \cdot 10^{-178}$$

Ο κάθε κύκλος λειτουργίας της μηχανής διαρκεί 1 περίπου δευτε-

ρόλεπτο· συνεπώς, για να παραχθεί μια άλλη ακολουθία του ίδιου μήκους θα απαιτούνταν περίπου 100 δευτερόλεπτα. Για να φτάσουμε στο σημείο όπου η πιθανότητα να επαναληφθεί ίδια η ακολουθία να ισούται με  $1/2$ , θα χρειαζόταν να παραχθούν περίπου  $10^{178}$  ακολουθίες ακόμη, κάτι το οποίο θα απαιτούσε χρόνο  $10^{180}$  δευτερολέπτων. Η ηλικία του Σύμπαντος, 12 δισεκατομμύρια χρόνια (μια τρέχουσα εκτίμηση), ισούται μόνο με  $4 \cdot 10^{17}$  δευτερόλεπτα. Συνεπώς, ακόμη και αν η μηχανή συνέχιζε να παράγει σύνολα εκατό αριθμών επί μερικά δισεκατομμύρια χρόνια, η ακολουθία που βλέπετε παραπάνω κατά πάσα πιθανότητα δεν θα επανεμφανιζόταν.

Αν το βαρυτικό πεδίο είχε παρουσιάσει ποτέ την ελάχιστη διαφορά, εάν ο συντελεστής τριβής της επιφάνειας των σφαιριδίων άλλαζε έστω και λιγάκι, εάν το φορτίο των κινούμενων ηλεκτρονίων που έθεσαν σε λειτουργία τον κινητήρα ήταν τόσο διαφορετικό ή αν είχε αλλάξει ένας μόνο από αρκετούς άλλους φυσικούς νόμους ή σταθερές, θα είχε προκύψει μια διαφορετική ακολουθία. Με άλλα λόγια, θέλουμε να πούμε ότι το αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος εξαρτιόταν από τη φύση του Σύμπαντος, από τη συνδυασμένη δράση των





νόμων του, από τις τιμές των σταθερών του και από τη μοναδική ιστορία του. Να συμπεράνουμε, λοιπόν, ότι «όλοι οι επιμέρους νόμοι και κανονικότητες της φύσης συνενώνονται σε έναν μοναδικό βασικό νόμο: κάπου στο Σύμπαν αυτή η μηχανή πρέπει να δημιουργήσει ετούτη τη συγκεκριμένη ακολουθία»;

Εάν το επιχείρημα που μόλις διατύπωσα σας φαίνεται παράξενο και αστήρικτο —ότι τάχα λόγω της εμφάνισης ενός εξαιρετικά απίθανου αποτελέσματος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι πίσω από τους νόμους του Σύμπαντος υπάρχει η ανάγκη να παραχθεί το συγκεκριμένο αποτέλεσμα—, τότε το μυαλό σας δουλεύει σωστά. Αν η φράση με την οποία κλείνει η προηγούμενη παράγραφος σας φαίνεται γνώριμη, τούτο ίσως να οφείλεται στο ότι αποτελεί παράφραση της τελικής πρότασης του άρθρου «Η ανθρωπική αρχή» του Α. Kuzin στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1999 του *Quantum*.

Η ανθρωπική αρχή δεν είναι παρά η τελεολογική πίστη ότι το Σύμπαν «συντονίστηκε» έτσι ώστε να καταστεί αναπόδραστη η δημιουργία της ζωής —και ιδιαίτερα, της ανθρώπινης, ενσυνειδητής ζωής. Η τελεολογία είναι η αντίληψη που θέλει την αιτιότητα να λειτουργεί προς τα πίσω, με το υστερόχρονο συμβάν να επηρεάζει το προτερόχρονο —ότι κάπως το σύστημα «γνωρίζει» πως πρέπει να εξελιχθεί στην κατεύθυνση κάποιου «τελικού, επιδιωκόμενου» αποτελέσματος.

Ο Kuzin αρχίζει το άρθρο του λέγοντας: «Η ανακάλυψη των τεράστιων διαστάσεων του Σύμπαντος ευθύς εξαρχής θέτει ένα θεμελιώδες πρόβλημα: Σημαίνει άραγε κάτι το ανθρώπινο μέσα στο αχανές Σύμπαν;» Ως επιστήμων, δεν μπορώ να δικαιολογήσω τον όρο «αχανές». Και τούτο επειδή τα μεγέθη είναι σχετικά. Μπορούμε να πούμε ότι ο Ήλιος είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από ένα κουνέλι. Είναι όμως πράγματι μεγάλος ο Ήλιος; Είναι μικρός εν συγκρίσει προς το Γαλαξία. Και είναι άραγε το κουνέλι μικρό; Αναμφίβολα, είναι μεγάλο εν συγκρίσει προς ένα πρωτόνιο ή ένα πρωτόζωο.

Η αυθόρμητη διάθεση να κάνουμε το Σύμπαν να γυρίζει γύρω μας έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα. Μια από τις μεγαλύτερες επιτεύξεις της ανθρωπότητας στάθηκε η ανακάλυψη ότι η Γη όχι μόνο δεν αποτελεί το κέντρο του Σύμπαντος αλλά ούτε καν το κέντρο του ηλιακού μας συστήματος. Πιο πρόσφατα, φτάσαμε να καταλάβουμε ότι οι άνθρωποι δεν αντιπροσωπεύουν το τελικό προϊόν της εξέλιξης· δεν είμαστε ο σκοπός για τον οποίο οι υπόλοιπες μορφές ζωής δεν αποτελούν παρά αναβαθμούς. Δεν θα έπρεπε να επαναλάβουμε το ίδιο σφάλμα βασιζοντας τις κρίσεις μας για τα απόλυτα μεγέθη στο μέγεθος του ανθρώπου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει συμφυές μέτρο του μήκους, και το Σύμπαν δεν μπορεί να θεωρείται ούτε αχανές ούτε μικροσκοπικό.

Αλλά αυτά είναι λεπτομέρειες. Η εναρκτική πρόταση του Kuzin θέτει επίσης το εκ πρώτης όψεως βαθύτερο ερώτημα εάν και κατά πόσον ένα ανθρώπινο «σημαίνει» κάτι. Τι μπορεί να συνεπάγεται η απόδοση «νοήματος» σε ένα ανθρώπινο; Σε τι συνίσταται, στ' αλήθεια, το «νόημα» του οποίου αντικειμένου; Διότι το να έχει κάποιο νόημα ένα αντικείμενο  $x$  συνεπάγεται ότι το  $x$  κωδικοποιεί, αναπαριστά κάτι άλλο —ας πούμε το  $y$ — ή αποτελεί σύμβολο αυτού του άλλου. Η κόκκινη κουκκίδα με την ετικέτα «Βρίσκεστε εδώ» σε ένα χάρτη αναρτημένο στο πάρκο συμβολίζει τη θέση σας στο χάρτη. Η κόκκινη κουκκίδα και η θέση της είναι ένα αντικείμενο  $x$ , ενώ η θέση του ίδιου του χάρτη στο πάρκο είναι το  $y$ . Για να έχει νόημα για εμάς η κόκκινη κουκκίδα, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι το  $y$  αναπαριστάται από το  $x$ : επιπλέον δε, πρέπει να έχουμε την ικανότητα να ερμηνεύσουμε το χάρτη. Στην περίπτωση του άρθρου του Kuzin, οφείλουμε να θέσουμε το εξής κρίσιμο ερώτημα: Ποια οντότητα θα ερμήνευε το «νόημα» ενός ανθρώπινου όντος;

Για το ζήτημα του νοήματος μπορούν να ειπωθούν πολύ περισσότερα (τα βιβλία που έχουν γραφεί για το συγκεκριμένο θέμα θα γέμιζαν

μια ολόκληρη βιβλιοθήκη), αλλά ακόμη και αυτή η απλή άποψη αρκεί για να αποκαλύψει τα προβλήματα από τα οποία πάσχει η προσέγγιση του Kuzin. Τα νοήματα πρέπει να διακρίνονται από τα ίδια τα αντικείμενα. Όταν ένα αρσενικό κογιότ οριοθετεί την περιοχή του κατοικώντας, τα ούρα του μετατρέπονται σε σύμβολο που για τα υπόλοιπα αρσενικά κογιότ σημαίνει «Εδώ ζω εγώ· μην πλησιάζετε περισσότερο». Τίνος αποτελεί σύμβολο ένα ανθρώπινο, και σε ποιον απευθύνεται το σήμα; Ο Kuzin δεν μας το διευκρινίζει, και χωρίς ένα τέτοιο ξεκαθάρισμα τα λόγια του στερούνται περιεχομένου.

Ο Kuzin λέει: «Η ανθρωπική αρχή είναι τέκνο ενός νοητικού πειράματος. Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου πειράματος, υποθέτουμε ότι δρουν φυσικοί νόμοι διαφορετικοί από τους όντως ισχύοντες, και μελετάμε κατά πόσον θα ήταν δυνατή η ύπαρξη του ανθρώπου στον τροποποιημένο κόσμο ή όχι.» Ατυχώς για τη συγκεκριμένη θέση του, το πειράματά μου με τον επιλογέα σφαιριδίων και την ακολουθία που επέλεξε είναι εξίσου έγκυρο. Είτε τάξουμε τους ανθρώπους ως το «σκοπό της εξέλιξης του Σύμπαντος» είτε την ακολουθία της μηχανής μου, ουδεμία διαφορά προκύπτει.

Πρέπει επίσης να επιδεικνύουμε ιδιαίτερη προσοχή όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη «εξέλιξη» προκειμένου για συστήματα. Στη βιολογία, ο όρος «εξέλιξη» περιγράφει τη μεταβολή των ειδών μέσω του μηχανισμού της φυσικής επιλογής. Η εξέλιξη αυξάνει την προσαρμογή του οργανισμού στο περιβάλλον του. Οι μεταβολές σε συστήματα που δεν διαθέτουν μηχανισμό επιλογής, όπως ο Γαλαξίας μας, δεν συνιστούν εξέλιξη υπό την ίδια έννοια —αντιπροσωπεύουν απλώς μεταβολές κατά την πάροδο του χρόνου. Στην καθημερινή γλώσσα, συναντάμε μια τρίτη χρήση της λέξης «εξέλιξη»: δηλώνει τη βελτίωση ή την πρόοδο. Λόγω αυτών των διαφορετικών νοημάτων, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν χρησιμοποιούμε τον συγκεκριμένο όρο στον επιστημονικό λόγο.



Ιδιαίτερος δε, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι, στη βιολογία, η εξέλιξη δεν σημαίνει αύξουσα πολυπλοκότητα, αλλά απλώς καλύτερη προσαρμογή στο υπάρχον περιβάλλον. Για παράδειγμα, πολλά σπηλαιόβια είδη είναι απλούστερα από τους προγόνους τους (για παράδειγμα, πολυάριθμοι σπηλαιόβιοι οργανισμοί δεν διαθέτουν πλέον μάτια).

Το άρθρο του Kuzin κατά μεγάλο μέρος αφιερώνεται στα όσα γνωρίζουμε σχετικά με την ακολουθία των γεγονότων που συνιστούν την ιστορία του Σύμπαντος (την οποία ονομάζει «εξέλιξη» του Σύμπαντος). Το κύριο σημείο αυτής της εκτεταμένης συζήτησης έγκειται στο ότι «λόγω μιας μακράς αλυσίδας «συμπτώσεων»... παράγονται [από τα άστρα] μεγάλες ποσότητες άνθρακα, γεγονός που αποδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντικό για τη ζωή στο Σύμπαν», λες και δεν μπορεί να εξηγηθεί ό,τι φαίνεται να αποτελεί γεγονός μικρής πιθανότητας παρά μόνο μέσω του ότι τελικά «χρειάζεται» για να δημιουργηθούν οι άνθρωποι. Επίσης, ο Kuzin εφιστά την προσοχή στο περιορισμένο φάσμα τιμών της θερμοκρασίας που απαιτείται για την πραγματοποίηση των οργανικών χημικών αντιδράσεων, θεωρώντας ότι πρόκειται για ένα στοιχείο που καταδεικνύει την απθανότητα τους. Ωστόσο, όπως δείχνει το παράδειγμα που παρουσίασα στην αρχή του κειμένου μου, η απθανότητα δεν νομιμοποιεί την τελεολογία. Απαξ και κάτι συμβεί, η πιθανότητα να συνέβη ισούται με τη μονάδα. Αυτά που ο Kuzin εκλαμβάνει ως ουσιώδη για τη νοήμονα ζωή απλώς αποκαλύπτουν τις ανθρωποκεντρικές προκαταλήψεις του ίδιου και ίσως μίαν έλλειψη φαντασίας αναφορικά με τις δυνατότητες να υπάρχουν και άλλες μορφές ενσυνείδητων όντων. Είναι στενόμυαλο να πιστεύουμε ότι κάθε ενσυνείδητο ον πρέπει να μοιάζει με εμάς. Το Σύμπαν είχε ανέκαθεν μεγάλη ικανότητα να ανατρέπει τις προκαταλήψεις και τις υποθέσεις μας, και δεν βλέπω για ποιο λόγο να μη συμβεί το ίδιο με τις ιδέες μας για τις δυνατές μορφές ζωής.

Στο τελευταίο μέρος του επιχειρήματος του Kuzin διατυπώνεται η παρατήρηση ότι διαθέτουμε περισσότερες εξισώσεις που αναπαριστούν φυσικούς νόμους παρά παγκόσμιες σταθερές. Αυτό το γεγονός πιθανόν να αποτελεί ένδειξη, όπως πιστεύει ο Kuzin, για μια υπολανθάνουσα ενοποίηση των φυσικών νόμων. Ωστόσο, ο Kuzin δεν ανακόπτει την πορεία του για να εξετάσει άλλες εναλλακτικές περιπτώσεις, όπως είναι, λόγου χάριν, η ενδεχόμενη ύπαρξη και άλλων ουσιωδών σταθερών: ίσως να μην έχουν ανακαλυφθεί ακόμη ολόκληρες τάξεις φαινομένων. Η παρατήρησή του τον οδηγεί στο παρακινδυνευμένο συμπέρασμα ότι «αυτή καθ' εαυτή η δομή των φυσικών νόμων υποκρύπτει κάποια εξόχως σπουδαία αρχή. Επί του παρόντος αγνοούμε πώς να την περιγράψουμε μαθηματικά... Όλα όσα γνωρίζουμε την παρούσα στιγμή αποτελούν απλώς συνέπειες τούτης της βασικής αρχής». Αλλά δεν μας παρουσίασε καμία βάση για να σκεπτόμαστε ότι όντως υπάρχει μια τέτοια αρχή. Εν συνεχεία, κάνει ένα ακόμη άλμα πέραν πάσης λογικής, και συνεχίζει: «Όλοι οι επιμέρους νόμοι και κανονικότητες της φύσης συνενώνονται σε έναν μοναδικό βασικό νόμο: Κάπου στο Σύμπαν πρέπει να εμφανιστεί το ανθρώπινο ον.» Όπως επισήμανα ήδη, η τελευταία φράση μπορεί, εξίσου δικαιολογημένα (ή, μάλλον, εξίσου αδικαιολόγητα) να αντικατασταθεί με την εξής: «Όλοι οι επιμέρους νόμοι και κανονικότητες της φύσης συνενώνονται σε έναν μοναδικό βασικό νόμο: Κάπου στο Σύμπαν μια μικρή πλαστική μηχανή πρέπει να δημιουργήσει αυτή τη συγκεκριμένη ακολουθία.» Η εκδοχή της ανθρωπικής αρχής που μας παρουσίασε ο Kuzin ούτε αρχή συνιστά ούτε και μέρος της επιστήμης αποτελεί. Πρόκειται απλώς για μίαν οιονεί θρησκευτική πίστη μεταμφιεσμένη σε επιστημονικό επίχειρημα.\*

\* Ο Jef Raskin έχει ήδη δημοσιεύσει στο *Quantum* άλλο ένα άρθρο: «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμ./Δεκ. 1994. (Σ.τ.μ.)

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 38

89 είτε η ακολουθία σταθερού σημείου 1. Επιβεβαιώστε μόνοι σας το γεγονός. Αρκεί να θεωρήσετε αρχικούς αριθμούς μικρότερους του 200 (γιατί;) ή ακόμη και αριθμούς μικρότερους του 161.

Τι συμβαίνει εάν αντί για αθροίσματα τετραγώνων θεωρήσουμε αθροίσματα κύβων των ψηφίων; Προσπαθήστε να το απαντήσετε εσείς.

Θα ολοκληρώσουμε με ένα ανοικτό πρόβλημα. Θεωρούμε έναν αριθμό. Αν είναι άρτιος, τον διαιρούμε διά 2, διαφορετικά τον πολλαπλασιάζουμε επί 3 και προσθέτουμε 1. Ξανά, αν ο προκύπτων αριθμός  $N$  είναι άρτιος, θεωρούμε τον  $N/2$ , ενώ αν είναι περιττός, τον  $3N + 1$ . Στο Σχήμα 9 παρουσιάζεται η συγκεκριμένη διαδικασία για τον αριθμό 34. Παίρνουμε την περιοδική ακολουθία 4, 2, 1, 4, 2, 1, ..., με περίοδο 3.



Σχήμα 9

Δοκιμές με διάφορους αρχικούς αριθμούς οδηγούν πάντοτε σε αυτή την ακολουθία. Ωστόσο, το γεγονός δεν έχει ακόμη αποδειχθεί.

Δεν τρέφουμε ελπίδες ότι οι αναγνώστες θα καταφέρουν να λύσουν σύντομα τούτο το πρόβλημα. Ωστόσο, μπορούν να προσπαθήσουν την επόμενη πρόκληση: αν ο αριθμός είναι άρτιος, τον διαιρούμε διά 2, ενώ εάν είναι περιττός, του προσθέτουμε 101. Ποιες ακολουθίες μπορεί να προκύψουν;



# Συμμετρικές ανισότητες

Επίλυση ανισοτήτων με το θεώρημα Muirhead

S. Dvoryaninon και E.Yasinovyi

**Σ**Ε ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΣΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ διαγωνισμούς συχνά εμφανίζονται προβλήματα που ζητούν την απόδειξη ανισοτήτων οι οποίες περιέχουν πολλές μεταβλητές. Αναρίθμητα άρθρα και βιβλία είναι αφιερωμένα σε γενικά θεωρήματα και διάφορες μεθόδους απόδειξης τέτοιων ανισοτήτων.

Εδώ θα εξετάσουμε το θεώρημα του Muirhead, το οποίο αναφέρεται σε ανισότητες μεταξύ συγκεκριμένων τύπων συμμετρικών πολυωνύμων. Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε το 1903. Είναι αξιοσημείωτο όχι μόνο για τη γενικότητά του αλλά και για το γεγονός ότι οι συνδυαστικές ιδέες που συνδέονται με αυτό (τα διαγράμματα Young και οι διατάξεις τους) εμφανίζονται σε διάφορα πεδία των καθαρών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Θα ασχοληθούμε με ανισότητες που αφορούν ομογενή πολυώνυμα. Ιδού μερικά παραδείγματα τέτοιων ανισοτήτων:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \quad (1)$$

$$x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + y^3x^2, \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz, \quad (4)$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy, \quad (5)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 \geq 4xyzw. \quad (6)$$

Αυτές οι ανισότητες ισχύουν για όλες τις μη αρνητικές τιμές των μεταβλητών. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, αποδεικνύονται εύκολα με αναγωγή των όμοιων όρων και παραγοντοποίηση. Για παράδειγμα, ας αποδείξουμε ότι ισχύει η (2) για κάθε μη αρνητικό  $x$  και  $y$ . Θεωρούμε την εξής διαφορά:

$$x^5 - y^5 - x^3y^2 - y^3x^2 = x^3(x^2 - y^2) - y^3(x^2 - y^2) = (x^3 - y^3)(x^2 - y^2).$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο γινόμενο είναι μη αρνητικό, διότι και οι δύο παράγοντες είναι είτε μη αρ-





νητικοί (αν  $x \geq y \geq 0$ ) είτε μη θετικοί (αν  $y \geq x \geq 0$ ).

Η επινόηση μιας συμμετρικής απόδειξης για ανισότητες τριών ή περισσότερων μεταβλητών είναι δυσκολότερη. Προς το παρόν, θα παρουσιάσουμε τη γενική ιδέα με τη βοήθεια του παραδείγματος (5). Σε αυτή την περίπτωση θα μας διευκολύνει η μεταφορά όλων των όρων στο ένα μέλος της ανισότητας, ο πολλαπλασιασμός τους επί 2 και η διευθέτησή τους σε τρεις ομάδες:

$$\begin{aligned} x^2(y^2 - 2yz + z^2) + y^2(x^2 - 2xz + z^2) + z^2(x^2 - 2xy + y^2) \\ = x^2(y - z)^2 + y^2(x - z)^2 + z^2(x - y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε τις ανισότητες (1), (3) και (6).

Για να μάθουμε πώς αποδεικνύονται οι ανισότητες αυτού του τύπου και να διατυπώσουμε ένα γενικό θεώρημα, χρειάζεται να εξοικειωθούμε με ορισμένες νέες έννοιες, που θα περιγράψουμε στο επόμενο μέρος του άρθρου. (Ωστόσο να τονίσουμε ότι για τα παραδείγματα που παραθέτουμε υπάρχουν και απευθείας αποδεί-

ξεις. Ο σκοπός του άρθρου είναι να παρουσιάσει μια τεχνική που εφαρμόζεται και σε πολύ δυσκολότερες περιπτώσεις, όπου οι απευθείας αποδείξεις μειονεκτούν ουσιαστικά.)

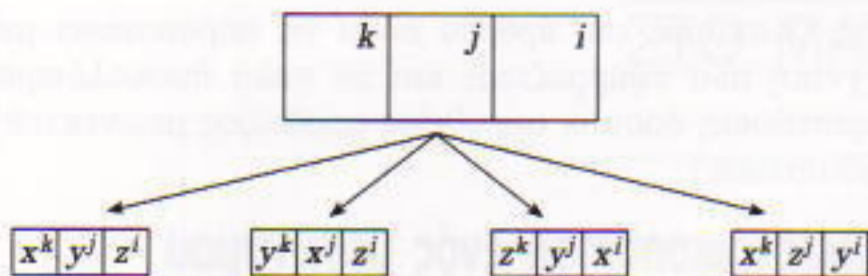
## Συμμετρικοποίηση ενός μονωνύμου

Ας υποθέσουμε ότι δίδονται μερικές μη αρνητικές μεταβλητές —ας πούμε, οι τρεις μεταβλητές  $x, y, z$  που λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές. Ας υποθέσουμε επίσης ότι δίδεται ένα σύνολο με το ίδιο πλήθος μη αρνητικών ακεραίων:  $a = (k, j, i)$ , όπου  $k \geq j \geq i$ , τους οποίους θα ονομάσουμε εκθέτες. Σχεδιάζουμε έναν πίνακα που αποτελείται από τρία τετράγωνα και γράφουμε τον αντίστοιχο εκθέτη στην πάνω δεξιά γωνία κάθε τετραγώνου. Γράφουμε τις τρεις μεταβλητές στα τετράγωνα και σχηματίζουμε το μονώνυμο  $x^k y^j z^i$ . Στη συνέχεια, γράφουμε στα τετράγωνα τις τρεις μεταβλητές με διαφορετική σειρά και σχηματίζουμε ένα άλλο μονώνυμο,

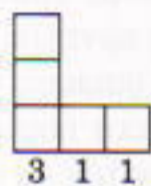


Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

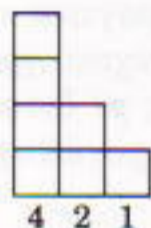




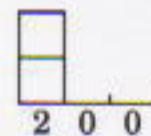
Σχήμα 1



$$T_{(3,1,1)}(x, y, z) = 2(x^3yz + y^3zx + z^3xy)$$



$$T_{(4,2,1)}(x, y, z) = x^4y^2z + y^4z^2x + z^4y^2x + x^4z^2y + y^4x^2z + z^4x^2y$$



$$T_{(2,0,0)}(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Σχήμα 2

για παράδειγμα το  $x^k y^j z^i$  (Σχήμα 1). Μπορούμε εύκολα να απαριθμήσουμε το πλήθος των διαφορετικών μονωνύμων που προκύπτουν κατ' αυτό τον τρόπο. Στο πρώτο τετράγωνο μπορεί να τοποθετηθεί οποιαδήποτε από τις τρεις μεταβλητές  $x, y, z$ , και αυτό μας δίνει τρεις δυνατότητες. Τώρα πλέον μπορούμε να τοποθετήσουμε στο δεύτερο τετράγωνο μία από τις δύο μεταβλητές που έχουν απομείνει και, επομένως, έχουμε  $3 \cdot 2 = 6$  δυνατότητες (η τοποθέτηση των δύο μεταβλητών καθορίζει ποια μεταβλητή θα τοποθετηθεί στο τρίτο τετράγωνο, και συνεπώς υπάρχουν συνολικά έξι τρόποι συμπλήρωσης των τετραγώνων). Προσθέτουμε στη συνέχεια τα μονώνυμα που έχουν προκύψει και σχηματίζουμε ένα πολυώνυμο των τριών μεταβλητών, το οποίο θα συμβολίζουμε ως  $T_{(k,j,i)}(x, y, z)$ , ή  $T_a(x, y, z)$ , ή απλώς  $T_a$ . Τα πολυώνυμα αυτού του είδους ονομάζονται συμμετρικά, διότι δεν μεταβάλλονται αν μεταθέσουμε τις μεταβλητές τους. Ο βαθμός κάθε μονωνύμου ισούται με  $s = k + j + i$ . Ιδού μερικά παραδείγματα:

$$T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2x + x^2z + y^2z + z^2y,$$

$$T_{(3,1,1)}(x, y, z) = x^3yz + y^3xz + z^3xy + x^3zy + y^3zx + z^3yx = 2(x^3yz + y^3xz + z^3xy).$$

$$T_{(2,2,2)}(x, y, z) = 6x^2y^2z^2.$$

Στα δύο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι όποτε υπάρχουν ίσοι αριθμοί μεταξύ των εκθετών ανάγουμε τους όμοιους όρους του  $T_a$  και το γράφουμε σε συντομότερη μορφή.

Αν το σύνολο των εκθετών  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  αποτελείται από  $n$  αριθμούς, ο πίνακας πρέπει να περιέχει

$n$  τετράγωνα και, επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε  $n$  μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Τότε, το πολυώνυμο  $T_a(x_1, \dots, x_n)$  περιέχει  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  όρους (πριν από την αναγωγή των όμοιων όρων).

Επομένως, σε κάθε σύνολο ακεραίων  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , όπου  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ , αντιστοιχούμε ένα πολυώνυμο  $T_a$ . Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται *συμμετρικοποίηση του μονωνύμου* με εκθέτες  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

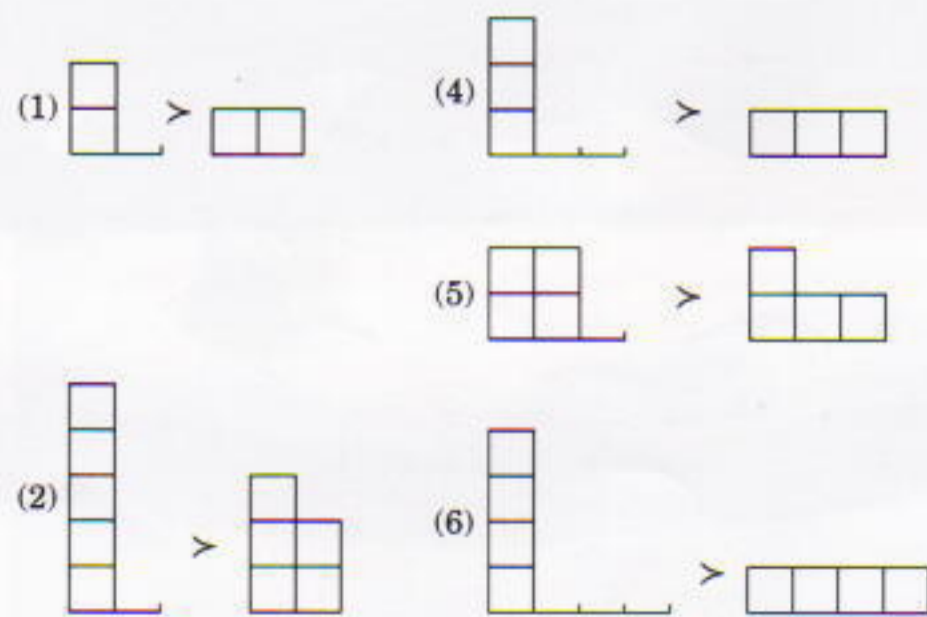
Κάθε τέτοιο σύνολο  $a$  μπορεί να παρασταθεί με μια «σκάλα» αποτελούμενη από  $n$  σκαλοπάτια. Το ύψος κάθε σκαλοπατιού ισούται με τον αντίστοιχο εκθέτη και το πλάτος του με 1. Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια τέτοια σκάλα σε ένα φύλλο τετραγωνισμένου χαρτιού: το συνολικό πλήθος των τετραγώνων θα είναι ίσο με το βαθμό  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  του πολυωνύμου  $T_a$ . Στο Σχήμα 2 βλέπετε διάφορες σκάλες που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα τα οποία εμφανίζονται σε ανισότητες αυτού του άρθρου. Οι εν λόγω σκάλες έχουν ένα επιστημονικό όνομα: ονομάζονται διαγράμματα Young, και αποδεικνύονται χρήσιμες σε διάφορα προβλήματα συνδυαστικής, άλγεβρας και απειροστικού λογισμού.

**Άσκηση 2.** Γράψτε τα πολυώνυμα  $T_a$  και σχεδιάστε τις αντίστοιχες σκάλες για τα σύνολα  $a$ : (3, 2), (3, 2, 1), (3, 3, 0, 0), (4, 1, 1, 0), (5, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1).

### Σύγκριση διαγραμμάτων Young

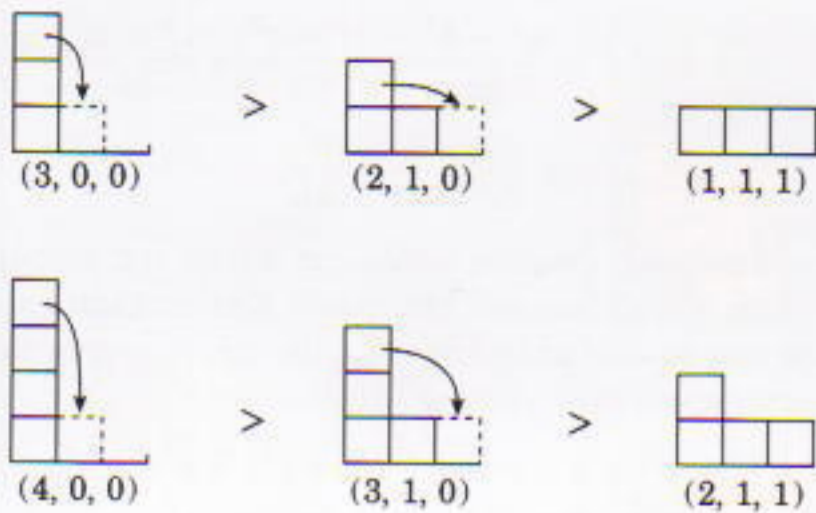
Στο Σχήμα 3 παρουσιάζονται σε ζεύγη οι σκάλες που αντιστοιχούν στις ανισότητες (1), (2) και (4)-(6). Παρατηρούμε ότι η περισσότερο απότομη σκάλα αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο από τα δύο πολυώνυμα. Η σκάλα με την ομαλότερη κλίση μπορεί να προκύψει από την πιο απότομη αν μετακινήσουμε μερικά τετράγωνα της δεύτερης προς τα κάτω και δεξιά (Σχήμα 4). Στη συνέχεια, διατυπώνουμε έναν ακριβέστερο ορισμό της έννοιας *περισσότερο απότομη*. Θα αναφερθούμε σε σκάλες με τρία σκαλοπάτια.

Εστω  $a = (a_1, a_2, a_3)$  και  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  δύο σύνολα ακεραίων τέτοια ώστε  $s = a_1 + a_2 + a_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ ,  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  και  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$ . Θα λέμε ότι  $a > \beta$  (το  $a$  υπερβαίνει το  $\beta$ ) αν ικανοποιείται η επόμενη συνθήκη: το  $\beta$



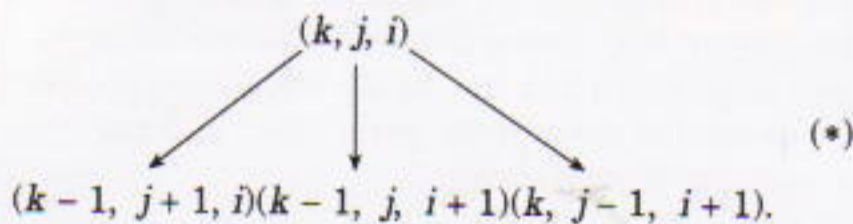
Σχήμα 3





Σχήμα 4

μπορεί να προκύψει από το  $a$  αν εκτελεστεί η επόμενη πράξη μερικές φορές (ή μόνο μία φορά ή και καθόλου):



Αυτή η συνθήκη μπορεί να γραφεί και με μια άλλη, ισοδύναμη μορφή:  $a > \beta$ , αν

$$\begin{cases} a_1 \geq \beta_1, \\ a_1 + a_2 \geq \beta_1 + \beta_2, \\ a_1 + a_2 + a_3 \geq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \end{cases} \quad (**)$$

Παρομοίως, για μη αύξοντα σύνολα μη αρνητικών ακεραίων  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  και  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  θα γράφουμε  $a > \beta$ , αν

$$\begin{aligned} a_1 &\geq \beta_1, \\ a_1 + a_2 &\geq \beta_1 + \beta_2, \\ &\dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} &\geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα,  $(4, 2, 1) > (3, 2, 2)$ , διότι  $4 \geq 3$ ,  $4 + 2 \geq 3 + 2$  και  $4 + 2 + 1 = 3 + 2 + 2$ .

Η σχέση  $>$  μεταξύ δύο συνόλων είναι όμοια με τη σχέση διάταξης  $\geq$  μεταξύ δύο αριθμών:  $a > a$ , και αν  $a > \beta$  και  $\beta > \gamma$ , τότε  $a > \gamma$ . Όμως, αυτή η σχέση διάταξης είναι μερική: μπορεί δύο σύνολα με ίσο άθροισμα να μην είναι συγκρίσιμα (δείτε την Άσκηση 6).

### Άσκησης

3. Επαληθεύστε ότι τα ζεύγη διαγραμμάτων Young του Σχήματος 3 ικανοποιούν τις συνθήκες (\*) και (\*\*).

4. Αποδείξτε ότι οι σχέσεις (\*) και (\*\*) είναι ισοδύναμες: δηλαδή, αν ισχύουν οι ανισότητες (\*\*), τότε το σύνολο  $\beta$  μπορεί να προκύψει από το  $a$  με κατάλληλη μετακίνηση τετραγώνων προς τα κάτω και δεξιά.

5. Σχεδιάστε σε φθίνουσα διάταξη όλες τις σκάλες που αποτελούνται από  $s = 4$  τετράγωνα, ξεκινώντας από την πιο απότομη,  $(4, 0, 0, 0)$ , και καταλήγοντας σε αυτή με τη μικρότερη κλίση,  $(1, 1, 1, 1)$ . Επαναλάβετε το ίδιο για τις σκάλες 5 τετραγώνων.

6. (α) Επαληθεύστε ότι τα διαγράμματα Young  $(4, 1)$  και  $(3, 3, 0)$  δεν είναι συγκρίσιμα — κανένα από τα δύο δεν υπερβαίνει το άλλο. Υπάρχουν άλλα μη συγκρίσιμα σύνολα με άθροισμα 6;

(β) Βρείτε όλα τα μη συγκρίσιμα ζεύγη συνόλων για  $s = 7$ .

### Το θεώρημα Muirhead

Είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα.

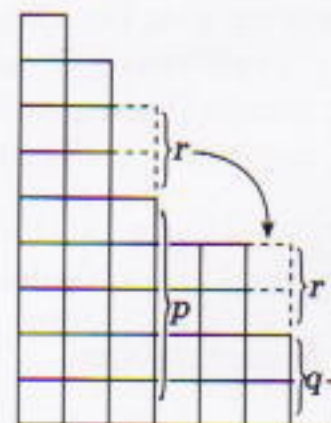
Εστω  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  και  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  δύο σύνολα εκθετών με το ίδιο άθροισμα. Αν  $a > \beta$ , τότε  $T_a(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  για όλα τα μη αρνητικά  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Αντιστρόφως, αν ισχύει αυτή η ανισότητα, τότε  $a > \beta$ .

Δεν θα αποδείξουμε αυστηρά τη γενική περίπτωση του θεωρήματος (η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στις βιβλιογραφικές αναφορές 1 και 2, στο τέλος του άρθρου — η αναφορά 2 είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένη σε παραλλαγές της σχέσης υπέρβασης, τις εφαρμογές και τις γενικεύσεις της). Θα περιγράψουμε απλώς τις βασικές ιδέες πάνω στις οποίες θεμελιώνεται η απόδειξη και θα τις παρουσιάσουμε μέσω διαφόρων παραδειγμάτων.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους του θεωρήματος — της αναγκαιότητας της συνθήκης  $a > \beta$  — στηρίζεται στο απλό γεγονός ότι αν έχουμε δυο πολυώνυμα μιας μεταβλητής  $t$  (με θετικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου), τότε, για μεγάλες τιμές του  $t$ , το πολυώνυμο με τον υψηλότερο βαθμό είναι μεγαλύτερο (δείτε την Άσκηση 8).

Η απόδειξη ότι η συνθήκη  $a > \beta$  είναι ικανή βασίζεται σε δύο ιδέες. Η πρώτη είναι η ιδέα της μετακίνησης τετραγώνων προς τα κάτω και δεξιά. Δύο σύνολα  $a > \beta$  μπορούν να συνδεθούν μέσω μιας αλυσίδας συνόλων, τέτοιας ώστε δύο διαδοχικά σύνολά της να διαφέρουν μόνο σε δύο θέσεις. Για να περάσουμε από ένα σύνολο της αλυσίδας στο επόμενο, αρκεί να μετακινήσουμε στην αντίστοιχη του σκάλα ένα τετράγωνο από ένα σκαλοπάτι στο επόμενο. Η δεύτερη ιδέα είναι αυτή της *συμμετρικής ομαδοποίησης*: η διαφορά των πολυωνύμων που αντιστοιχούν σε γειτονικά σύνολα μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα (για όλα τα σύνολα των μεταβλητών  $x$  και  $y$ ) όμοιων ομάδων της μορφής

$$(x^p + y^q + y^p + x^q - x^p y^{q+r} - y^p x^{q+r})Z$$



Σχήμα 5



(βλ. Σχήμα 5), όπου  $Z$  είναι το γινόμενο των άλλων μεταβλητών που αντιστοιχούν σε όμοιους εκθέτες στα γειτονικά σύνολα. Μπορούμε εύκολα να παραγοντοποιήσουμε την τελευταία παράσταση και να επαληθεύσουμε ότι είναι μη αρνητική για  $p > q$  και  $r \geq 0$ .

Αν αναλύσετε αρκετά παραδείγματα γράφοντας με προσοχή όλες τις πράξεις, όλα θα γίνουν ξεκάθαρα. Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο παραδείγματα.

### Ανισότητες που αφορούν μέσους

Μεταξύ του αριθμητικού και του γεωμετρικού μέσου τριών μη αρνητικών αριθμών ισχύει η εξής ανισότητα:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

Εάν θέσουμε  $a_1 = x^3$ ,  $a_2 = y^3$  και  $a_3 = z^3$ , θα καταλήξουμε στην ανισότητα (4). Θα αποδείξουμε την τελευταία με τη βοήθεια της μεθόδου Muirhead. Από το Σχήμα 4α βλέπουμε ότι πρέπει να αποδείξουμε τις επόμενες δύο ανισότητες:

$$T_{(3,0,0)}(x, y, z) \geq T_{(2,1,0)}(x, y, z) \geq T_{(1,1,1)}(x, y, z).$$

Θεωρούμε την πρώτη από αυτές, και παίρνουμε τη διαφορά

$$R_1 = T_{(3,0,0)}(x, y, z) - T_{(2,1,0)}(x, y, z) = 2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2y - y^2z - z^2x - x^2z - y^2x - z^2y.$$

Διευθετούμε τους όρους σε ομάδες των τεσσάρων, σύμφωνα με την εξής αρχή: Για κάθε ζεύγος μεταβλητών συμπεριλαμβάνουμε σε μία ομάδα όλους τους όρους στους οποίους οι εκθέτες αυτών των μεταβλητών μεταβάλλονται από το (3, 0) στο (2, 1) (και ο κοινός εκθέτης της τρίτης μεταβλητής ισούται με μηδέν). Επομένως, έχουμε:

$$R_1 = (y^3 + z^3 - y^2z - z^2y) + (x^3 + y^3 - x^2y - y^2x) + (z^3 + x^3 - z^2x - x^2z) = (y^2 - z^2)(y - z) + (x^2 - y^2)(x - y) + (z^2 - x^2)(z - x) \geq 0,$$

για κάθε μη αρνητικό  $x, y$ , και  $z$ .

Θα αποδείξουμε τώρα τη δεύτερη ανισότητα.

$$R_2 = T_{(2,1,0)}(x, y, z) - T_{(1,1,1)}(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2x + z^2y - 6xyz.$$

Εδώ ο κοινός εκθέτης μιας μεταβλητής, ας πούμε της  $y$ , ισούται με 1 και οι εκθέτες (2, 0) των άλλων δύο μεταβλητών  $x$  και  $z$  μεταβάλλονται σε (1, 1) —και όμοια για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Έχουμε

$$R_2 = x(y^2 + z^2 - 2yz) + y(z^2 + x^2 - 2zx) + z(x^2 + y^2 - 2xy) = x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 \geq 0,$$

και η ανισότητα (4) αποδείχθηκε.

### Μια άλλη ανισότητα

Εξετάζουμε τώρα την ανισότητα

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Ένας από τους τρόπους απόδειξης αυτής της ανισότητας είναι η μέθοδος του Muirhead. Εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της επί  $2abc$ , μετατρέπεται στην επόμενη ανισότητα «τύπου Muirhead»:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c, \quad (7)$$

$$a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c \geq 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab). \quad (8)$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα Young παρουσιάζονται στο Σχήμα 4β. Η διαφορά μεταξύ του αριστερού και του δεξιού μέλους κάθε ανισότητας μπορεί να γραφεί, όπως και προηγουμένως, ως άθροισμα τριών ομάδων αποτελούμενων από τέσσερις όρους. Για συντομία θα γράψουμε μόνο τη μία ομάδα (οι υπόλοιπες προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές  $a, b$  και  $c$  με  $b, c, a$  και  $c, a, b$ , αντίστοιχα).

Απόδειξη της (7):

$$(a^4 + b^4 - a^3b - b^3a) + \dots = (a^3 - b^3)(a - b) + \dots$$

Απόδειξη της (8):

$$(a^3b + c^3b - a^2cb - c^2ab) + \dots = b(a^2 - c^2)(a - c) + \dots$$

Επομένως, η αρχική ανισότητα αποδείχθηκε.

### Ασκήσεων και προβλημάτων συνέχεια

7. Γράψτε όλες τις ανισότητες Muirhead για τα πολυώνυμα 4ου βαθμού.

8. Έστω  $T_{(a_1, a_2, a_3)}(x, y, z) \geq T_{(b_1, b_2, b_3)}(x, y, z)$ . Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες (\*\*). (Θεωρήστε διάφορες περιπτώσεις:  $(x = y = z = t)$ ,  $(x = y = t, z = 1)$ ,  $(x = t, y = z = 1)$  και συγκρίνετε τους βαθμούς των πολυωνύμων που προκύπτουν.)

9. Αποδείξτε τις επόμενες ανισότητες (για μη αρνητικά  $x, y, z, v$  και  $w$ ):

$$(a) \quad x^4y^2z + y^4x^2z + z^4yx^2 + x^4z^2y + z^4x^2y \geq 2(x^3y^2z^2 + y^3z^2x^2 + z^3x^2y^2),$$

$$(b) \quad x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y,$$

$$(c) \quad x^3 + y^3 + z^3 + v^3 \geq xyz + xyv + xzv + yzv.$$

10. Να συναγάγετε από το θεώρημα Muirhead την ανισότητα των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων για  $n$  μη αρνητικούς αριθμούς. Πόσα τετράγωνα πρέπει να μετακινηθούν για να μετατραπεί το σύνολο  $(n, 0, 0, \dots, 0)$  στο σύνολο  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ ;

11. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Muirhead για όλους τους μη αρνητικούς εκθέτες (όχι απαραίτητα ακέραιους). ■

### Βιβλιογραφία

1. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Polya, G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

2. Marshall, A.W. and Olkin, I., *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Νέα Υόρκη: Academic Press, 1979.



# Ένα ζήτημα πολυπλοκότητας

«Ο άνθρωπος είναι ένας υπερβολικά περίπλοκος οργανισμός.  
Εάν εξαφανιστεί, θα είναι επειδή του λείπει η απλότητα.»

—Ezra Pound

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**Τ**Ι ΘΑ ΣΥΝΕΒΑΙΝΕ ΕΑΝ ΚΑΠΟΙΟ ηφαιστειο εκρηγνυόταν κάτω από έναν παγετώνα; Μπορούμε να λύσουμε, άραγε, ένα τέτοιο πρόβλημα; Και μάλιστα, μπορούμε να το λύσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο στοιχειώδη φυσική; Στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής του 1998, που διοργανώθηκε στην Ισλανδία, ζητήθηκε από τους διαγωνιζομένους να λύσουν ακριβώς αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δεδομένα από μια ηφαιστειακή έκρηξη που σημειώθηκε στην Ισλανδία ένα ή δύο χρόνια πριν από την Ολυμπιάδα.

Πολλά από τα προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι διαγωνιζόμενοι στις Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής παρουσιάζονται σε μορφή προσαρμοσμένη στο νοηματικό πλαίσιο των προβλημάτων που λύνουν οι φυσικοί στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο. Οι γεωφυσικοί μπορούν να παραγάγουν μάλλον εξεζητημένους κώδικες υπολογιστή για την ανάλυση ενός ηφαιστειακού επεισοδίου, αλλά μπορούν και να αποκτήσουν μια «αίσθηση» του τι συμβαίνει απλουστεύοντας το πρόβλημα. Για παράδειγμα, μπορούν να απλουστεύσουν τη γεωμετρία θεωρώντας ότι η διάπυρη λάβα ανοίγει μια κωνική κοιλότητα στον πάγο τήκοντάς τον. Δέ-

χονται επίσης ότι η αγωγή της θερμότητας μακριά από την κοιλότητα είναι μικρή και ότι το νερό δεν απομακρύνεται από την περιοχή. Ακριβώς αυτό ήταν το πρόβλημα που είχαν να αντιμετωπίσουν οι διαγωνιζόμενοι. Σ' αυτή την απλουστευμένη μορφή, η επίλυσή του δεν απαιτεί καμία επιπλέον γνώση φυσικής πέραν των όσων περιλαμβάνονται στη λυκειακή ύλη.

Πώς αντιδράτε όταν σας δοθεί ένα πρόβλημα που είτε η επίλυσή του είναι εξαιρετικά πολύπλοκη είτε υπάρχουν κρίσιμα στοιχεία τα οποία λείπουν; Εμείς διακρίνουμε τρεις τύπους σπουδαστών. Ο σπουδαστής του πρώτου τύπου δηλώνει ότι λείπει κάποια απαραίτητη πληροφορία (για παράδειγμα, αγνοούμε τη γωνία που σχηματίζουν το μαγνητικό πεδίο με την ταχύτητα του σωματιδίου) και αρνείται να λύσει το πρόβλημα. Ο σπουδαστής του δεύτερου τύπου δηλώνει ότι αγνοούμε τη γωνία, αλλά προχωρεί υποθέτοντας ότι αυτή ισούται με  $90^\circ$ , και λύνει το πρόβλημα. Ο σπουδαστής του τρίτου τύπου υποθέτει ότι η γωνία ισούται με  $90^\circ$ , λύνει το πρόβλημα, και κατόπιν περιγράφει πώς θα τροποποιούνταν η λύση αν η γωνία λάμβανε μια τιμή διαφορετική από εκείνη των  $90^\circ$ . Σε αυτόν, τον τρίτο σπουδαστή, πρέπει να αναγνω-

ρίσουμε το γνήσιο τάλαντο του φυσικού.

Πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου παρουσιάζουν τόσο μεγάλη πολυπλοκότητα ώστε, εάν επιμείνουμε να τη λάβουμε υπόψη σε όλες της τις λεπτομέρειες, η λύση των προβλημάτων καθίσταται αδύνατη. Εάν, ωστόσο, επιτύχουμε να απλουστεύσουμε το πρόβλημα χωρίς να μας διαφύγουν τα ουσιώδη του στοιχεία, συχνά κατορθώνουμε να το αναγάγουμε σε ένα πρόβλημα (ή και μια σειρά προβλημάτων) που ήδη γνωρίζουμε πώς να το λύσουμε.

Άλλοτε, πάλι, ένα πρόβλημα μπορεί να φαίνεται εξαιρετικά περίπλοκο λόγω του γενικού πλαισίου εντός του οποίου παρουσιάζεται. Όταν εκτελούσαμε χρέη ακαδημαϊκών διευθυντών της ομάδας φυσικής των ΗΠΑ, ακούγαμε από τους φοιτητές το σχόλιο ότι η διαφορά μεταξύ των δυσκολότερων προβλημάτων σε ένα εισαγωγικό εγχειρίδιο φυσικής και των προβλημάτων που τίθενται στις Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής έγκειται στο ότι κανείς αντιλαμβάνεται πώς τα προβλήματα των Ολυμπιάδων είναι εύκολα μόνο αφού τα έχει ήδη λύσει!

Ένα εξαιρετικό παράδειγμα που θα σας βοηθήσει να καταλάβετε καλύτερα περί τίνος πρόκειται αποτε-







λεί το πρώτο πρόβλημα της θεωρητικής εξέτασης στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής η οποία διοργανώθηκε στην Πάντοβα, τον Ιούλιο του 1999. Η εκφώνηση του προβλήματος καταλαμβάνει μία ολόκληρη δακτυλογραφημένη σελίδα, αλλά μπορεί να συνοψιστεί στα εξής: Ένας κατακόρυφος κύλινδρος γεμάτος με αέριο και κλεισμένος από πάνω με κινητό γυάλινο έμβολο φωτίζεται από ένα λέιζερ επί πεπερασμένο χρόνο. Καθώς το αέριο απορροφά το φως, διαπιστώνεται ότι το έμβολο κινείται προς τα πάνω. Στη συνέχεια ακολουθεί μια σειρά από ποσοτικές ερωτήσεις αναφορικά με την κατάσταση που διαμορφώνεται, στις οποίες και καλούνται να απαντήσουν οι διαγωνιζόμενοι.

Σε ποιες δυνατές παραδοχές για τη φυσική του εν λόγω προβλήματος θα μπορούσε να προβεί κανείς ώστε να διανοιξει το δρόμο που οδηγεί από την πολυπλοκότητα στην απλότητα; Ας αρχίσουμε με την τριβή μεταξύ του γυάλινου εμβόλου και των τοιχωμάτων του κυλίνδρου. Εάν δεν γνωρίζουμε τίποτε σχετικά με αυτήν, υποθέτουμε ότι επαρκεί για να εξουδετερώσει τις όποιες τριβές ενδέχεται να σημειωθούν, πλην όμως δεν είναι και τόσο μεγάλη ώστε να επιφέρει απώλεια ενέργειας σημαντική σε σχέση με τις τυπικές ενέργειες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα.

Ποιες παραδοχές υιοθετούμε συνήθως όταν λύνουμε προβλήματα αερίων; Κατ' αρχάς, υποθέτουμε ότι το αέριο βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Παρεκτός και δηλωθεί το αντίθετο, υποθέτουμε συνήθως ότι το αέριο είναι ιδανικό και η ποσότητά του σταθερή. Στην προκειμένη περίπτωση, υποθέτουμε ότι δεν υφίσταται διαρροή αερίου από τον κύλινδρο εξαιτίας ατελούς εφαρμογής του εμβόλου σε αυτόν. Οπότε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$PV = nRT,$$

όπου με  $P$  συμβολίζουμε την πίεση, με  $V$  τον όγκο, με  $n$  τον αριθμό των γραμμομορίων του αερίου, με  $T$  την

απόλυτη θερμοκρασία του και με  $R = 8,31 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$  την παγκόσμια σταθερά των αερίων.

Κατόπιν χρειάζεται να αποφασίσουμε κατά πόσον το σύστημα είναι θερμικά μονωμένο, κατά πόσον δηλαδή μπορεί να εισρεύσει ή να εκκρεύσει ενέργεια από τον κύλινδρο. Παλαιότερα έχουμε αντιμετωπίσει προβλήματα και των δύο τύπων, οπότε, αν κάτι τέτοιο δεν δηλώνεται ρητώς, θα πρέπει να το συμπεράνουμε από τα συμφραζόμενα του προβλήματος.

Εάν δεν μας δίνεται καμία πληροφορία για το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας μεταξύ των τοιχωμάτων του κυλίνδρου και του εμβόλου, απλουστεύουμε το πρόβλημα υποθέτοντας πολύ χαμηλή θερμική αγωγιμότητα και/ή ένα πολύ σύντομο χρονικό διάστημα —έτσι ώστε να είναι δυνατόν να αγνοήσουμε τις θερμικές απώλειες. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δόθηκε στους διαγωνιζόμενους ότι τα τοιχώματα του κυλίνδρου και το έμβολο είχαν πολύ χαμηλή θερμική αγωγιμότητα.

Στη λεπτομερή της εκδοχή η εκφώνηση έλεγε ότι ο κύλινδρος ακτινοβολούνταν μέσω του γυάλινου εμβόλου με το φως ενός λέιζερ σταθερής ισχύος επί καθορισμένο χρονικό διάστημα. Η ακτινοβολία διέρχεται μέσω του αέρα και του γυαλιού χωρίς να υφίσταται απορρόφηση, αλλά την απορροφούσε εντελώς το αέριο που περιείχε ο κύλινδρος. Τα μόρια που απορροφούσαν την ακτινοβολία διεγείρονταν σε υψηλότερες ενεργειακές στάθμες και κατόπιν έπεφταν, με διαδοχικά ενδιάμεσα άλματα, στις θεμελιώδεις καταστάσεις τους με παράλληλη εκπομπή υπεριώδους ακτινοβολίας. Η εν λόγω υπεριώδης ακτινοβολία υφίστατο ανάκλαση στα τοιχώματα του κυλίνδρου και στο γυάλινο έμβολο και κατευθυνόταν πάλι προς το εσωτερικό του κυλίνδρου, όπου τελικώς απορροφήθηκε από τα υπόλοιπα μόρια.

Τι έλεγαν οι πληροφορίες αυτές στους διαγωνιζόμενους; Το εξής απλό. Ανεξαρτήτως των λεπτομερειών, το αέριο θερμαινόταν με σταθερό ρυθμό, με αποτέλεσμα να αυξάνεται

η μέση κινητική ενέργεια που οφείλεται στη χαστική κίνηση των μορίων.

Συχνά τα δεδομένα παρέχουν πρόσθετες υποδείξεις ως προς την ακολουθητέα οδό για την απλούστευση του προβλήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, δόθηκαν στους διαγωνιζόμενους οι εξής τιμές:

Ατμοσφαιρική πίεση:  $P_0 = 103,1 \text{ kN}/\text{m}^2$   
Θερμοκρασία δωματίου:  $T_0 = 20^\circ\text{C}$

Εσωτερική διάμετρος του κυλίνδρου:  
 $2r = 100 \text{ mm}$

Μάζα του γυάλινου εμβόλου:  
 $m = 800 \text{ g}$

Ποσότητα του αερίου:  $n = 0,001 \text{ mol}$   
Μοριακή θερμότητα (ή γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα) υπό σταθερό όγκο:  $c_v = 20,8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Μήκος κύματος του λέιζερ:  $\lambda = 514 \text{ nm}$   
Χρόνος ακτινοβολίας:  $\Delta t = 10,0 \text{ s}$

Μετατόπιση του γυάλινου εμβόλου:  
 $\Delta s = 30,0 \text{ mm}$

Παρότι η αρχική θερμοκρασία του αερίου δεν περιέχεται στον πίνακα δεδομένων, η εκφώνηση δήλωνε ότι το αέριο αρχικά βρισκόταν σε ισορροπία με το περιβάλλον του. Συνεπώς, η αρχική θερμοκρασία του αερίου συμπίπτει με τη θερμοκρασία του δωματίου.

Επίσης, δεν δίνεται η πίεση του αερίου. Ωστόσο, προβλήματα με έμβολα έχουμε λύσει και παλαιότερα. Επειδή το γυάλινο έμβολο ισορροπεί, η δύναμη που ασκείται στην κάτω επιφάνειά του πρέπει να υπερβαίνει εκείνη που ασκείται στην πάνω κατά το βάρος  $mg$  της γυάλινης πλάκας. Πέραν τούτου, το ίδιο πρέπει να ισχύει και μετά τη θέρμανση του αερίου. Δηλαδή, η αρχική και η τελική πίεση συμπίπτουν.

Μας μένει ένα ακόμη πρόβλημα, που το έχουμε λύσει σε απλούστερα γενικά πλαίσια. Πόση είναι η αύξηση της θερμοκρασίας ενός αερίου που διατηρείται υπό σταθερή πίεση όταν ο όγκος του παρουσιάζει δεδομένη αύξηση; Το κλειδί του συγκεκριμένου προβλήματος είναι το ότι πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το αρχικό ύψος του εμβόλου.

Σημειωτέον ότι δεν δίνεται η ισχύς του λέιζερ. Συνεπώς, μας χρειάζεται μια σχέση ανάμεσα στις ιδι-



ότητες του αερίου και την ενέργεια που προστίθεται σ' αυτό. Την εν λόγω σχέση μάς την παρέχει ο Πρώτος Νόμος της θερμοδυναμικής,

$$\Delta U = Q - W,$$

όπου με  $U$  συμβολίζεται η εσωτερική ενέργεια του αερίου, με  $Q$  η προσφερόμενη θερμότητα και με  $W$  το έργο που παράγει το αέριο. Για να προσδιορίσουμε τη θερμότητα  $Q$  από αυτό το νόμο, πρέπει να γνωρίζουμε τις άλλες δύο ποσότητες. Και ναι μεν ο υπολογισμός του έργου δεν παρουσιάζει την παραμικρή δυσκολία, αλλά πώς να βρούμε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος; Μια ματιά στα δεδομένα μάς προσφέρει την κατάλληλη υπόδειξη. Εφόσον μάς δίνεται η μοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο, μπορούμε να θυμηθούμε ότι

$$\Delta U = nc_v(T_f - T_0).$$

Επίσης, όταν μας τίθεται το ερώτημα πόσα φωτόνια εκπέμπει το λέιζερ ανά δευτερόλεπτο, πρέπει να σκεφτούμε ότι η δέσμη του λέιζερ αποτελείται από φωτόνια ενέργειας  $h\nu$ , ελπίζοντας ότι η δέσμη είναι μονοχρωματική. Και μάς δίνεται ότι όντως είναι.

Στο παρόν πρόβλημα, η απορρόφηση φωτεινής ενέργειας οδηγεί σε μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του γυάλινου εμβόλου. Πόσο αποδοτική είναι η συγκεκριμένη διεργασία; Η λέξη «αποδοτική» μάς φέρνει στο νου τον ορισμό του συντελεστή απόδοσης,

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

όπου με  $W$  συμβολίζουμε το μέρος εκείνο του έργου που καταναλώθηκε για να αυξηθεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια του εμβόλου και με  $Q$  την ενέργεια που παρέσχε το λέιζερ.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη διαδικασία όπου ένα αέριο απορροφά φως, από την πλευρά μας απαιτούνται πολυάριθμες παραδοχές. Από τη στιγμή, όμως, που θα λύσουμε το απλουστευμένο πρόβλημα, μπορούμε πια να επιτρέψουμε στην πολυπλοκότητα να εισφρήσει εκ νέ-

ου, έτσι ώστε να επιτύχουμε μια περισσότερο εκλεπτυσμένη κατανόηση του θέματος.

Ως πρόβλημα για το παρόν τεύχος θα θεωρήσουμε τα ποσοτικά ερωτήματα του προβλήματος της Διεθνούς Ολυμπιάδας Φυσικής που αναλύσαμε παραπάνω.

Α. Ποια είναι η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου μετά την ακτινοβολήση;

Β. Πόσο μηχανικό έργο παράγει το αέριο; (Υπόδειξη: μην ξεχάσετε την εξωτερική πίεση.)

Γ. Πόση ακτινοβολούμενη ενέργεια απορρόφησε το αέριο;

Δ. Πόση ισχύ έχει το λέιζερ και πόσα φωτόνια εκπέμπει ανά δευτερόλεπτο;

Ε. Ποιος ήταν ο συντελεστής απόδοσης για την μετατροπή της φωτεινής ενέργειας σε βαρυτική δυναμική ενέργεια του γυάλινου εμβόλου;

ΣΤ. Αν μετά την ακτινοβολήση ο κύλινδρος στραφεί βραδέως κατά  $90^\circ$  έτσι ώστε ο άξονάς του να προσανατολιστεί οριζόντια, θα μεταβληθεί η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου; Αν ναι, ποιες είναι οι νέες τιμές της πίεσης και της θερμοκρασίας; (Σε ποιες απλουστεύσεις πρέπει να προβείτε; Πρόκειται για αδιαβατική διεργασία;)

## Το 'χουν τα μάτια

Α. Αν δεχτούμε ότι ο απλός φακός αποτελεί ένα έστω χονδροειδές μοντέλο ανθρώπινου ματιού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των (λεπτών) φακών

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_o} + \frac{1}{D_e},$$

για να βρούμε τις εστιακές αποστάσεις που απαιτούνται για την όραση κοντινών και απομακρυσμένων αντικειμένων. Εισάγοντας τις τιμές  $D_e = 2,50$  cm και  $D_o = 20$  cm, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα  $f = 2,22$  cm. Ομοίως, χρησιμοποιώντας τις τιμές  $D_e = 2,50$  cm και  $D_o = 2.000$  cm, παίρνουμε  $f = 2,50$  cm.

Ωστόσο, το μάτι δεν είναι απλός φακός, καθότι οι ακτίνες που εισέρχονται από τον αέρα στο σύστημα κερατοειδή χιτώνα-φακού δεν επι-

στρέφουν στον αέρα. Ας χρησιμοποιήσουμε λοιπόν την εξίσωση που εξαγάγαμε στην ανάλυση η οποία συνόδευε το πρόβλημα για την περίπτωση όπου έχουμε μόνο μία διαθλαστική επιφάνεια:

$$\frac{n_1}{D_o} + \frac{n_2}{D_e} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Εφόσον  $f = D_e$  όταν  $D_o \rightarrow \infty$ , το δεξιό μέλος της εξίσωσης πρέπει να ισούται με  $n_2/f$ . Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{n_1}{D_o} + \frac{n_2}{D_e} = \frac{n_2}{f}$$

ή

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1/n_2}{D_o} + \frac{1}{D_e}.$$

Δεδομένου ότι  $n_2 = 1,376$  και  $n_1 = 1,000$ , αν εισαγάγουμε τις τιμές  $D_e = 2,50$  cm και  $D_o = 20$  cm, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα  $f = 2,29$  cm. Αν αντί των προηγούμενων χρησιμοποιήσουμε τις τιμές  $D_e = 2,50$  cm και  $D_o = 2.000$  cm, παίρνουμε  $f = 2,50$  cm.

Β. Εάν το ανθρώπινο μάτι προσαρμοζόταν στις αποστάσεις του αντικειμένου με την μετακίνηση του φακού και τη μεταβολή της απόστασης του ειδώλου, τότε, θεωρώντας δεδομένη και σταθερή την τιμή 2,50 cm για την εστιακή απόσταση και χρησιμοποιώντας τον απλό τύπο των φακών, θα καταλήγαμε στα ακόλουθα αποτελέσματα: το  $D_o = 20$  cm δίνει  $D_e = 2,86$  cm, και το  $D_o = 2.000$  cm δίνει  $D_e = 2,50$  cm. Συνεπώς, το εύρος της κίνησης του φακού θα ανερχόταν στα 0,36 cm.

Γ. Η μόνη διαφορά στο είδωλο που θα παρατηρήσουμε όταν καλύψουμε το άνω ήμισυ του φακού θα είναι η χαμηλότερή του ένταση. Η ελάττωση της έντασης του ειδώλου (ή της φωτεινότητας του ειδώλου, όπως λέγεται στη φωτομετρία) οφείλεται στο γεγονός ότι ένα μέρος από το φως που συνέκλινε στο είδωλο προτού καλύψουμε κατά το ήμισυ το φακό εμποδίζεται πλέον να φτάσει εκεί. Μια εκτενής έρευνα της κοινής γνώμης έδειξε ότι πολλές

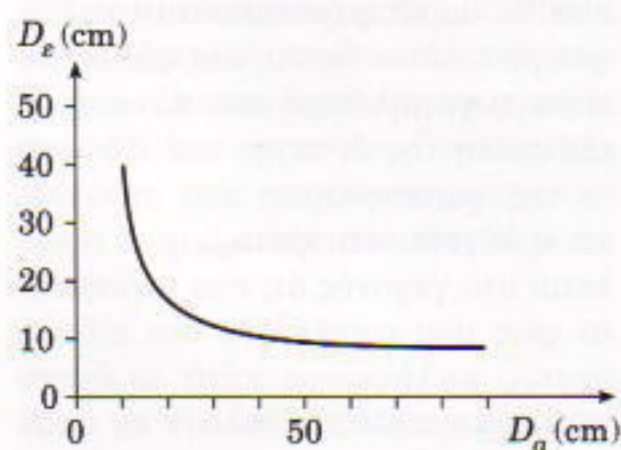


φορές ανακλύπει μια συγκεκριμένη παρανόηση: ορισμένοι πιστεύουν ότι οι δύο ή τρεις ακτίνες που σχεδιάζονται στα διαγράμματα για τη γραφική εύρεση των ειδώλων είναι και οι μοναδικές ακτίνες που συμμετέχουν στο σχηματισμό του ειδώλου. Ίσως έτσι εξηγείται γιατί οι άνθρωποι δεν αντιλαμβάνονται πως η κάλυψη του φακού κατά το ήμισυ δεν θα οδηγήσει στο σχηματισμό του «μισού ειδώλου».

Ομοίως, το μέγεθος του αντικειμένου ουδόλως επηρεάζει την πληρότητα του ειδώλου. Και στην περίπτωση αυτή ο σπουδαστής ενδέχεται να υποθέσει ότι αν δεν μπορέσει να συναντήσει το φακό η ακτίνα που αποφασίζουμε να χαράξουμε από την κορυφή του αντικειμένου παράλληλα προς τον κύριο άξονα, μέρος του ειδώλου μπορεί να εξαφανιστεί. Πραγματικά αξίζει τον κόπο να πραγματοποιήσει κανείς μερικά πειράματα για να διαπιστώσει πώς επιδρούν στα είδωλα οι αλλαγές στο σχήμα του φακού ή στο μέγεθος του αντικειμένου.

Δ. Βάσει των δεδομένων του προβλήματος και του απλού τύπου των φακών, μπορείτε να προσδιορίσετε την εστιακή απόσταση για κάθε ζεύγος μετρήσεων. Έτσι θα καταλήξετε στη μέση τιμή των 7,99 cm.

Ο τύπος των φακών μπορεί να εξαχθεί με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της  $D_e$  συναρτήσεως της  $D_a$  που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Αναγνωρίζουμε αμέσως την καμπύλη του σχήματος ως μια υπερβολή η οποία έχει μετατοπιστεί κατά  $y = f$  και κατά  $x = f$ . Διαπιστώνουμε επίσης ότι στη γενική εξίσωση της υπερβολής,  $xy = C$ , η σταθερά  $C$



Σχήμα 1

φαίνεται να λαμβάνει την τιμή  $f^2$ . Αν υποθέσουμε ότι αυτό αληθεύει, παίρνουμε τη νευτώνεια μορφή του τύπου των φακών:

$$(D_a - f)(D_e - f) = f^2.$$

Η σχέση αυτή μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί ώστε να λάβουμε τη ζητούμενη:

$$D_a D_e - f(D_e + D_a) = 0,$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D_e}.$$

Ε. Για να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένας παχύς φακός ώστε να μην παρουσιάζει χρωματική εκτροπή για δύο διαφορετικά χρώματα, απαιτούμε ο φακός να έχει τις ίδιες εστιακές αποστάσεις για τους δύο αντίστοιχους δείκτες διάθλασης:

$$(n_1 - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{(n_1 - 1)d}{n_1 R_1 R_2} \right] =$$

$$(n_2 - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{(n_2 - 1)d}{n_2 R_1 R_2} \right].$$

Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με  $R_1 R_2 n_1 n_2$  και κάνοντας τους κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, καταλήγουμε στην

$$n_1(n_1 n_2 R_2 - n_1 n_2 R_1 - n_1 n_2 d + d) =$$

$$n_2(n_1 n_2 R_2 - n_1 n_2 R_1 - n_1 n_2 d + d).$$

Εφόσον  $n_1 \neq n_2$ ,

$$n_1 n_2 R_2 - n_1 n_2 R_1 - n_1 n_2 d + d = 0$$

και

$$d = \frac{n_1 n_2 (R_2 - R_1)}{n_1 n_2 - 1}.$$

Παρατηρήστε ότι η λύση δεν εξαρτάται από τη διαφορά των δεικτών διάθλασης (διασπορά)  $n_1 - n_2$ , αλλά μόνο από το γινόμενο  $n_1 n_2$ . Εφόσον οι δείκτες διάθλασης είναι μεγαλύτεροι της μονάδας και το πάχος του φακού θετικό, συμπεραίνουμε ότι

$$R_2 - R_1 > 0.$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τους πρακτικούς περιορισμούς, καταλήγουμε στις εξής διαπιστώσεις για τη λύση μας:

Πρώτον, ο φακός δεν μπορεί να είναι επιπεδόκυρτος ή επιπεδόκοιλος, διότι αυτοί οι φακοί έχουν άπειρη ακτίνα καμπυλότητας, οπότε, βάσει του τύπου μας, θα απαιτούσαν άπειρο πάχος.

Δεύτερον, ένας αμφίκυρτος (αποκλίνων φακός) αντιπροσωπεύει μια δυνατή λύση εάν η  $R_1$  είναι θετική και η  $R_2$  θετική.

Τρίτον, ένας συγκλίνων φακός επίσης αποτελεί δυνατή λύση αφού ικανοποιεί είτε την ανισότητα  $R_2 > R_1$  είτε την  $R_2 < R_1$ . Ωστόσο, αποκλείεται η περίπτωση του συμμετρικού συγκλίνοντος φακού ( $R_2 = R_1$ ).



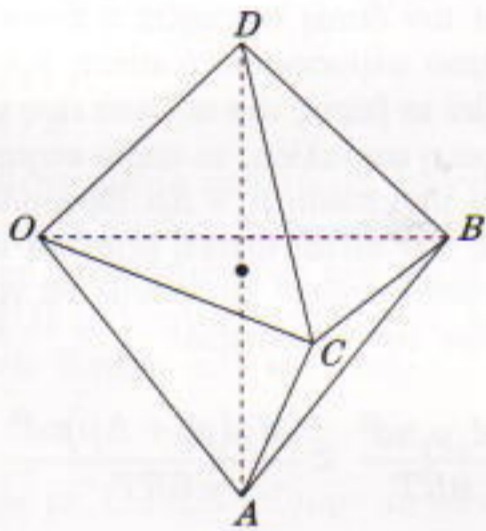


# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

M171

Έστω ότι όλες οι ακμές της πυραμίδας  $ABCD$ , εκτός της  $AD$ , έχουν μήκος 1. Έστω  $O$  το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας της πυραμίδας. Όλες οι ακμές των πυραμι-



Σχήμα 1

δων  $ABCO$  και  $BCDO$  έχουν μήκος 1, δηλαδή καθεμιά τους είναι κανονικό τετραέδρου με μοναδιαία ακμή. Η ακμή  $AD$  ισούται με το διπλάσιο του ύψους του μοναδιαίου κανονικού τετραέδρου και, επομένως, έχει μήκος  $2\sqrt{6}/3$ .

M172

Έστω ότι κάθε κλάσμα ισούται με  $t$ . Έχουμε  $x - 1 = t(xy - 3)$ ,  $y - 2 = t(xy - 4)$  και  $3 - x - y = t(7 - x^2 - y^2)$ . Αν προσθέσουμε αυτές τις εξισώσεις, παίρνουμε  $0 = t(x - y)^2$ . Επομένως, είτε  $t = 0$  είτε  $x = y$ . Η συνέχεια είναι πλέον προφανής. Το σύστημα έχει δύο λύσεις: (1, 2) και (-1, -1).

M173

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση  $|\epsilon\phi x| < 1$ . Αφού το αριστερό μέλος ισούται είτε με  $\pm 2\epsilon\phi x$  είτε με  $\pm 2\sigma\upsilon\nu 3x$ , είναι, σε αυτή την περι-

πτωση, κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο ή ίσο του 2, ενώ το δεξιό είναι μεγαλύτερο του 2. Επομένως,  $|\epsilon\phi x| \geq 1$  και το αριστερό μέλος ισούται με  $\pm 2\epsilon\phi x$ . Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσής μας ικανοποιούν μία από τις εξισώσεις  $\epsilon\phi^2 x - 3 = \pm 2\epsilon\phi x$ . Άρα,  $\epsilon\phi x = \pm 1$  ή  $\epsilon\phi x = \pm 3$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες οι λύσεις αυτών των εξισώσεων είναι επίσης λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Απάντηση:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

ή

$$\pm \text{τοξ}\epsilon\phi 3 + \pi k \text{ (όπου } k \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

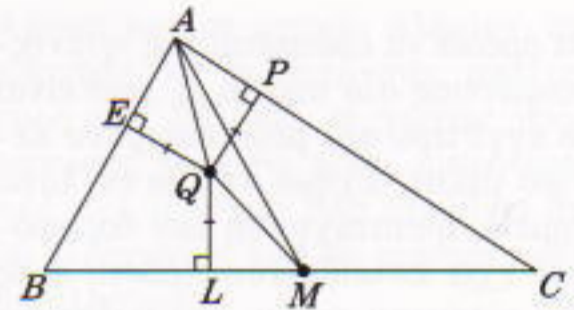
M174

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο αριθμούς επί  $2^{49}5^{21}$ . Θα πάρουμε τους  $29^{200}2^{200}5^{21}$  και  $3^{300}5^{300}2^{49}$ . Βρίσκουμε εύκολα ότι  $5^3 < 2^7$  (αφού  $125 < 128$ ) και  $(29 \cdot 2)^2 < (3 \cdot 5)^3$  (αφού  $3364 < 3375$ ). Επομένως,  $5^{21} < 2^{49}$  και  $29^{200}2^{200} < 3^{300}5^{300}$ .

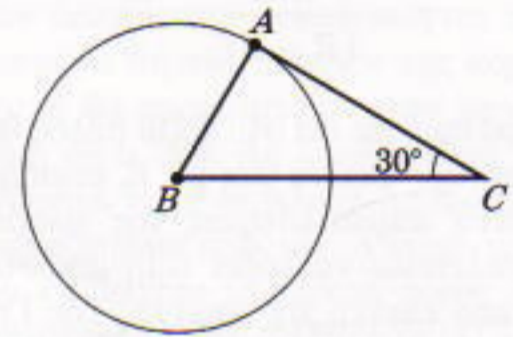
Αν πολλαπλασιάσουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη, βρίσκουμε  $29^{200}2^{200}5^{21} < 3^{300}5^{300}2^{49}$ . Επομένως,  $29^{200}2^{151} < 5^{279}3^{300}$ .

M175

Το σημείο  $Q$  είναι κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο δεδομένο τρίγωνο. Υποθέτουμε ότι το  $Q$  βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου  $ABM$  (Σχήμα 2). Συμβολίζουμε με  $P$ ,  $L$  και  $E$  τα σημεία επαφής αυτού του κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου (όπως φαίνονται στο Σχήμα 2). Τα τρίγωνα  $APQ$ ,  $MLQ$  και  $AEQ$  είναι ίσα ορθογώνια τρίγωνα (έχουν ίσες υποτεινουσες και μία κάθετη πλευρά). Συνεπώς,  $\angle QAP = \angle QML$ . Το τετράπλευρο  $ACMQ$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο, διότι  $\angle QAP = \angle QML$ . Αν  $\angle AQM = \gamma$ , τό-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

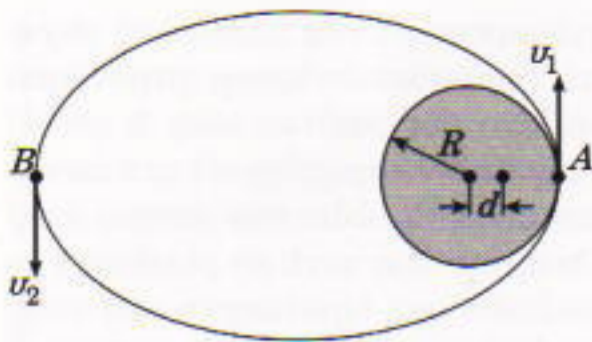
τε  $\angle ACM = 180^\circ - \gamma$ . Επομένως, η  $\angle AQM$  έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή όταν η  $\angle ACM$  έχει τη μέγιστη. Επιπλέον,  $BA = BE + EA = BL + LM = BM$ . Άρα,  $BC = 2BA$ . Συνεπώς καταλήγουμε στο εξής πρόβλημα: βρείτε τη μέγιστη τιμή της γωνίας  $BCA$  αν  $BC = 2BA$ . Εάν θεωρήσουμε τα σημεία  $B$  και  $C$  σταθερά, το σημείο  $A$  πρέπει να ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $B$  και ακτίνα ίση με το ήμισυ της  $BC$  (Σχήμα 3). Η μέγιστη τιμή της γωνίας  $BCA$  επιτυγχάνεται στο σημείο  $A_0$  για το οποίο η  $CA_0$  είναι εφαπτόμενη αυτού του κύκλου ( $\angle BA_0C = 90^\circ$ ). Γι' αυτό το τρίγωνο έχουμε  $\angle BCA_0 = 30^\circ$ . Επομένως, η ελάχιστη τιμή της γωνίας  $AQM$  είναι  $150^\circ$ .

## Φυσική

Φ171

Ας επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε την τροχιά του δορυφόρου που αντιστοιχεί στην ελάχιστη περίοδο περιφοράς. Μια τέτοια τροχιά





Σχήμα 4

θα πρέπει να εφάπτεται της «γήινης» επιφάνειας στο σημείο A, που είναι το εγγύτερο στο μετατοπισμένο κέντρο μάζας (Σχήμα 4). Στο εν λόγω σημείο, η επιτάχυνση του δορυφόρου έχει κατεύθυνση κάθετη προς την ταχύτητά του  $v_1$  και καθορίζεται από τη βαρυτική έλξη της «Γης»:

$$Y = \frac{GM}{(R-d)^2} = \frac{v_1^2}{R}$$

Παρατηρήστε ότι στο δεξιό μέλος θέσαμε την ακτίνα ίση με  $R$ , επειδή η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς αποκλείεται να λάβει τιμή μικρότερη από εκείνη της ακτίνας της Γης. Από αυτή την εξίσωση λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη δυνατή τιμή της ταχύτητας στο σημείο A:

$$v_1 = \frac{\sqrt{GMR}}{R-d}$$

Ας εξετάσουμε τώρα και το απώτερο σημείο της τροχιάς, το B. Εάν συμβολίσουμε με  $x$  το ύψος του δορυφόρου πάνω από την επιφάνεια της Γης, τότε, όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο B, η απόστασή του από το κέντρο μάζας θα ισούται με  $R + d + x$ . Για να προσδιορίσουμε τη σχέση που συνδέει τις ταχύτητες στο εγγύτερο και στο απώτερο σημείο της τροχιάς, στηριζόμαστε στο νόμο διατήρησης της στροφορμής (δηλαδή, στον δεύτερο νόμο του Kepler)

$$mv_2(R+d+x) = mv_1(R-d),$$

και στο νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$-\frac{GMm}{R-d} + \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{GMm}{R+d+x} + \frac{mv_2^2}{2}$$

(Προσέξτε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια για την αλληλεπίδραση δορυφόρου και Γης λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο, και εδώ δεν υπάρχει τίποτε το «τεχνητό»!)

Εάν στις δύο τελευταίες εξισώσεις εισαγάγουμε την τιμή της  $v_1$  την οποία βρήκαμε προηγουμένως και απαλείψουμε τη  $v_2$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε το ύψος  $x$  του δορυφόρου:

$$x = \frac{2d^2}{R-2d} \cong 3.200 \text{ m.}$$

Πρόκειται για ένα πάρα πολύ μικρό ύψος. Κατά συνέπεια, το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς ισούται πρακτικά με την ακτίνα  $R$  της Γης.

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η περίοδος περιφοράς  $T_1$  είναι περίπου ίση με  $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g} \cong 5.060 \text{ s}$  (πρόκειται για την περίοδο μιας κυκλικής τροχιάς γύρω από τη Γη με ακτίνα  $R$ ). Ο ακριβής λόγος των δύο αυτών περιόδων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Kepler:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{R+x/2}{R}\right)^{3/2} \cong 1,0004.$$

Σημείωση: Το Σχήμα 4 δείχνει μια πολύ επιμηκυσμένη έλλειψη, αλλά οι υπολογισμοί μας έδειξαν ότι η τροχιά θα έπρεπε να είχε σχεδιαστεί σχεδόν κυκλική.

### Φ172

Πέραν της ατμοσφαιρικής πίεσης, στο άζωτο που περιέχεται στη φουσαλίδα ασκείται και η πίεση που οφείλεται στην επιφανειακή τάση,  $\Delta p = 8a/d$ , όπου  $d$  η διάμετρος της φουσαλίδας. Ο απλούστερος τρόπος εξαγωγής αυτού του τύπου συνίσταται στο να «κόψουμε» τη φουσαλίδα σε δύο ίσα μέρη με ένα νοητό επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Ας εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να υφίσταται ισορροπία μεταξύ των δύο ημισφαιρίων. Εάν θεωρήσουμε την επιπρόσθετη πίεση στο εσωτερικό της φουσαλίδας ίση με  $\Delta p$ , τα δύο ημισφαίρια απωθούνται απ' αλλήλων

με δύναμη ίση προς  $\Delta p \pi d^2/4$ . Από την άλλη όμως, λόγω της επιφανειακής τάσης του υμενίου, έλκονται με μια δύναμη η οποία εφαρμόζεται στην περιφέρεια του κύκλου κατά τον οποίον τέμνει το επίπεδο τη σφαίρα, η οποία έχει μήκος  $\pi d$ . Η δύναμη λόγω της επιφανειακής τάσης ισούται με  $2\pi d$  (η εμφάνιση του συντελεστή 2 συνδέεται με το γεγονός ότι το υμένιο έχει δύο όψεις, την εσωτερική και την εξωτερική). Εάν εξισώσουμε τις δύο δυνάμεις, βρίσκουμε αμέσως την τιμή της επιπρόσθετης πίεσης στο εσωτερικό της φουσαλίδας.

Η φουσαλίδα θα «πλέει» όταν η άνωση (που ισούται με το βάρος του αέρα τον οποίο εκτοπίζει η φουσαλίδα υπό ατμοσφαιρική πίεση  $p_0$ ) υπερβεί το βάρος του αζώτου που περιέχει η φουσαλίδα, το οποίο συμπέζεται υπό πίεση  $p_0 + \Delta p$ . Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, μπορούμε να γράψουμε την ανισότητα

$$\frac{M_a p_0 \pi d^3}{6RT} \geq \frac{M_N (p_0 + \Delta p) \pi d^3}{6RT},$$

η οποία δίνει

$$d \geq \frac{8aM_N}{p_0(M_a - M_N)} \cong 10^{-4} \text{ m.}$$

### Φ173

Ο πυκνωτής τύπου σάντουιτς ισοδυναμεί με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά. Συμβολίζουμε τα ηλεκτρικά πεδία στους δύο αυτούς πυκνωτές με  $E_1$  και  $E_2$ , τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου με  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  και τις τάσεις στα άκρα τους με  $V_1$  και  $V_2$ , αντίστοιχα. Δεδομένου ότι τα φορτία στις δύο επιφάνειες της μεσαίας πλάκας είναι ετερόνυμα, το ολικό της φορτίο ισούται με

$$q = (\sigma_2 - \sigma_1)S.$$

Όταν η κατανομή φορτίου γίνει πλέον μόνιμη, επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της ηλεκτροστατικής. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \kappa_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \kappa_2},$$



$$V_1 = E_1 d_1, \quad V_2 = E_2 d_2, \quad V_1 + V_2 = V.$$

Από την άλλη όμως, εφόσον το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα, οι πυκνωτές είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως αγωγοί με αντιστάσεις  $R_1 = \rho_1 d_1 / S$  και  $R_2 = \rho_2 d_2 / S$ , αντίστοιχα. Εν τωιαύτη περίπτωση, σύμφωνα με το νόμο του Ohm ισχύουν οι εξισώσεις

$$V_1 = I \frac{\rho_1 d_1}{S}, \quad V_2 = I \frac{\rho_2 d_2}{S}.$$

Έτσι, καταστρώσαμε ένα σύστημα οκτώ συναληθευουσών εξισώσεων με οκτώ αγνώστους. Λύνοντάς το, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$q = \frac{\kappa_2 \rho_2 - \kappa_1 \rho_1}{d_2 \rho_2 + d_1 \rho_1} \varepsilon_0 V S.$$

### Φ174

Στην πρώτη περίπτωση, μαγνητικό πεδίο παράγει μόνο το πηνίο που είναι συνδεδεμένο με την πηγή τάσης. Η μαγνητική ροή στο εν λόγω πηνίο δίνεται από τον τύπο

$$\Phi_1 = LI_1,$$

όπου με  $L$  συμβολίζουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου και με  $I_1$  την ένταση του ρεύματος που το διαρρέει. Προφανώς, η μαγνητική ροή στο τρίτο πηνίο είναι επίσης ανάλογη του ρεύματος  $I_1$ , δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\Phi_3 = MI_1,$$

όπου το  $M$  δηλώνει το συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων. Ο λόγος των τάσεων στα δύο πηνία ισούται με

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{M}{L} = \frac{1}{2},$$

(ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο).

Στη δεύτερη περίπτωση, αμφότερα τα πηνία διαρρέονται από ρεύμα: και το πρωτεύον (εκείνο που είναι συνδεδεμένο με την πηγή τάσης) και το βραχυκυκλωμένο. Αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις, μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις:

$$\Phi_1' = LI_1' + MI_2', \\ \Phi_3' = MI_1' + MI_2',$$

$$\Phi_2' = MI_1' + LI_2' = 0,$$

οπότε

$$I_2' = -I_1' \frac{M}{L}$$

και

$$\frac{V_3'}{V_1'} = \frac{\Phi_3'}{\Phi_1'} = \frac{MI_1' + MI_2'}{LI_1' + MI_2'} =$$

$$\frac{M - M^2/L}{L - M^2/L} = \frac{M}{L} \frac{1 - M/L}{1 - M^2/L^2} =$$

$$\frac{M}{L} \frac{1}{1 + M/L} = \frac{1}{3}.$$

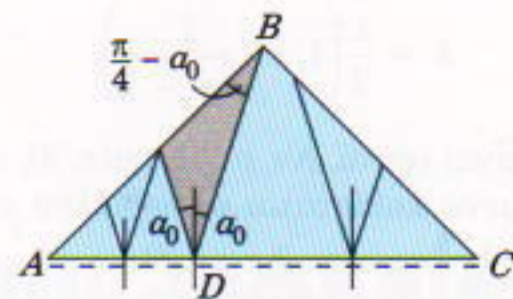
Συνεπώς, σ' αυτή την περίπτωση το βολτόμετρο θα δείχνει το ένα τρίτο της τάσης της πηγής.

### Φ175

Το αντικείμενο που πρόκειται να παρατηρήσουμε βρίσκεται κάτω από το σύνορο των δύο οπτικών μέσων, του γυαλιού και του αέρα. Θα διαπράτταμε σφάλμα εάν θεωρούσαμε την εφημερίδα ως ένα αντικείμενο «βυθισμένο» στο γυαλί. Εάν όντως έτσι είχαν τα πράγματα, η εφημερίδα θα μπορούσε να παρατηρηθεί για όλες τις τιμές του δείκτη διάθλασης, διότι οι ακτίνες θα εκπέμπονταν στο γυαλί προς όλες τις κατευθύνσεις, οπότε κάποιο μέρος τους θα εξερχόταν από το πρίσμα περνώντας από τη διαφανή παράπλευρη έδρα χωρίς να παγιδευτεί λόγω ολικής εσωτερικής ανάκλασης.

Φυσικά, οι ακτίνες που εκπέμπονται από το αντικείμενο κάτω από το γυαλί επίσης διαδίδονται προς κάθε κατεύθυνση, πλην όμως διασχίζουν τη διαχωριστική επιφάνεια αέρα/γυαλιού και διαθλώνται. Οι ακτίνες που εισέρχονται στο πρίσμα από ένα σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας σχηματίζουν μια κωνική δέσμη με άξονα συμμετρίας την κάθετο που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο και γωνία κορυφής που δίνεται από την έκφραση  $2\alpha_0 = 2 \text{τοξ}\eta\mu(1/n)$ . Έτσι, κάποιες από τις ακτίνες ενδέχεται να μη φτάσουν ως την έδρα  $BC$  (βλ. Σχήμα 5).

Εάν  $\alpha_0 > \pi/4$  ή, ισοδύναμα,  $n < 1/\eta\mu(\pi/4) = \sqrt{2}$ , τότε μπορούμε να δούμε όλο το κείμενο μέσω της  $BC$ .



Σχήμα 5

Ακόμη και τα σημεία πλησίον της κορυφής  $A$  θα στέλνουν ακτίνες προς την  $BC$ , και οι γωνίες πρόσπτωσης τους θα είναι μικρότερες από  $\pi/4$  (πράγμα που σημαίνει ότι θα εξέρχονται από το πρίσμα αφού διαθλαστούν).

Για υψηλότερες τιμές του  $n$  (και, κατά συνέπεια, για μικρότερες τιμές της  $\alpha_0$ ), όλες οι ακτίνες των κωνικών δεσμών που εκπέμπονται από ορισμένα σημεία πλησίον της κορυφής  $A$  θα προσπίπτουν στην παγωμένη έδρα  $AB$ . Ας υποθέσουμε ότι ανάμεσά τους το πλέον απομακρυσμένο σημείο από την  $A$  είναι το  $D$ . Για να βρούμε το αόρατο μέρος  $AD$ , παρατηρούμε ότι  $\angle ABD = (\pi/4) - \alpha_0$ , και εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο  $ABD$ : έτσι, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το ορατό κλάσμα του κειμένου,  $k = DC/AC$ :

$$\frac{1 - k}{\eta\mu(\pi/4 - \alpha_0)} = \frac{1/\sqrt{2}}{\eta\mu(\pi/2 + \alpha_0)},$$

$$k = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon\phi\alpha_0) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right).$$

Ωστόσο, προκειμένου μερικές τουλάχιστον από τις ακτίνες που προσπίπτουν στην έδρα  $BC$  να κατορθώσουν να τη διαπεράσουν, η ελάχιστη γωνία πρόσπτωσης στη συγκεκριμένη έδρα, η οποία ισούται με  $(\pi/4) - \alpha_0$ , πρέπει να είναι μικρότερη από την  $\alpha_0$ , ή, ισοδύναμα, να ισχύουν οι ανισότητες  $\alpha_0 > \pi/8$  και  $n < 1/\eta\mu(\pi/8) \approx 2,61$ . Για την οριακή τιμή του  $n$ ,

$$k_{\min} = \frac{1}{2} \left( 1 + \varepsilon\phi \frac{\pi}{8} \right) \approx 0,7.$$

Άρα, όλο το κείμενο θα φαίνεται αν έχουμε  $n < \sqrt{2}$ , ενώ για  $\sqrt{2} < n < 1/\eta\mu(\pi/8)$  μόνο ένα ποσοστό  $k$ ,



$$k = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)$$

θα είναι ορατό. Αν  $n > 1/\eta\mu(\pi/8)$ , το κείμενο καθίσταται ολωσδιόλου α-όρατο.

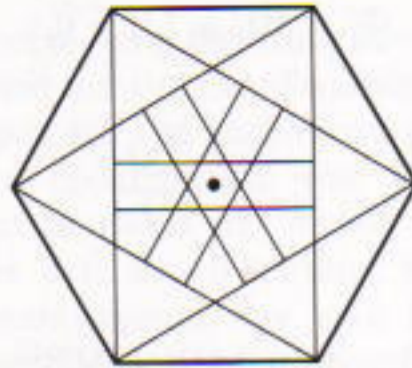
### Σπαζοκεφαλιές

Σ171

Βρίσκουμε εύκολα ότι η οικογένεια θα πει  $6 + 1 = 7$  μπουκάλια γάλατος και θα της απομείνουν 3 άδεια. Μπορεί τότε να δανειστεί 1 άδειο μπουκάλι, να ανταλλάξει τα άδεια με 1 γεμάτο, να το πει, και να επιστρέψει το μπουκάλι που δανείστηκε. Επομένως, η οικογένεια θα πει συνολικά 8 μπουκάλια γάλατος.

Σ172

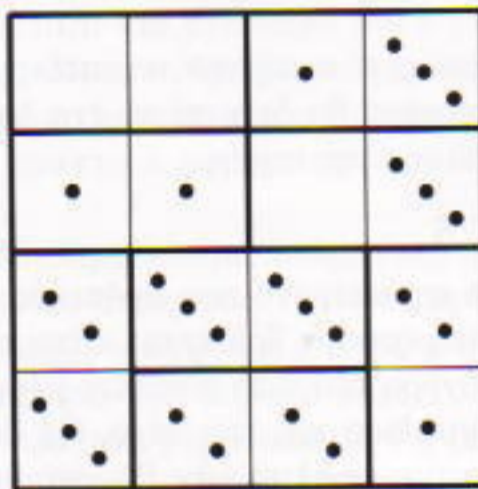
Ναι, είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, ένα κανονικό εξαγώνο καλύπτεται από έξι τετράγωνα με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 6 (η πλευρά κάθε τετραγώνου ισούται με την πλευρά του εξαγώνου).



Σχήμα 6

Σ173

Δείτε το Σχήμα 7.



Σχήμα 7

Σ174

Βεβαίως και είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση μήκους 8.000 και ύψος επ' αυτής μήκους 0,5 έχει εμβαδόν 2.000. Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν ότι και τα υπόλοιπα ύψη αυτού του τριγώνου έχουν μήκος μικρότερο του 1.

Σ175

Το φαινόμενο μέγεθος ενός αντικείμενου δεν εξαρτάται μόνο από το πραγματικό του μέγεθος αλλά και από την απόσταση από τον παρατηρητή (πράγματι, μπορούμε να «σκεπάσουμε» τη σελήνη με το κεφάλι ενός σπύριου). Όλα όσα βλέπετε από το τρένο καλύπτουν, σε σχέση με σας, την ίδια απόσταση στη μονάδα του χρόνου. Όμως, όσο μακρύτερα βρίσκεται το αντικείμενο τόσο μικρότερη φαίνεται αυτή η απόσταση. Επομένως, η φαινόμενη ταχύτητα μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από τον παρατηρητή.



## ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Μάνης 5, 106 81 Αθήνα, Τηλ.: (01) 38 18 372, Fax: 33 01 583

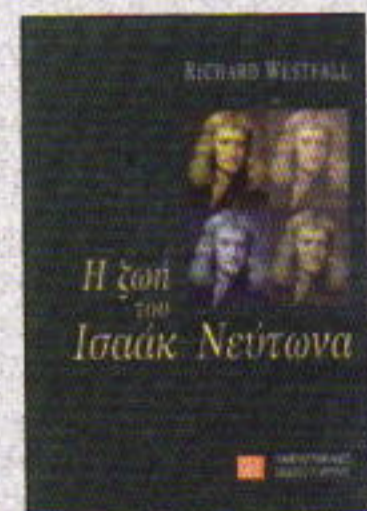
### Νέες εκδόσεις

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ • ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
- ΒΙΟΛΟΓΙΑ • ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΑΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ



Νευροεπιστήμη  
και  
Συμπεριφορά

Ένας Γενετικός  
Διακόπτης  
Φάγος λ και άλλοι  
ανώτεροι οργανισμοί



Η ζωή  
του Ισαάκ  
Νεύτωνα

Στοιχεία  
Διακριτών  
Μαθηματικών



# Ο Landau και οι πινακίδες κυκλοφορίας

Μαθηματικά κατορθώματα ενός μεγάλου φυσικού

M.I. Kaganov

**Ο** LEV D. LANDAU ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΕΤΑΙ γενικώς ως ένας από τους μεγαλύτερους φυσικούς τους 20ού αιώνα. Ανακάλυψε θεμελιώδη αποτελέσματα σε πολλές περιοχές της θεωρητικής φυσικής και υπήρξε ιδρυτής και διευθυντής της σοβιετικής σχολής των θεωρητικών φυσικών. Μαζί με τον E. Lifshitz κατάφεραν ένα πραγματικό επιστημονικό επίτευγμα: δημιούργησαν μια εγκυκλοπαίδεια της θεωρητικής φυσικής —την περίφημη σειρά εγχειριδίων *Course of Theoretical Physics* (Μαθήματα θεωρητικής φυσικής), που ήδη έχει θρέψει πολλές γενιές εκκολαπτόμενων φυσικών. Τα μαθηματικά αποτελούν απαραίτητο εργαλείο για τον θεωρητικό φυσικό. Οι θεωρητικοί φυσικοί είναι αδύνατο να εργαστούν χωρίς καλή γνώση των μαθηματικών. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά επίπεδα ικανότητας.

Η ικανότητα του Landau στα μαθηματικά ήταν καταπληκτική. Αν έχετε την ευκαιρία να διαβάσετε τα βιβλία του ή τα *Μαθήματά* του, θα καταλάβετε με πόση ευκολία ξεπερνούσε τα μαθηματικά προβλήματα —ή ίσως δεν τα αισθανόταν καν σαν προβλήματα...

Στο τέλος της δεκαετίας του 1940, όταν ήμουν φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Χάρκοβο, ο Landau ήταν εξαι-

ρητικά δημοφιλής στους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής. Στη δεκαετία του 1930, ο Landau είχε εργαστεί στο Χάρκοβο δίνοντας διαλέξεις στο Πανεπιστήμιο, και έτσι υπήρχαν αναρίθμητοι θρύλοι (ή γεγονότα) που διαδίδονταν από στόμα σε στόμα. Υπήρχε η ιστορία ότι στη μέση της διάλεξής του ανέφερε πως «το ηλεκτρόνιο είναι μια μικρή κίτρινη μπάλα...», χωρίς ο τόνος της φωνής του να δίνει την παραμικρή ένδειξη ότι έλεγε ασυναρτησίες. Οι φοιτητές σημείωναν επιμελώς τη φράση, και τότε ο Landau ξέσπαγε με εκφράσεις που δεν άφηναν περιθώριο για παρερμηνείες τους έδινε να κα-

ταλάβουν «τι πίστευε γι' αυτούς». Υπάρχουν επί-



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



σης πολλές ιστορίες για τις υπερβολές του κατά τις εξετάσεις.

Ιδιαίτερος δημοφιλείς ήταν οι ιστορίες σχετικά με το μαθηματικό ταλέντο του Landau. Εκείνη την εποχή μελετούσαμε μαθηματικά από ένα βιβλίο με συλλογή προβλημάτων στο οποίο οι φοιτητές είχαν δώσει την προσωυμία *Οι δέκα συγγραφείς*. Εθεωρείτο εξαιρετικά δύσκολο. Στην πραγματικότητα, δεν καταφέραμε πάντα να λύσουμε τα προβλήματα. Υπήρχε λοιπόν ο θρύλος (ή μήπως ήταν αλήθεια;) ότι ο Landau είχε λύσει όλα τα προβλήματα των *Δέκα συγγραφέων* από δύο φορές: μία με κάποιο γνωστό τρόπο και μία με τον καλό!

Και ιδού τι άκουσα από τον δασκαλό μου, τον I.M. Lifshitz —θεωρητικό φυσικό με άριστες γνώσεις μαθηματικών.

Ο Landau πίστευε ότι δεν υπάρχει ανάγκη ειδικής μελέτης της θεωρίας πιθανοτήτων. Αν κατανοούμε το πρόβλημα, μπορούμε πάντοτε να βρούμε την απάντηση με τη βοήθεια της κοινής λογικής και, αν είναι ανάγκη, με το διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό.

Μια φορά ο Lifshitz διαφωνούσε με τον Landau, οπότε του έδωσε ένα δύσκολο πρόβλημα της θεωρίας πιθανοτήτων. Ο Landau δεν κατάφερε να βρει αμέσως και με «το μυστικό» την απάντηση, και αυτό τον ενόχλησε. Το απόγευμα όμως κάλεσε τον Lifshitz κι του παρουσίασε μια πρωτότυπη και σωστή λύση του προβλήματος. Δυστυχώς έχω ξεχάσει το πρόβλημα, θυμάμαι όμως ότι δεν ήταν τετριμμένο.

Ο Landau πίστευε στις μαθηματικές του ικανότητες —και, αναμφίβολα, είχε κάθε λόγο να το κάνει. Μερικές φορές, όμως, η αυτοπεποίθησή του τον οδηγούσε να δίνει υπερβολική αξία στη διαίσθησή του (τουλάχιστον, σε περιπτώσεις όπου το πρόβλημα δεν απαιτούσε σοβαρή σκέψη).

Από όλα τα αριθμητικά παιχνίδια για έναν παίκτη θυμάμαι καλύτερα το παιχνίδι με τις πινακίδες κυκλοφορίας. Η αιτία είναι, χωρίς αμφιβολία, το γεγονός ότι το είχα μάθει από τον ίδιο τον Landau. Σκοπός του

παιχνιδιού είναι να κατασκευάσουμε μια ισότητα από τους τέσσερις αριθμούς μιας πινακίδας κυκλοφορίας. (Οι σοβιετικές πινακίδες έχουν τη μορφή «*AB-CD*» —για παράδειγμα, 12-34.) Ιδού οι κανόνες: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τις αριθμητικές, αλγεβρικές και τριγωνομετρικές πράξεις που μάθατε στο σχολείο. Δεν επιτρέπεται να αλλάξετε τη θέση των ψηφίων, ενώ πρέπει να βρείτε τη λύση με «το μυστικό». Με άλλα λόγια, πρέπει να μετατρέψετε το « $\rightarrow$ » σε « $\Leftarrow$ » εισάγοντας μεταξύ των αριθμών τα σύμβολα που είναι γνωστά σε οποιονδήποτε μαθητή λυκείου (+, -, ×, ÷,  $\sqrt{\quad}$ , log, συν, κ.ο.κ.). Μερικοί αριθμοί είναι εύκολοι —για παράδειγμα, 75-31 ( $7 - 5 = 3 - 1$ ) ή 38-53 ( $\sqrt[3]{8} - 5 = 3$ ). Ιδού ένας άλλος αριθμός που δεν θα μας κουράσει ιδιαίτερα: 27-33 ( $27 = 3^3$ ). Υπάρχουν όμως και δυσκολότεροι αριθμοί —για παράδειγμα, 75-33. Και οι δύο τρόποι λύσης του προβλήματος θα φανούν μυστηριώδεις στον αρχάριο παίκτη:  $7 - 5 = \log_{\sqrt{3}} 3$  ή  $7 - 5 = 3! + 3$ .

Οι φανατικοί παίκτες του εν λόγω παιχνιδιού συχνά διαφωνούσαν σχετικά με το ποιες είναι οι επιτρεπτές πράξεις και ποιες οι απαγορευμένες: το πρόβλημα έγκειτο στο ότι δεν γνώριζαν επακριβώς τα όρια της σχολικής ύλης. Ειδικά διαφωνούσαν για την ορθότητα της χρήσης του παραγοντικού, «!» (το οποίο ήταν βολικό για συγκεκριμένους αριθμούς).

Την εποχή που μου περιέγραψε το παιχνίδι, ο Landau ήταν θαυμάσιος παίκτης. Μπορούσε να βρει την απάντηση σχεδόν μόλις αντίκριζε την πινακίδα, *οποιαδήποτε* πινακίδα.<sup>1</sup> Όμως, υπήρχαν προβλήματα άλυτα —για παράδειγμα, το 75-65. Φυσικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση  $[x]$ , που δίνει το ακέραιο μέρος του  $x$ :  $[7 + 5] = [6 + 5]$ , αυτή όμως η συνάρτηση δεν διδάσκεται στο σχολείο. Εκτός αυτού, αν επιτρεπόταν η συνάρτηση  $[x]$ , το παιχνίδι θα κατέληγε εξαιρετικά βαρετό.

1. Δεν θα συνιστούσαμε να παίξετε το παιχνίδι την ώρα που διασχίζετε το δρόμο ή οδηγείτε αυτοκίνητο.

Ανέκυψε το ζήτημα του «θεωρήματος ύπαρξης». Έθεσα το ερώτημα στον Landau: «Είναι πάντοτε δυνατόν να κατασκευάσουμε μια ισότητα από τους αριθμούς μιας πινακίδας κυκλοφορίας;» «Όχι, βέβαια», απάντησε με έμφαση ο Landau. Εντυπωσιάστηκα. «Επομένως θα έχετε αποδείξει το θεώρημα μη ύπαρξης...». «Όχι», μου απάντησε, «αλλά δεν έχω καταφέρει να λύσω όλες τις πινακίδες κυκλοφορίας!»

Έχοντας λοιπόν προσβληθεί από τη μανία του παιχνιδιού με τις πινακίδες, μετέδωσα την ασθένεια σε όλους τους νεαρούς μαθηματικούς που γνώριζα. Ένας από αυτούς, ο Y. Gandel, πήρε το παιχνίδι πολύ στα σοβαρά και απέδειξε το θεώρημα ύπαρξης! Έδειξε ότι μπορούμε να «εξισώσουμε» οποιοδήποτε ζεύγος ακεραίων με τη βοήθεια συναρτήσεων που διδάσκονται στο λύκειο, διότι υπάρχει ένας τύπος αναγωγής του  $N + 1$  στο  $N$ . Η απόδειξη του εν λόγω αναγωγικού τύπου βασίζεται στην παρατήρηση  $\text{τεμ}^2 x = 1 + \text{εφ}^2 x$  και στην απλή χρήση των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Πράγματι, εύκολα βλέπει κανείς ότι  $\sqrt{N + 1} = \text{τεμτοξεφ} \sqrt{N}$ .

Δυστυχώς, μετά την απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης το παιχνίδι έχασε τη γοητεία του, διότι πλέον ήταν δυνατή η εξίσωση οποιωνδήποτε αριθμών με πολλαπλή εφαρμογή του αναγωγικού τύπου.

Έδειξα την απόδειξη στον Landau. Του άρεσε πολύ και συζητήσαμε (εν μέρει χαριτολογώντας) κατά πόσο άξιζε να δημοσιευτεί σε κάποιο σχετικό επιστημονικό περιοδικό. «Ίσως δεν θα έπρεπε να το διακινδυνεύσουμε», μου είπε. «Οι μαθηματικοί θα προσβληθούν. Είναι ήδη έξαλλοι μαζί μου!»

Ολοκληρώνοντας, θα ήθελα να επισημάνω για μία ακόμη φορά ότι ο Landau πίστευε στις μαθηματικές του ικανότητες, και η αυτοπεποίθησή του τον βοήθησε να λύσει δύσκολα και σημαντικά προβλήματα —πολύ δυσκολότερα από αυτά που εμφανίζονται στο παιχνίδι των πινακίδων κυκλοφορίας, μπορώ να σας διαβεβαιώσω!



## Kip Thorne: ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η προκλητική κληρονομιά του Αϊνστάιν (τόμ. Α' και Β')

«Κανείς δεν έχει περιγράψει καλύτερα απ' ό,τι ο Κip στο παρόν βιβλίο – και, μάλιστα, με περισσότερη σαφήνεια, εγκυρότητα και απλότητα ύφους – τις σημαντικότερες στιγμές στην προσπάθεια των επιστημόνων να αποκρυπτογραφήσουν την πνευματική κληρονομιά του Αϊνστάιν.»

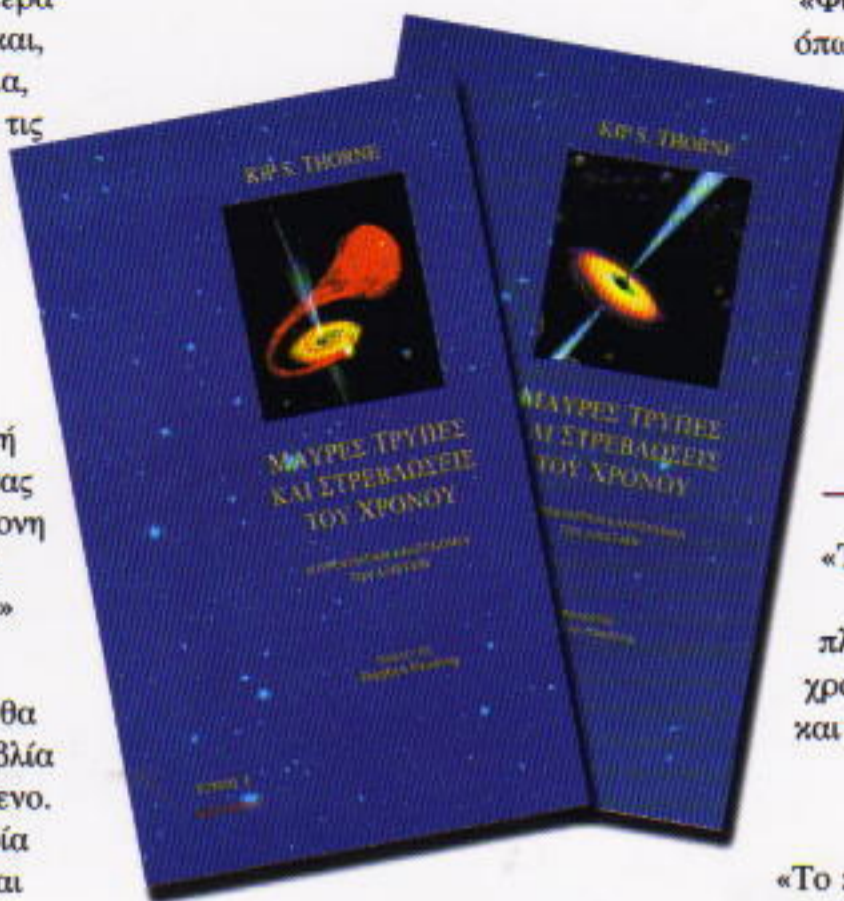
—John Archibald Wheeler

«Μια παραστατική και κατανοητή περιγραφή της γενικής σχετικότητας και των επιδράσεών της στη σύγχρονη κοσμολογία, από έναν απ' τους κορυφαίους ειδικούς στο χώρο...»

—Roger Penrose

«Μοναδικό βιβλίο. Έτσι ακριβώς θα έπρεπε να έχουν γραφτεί όλα τα βιβλία που σχετίζονται με το ίδιο αντικείμενο. Συνδυάζει στοιχεία από την ιστορία της επιστήμης με παραστατικές και επιμελημένες περιγραφές και επεξηγηματικά σχόλια. Τα ανέκδοτα στοιχεία που παραθέτει, ειδικότερα όσα αφορούν τη σοβιετική επιστήμη, είναι εξαιρετικά διαφωτιστικά...»

—Carl Sagan



Κάθε τόμος: 316 σελ., Α/Μ,  
25 x 17 εκ., Πανόδετος, 7.000 δρχ.

Προλογίζει ο Stephen Hawking

ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΒΙΒΛΙΑ  
ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ

«Φωτίζει το επιστημονικό εγχείρημα όπως ελάχιστα βιβλία του είδους του, αποπνέοντας από τις σελίδες του τη χαρά της ανακάλυψης...»

—Alan Lightman

«Θαυμάσια και αναλυτική περιγραφή της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και των μαύρων τρυπών, για ευφρείς αναγνώστες...»

—The Times Educational Supplement

«Το βιβλίο του Kip Thorne, εκτός από πηγή επιστημονικών πληροφοριών, πιστεύουμε ότι στα χρόνια που έρχονται θα αποτελέσει και πηγή έμπνευσης για πολλούς από τους αναγνώστες του.»

—Physics Today

«Το παρόν βιβλίο αποτελεί επισκόπηση ενός από τους πιο συναρπαστικούς κλάδους της φυσικής του 20ού αιώνα, γραμμένη αριστοτεχνικά, με τρόπο σαφή και κατανοητό, χωρίς περιττά και υπερβολικά στοιχεία...»

—Nature



Για τα επόμενα χίλια χρόνια, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο σας εύχονται υγεία, χαρά και πρόοδο ...

... Όσο για το 2000,  
να σας περισσεύει το γέλιο και η δύναμη.

