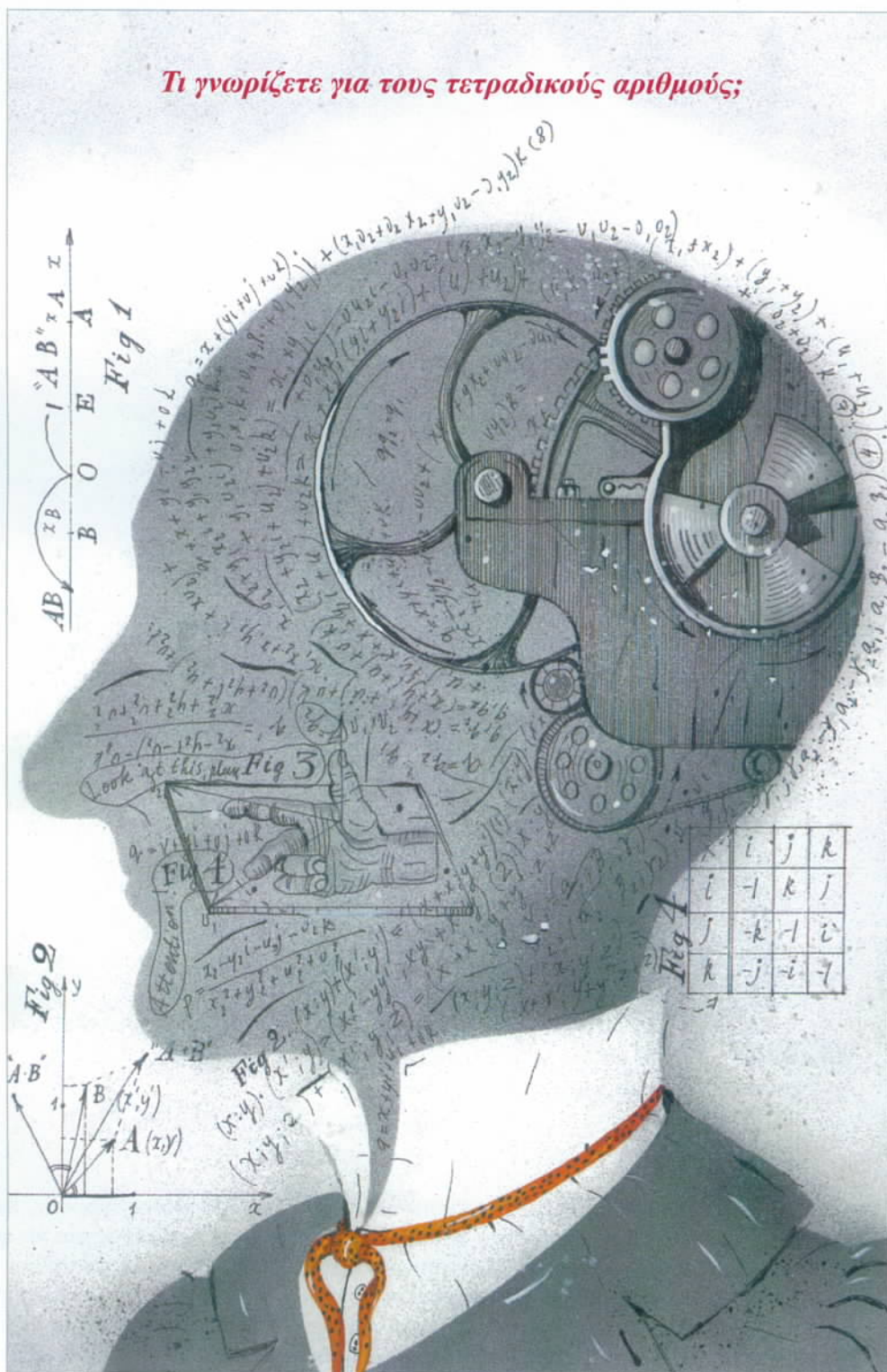


# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000  
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 6  
2.300 ΔΡΧ.

*Τι γνωρίζετε για τους τετραδικούς αριθμούς;*



- Φυσική της βιάδσης και ολυμπιακά ρεκόρ
- Θερμικές εκρήξεις και ναυτικές τραγωδίες
- Σχηματικοί αριθμοί —ακόμη μία εικασία του Fermat
- Ύλη και βαρύτητα
- Μια σύντομη ιστορία των κλασμάτων
- Καμπυλόγραμμες τροχιές στη φύση
- Ημιπεριοδικές ακολουθίες
- Πίεση στατικών πεδίων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Υπόγραφο, 25 x 18 εκ., Συλλογή του Μουσείου Salvador Dalí, Σαν Πιερρεμπέρνι, Φλόριντα. © 2000 Μουσείο Salvador Dalí.

*Το καράβι (1942-43), του Salvador Dalí*

**Ι**ΣΩΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΙΔΙΟ ΤΟ ΖΩΝΤΑΝΟ ΑΚΡΟΠΡΩΡΟ ΠΟΥ σκέφτηκε να αναπτύξει το περίτεχνο αρμάτωμα ανάμεσα στα άκρα του. Παρόμοια συστήματα συγχρονισμού των κινήσεων χεριών και ποδιών επιτυγχάνουν συχνότητα συντονισμού η οποία αυξάνει εντυπωσιακά την ταχύτητα μετακίνησης. Και το σκαρί, παρά τα κύματα και

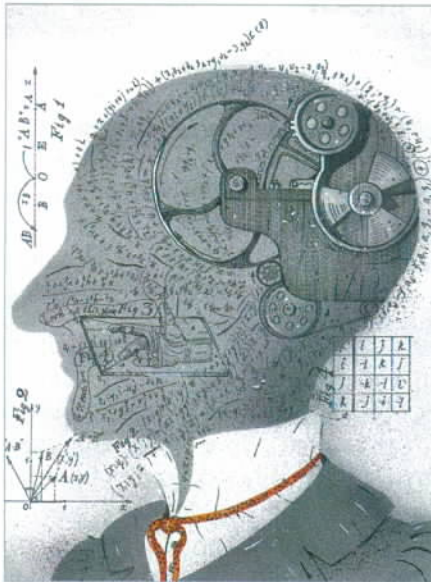
κόντρα στους καιρούς, καταφέρνει να διασχίζει γρήγορα τους πόντους και να φτάνει σε λιμάνια ασφαλή.

Εσείς τώρα, αν θέλετε να διαβάσετε για «γοργοκίνητους δεσμώτες» —για χειροπόδαρα δεμένους δρομείς ταχύτητας—, δεν έχετε παρά να ανατρέξετε στο άρθρο της σελίδας 38 («Η φυσική της βόδισης»).

# QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 6



Εικονογράφηση: Ekaterina Silina

Οι τετραδικοί αριθμοί αποτελούν έναν ακόμη τρόπο αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών και έχουν μια πολύ ενδιαφέρουσα ιστορία. Μπορείτε να γνωρίσετε τα μυστικά τους διαβάζοντας το σχετικό άρθρο της σελίδας 6. Μην ανησυχείτε, δεν θα σας γίνει το κεφάλι καζάνι —το δικό σας «σουντουκάριν», όπως λέει άλλη στήλη, αντέχει. Και πάντως, είναι ένας καλός τρόπος για να μπορείτε να περπατάτε ανάμεσα σε φίλους με το κεφάλι ψηλά.

## ΑΡΘΡΑ

- 6** Βόλτες σε τέσσερις διαστάσεις  
**Τετραδικοί αριθμοί**  
*A. Mishchenko και Y. Solovyon*
- 11** Θερμικές εκρήξεις  
**Εκκωφαντικό ήπιασμα**  
*B. Novozhilov*
- 22** Διάσημες υποθέσεις  
**Σχηματικοί αριθμοί**  
*A. Savin*
- 38** Στο δρόμο για την «Αθήνα 2004»  
**Η φυσική της βάδισης**  
*I. Urusovsky*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2** **Ο κόσμος των κβάντων**  
*Ο νους ή ο εγκέφαλος;*
- 5** **Σπαζοκεφαλιές**
- 18** **Βόλτες στο Διαδίκτυο**  
*Νέα από το μέτωπο της επιστήμης*
- 27** **Πώς λύνεται;**
- 28** **Αναδρομές I**  
*Ernst Abbe και «Carl Zeiss»*
- 33** **Στο εργαστήριο**  
*Η τιμή της αντίστασης*
- 36** **Καθιδουσκώπιο**  
*Ύλη και βαρύτητα*
- 44** **Στα πεδία της φυσικής**  
*Καμπυλωμένη πραγματικότητα*
- 48** **Στο μαυροπίνακα I**  
*Περί ημπεριοδικών ακολουθιών*
- 53** **Ονοματολογία**  
*Μια σύντομη ιστορία των κλασμάτων*
- 56** **Αναδρομές II**  
*Tycho Brahe*
- 58** **Στο μαυροπίνακα II**  
*Πίεση πεδίου*
- 63** **Αλληλογραφία**
- 65** **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**

# Ο νους ή ο εγκέφαλος;

«Έχω ένα σουντουκάριν, κι έχει μέσα κατικάριν,  
σαν εβγαίν' το κατικάριν, ντο ποιώ το σουντουκάριν;»

—Αίνιγμα, από την Κερασούντα του Πόντου<sup>1</sup>

**Π**ΟΙΟΣ ΕΠΙΤΕΛΕΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ λειτουργίες, ο νους ή ο εγκέφαλος; Έχει νόημα ένα τέτοιο ερώτημα, και είναι επιστημονικό; Στις μέρες μας, οι επιστήμονες και οι φιλόσοφοι υποθέτουν γενικά ότι ο νους και ο εγκέφαλος είναι «ισοδύναμοι», ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις νοητικές και τις φυσικές καταστάσεις του εγκεφάλου. Η υπόθεση αυτή φέρει την επιστημονική ονομασία «ψυχοφυσικός παραλληλισμός»<sup>2</sup>, ωστόσο οι Kurt Gödel<sup>3</sup> και Ludwig

Wittgenstein<sup>4</sup> θεωρούσαν ότι αποτελεί μια προκατάληψη της εποχής μας. Βέβαια, μια προκατάληψη δεν είναι απαραίτητα λανθασμένη. Θα λέγαμε ότι πρόκειται μάλλον για βαθιά ριζωμένη πεποίθηση η οποία δεν βεβαιώνεται από τις υπάρχουσες ενδείξεις —όσο πιο έντονη είναι η πίστη τόσο λιγότερες είναι οι ενδείξεις που την υποστηρίζουν.

Η θέση όπου λαμβάνουν χώρα οι διανοητικές δραστηριότητες δεν μπορεί να εντοπιστεί μέσω της καθημερινής εμπειρίας. Για παράδειγμα, ο κινεζικός χαρακτήρας *hsin* (ή *xin*) —ο οποίος συνήθως μεταφράζεται καρδιά/νους ή σώμα/νους— δηλώνει και το νου και την καρδιά, γεγονός που υποδηλώνει ότι η διανοητική δραστηριότητα επιτελείται στο ό-

ργανο της καρδιάς. Επίσης, ο Έλληνας προσωκρατικός φιλόσοφος Εμπεδοκλής πίστευε ότι ο νους εδρεύει στην καρδιά<sup>5</sup>, θεωρώντας την μάλιστα ως το ουσιαστικότερο ανθρώπινο όργανο. Στην εποχή μας, βέβαια, έχουμε εντοπίσει τις εμπειρικές ενδείξεις που υποδεικνύουν ότι η διανοητική δραστηριότητα σχετίζεται άμεσα με τον εγκέφαλο. Για παράδειγμα, σε περίπτωση που ορισμένα μέρη του εγκεφάλου υποστούν βλάβη ή αφαιρεθούν ή κατά κάποιον τρόπο αποσυνδεθούν από τον υπόλοιπο εγκέφαλο, παύουν συγκεκριμένες νοητικές λειτουργίες.

Οι υπάρχουσες ενδείξεις, όμως, απέχουν πολύ από το να αποδεικνύουν ότι κάθε νοητική κατάσταση αντιστοιχεί σε μια μοναδική φυσική κατάσταση του εγκεφάλου. Εξ όσων γνωρίζουμε, ορισμένες ανεπαίσθητες αλλαγές στο νου είναι πιθανόν να συμβαίνουν χωρίς ταυτόχρονες φυσικές αλλαγές στον εγκέφαλο. Γι' αυτό ο ψυχοφυσικός παραλληλισμός αποτελεί, σύμφωνα με τις σημερινές γνώσεις μας, απλώς μian υπόθεση. Φαίνεται ότι μπορούμε να διακρίνουμε περισσότερες νοητικές διαφορές απ' ό,τι φυσικές διαφορές στον εγκέφαλο. Για παράδειγμα, αν ανα-

1. Από το βιβλίο *Θησαυρός νεοελληνικών αινιγμάτων* της Χ. Χατζητάκη-Καψωμένου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα 2000. (Σ.τ.ε.)

2. Ψυχοφυσικός παραλληλισμός: Υπόθεση σύμφωνα με την οποία σε κάθε ψυχικό γεγονός αντιστοιχεί ένα φυσιολογικό, και αντίστροφα: ότι ψυχικά και φυσιολογικά φαινόμενα συμπεριφέρονται και αλληλοεπηρεάζονται. Ο Spinoza παραδέχεται σχετικά ότι σώμα και πνεύμα αποτελούν παράλληλες εκφράσεις της ίδιας μεταφυσικής ουσίας, και ο Fechner ότι σώμα και πνεύμα προχωρούν παράλληλα εμφανίζοντας αμοιβαία αντιστοιχία. (Σ.τ.ε.)

3. Ο αυστριακός μαθηματικός Kurt Gödel υπήρξε φίλος και συνεργάτης του Αϊνστάιν και χαρακτηρίστηκε «ο μεγαλύτερος φιλόσοφος της λογικής μετά τον Αριστοτέλη». Από τις πολυάριθμες εργασίες του ξεχωρίζει το ομώνυμο θεώρημά του, το οποίο κατάφερε θανάσιμο πλήγμα αφενός στο πρόγραμμα του Hilbert που υποσχόταν να αποδείξει μαθηματικά την εσωτερική συνέπεια της οποίας μαθηματικής θεωρίας στηριζόμενο σε εργαλεία που δεν θα χρησιμοποιούσαν τίποτα πιο περίπλοκο από τους φυσικούς αριθμούς, και αφε-

τέρου στην προσπάθεια των Frege και Russell να θεμελιώσουν τα μαθηματικά στην τυπική λογική. (Σ.τ.ε.)

4. Ο Ludwig Wittgenstein υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους του 20ού αιώνα. Φοιτητής και συνεργάτης του Russell, κατέλαβε την έδρα φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ. Το έργο του είναι καθοριστικό για τη σημασία που απέκτησε η γλώσσα στη φιλοσοφία του 20ού αιώνα. Σύμφωνα με τον von Wright, «Μαζί με τον Mach και τον Russell, είναι ο πνευματικός πατέρας του μεγάλου ρεύματος που ονομάστηκε λογικός θετικισμός, ή λογικός εμπειρισμός, και του οποίου κληρονόμοι θεωρούνται η λογική φιλοσοφία, κατά μεγάλο μέρος, οι έρευνες για τα θεμέλια των μαθηματικών και η θεωρία περί επιστήμης». (Σ.τ.ε.)

5. «Η καρδιά η θρεμμένη στη θάλασσα του αίματος του αγαλήνευτου, εκεί που είναι προπάντων ό,τι οι άνθρωποι ονομάζουν σκέψη.» (Πορφύριος, απόσπ. 105). (Σ.τ.ε.)

λογιστούμε τα εκπληκτικά διανοητικά επιτεύγματα του Φράντς Σούμπερτ ή του Άλμπερτ Αϊνστάιν, διαπιστώνουμε ότι απέχουμε πολύ από το να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε επαρκείς φυσικές διαφορές μεταξύ των εγκεφάλων τους, αλλά και όλων των άλλων φυσιολογικώς ομοίων εγκεφάλων, ούτως ώστε να δώσουμε μια ικανοποιητική εξήγηση των σημαντικών διαφορών στα αντίστοιχα αποτελέσματα της λειτουργίας τους.

Ακόμη και από την καθημερινή εμπειρία, δύσκολα μπορούμε να αποκλείσουμε την πιθανότητα ο νους μας να κάνει περισσότερες διακρίσεις από τον εγκέφαλό μας. Για παράδειγμα, προσπάθησα να αναπλάσω τις συζητήσεις μου με τον Gödel στη δεκαετία του 1970, με τη βοήθεια κάποιων πρόχειρων σημειώσεων που είχα κρατήσει τότε. Οι σημειώσεις αυτές έφεραν στη μνήμη μου πολλά πράγματα. Ενδεχομένως ο εγκέφαλός μου να περιλαμβάνει ορισμένα φυσιολογικώς ευδιάκριτα ίχνη εμπειριών τα οποία λείπουν από τις πραγματικές σημειώσεις μου. Είναι όμως εξίσου πιθανόν ο νους μου να ανακαλεί περισσότερα στοιχεία απ' όσα βρίσκονται ενσωματωμένα σε αυτά τα εγκεφαλικά ίχνη.

Ο Wittgenstein είχε προτείνει το παρακάτω νοητικό πείραμα, και το οποίο φαίνεται να παρέχει μια ακριβέστερη διατύπωση του τελευταίου ενδεχομένου. Φαντάστηκε κάποιον δημοσιογράφο ο οποίος, κατά τη διάρκεια μιας δημόσιας ομιλίας, κρατούσε τις απαραίτητες σημειώσεις ώστε να μπορέσει να αναπαραγάγει το κείμενο της ομιλίας. Και ο φιλόσοφος κατέληξε: «Αυτό που αποκάλεσα σημειώσεις δεν συνιστά αντιγραφή του κειμένου ή, τρόπος του λέγειν, μια μετάφρασή του μέσω κάποιου συμβολισμού. Το κείμενο δεν αποθηκεύεται στις σημειώσεις. Για ποιον λόγο λοιπόν θα έπρεπε να αποθηκεύεται στο νευρικό μας σύστημα;». Με άλλα λόγια, ορισμένα υπομνηστικά στοιχεία που αποθηκεύονται στο χαρτί είναι, όπως ξέρουμε, αρκετά για να επιφέρουν μια σωστή αναπαραγωγή. Εξ όσων γνωρίζουμε, πιθανόν να ισχύει το ίδιο και στην πε-

ρίπτωση του εγκεφάλου· ενδέχεται, δηλαδή, αυτός να περιλαμβάνει τα απολύτως απαραίτητα υπομνηστικά στοιχεία αντί για πλήρη αντίγραφα όλων όσα σχετίζονται με το νου.

Ένας λόγος για τον οποίο υποστηρίζουμε τον ψυχοφυσικό παραλληλισμό είναι αναμφισβήτητη η επαγωγική γενίκευση που πηγάζει από την τεράστια επιτυχία της φυσικής —όχι μόνο στην αντιμετώπιση των φυσικών φαινομένων, αλλά και των βιολογικών ζητημάτων, ιδιαίτερα σε μοριακό επίπεδο. Πράγματι, με την πρόοδο της επιστήμης τείνουμε να ανακαλύπτουμε ολοένα και στενότερες συσχετίσεις μεταξύ νοητικών και νευρωνικών συμβάντων. Με δεδομένη την εμπειρία όσον αφορά τη χτυπητή διαφορά ανάμεσα στο νοητικό και το φυσικό, δεν είναι καθόλου σαφές κατά πόσον η περιορισμένη γνώση μας για τις εν λόγω συσχετίσεις μπορεί να αντισταθμίσει το «βάρος» του ισχυρισμού περί παραλληλισμού.

Ταυτόχρονα, είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακή η αντίθεση μεταξύ της ωριμότητάς μας στη μελέτη του φυσικού κόσμου και της πρωτόγονης προσπάθειάς μας να αντιμετωπίσουμε άμεσα τα νοητικά φαινόμενα. Έχουμε τη φυσική τάση να εξομοιώνουμε την «επιστήμη» με την επιστήμη του φυσικού κόσμου. Κατά συνέπεια, τείνει κανείς να πιστέψει ότι, εάν η νόηση δεν μπορεί να εξηγηθεί με βάση την επιστήμη του φυσικού κόσμου, τότε δεν μπορεί να εξηγηθεί με καμία άλλη επιστημονική βάση. Δεδομένης αυτής της πεποίθησης, ο ψυχοφυσικός παραλληλισμός καθίσταται απαραίτητη προϋπόθεση για τη δυνατότητα επιστημονικής προσέγγισης των νοητικών φαινομένων.

Παρόλο που έχουμε αποτύχει να μελετήσουμε τα νοητικά φαινόμενα τόσο συστηματικά όσο τα φυσικά φαινόμενα, το γεγονός αυτό από μόνο του δεν αποτελεί απόδειξη ότι ο ψυχοφυσικός παραλληλισμός είναι σωστός ή έστω μη ανασκευάσιμος. Δεν γνωρίζουμε κατά πόσον θα κατορθώσουμε να μελετήσουμε τα νοητικά φαινόμενα άμεσα και αποτελεσματικά.

Στις συζητήσεις που είχαμε το 1972, ο Gödel διατύπωσε μια εικασία, ότι ο παραλληλισμός είναι λανθασμένος και ότι θα διαψευστεί επιστημονικά —πιθανώς εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν υπάρχουν αρκετά νευρικά κύτταρα για να εκτελέσουν τις παρατηρήσιμες λειτουργίες του νου. Στο πλαίσιο αυτό, οι παρατηρήσιμες λειτουργίες περιλαμβάνουν αναμφίβολα αυτές της μνήμης, του στοχασμού, της φαντασίας, κ.λπ., οι οποίες παρατηρούνται άμεσα μόνο μέσω ενδοσκοπικής (αυτοπαρατηρησίας). Όπως γνωρίζουμε, ό,τι είναι παρατηρήσιμο μέσω ενδοσκοπικής μπορεί συχνά να γνωστοποιηθεί σε άλλους με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορέσουν και αυτοί να το ελέγξουν με τη βοήθεια παρόμοιων ενδοσκοπικών παρατηρήσεων. Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να αποκλείσουμε εντελώς τις αυτοπαρατηρησιακές ενδείξεις.

Η εικασία ότι δεν υπάρχουν αρκετά νευρικά κύτταρα προκειμένου να πραγματοποιήσουν τις παρατηρήσιμες νοητικές λειτουργίες αποτελεί ένα σημαντικό παράδειγμα κριτηρίου ελέγχου γι' αυτό που εννοούμε λέγοντας πως ένα πρόβλημα είναι «επιστημονικό». Η ικανότητα των νευρικών κυττάρων αποτελεί αναμφισβήτητη ένα φυσικό θέμα κεντρικής σημασίας όσον αφορά την έρευνα στη νευροεπιστήμη. Παράλληλα, οι παρατηρήσιμες νοητικές λειτουργίες είναι κάτι το οποίο είμαστε ικανοί να το μάθουμε. Αυτά τα γεγονότα αποτελούν αναμφίβολα το λόγο για τον οποίο η αρχική μας αντίδραση είναι να συμφωνήσουμε με τον Gödel στο ότι η εικασία του πράγματι είναι επιστημονική, παρά το γεγονός ότι πολλοί θα θεωρούσαν πως το συναγόμενο συμπέρασμα είναι λανθασμένο.

Το ελκυστικό στοιχείο στην εν λόγω εικασία είναι η φαινομενική ακρίβεια της ποσοτικής της εκτίμησης. Ο αριθμός των νευρώνων στον εγκέφαλο, όμως, υπολογίζεται ότι είναι της τάξεως του  $10^{11}$  ή  $10^{12}$ , ενώ υπάρχουν πολύ περισσότερες συνάψεις απ' ό,τι νευρώνες. Δεν είμαστε εξοικειωμένοι με το χειρισμό των συνεπαγωγών τόσο μεγάλου πλή-

θους μονάδων, ενώ οι γνώσεις μας σχετικά με τις πραγματικές ικανότητές τους —και συγκεκριμένα το αναμενόμενο χάσμα μεταξύ των συνδυαστικά πιθανών και των πραγματικά εφικτών σχηματισμών τους— είναι πράγματι περιορισμένες. Πέραν τούτου, όπως ξέρουμε, η ισχύς του νου αυξάνεται μέσω της χρησιμοποίησης εργαλείων, όπως το μολύβι, το χαρτί, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές κ.λπ., μέσω της μάθησης από άλλα άτομα, και μέσω της χρησιμοποίησης προσωπικών γραπτών και βιβλίων ως ένα είδος εξωτερικής μνήμης.

Γνωρίζουμε ελάχιστα όσον αφορά το βαθμό που ο εγκέφαλος επιτελεί κάτι παρόμοιο. Επομένως, η κατάσταση του εγκεφάλου είναι πιθανώς λιγότερο σαφής απ' ό,τι δείχνει να πιστεύει ο Gödel. Παράλληλα, προς το παρόν απέχουμε πολύ από το να διαθέτουμε μια πλήρως ικανοποιητική ιδέα η οποία να μας οδηγήσει στον ποσοτικό προσδιορισμό όλων των παρατηρήσιμων νοητικών λειτουργιών.

Παρόλο που προς το παρόν αδυνατούμε να αποφανθούμε για το αν η παραπάνω εικασία του Gödel είναι σωστή ή λανθασμένη, πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι πρόκειται για μια εικασία που έχει νόημα και είναι επιστημονική. Πραγματικά, μου φαίνεται ότι η εικασία αυτή περιγράφει με ενάργεια την πιθανότητα οριστικής επίλυσης της αιώνιας διαμάχης ανάμεσα στον υλισμό και στον ιδεαλισμό, η οποία έχει θεωρηθεί ιδιαίτερα σημαντική από τόσο πολλές απόψεις.

—Hao Wang

**O Hao Wang, από το 1955 έως το 1961 διετέλεσε αναπληρωτής καθηγητής φιλοσοφίας των μαθηματικών στην έδρα John Locke του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης· από το 1961 έως το 1967 κατείχε την έδρα Gordon McKay της μαθηματικής λογικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ· στη συνέχεια, και για τρεις περίπου δεκαετίες, διετέλεσε καθηγητής λογικής στο Πανεπιστήμιο Rockefeller της Νέας Υόρκης. Έχει συγγράψει πολλά άρθρα και βιβλία στα πεδία της λογικής, των υπολογιστών και της φιλοσοφίας.**

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντιπροϊστάμενος Εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ  
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας  
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη  
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης  
Sergey Ivanov

Αντιπροϊστάμενη Αρχισυντάκτρια  
Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων  
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum  
Yuli Danilov, Ερευνητής Α΄ Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov  
Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT  
John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα  
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη  
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας  
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη  
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς  
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα  
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα  
Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάμαλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίας-μαθηματικός, Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Γιώργος Μαλάμης-βιολόγος, Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός, Βαρβάρα Οικονομίδου και Αλέκος Μάμαλης-φυσικός**

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι

**Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχάιο**  
**Πέτρος Δήτσας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης**  
**Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας**  
**Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης**  
**Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α΄ Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας**  
**Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών**

Γλωσσική επιμέλεια  
Νίκος Ντάκος

Τυποτεχνική επιμέλεια  
Ηρακλής Ντούσης

Γραμματεία  
Μαρία Κουρή

Υπεύθυνη λογιστηρίου  
Μαρία Μάμαλη

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση  
Αβ. Μαχαιρίδης

Φιλμ, μοντάζ  
Χρ. Μήτσος

Εκτύπωση  
Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία  
Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης.  
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

# Για να περνά η ώρα

Σ196

*Η στοργική γιαγιά.* Μια μέρα, όλα τα εγγόνια της κυρίας Κόκκινου την επισκέφτηκαν στο σπίτι της. Στο τραπέζι της κουζίνας υπήρχε ένα καλάθι με μήλα και αχλάδια. Η κυρία Κόκκινου πρόσφερε σε κάθε παιδί το ίδιο πλήθος φρούτων, χωρίς να δώσει σημασία τι είδος φρούτων πήρε το καθένα. Αν γνωρίζετε ότι στον Βασίλη κατέληξε το  $\frac{1}{8}$  των μήλων και το  $\frac{1}{10}$  των αχλαδιών, μπορείτε να βρείτε πόσα εγγόνια έχει η κυρία Κόκκινου;



Σ197

*Λάθη χορευτών.* Σε μια σχολική γιορτή, τα αγόρια χόρεψαν με τα κορίτσια. Στο τέλος της βραδιάς, ρωτήθηκαν όλα τα κορίτσια και όλα τα αγόρια πόσα τραγούδια χόρεψαν (φυσικά, μαζί με καβαλιέρο ή ντάμα). Έξι παιδιά απάντησαν ότι χόρεψαν σε τρία τραγούδια, ένα σε πέντε, τέσσερα χόρεψαν σε έξι και ένα σε εννέα. Αποδείξτε ότι δεν είναι σωστές όλες οι απαντήσεις.

Σ198

*Αξιολόγηση αγώνων.* Στο τοπικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου συμμετείχαν δεκαέξι ομάδες. Στην πρώτη φάση του πρωταθλήματος, κάθε ομάδα κατατάχτηκε σε μία από τις δεκαέξι θέσεις. Ακολούθησε η δεύτερη φάση με αγώνες «πλεί-οφ» (δηλαδή, «όποιος χάνει, φεύγει»), σε τέσσερις γύρους. Στον πρώτο γύρο αποκλείστηκαν οκτώ ομάδες, στον δεύτερο τέσσερις, στον τρίτο δύο· στον τελευταίο γύρο οι δύο εναπομείνουσες ομάδες αγωνίστηκαν για τον τίτλο του πρωταθλητή. Συνέπασε, η ομάδα που είχε την πρώτη θέση στην αρχική κατάταξη να κερδίσει όλα τα παιχνίδια. Ένα παιχνίδι χαρακτηρίζεται «ενδιαφέρον» αν η αρχική κατάταξη των ομάδων δεν διαφέρει περισσότερες από τέσσερις θέσεις, ενώ διαφορετικά θεωρείται «αδιάφορο». Ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό πλήθος «αδιάφορων» παιχνιδιών;



Σ199

*Σταυρωτή κάλυψη.* Αναπτύσσουμε έναν μοναδιαίο κύβο έτσι ώστε να προκύψει το σχήμα που κρατά ο κύριος στη διπλανή εικόνα. Χρησιμοποιήστε αντίγραφα αυτού του σχήματος για να σκεπάσετε, χωρίς αλληλεπικαλύψεις, την επιφάνεια ενός κύβου με διπλάσιο μήκος ακμής.

Σ200

*Φωτογραφήσεις πειρατών.* Στο κουτί ενός φωτογραφικού φιλμ αναγράφεται «εμφανίστε σε κόκκινο φως». Μπορείτε να φωτογραφίσετε με αυτό το φιλμ τον πειρατή στο αριστερό μέρος της εικόνας; Αυτόν που βρίσκεται δεξιά;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

# Τετραδικοί αριθμοί

Απλές πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

A. Mishchenko και Y. Solov'gov

**Π**ΡΟΣΦΑΤΑ ΕΧΟΥΜΕ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙ ΑΡΘΡΑ ΓΙΑ ΤΗΝ αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών ως συνεχή κλάσματα (Μάρτιος/Απρίλιος 2000) και για τους αλγεβρικούς και τους υπερβατικούς αριθμούς (Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 2000). Το παρόν άρθρο ολοκληρώνει αυτή τη σειρά (αν και δεν απαιτεί να έχετε διαβάσει τα παραπάνω άρθρα). Το θέμα του είναι οι τετραδικοί αριθμοί. Σ' αυτούς περιλαμβάνονται οι μιγαδικοί και, συνεπώς, όλα τα είδη αριθμών που έχουμε προαναφέρει. Το άρθρο περιέχει μερικές πληροφορίες για τις εφαρμογές των τετραδικών και την ιδιόμορφη ιστορία τους. Αρχή τους απετέλεσε η επιθυμία να εισαχθεί μια αλγεβρική δομή (πρόσθεση και, κυρίως, πολλαπλασιασμός) για γεωμετρικά αντικείμενα (διάφορα σύνολα σημείων).

## Πώς από σημεία μπορούμε να πάρουμε αριθμούς;

Αν αναφερόμαστε σε σημεία μιας ευθείας, είναι απλό. Αν επιλέξουμε μια αρχή («μηδέν») και μια κλίμακα με συγκεκριμένη φορά («μονάδα»), μπορούμε να μετατρέψουμε μια ευθεία σε ευθεία αριθμών. Σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός — η συντεταγμένη του (Σχήμα 1).



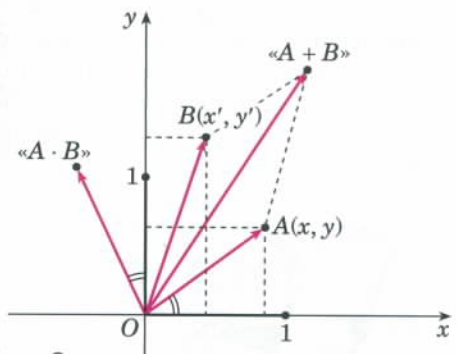
Σχήμα 1

Με τα σημεία του επιπέδου, η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Αν επιλέξουμε μια αρχή («μηδέν») και ένα ζεύγος κάθετων αξόνων, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ζεύγος συντεταγμένων  $(x, y)$  σε κάθε σημείο του επιπέδου. Για να δημιουργήσουμε αριθμούς από αυτά τα ζεύγη, πρέπει να βρούμε τρόπο να τα «προσθέτουμε» και

να τα «πολλαπλασιάζουμε» έτσι ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: ο αντιμεταθετικός, ο προσεταιριστικός και ο επιμεριστικός νόμος, και η ύπαρξη των αντίστροφων πράξεων, της διαίρεσης και της αφαίρεσης.

Η πρόσθεση είναι εύκολη. Είναι φυσικό να προσθέσουμε τα ζεύγη κατά συντεταγμένες, όπως ακριβώς προσθέτουμε τα διανύσματα (Σχήμα 2):

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'). \quad (1)$$



Σχήμα 2

Ο πολλαπλασιασμός είναι λίγο πιο περίπλοκος.<sup>1</sup> Όμως, και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε έναν απλό τύπο:

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \quad (2)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή η πράξη πολ-

1. Ο πολλαπλασιασμός κατά συντεταγμένες — δηλαδή,  $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$  — δεν μας ικανοποιεί, διότι αυτή η πράξη δεν έχει αντίστροφη. (Για παράδειγμα, η διαίρεση με το μη μηδενικό ζεύγος  $(0, 2)$  είναι αδύνατη.)



λαπλασιασμού και η πράξη της πρόσθεσης (1) έχουν όλες τις ιδιότητες που προαναφέραμε. Επομένως, το σύνολο των ζευγών με τις πράξεις (1) και (2) μπορεί να θεωρηθεί αριθμητικό σύνολο.

Στην πραγματικότητα, τα ζεύγη αυτά είναι *μιγαδικοί αριθμοί*. Αντί για  $(x, y)$  συνηθέστερα γράφονται ως  $x + iy$ , όπου  $i$  είναι η φανταστική μονάδα —δηλαδή το ζεύγος  $(0, 1)$ —, η οποία έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα  $i^2 = -1$ . Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να εξαγάγουμε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών (στο σώμα των μιγαδικών).

Μπορούμε να μετατρέψουμε τα σημεία του χώρου σε αριθμούς; Ας εισαγάγουμε, όπως και προηγουμένως, ένα σύστημα συντεταγμένων και ας περιγράψουμε κάθε σημείο ως ένα σύνολο τριών συντεταγμένων:  $(x, y, z)$ . Είναι φυσικό να προσθέσουμε αυτές τις τριάδες κατά συντεταγμένες:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'). \quad (3)$$

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε αριθμούς αυτές τις τριάδες αν βρίσκαμε μια μέθοδο πολλαπλασιασμού τους έτσι ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Ειδικά, πρέπει να υπάρχει η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού (διαίρεση με μη μηδενικά στοιχεία).

Το 1833, ο ιρλανδός μαθηματικός William Rowan Hamilton (1805-1865) ενδιαφέρθηκε γι' αυτό το πρόβλημα. Ακολουθεί η ιστορία της έμμονης ιδέας αυτού του αξιόλογου ανθρώπου με τις τριάδες και τις τετράδες.

### W.R. Hamilton

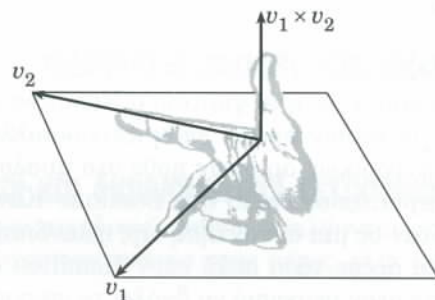
Ο Hamilton ήταν εξαιρετικά ικανός και πολυμαθής. Σε ηλικία 10 ετών γνώριζε από μνήμης πολλά αποσπάσματα από τον Όμηρο, στο πρωτότυπο, και στα 14 μιλούσε εννέα γλώσσες. Το 1824 δημοσίευσε ένα άρθρο γεωμετρικής οπτικής στα *Πρακτικά της Βασιλικής Ιρλανδικής Ακαδημίας*, και το 1827 έγινε βασιλικός αστρονόμος της Ιρλανδίας.

Το 1833, ο Hamilton ήταν διευθυντής του αστεροσκοπείου Dunsink, κοντά στο Δουβλίνο, και είχε δημοσιεύσει πολλά άρθρα οπτικής και αναλυτικής μηχανικής. Με βάση την εργασία του στη γεωμετρική οπτική, ο Hamilton προέβλεψε τη διπλή κωνική διάθλαση στους διαξονικούς κρυστάλλους, φαινόμενο που ανακάλυψε λίγο αργότερα ο συνάδελφός του Lloyd. Επί δέκα ολόκληρα χρόνια, ο Hamilton προσπάθησε να ανακαλύψει έναν κανόνα πολλα-

πλασιασμού των τριάδων, χωρίς όμως επιτυχία. Αργότερα, σε ένα γράμμα προς το γιο του, θυμόταν ότι «Κάθε πρωί, όταν κατέβαινα για πρωινό, εσύ και ο αδελφός σου με ρωτούσατε: "Μπαμπά, έμαθες πώς να πολλαπλασιάζεις τριάδες;" Και πάντοτε έπρεπε να απαντώ λυπημένα: "Όχι, γνωρίζω μόνο να τις προσθέτω και να τις αφαιρώ."»

### Διανυσματικά γινόμενα

Το πρόβλημα που απασχολούσε τον Hamilton φαίνεται σε πρώτη ματιά απλό. Ο τρόπος ορισμού της διανυσματικής πρόσθεσης είναι προφανής (μέσω του τύπου (3)). Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι ένας τύπος για τον πολλαπλασιασμό —κάτι παρόμοιο με τον τύπο (2). Κανείς όμως από τους τύπους που δοκίμασε ο Hamilton δεν ήταν κατάλληλος —πάντα παραβιαζόταν κάποια από τις ιδιότητες.



Σχήμα 3

Η πράξη του πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων ήταν ήδη πασίγνωστη εκείνη την εποχή: το *διανυσματικό γινόμενο*  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο  $\mathbf{v}_1$  και στο  $\mathbf{v}_2$ , και με διεύθυνση που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (Σχήμα 3). Το μήκος αυτού του διανύσματος ορίζεται ως  $|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \eta\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Ένα βασικό αποτέλεσμα για τα διανυσματικά γινόμενα (που ορισμένες φορές καλούνται «εξωτερικά γινόμενα») είναι ότι αν τα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  δίνονται από τις συντεταγμένες τους σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς —δηλαδή, αν

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, \beta_1, \gamma_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (a_2, \beta_2, \gamma_2),$$

τότε

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \gamma_1a_2 - \gamma_2a_1, a_1\beta_2 - a_2\beta_1). \quad (4)$$

Όμως, τα διανυσματικά γινόμενα δεν εξυπηρέτουσαν τον Hamilton, διότι με αυτά δεν ισχύει

η αντίστροφη πράξη. Για παράδειγμα, αν  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \neq 0$ , τότε η γωνία μεταξύ αυτών των διανυσμάτων ισούται με μηδέν. Επομένως, το μήκος του διανυσματικού γινομένου  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  είναι μηδέν (αν αντικαταστήσουμε στον τύπο (4), θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα). Αν ίσχυε η διαίρεση με κάθε μη μηδενικό διάνυσμα, θα είχαμε  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \div \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \neq 0$ . Ταυτόχρονα,  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$  και, επομένως,  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \div \mathbf{v}_2 = 0$ . Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι η διαίρεση διά του  $\mathbf{v}_2$  είναι αδύνατη.

Παρά τις απογοητεύσεις και τις αποτυχίες, ο Hamilton συνέχισε τις προσπάθειές του με αξιοθαύμαστη επιμονή. Παρόλο που το πρόβλημά του δεν λύθηκε (και δεν ήταν δυνατόν να λυθεί, όπως θα δούμε στη συνέχεια), η δεκάχρονη προσπάθειά του ανταμείφθηκε. Κάποια μέρα του 1843, ο Hamilton αποφάσισε να προσπαθήσει να ορίσει τον πολλαπλασιασμό για τετράδες αντί για τριάδες. Ονόμασε αυτούς τους νέου τύπου αριθμούς τετραδικούς (quaternions). Ιδού πώς συνέβη το γεγονός.

## Το επεισόδιο στη γέφυρα Brougham

Σε ένα γράμμα προς το γιο του, ο Hamilton αναφέρει ότι η ιδέα για το πώς πρέπει να οριστεί ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών αριθμών ήρθε στο μυαλό του την ώρα που περπατούσε δίπλα στο Βασιλικό Κανάλι, ενώ κατευθυνόταν σε μια συνάντηση της ιρλανδικής ακαδημίας. Η ιδέα άρεσε τόσο πολύ στον Hamilton ώστε δεν αντιστάθηκε στον πειρασμό να βγάλει το σουγιά του και να χαράξει τον θεμελιώδη τύπο στη μαλακή πέτρα της γέφυρας Brougham:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

## Ορισμός των τετραδικών

Οι τετραδικοί είναι τετράδες πραγματικών αριθμών  $(x, y, u, v)$  που μπορούν να γραφούν ως

$$q = x + yi + uj + vk,$$

όπου τα  $i, j$ , και  $k$  είναι καινούργιοι αριθμοί, παρόμοιοι με τη φανταστική μονάδα που χρησιμοποιείται στον ορισμό των μιγαδικών αριθμών. Πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (5)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (6)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή ενός πίνακα «πολλαπλασιασμού»:

	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$j$	$-i$	-1

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών εκτελούνται, εξ ορισμού, σύμφωνα με τους συμβατικούς κανόνες αφαίρεσης των παρενθέσεων και αναγωγής των

όμοιων όρων, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τους κανόνες που περιέχονται στους τύπους (5) και (6).

Βάσει αυτού του ορισμού, αν  $q_1$  και  $q_2$  είναι δύο τετραδικοί, τότε

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k) + (x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) \\ &= x_1 + y_1i + u_1j + v_1k + x_2 + y_2i + u_2j + v_2k \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1i + y_2i) + (u_1j + u_2j) + (v_1k + v_2k) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (u_1 + u_2)j + (v_1 + v_2)k. \end{aligned} \quad (7)$$

Αυτή είναι η συνήθης πρόσθεση κατά συντεταγμένες, την οποία είδαμε προηγουμένως. Το γινόμενο δύο τετραδικών υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k)(x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i + y_1y_2i^2 \\ &\quad + y_1u_2ij + y_1v_2ik + u_1x_2j + u_1y_2ji + u_1u_2j^2 \\ &\quad + u_1v_2jk + v_1x_2k + v_1y_2ki + v_1u_2kj + v_1v_2k^2 \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i \\ &\quad - y_1y_2 + y_1u_2k - y_1v_2j + u_1x_2j - u_1y_2k \\ &\quad - u_1u_2 + u_1v_2i + v_1x_2k + v_1y_2j - v_1u_2i - v_1v_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + u_1v_2 - v_1u_2)i \\ &\quad + (x_1u_2 + u_1x_2 - y_1v_2 + v_1y_2)j \\ &\quad + (x_1v_2 + y_1u_2 - u_1y_2 + v_1x_2)k. \end{aligned} \quad (8)$$

Δηλαδή, ενεργούμε σαν τα  $i, j$  και  $k$  να ήταν μεταβλητές και εφαρμόζουμε τον επιμεριστικό νόμο. Όμως, παρατηρούμε ότι η σειρά πολλαπλασιασμού των «μεταβλητών»  $i, j$  και  $k$  πρέπει να διατηρείται (ενώ των «συντελεστών»  $x_1, x_2$ , κ.λπ. μπορεί να αλλάξει).

Ένας επίπονος αλλά απλός υπολογισμός μάς δείχνει ότι ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών διαθέτει την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3).$$

Είναι φυσικό να θεωρήσουμε τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς ως ειδικές περιπτώσεις των τετραδικών. Ο πραγματικός αριθμός  $x$  είναι ο τετραδικός

$$x = x + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k.$$

Ο μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  γράφεται ως ο τετραδικός

$$z = x + iy + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \quad (9)$$

Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τους μιγαδικούς αριθμούς, μπορείτε να θεωρήσετε τον τύπο (9) μαζί με τους τύπους (7) και (8) ως τον ορισμό τους. Γράψτε τον τύπο του πολλαπλασιασμού (8) για την περίπτωση (9), και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον τύπο (2).

Είναι προφανές ότι η πρόσθεση των τετραδικών έχει μια αντίστροφη πράξη — την αφαίρεση. Η διαφορά δύο τετραδικών  $q_1$  και  $q_2$  ορίζεται από τον τύπο

$$q_1 - q_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i + (u_1 - u_2)j + (v_1 - v_2)k.$$

Αν  $q_1 = q_2$ , τότε η διαφορά τους είναι ο μηδενικός τετραδικός:

$$q_1 - q_2 = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0.$$

## Διαίρεση τετραδικών

Θα εξετάσουμε τη διαίρεση των τετραδικών, την αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Γενικώς, το ηλίκο της διαίρεσης ενός αριθμού  $a$  διά ενός αριθμού  $b \neq 0$  είναι ένας αριθμός  $c$ , τέτοιος ώστε

$$bc = a. \quad (10)$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται το ηλίκο για τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς. Δυστυχώς, ο ορισμός αυτός δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί στους τετραδικούς. Για να δώσει ο τύπος (10) έναν σωστό ορισμό του ηλίκου, ο πολλαπλασιασμός πρέπει να είναι ανεξάρτητος από τη σειρά των παραγόντων. Διαφορετικά, εκτός από το ηλίκο  $c = b^{-1}a$  που ορίζει ο τύπος (10), υπάρχει και το εξίσου ορθό «αριστερό» ηλίκο  $c'$  που ορίζεται από τον τύπο

$$c'b = a.$$

Το αριστερό ηλίκο μπορεί να είναι διαφορετικό από το  $c$  του τύπου (10). Έτσι, εκτός από την υποχρέωση να προχωρήσει πέρα από τον τρισδιάστατο χώρο, ο Hamilton έπρεπε να κάνει ακόμη μια θυσία.

Αποδείχτηκε ότι από τους τετραδικούς λείπει μία ακόμα παραδοσιακή ιδιότητα: το γινόμενο των τετραδικών δεν είναι ανεξάρτητο από τη σειρά των παραγόντων. Πράγματι, από τους τύπους (6) διαπιστώνουμε ότι το πρόσημο του γινομένου αλλάζει όταν μεταβάλλεται η σειρά των παραγόντων.

Άρα, μπορούμε να μιλήσουμε μόνο για «αριστερή διαίρεση» και «δεξιά διαίρεση». Πώς όμως θα βρούμε, ας πούμε, το αριστερό ηλίκο της διαίρεσης του τετραδικού  $q_1$  διά του τετραδικού  $q_2 \neq 0$ ;

Συμβολίζουμε το ζητούμενο ηλίκο ως  $q = x + yi + uj + vk$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού των τετραδικών και τον ορισμό της αριστερής διαίρεσης, καταλήγουμε στην εξής ισότητα:

$$qq_2 = q_1,$$

ή

$$\begin{aligned} (xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 + vy_2)j + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k \\ = x_1 + y_1i + u_1j + v_1k. \end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα  $x, y, u$  και  $v$ :

$$\begin{aligned} x_2x - y_2y - u_2u - v_2v &= x_1, \\ y_2x + x_2y + v_2u - u_2v &= y_1, \\ u_2x - v_2y + x_2u + y_2v &= u_1, \\ v_2x + u_2y - y_2u + x_2v &= v_1. \end{aligned}$$

Αφήνουμε στους αναγνώστες την επίλυση αυτού του συστήματος και την εύρεση του αριστερού ηλίκου της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$ . Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το δεξιό ηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$ .

Αν ο διαιρετέος  $q_1$  ισούται με τον πραγματικό αριθμό 1, το ηλίκο της αριστερής και της δεξιάς διαίρεσης του

$q_1 = 1$  διά του τετραδικού  $q_2$  είναι ο (ίδιος και στις δύο περιπτώσεις) τετραδικός

$$p = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(αφήνουμε την απόδειξη για τους αναγνώστες). Γι' αυτό το λόγο, ο τετραδικός  $p$  συμβολίζεται ως

$$q_2^{-1} = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Το δεξιό ηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του μη μηδενικού τετραδικού  $q_2$  γράφεται ως

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

και το αριστερό ηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$  γράφεται ως

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Στην πράξη, η διαίρεση των τετραδικών εκτελείται με άλλη μέθοδο, στην οποία χρησιμοποιούνται τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μέρη των τετραδικών.

## Βαθμωτοί και διανυσματικοί τετραδικοί

Όπως οι μιγαδικοί αριθμοί αναλύονται στο πραγματικό και στο φανταστικό τους μέρος, έτσι και ο τετραδικός

$$q = x + yi + uj + vk$$

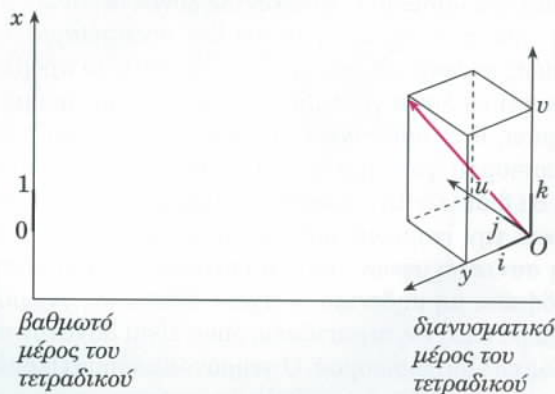
μπορεί να γραφεί ως

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Ο πρώτος όρος αυτής της παράστασης καλείται *βαθμωτό μέρος* του τετραδικού και ο δεύτερος όρος (αυτός στην παρένθεση) καλείται *διανυσματικό μέρος*. Το βαθμωτό μέρος  $x$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, ενώ το διανυσματικό μέρος μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα διάνυσμα

$$r = yi + uj + vk$$

του τρισδιάστατου χώρου, όπου τα  $i, j$  και  $k$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Επομένως, κάθε τετραδικός  $q$  γράφεται ως το άθροισμα

$$q = x + \mathbf{r},$$

όπου  $x$  είναι το βαθμωτό μέρος του  $q$  και  $\mathbf{r}$  το διανυσματικό του μέρος. Αν  $\mathbf{r} = 0$ , τότε  $q = x$ , και ο  $q$  καλείται *βαθμωτός τετραδικός*. Αν  $x = 0$ , τότε  $q = \mathbf{r}$ , και ο  $q$  καλείται *διανυσματικός τετραδικός*.

Όταν προσθέτουμε τετραδικούς, τα βαθμωτά και τα διανυσματικά τους μέρη προστίθενται ανεξάρτητα.

Ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών είναι πιο περίπλοκος. Αν τα  $q_1$  και  $q_2$  είναι βαθμωτοί τετραδικοί, τότε το γινόμενο τους είναι επίσης βαθμωτός τετραδικός. Αν ο  $q_1 = x$  είναι βαθμωτός και ο  $q_2 = \mathbf{r}$  είναι διανυσματικός, το γινόμενο

$$q_1 q_2 = x \cdot (yi + uj + vk) = (xy)i + (xu)j + (xv)k$$

είναι διανυσματικός τετραδικός, και ο πολλαπλασιασμός συμπίπτει με τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος  $\mathbf{r}$  επί τον πραγματικό αριθμό  $x$  στον τρισδιάστατο χώρο.

Τέλος, αν και το  $q_1$  και το  $q_2$  είναι διανυσματικοί τετραδικοί—δηλαδή, αν

$$\begin{aligned} q_1 = \mathbf{r}_1 &= y_1 i + u_1 j + v_1 k \\ q_2 = \mathbf{r}_2 &= y_2 i + u_2 j + v_2 k \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= -(y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_1 v_2 - v_1 u_2) i \\ &\quad + (v_1 y_2 - y_1 v_2) j + (y_1 u_2 - u_1 y_2) k. \end{aligned}$$

Όπως διαπιστώνουμε από αυτό τον τύπο, το βαθμωτό μέρος του  $q_1 q_2$  ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{r}_1$  και  $\mathbf{r}_2$ , με το πρόσημο αντεστραμμένο. Το διανυσματικό μέρος του  $q_1 q_2$  ισούται με το σύννηθες διανυσματικό γινόμενο  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  εκφρασμένο βάσει των συντεταγμένων του (δείτε τον τύπο (4)).

Αν συνδυάσουμε όλες τις περιπτώσεις, προκύπτει ο γενικός τύπος για τον πολλαπλασιασμό των τετραδικών. Αν  $q_1 = x_1 + \mathbf{r}_1$  και  $q_2 = x_2 + \mathbf{r}_2$ , τότε

$$q_1 q_2 = (x_1 x_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (x_1 \mathbf{r}_2 + x_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

## Τι ισχύει για τις τριάδες;

Γιατί δεν μπόρεσε να βρει ο Hamilton μια εύλογη μέθοδο πολλαπλασιασμού τριάδων; Ο λόγος δεν ήταν η έλλειψη επινοητικότητας ή το ότι δεν προσπάθησε αρκετά. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί για τους «τρισδιάστατους αριθμούς». Πράγματι, έχει αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει πράξη πολλαπλασιασμού για σημεία του τρισδιάστατου χώρου η οποία θα διαθέτει την προσεταιριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα (ως προς την πρόσθεση συντεταγμένων) και να επιτρέπει τη διαίρεση με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο. Επιπλέον, γνωρίζουμε σήμερα όλες τις περιπτώσεις όπου είναι δυνατόν αυτό το είδος πολλαπλασιασμού. Ο γερμανός μαθηματικός F.G. Frobenius (1849-1917) απέδειξε ότι υπάρχει σε *τρεις μόνο περιπτώσεις*: στη μία διάσταση (πραγματικοί αριθμοί),

στις δύο (μιγαδικοί αριθμοί) και στις τέσσερις (τετραδικοί αριθμοί).

## Περαιτέρω εξελιξεις

Ο Hamilton και αρκετοί άλλοι στηρίξαν μεγάλες ελπίδες στους τετραδικούς. Ανέμεναν ότι οι τετραδικοί θα προσέφεραν πλούσια αποτελέσματα, σημαντικότερα και από των μιγαδικών. Πράγματι, οι τετραδικοί χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή κομψών τύπων που περιέγραφαν ένα πλήθος σημαντικών φυσικών φαινομένων. Όμως, τα οράματα για την περαιτέρω ανάπτυξη του αλγεβρικού και του συναρτησιακού λογισμού των τετραδικών δεν έγινε δυνατόν να υλοποιηθούν.

Για τους τετραδικούς, το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας που αφορά την ύπαρξη ριζών οποιασδήποτε πολυωνύμου με τετραδικούς συντελεστές δεν ισχύει. Από την άλλη, για κάθε τετραδικό υπάρχει ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με τετραδικούς συντελεστές το οποίο έχει ως ρίζα τον δεδομένο τετραδικό.

Η αισιοδοξία έδωσε τη θέση της στο σκεπτικισμό. Στις αρχές του 20ού αιώνα, οι μαθηματικοί έχασαν το ενδιαφέρον τους για τους τετραδικούς. Ωστόσο, λίγο αργότερα, στη θεωρητική φυσική ανέκυψε η ανάγκη να βρεθεί ένας μαθηματικός φορμαλισμός που θα περιέγραφε συγκεκριμένα φαινόμενα τα οποία σχετιζόνταν με το λεγόμενο *σπιν* των στοιχειωδών σωματιδίων. Οι τετραδικοί αριθμοί κέρδισαν και πάλι την αναγνώριση όταν έγινε κατανοητός ο ρόλος τους στην κατασκευή διαφόρων γεωμετρικών μετασχηματισμών του χώρου που ενδιαφέρουν την κβαντική φυσική. Οι γεωμετρικές ιδιότητες των τετραδικών είναι ένα ξεχωριστό και ιδιαίτερα μεγάλο θέμα, στο οποίο ελπίζουμε να αφιερώσουμε ένα ειδικό άρθρο. ■



**ΚΑΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ**  
 ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ  
 Πανεπιστημίου & Πεισμαζόγλου 5, 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
 Web site: www.katoptro.gr e-mail: info@katoptro.gr

# ΕΚΚΩΦΑΝΤΙΚΟ λίπασμα

Διερευνώντας ένα εκρηκτικό περιστατικό

B. Novozhilov

**Τ**ΟΝ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟ ΤΟΥ 1953, ΤΟ *TYRRHENIA* —ένα ατμόπλοιο με εκτόπισμα τεσσάρων χιλιάδων τόνων— εξερράγη και βυθίστηκε στην Ερυθρά Θάλασσα. Βεβαίως, στα ναυτικά χρονικά έχουν καταγραφεί και μεγαλύτερες καταστροφές —εκρήξεις και πυρκαγιές σε δεξαμενόπλοια γεμάτα πετρέλαιο, καθώς και σε φορτηγά που μετέφεραν πυρομαχικά. Το *Tyrrhenia*, όμως, ήταν φορτωμένο με νιτρικό αμμώνιο —με μια ουσία που δύσκολα θα την υποπευόμασταν για εκρηκτική (εκ πρώτης όψεως τουλάχιστον). Αν το θλιβερό αυτό περιστατικό αποτελούσε τη μοναδική περίπτωση τέτοιας καταστροφής, θα αναζητούσαμε αλλού την αιτία της έκρηξης. Ωστόσο, τα αρχεία του νηογνώμονα του Λούντ, όπου καταγράφεται κάθε μείζων ναυτική καταστροφή, περιείχαν δεκάδες αναφορές για πυρκαγιές και εκρήξεις που σχετίζονταν με το νιτρικό αμμώνιο. Μάλιστα, τέτοιες καταστροφές σημειώνονταν συχνότερα κατά τις δεκαετίες του 1940 και του 1950, όταν η παραγωγή τής εν λόγω ουσίας είχε γνωρίσει ιδιαίτερα μεγάλη αύξηση. Η χειρότερη χρονιά υπήρξε το 1947, όταν σημειώθηκαν τρεις ισχυρές εκρήξεις εντός λιμένος κατά τη φόρτωση της ουσίας, οι οποίες προκάλεσαν μεγάλο αριθμό θυμάτων.

Το νιτρικό αμμώνιο ( $\text{NH}_4\text{NO}_3$ ) χρησιμοποιείται σε μεγάλη έκταση στη βιομηχανία και τη γεωργία. Το χημικό αυτό προϊόν παράγεται σε ποσότητες που ανέρχονται σε δεκάδες εκατομμύρια τόνους ετησίως. Ο ίδιος ο χημικός του τύπος σε μεγάλο βαθμό μάς προιδεάζει για τις πιθανές χρήσεις του. Το νιτρικό αμμώνιο περιέχει άζωτο σε μεγάλη αναλογία, και

έχει ιδιαίτερη σημασία ότι το άζωτο είναι παρόν σε μορφές που απορροφούνται εξαιρετικά εύκολα από τα φυτά: σε ιόντα αμμωνίου και σε νιτρικές ρίζες. Λόγω αυτής της ιδιότητάς του, το νιτρικό αμμώνιο περιλαμβάνεται μεταξύ των πλέον αποδοτικών ανόργανων λιπασμάτων. Επιπλέον, η παρουσία μεγάλης ποσότητας οξυγόνου στο νιτρικό αμμώνιο



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

οδηγεί και σε μια άλλη (όχι κατ' ανάγκην ειρηνική) χρήση του· συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ως οξειδωτικό στην παραγωγή πυρίτιδας και εκρηκτικών υλών. Χωρίς την προσθήκη οργανικών συστατικών, ωστόσο, το νιτρικό αμμώνιο δεν είναι εκρηκτικό. Μάλιστα, χρησιμοποιείται συχνά σε χημικά πειράματα που εκτελούνται μπροστά σε κοινό. Τουναντίον, τα μείγματα του  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  με τρινιτροτολουόλιο ή με αργίλιο αποτελούν εξαιρετικά ισχυρές εκρηκτικές ύλες.

Ας προσπαθήσουμε, λοιπόν, να ανακαλύψουμε πώς ένα απολύτως ακίνδυνο ανόργανο λίπασμα, το νιτρικό αμμώνιο, το οποίο παραμένει επί χρόνια σωρευμένο σε αποθήκες ή στο ύπαιθρο, μπορεί να μετατραπεί σε αιτία τόσο πολλών ναυτικών τραγωδιών.

Οι εκρήξεις χαρακτηρίζονται από την ταχύτατη απελευθέρωση μεγάλης ποσότητας ενέργειας, η οποία συνοδεύεται από δραστική μεταβολή στην κατάσταση του εκρηκτικού. Τα αέρια που σχηματίζονται κατά την έκρηξη, καθώς εκτονώνονται διασπασμένα, παράγουν τεράστια ποσότητα έργου.

Φυσικά, το νόημα όρων όπως «ταχύτατη» και «μεγάλη» είναι πάντοτε σχετικό. Ένα χιλιόγραμμο κοκ που καίγεται στον αέρα παράγει ενέργεια περίπου τριάντα εκατομμυρίων joule. Πρόκειται για ενέργεια αρκετή ώστε η θερμοκρασία των προϊόντων της καύσης να ανέλθει στο επίπεδο των πολλών χιλιάδων βαθμών. Για αέρια κανονικής πυκνότητας, τέτοιες θερμοκρασίες αντιστοιχούν σε πίεση εκατοντάδων ατμοσφαιρών. Παρότι, λοιπόν, το σύστημα κοκ-οξυγόνου περιέχει αρκετή χημική ενέργεια ώστε να δώσει μια έκρηξη, στην πραγματικότητα το κοκ δεν εκρήγνυται — απλώς καίγεται ήρεμα.

Για να σημειωθεί έκρηξη χρειάζεται να πληρωθεί μία ακόμη προϋπόθεση: η ενέργεια πρέπει να απελευθερωθεί ταχέως. Στην πραγματικότητα, το κοκ αρχικά αναφλέγεται στην επιφάνειά του, οπότε τα βαθύτερα στρώματά του αρχίζουν να καίγονται μόνο αφού θερμανθούν από

την ενέργεια που εκλύεται στα επιφανειακά στρώματα. Τόσο η διαδικασία της θέρμανσης όσο και η μεταφορά οξυγόνου προς τα ένδον συντελούνται με τέτοια βραδύτητα ώστε τα αέρια προϊόντα της καύσης έχουν άφθονο χρόνο στη διάθεσή τους για να εκτονωθούν. Ως εκ τούτου, η αντίδραση αυτή δεν συνοδεύεται από σημαντική αύξηση της πίεσης.

Εντούτοις, υπάρχουν και κάποιες ουσίες που δεν χρειάζονται εξωτερικά οξειδωτικά μέσα για να επέλθει ο χημικός μετασχηματισμός τους. Σχετικά παραδείγματα αποτελούν τα προωθητικά των πυραύλων και η δυναμίτιδα.

Μια τέτοια ουσία είναι το τρινιτροτολουόλιο,  $\text{C}_7\text{H}_5(\text{NO}_2)_3$ , γνωστό επίσης και ως τολίτη. Αν ανάψουμε την επιφάνεια του τολίτη, εκείνος αναφλέγεται εύκολα και καίγεται ήρεμα. Καθώς προχωρεί η καύση, το εσωτερικό του τολίτη θερμαίνεται βραδέως. Και όμως, παρότι αυτή η ουσία παρουσιάζει θερμότητα αντίδρασης κατά πολύ μικρότερη από εκείνη ενός συνήθους καυσίμου (ανέρχεται μόλις σε 4 MJ/kg), ο τολίτης μπορεί να εκραγεί. Για να τον κάνουμε να εκραγεί, δεν χρειάζεται παρά να αυξήσουμε τη θερμοκρασία σε όλο του τον όγκο. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο — για παράδειγμα, με συμπίεση. Εν τωιαύτη περίπτωση, η αντίδραση πραγματοποιείται σε ολόκληρο τον όγκο της ουσίας και προχωρεί τόσο γρήγορα ώστε τα παραγόμενα αέρια δεν προλαβαίνουν να εκτονωθούν όσο διαρκεί η αντίδραση. Τα αέρια αυτά, καταλαμβάνοντας έναν όγκο κατά προσέγγιση ίσο με εκείνον του τολίτη πριν από την έκρηξη και έχοντας αποκτήσει πολύ υψηλή θερμοκρασία, δημιουργούν πίεση που ανέρχεται σε δεκάδες και εκατοντάδες χιλιάδες ατμοσφαιρες. Η ταχύτατη διαστολή των αερίων που επακολουθεί καταστρέφει οτιδήποτε τύχει να βρίσκεται εκεί κοντά — μια κλασική έκρηξη.

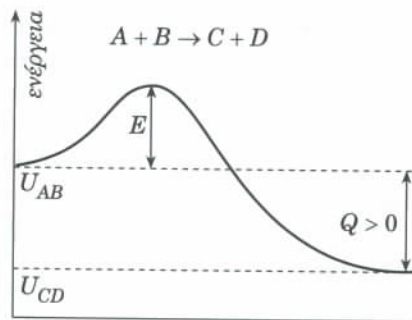
Στο παρόν άρθρο, θα εξετάσουμε την έννοια της θερμικής έκρηξης — μιας αυθόρμητης εκρηκτικής διαδικασίας που συνδέεται με την απελευθέρωση χημικής ενέργειας.

Κατ' αρχάς, ας ανασκοπήσουμε μερικά βασικά γεγονότα σχετικά με τις ταχύτητες των χημικών αντιδράσεων.

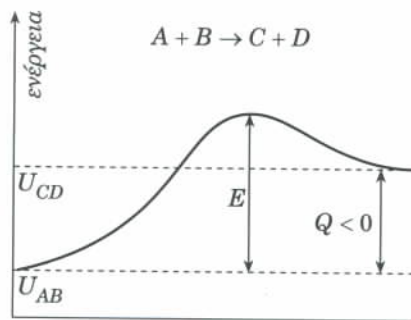
Το πρώτο χαρακτηριστικό των χημικών αντιδράσεων που τραβά την προσοχή μας είναι η βραδύτητά τους. Για παράδειγμα, σε ένα αέριο που βρίσκεται υπό κανονικές συνθήκες, κάθε μόριο συμμετέχει σε  $10^{10}$  περίπου κρούσεις ανά δευτερόλεπτο. Αν κάθε κρούση οδηγούσε και σε χημική μεταβολή, η αντίστοιχη αντίδραση θα συντελούνταν σχεδόν ακαριαία. Ωστόσο, τα χημικά πειράματα διαφεύδουν ένα τέτοιο σενάριο. Για παράδειγμα, ένα μείγμα υδρογόνου και οξυγόνου (οξυυδρικό αέριο, επίσης γνωστό και ως «κροτούν αέριο») μπορεί να αποθηκευτεί σε θερμοκρασία δωματίου χωρίς να δημιουργείται ο παραμικρός κίνδυνος. Και τούτο επειδή μόνο ένα ελάχιστο ποσοστό απ' όλες τις κρούσεις αποβαίνει ενεργό (αποτελεσματικό) και οδηγεί σε χημική αντίδραση.

Η βασική χημική διαδικασία συνίσταται στη μετατροπή των μορίων ενός τύπου σε μόρια άλλου τύπου. Κατά τη συγκεκριμένη διαδικασία, κάποιοι χημικοί δεσμοί μεταξύ των ατόμων καταστρέφονται, ενώ στη θέση τους δημιουργούνται άλλοι, νέοι και διαφορετικοί. Αν οι νέοι δεσμοί είναι ισχυρότεροι από τους παλιούς, η αντίδραση απελευθερώνει ενέργεια (πρόκειται για εξώθερμη διαδικασία). Τούτο, ωστόσο, καθόλου δεν σημαίνει ότι η αντίδραση θα προχωρήσει οπωσδήποτε γρήγορα. Βλέπετε, υπάρχει μια αναγκαία προϋπόθεση για να σχηματιστούν νέοι (και ισχυρότεροι) δεσμοί: πρέπει πρώτα να καταστραφούν οι παλιοί, κάτι το οποίο απαιτεί ενέργεια.

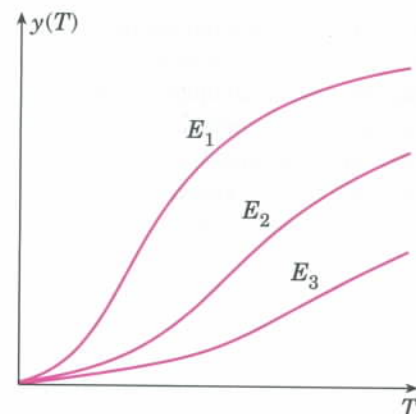
Η ανθεκτικότητα κάθε σύνθετου συστήματος (ατόμου, μορίου ή πυρήνα) χαρακτηρίζεται από την ενέργεια σύνδεσής του. Η ενέργεια αυτή ισούται με το έργο που πρέπει να παραχθεί ώστε το σύστημα να διασπαστεί στα συστατικά του μέρη. Για παράδειγμα, η ενέργεια σύνδεσης του μορίου του υδρογόνου ανέρχεται στα  $7,2 \cdot 10^{-19}$  J. Τόση είναι η ενέργεια που πρέπει να δαπανηθεί για να μετατραπεί το εν λόγω μόριο σε δύο χω-



α



β



Σχήμα 2

Η αναλογία των ενεργών μορίων ως συνάρτηση της θερμοκρασίας για διάφορες ενέργειες ενεργοποίησης ( $E_1 < E_2 < E_3$ ).

Σχήμα 1

Η ενέργεια ενεργοποίησης  $E$  και η θερμότητα αντίδρασης  $Q$  για την αντίδραση  $A + B \rightarrow C + D$  στην περίπτωση (α) εξώθερμης και (β) ενδόθερμης αντίδρασης.

ριστά ελεύθερα άτομα υδρογόνου. Κατά συνέπεια, η ίδια ακριβώς ποσότητα ενέργειας θα απελευθερωθεί όταν θα ενωθούν δύο άτομα υδρογόνου για να σχηματίσουν ένα μόριο.

Η διαφορά ανάμεσα στις ενέργειες σύνδεσης των προϊόντων μιας χημικής αντίδρασης και σε εκείνες των αντιδρώντων της ονομάζεται *θερμότητα αντίδρασης* (επειδή στην πορεία της αντίδρασης η εσωτερική μοριακή ενέργεια συνήθως μετατρέπεται σε θερμότητα). Στην ειδική περίπτωση όπου αναφερόμαστε σε αντιδράσεις καύσης, αν τη θερμότητα αντίδρασης την υπολογίσουμε ανά μονάδα μάζας ή όγκου κάποιου από τα προϊόντα ή τα αντιδρώντα, παίρνουμε τη *θερμότητα καύσης*.

Αν κάποια αντίδραση συνοδεύεται από απελευθέρωση ενέργειας, τούτο δεν σημαίνει απαραίτητως πως θα προχωρήσει και γρήγορα. Το γιατί έχουν έτσι τα πράγματα θα μας βοηθήσει να το εξηγήσουμε το Σχήμα 1. Κατά την αντίδραση  $A + B \rightarrow C + D$ , οι δεσμοί στα μόρια  $A$  και  $B$  πρέπει ή να καταστραφούν ή τουλάχιστον να εξασθενήσουν. Για να καταστεί δυνατή η ικανοποίηση αυτής της απαίτησης, πρέπει να προσφερθεί στο σύστημα συγκεκριμένη ποσότητα ενέργειας  $E$  (μια καθορισμένη ποσότητα για κάθε δεδομένη αντίδραση), η οποία ονομάζεται *ενέργεια ενεργοποίησης* της αντίδρασης. Όπως αντιλαμβάνεται κανείς αμέσως, η ενέργεια ενεργοποίησης πρέπει να είναι της τάξεως μεγέθους του αθροίσματος των ενεργειών σύνδεσης των μορίων  $A$  και  $B$ . Συνεπώς, κάθε χημική δια-

δικασία προσκρούει σε ένα ενεργειακό φράγμα στο πρώτο κιάλας στάδιο της. Τα μόρια που συμμετέχουν στην αντίδραση πρέπει να διαθέτουν επαρκή θερμική ενέργεια ώστε να υπερπηδήσουν ένα «εμπόδιο» ύψους  $E$ .

Η θερμική (μεταφορική ή ταλαντωτική) κίνηση θα μπορούσε να καταστρέψει ή να εξασθενίσει τους χημικούς δεσμούς. Η φύση, ωστόσο, είναι έτσι φτιαγμένη ώστε η ενέργεια της θερμικής κίνησης σε μέτριες θερμοκρασίες να υπολείπεται κατά πολύ της ενέργειας ενεργοποίησης. Η μέση ενέργεια της θερμικής κίνησης είναι της τάξεως του  $kT$  —δηλαδή,  $\sim 4 \cdot 10^{-21}$  J—, ενώ η ενέργεια ενεργοποίησης έχει τιμή κατά εκατοντάδες φορές μεγαλύτερη. Ιδού, λοιπόν, πώς εξηγείται το αμελητέο πλήθος των ενεργών κρούσεων. Η χημική αντίδραση προχωρά με τη συμμετοχή μόνο των μορίων εκείνων που διαθέτουν θερμική ενέργεια πολύ μεγαλύτερη από τη μέση. Τέτοια μόρια όμως είναι εξαιρετικά σπάνια.

Η αναλογία των μορίων που σε θερμοκρασία  $T$  έχουν ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση της  $E$  δίνεται από τον εξής απλούστατο τύπο:

$$y = e^{-E/kT}.$$

(Ο αναγνώστης θα πρέπει να επιδείξει καλοπιστία και να αποδεχθεί την αλήθεια αυτού του τύπου —εάν επιχειρούσαμε να τον εξαγάγουμε με περισσότερο ή λιγότερο αυστηρό τρόπο, θα υποχρεωνόμασταν να κάνουμε μια μεγάλη παρέκβαση.) Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται ποιοτικά η εξάρτηση του  $y$  από τη θερμοκρασία  $T$  για

διάφορες τιμές της ενέργειας ενεργοποίησης  $E$ .

Συνεπώς, η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης —δηλαδή, η ποσότητα (εκφρασμένη σε χιλιογράμματα, γραμμομόρια ή σωματίδια) κατά την οποία μειώνεται κάποιο από τα αντιδρώντα ή κατά την οποία αυξάνεται κάποιο από τα προϊόντα εντός ενός μοναδιαίου όγκου ανά μονάδα του χρόνου— μπορεί να γραφεί ως

$$v = ze^{-E/kT},$$

όπου το  $z$  προσδιορίζεται είτε από το πλήθος των κρούσεων (στα αέρια) είτε από τον αριθμό των μοριακών δεσμών που πρέπει να σπάσουν ώστε να καταστεί δυνατή η χημική μεταβολή (στα συμπυκνωμένα σώματα). Η  $v$  και το  $z$  έχουν τις ίδιες διαστάσεις:  $\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ ,  $\text{mole}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$  ή και  $1/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ . Για να αποκτήσετε μια αίσθηση σχετικά με το πόσο έντονα εξαρτάται η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης από τη θερμοκρασία, σας συνιστώ να ρίξετε μια ματιά σε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα —λύστε το Πρόβλημα 1 που θα βρείτε στο τέλος του άρθρου.

Είμαστε έτοιμοι πλέον να εξηγήσουμε το φαινόμενο των θερμικών εκρήξεων. Η θερμική αυτανάφλεξη εξηγείται πάρα πολύ απλά. Αν κάποια αντίδραση συνοδεύεται από απελευθέρωση θερμότητας, η ίδια η ουσία θερμαίνεται. Όπως είδαμε, η θέρμανση αυξάνει την ταχύτητα των χημικών αντιδράσεων. Η επιτάχυνση της αντίδρασης οδηγεί με τη σειρά της σε

εντατικότερη απελευθέρωση θερμότητας. Τη δυνατότητα μιας προοδευτικά αυτοεπιταχυνόμενης χημικής αντίδρασης την υπέδειξε στα τέλη του 19ου αιώνα ο μεγάλος ολλανδός χημικός Jacobus Henricus van't Hoff. Το 1928, ο Nikolay Semyonov διατύπωσε μια ποσοτική θεωρία των θερμικών εκρήξεων που δικαίως μπορεί να χαρακτηριστεί κλασική. Πρόκειται για μια θεωρία που εξηγείται αρκετά εύκολα, η οποία ωστόσο εξακολουθεί να αποτελεί ακόμη και σήμερα, έναν σχεδόν αιώνα αφ' ότου διατυπώθηκε, τη βάση για τη διερεύνηση και επίλυση νέων προβλημάτων στην περιοχή της φυσικοχημείας, της επιστήμης που πραγματεύεται τα φυσικά θεμέλια των χημικών διαδικασιών.

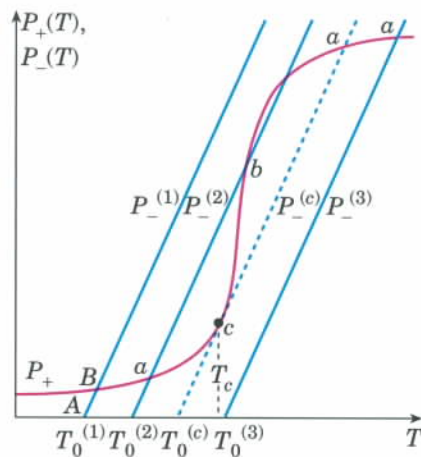
Εάν, από όσα είπαμε παραπάνω, σπεύδαμε τώρα να συμπεράνουμε ότι κάθε μείγμα όπου πραγματοποιείται κάποια εξώθερμη διαδικασία θα εκραγεί, θα υποπίπταμε σε σφάλμα. Σε τελική ανάλυση, το δοχείο όπου συντελείται η αντίδραση είναι περιορισμένο, και έτσι η απελευθερούμενη θερμότητα μπορεί να απορροφηθεί από το περιβάλλον. Ο ανταγωνισμός ανάμεσα στην παραγωγή θερμότητας και στην απαγωγή της προς το περιβάλλον οδηγεί σε μια λίαν αξιοπερίεργη συμπεριφορά στα συστήματα που παρουσιάζουν αυτοεπισχυόμενη χημική δραστηριότητα.

Ας στραφούμε, λοιπόν, στις ποσοτικές πλευρές αυτού του φαινομένου. Φανταστείτε μια αντίδραση η οποία συντελείται με θερμότητα καύσης  $Q$  (J/kg) εντός κάποιας περιοχής όγκου  $V$ . Η ποσότητα της θερμότητας που απελευθερώνεται στον συγκεκριμένο όγκο ανά δευτερόλεπτο δίνεται από την έκφραση

$$P_+ = zQVe^{-E/kT} \text{ (J/s)},$$

όπου με  $T$  συμβολίζουμε τη θερμοκρασία της αντιδρώσας ουσίας στον όγκο  $V$ .

Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσω  $T_0$  υποτίθεται σταθερή. Οι θερμικές απώλειες από τον όγκο όπου πραγματοποιείται η αντίδραση είναι ανάλογες με τη θερμοκρασιακή διαφορά  $T - T_0$  και με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει τον όγκο



Σχήμα 3

Η εξάρτηση της απελευθέρωσης θερμότητας  $P_+$  και της απαγωγής θερμότητας  $P_-$  από τη θερμοκρασία.

Η. Συνεπώς, κάθε δευτερόλεπτο μεταφέρεται από την αντιδρώσα ουσία προς το περιβάλλον ποσότητα θερμότητας ίση με

$$P_- = hS(T - T_0),$$

όπου με  $h$  συμβολίζουμε το συντελεστή μεταβίβασης θερμότητας. Η τιμή του συντελεστή αυτού φυσικά εξαρτάται από την ικανότητα της αντιδρώσας ουσίας να άγει τη θερμότητα —το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας  $\lambda$ — και από τη χαρακτηριστική γραμμική διάσταση  $r$  του αντικειμένου (για μια σφαίρα, επί παραδείγματι, η  $r$  θα παρίστανε την ακτίνα της). Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$h = K\lambda/r.$$

Ο συντελεστής  $K$  αντιπροσωπεύει μια σταθερά η οποία περιγράφει την επίδραση του σχήματος του σώματος στη διαδικασία της μεταβίβασης θερμότητας. Είναι φανερό γιατί η παράμετρος  $r$  βρίσκεται στον παρονομαστή: δεδομένης της ίδιας θερμοκρασιακής διαφοράς ανάμεσα σε δύο σημεία ενός σώματος, η ροή θερμότητας (δηλαδή, η ποσότητα της θερμότητας που διέρχεται από μια επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού ανά μονάδα χρόνου) μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των δύο συγκεκριμένων σημείων.

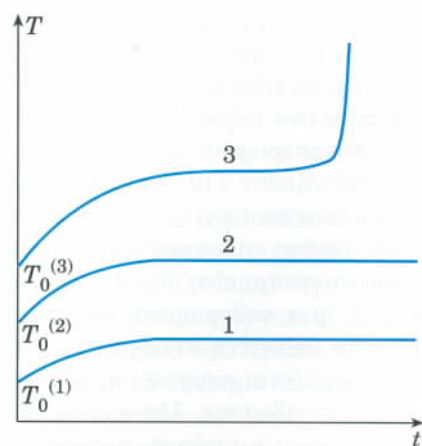
Στο Σχήμα 3 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πα-

ραγωγής θερμότητας  $P_+(T)$  και μερικές ευθείες μεταβίβασης θερμότητας  $P_-(T)$  που αντιστοιχούν σε διαφορετικές θερμοκρασίες του περιβάλλοντος. Προσεξτε ιδιαίτερα σε πόσα σημεία τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις της  $P_+$  και της  $P_-$  —δηλαδή, πόσες ρίζες έχει η εξίσωση

$$P_+ = P_- \quad (*)$$

Λόγω της έντονης μη γραμμικότητας που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση παραγωγής θερμότητας, τα σημεία τομής μπορεί να είναι περισσότερα από ένα. Όταν στο περιβάλλον επικρατεί θερμοκρασία  $T_0$  αρκούντως υψηλή ή αρκούντως χαμηλή ( $T_0^{(1)}$  και  $T_0^{(3)}$ ), η εξίσωση (\*) έχει μόνο μία ρίζα. Εντούτοις, σε κάποια ενδιάμεση θερμοκρασία  $T_0^{(2)}$  οι γραφικές παραστάσεις είναι δυνατόν να τέμνονται σε τρία σημεία. Η εξίσωση (\*) περιγράφει την κατάσταση θερμικής ισορροπίας όπου όλη η παραγόμενη θερμότητα μεταφέρεται στο περιβάλλον. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι σημεία τομής όπως το  $a$ , όπου η καμπύλη απαγωγής θερμότητας έχει μεγαλύτερη κλίση από την καμπύλη απελευθέρωσης θερμότητας, είναι ευσταθή, ενώ σημεία τομής όπως το  $b$  είναι ασταθή.

Ας έλθουμε τώρα να εξετάσουμε πώς συμπεριφέρεται το αντιδρών σύστημα με την πάροδο του χρόνου. Την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$  η ουσία έχει θερμοκρασία  $T_0^{(1)}$  ίση με



Σχήμα 4

Η μεταβολή της θερμοκρασίας στον υποκρίσιμο (καμπύλες 1 και 2) και στον υπερκρίσιμο (καμπύλη 3) τρόπο θέρμανσης.



τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος (σημείο  $A$  στο Σχήμα 3). Εφόσον στο σημείο αυτό έχουμε  $P_+ > P_-$ , το σύστημα θα θερμανθεί. Στο Σχήμα 4 τούτη η διαδικασία αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση του συστήματος κατά μήκος της καμπύλης 1. Όπως διαπιστώνουμε, η αύξηση της θερμοκρασίας επιβραδύνεται με την πάροδο του χρόνου. Η παρατηρούμενη επιβράδυνση οφείλεται στο ότι η διαφορά  $P_+ - P_-$  μειώνεται καθώς το σύστημα θερμαίνεται, και αυτή η διαφορά καθορίζει την αύξηση της θερμοκρασίας. Η θέρμανση θα σταματήσει στο σημείο  $B$  (Σχήμα 3), το οποίο είναι ευσταθές.

Παρόμοια εξάρτηση της θερμοκρασίας από το χρόνο (καμπύλη 2 στο Σχήμα 4) θα διαπιστώσουμε και για μια κάπως υψηλότερη αρχική θερμοκρασία  $T_0^{(2)}$ . Στην προκειμένη περίπτωση, το σύστημα θα θερμανθεί μέχρι κάποιας υψηλότερης τελικής θερμοκρασίας και θα καταλήξει σε μια ευσταθή κατάσταση.

Αυξάνοντας τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσου (και, κατά συνέπεια, την αρχική θερμοκρασία του αντιδρώντος συστήματος), μπορούμε να επιτύχουμε έναν ποιοτικά διαφορετικό τρόπο θέρμανσης. Ας αναλύσουμε πώς θα προχωρήσει η θέρμανση για την αρχική θερμοκρασία  $T_0^{(3)}$  (καμπύλη 3 στο Σχήμα 4). Στην αρχή της διαδικασίας, η εξάρτηση της θερμοκρασίας του συστήματος από το χρόνο  $T(t)$  μοιάζει με εκείνη που συναντήσαμε στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις: η διαφορά  $P_+ - P_-$  μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, και έτσι η αύξηση της θερμοκρασίας επιβραδύνεται. Το σύστημα χρειάζεται πολύ χρόνο για να διαβεί το στενό χάσμα ανάμεσα στις καμπύλες παραγωγής θερμότητας και απαγωγής θερμότητας —το στάδιο αυτό αντιστοιχεί σε ένα σχεδόν οριζόντιο τμήμα της θερμοκρασιακής εξάρτησης  $T(t)$ . Αφού η διαφορά  $P_+ - P_-$  περάσει αυτό το σημείο ελαχίστου, η θερμοκρασία αυξάνεται ραγδαία: η αύξησή της είναι ακόμη πιο απότομη και από εκθετική. Μια αυτοεπιταχυνόμενη χημική διαδικασία έχει ξεκινήσει. Και σε τούτο ακριβώς συνίσταται η *θερμική έκρηξη*: στη θερμική αυτοεπιτα-

χυνση μιας εξώθερμης χημικής διαδικασίας.

Το πλέον αξιόλογο χαρακτηριστικό του φαινομένου που μελετάμε συνίσταται στην ύπαρξη μιας κρίσιμης κατάστασης. Διαπιστώνουμε ότι η βαθμιαία αύξηση της θερμοκρασίας  $T_0$  επιφέρει ριζική ποιοτική αλλαγή στη συμπεριφορά του συστήματος. Η θερμοκρασιακή εξάρτηση δεν μπορεί παρά να είναι ή του ενός τύπου ή του άλλου: είτε μια ασθενής θέρμανση είτε μια βίαιη θέρμανση της οποίας προηγείται μια «ήρεμη» (ή λανθάνουσα) περίοδος —με άλλα λόγια, μια έκρηξη.

Φαίνεται εύλογο, λοιπόν, να εικάσουμε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια κρίσιμη αρχική θερμοκρασία  $T_0^{(c)}$  η οποία αποτελεί τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα σ' αυτούς τους δύο ριζικά διαφορετικούς τύπους αντίδρασης. Χωρίς αμφιβολία, θα προσέξατε τη διακεκομμένη γραμμή  $P_-^{(c)}$  στο Σχήμα 3, η οποία αντιστοιχεί σε μια θερμοκρασία  $T_0^{(c)}$ . Η τιμή  $T_0^{(c)}$  είναι η κρίσιμη αρχική θερμοκρασία που αναζητούμε. Οι καμπύλες  $P_+$  και  $P_-^{(c)}$  έχουν ένα σημείο επαφής  $c$ . Αν η αρχική θερμοκρασία είναι μικρότερη της  $T_0^{(c)}$ , τότε έχουμε βραδεία θέρμανση. Μόλις όμως η  $T_0$  υπερβεί την  $T_0^{(c)}$ , έστω και ελάχιστα, η αντίδραση λαμβάνει αμέσως χαρακτήρα έκρηξης.

Προτού περάσουμε στην ανάλυση των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε έκρηξη, ας σημειώσουμε ότι η μεταβολή της αρχικής θερμοκρασίας δεν συνιστά τον μοναδικό τρόπο για να δημιουργήσουμε την κρίσιμη κατάσταση ενός συστήματος. Οι συναρτήσεις  $P_+$  και  $P_-$  εξαρτώνται και από άλλες παραμέτρους, των οποίων η μεταβολή μπορεί επίσης να φέρει το σύστημα από την υποκρίσιμη στην υπερκρίσιμη κατάσταση (το Πρόβλημα 3 διερευνά τούτη τη δυνατότητα).

Ας προσπαθήσουμε τώρα να ανακαλύψουμε το ποσοτικό κριτήριο για την έκρηξη. Θα περιμέναμε να έχει τη μορφή της ανισότητας  $T_0 > T_0^{(c)}$ , στην οποία υπεισέρχονται όλες οι παράμετροι του προβλήματος. Θέλουμε να καθορίσουμε τη συνθήκη η οποία πρέπει να ικανοποιείται ώστε οι κα-

μπύλες που παριστούν τις συναρτήσεις  $P_+(T)$  και  $P_-(T)$  να έχουν ένα σημείο επαφής. Πρόκειται για ενδιαφέρον πρόβλημα, το οποίο δεν θα δυσκολέψει ιδιαίτερα όσους είναι εξοικειωμένοι με τον διαφορικό λογισμό. Εάν ωστόσο δεν κατέχετε επαρκώς αυτή τη μαθηματική τεχνική, θα πρέπει να αποδεχθείτε ως δεδομένη την ορθότητα του αποτελέσματος και να προσπαθήσετε να κατανοήσετε το φυσικό του νόημα.

Προκειμένου να εφάπτονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων σε ένα σημείο, πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες: πρώτον, οι συναρτήσεις πρέπει να λαμβάνουν εκεί ίσες τιμές· δεύτερον, οι τιμές των παραγώγων τους στο συγκεκριμένο σημείο πρέπει να συμπίπτουν.

Οι παραπάνω δύο συνθήκες καθορίζουν την κρίσιμη θερμοκρασία —δηλαδή, τη θερμοκρασία της ουσίας που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής των καμπυλών  $P_+(T)$  και  $P_-(T)$ :

$$T_c = T_0 + \frac{kT_0^2}{E}$$

(η τιμή της  $T_0$  στον συγκεκριμένο τύπο ισούται με την  $T_0^{(c)}$ ).

Η τιμή της  $T_c$  παρέχει το κριτήριο για να λάβει χώρα έκρηξη:

$$\frac{zQV}{hS} \frac{E}{kT_0^2} e^{-E/kT_0} \geq \frac{1}{e}. \quad (**)$$

Εισάγοντας την  $T_c$  στην (\*\*), παίρνουμε τη συνθήκη για τον κρίσιμο τρόπο θέρμανσης: το σημείο «>» αντιστοιχεί σε έκρηξη.<sup>1</sup>

Έτσι, αν ξέρουμε το γεωμετρικό σχήμα και τον όγκο που καταλαμβάνει κάποια ουσία με γνωστές φυσικές και χημικές ιδιότητες, μπορούμε να προβλέψουμε αν θα εκραγεί.

1. Ιδού μια υπόδειξη για όσους επιθυμούν να εξαγάγουν αυτό τον τύπο και να καθορίσουν την τιμή της  $T_c$  και το κριτήριο για τη θερμική έκρηξη. Όπως είπαμε,  $kT/E \ll 1$ , οπότε κατά τον υπολογισμό της  $T_c$  μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έκφραση  $\sqrt{1 - 4kT_0/E}$  με την προσέγγισή της  $1 - 2kT_0/E - 2(kT_0/E)^2$ . Ομοίως, προκειμένου να εξαγάγουμε το κριτήριο για την έκρηξη, αντικαθιστούμε την έκφραση  $1/(1 + kT_0/E)$  με την προσέγγισή της  $1 - kT_0/E$ .

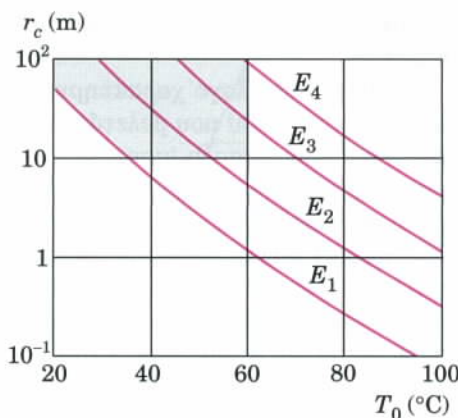
Είμαστε πλέον έτοιμοι να επιστρέψουμε στις καταστροφικές εκρήξεις που σημειώθηκαν σε πλοία φορτωμένα με νιτρικό αμμώνιο. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, όταν η εν λόγω ουσία διασπάται, έχουμε παραγωγή θερμότητας. Εφόσον η ταχύτητα της χημικής αντίδρασης βάνει αυξανόμενη με την άνοδο της θερμοκρασίας, η θερμική έκρηξη του νιτρικού αμμωνίου είναι κατ' αρχήν δυνατή. Ωστόσο, το ότι υφίσταται κάποια δυνατότητα δεν σημαίνει αναγκαστικά πως αυτή θα πραγματοποιηθεί κιόλας. Μόνο μια αριθμητική εκτίμηση μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα κατά πόσον όντως σημειώθηκε θερμική έκρηξη ή αν χρειάζεται να αναζητήσουμε κάπου αλλού τους λόγους των καταστροφών.

Ας γράψουμε λοιπόν τον τύπο (\*\*)  
κάπως διαφορετικά. Ο λόγος  $V/hS$  είναι προφανώς ανάλογος με το τετράγωνο της χαρακτηριστικής γραμμικής διάστασης του αντιδρώντος συστήματος —δηλαδή, με το  $r^2$ . Συνεπώς, το κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται για να λάβει χώρα θερμική έκρηξη μπορεί να γραφεί ως μια συνθήκη η οποία καθορίζει το κρίσιμο μέγεθος  $r_c$  του αντιδρώντος συστήματος:

$$r_c = \left( \lambda \frac{CkT_0^2}{zQE} e^{E/kT_0} \right)^{1/2}$$

Η σταθερά  $C$  χαρακτηρίζει την επίδραση που ασκεί το σχήμα της συντοριακής επιφάνειας του αντιδρώντος συστήματος στη χημική αντίδραση). Εάν  $r > r_c$ , θα σημειωθεί έκρηξη.

Οι τιμές των παραμέτρων στον τύπο που δίνει το  $r_c$  είναι γνωστές με διαφορετικούς βαθμούς ακριβείας. Η θερμότητα καύσης του νιτρικού αμμωνίου ανέρχεται σε 1 MJ/kg, ενώ ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ισούται με  $\lambda = 0,17 \text{ J/(m} \cdot \text{s} \cdot \text{K)}$ . Απεναντίας, τις ακριβείς τιμές των κινητικών σταθερών  $z$  και  $E$  για το νιτρικό αμμώνιο δεν τις γνωρίζουμε. Λόγω των αδυναμιών και των περιορισμών που παρουσιάζει η τρέχουσα κατανόησή μας των χημικών μεταβολών, αδυνατούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά τις εν λόγω σταθερές.



Σχήμα 5

Έξαρτηση της κρίσιμης γραμμικής διάστασης  $r_c$  από τη θερμοκρασία  $T_0$  του νιτρικού αμμωνίου για διάφορες τιμές της ενέργειας ενεργοποίησης:

$$E_1 = 2,4 \cdot 10^{-23} \text{ J}, \quad E_2 = 2,5 \cdot 10^{-23} \text{ J}, \\ E_3 = 2,6 \cdot 10^{-23} \text{ J}, \quad E_4 = 2,7 \cdot 10^{-23} \text{ J}.$$

Μπορούμε να τις μετρήσουμε, βέβαια, αλλά οι αναγκαίες προς τούτο διαδικασίες ενέχουν σημαντικές δυσκολίες και υπόκεινται σε μεγάλα πειραματικά σφάλματα. Ως εκ τούτου, οι πίνακες των κινητικών σταθερών δίνουν απλώς διαστήματα τιμών γι' αυτές τις παραμέτρους:  $z = (3-5) \cdot 10^{16} \text{ kg/(m}^3 \cdot \text{s)}$  και  $E = (2,4-2,7) \cdot 10^{-23} \text{ J}$ .

Συνεπώς, το πρόβλημά μας δεν συνίσταται απλώς στο να υπολογίσουμε την κρίσιμη γραμμική διάσταση  $r_c$  του αντιδρώντος συστήματος: στην πραγματικότητα, έχουμε να καθορίσουμε το διάστημα τιμών της  $r_c$  που αντιστοιχεί στα προαναφερθέντα διαστήματα τιμών των  $z$  και  $E$ .

Οι παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται εντονότερα η τιμή της κρίσιμης γραμμικής διάστασης  $r_c$  είναι η ενέργεια ενεργοποίησης και η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσου, καθότι εμφανίζονται στο όρισμα της εκθετικής συνάρτησης. Σε σύγκριση με αυτές, η συνεισφορά των υπόλοιπων παραμέτρων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Ας παραστήσουμε γραφικά την εξάρτηση της  $r_c$  από την  $T_0$  για διάφορες τιμές της ενέργειας ενεργοποίησης (Σχήμα 5). Η περιοχή του επιπέδου ( $r_c, T_0$ ) πάνω από την κάθε καμπύλη (μεγάλα  $r$  και υψηλές θερμοκρασίες) αντιστοιχεί σε έκρηξη. Όπως βλέπουμε, η κρίσιμη γραμμική διάσταση για δεδομένη τιμή της

$T_0$  πέφτει όσο μειώνεται η ενέργεια ενεργοποίησης.

Το διάγραμμα του Σχήματος 5 μας δείχνει ότι οι χαρακτηριστικές διαστάσεις των διαμερισμάτων στα πλοία (της τάξεως των δεκάδων μέτρων) αντιστοιχούν στο διάστημα τιμών της  $r_c$  για εύλογες εκτιμήσεις της ενέργειας ενεργοποίησης και της αρχικής θερμοκρασίας. Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, η σειρά των εκρήξεων συνόδευσε την έναρξη της παραγωγής του νιτρικού αμμωνίου σε μεγάλη κλίμακα. Την περίοδο εκείνη κατεβλήθησαν προσπάθειες για να επιταχυνθεί η διαδικασία παραγωγής, στην οποία τότε προστέθηκε και μια φάση ψύξης του νιτρικού αμμωνίου που προέκυπτε από την εξουδετέρωση νιτρικού οξέος με αμμωνία. Κατά πάσαν πιθανότητα, λοιπόν, το προϊόν πρέπει να ήταν ακόμη σχετικά θερμό όταν φορτωνόταν στα πλοία. Επιπλέον, για να αποφεύγεται το σβόλιασμα, οι κόκκοι επικαλύπτονται με κερί και συσκευάζονται σε χάρτινους σάκους. Όπως δείχνουν όμως οι πειραματικές έρευνες, η προσθήκη οργανικών ουσιών συνεπάγεται μείωση της ενέργειας ενεργοποίησης. Όλοι τούτοι οι παράγοντες συντελούν ώστε η έκρηξη να γίνεται πιθανότερη.

Και εδώ θα σταματήσουμε με την ελπίδα ότι οι αναγνώστες μας ένιωσαν τη δύναμη και την πρακτική αξία της θεωρίας. Και τούτο διότι δεν υπάρχει τίποτε χρησιμότερο από μια σωστή θεωρία.

Εν κατακλείδι, θέλουμε να επισημάνουμε ότι οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στη θεωρία των θερμικών εκρήξεων γνωρίζουν ευρεία εφαρμογή στη μελέτη παρόμοιων φαινομένων σε άλλα πεδία της επιστήμης. Ιδού μερικές διαδικασίες όπου οι μη γραμμικές (ως προς τη θερμοκρασία) πηγές θερμότητας παίζουν βασικό ρόλο: θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, θερμική διάσπαση σε διηλεκτρικά και κρίσιμα φαινόμενα που συνοδεύουν την κίνηση συνεκτικών (ιξωδών) υγρών (υδροδυναμική θερμική έκρηξη). Όλα τούτα μαρτυρούν τη δύναμη και την αξία της θεωρίας των θερμικών εκρήξεων.

## Προβλήματα

1. Η ταχύτητα αντίδρασης του υδρογόνου με το ιώδιο στην αέρια φάση δίνεται από την εξίσωση

$$v = An_{\text{H}_2}n_{\text{I}_2}e^{-E/kT},$$

όπου  $z = An_{\text{H}_2}n_{\text{I}_2}$ , και όπου το  $A = 10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}$  παριστάνει κάποια χαρακτηριστική παράμετρο της αντίδρασης και  $E = 2,69 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Υποθέτοντας ότι οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων έχουν αρχικά τις τιμές

$$n_{\text{H}_2} = n_{\text{I}_2} = n = 1,35 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

(υπό κανονικές συνθήκες), υπολογίστε πόσος χρόνος θα χρειαστεί ώστε να αντιδράσει το 1% του μείγματος στις εξής θερμοκρασίες: (α) 273 K, (β) 600 K, και (γ) 800 K.

2. Αποδείξτε ότι τα σημεία τομής των καμπυλών παραγωγής θερμότητας και μεταβίβασης θερμότητας αντιστοιχούν σε ευσταθείς καταστάσεις αν η καμπύλη μεταβίβασης θερμότητας έχει μεγαλύτερη κλίση από την καμπύλη παραγωγής θερμότητας, και αντιστρόφως.

3. Σχεδιάστε τα γραφήματα της μετάβασης από τις υποκρίσιμες στις υπερκρίσιμες καταστάσεις σε συνάρτηση με (α) τη θερμότητα καύσης και (β) το συντελεστή μεταβίβασης θερμότητας  $h$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65**

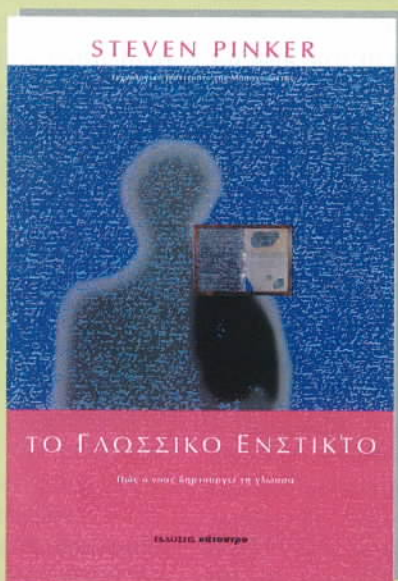
### ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ

Οι Εκδόσεις Κάτοπτρο ζητούν έμπειρους συνεργάτες για μετάφραση και επιστημονική επιμέλεια βιβλίων και άρθρων από τον ευρύτερο χώρο της φυσικής, της βιολογίας και των μαθηματικών. Όσοι ενδιαφέρονται πρέπει να αποστείλουν σύντομο βιογραφικό σημείωμα, στο οποίο θα συμπεριλαμβάνουν περιγραφή του ακριβούς γνωστικού πεδίου στο οποίο μπορούν να ανταποκριθούν και κάθε σχετική εμπειρία τους. Θα επακολουθήσει προσωπική επικοινωνία, με πρωτοβουλία των Εκδόσεων.

Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: 3643272, fax: 3641864,  
e-mail: info@katoptro.gr

ΣΕΙΡΑ: Εγκέφαλος και Νόηση

ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



Steven Pinker

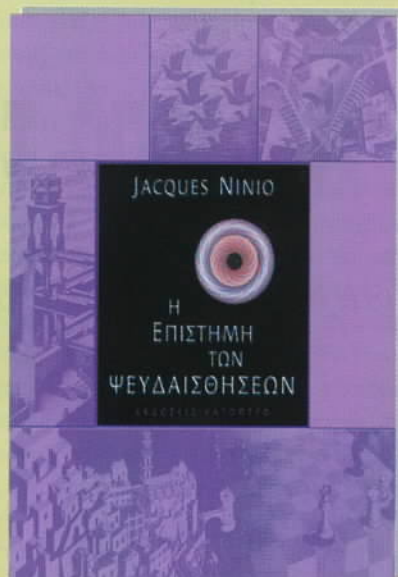
### Το γλωσσικό ενστικτό

«Ένα από τα μεγαλύτερα ευεργετήματα που έκανα ποτέ στον εγκέφαλό μου ήταν ότι διάβασα το βιβλίο του Pinker. Όσοι στερούνται ειδικών γνώσεων θα καταγοπευτούν από τη διαυγή και εμπνευσμένη εισαγωγή στον συναρπαστικό κόσμο της γλωσσολογίας. Οι ορθόδοξοι κοινωνικοί επιστήμονες —και οι βιολόγοι συνοδοιπόροι τους— θα βρεθούν ενώπιον μιας σφοδρής δαρβινικής αμφισβήτησης των πιο πεφιλημένων δογμάτων τους. Όσοι διακατέχονται από ένα σχολαστικισμό απέναντι στις λέξεις, όπως εγώ, θα φρονιματιστούν και θα μεταμεληθούν... Το υπέροχο αυτό έργο θα σας γοητεύσει και θα σας αιχμαλωτίσει.»

—Richard Dawkins, Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

Ο Steven Pinker είναι Καθηγητής νευροψυχολογίας στο MIT.

Σελ.: 514, 17 × 25 εκ., Α/Μ, 9.000 δρχ.



Jacques Ninio

### Η επιστήμη των ψευδαισθήσεων

Το βιβλίο δεν επιχειρεί απλώς να δώσει αναλυτικές απαντήσεις σε ερωτήματα όπως

- Τι είναι ψευδαισθησις;
- Πόσα είδη ψευδαισθήσεων υπάρχουν;
- Ποιος ο ρόλος του εγκεφάλου στη δημιουργία τους;
- Ποια η ιστορία τους;

αλλά, χρησιμοποιώντας πλούσια εικονογράφηση, παρουσιάζει και ερμηνεύει πλήθος από ψευδαισθήσεις (γεωμετρικές πλάνες, οπτικές και ακουστικές αυταπάτες, παράδοξες εικόνες, κ.λπ.). Παράλληλα, διασαφηνίζοντας τα οργανικά αίτια που τις προκαλούν, μας εμβάλλει σε σκέψεις κατά πόσον πολλά απ' όσα βλέπουμε και ακούμε γύρω μας ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή οφείλονται σε διαταραχές της αντίληψής μας...

Ο Jacques Ninio είναι βιολόγος, Διευθυντής ερευνών στο γαλλικό CNRS.

Σελ.: 220, 21 × 29 εκ., Α/Μ & Έγχρ., 7.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Νέα από το μέτωπο της επιστήμης

Η επιστημονική έρευνα ωφελείται τα μέγιστα από την ταχύτητα του Διαδικτύου

Κώστας Βασιλειάδης

**Η** ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΝ ΕΞΑΝΤΛΕΙΤΑΙ ΣΤΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ οργάνωση της γνώσης και μόνο. Σύμφωνα με τον Don Radler, εκδότη του *UniSci*, ενός ηλεκτρονικού εντύπου επιστημονικής ενημέρωσης στο Διαδίκτυο που καλύπτει τις εξελίξεις σε καθημερινή βάση, επιστήμη είναι ο σχεδιασμός ή η εκτέλεση πειραμάτων για να γνωρίσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η φύση. Επιστήμη είναι επίσης η δημιουργία θεωριών που επιδέχονται πειραματικό έλεγχο. Τέλος, επιστήμη είναι και η συστηματική παρατήρηση γεγονότων στα οποία αδυνατούμε προς το παρόν να παρέμβουμε, αλλά και η αξιοποίηση αυτών των παρατηρήσεων για τη διατύπωση θεωριών που αποβλέπουν στην εξήγηση των γεγονότων. Με όλα τούτα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επιστήμη αποτελεί εκείνη την ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία αναζητά τη γνώση με οργανωμένο τρόπο. Δεν πρόκειται επομένως για την απλή οργάνωση της γνώσης, αλλά για την αναζήτησή της. Η επιστήμη δεν μαντεύει, δεν ελπίζει, δεν επιθυμεί, δεν εμπιστεύεται και δεν πιστεύει. Η επιστήμη απλώς αναζητά. Και αυτή ακριβώς η διαδικασία της αναζήτησης είναι που την καθιστά τόσο ισχυρή και τόσο συναρπαστική.

Πρέπει να παραδεχτούμε ότι, αν και μέσω της επιστήμης κατορθώνουμε αναμφίβολα να αυξάνουμε τις γνώσεις μας, μέρος αυτών των γνώσεων ενδέχεται να προξενήσει μεγαλύτερη ζημιά παρά όφελος. Η ίδια διαπίστωση ισχύει και σχετικά με την ανακάλυψη νέων προϊόντων, μερικά από τα οποία είναι δυνατόν να αποδειχτούν επιβλαβή. Ωστόσο, η αναζήτηση της γνώσης δεν παύει να αποτελεί μια μοναδική ανθρώπινη εμπειρία που πηγάζει από ανιδιοτελή κίνητρα. Δεν ισχυρίζεται ότι ένα αντικείμενο είναι καλύτερο από κάποιο άλλο, αλλά απλώς περιγράφει τα αντικείμενα όπως ακριβώς τα βρίσκει. Δεν υπαγορεύει σε κανέναν πώς να συμπεριφέρεται, αλλά απλώς ερευνά για να ανακαλύψει πώς λειτουργεί η φύση. Ταπεινοφροσύνη, απουσία αξιολογικών κρίσεων, απουσία προκαθορισμένης κατευθυντήριας γραμ-

μής. Ποια άλλη ανθρώπινη λειτουργία χαρακτηρίζεται από τέτοια αξιοπρέπεια;

Για όσους ασχολούνται με τις θετικές επιστήμες και την έρευνα σε αυτές, αποτελεί επιτακτική ανάγκη να ενημερώνονται για τις τελευταίες εξελίξεις τόσο στο χώρο της ειδικότητάς τους όσο και στους άλλους συναφείς χώρους. Επιπλέον, είναι εξίσου σημαντικό να ενημερώνουν και οι ίδιοι τους συναδέλφους τους σχετικά με τα αποτελέσματα της δικής τους έρευνας. Το όφελος που απορρέει για τους ερευνητές από μια τέτοια πρακτική δεν εξαντλείται μόνο στην επίτευξη της αμφίδρομης ενημέρωσης: συνάμα υπηρετούνται και παράλληλες επιδιώξεις όπως η προσέλκυση πιθανών χορηγών για τα ερευνητικά τους προγράμματα καθώς και πιθανών συνεργατών και μαθητών. Ταυτόχρονα, μάλιστα, προσελκύεται και το ενδιαφέρον της μερίδας εκείνης του κοινού το οποίο επιδεικνύει γενικό ενδιαφέρον για την επιστήμη στο σύνολό της ή για επιμέρους τομείς της. Από αυτήν ακριβώς τη φιλοσοφία διαπνέεται η σχετικά νέα προσπάθεια του παραπάνω ηλεκτρονικού εντύπου επιστημονικής ενημέρωσης, το οποίο μπορείτε να επισκεφθείτε στη διεύθυνση:

<http://unisci.com>

Είναι γεγονός ότι η δημιουργία του Διαδικτύου κατέστησε δυνατή την ταχύτερη διάδοση των επιστημονικών ειδήσεων και έτσι ωφελήθηκε τα μέγιστα η επιστήμη αυτή καθαυτή. Μέσω του Διαδικτύου, λοιπόν, θα ενημερωθούμε και εμείς για κάποιες δραστηριότητες που είδαν το φως της επικαιρότητας το περασμένο δίμηνο.

## Κίνδυνοι από τους αστεροειδείς

Σύμφωνα με μια νέα έρευνα, ομάδα από 900 αστεροειδείς, που ο καθένας τους έχει διάμετρο μεγαλύτερη του ενός χιλιομέτρου, κινούνται στο εσωτερικό του ηλιακού μας συστήματος και αποτελούν πιθανό κίνδυνο για τη ζωή πάνω στη Γη. Μερικοί εξ αυτών ακολουθούν τρο-

χιές οι οποίες πλησιάζουν τον πλανήτη μας σε απόσταση μερικές μόλις φορές μεγαλύτερη από την απόσταση Γης-Σελήνης. Όπως μας προειδοποιεί μια ομάδα αστρονόμων του Πανεπιστημίου Cornell, στο μέλλον δεν αποκλείεται ένα απ' αυτά τα αντικείμενα να συγκρουστεί με τον πλανήτη μας. Πρόκειται για μια προοπτική πολύ ανησυχητική δεδομένου ότι είναι γνωστή η έκταση της καταστροφής που θα προκληθεί από τη σύγκρουση της Γης με ουράνιο σώμα διαμέτρου ενός χιλιομέτρου. Στην ομάδα αυτών των αστεροειδών έχει δοθεί η ονομασία NEA (Near-Earth-Asteroids).

Σύμφωνα με τα πορίσματα της εν λόγω έρευνας, το να υπολογιστεί εάν και ποιος από τους 900 αυτούς αστεροειδείς θα μπορούσε να προσκρούσει στη Γη είναι εξαιρετικά δύσκολο. Η βασικότερη δυσκολία έγκειται στο ότι μέχρι στιγμής έχει ανακαλυφθεί μόνο το 40% από αυτούς· ωστόσο, ακόμη και για το σχετικά μικρό ποσοστό των ήδη καταγεγραμμένων αστεροειδών, οι προβλέψεις για πιθανή σύγκρουσή τους με τη Γη δεν μπορούν να επεκταθούν πέραν της επόμενης εκατονταετίας.

Οι περισσότεροι από τους αστεροειδείς του ηλιακού μας συστήματος περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο διαγράφοντας ανεξάρτητες τροχιές μεταξύ των πλανητών Άρη και Δία, σε ένα σχηματισμό γνωστό με το όνομα «κύρια ζώνη». Κατά διαστήματα, δύο από τους εν λόγω αστεροειδείς συγκρούονται μεταξύ τους με μεγάλη ταχύτητα, και κομμάτια κάθε μεγέθους εκτοξεύονται προς όλες τις κατευθύνσεις. Τα περισσότερα από τα θραύσματα εξακολουθούν να κινούνται εντός της κύριας ζώνης. Μερικές φορές, όμως, τούτοι οι νέοι αστεροειδείς μεταναστεύουν σε ασαθείς περιοχές της ζώνης, όπου ακόμη και μια μικρή βαρυτική διαταραχή οφειλόμενη σε γειτονικούς πλανήτες μπορεί να προκαλέσει σημαντικές αλλαγές στις τροχιές τους. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι συγκεκριμένες αλλαγές αρκούν για να θέσουν τον αστεροειδή σε πορεία πιθανής σύγκρουσης με τη Γη.

Με τις έρευνες των τελευταίων δέκα ετών και με τη βοήθεια της στατιστικής, οι επιστήμονες κατάφεραν μεν να διαπιστώσουν την ύπαρξη 100 από τους πλησιέστερους αστεροειδείς, όχι όμως και να εντοπίσουν τη θέση τους, έστω και κατά προσέγγιση.

## Για την έγκαιρη διάγνωση του καρκίνου

Ως γνωστόν, περίπου το 85% των περιπτώσεων καρκίνου ξεκινούν από το επιθήλιο. Το επιθήλιο είναι το στρώμα ιστού που καλύπτει τις εσωτερικές επιφάνειες του σώματος, και το οποίο αποτελεί την πρώτη γραμμή άμυνας του οργανισμού ενάντια σε όλες τις ασθένειες. Οι παθολόγοι-ογκολόγοι συνήθως εξετάζουν τον επιθηλιακό ιστό και, στηριζόμενοι στην προσωπική τους υποκειμενική εμπειρία, εντοπίζουν ενδείξεις καρκίνου που βρίσκεται ακόμη στα πρώτα στάδια εξέλιξης.

Ερευνητές από το Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης ανακάλυψαν μια νέα μέθοδο για την έγκαιρη διάγνωση του καρκίνου, η οποία βασίζεται στη φασματοσκοπική ανάλυση της σκέδασης του φωτός. Σύμφωνα με αυτή, μελετούνται τα χρώματα του φωτός που

σκεδάζεται από τον ιστό καθώς αυτός φωτίζεται από μια πηγή-καθετήρα. Με την εν λόγω μέθοδο εξασφαλίζεται ένας λιγότερο διεισδυτικός τρόπος εξέτασης: χρησιμοποιείται ένα λεπτό εργαλείο που στο κέντρο του φέρει μια οπτική ίνα, η οποία φωτίζει τον επιθηλιακό ιστό με λευκό φως και στη συνέχεια συλλέγει το φως που οπισθοσκεδάζεται προς το εργαλείο. Το λευκό φως διέρχεται από διάφορα φίλτρα και έναν πολωτή. Για κάθε χρώμα, ένα στοιχείο συζευγμένου φορτίου (CCD) καταγράφει εκ του ανακλωμένου φωτός ένα ζεύγος ειδώλων, λόγω των δύο ξεχωριστών πολώσεων. Τα δύο είδωλα στη συνέχεια συγκρίνονται με αφαίρεση, η οποία διαχωρίζει το σκεδασμένο φως από το υπόβαθρο και διατηρεί μόνο τα είδωλα τα οποία προέρχονται από τους πυρήνες των κυττάρων.

Από τις σχετικές μετρήσεις κατέστη δυνατόν να εντοπιστούν περιοχές με ανώμαλη συγκέντρωση κυττάρων, κύτταρα με διογκωμένους πυρήνες και κύτταρα με αυξημένη συγκέντρωση γενετικού υλικού που είναι γνωστό ως χρωματίνη. Η περιγραφόμενη μέθοδος έχει ήδη αποδειχθεί επιτυχής στον εντοπισμό προκαρκινικών ιστών του παχέος εντέρου και του οισοφάγου, η δε χρήση της από τους γιατρούς αναμένεται να εγκριθεί και να επιτραπεί τα επόμενα δύο-τρία χρόνια.

## Συνέπειες της ανακάλυψης νερού στον Άρη

Η ενδεχόμενη ανακάλυψη νερού στον Άρη ασφαλώς θα αναζωπυρώσει τις προσπάθειες των επιστημόνων να εξερευνηθούν και άλλους πλανήτες ώστε να διαπιστώσουν αν σ' αυτούς υπάρχει ή υπήρξε ζωή.

Ο Global Surveyor, που τούτη τη στιγμή είναι ο μόνος δορυφόρος σε τροχιά γύρω από τον κόκκινο πλανήτη, μας έστειλε τελευταία δορυφορικές εικόνες όπου για πρώτη φορά διακρίνονται καθαρά απόκρημνες χαράδρες, φιδίσια κανάλια και εκβολές που το σχήμα τους θυμίζει δέλτα ποταμού. Οι εν λόγω εικόνες αποτελούν ένδειξη που συνηγορεί υπέρ της πρόσφατης παρουσίας στον Άρη τρεχούμενου νερού—κάτι το οποίο μέχρι πρόσφατα θεωρούνταν αδύνατο.

Για περισσότερες πληροφορίες, αλλά και για εντυπωσιακές φωτογραφίες, επισκεφθείτε τις διευθύνσεις:

[http://news.bbc.co.uk/hi/english/sci/tech/newsid\\_801000/801086.stm](http://news.bbc.co.uk/hi/english/sci/tech/newsid_801000/801086.stm)

[http://news.bbc.co.uk/hi/english/sci/tech/newsid\\_802000/802900.stm](http://news.bbc.co.uk/hi/english/sci/tech/newsid_802000/802900.stm)

Σύμφωνα με τον υφιστάμενο σχεδιασμό της NASA, ο μόνος δορυφόρος που αναμένεται να προσεδαφιστεί στον Άρη είναι ο Beagle-2, στα τέλη του 2003. Ωστόσο, η περιοχή προσεδάφισης και έρευνας του Beagle-2 περιορίζεται γύρω από τον ισημερινό του Άρη, ενώ οι περιοχές στις οποίες φαίνεται πιθανή η ύπαρξη νερού—από όπου και οι φωτογραφίες—βρίσκονται στο νότιο ημισφαίριο, αρκετά εκτός της εμβέλειας του Beagle-2. Έτσι, γίνεται όλο και πιθανότερο το ενδεχόμενο να αποφασίσει η NASA την αποστολή διαστημοπλοίου και στις πιθανές υδροφόρες περιοχές.

Γιατί μας ενδιαφέρει τόσο η ανεύρεση νερού στην επιφάνεια του Άρη; Οι ειδικοί προβλέπουν ότι σε 15 με 20 χρόνια θα βρισκόμαστε σε θέση να στείλουμε ανθρώπους στον Άρη, οι οποίοι, φυσικά, θα χρειάζονται απαραίτητως νερό για να επιβιώσουν. Βεβαίως, υπάρχει η λύση να το μεταφέρουν μαζί τους από τη Γη· ωστόσο, ένα τέτοιο ενδεχόμενο αφ' ενός μεν θα καθιστούσε την αποστολή πολύ δύσκολη, αφ' ετέρου δε θα αποτελούσε παράγοντα που θα επιβάρυνε άμεσα το σχεδιασμό ολόκληρου του εγχειρήματος. Η ύπαρξη νερού στον Άρη θα κάνει την αποστολή πολύ πιο εφικτή. Στην προκειμένη περίπτωση, οι αστροναύτες όχι μόνο θα μπορέσουν να συντηρηθούν στη ζωή από το νερό του Άρη, αλλά και να το χρησιμοποιήσουν για την παραγωγή του οξυγόνου και των καυσίμων που θα απαιτηθούν για την επιστροφή του διαστημοπλοίου στη Γη.

Πολλοί επιστήμονες εξεπλάγησαν με αυτή τη νέα ανακάλυψη, διότι δεν συμβιβάζεται με τα όσα πιστεύαμε για τον Άρη έως πρόσφατα —ότι ναι μεν υπάρχει νερό εκεί, αλλά βρίσκεται υπό μορφή πάγου κάτω από την επιφάνεια του πλανήτη και όχι τρεχούμενο πάνω στην επιφάνειά του. Εξάλλου, το νερό σε υγρή μορφή αποτελεί πρωταρχικό συστατικό της ζωής· επομένως, η ανακάλυψή του αποτελεί ενθαρρυντικό στοιχείο για όλους εκείνους που πιστεύουν ακόμη ότι ίσως να υπάρχουν ζωντανοί μικροοργανισμοί στον κόκκινο πλανήτη.

## Τα όρια της μοριακής ηλεκτρονικής

Στα εργαστήρια της εταιρείας Hewlett-Packard διεξάγεται έρευνα από την ομάδα του Stan Williams στην ηλεκτρονική μοριακής κλίμακας με σκοπό να επιτευχθούν σημαντικές βελτιώσεις στον τομέα της ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι βελτιώσεις αυτές προβλέπεται να καταστούν επιβεβλημένες περί το έτος 2010, οπότε και τα ολοκληρωμένα κυκλώματα πυριτίου της σημερινής τεχνολογίας θα έχουν προσεγγίσει το φυσικό όριο των δυνατοτήτων τους.

Η ερευνητική ομάδα εργάζεται με δομές της τάξεως του νανομέτρου. Οι εν λόγω δομές είναι πολύ πιθανό να αποτελέσουν τα βασικά συστατικά για τα ολοκληρωμένα κυκλώματα του μέλλοντος, τα οποία σε σύγκριση με τα σημερινά θα λειτουργούν κατά ένα δισεκατομμύριο φορές αποδοτικότερα, θα κοστίζουν πολύ φτηνότερα και θα καταλαμβάνουν πολύ μικρότερο χώρο.

Προ διετίας, οι επιστήμονες του εργαστηρίου δημιούργησαν τον υπολογιστή Teramac, ο οποίος μπορούσε να λειτουργεί ακόμη και όταν τα ολοκληρωμένα κυκλώματά του παρουσιάζουν ελαττώματα —ικανότητα η οποία θεωρείται βασική για τους υπολογιστές της κλίμακας του νανομέτρου, δεδομένου ότι σε τέτοιου είδους διαστάσεις αποκλείεται να κατασκευαστεί κύκλωμα καθ' όλα τέλειο. Επιπλέον, πέρυσι κατασκευάστηκε για πρώτη φορά στον κόσμο μια λογική πύλη βασισμένη στη μοριακή ηλεκτρονική. Λίγο αργότερα επιτεύχθηκε και η κατασκευή ηλεκτρικού αγωγού πλάτους μερικών νανομέτρων (περίπου δέκα ατόμων) και μήκους πολλών μικρομέτρων.

## Μικροσυσκευή λέιζερ εντοπίζει καρκίνους

Το Εθνικό Εργαστήριο Sandia, το οποίο υπάγεται στο Αμερικανικό Υπουργείο Ενέργειας, ανακοίνωσε την ανακάλυψη μικροσυσκευής λέιζερ ικανής να εντοπίζει την παρουσία καρκινικών κυττάρων. Η συσκευή, η οποία έχει διαστάσεις μικρού κέρματος και ακούει στο όνομα «λέιζερ βιολογικών μικροκοιλωμάτων», δημιουργήθηκε για να βοηθά τους χειρουργούς να αφαιρούν κακοήθεις όγκους ελαχιστοποιώντας την άσκοπη καταστροφή υγιών ιστών. Στην πραγματικότητα, η νέα συσκευή καθοδηγεί το χειρουργό ως προς το πότε ακριβώς πρέπει να σταματήσει να αφαιρεί ιστούς. Η συσκευή είναι σε θέση να εντοπίσει γρήγορα μια ομάδα κυττάρων με ανώμαλη συγκέντρωση πρωτεΐνης —όπως ακριβώς συμβαίνει στα καρκινικά κύτταρα— αφού εξετάσει έναν ελάχιστο αριθμό (ένα δισεκατομμυριοστό του λίτρου, ή μερικές εκατοντάδες κύτταρα) από αυτά. Στο εργαστήριο, η εφαρμογή του νέου εργαλείου στα κύτταρα του εγκεφάλου υπήρξε εξαιρετικά επιτυχής και κατάφερε να διαχωρίσει υγιή κύτταρα του εγκεφάλου (αστροκύτταρα) από τα καρκινικά (γλοιοβλαστώματα).

Η συσκευή λειτουργεί ως εξής: Μια κατακόρυφη ακτίνα μικρολέιζερ διαπερνά τα κύτταρα καθώς αυτά αντλούνται μέσω μιας μικροαντλίας και προωθούνται μέσα από μικροσκοπικές αύλακες της γυάλινης επιφάνειας της συσκευής. Η αυξημένη πυκνότητα πρωτεΐνης που χαρακτηρίζει τα καρκινικά κύτταρα μεταβάλλει την ταχύτητα του φωτός λέιζερ που τα διαπερνά. Η αλλαγή αυτή καταγράφεται από ένα δέκτη στην έξοδο ως διαφορά συχνότητας, και στη συνέχεια μεταδίδεται μέσω μιας οπτικής ίνας σε έναν υπολογιστή που βρίσκεται τοποθετημένος κοντά στο όργανο. Κατόπιν, με την εφαρμογή ενός ειδικού αλγορίθμου οι μετρήσεις λαμβάνουν διαγραμματική μορφή, η οποία «ενημερώνεται» συνεχώς και παρέχει στο χειρουργό τη δυνατότητα να παρακολουθεί στην οθόνη του υπολογιστή «κορυφές» και «κοιλιάδες». Αυτό τον βοηθά να διαπιστώσει πότε ακριβώς το αίμα που αντλείται από την τομή έχει καθαριστεί από τα καρκινικά κύτταρα.

Αναμένεται ότι με την περαιτέρω εξέλιξη της τεχνολογίας των μικρολέιζερ η συσκευή θα χρησιμοποιηθεί στην ταχεία παρακολούθηση της χημικής περιεκτικότητας υπόγειων υδάτων, αποβλήτων και εκρηκτικών υλών, ενώ ήδη χρησιμοποιείται στη διάγνωση άλλων ανωμαλιών της πρωτεΐνης του αίματος, όπως στην περίπτωση της αναιμίας.

## Ταχύτερα από το φως;

Πρόσφατα πειράματα προσπαθούν να αποδείξουν ότι υπάρχουν αντικείμενα που μπορούν να κινηθούν με ταχύτερες μεγαλύτερες από εκείνη του φωτός. Πράγματι, σύμφωνα με τα πειράματα που περιγράφονται εν συντομία παρακάτω, υπό ειδικές συνθήκες είναι δυνατόν να πετύχουμε ταχύτητες που υπερβαίνουν κατά τι τις 300 χιλιάδες χιλιόμετρα ανά δευτερόλεπτο. Οι προσπάθειες στη συγκεκριμένη κατεύθυνση έχουν ήδη πίσω τους 1-

στορία αρκετών ετών, δεδομένου ότι οι φυσικοί κατάφεραν και παλιότερα να παραγάγουν φωτεινούς παλμούς που διαδίδονταν πιο γρήγορα απ' ό,τι το φως στο κενό. εντούτοις, στα πειράματα εκείνα δεν κατέστη δυνατόν να διαβιβαστεί πληροφορία με αυτές τις μεγαλύτερες ταχύτητες.

Σε ένα από τα καινούργια πειράματα, ο Anedio Ranfagnì, του Εθνικού Συμβουλίου Έρευνας της Ιταλίας, έστειλε μικροκύματα διαμέσου μιας στενής σχισμής σχήματος δακτυλίου πάνω σε έναν μεγάλο καθρέπτη, και αφού επέστρεψαν τα συνέλεξε ακριβώς πίσω από την πηγή. Μετρώντας το χρόνο κίνησης των παλμών υπολόγισε ότι η ταχύτητά τους υπερέβαινε κατά 5% την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Μερικοί αμφισβητούν την αξιοπιστία του πειράματος, ισχυριζόμενοι πως πρόκειται για ψευδαίσθηση η οποία οφείλεται στο ότι το φως ακολουθεί μέσα στο οπτικό σύστημα τροχιά συντομότερη απ' ό,τι αναμενόταν. Σε ένα άλλο πείραμα, ένας φωτεινός παλμός εισήλθε σε έναν διαφανή θάλαμο πλήρη αέριου καισίου και ανέπτυξε ταχύτητες 300 φορές μεγαλύτερες της ταχύτητας του φωτός. Το κυρίως τμήμα του παλμού εξήλθε από το θάλαμο προτού ακόμη η πίσω άκρη του παλμού προλάβει να εισέλθει σ' αυτόν!

## Μεταφορές στην κλίμακα του νανομέτρου

Επιστήμονες του Πανεπιστημίου του Τελ Αβίβ προτείνουν την κατασκευή μηχανών για τη μετακίνηση υλικών στην κλίμακα του νανομέτρου. Είναι γνωστό ότι η τεχνολογία «της ελαχιστοποίησης» μας έχει δώσει αρκετά παραδείγματα περιστροφών, τροχών, και γραναζιών της κλίμακας του νανομέτρου. Μέχρι τώρα, όμως, δεν έχει εκπονηθεί καμία μελέτη για τις «νανομηχανές» που θα αναλάβουν τη μετακίνηση των πρώτων υλών στους χώρους των «νανοεργοστασίων». Σύμφωνα με τους Ισραηλινούς, ο χώρος του νανοεργοστασίου αποτελείται από μια λιθογραφική κυματοειδή επιφάνεια παρόμοια με εκείνη που βλέπουμε στις αβγοκάσες. Η μηχανή που θα εκτελέσει τη μετακίνηση αποτελείται από τρεις μικρές ομάδες ατόμων μετάλλου συνδεδεμένων με δύο ελατήρια. Το κάθε ελατήριο στην πραγματικότητα αποτελείται από ένα φωτοχρωμοφόρο μόριο του οποίου το μήκος αυξομειώνεται ανάλογα με την ένταση του φωτός.

Για να εκτελέσει η μηχανή τη μετακίνηση, το μόριο φωτίζεται από πάνω με φως λέιζερ, οπότε διαστέλεται, και ένα μεταλλικό σωματίδιο κινείται προς την κατεύθυνση ενός βαθουλώματος επί της επιφανείας. Για περισσότερες πληροφορίες επισκεφθείτε τη διεύθυνση:

<http://unisci.com/stories/20002/0626002.htm>

## Μόριο σακχάρου στο Διάστημα

Με τη βοήθεια ενός ραδιοτηλεσκοπίου στην Αριζόνα ανακαλύφθηκε στο κέντρο του Γαλαξία μας, μέσα σε ένα γιγαντιαίο νέφος αερίων και σκόνης ονόματι Sagittarius B2 το οποίο βρίσκεται σε απόσταση 26 χιλιάδων ετών φωτός από τη Γη, ένα μόριο σακχάρου (γλυκολαλδεϋδης).

Επειδή από το νέφος αυτό δημιουργούνται συνεχώς

νέα άστρα, η ανακάλυψη του σακχάρου σημαίνει ότι είναι πιθανό οι χημικοί πρόδρομοι της ζωής να σχηματίζονται στα μεσοαστρικά νέφη πολύ προτού δημιουργηθούν οι ίδιοι οι πλανήτες. Και επειδή σε αυτά τα νέφη επικρατούν συνθήκες παρόμοιες με εκείνες που διαμορφώθηκαν κατά την αρχική φάση της δημιουργίας του πλανήτη μας, η μελέτη τους θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πώς σχηματίστηκαν τα πρώτα βιολογικά μόρια σ' αυτόν. Μερικοί επιστήμονες πιστεύουν ότι η Γη σπάρθηκε με περίπλοκα μόρια τα οποία μετέφεραν περαστικοί κομήτες. Τα μόρια αυτά ήρθαν από το μεσοαστρικό νέφος το οποίο συμπυκνώθηκε και από το οποίο σχηματίστηκε το ηλιακό μας σύστημα. Το μόριο της γλυκολαλδεϋδης είναι οκτατομικό και αποτελείται από άτομα άνθρακα, οξυγόνου και υδρογόνου. Όταν ενώνεται με άλλα μόρια, σχηματίζει σύνθετα σάκχαρα όπως η γλυκόζη και η ριβόζη. Η ριβόζη συγκαταλέγεται στα θεμελιώδη συστατικά του DNA και του RNA, των μακρομορίων που επιτελούν το ρόλο των φορέων των γενετικών πληροφοριών στους ζωντανούς οργανισμούς. Η γλυκόζη είναι το σάκχαρο που περιέχουν τα φρούτα, ενώ η γλυκολαλδεϋδη αποτελεί μια απλούστερη μορφή σακχάρου. Μέχρι στιγμής, σε τέτοιου είδους μεσοαστρικά νέφη έχουν ανακαλυφθεί περίπου 120 διαφορετικά μόρια. Τα περισσότερα ανάμεσά τους περιέχουν μικρό αριθμό ατόμων, ενώ μόρια με περισσότερα από οκτώ άτομα δεν έχουν εντοπιστεί παρά ελάχιστα.

## Άλλες ενδιαφέρουσες πληροφορίες

Αν σας άνοιξε η όρεξη και θέλετε να ενημερώνεστε α-νελλιπώς για τα πιο τελευταία νέα, τότε δεν έχετε παρά να επισκεπτεστε τακτικά τις ακόλουθες διευθύνσεις:

<http://www.aip.org/physnews/update>

Νέα γύρω από τη φυσική. Του Αμερικανικού Ινστιτούτου Φυσικής (AIP).

<http://physicsweb.org/archive/news>

Εβδομαδιαία νέα (ενημερώνεται κάθε Παρασκευή). Του εκδοτικού τμήματος του προηγούμενου ινστιτούτου.

<http://www.aps.org/WN/index.html>

Ό,τι το νεότερο γύρω από τον κόσμο της φυσικής. Της Αμερικανικής Εταιρείας Φυσικής.

<http://www.universetoday.com>

Διαστημικά νέα από όλο το Διαδίκτυο. Ενημερώνεται καθημερινά. Του *Universe Today*.

<http://publish.aps.org/FOCUS>

Επιλογές από τα *Physical Review Letters*. Της Αμερικανικής Εταιρείας Φυσικής.

[http://aps.org/cgi-bin/wwwwais?  
selection=Whats New](http://aps.org/cgi-bin/wwwwais?selection=Whats New)

Πειραματική μηχανή αναζήτησης πληροφοριών. Της Αμερικανικής Εταιρείας Φυσικής. 

# Σχηματικοί αριθμοί

Διερεύνηση μιας εικασίας του Fermat

A. Savin

**Ο** ΕΞΕΧΩΝ ΓΑΛΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ Pierre Fermat δεν είναι διάσημος μόνο για τα θεωρήματα που απέδειξε αλλά και για τις εικασίες που πρότεινε. Κάποιες από αυτές αποδείχτηκαν εσφαλμένες —για παράδειγμα, η εικασία ότι όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$2^{2^n} + 1$$

είναι πρώτοι. Μια άλλη εικασία, η καλούμενη τελευταίο θεώρημα του Fermat, αποδείχτηκε στο τέλος του 20ού αιώνα.

Σε αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μια άλλη εικασία του Fermat:

Κάθε φυσικός αριθμός παριστάνεται ως άθροισμα τριών το πολύ τριγώνων αριθμών, τεσσάρων το πολύ τετράγωνων αριθμών, πέντε το πολύ πεντάγωνων αριθμών, και ούτω καθεξής.

Αυτή η εικασία αποδείχτηκε από τον Augustin-Louis Cauchy, τριακόσια περίπου χρόνια μετά τη διατύπωσή της. Νωρίτερα είχε αποδειχτεί για τους τρίγωνα αριθμούς από τον Carl Friedrich Gauss, ενώ ο Joseph-Louis Lagrange την απέδειξε για τους τετράγωνα αριθμούς. Οι τετράγωνοι αριθμοί φαίνεται ότι ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τους μαθηματικούς. Το 1738, ο Leonard Euler περιέγραψε όλες τις περιπτώσεις που είναι δυνατή η παράσταση ενός αριθμού ως άθροισμα δύο τετραγώνων:

Ένας φυσικός αριθμός παριστάνεται ως άθροισμα δύο τετραγώνων αν και μόνο αν κάθε πρώτος του παράγο-

ντας της μορφής  $4k + 3$  εμφανίζεται σε άρτια δύναμη.

Το 1798, ο Adrien-Marie Legendre απέδειξε ότι οι αριθμοί της μορφής  $4^k(8n - 1)$  δεν παριστάνονται ως άθροισμα με λιγότερους από τέσσερις τετράγωνα αριθμούς.

Φαίνεται ότι σε αυτό το πεδίο όλα πλέον είναι ξεκάθαρα και ότι η υπόθεση έχει ιστορικό μόνο ενδιαφέρον. Αρκεί όμως να προσθέσουμε στην εικασία του Fermat τη λέξη «διαφορετικοί» για να προκύψει ένα άλλο δύσκολο πρόβλημα:

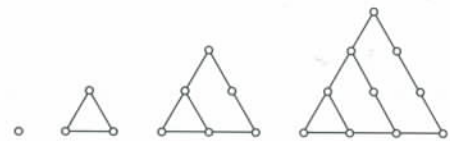
Ποιοι φυσικοί αριθμοί παριστάνονται ως άθροισμα τριών το πολύ διαφορετικών τριγώνων αριθμών, τεσσάρων το πολύ διαφορετικών τετράγωνων αριθμών, και ούτω καθεξής;

Προφανώς, δεν είναι δυνατόν να γραφούν όλοι οι αριθμοί με αυτό τον τρόπο —για παράδειγμα, ο αριθμός 2.

Προτού ασχοληθούμε με το συγκεκριμένο πρόβλημα, ας θυμηθούμε την έννοια των «σχηματικών αριθμών». Αρκετές φορές, όταν έχουμε ένα πλήθος από όμοια αντικείμενα —όπως νομίσματα, πέτρες ή κουμπιά—, μας αρέσει να τα διευθετούμε με κάποια τάξη —σχηματίζοντας ένα τρίγωνο, ένα τετράγωνο ή κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα.

Στην αρχαία Ελλάδα, οι μαθηματικοί εκτελούσαν πράξεις με τον άβακα, μετακινώντας ψηφίδες σε μια σειρά από ράβδους. Σήμερα, όταν οι προγραμματιστές θέλουν να κάνουν ένα διάλειμμα, παίζουν παιχνίδια υπολογιστών, όμως στο παρελθόν η

μοναδική «επαγγελματική» διασκέδαση ήταν η δημιουργία σχηματικών αριθμών. Αυτή η ψυχαγωγία είχε ορισμένα σοβαρά επακόλουθα. Για παράδειγμα, η κατασκευή ορθογώνιων παραλληλογράμμων με πέτρες οδήγησε στην ιδέα των διαιρετών, καθώς και στην έννοια των πρώτων και των σύνθετων αριθμών.



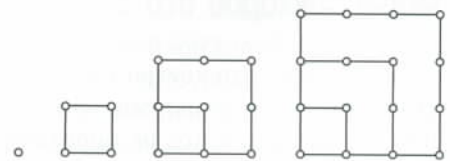
Σχήμα 1

Αν διευθετήσουμε τις ψηφίδες ώστε να σχηματίζουν τρίγωνα (Σχήμα 1), προκύπτουν οι τρίγωνοι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... Ο γενικός τύπος για τον  $n$ -οστό τριγωνικό αριθμό δίνεται από τον τύπο

$$s_{n,3} = \frac{n(n+1)}{2}$$

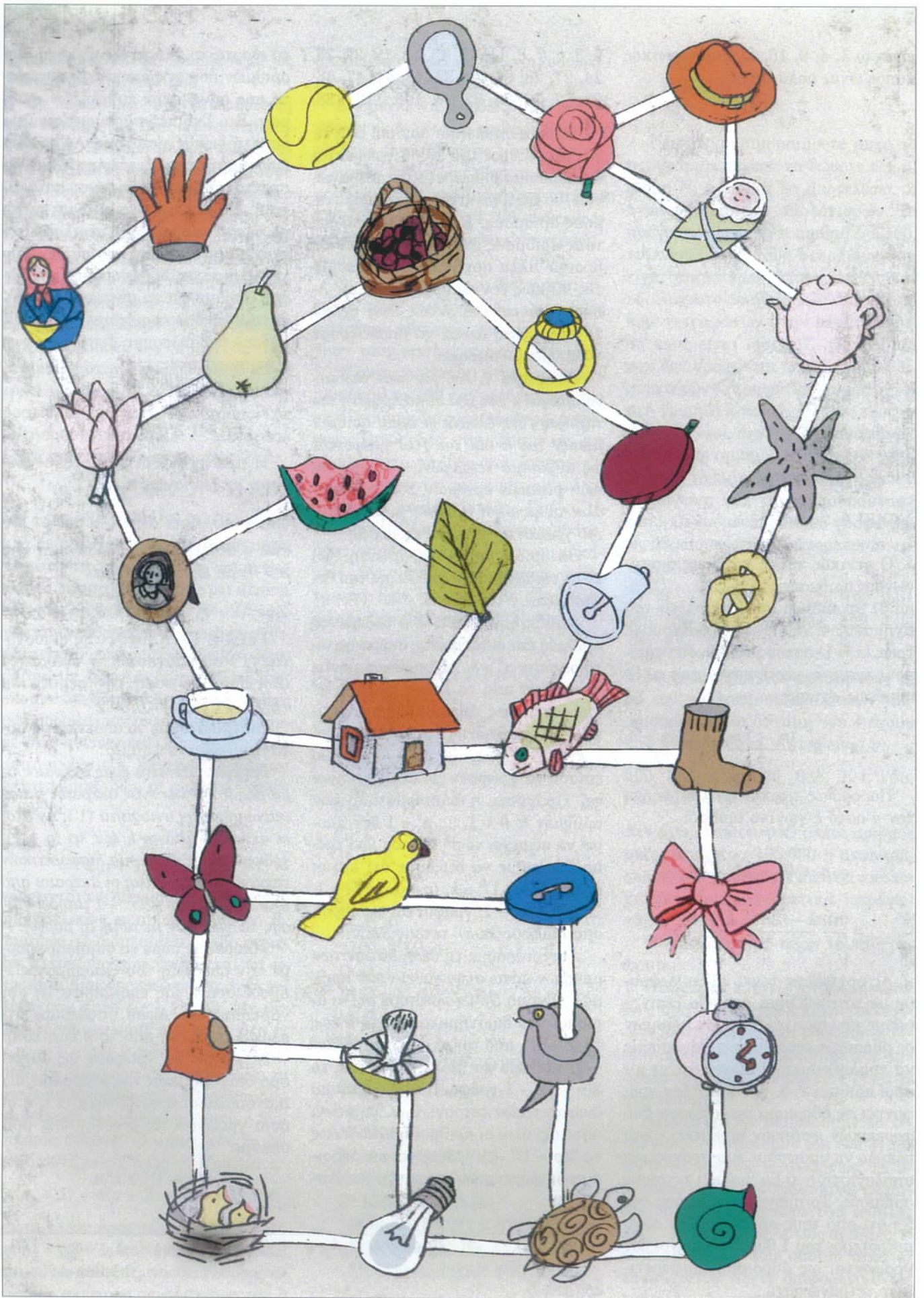
(ο οποίος είναι και ο τύπος που δίνει το άθροισμα των  $n$  πρώτων φυσικών αριθμών).

Οι τετράγωνοι αριθμοί (Σχήμα 2)



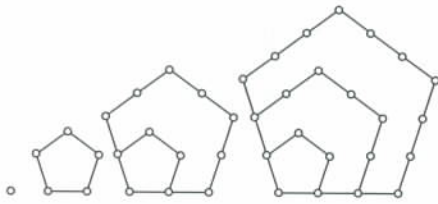
Σχήμα 2



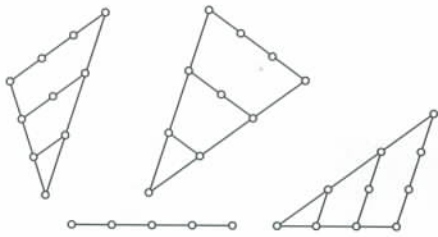


είναι οι 1, 4, 9, 16, ..., και ο γενικός τύπος είναι πολύ απλός:

$$s_{n,4} = n^2.$$



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Ο γενικός τύπος για τους πεντάγωνους αριθμούς 1, 5, 12, 22, ... (Σχήμα 3) προκύπτει από τη μελέτη του Σχήματος 4. Αρκεί να προσθέσουμε τρεις  $(n-1)$ -οστούς τρίγωνους αριθμούς και ένα «αντίγραφο» του  $n$ . Επομένως, έχουμε

$$s_{n,5} = n + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Παρομοίως, προκύπτει ο τύπος για τον  $n$ -οστό  $k$ -γωνικό αριθμό:

$$s_{n,k} = n + (k-2) \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(nk - 2n - k + 4)}{2}.$$

Ας αρχίσουμε τώρα να δουλεύουμε με το πρόβλημά μας. Θα ξεκινήσουμε με την ανάλυση των αριθμών σε άθροισμα τετραγώνων. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι οι μικροί αριθμοί 2, 3, 6, 7 και 8 δεν γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων διαφορετικών φυσικών αριθμών. Είναι εύκολο να γράψουμε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που θα βρίσκει τέτοιους αριθμούς. Το πρόγραμμα θα μας δείξει ότι από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 1.000 οι επόμενοι δεν γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων:

2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128.

Όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1.000 γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων. Τι συμβαίνει με τους μεγαλύτερους αριθμούς; Αν ελέγξουμε όλους τους αριθμούς έως το 10.000 δεν θα βρούμε άλλα αρνητικά αποτελέσματα. Μήπως δεν υπάρχουν άλλοι; Αποδεικνύεται ότι όντως έτσι έχουν τα πράγματα. Αρκεί να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.** Αν, για έναν δεδομένο αριθμό  $k$  και μια συγκεκριμένη συνάρτηση  $f(k)$ , όλοι οι φυσικοί αριθμοί μεταξύ του  $k$  και του  $f(k)$  γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων διαφορετικών φυσικών αριθμών, τότε το  $k$  και όλοι οι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του γράφονται με αυτή τη μορφή.

Θα ορίσουμε τη συνάρτηση  $f(k)$  κατά τη διαδικασία απόδειξης του θεωρήματος.

**Απόδειξη.** Έστω  $k$  ο δεδομένος αριθμός και έστω  $p$  ένας ακέραιος τέτοιος ώστε  $p^2 > k$ . Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί από το  $k$  έως το  $(p+1)^2$  γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων. Τότε, οι αριθμοί  $p^2 + k$ ,  $p^2 + k + 1$ , ...,  $2p^2 - 1$  μπορεί επίσης να γραφούν με αυτή τη μορφή. Πράγματι, η αναπαράσταση των αριθμών  $k$ ,  $k+1$ , ...,  $p^2 - 1$  δεν μπορεί να περιέχει το  $p^2$ . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και οι αριθμοί  $(p+1)^2 + k$ ,  $(p+1)^2 + k + 1$ , ...,  $2(p+1)^2 - 1$ , γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων.

Ας εξετάσουμε τη θέση αυτών των αριθμών πάνω στην ευθεία των αριθμών (Σχήμα 5). Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί στα διαστήματα από το  $k$  έως το  $(p+1)^2$ , από το  $(p^2 + k)$  έως το  $(2p^2 - 1)$  και από το  $(p+1)^2 + k$  έως το  $2(p+1)^2 - 1$  γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων. Σημαίνει αυτό ότι όλοι οι αριθμοί από το  $k$  έως το  $2(p+1)^2 - 1$  γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων; Αυ-

τό εξαρτάται από τη διευθέτηση των αριθμών που φράσσουν τα διαστήματά μας πάνω στην ευθεία των αριθμών. Στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται μια δυνατή διευθέτησή τους. Αν τα τρία διαστήματα που εξετάζουμε επικαλύπτονται, η απάντηση είναι καταφατική. Και αν υπάρχουν διαστήματα με ακέραιους που δεν περιλαμβάνονται σε αυτά, όπως στο παράδειγμα του Σχήματος 5; Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα συγκεκριμένα διαστήματα δεν περιέχουν ακέραιους εφόσον βεβαιώσουμε ότι ισχύουν οι εξής ανισότητες:

$$(p+1)^2 \geq p^2 + k - 1, \quad (1)$$

$$2p^2 - 1 \geq (p+1)^2 + k - 1. \quad (2)$$

Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$p \geq (k/2) - 1, \quad (1')$$

ενώ η δεύτερη είναι ισοδύναμη (για  $p > 0$ ) με την ανισότητα

$$p > 1 + \sqrt{k+2}. \quad (2')$$

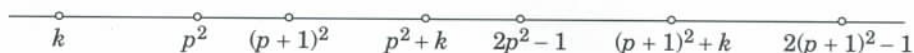
Για  $k \geq 13$ , η ισχύς της ανισότητας (1') συνεπάγεται την ανισότητα (2'), διότι σε αυτή την περίπτωση  $(k/2) - 1 \geq 1 + \sqrt{k+2}$ .

Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα αυτό στο επόμενο λήμμα.

**Λήμμα.** Δίνονται ένας ακέραιος αριθμός  $k > 0$  και ένας ακέραιος  $p$  που ικανοποιεί την ανισότητα (1'). Αν όλοι οι ακέραιοι από το  $k$  έως το  $(p+1)^2$  γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων, τότε όλοι οι ακέραιοι από το  $k$  έως το  $2(p+1)^2 - 1$  μπορεί επίσης να γραφούν με αυτή τη μορφή.

Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1, προσδιορίζοντας επακριβώς τη συνάρτηση  $f(k)$ . Αφού υποθέσαμε ότι όλοι οι ακέραιοι από το  $k$  έως το  $(p+1)^2$  μπορεί να γραφούν ως άθροισμα διαφορετικών ακεραίων και ότι ικανοποιείται η ανισότητα (1'), η οποία γράφεται ως  $p+1 \geq k/2$ , βρίσκουμε

$$(p+1)^2 \geq k^2/4.$$



Σχήμα 5

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ως συνάρτηση  $f(k)$  την  $k^2/4$ .

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματός μας χρησιμοποιώντας μια ιδιαίτερη μορφή τέλει-επαγωγής, κατά την οποία αυξάνουμε το άνω φράγμα του διαστήματος στο οποίο αληθεύει η πρότασή μας.

Έστω  $k$  ένας θετικός άρτιος ακέραιος και ότι όλοι οι αριθμοί από το  $k$  έως το  $k^2/4$  γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων διαφορετικών φυσικών αριθμών. Θεωρούμε τον αριθμό  $p = (k/2) - 1$ . Βάσει του λήμματος, όλοι οι αριθμοί στην περιοχή από το  $k$  έως το  $k^2/4 = 2(p+1)^2 - 1$  μπορεί να παρασταθούν με τον ίδιο τρόπο. Ας αυξήσουμε το  $p$  κατά 1. Μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι

$$(p+2)^2 < 2(p+1)^2 - 1,$$

για κάθε  $p > \sqrt{3}$ . Οι τιμές τού  $p$  που μας ενδιαφέρουν ανήκουν σίγουρα σε αυτή την περιοχή, και επομένως από το λήμμα γνωρίζουμε ότι όλοι οι ακέραιοι από το  $k$  έως το  $(p+2)^2$  γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων διαφορετικών φυσικών αριθμών. Επιπλέον, με λίγες ακόμη πράξεις βρίσκουμε ότι αληθεύουν οι ανισότητες που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στις ανισότητες (1') και (2') το  $p$  με το  $p_1 = p + 1$ . Συνεπώς, σύμφωνα με το λήμμα, όλοι οι αριθμοί από το  $k$  έως το

$$2(p_1+1)^2 - 1 = 2(p+2)^2 - 1 \\ = 2(p+1)^2 + 1 + 4(p+1)$$

γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων διαφορετικών φυσικών αριθμών. Επομένως, το διάστημα το οποίο περιέχει ακεραίους που γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων αυξάνεται κατά  $4(p+1) = 2k$ . Με τον ίδιο τρόπο περνάμε από το  $p_1$  στο  $p_2 = p_1 + 1 = p + 2$  και αυξάνουμε και πάλι το διάστημα στο οποίο όλοι οι ακέραιοι γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων. Αυτή η διαδικασία αυξάνει το μήκος τού εν λόγω διαστήματος κατά 4. Πράγματι,

$$4(p_1+1) = 4(p+2) = 4(p+1) + 4.$$

Είναι πλέον προφανές ότι, αν λάβουμε  $p_3 = p_2 + 1$ , και μετά  $p_4 = p_3 + 1$ , και ούτω καθεξής, αποδεικνύουμε ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του  $k$

μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων.

Απομένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός  $k$ . Αυτό το έργο ανέλαβε ένας υπολογιστής, ο οποίος βρήκε ότι όλοι οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα από το 130 έως το  $130^2/4 = 4.225$  γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων.

Οι αναγνώστες που δεν εμπιστεύονται τους υπολογιστές —και ίσως υπάρχουν κάποιοι!— μπορούν να κάνουν τους υπολογισμούς με το χέρι.

Έχουμε αποδείξει ότι όλοι οι ακέραιοι από το 129 και μετά γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων. Όμως, δεν γνωρίζουμε ακόμη το ελάχιστο πλήθος των διαφορετικών τετραγώνων που απαιτούνται για αυτή την αναπαράσταση. Για να αναλύσουμε όσο δυνατόν περισσότερους αριθμούς και να πάρουμε κάποια ιδέα για την απάντηση σε τούτο το ερώτημα, γράψαμε το εξής πρόγραμμα σε γλώσσα BASIC.

```
N=0
INPUT "ΔΩΣΕ ΤΟ Ν" N
R=INT(SQR(N))
DIM S(N),T(N)
FOR A=1 TO N
S(A)=100
NEXT A
K=1
B0:
P=K*K
Q=P
B1:
M=Q-P
T(Q)=S(M)+1
Q=Q+1
IF Q<=N GOTO B1
M=P
B2:
IF T(M) > S(M) GOTO B3
S(M)=T(M)
B3:
M=M+1
IF M<=N GOTO B2
K=K+1
IF K<=R GOTO B0
FOR L=100 TO 6 STEP-1
FOR A=1 TO N
IF S(A)=L THEN PRINT "L="
L;"M=" A;
```

NEXT A  
NEXT L  
END

Για να χρησιμοποιήσετε αυτό το πρόγραμμα, πρέπει να δώσετε τον αριθμό  $N$ , ο οποίος θα αποτελέσει το ανώτερο όριο των υπολογισμών. Το πρόγραμμα, για κάθε αριθμό  $L \leq 100$ , τυπώνει όλους τους ακεραίους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του  $N$ , και το ελάχιστο πλήθος των διαφορετικών τετραγώνων στην αναπαράστασή τους είναι ίσο με  $L$ . Οι αριθμοί που δεν γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων τυπώνονται στη γραμμή  $L = 100$ . Αυτούς τους αριθμούς τους έχουμε ήδη αναφέρει.

Μόνο οι αριθμοί 124 και 188 χρειάζονται τουλάχιστον έξι διαφορετικά τετράγωνα για την αναπαράστασή τους. Οι επόμενοι αριθμοί γράφονται ως άθροισμα πέντε διαφορετικών τετραγώνων:

55, 88, 103, 132, 172, 176, 192, 240, 268, 288, 304, 368, 384, 432, 448, 496, 512, 752.

Όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό αυτών των αριθμών με μια δύναμη του 4 έχουν την ίδια ιδιότητα. Αυτοί είναι οι

220, 352, 412, 528, 688, 704, 768, 960, και ούτω καθεξής.

Δεν έχει ανακαλυφθεί άλλος αριθμός μικρότερος του 100.000 η αναπαράσταση του οποίου να απαιτεί τουλάχιστον πέντε διαφορετικά τετράγωνα.

Θα αποδείξουμε τώρα το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 2.** Αν η αναπαράσταση ενός άρτιου αριθμού απαιτεί τουλάχιστον πέντε διαφορετικά τετράγωνα, τότε ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του επί το 4 έχει την ίδια ιδιότητα.

**Απόδειξη.** Αν διαιρέσουμε το τετράγωνο ενός αριθμού διά του 4, τότε, αν ο αριθμός είναι άρτιος, το υπόλοιπο της διαίρεσης ισούται με μηδέν, ενώ, αν είναι περιττός, ισούται με 1. Έστω  $a$  ένας άρτιος αριθμός, η αναπαράσταση του οποίου απαιτεί τουλάχιστον πέντε διαφορετικά τετράγωνα. Ας υποθέσουμε ότι το  $4a$

γράφεται ως άθροισμα 2, 3 ή 4 διαφορετικών τετραγώνων. Επισημαίνουμε ότι το  $4a$  δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, διότι σε αυτή την περίπτωση θα ήταν τέλειο τετράγωνο και το  $a$ .

Έστω  $4a = b^2 + c^2$ . Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. Αν και το  $b$  και το  $c$  είναι άρτια —δηλαδή, αν  $b = 2p$  και  $c = 2q$ —, έχουμε ότι

$$4a = 4p^2 + 4q^2$$

και, επομένως,  $a = p^2 + q^2$ , σε αντίθεση με την υπόθεσή μας. Αν και το  $b$  και το  $c$  είναι περιττά, τότε ο αριθμός στο δεξιό μέλος της ισότητας  $4a = b^2 + c^2$  δίνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθεί διά του 4, ενώ το αριστερό μέλος της ισότητας διαιρείται διά του 4 —άρα, καταλήγουμε σε αντίφαση. Αν ο ένας από τους αριθμούς  $b$  και  $c$  είναι άρτιος και ο άλλος περιττός, το δεξιό μέλος αυτής της ισότητας είναι περιττό, ενώ το αριστερό είναι άρτιο —οπότε καταλήγουμε πάλι σε αντίφαση.

Η περίπτωση  $4a = b^2 + c^2 + d^2$  αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο. Αν και οι τρεις αριθμοί  $a, b, c$  είναι άρτιοι, τότε το  $a$  παριστάνεται ως άθροισμα τριών διαφορετικών τετραγώνων. Στις άλλες περιπτώσεις, το υπόλοιπο της διαίρεσης του δεξιού μέλους διά 4 είναι 1, 2 ή 3, ενώ το αριστερό μέλος διαιρείται διά 4.

Η περίπτωση  $4a = b^2 + c^2 + d^2 + e^2$  διαφέρει από τις προηγούμενες μόνο όταν όλοι οι αριθμοί  $b, c, d$  και  $e$  είναι περιττοί. Τότε, θέτουμε  $b = 2p + 1, c = 2q + 1, d = 2r + 1, e = 2s + 1$ . Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση  $4a = b^2 + c^2 + d^2$ , βρίσκουμε

$$4a = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη διά 4, έχουμε

$$a = p(p + 1) + q(q + 1) + r(r + 1) + s(s + 1) + 1.$$

Οι τέσσερις πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι άρτιοι. Επομένως, το δεξιό μέλος είναι περιττό. Όμως, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, το αριστερό μέλος είναι άρτιο. Έτσι, η απόδειξή μας ολοκληρώθηκε.

Προηγουμένως παραθέσαμε δεκαοκτώ αριθμούς οι οποίοι δεν γράφονται ως άθροισμα λιγότερων από πέντε διαφορετικών τετραγώνων. Από αυτούς οι δεκαέξι είναι άρτιοι και, επομένως, οι αριθμοί που προκύπτουν απ' τον πολλαπλασιασμό τους επί μια δύναμη του 4 έχουν, βάσει του Θεωρήματος 2, την ίδια ιδιότητα.

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για τους δύο περιττούς αριθμούς που απέμειναν, το 55 και το 103, αρκεί να αποδείξουμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον πέντε διαφορετικά τετράγωνα ώστε να γραφούν ως άθροισμα τετραγώνων οι άρτιοι  $220 = 4 \cdot 55$  και  $412 = 4 \cdot 103$ . Αυτό το γεγονός μπορεί να αποδειχτεί με άμεσο υπολογισμό.

Η εξέταση των αριθμών που είναι μικρότεροι του 100.000 οδήγησε σε μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Αποδείχτηκε ότι το ελάχιστο πλήθος διαφορετικών τετραγώνων στην αναπαράσταση των αριθμών της μορφής  $8n - 2$  (για  $n > 13$ ) είναι τρία. Για τους αριθμούς της μορφής  $8n - 5$  (για  $n > 80$ ) είναι επίσης τρία, και για τους αριθμούς της μορφής  $4^m(8n - 1)$  (για  $m \geq 0$  και  $n \geq 14$ ) είναι τέσσερα.

Αυτά τα θεωρήματα θα είχε ενδιαφέρον να αποδειχτούν για αριθμούς μεγαλύτερους του 100.000, καθώς και να αποδειχτεί ότι, εκτός από την ακολουθία που προσδιορίσαμε προηγουμένως, δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί που απαιτούν πέντε τουλάχιστον τετράγωνα για να γραφούν ως άθροισμα διαφορετικών τετραγώνων.

Ας εξετάσουμε άλλα σχήματα αριθμών. Αν σκεφτούμε λίγο το ζήτημα, θα δούμε ότι επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση  $f(k)$  μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 1 για οποιοδήποτε σχήμα αριθμών. Επίσης, μπορούμε να τροποποιήσουμε το πρόγραμμα της BASIC έτσι ώστε να εκτελεί υπολογισμούς με οποιονδήποτε  $k$ -γώνο αριθμό. Όμως, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι τόσο ενδιαφέροντα όπως στην περίπτωση των τετραγώνων αριθμών.

Στην περίπτωση των τριγώνων αριθμών, μόνο οι 2, 5, 8, 12, 23 και 33 δεν μπορούν να γραφούν ως άθροισμα διαφορετικών τριγώνων αριθ-

μών. Ένας μόνο αριθμός, ο

$$20 = 1 + 3 + 6 + 10,$$

απαιτεί, για να γραφεί ως άθροισμα, περισσότερους από τρεις τριγώνους αριθμούς.

Βρήκαμε εξήντα έναν αριθμούς που δεν γράφονται ως άθροισμα διαφορετικών πεντάγωνων αριθμών. Είναι οι

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 37, 38, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 54, 55, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 72, 77, 80, 81, 84, 89, 94, 95, 96, 100, 101, 102, 107, 112, 116, 124, 136, 137, 141, 142, 147 και 159.

Οι υπόλοιποι αριθμοί που δεν υπερβαίνουν το 100.000 μπορούν να γραφούν με αυτή τη μορφή. Μόνο δύο από αυτούς, ο 241 και ο 206, γράφονται ως άθροισμα έξι διαφορετικών πεντάγωνων αριθμών και είναι αδύνατο να γραφούν ως άθροισμα λιγότερων πεντάγωνων όρων.

Οι φιλόδοξοι αναγνώστες μπορούν να επεκτείνουν την έρευνα σε εξαγώνους, επτάγώνους και οποιουσδήποτε άλλους πολύγωνους αριθμούς.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Maria Kurkina και τον Archil Maisuradze, φοιτητές του Ινστιτούτου Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας, οι οποίοι με βοήθησαν στη δημιουργία του προγράμματος BASIC και στην εκτέλεση των υπολογισμών. ●



Τώρα, το  
Χρονικό του Χρόνου —Εικονογραφημένο,  
και σε χαρτόδετη έκδοση.

Σελ. 248, 19 x 25 εκ., Έγχρωμο, 8.000 δρχ.

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

M196

**Σχηματισμός προόδου.** Εκτελούμε τη διαίρεση του 201 διά του φυσικού αριθμού  $N$ . Το ηλίκο, το υπόλοιπο και ο διαιρέτης (δηλαδή, ο ίδιος ο  $N$ ) σχηματίζουν, αν ληφθούν με κάποια σειρά, γεωμετρική πρόοδο. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του  $N$ .

M197

**Αλλαγές ελαστικών.** Γνωρίζουμε ότι τα πίσω λάστιχα ενός αυτοκινήτου φθείρονται έπειτα από 42.000 km, ενώ τα μπροστινά έπειτα από 58.000 km. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να διανύσει το αυτοκίνητο αν χρησιμοποιήσουμε τέσσερα καινούργια λάστιχα και μία νέα ρεζέρβα; (Όλα τα λάστιχα είναι ίδια.)

M198

**Ριζικές ανακατατάξεις.** Διοργανώθηκε ένα πρωτάθλημα σκάκι δύο γύρων. Σε κάθε γύρο, όλοι οι παίκτες έπαιξαν από ένα παιχνίδι με όλους τους άλλους διαγωνιζομένους. Με νίκη κέρδιζαν έναν βαθμό, με ισοπαλία μισό βαθμό, ενώ με ήττα έπαιρναν μηδέν βαθμούς. Μπορεί μετά το τέλος του πρωταθλήματος η κατάταξη των παικτών να είναι η αντίθετη απ' αυτή που ίσχυε στο τέλος του πρώτου γύρου; (Δηλαδή, ο τελευταίος στη λήξη του πρώτου γύρου παίκτης να είναι ο πρωταθλητής, ο προτελευταίος να τερματίσει δεύτερος, κ.ο.κ.) Λύστε το πρόβλημα (α) για εννέα διαγωνιζομένους και (β) για δέκα διαγωνιζομένους.

M199

**Περιγεγραμμένος κύκλος.** Στο τρίγωνο  $ABC$  φέρουμε το ύψος  $CM$ . Η ευθεία που είναι συμμετρική (ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία  $CM$ )

του ύψους το οποίο άγουμε από την κορυφή  $A$ , τέμνει την ευθεία  $BC$  στο σημείο  $K$ . Βρείτε τη γωνία  $OMK$ , όπου  $O$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$  (τα σημεία  $O$ ,  $M$  και  $K$ , είναι όλα διαφορετικά).

M200

**Θετικοί άγνωστοι (εις διπλούν).** Βρείτε θετικές λύσεις  $x_1, \dots, x_n$  της εξίσωσης

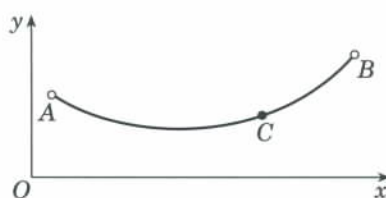
$$x_n + \frac{1}{x_n + \frac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1} + \dots + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_1}}}}} = \frac{n}{n+1}.$$

Κάθε άγνωστος εμφανίζεται δύο φορές στην εξίσωση.

## Φυσική

Φ196

**Αναρτημένο σκοινί.** Ένα βαρύ σκοινί αναρτάται από τα σημεία  $A$  και  $B$  (Σχήμα 1). Η τάση του σκοινιού στο σημείο  $C$  ανέρχεται σε 20 N. Βρείτε τη μάζα του σκοινιού.



Σχήμα 1

Φ197

**Ισόθερμες και αδιαβατικές καμπύλες.** Περιγράψτε μια μεταβολή που θα οδηγήσει ένα ιδανικό αέριο από την

κατάσταση 1 θερμοκρασίας  $T_1$  στην κατάσταση 2 θερμοκρασίας  $T_2 > T_1$  κατά τρόπον ώστε, καθ' όλη τη διάρκεια της αντιστρεπτής διαδικασίας  $1 \rightarrow 2$ , η θερμοκρασία να μην πέφτει και να μη σημειώνονται απώλειες θερμότητας από το αέριο. Η ελάχιστη θερμότητα που μεταφέρεται στο αέριο σε μια τέτοια μεταβολή είναι  $Q_1$ . Προσδιορίστε τη μέγιστη θερμότητα που μπορεί να προσδοθεί στο αέριο υπό τις προαναφερόμενες συνθήκες. (O. Shvedov)

Φ198

**Βέργες εν μέσω πεδίων.** Σε μικρές εργασίες συγκόλλησης χρησιμοποιείται μερικές φορές μείγμα οξυγόνου και υδρογόνου, το οποίο λαμβάνεται από την ηλεκτρόλυση νερού. Βρείτε το συντελεστή απόδοσης του ηλεκτρολυτικού στοιχείου αν η τάση μεταξύ των ηλεκτροδίων του στοιχείου ισοούται με  $V = 2$  V. Λάβετε υπόψη σας ότι για να απελευθερωθεί θερμότητα  $Q = 0,29$  MJ πρέπει να καεί μάζα  $m = 2$  g υδρογόνου σε περίσσεια οξυγόνου. (V. Pogozhev)

Φ199

**Ηλεκτρισμός στις ράγες.** Δύο παράλληλες ράγες μήκους  $2L$  και αντίστασης  $\rho$  ανά μονάδα μήκους στερεώνονται στο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση  $l$  η μία από την άλλη. Τα άκρα τους συνδέονται με πανομοιότυπες ηλεκτρικές πηγές με  $HEΔ = E$  (Σχήμα 2). Ένας ηλεκτρικός συνδέτης (δηλαδή ένας ευθύγραμμος αγωγός εφοδιασμένος με κατάλληλες επαφές στα άκρα του) μάζας  $m$  και αντίστασης  $R$  τοποθετείται πάνω στις ράγες έτσι ώστε να μπορεί να γλιστρά πάνω τους, εν συνεχεία δε το όλο σύστημα εισάγεται σε ένα κατακόρυφο

Η συνέχεια στη σελ. 62  $\Rightarrow$

# Ernst Abbe και «Carl Zeiss»

A. Vasilyev

**Α**ΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΠΟΥ ΝΑ εργάζεται στο πεδίο της οπτικής και να μη γνωρίζει το όνομα του γερμανού επιστήμονα Ernst Abbe (1840-1905). Χάρη στο έργο του Abbe και του Carl Zeiss, λαμπρού σχεδιαστή και κατασκευαστή οπτικών οργάνων ο οποίος εισήγαγε μεγάλες καινοτομίες στην εμπορική παραγωγή των ειδών αυτών, η οπτική κατέκτησε ένα επίπεδο τεχνικής τελειότητας που ουσιαστικά παραμένει αμετάβλητο ως τις μέρες μας.

Η περίοδος από τα μέσα του 19ου αιώνα ως τις αρχές του 20ού υπήρξε μια εποχή επαναστατικών ανακαλύψεων σε διάφορα πεδία των φυσικών επιστημών, η οποία χάρισε στην ανθρωπότητα νέα εκλεπτυσμένα όργανα και μεθόδους έρευνας. Οι απαι-

τήσεις της επιστήμης και της τεχνολογίας οδήγησαν στην επινόηση συσκευών για την παρατήρηση διαφόρων αντικειμένων, εξελίξη η οποία είχε ως αποτέλεσμα την ταχεία ανάπτυξη της εφαρμοσμένης οπτικής και της οπτικής τεχνολογίας. Η διαδικασία παραγωγής των επιστημονικών οργάνων γνώρισε ριζικές βελτιώσεις. Τα μικρά εργαστήρια αντικαταστάθηκαν από κολοσσιαίες επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνταν ταυτόχρονα τόσο στο πεδίο της επιστημονικής έρευνας όσο και στην παραγωγή. Στη συγκεκριμένη μεταμόρφωση του τοπίου πρωτοπόρο ρόλο διαδραμάτισε η εταιρεία «Carl Zeiss» (πρόκειται για τη σύγχρονη επωνυμία της), και η εργασία του Abbe σ' αυτή συνετέλεσε καθοριστικά στην οικονομική άνθησή της, δίνοντάς της παράλληλα τη δυνατότητα να κατασκευάσει εξαιρετικά οπτικά όργανα.

Ο Ernst Abbe γεννήθηκε στο Άιζναχ το 1840, αλλά τις σπουδές του

στη στοιχειώδη και τη μέση εκπαίδευση τις ολοκλήρωσε στην Ιένα, όπου και εισήχθη στο τοπικό πανεπιστήμιο. Αργότερα μετακόμισε στο Γκέτινγκεν. Την εποχή εκείνη, στο Γκέτινγκεν εργάζονταν εξέχουσες φυσιογνώμες, όπως ο Wilhelm Edward Weber (1804-1891), ο George Friedrich Riemann (1826-1866) και άλλοι φημισμένοι μαθηματικοί, και η προσωπική επαφή με αυτούς βοήθησε τον Abbe να αναπτύξει τα αξιολογότερα μαθηματικά χαρίσματά του.

Ο Abbe υποστήριξε με επιτυχία τη διδακτορική του διατριβή το 1861, ενώ το 1863 έγινε έκτακτος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Ιένας. Έζησε στην Ιένα επί 35 συναπτά έτη και της χάρισε παγκόσμια φήμη. Ως καθηγητής στο πανεπιστήμιο συγκέ-



ντρωσε όλη του την προσοχή στην οπτική: στη θεωρία των οπτικών οργάνων, στην αναλυτική και μαθηματική οπτική και στην τεχνολογία του οπτικού πειραματισμού.

Η περίοδος της ζωής του Abbe από το 1866 έως το 1888 συνδέθηκε στενά με το έργο του θρυλικού γερμανού οπτικού και βιομηχάνου Carl Zeiss. Το 1846 ο Zeiss ίδρυσε ένα εργαστήριο οπτικών οργάνων στην Ιένα, το οποίο αρχικά κατασκεύαζε μηχανικούς φακούς και πρωτόγονα μικροσκόπια. Πολύ σύντομα, ωστόσο, τα μικροσκόπια του Zeiss άρχισαν να χαιρούν μεγάλης εκτιμήσεως και χρησιμοποιούνταν ευρέως από επιστήμονες και μηχανικούς λόγω της εξαιρετικής ποιότητας των φακών τους. Από το 1858 ο Zeiss άρχισε να κατασκευάζει τελειοποιημένα μικροσκόπια, ενώ αργότερα πρόσθεσε στον κατάλογο των προϊόντων της επιχείρησής του και άλλα οπτικά όργανα. Ο Zeiss επεδίωκε ανελλιπώς να «βασίζει εξ ολοκλήρου την πρακτική σχεδίαση των μικροσκοπίων στην επιστημονική θεωρία», και έτσι προσκάλεσε μερικούς από τους εξέχοντες ειδικούς στην εφαρμοσμένη οπτική να συνεργαστούν μαζί του· στο επιστημονικό επιτελείο που συγκροτήθηκε, ο Ernst Abbe κρατούσε αδιαμφισβήτητη την πρωτοκαθεδρία.

Την εποχή εκείνη, η κατασκευή οπτικών οργάνων στην Ευρώπη είχε ήδη πίσω της ιστορία τριών αιώνων. Μολαταύτα, ως τότε η παραγωγή βασιζόταν κυρίως στη διαίσθηση και στην παραδοσιακή εμπειρική γνώση των μυστικών της τέχνης. Ένας από τους εφευρέτες ενός τύπου μικροσκοπίου με δύο φακούς, έναν αμφίκυρτο αντικειμενικό και έναν αμφίκυρτο προσοφθάλμιο, υπήρξε ο μέγας Ιταλός επιστήμονας Γαλιλαίος (1564-1642). Πατέρας του σύγχρονου μικροσκοπίου θεωρείται ο Cornelius Drebbel (1572-1634), του οποίου το μικροσκόπιο αποτελούνταν από έναν αμφίκυρτο αντικειμενικό φακό και έναν επιπεδόκυρτο προσοφθάλμιο. Μια θεμελιώδους σημασίας βελτίωση επέφερε ο Robert Hooke (1635-1703), ο οποίος το 1663 εισήγαγε τον τρίτο «συλλέκτη» φακό ανάμεσα στον αντικειμενικό και τον προσοφθάλμιο.

Το επόμενο βήμα το έκανε το 1716 ο Hertel, που πρόσθεσε από κάτω μια περιστρεφόμενη πλάκα με ένα φακό για να ανακλά το φως. Μ' αυτό τον τρόπο βελτιώθηκε ο φωτισμός του αντικειμένου και αυξήθηκε η ευκρίνεια του ειδώλου. Έτσι φτάσαμε ουσιαστικά στον τύπο του μικροσκοπίου που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα.

Η οποιαδήποτε περαιτέρω βελτίωση της ποιότητας του ειδώλου θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνο με την εξάλειψη των σφαλμάτων του οπτικού συστήματος —πρωτίστως δε, της σφαιρικής και της χρωματικής εκτροπής. Εξαιτίας της σφαιρικής εκτροπής, οι παραξονικές ακτίνες (ακτίνες που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τον οπτικό άξονα) διέρχονται από διαφορετικές περιοχές του φακού και τέμνουν τον οπτικό άξονα σε διαφορετικά σημεία, με αποτέλεσμα το ειδώλο ενός σημείου να μοιάζει με ανομοιογενώς φωτισμένο δίσκο. Η χρωματική εκτροπή, από την άλλη, ευθύνεται για την ανάλυση κάθε ακτίνας λευκού φωτός σε αρκετές ακτίνες διαφορετικών χρωμάτων, οι οποίες τέμνουν τον οπτικό άξονα σε διαφορετικά σημεία επειδή η εστιακή απόσταση των φακών εξαρτάται από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός. Πρόκειται για φαινόμενο γνωστό ως διασκεδασμός.

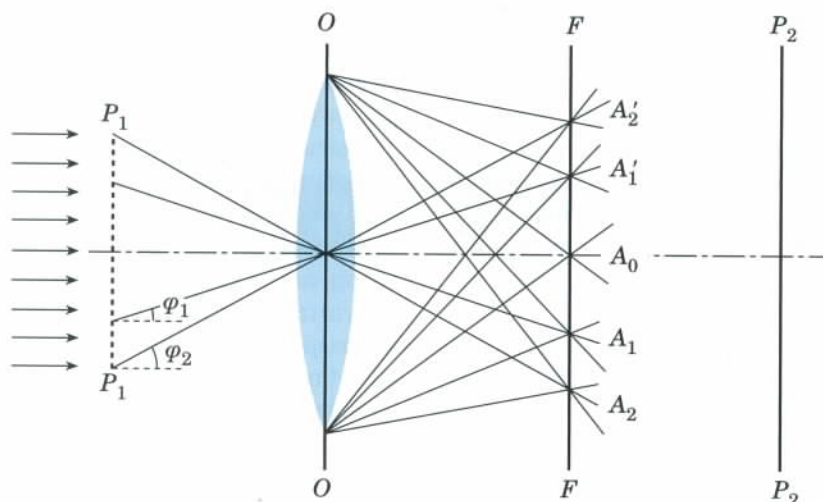
Καθ' όλο το διάστημα το οποίο διέρρευσε από τον 17ο ως τον 19ο αιώνα, οι ερευνητές προσπάθησαν όχι μόνο να βελτιώσουν την ποιότητα των ειδώλων που σχηματίζονταν στα μικροσκόπια, αλλά και να κατασκευάσουν ένα μικροσκόπιο το οποίο θα εξασφάλιζε τη μέγιστη δυνατή μεγέθυνση. Ως γνωστόν, η μεγέθυνση του μικροσκοπίου αυξάνεται όσο μειώνεται η εστιακή απόσταση του αντικειμενικού φακού, πράγμα που ώθησε τους οπτικούς να στρέψουν την προσοχή τους στους αντικειμενικούς φακούς μικρής εστιακής απόστασης. Επιπροσθέτως, η διακριτική ικανότητα του μικροσκοπίου εξαρτάται από το γωνιακό άνοιγμά του —δηλαδή, από τη γωνία που σχηματίζουν οι εξώτερες ακτίνες που φτάνουν από το αντικείμενο στην περίμετρο του αντικειμενικού φακού. Γωνιακό ά-

νοιγμα σχεδόν 180° επιτεύχθηκε πρώτη φορά στα μέσα του 19ου αιώνα. Ωστόσο, οι αντικειμενικοί φακοί μικρής εστιακής απόστασης και μεγάλου γωνιακού ανοίγματος παρουσίαζαν ακόμη μεγαλύτερες εκτροπές.

Πολλές προσπάθειες κατεβλήθησαν προκειμένου να βελτιωθεί η απόδοση των μικροσκοπίων και να υπολογιστεί η μεγέθυνσή τους βάσει της γεωμετρικής οπτικής. Όπως αποδείχθηκε, όμως, η γεωμετρία δεν αρκούσε από μόνη της για να εξηγηθεί η διαδικασία μέσω της οποίας σχηματιζόταν το ειδώλο στα μικροσκόπια. Τούτη η αποτυχία έστρεψε το ενδιαφέρον του Abbe στη φυσική (ή κυματική) οπτική. Ο Abbe δημοσίευσε τις μελέτες του πάνω στη σχεδίαση μικροσκοπίων το 1873. Σε αυτές τις εργασίες εξεταζόταν ο ρόλος που έπαιζαν ο αντικειμενικός και ο προσοφθάλμιος φακός στο σχηματισμό του ειδώλου. Για πρώτη φορά στην ιστορία της οπτικής, ο Abbe ταξινόμησε τις εκτροπές. Αλλά το μεγαλύτερο επίτευγμά του στάθηκε η ανακάλυψη των περιορισμών στους οποίους υπόκεινται οι κατασκευαστές οπτικών συστημάτων λόγω της κυματικής φύσης του φωτός.

Ο Abbe κατόρθωσε να εξηγήσει πώς σχηματίζει το ειδώλο ο φακός. Πρώτα σχηματίζεται μια εικόνα συμβολής στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα του φακού. Πρόκειται για ένα σύστημα εναλλασσόμενων μεγίστων και ελαχίστων του φωτισμού, το οποίο επιτελεί ρόλο φράγματος περίθλασης. Η προερχόμενη από το φακό φωτεινή ροή διέρχεται μέσω αυτού του φράγματος και αλληλεπιδρά μαζί του. Μόνο τότε εμφανίζεται ένα ειδώλο σε μικρή απόσταση από το επίπεδο του φράγματος, το οποίο μπορεί να γίνει ορατό πάνω σε ένα κομμάτι διαφώτιστης υάλου ή φωτογραφικού φιλμ. Έτσι σχηματίζεται το ειδώλο όταν έχουμε έναν μόνο φακό. Στο μικροσκόπιο, ωστόσο, η θεωρία του Abbe προβλέπει ότι το ειδώλο δημιουργείται σε δύο στάδια, τα οποία απεικονίζονται διαγραμματικά στο Σχήμα 1.

Κατά το πρώτο στάδιο, το φως που φωτίζει το αντικείμενο  $P_1P_1$  προσπίπτει στο φακό του μικροσκοπίου α-



Σχήμα 1

Η περίθλαστική θεωρία του Abbe για το μικροσκόπιο: τα επίπεδα του αντικειμένου και του ειδώλου σημειώνονται ως  $P_1P_1$  και  $P_2P_2$ , αντίστοιχα·  $FF$  είναι το εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού  $OO$ , με  $\varphi_k$  συμβολίζονται οι γωνίες περίθλασης και με  $A_k$  τα μέγιστα περίθλασης στο εστιακό επίπεδο.

φού σκεδαστεί και περίθλαστεί από τις λεπτομέρειες του αντικειμένου, πράγμα το οποίο σημαίνει πως το αντικείμενο καθορίζει τη δομή της φωτεινής δέσμης. Αφού διέλθει από τον αντικειμενικό φακό του μικροσκοπίου, η φωτεινή δέσμη παράγει μια εικόνα συμβολής στο εστιακό επίπεδο  $FF$ , η οποία είναι ένα σύστημα μεγίστων του φωτισμού που το γωνιακό τους μέγεθος εξαρτάται από τις δομικές λεπτομέρειες του αντικειμένου. Οι κατευθύνσεις προς τα εν λόγω μέγιστα καθορίζονται από τη συνθήκη  $n d \sin \varphi = k \lambda$ , όπου με  $n$  δηλώνουμε το δείκτη διάθλασης του οπτικού μέσου, με  $d$  τη χαρακτηριστική γραμμική διάσταση των λεπτομερειών του αντικειμένου και με  $\varphi$  τη γωνία περίθλασης· ο ακέραιος  $k = 0, 1, 2, \dots$  χαρακτηρίζει το μέγιστο στο οποίο αναφερόμαστε, ενώ με  $\lambda$  συμβολίζουμε το μήκος κύματος.

Κατά το δεύτερο στάδιο, τα μέγιστα του φωτισμού αντιμετωπίζονται ως σημειακές φωτεινές πηγές που εκπέμπουν σύμφωνες δέσμες φωτός. Τούτες οι δέσμες συμβάλλουν μεταξύ τους πίσω από το εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού σχηματίζοντας το είδωλο του αντικειμένου στο επίπεδο  $P_2P_2$ . Ο Abbe ονόμαζε την εικόνα συμβολής στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού *πρωτογενές είδωλο*, ενώ την εικόνα που σχηματιζόταν στο συζυγές επίπεδο

την *έλεγε δευτερογενές είδωλο*.

Για να ληφθεί το ακριβές είδωλο ενός αντικειμένου, το δευτερογενές είδωλο πρέπει να προκύψει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δεσμών που εκπέμπονται από όλα τα μέγιστα του πρωτογενούς ειδώλου. Ξεχωριστή σημασία έχουν τα μέγιστα πρώτης τάξεως τα οποία βρίσκονται σε μικρές γωνιακές αποστάσεις από τον κύριο άξονα και που παράγονται από τις μεγαλύτερες και συνήθως σημαντικότερες λεπτομέρειες του εξεταζόμενου αντικειμένου. Τα μέγιστα που αντιστοιχούν σε μεγάλες γωνιακές αποστάσεις οφείλονται σε μικρότερες λεπτομέρειες του αντικειμένου. Οι πάρα πολύ μικρές λεπτομέρειες του αντικειμένου (με γραμμική διάσταση μικρότερη από το μήκος κύματος του φωτός) αποκλείεται να γίνουν ορατές, διότι τα κύματα που περιθλώνται από τέτοιες λεπτομέρειες δεν φτάνουν στην οθόνη, ακόμη κι αν χρησιμοποιηθεί αντικειμενικός φακός με το μέγιστο δυνατό γωνιακό άνοιγμα. Ως εκ τούτου, τίθεται ένα όριο στη διακριτική ικανότητα του μικροσκοπίου:  $d \geq \lambda = \lambda_0/n$ , όπου με  $\lambda_0$  συμβολίζουμε το μήκος κύματος του φωτός στο κενό.

Συνήθως το φως δεν συναντά εμπόδια μέσα στο μικροσκόπιο, και έτσι το πλήθος των μεγίστων περίθλασης που διέρχονται μέσω του αντικειμενικού φακού περιορίζεται μόνο

από το πλαίσιο στήριξής του. Όσο μικρότερο είναι το αντικείμενο ή η λεπτομέρειά του, σε τόσο μεγαλύτερες γωνίες αντιστοιχούν τα μέγιστα περίθλασης πρώτης τάξεως που παράγει και τόσο μεγαλύτερο άνοιγμα πρέπει να έχει ο φακός.

Αν το γωνιακό άνοιγμα  $u$  υπολείπεται της γωνίας περίθλασης  $\varphi_1$  που αντιστοιχεί στα φάσματα πρώτης τάξεως (δηλαδή αν  $\eta \mu u < \eta \mu \varphi_1 = \lambda_0/d$ ), στο μικροσκόπιο θα εισέλθουν μέσω του αντικειμενικού μόνο οι ακτίνες από το κεντρικό μέγιστο. Έτσι, αποκλείεται να δούμε ένα είδωλο όπου θα διακρίνονται λεπτομέρειες με το μέγεθος της τάξεως του  $d$ . Όσο μεγαλύτερο γίνεται το  $\eta \mu u$  σε σχέση με το  $\lambda_0/d$  τόσο περισσότερα φάσματα ανωτέρας τάξεως θα συνεισφέρουν στο σχηματισμό του ειδώλου, και τόσο μικρότερες λεπτομέρειες θα διακρίνονται στο είδωλο.

Συνήθως το αντικείμενο φωτίζεται όχι μόνο από φωτεινές δέσμες παράλληλες προς τον οπτικό άξονα, αλλά και από δέσμες που σχηματίζουν μεγαλύτερες γωνίες με αυτόν, πράγμα το οποίο βελτιώνει τη διακριτική ικανότητα. Αν η δέσμη που φωτίζει το αντικείμενο σχηματίζει γωνία  $a$  με τον άξονα του μικροσκοπίου και περιθλάται σε γωνία  $a_0$ , η συνθήκη για τα μέγιστα λαμβάνει τη μορφή  $\eta \mu a_0 - \eta \mu a = k \lambda / d$ .

Προκειμένου το πρώτης τάξεως φάσμα να εισέλθει πλήρως στον αντικειμενικό φακό, πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:  $a = -u$ ,  $a_0 = u$  και  $k = 1$ . Επιπλέον, πρέπει να ισχύει η ανισότητα  $2 \eta \mu u \geq \lambda_0/(nd)$  ή, ισοδύναμα,  $d \geq \lambda_0/(2n \eta \mu u)$ . Ο Abbe ονόμαζε την ποσότητα  $A = n \eta \mu u$  «αριθμητικό άνοιγμα». Σύμφωνα με τη θεωρία του Abbe, το αριθμητικό άνοιγμα καθορίζει αρκετές σημαντικές ιδιότητες του μικροσκοπίου —για παράδειγμα, τη φωτεινότητα του ειδώλου και το βαθμό της ομοιότητας που υπάρχει ανάμεσα στο αντικείμενο και το είδωλό του. Όσο μεγαλύτερο αριθμητικό άνοιγμα έχει ένα μικροσκόπιο τόσο μικρότερες είναι οι λεπτομέρειες του αντικειμένου που μπορεί να διακρίνει. Η θεωρία του Abbe προβλέπει ότι είναι αδύνατο να δούμε σε ένα μικροσκόπιο αντικείμενα



με γραμμική διάσταση μικρότερη από το ήμισυ του μήκους κύματος του φωτός που χρησιμοποιείται για το φωτισμό τους. Ο Abbe επιβεβαίωσε την ορθότητα της θεωρίας του με πειράματα (όπου ως εξεταζόμενα αντικείμενα χρησιμοποιήθηκαν φράγματα πλάτους), και το 1887 διατύπωσε μια αυστηρή μαθηματική θεωρία του μικροσκοπίου.

Για να βελτιώσει τη διακριτική ικανότητα των μικροσκοπίων, ο Abbe προσπάθησε να αυξήσει το αριθμητικό άνοιγμά τους. Είχε τρεις τρόπους στη διάθεσή του για να επιτύχει κάτι τέτοιο: να αυξήσει το γωνιακό άνοιγμα, να αυξήσει το δείκτη διάθλασης του οπτικού μέσου ή να μειώσει το μήκος κύματος της φωτεινής δέσμης. Από την αρχή ακόμη των ερευνών του στην οπτική, ο Abbe είχε συνειδητοποιήσει ότι τα μικροσκόπια είχαν φτάσει στα όριά τους όσον αφορά το γωνιακό άνοιγμά τους, και πως κάθε προσπάθεια στην κατεύθυνση αυτή θα αποδεικνυόταν ατελέσφορη.

Η δεύτερη προσέγγιση φαινόταν να υπόσχεται περισσότερο: Ο Abbe πρότεινε να αυξηθεί ο δείκτης διάθλασης  $n$  του οπτικού μέσου με την πλήρωση του κενού χώρου που παρεμβάλλοταν ανάμεσα στο αντικείμενο και τον αντικειμενικό φακό με κάποια ουσία η οποία θα είχε δείκτη διάθλασης μεγαλύτερο απ' ό,τι ο αέρας. Το 1878 ο Abbe και ο Stephenson κατασκεύασαν ένα μικροσκόπιο όπου μεταξύ αντικειμένου και αντικειμενικού φακού τοποθετήθηκε κεδρέλαιο. Οι προσπάθειές τους στέφθηκαν με επιτυχία: το όργανο χαρακτηριζόταν από διακριτική ικανότητα αυξημένη κατά 30%.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ιδέες του Abbe όσον αφορά την αύξηση της διακριτικής ικανότητας των μικροσκοπίων με τη μείωση του μήκους κύματος του φωτός που χρησιμοποιείται για το σχηματισμό του ειδώλου —ειδικά δε, όσον αφορά τη δυνατότητα χρησιμοποίησης υπεριώδους ακτινοβολίας. Πρόκειται για μια ιδέα η οποία έλαβε σάρκα και οστά σε ένα από τα μικροσκόπια που κατασκεύασαν οι συνεργάτες του Abbe στην εταιρεία Carl Zeiss λίγο προτού πεθάνει ο μεγάλος εφευ-

ρέτης. Τα μικροσκόπια αυτού του είδους συνέβαλαν, αργότερα, στη μελέτη της δομής του DNA και του RNA, των μεγαλομορίων που συνιστούν τους φορείς γενετικής πληροφορίας στους ζώντες οργανισμούς.

Ο Abbe αφιέρωσε επίσης πολλή προσοχή στη διόρθωση των σφαλμάτων στα οπτικά όργανα. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα επίπεδου αντικειμένου τοποθετημένου κάθετα στον οπτικό άξονα ενός απλού φακού που θεωρείται απαλλαγμένος από το σφάλμα της σφαιρικής εκτροπής, τότε τα ειδώλα του εν λόγω στοιχειώδους τμήματος τα οποία παράγουν οι διάφορες ζώνες του φακού χαρακτηρίζονται από διαφορετικές μεγεθύνσεις. Ως εκ τούτου, τα ειδώλα μιας σημειακής πηγής που σχηματίζονται από τις διάφορες ζώνες συμπίπτουν μόνο εφόσον αυτή βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα του συστήματος, ενώ η ευκρίνεια του ειδώλου υποβαθμίζεται απότομα όσο απομακρυνόμαστε από αυτόν. Ο Abbe απέδειξε ότι όλες οι ζώνες ενός οπτικού συστήματος μεγεθύνουν τα αντικείμενα στον ίδιο βαθμό εφόσον ικανοποιείται η «συνθήκη των ημιτόνων». Η συγκεκριμένη συνθήκη απαιτεί ότι για όλες τις ακτίνες που εκπορεύονται από ένα σημείο στον άξονα του οπτικού συστήματος και κατόπιν, αφού διαθλαστούν, συγκλίνουν στο σημείο ενός ειδώλου, ο λόγος των ημιτόνων των γωνιών τις οποίες σχηματίζουν οι αντίστοιχες ακτίνες με τον οπτικό άξονα πρέπει να είναι σταθερός:

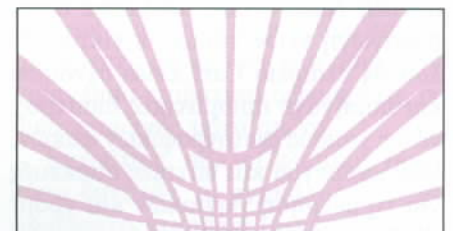
$$n_1 \mu_1 / n_2 \mu_2 = m n_2 / n_1,$$

όπου με  $n_1$  και  $n_2$  συμβολίζουμε αντίστοιχα το δείκτη διάθλασης του οπτικού μέσου από την πλευρά του αντικειμένου και από την πλευρά του ειδώλου, ενώ το  $m$  παριστά την εγκάρσια μεγέθυνση του οπτικού συστήματος.

Δύο σημεία που δεν παρουσιάζουν σφαιρική εκτροπή, αφ' ενός, και για τα οποία ικανοποιείται η συνθήκη των ημιτόνων του Abbe, αφ' ετέρου, καλούνται απλανητικά. Ο Abbe απέδειξε ότι στον άξονα κάθε οπτικού συστήματος υπάρχει μόνο ένα ζεύγος απλανητικών σημείων. Ο ίδιος βρή-

κε επίσης μια απλή μέθοδο για τον προσδιορισμό του βαθμού στον οποίο ικανοποιείται η συνθήκη των ημιτόνων. Σχεδίασε την εικόνα που φαίνεται στο Σχήμα 2, η οποία παρατηρείται με το υπό δοκιμή οπτικό σύστημα. Αν η συνθήκη των ημιτόνων ικανοποιείται, τότε είναι δυνατόν να βρεθεί μια θέση για την εικόνα ώστε ο παρατηρητής να τη βλέπει σαν ορθογώνιο πλέγμα. Ο Abbe υπέβαλε σε έλεγχο πολλούς αντικειμενικούς φακούς μικροσκοπίων που είχαν κατασκευαστεί από τους παλιούς τεχνίτες με την εμπειρική μέθοδο της δοκιμής και του λάθους, και διαπίστωσε ότι η συνθήκη των ημιτόνων ίσχυε σε όλους τους καλούς αντικειμενικούς φακούς. Στην εποχή μας, η συνθήκη των ημιτόνων του Abbe λαμβάνεται απαραίτητως υπόψη στη σχεδίαση κάθε οπτικού συστήματος.

Στον αγώνα του για την καταπολέμηση της χρωματικής εκτροπής, ο Abbe κατέβαλε κάθε δυνατή προσπάθεια για να πείσει τα υαλοουργεία να προχωρήσουν στην παραγωγή νέων ειδών οπτικής υάλου με συγκεκριμένες ιδιότητες. Για να συγκρίνονται οι ιδιότητες των διάφορων τύπων οπτικής υάλου, ο Abbe επέδειξε την εξής μέθοδο: Επιλέξτε έναν αριθμό μηκών κύματος αναφοράς στην ορατή περιοχή του φάσματος και χρησιμοποιήστε την έννοια του σχετικού διασκεδασμού (ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος των δεικτών διάθλασης που αντιστοιχούν στα επιλεγμένα μήκη κύματος). Στην εφαρμοσμένη οπτική, ο αντίστροφος της διασκεδαστικής ικανότητας που παρουσιάζουν τα υλικά έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως αριθμός του Abbe. Το 1873, ο Abbe κατόρθωσε να κατασκευάσει τον



Σχήμα 2

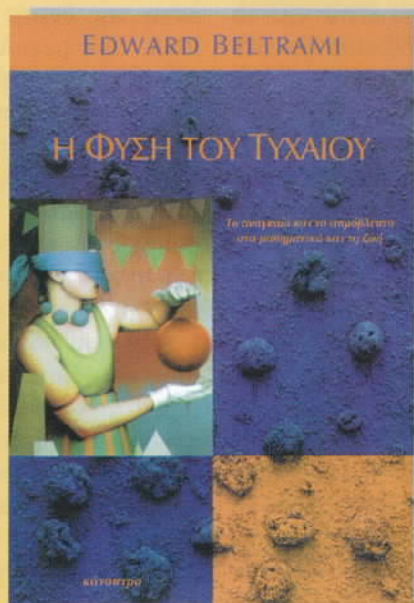
Η εικόνα που σχεδίασε ο Abbe για να ελέγχεται το κατά πόσον ένα οπτικό σύστημα ικανοποιεί τη φερόνυμη συνθήκη των ημιτόνων.

πρώτο αντικειμενικό φακό στην ιστορία που ήταν αχρωστικός για τρία χρώματα. Η σύμπτωση των εστιών για ακτίνες τριών διαφορετικών μηκών κύματος επιτεύχθηκε με τη χρησιμοποίηση ποικίλων τύπων γυαλιού με διαφορετικούς αριθμούς Abbe. Ο Abbe ονόμαζε τους αντικειμενικούς φακούς αυτής της κατηγορίας «αποχρωματικούς». Το 1886 ο Abbe κατάφερε να σχεδιάσει και να παραγάγει έναν αποχρωματικό αντικειμενικό φακό στον οποίο ουσιαστικά είχαν αρθεί τόσο η σφαιρική όσο και η χρωματική εκτροπή. Επρόκειτο για ένα σύστημα τριών φακών από τους οποίους οι δύο εξωτερικοί ήταν απλοί, ενώ ο εσωτερικός αποτελούνταν από τρεις συγκολλημένους φακούς που ο καθένας τους είχε και διαφορετικό αριθμό Abbe.

Όποτε ο Abbe σχεδίαζε οπτικά συστήματα, ξεκινούσε πάντοτε από κάποια θεωρητική ανάλυση. Ήταν η θεωρία που τον οδήγησε στην ιδέα ότι τα οπτικά συστήματα πρέπει να εφοδιάζονται με ειδικά διαφράγματα τα οποία περιορίζουν τη δίοδο των φωτεινών ακτίνων. Ο Abbe έδειξε ότι για το σχηματισμό του ειδώλου, το οπτικό σύστημα χρειάζεται μόνο εκείνες τις ακτίνες οι οποίες φτάνουν στο είδωλο διερχόμενες από τη διάταξη χωρίς καθυστέρηση, ενώ οι ακτίνες που διατρέχουν μέρος μόνο του οπτικού συστήματος (αναχαιτιζόμενες, πιθανόν, από το πλαίσιο στήριξης του φακού) όχι μόνο δεν προσφέρουν τίποτα, αλλά έχουν και αρνητικές επιπτώσεις.

Ο Abbe, λοιπόν, προσέφερε τεράστια υπηρεσία στην τεχνική πρόοδο, όχι μόνο επειδή ανέπτυξε και κατασκεύασε αρκετά νέα οπτικά όργανα, αλλά και διότι οργάνωσε την επιστημονική έρευνα που απέβλεπε στην παραγωγή νέων τύπων οπτικής υάλου. Η εταιρεία Carl Zeiss σχεδίασε και παρήγαγε πρισματικές διόπτρες, νέους τύπους φωτογραφικών φακών, διαθλασίμετρα και οπτικές συσκευές για τη μέτρηση γωνιακών και γραμμικών μεγεθών. Όλα τούτα ανέβασαν τη βιομηχανία παραγωγής οπτικού εξοπλισμού σε ένα άγνωστο μέχρι τότε και πολύ υψηλότερο επίπεδο. ■

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Edward Beltrami

### Η φύση του τυχαίου

*Το αναγκαίο και το απρόβλεπτο στα μαθηματικά και τη ζωή*

Η τυχειότητα αποδεικνύεται πως ανήκει στην κατηγορία εκείνων των εννοιών που, ενώ φαίνονται καθ' όλα ικανοποιητικές όσο παραμένουμε στο επίπεδο της καθημερινότητας, μοιάζουν κυριολεκτικά να εξαφανίζονται μυστηριωδώς όταν αρχίσουμε να ερευνούμε προσεκτικά τη λεπτή υφή τους.

Έτσι, το παρόν βιβλίο γράφτηκε με σκοπό να προκαλέσει, να τέρψει και να πληροφορήσει, ανατρέποντας τις ιδέες του αναγνώστη περί τυχαίου. Μέσα από τις σελίδες του μας δίνεται η ευκαιρία να δούμε πώς συμβάλλουν στο διάλογο που διεξάγεται για την έννοια της τυχειότητας τα μαθηματικά, η θεωρία της επικοινωνίας, η επιστήμη των υπολογιστών, η φιλοσοφία, η φυσική και η ψυχολογία.

Μερικά από τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο:

- Τύχη και πιθανότητες
- Νόμοι των μεγάλων αριθμών και στατιστική κανονικότητα
- Αβεβαιότητα και πληροφορία
- Μηνύματα, κώδικες και εντροπία
- Η ψευδαίσθηση του ντετερμινισμού
- Ψευδοτυχειότητα και γεννήτριες τυχαίων αριθμών
- Αλγοριθμική τυχειότητα
- Τάξη και αταξία
- DNA και λογικό βάθος
- Αυτοομοιότητα και πολυπλοκότητα
- Η αντίληψη του τυχαίου στην ιστορία και στον μέσο σημερινό άνθρωπο

Ο Edward Beltrami είναι καθηγητής εφαρμοσμένων μαθηματικών και στατιστικής στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης.

Σελ.: 228, 14 × 21 εκ., Α/Μ, Πανόδετο, 7.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Η τιμή της αντίστασης

«Η φύση μάς έδωσε μάτια για να βλέπουμε τα έργα της·  
αλλά μας έδωσε και νου ικανό να τα κατανοεί.»

—Γαλιλαίος

S. Betyayev

**Ο** ΜΕΓΑΛΟΣ ΓΑΛΛΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΑΣ Henri Poincaré (1854-1912) διακήρυξε κάποτε: «Το πείραμα αποτελεί τη μόνη πηγή αλήθειας: τίποτε άλλο δεν μπορεί να μας διδάξει κάτι νέο, και μόνο εκείνο μπορεί να μας εξοπλίσει με αξιοπιστία.» Και

εμείς δεν μπορούμε παρά να εκφράσουμε τη συμφωνία μας —ο πειραματισμός αποτελεί πραγματικά τον ακρογωνιαίο λίθο κάθε επιστήμης.

## Πειράματα μεγάλα και μικρά

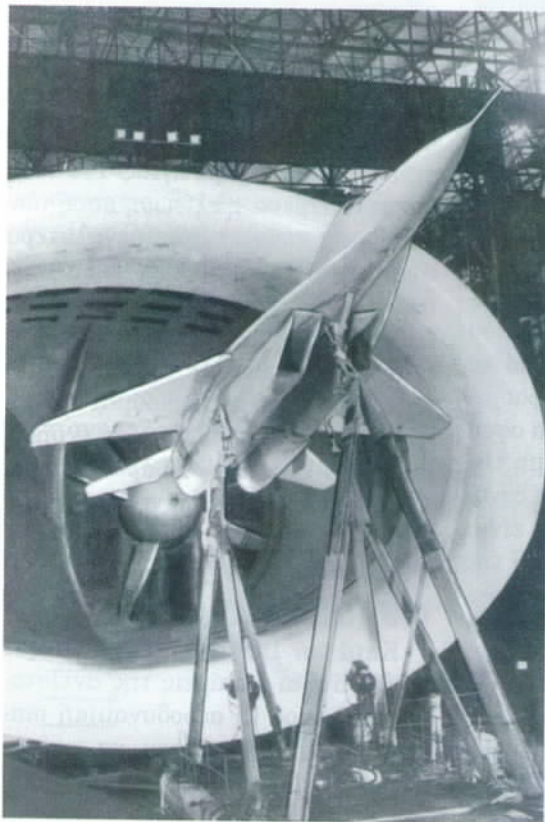
Στη βάση των υλικών πόρων που διατίθενται για την πειραματική έρευνα, βλέπουμε συχνά την επιστήμη να διαιρείται σε «μεγάλη» και σε «μικρή». Η έρευνα στη μικρή επιστήμη διεξάγεται από μικρές ερευνητικές ομάδες, ή ακόμη και από ένα μόνο άτομο, με ελάχιστα χρήματα. Η μεγάλη επιστήμη, από την άλλη, απαιτεί την πραγματοποίηση μεγάλων προγραμμάτων —την κατασκευή τεράστιων επιταχυντών σωματιδίων, διαστημικών οχημάτων ή πυρηνικών σταθμών παραγωγής ενέργειας.

Χωρίς τη μεγάλη επιστήμη θα είχε σταθεί αδύνατο, για παράδειγμα, να κατασκευαστούν αεροπλάνα, δεξαμενόπλοια και πύραυλοι. Η σχεδίαση του καθενός από αυτά τα θαύματα του σύγχρονου τεχνολογικού πολιτισμού υπήρξε καρπός της βιομηχανικής έρευνας που διεξάγεται σε σύγχρο-

νες εγκαταστάσεις αεροδυναμικών δοκιμών. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, υπάρχουν δύο ισοδύναμες μέθοδοι για να δημιουργήσουμε και να μελετήσουμε μια ροή: μπορούμε είτε να κινούμε το μοντέλο μας εντός του ρευστού που ηρεμεί είτε να εξαναγκάζουμε το ρευστό να ρέει περί το ακίνητο μοντέλο. Η πρώτη μέθοδος εφαρμόζεται σε εγκαταστάσεις βαλλιστικών δοκιμών, σε υδροδυναμικά κανάλια και σε πειραματικές δεξαμενές, ενώ η δεύτερη εφαρμόζεται στις υδροδυναμικές και αεροδυναμικές σήραγγες.

Στο υδροδυναμικό κανάλι, ένα ειδικό όχημα έλξης κινείται πάνω σε σιδηροτροχιές στερεωμένες πάνω από το κανάλι και σύρει ένα μοντέλο υδροπλάνου· η ροή γύρω από το μοντέλο φωτογραφίζεται, και ακολούθως μετρούνται οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στο μοντέλο. Οι αεροδυναμικές σήραγγες, όπως εκείνη που φαίνεται στο Σχήμα 1, μας επέτρεψαν να περάσουμε από τα πρωτόγονα αεροπλάνα στα σύγχρονα γιγαντιαία επιβατικά αεροσκάφη, σε διάστημα ενός μόνο αιώνα.

Εντούτοις, πολλοί φυσικοί νόμοι είναι δυνατόν να ανακαλυφθούν σε πειράματα μικρής κλίμακας. Τα λεγόμενα «πειράματα της κουζίνας» υπάγονται στη σφαίρα της επιστημονικής (κατ' αντιδιαστολή προς την τεχνολογική) έρευνας. Τα περισσότε-



Σχήμα 1

Ένα αεριωθούμενο μαχητικό MiG-29 σε αεροδυναμική σήραγγα.

ρά τους μπορούν να πραγματοποιηθούν στο σπίτι ή στο σχολικό εργαστήριο φυσικής και, όπως είπε χαρακτηριστικά ο αμερικανός φυσικός Robert Wood, με μοναδικό εξοπλισμό «ένα ραβδί, ένα σκοινί, βουλοκέρι και μίκα». Ο γερμανός φυσικός Hermann Helmholtz δήλωσε κάποτε αναφερόμενος στον Michael Faraday ότι «φαίνεται να μην του χρειάζεται τίποτε περισσότερο από παλιά κομμάτια σύρμα, ξύλο και σίδηρο για να πραγματοποιήσει μεγάλες ανακαλύψεις».

## Μεγάλοι «ρίπτες σφαιρών»

Ο ευκολότερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την αντίσταση που ασκείται σε ένα σώμα κατά την κίνησή του ως προς κάποιο ρευστό μέσο είναι να μελετήσουμε πώς πέφτουν οι μικρές σφαίρες που ρίχνονται μέσα στο εν λόγω μέσο.

Ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι (1452-1519) υπήρξε ένας από τους πρώτους ερευνητές που διεξήγαγαν τέτοια πειράματα. Ωστόσο, δεν περιορίστηκε μόνο στη μελέτη της πτώσης των σωμάτων· πειραματίστηκε και με αντικείμενα που κινούνταν στο νερό, καθώς επίσης και με επίπεδες επιφάνειες που διέσχιζαν τον αέρα υπό κάποια συγκεκριμένη γωνία προσβολής.

Ο Γαλιλαίος (1564-1642) συνέχισε το έργο του Ντα Βίντσι. Ρίχνοντας βαριές και ελαφρές σφαίρες από τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας, ανακάλυψε ότι η ταχύτητα ενός αντικειμένου που πέφτει ελεύθερα δεν εξαρτάται από τη μάζα του και διατύπωσε μια από τις πλέον θεμελιώδεις αρχές της φυσικής, την αρχή της αδράνειας: *αν η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα ισούται με μηδέν, το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά*. Ο Γαλιλαίος απέδιδε τεράστια σημασία στη λογική εξήγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων, στην κατανόηση της φυσικής ουσίας των φαινομένων. «Η φύση μάς έδωσε μάτια για να βλέπουμε τα έργα της», συνήθιζε να λέει στους μαθητές του. «Αλλά μας έδωσε και νου ικανό να τα κατανοεί».

Ένας άλλος μεγάλος «ρίπτης σφαιρών» υπήρξε ο σερ Ισαάκ Νεύτων (1643-1727), ο ιδρυτής της κλασικής

μηχανικής και, από κοινού με τον Gottfried Leibniz (1646-1716), του απειροστικού λογισμού. Εκείνος έριχνε σφαίρες στον καθεδρικό ναό του Αγίου Παύλου, στο Λονδίνο. Για τον Νεύτωνα, το ζήτημα της κίνησης των σωμάτων και της αντίστασης δεν αποτελούσε αντικείμενο ακαδημαϊκής θεωρητικολογίας. Επεδίωκε να αποδείξει ότι (σε αντίθεση με τις απόψεις των αριστοτελικών) ο μεσοαστρικός χώρος είναι κενός ύλης. Και τούτο επειδή αν δεν εκπληρούνταν αυτή η προϋπόθεση, η ύλη θα ανθίστατο στην κίνηση των ουράνιων σωμάτων, οπότε το κομψό μηχανικό σύστημα του σύμπαντος που είχε φανταστεί ο Νεύτων θα κατέρρεε σαν πύργος από τραπουλόχαρτα.

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα, η αντίσταση που δέχεται ένα αντικείμενο κατά την κίνησή του στο νερό αναλύεται σε άθροισμα το οποίο περιέχει τρεις όρους: ο πρώτος είναι σταθερός, ενώ ο δεύτερος και ο τρίτος μεταβάλλονται ευθέως ανάλογα με την ταχύτητα και με το τετράγωνο της ταχύτητας, αντίστοιχα. Ο σταθερός όρος τού εν λόγω άθροισματος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος· η ανάλογη προς την ταχύτητα αντίσταση οφείλεται στην τριβή· και η ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας αντίσταση οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις.

Σήμερα γνωρίζουμε πλέον ότι είναι αδύνατο να αναλύσουμε την αντίσταση σε άθροισμα τριών ξεχωριστών όρων, επειδή οι επιδράσεις που συνδέονται με τη ροή γύρω από τα σώματα είναι πολύ στενά συνυφασμένες. Μολαταύτα, στον Νεύτωνα οφείλεται η ανακάλυψη ότι η δύναμη της αντίστασης που ασκείται σε μια σφαίρα κινούμενη με ταχύτητα  $v$  είναι ευθέως ανάλογη με το εμβαδόν  $S$  της εγκάρσιας διατομής της (ή, αλλιώς, της μετωπικής επιφάνειάς της) και με την πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού μέσου:

$$F = C_{avr} \frac{\rho v^2}{2} S,$$

όπου με  $C_{avr}$  συμβολίζουμε το συντελεστή αναλογίας (ενίοτε αναφέρεται ως συντελεστής αντίστασης).

Τι συμβαίνει όταν έχουμε διαφο-

ρετικές συνθήκες ροής; Για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε ένα αντικείμενο σε περιστροφική κίνηση γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Ποια σφαίρα θα φτάσει πρώτη στο έδαφος —εκείνη που περιστρέφεται ή η άλλη που δεν περιστρέφεται; Στην πραγματικότητα, οι περιστρεφόμενες σφαίρες πέφτουν ταχύτερα —μπορείτε να το αποδείξετε και μόνοι σας ρίχνοντας από ένα ψηλό κτήριο σβούρες περιστρεφόμενες και μη.

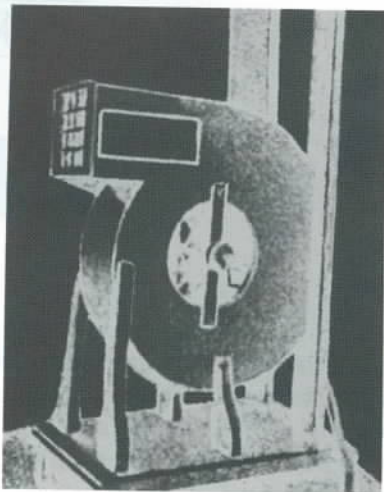
Ο νόμος που προβλέπει ότι η αντίσταση γίνεται μικρότερη όσο ταχύτερα περιστρέφεται ένα αντικείμενο είναι ποιοτικός. Οι ποσοτικές μετρήσεις αυτού του φαινομένου παρουσιάζουν μύριες δυσκολίες. Λόγω της δύναμης της αντίστασης, υπάρχει απώλεια ορμής στην αύλακα πίσω από το αντικείμενο. Κατά κάποιον τρόπο, η ροή «θυμάται» πώς σχηματίστηκε η «αύλακα».

Αν κατά την πτώση του ένα αντικείμενο διαγράφει κάποιο τμήμα της τροχιάς του διατηρώντας την ταχύτητά του αμετάβλητη, η δύναμη της αντίστασης παραμένει σταθερή. Γνωρίζουμε ότι ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα όταν το άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω του ισούται με μηδέν· επομένως, η δύναμη της αντίστασης ισούται με τη δύναμη της βαρύτητας. Για το ίδιο αντικείμενο, η εξίσωση αυτή των δυνάμεων επέρχεται σε μεγαλύτερα ύψη μέσα στον αέρα απ' ό,τι μέσα στο νερό. Φαίνεται ότι ο Νεύτων είχε λάβει υπόψη του αυτό το χαρακτηριστικό όταν επέλεξε το νερό ως ανθιστάμενο μέσο στα πειράματα ρίψεως σφαιρών που διεξήγαγε (χρησιμοποίησε ένα ξύλινο βαρέλι ύψους 4,5 μέτρων γεμάτο με νερό).

## Ο ανεμιστήρας του Tsiolkovsky

Κατά τον 19ο αιώνα, εμφανίστηκε η ιδέα ότι οι δυνάμεις της αντίστασης του αέρα (η αεροδυναμική οπισθέλκουσα) μπορούσαν να μετρηθούν σε αεροδυναμικές σήραγγες.

Στη Ρωσία, την πρώτη τέτοια σήραγγα την κατασκεύασε ο Konstantin E. Tsiolkovsky, το 1897 (Σχήμα 2). Για να φτιάξει τον ανεμιστήρα



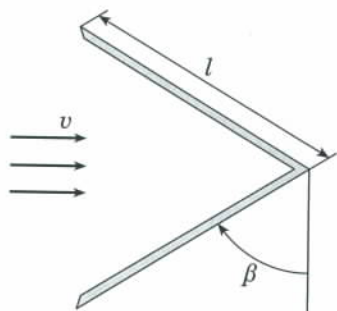
Σχήμα 2

Η αεροδυναμική σήραγγα του Tsiolkovsky.

του, ο Tsiolkovsky χρησιμοποίησε μια χειροκίνητη λιχνιστική μηχανή. Δυστυχώς, οι ταχύτητες ανέμου που επιτεύχθηκαν στα πειράματα του Tsiolkovsky ήταν πολύ χαμηλές ώστε να χρησιμεύσουν στις αεροναυπηγικές έρευνες. Μολαταύτα, το συγκεκριμένο είδος ανεμιστήρα αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμο σε πολλά εργαστηριακά πειράματα που αφορούν την αντίσταση του αέρα.

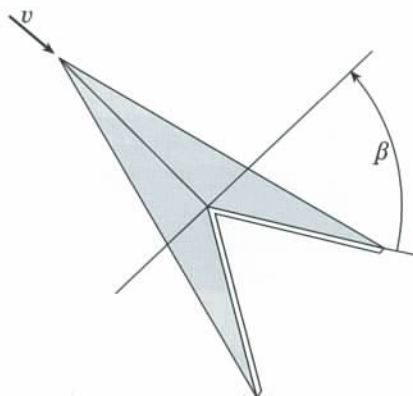
Μπορείτε να μετατρέψετε μια συνηθισμένη ηλεκτρική σκούπα σε αεροδυναμική σήραγγα συνδέοντας ένα σωλήνα στην οπή εξαγωγής της. Στη συνέχεια, δεν έχετε παρά να τοποθετήσετε το αντικείμενο του οποίου την αεροδυναμική συμπεριφορά θέλετε να δοκιμάσετε μέσα στο ρεύμα αέρα που εξέρχεται από το σωλήνα.

Έχει ενδιαφέρον ότι οι νόμοι της αντίστασης του αέρα καθίστανται έκδηλοι διαφορετρόπως. Για παράδειγμα,



Σχήμα 3

Ροή αέρος περί διέδρου.



Σχήμα 4

Πτέρυγα αεροσκάφους «βελοειδούς προς τα εμπρός» σχήματος.

μα, τα αεροπλάνα θα έπρεπε να έχουν χαμηλή οπισθέλκουσα (αντίσταση) αλλά υψηλή άντωση (δυναμική άνωση). Απεναντίας, τα αλεξίπτωτα πρέπει να παρουσιάζουν υψηλή αντίσταση στον αέρα ώστε να επιβραδύνεται η πτώση του αντικείμενου που κρέμεται απ' αυτά.

Τα πειράματα με αντικείμενα που έχουν απλό σχήμα μπορεί να αποβούν εξόχως διαφωτιστικά. Για παράδειγμα, κατευθύνοντας ρεύματα αέρα ή νερού σε διέδρα με διαφορετικές γωνίες ανοίγματος  $\beta$  αλλά με το ίδιο πλάτος έδρας  $l$ , διαπιστώνουμε ότι η οπισθέλκουσα μεγιστοποιείται όχι στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας ( $\beta = 0$ ), αλλά για ένα διέδρου με ορισμένη αρνητική γωνία ανοίγματος  $\beta$  (Σχήμα 3).

Στις ίδιες γραμμές, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε για το ενδεχόμενο μιας πτέρυγας αεροπλάνου «βελοειδούς προς τα εμπρός» (δηλαδή με ημιπτέρυγες στραμμένες προς τα εμπρός) (Σχήμα 4) —στο επίπεδο το κάθετο προς την κίνηση του αέρα, η ροή θα παρουσιάζει ομοιότητες με τη ροή περί ένα διέδρου με  $\beta < 0$ , και η άντωση θα αντιστοιχεί στην οπισθέλκουσα του διεδρου. Τώρα, όμως, έχουμε μπει για τα καλά στην επικράτεια της «μεγάλης επιστήμης»... ●

Τριγωνομετρικός γρίφος. Να επιλυθεί η εξίσωση

διαμέτρου της θα «ιλέει» σε ατμοσφαιρικό αέρα της ίδιας θερμοκρασίας

**QUANTUM**

M175 Για τον γρίφο. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, ανακαλύψτε ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος: ο 20<sup>2006</sup> ή ο 5<sup>573200</sup>.

**Το καλύτερο εκπαιδευτικό/επιστημονικό περιοδικό για τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά**

Ελάχιστη γωνία. Έστω  $M$  το μέσον της πλευράς  $BC$  του τριγώνου  $ABC$  και  $Q$  το σημείο τομής των διχοτόμων του. Δίνεται ότι  $MQ = QA$ . Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της γωνίας  $MQA$ .

Φυσική

Φ171 ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Ομοίωμα της Γης. Για τις ανάγκες μιας ταινίας του Σπίλμπεργκ, Ηλεκτρικό σάντουιτς. Ένας επίπεδος πυκνωτής τύπου σάντουιτς αποτελείται από τρεις παράλληλες μεταλλικές πλάκες, η καθενιά εμβαδού  $S$ . Τον μεταξύ των πλακών χώρο τον καταλαμβάνουν δύο διηλεκτρικά που χαρακτηρίζονται από τις (σχετικές) διηλεκτρικές σταθερές  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  και τις ειδικές αντιστάσεις  $\rho_1$  και  $\rho_2$ . Τα διηλεκτρικά έχουν πάχος  $d_1$  και  $d_2$ . Ο πυκνωτής συνδέεται στους πόλους πηγής σταθερής

• Γ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ •

Το πιο ενημερωμένο φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο, τώρα και στα ξενόγλωσσα

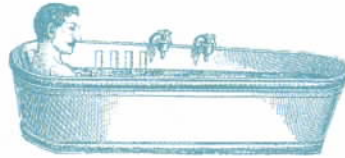
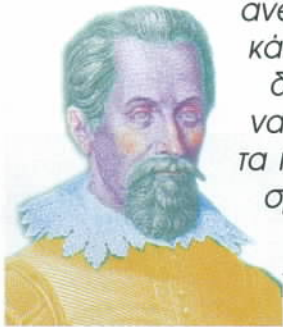
Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα, Τηλ.-Fax: 3628492

**Τ**ΟΥΤΟ ΤΟ ΚΑΛΕΙΔΟΣΚΟΠΙΟ, ΜΑΖΙ με τα τρία που πρόκειται να το ακολουθήσουν, εγκαινιάζει μια σειρά άρθρων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση των δύο θεμελιωδών πλευρών του υλικού κόσμου: των πεδίων και της ύλης. Αρχίζουμε λοιπόν από τη συμπεριφορά των σωμάτων εντός βαρυτικού πεδίου. Στο παρόν άρθρο η συζήτηση δεν πρόκειται να περιοριστεί μόνο στα υλικά σημεία, αλλά θα επεκταθεί ώστε να περιλάβει και τα εκτεταμένα σώματα. Η κίνηση τέτοιων σωμάτων αποκαλύπτει παράξενα χαρακτηριστικά των «αλληλεξαρτήσεων» μεταξύ του βαρυτικού πεδίου και της ύλης, τα οποία απασχολούν τους επιστήμονες επί αιώνες.

Η κίνηση των σωμάτων πλησίον της Γης, η κατάσταση έλλειψης βαρύτητας, τα παλιρροϊκά φαινόμενα, η συγχρονισμένη περιστροφή των πλανητών και των δορυφόρων τους, η αστρική εξέλιξη, το παρόν και το μέλλον του σύμπαντος, όλα τούτα τα προβλήματα τα συνδέει μεταξύ τους το φαινόμενο της βαρύτητας. Μολονότι οι μεγάλοι επιστήμονες του παρελθόντος προέβλεπαν πολλά φαινόμενα όπου η βαρύτητα παίζει βασικό ρόλο (για παράδειγμα, ο Laplace προέβλεψε την ύπαρξη των «μαύρων τρυπών» δύο ολόκληρους αιώνες προτού να ανακαλυφθούν), ο ποταμός των απροσδόκητων και καταπληκτικών ανακαλύψεων δεν έχει στερέψει ακόμη. Και η ολοένα αυξανόμενη ισχύς των τηλεσκοπίων, τόσο των επίγειων όσο και των δορυφορικών, μας αναγκάζει να προετοιμάζουμε το

*«Κανένα αντικείμενο που αποτελείται από γήινη ύλη και ανέρχεται σε κάποιο ύψος δεν μπορεί να αποφύγει τα ισχυρά δεσμά της βαρύτητας.»*

—Johannes Kepler



πνεύμα μας για νέες και συνταρακτικές ανακαλύψεις «εκεί έξω».

### Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Δύο αντικείμενα αρχίζουν να πέφτουν ταυτόχρονα από δύο σημεία που κείνται επί της αυτής κατακόρυφου και πλησίον της επιφάνειας της Γης. Πώς θα μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης τους;

2. Πού θα μπορούσε να κολυμπά ευκολότερα κανείς, στη Γη ή στη Σελήνη;

3. Θεωρήστε δύο πανομοιότυπες σφαίρες από τις οποίες η μεν πρώτη επιπλέει στο νερό, η δε δεύτερη κείται πάνω σ' ένα τραπέζι. Είναι ταυτόσημες οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω τους;

4. Ένας πύραυλος απομακρύνεται από τη Γη κινούμενος ακτινικά με σταθερή επιτάχυνση ίση με εκείνη της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Πώς μεταβάλλεται το βάρος των επιβατών που μεταφέρει συναρτήσει της απόστασης από τη Γη;

5. Δοχείο περιέχει νερό, εντός του οποίου επιπλέει ένα σώμα. Το δοχείο αρχίζει να πέφτει με επιτάχυνση  $\gamma < g$ . Θα παρατηρηθεί άραγε κάποια ανύψωση του σώματος σε σχέση με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού;

6. Γιατί οι αστροναύτες κοιμούνται χωρίς μαξιλάρια επί κάποιο χρονικό διάστημα μετά την επιστροφή τους στη Γη;

7. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα συμβατικό ιατρικό θερμόμετρο σε έναν διαστημικό σταθμό που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη;

8. Θα μεταβληθεί η πυκνότητα του αέρα σε ένα διαστημόπλοιο όταν αυτό θα βρεθεί σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας;

9. Γιατί ένα σώμα ζυγίζει λιγότερο στον ισημερινό απ' ό,τι στους πόλους;

10. Γιατί οι πλανήτες είναι σφαιρικοί, ενώ οι κομήτες και οι αστεροειδείς έχουν εξαιρετικά ακανόνιστα σχήματα;

11. Δύο ταξιδιώτες αποφασίζουν να κάνουν το «γύρο του κόσμου». Αναχωρούν από το ίδιο σημείο του ισημερινού και ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα, αλλά ο μεν ένας κινείται κατά μήκος του ισημερινού ο δε άλλος κατά μήκος του τοπικού μεσημβρινού. Θα φτάσουν στην αφετηρία ταυτόχρονα όταν θα ολοκληρώσουν τα ταξίδια τους;

12. Πόσο γρήγορα πρέπει να περιστρέφεται ένας πλανήτης γύρω από τον άξονά του ώστε να καταστραφεί;

13. Σε ποια αιτία οφείλονται οι παλίρροιες;

14. Γιατί το ύψος των παλιρροιών γίνεται μέγιστο όταν η Σελήνη είναι νέα και γεμάτη, και ελάχιστο στο πρώτο και το τελευταίο τέταρτο;

15. Ποιες διαφορές θα παρατηρούσαμε στο φαινόμενο της έκλειψης του Ηλίου αν η ακτίνα της τροχιάς της Σελήνης μειωνόταν στο ήμισυ της παρούσας τιμής της;

16. Φανταστείτε ότι η Γη παύει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, ενώ συνεχίζει να περιφέρεται κανονικά γύρω από τον Ήλιο. Πώς θα μεταβαλλόταν εν τοιαύτη περίπτωση η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης από τόπο σε τόπο;

### Μικροπειραματισμοί

Την επόμενη φορά που θα πάτε για μπάνιο, πάρτε αγκαλιά ένα βαρύ αντικείμενο το οποίο θα σας βοηθή-



# βαρύτητα



σει να μείνετε κάτω από την επιφάνεια του νερού. Προσπαθήστε να κρατήσετε, έστω και για μία μόνο στιγμή, το σώμα σας ακίνητο σε κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, βρίσκεστε σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας;

## Είναι ενδιαφέρον ότι...

...πολύ πριν από τον Νεύτωνα, ο Johannes Kepler διαπίστωσε ότι η «βαρύτητα» θα μπορούσε να είναι μια δύναμη που ασκείται ανάμεσα στα ουράνια σώματα· μάλιστα, χρησιμοποίησε αυτή την έννοια για να εξηγήσει τις παλίρροιας, ισχυριζόμενος ότι η Σελήνη έλκει τα ύδατα των ωκεανών.



...υπάρχουν ακόμη αμφιβολίες σχετικά με το κατά πόσον ο Γαλιλαίος έριξε πραγματικά ποτέ κάτι από τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας. Εκείνο που γνωρίζουμε μετά βεβαιότητας, ωστόσο, είναι πως τον συγκεκριμένο πύργο τον χρησιμοποιούσε την εποχή του Γαλιλαίου κάποιος αριστοτελικός που προσπαθούσε να αποδείξει ότι διαφορετικά σώματα πέφτουν με διαφορετικούς ρυθμούς. Όπως κι αν έχει, ουδείς αμφισβητεί πως ο Γαλιλαίος υπήρξε εκείνος ο οποίος κατόρθωσε να εδραιώσει το νόμο ότι η επιτάχυνση των αντικειμένων που πέφτουν ελεύθερα στο κενό δεν εξαρτάται από τη φύση τους.

...κατά τον Αριστοτέλη, η δύναμη της βαρύτητας δεν μεταβάλλεται με την απόσταση καθώς το σώμα πλησιάζει το κέντρο της Γης, αλλά απλώς αντιστρέφει ξαφνικά την κατεύθυνσή της όταν το σώμα περάσει το κέντρο. Σ' αυτή την επιστημονική βάση στηρίχτηκε ο Δάντης (1265-1321) για να

περιγράψει το βαθύτερο τμήμα της Κόλασης (το κέντρο της Γης) στη *Θεία Κωμωδία*. Απεναντίας, η νευτώνεια θεωρία προβλέπει ότι η δύναμη της βαρύτητας μηδενίζεται στο κέντρο του πλανήτη μας.

...το 1801, πριν από διακόσια χρόνια, ο γερμανός αστρονόμος I. Zolner υπολόγισε βάσει της νευτώνειας θεωρίας τη γωνία κατά την οποία εκτρέπονται οι φωτεινές ακτίνες διερχόμενες μέσω του βαρυτικού πεδίου του Ήλιου. Περισσότερο από έναν αιώνα αργότερα, ο άγγλος αστρονόμος O. Lodge ει-

σήγαγε τον όρο «βαρυτικός φακός» και προέβλεψε ότι ουράνια αντικείμενα όπως οι γαλαξίες είναι δυνατόν να παράγουν πολλαπλά είδωλα κάποιων μακρινών άστρων λόγω της εκτροπής την οποία υφίσταται το προερχόμενο από τα εν λόγω άστρα φως καθώς διέρχεται μέσω τέτοιων «φακών».

...οι εσωτερικοί δορυφόροι του Δία φέρουν στην επιφάνειά τους λιγότερους κρατήρες απ' ό,τι οι εξωτερικοί. Τούτο οφείλεται στις παλιρροϊκές δυνάμεις και στο μαγνητικό πεδίο του γιγαντιαίου πλανήτη, παράγοντες οι οποίοι προκαλούν αυξημένη τεκτονική δραστηριότητα στους εγγύτερους δορυφόρους. Οι επιφάνειές τους «εξαναπλάθονται» συνεχώς, και οι παλιοί κρατήρες εξαφανίζονται.



...μολονότι στη Γη πέφτουν ημερησίως περίπου δέκα χιλιάδες τόνοι διαστημικών θραυσμάτων με τη μορφή μετεωριτών και διαστημικής σκόνης, η βαθμιαία αύξηση της μάζας της Γης η οποία συντελέστηκε στη

διάρκεια της ύπαρξής της δεν είχε ουσιαστικά καμία επίπτωση στο ρυθμό περιστροφής του πλανήτη μας γύρω από τον άξονά του.

...σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας, η επιταχυνόμενη κίνηση των σωμάτων πρέπει να παράγει βαρυτικά κύματα. Λόγω όμως της ασθενούς φύσης της βαρύτητας, μέχρι στιγμής δεν έχει ανιχνευθεί η παραμικρή εκπομπή τέτοιων κυμάτων, ακόμη και από τα μεγαλύτερα ουράνια σώματα. (Παρεμπιπτόντως, η αρχή λειτουργίας των «ανιχνευτών» βαρυτικών κυμάτων στηρίζεται στην παλιρροϊκή δράση της βαρύτητας.)

...η νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας παύει να ισχύει στην περίπτωση των «μαύρων τρυπών», που η τερατώδης βαρυτική τους δύναμη εμποδίζει ακόμη και τη διαφυγή του φωτός, έστω και αν η ίδια η δυνατότητα της ύπαρξής τους απορρέει από αυτή τη θεωρία.

...σε μια «επίδειξη» της καταστροφικής δράσης των παλιρροϊκών δυνάμεων προχώρησε σχετικά πρόσφατα ο Δίας, ο οποίος τον Ιούλιο του 1992 διέλυσε έναν κομήτη που τόλ-



μησε να τον πλησιάσει περισσότερο απ' όσο έπρεπε.

...επί πολλά χρόνια οι αστρονόμοι προσπαθούσαν ανεπιτυχώς να ανακαλύψουν στο σύμπαν τη λεγόμενη «σκοτεινή» ύλη, που η βαρύτητά της εμποδίζει τους γαλαξίες να εγκαταλείψουν τα σμήνη στα οποία ανήκουν και επιβραδύνει τη διαστολή του σύμπαντος. Ωστόσο, πρόσφατα αστρονομικά δεδομένα δείχνουν ότι η βαρύτητα δεν επαρκεί για να ανακόψει την ταχύτατη διασπορά των γαλαξιών και να τους συγκεντρώσει μαζί εκ νέου. Το σύμπαν διαστέλλεται με επιταχυνόμενο ρυθμό, και αυτή η διαδικασία προβλέπεται ότι θα συνεχίζεται εσαεί. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

# Η φυσική της βάδισης

Γιατί στο μέλλον θα τρέχετε γρηγορότερα

I. Urusovsky

**Μ**ΠΟΡΕΙ ΕΝΑΣ ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΔΕΜΕΝΟΣ χειροπόδαρα να τρέχει γρηγορότερα από κάποιον άλλο «λυτό»; Ε λοιπόν, ναι! Σας φαίνεται απίστευτο; Γιά σκεφτείτε το καλύτερα...

Από τη σκοπιά της θεωρίας των ταλαντώσεων, ο άνθρωπος που τρέχει, θεωρούμενος σε ένα σύστημα αναφοράς σταθερά προσδεδεμένο πάνω του, δεν είναι παρά ένα ζευγάρι σκέλη που εκτελούν αιωρήσεις. Συνεπώς, όταν τρέχουμε ή βαδίζουμε, τα σκέλη παίζουν το ρόλο εκκρεμών που συνδέονται με τον κορμό με κάποιου είδους στροφείς και αιωρούνται στο βαρυτικό πεδίο πλησίον της θέσης ισορροπίας τους (της κατακόρυφης θέσης). Ωστόσο, τα σκέλη δεν μπορεί επ' ουδενί να θεωρηθούν «μάζες αναρτημένες από αβαρή μη εκτατά νήματα», και επομένως διαφέρουν αρκετά από το απλό, ή μαθηματικό, εκκρεμές που σίγουρα έχετε συναντήσει στις μέχρι τούδε σπουδές σας — η μάζα του σκέλους δεν είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο. Τα σκέλη ανήκουν σε μια ευρεία κατηγορία απλών μηχανικών συστημάτων που λέγονται φυσικά εκκρεμή.

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό οποιουδήποτε εκκρεμούς συνίσταται στη συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεών του. Στην περίπτωση του μαθηματικού εκκρεμούς, η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης  $\nu_0 = (1/2\pi)\sqrt{g/l}$  (η φυσική συχνότητα, ή ιδιοσυχνότητα) εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το μήκος του

l. Αντίθετα, στην περίπτωση του φυσικού εκκρεμούς, η φυσική συχνότητα εξαρτάται όχι μόνο από το μήκος του αλλά και από την κατανομή της μάζας κατά μήκος του εκκρεμούς. Όσο πλησιέστερα στον άξονα εξάρτησεως βρίσκεται συγκεντρωμένη η μάζα, τόσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα των αιωρήσεων. Μολαταύτα, ακόμη και για το φυσικό εκκρεμές μπορούμε να γράψουμε τη συχνότητα ως  $\nu_0 = (1/2\pi)\sqrt{g/L}$ , όπου το L αντιπροσωπεύει μια πολύ σημαντική παράμετρο του εκκρεμούς: το λεγόμενο «ανηγμένο μήκος». Το ανηγμένο μήκος ορίζεται ως το μήκος ενός μαθηματικού εκκρεμούς το οποίο έχει την ίδια συχνότητα με το εκάστοτε θεωρούμενο φυσικό εκκρεμές.

Προκειμένου για ανθρώπους που η σωματική τους διάπλαση παρουσιάζει τις ίδιες αναλογίες, το ανηγμένο μήκος του σκέλους-εκκρεμούς είναι ανάλογο προς το ύψος τους. Για διαφορετικούς ανθρώπους, επομένως, η φυσική συχνότητα ταλάντωσης των σκελών τους μεταβάλλεται αντίστροφως ανάλογα προς την τετραγωνική ρίζα του ύψους τους.

Τούτο το χαρακτηριστικό μάς προσφέρει μιαν απλή μέθοδο για να προσδιορίσουμε τη  $\nu_0$  για ανθρώπους οποιουδήποτε ύψους. Δεν χρειάζεται παρά να μετρήσουμε τη φυσική συχνότητα των δικών μας σκελών. Πρόκειται για κάτι το μάλλον εύκολο: στηριζόμαστε στο ένα σκέλος και αφήνουμε το άλλο να αιωρείται, φρο-

ντίζοντας οι μύες μας σ' αυτό να παραμένουν χαλαροί. Καθώς το σκέλος μας αιωρείται, μετρούμε τον μέσο αριθμό αιωρήσεων ανά δευτερόλεπτο. Στην περίπτωση ενός ατόμου ύψους 175 cm, για παράδειγμα, βρίσκεται ότι η συχνότητα έχει την τιμή 0,8 Hz. Συνεπώς, η συχνότητα για ένα άτομο ύψους h (cm) δίνεται από τον απλό τύπο

$$\nu_0 = 0,8\sqrt{175/h} \text{ (Hz)}.$$

Όταν έχουμε το σκέλος μας λυγισμένο (όπως στην περίπτωση που τρέχουμε), το ανηγμένο μήκος του μειώνεται, ενώ η φυσική του συχνότητα γίνεται υψηλότερη κατά 25%.

Όταν βαδίζουμε, τα σκέλη μας εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό την επίδραση των μυών μας. Το βασικό χαρακτηριστικό των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων έγκειται στο ότι το πλάτος τους εξαρτάται όχι μόνο από το πλάτος της ασκούμενης δύναμης αλλά και από τη συχνότητα της περιοδικής μεταβολής της. Η συχνότητα η οποία μεγιστοποιεί το πλάτος των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων ονομάζεται συχνότητα συντονισμού.

Η συχνότητα συντονισμού σχεδόν συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα:

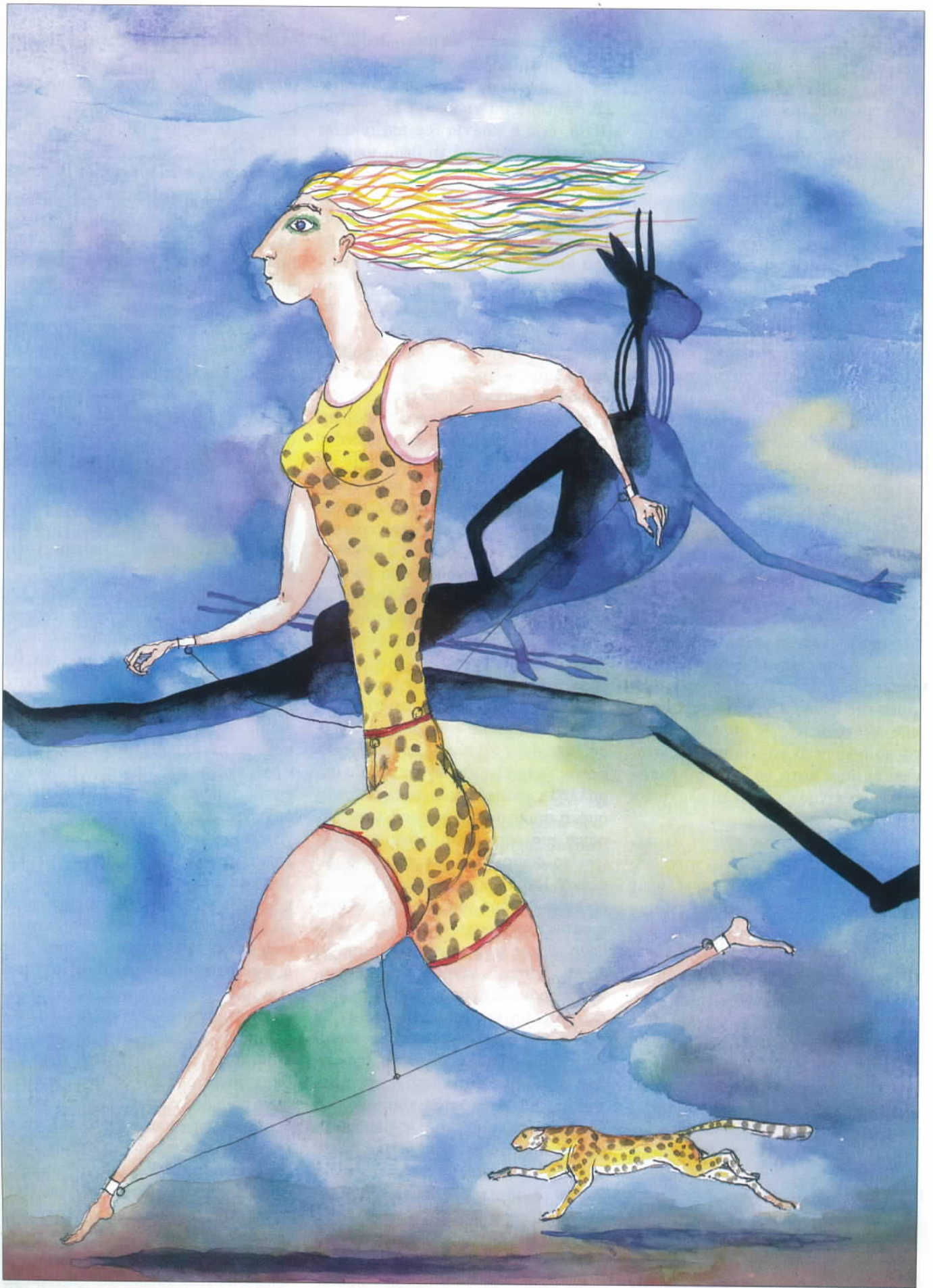
$$\nu_0 = \nu_0 \sqrt{1 - a^2},$$

με

$$a = \frac{1}{2\pi} \ln k \approx 0,37 \log k,$$

όπου ο k είναι ένας καθαρός αριθμός,





γνωστός ως λόγος απόσβεσης, που μας δείχνει πόσο μειώνεται το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης στη διάρκεια μίας περιόδου. Το πλάτος των ελεύθερων ταλαντώσεων του ανθρώπινου σκέλους μειώνεται στη διάρκεια μίας περιόδου κατά έναν παράγοντα 2, οπότε στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει έχουμε  $k \approx 2$  και  $a \approx 0,11$ . Έτσι, η συχνότητα συντονισμού διαφέρει από τη φυσική συχνότητα μόνο κατά 0,6%.

Από την άποψη της εξοικονόμησης ενέργειας, ο καλύτερος τρόπος βάδισης συνίσταται στο να κινούμε τα σκέλη μας με τη συχνότητα συντονισμού. Όταν βαδίζουμε με αυτό το ρυθμό, η δυναμική ενέργεια η οποία συσσωρεύεται καθώς το σκέλος υψώνεται μετατρέπεται όσο το δυνατόν αποδοτικότερα σε κινητική ενέργεια κατά τη στιγμή που το σκέλος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Έπειτα από ένα τέταρτο της περιόδου (δηλαδή, έπειτα από μισό βήμα), η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης μετατρέπεται όσο το δυνατόν αποδοτικότερα σε δυναμική ενέργεια του υψωμένου ποδιού. Στην προκειμένη περίπτωση, οι μέγιστες τιμές της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας σχεδόν συμπίπτουν, ενώ το πρόσθετο φορτίο που υφίστανται οι μύες κατά τη βάδιση προκειμένου να κινούν τα σκέλη ελαχιστοποιείται.

Οι άνθρωποι όντως κινούν τα σκέλη τους με τη συχνότητα συντονισμού όταν βαδίζουν. Οι αποκλίσεις της συχνότητας «κανονικής λειτουργίας» από τη συχνότητα συντονισμού περιορίζονται στο ελάχιστο. Ο λόγος είναι προφανής: όσο μεγαλύτερη γίνεται μια τέτοια απόκλιση, τόσο αυξάνεται το πρόσθετο φορτίο που δέχονται οι μύες στην προσπάθειά τους είτε να υπερνικήσουν την αδράνεια των σκελών όταν κανείς βαδίζει πολύ γρήγορα είτε, στην αντίθετη περίπτωση, να αντεπεξέλθουν στο βάρος των σκελών όταν κανείς βαδίζει πολύ αργά.

Ένα ανάλογο φαινόμενο μπορούμε να συναντήσουμε σε οποιαδήποτε παιδική χαρά. Είναι σχετικά εύκολο να αιωρηθούμε σε μια κούνια με τη συχνότητα συντονισμού της. Αν

όμως δοκιμάσουμε να αιωρηθούμε με συχνότητα διπλάσια, ας πούμε, από τη συχνότητα συντονισμού, τότε πολύ σύντομα θα νιώσουμε εξουθενωμένοι, ενώ η κούνια ίσα ίσα που θα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας της.

Έτσι, γίνεται τώρα σαφές ότι όταν θέλουμε να περπατήσουμε ταχύτερα, πρέπει να αυξάνουμε το μήκος του διασκελισμού μας και όχι να επιταχύνουμε το ρυθμό με τον οποίο βηματίζουμε. Ως αποτέλεσμα, η ταχύτητά μας αυξάνεται, ενώ η συχνότητα συντονισμού δεν μεταβάλλεται παρά ελάχιστα: όπως μας διδάσκει η φυσική, η συχνότητα συντονισμού είναι πρακτικά ανεξάρτητη από το πλάτος των ταλαντώσεων.

Εκτός από το να αυξήσουμε το μήκος του διασκελισμού μας, υπάρχει ένας ακόμη τρόπος για να κάνουμε το βάδισμά μας γρηγορότερο: να λυγίζουμε το σκέλος μας στο γόνατο μόλις το σηκώνουμε από το έδαφος. Αυτή η τεχνική δεν επηρεάζει το μήκος του διασκελισμού μας, αλλά αυξάνει τη συχνότητα συντονισμού. «Ανεβάζοντας» τη συχνότητα συντονισμού των σκελών μας, καταφέρνουμε να βαδίζουμε ταχύτερα.

Στη διαδικασία της βάδισης, ωστόσο, εμπλέκονται και οι βραχιόνες. Εφόσον τα σκέλη κινούνται σε δύο παράλληλα επίπεδα που απέχουν ορισμένη απόσταση, η κίνησή τους παράγει μια ροπή που τείνει να στρέψει το σώμα περί τον κατακόρυφο άξονα. Για να κρατούν οι άνθρωποι όρθιο τον κορμό τους ενώ περπατούν, κινούν τους βραχιόνες τους σε αντίθεση φάσης με τα αντίστοιχα σκέλη τους. Τούτη η κίνηση των βραχιόνων παράγει μια ροπή που εξισορροπεί τη ροπή την οποία παράγουν τα σκέλη και εξουδετερώνει τις ανεπιθύμητες συνέπειές της. Επιπλέον, όταν βαδίζουμε έτσι, μειώνεται η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου βάρους μας, μαζί της δε μειώνεται και το απαιτούμενο μηχανικό έργο.

Στην πραγματικότητα, όταν ανοίγουμε τα σκέλη μας καθώς βαδίζουμε, το κέντρο βάρους μας κατέρχεται, ενώ αντίθετα υψώνεται όταν σηκώνουμε ψηλά τους βραχιόνες. Φυσικά, μπορούμε να διατηρήσουμε τη

στάση μας απολύτως κατακόρυφη και χωρίς να κινούμε τους βραχιόνες μας, αλλά μόνο με το τίμημα ενός πρόσθετου φορτίου στους μύς μας, πράγμα το οποίο καθιστά το βάδισμά μας αδέξιο.

Η αιώρηση των βραχιόνων κατά τη βάδιση διευκολύνεται πολύ αν οι συχνότητες συντονισμού των άνω και των κάτω άκρων είναι ίσες. Και πράγματι, αυτές οι συχνότητες συμπίπτουν. Μάλιστα, όταν «ανεβάζουμε» τη συχνότητα των σκελών μας λυγίζοντάς τα για να επιταχύνουμε το βάδισμά μας, ενδείκνυται να λυγίζουμε και τους βραχιόνες μας, έτσι ώστε να κρατάμε ίσες τις συχνότητες συντονισμού των άνω και των κάτω άκρων μας.

Όσο ταχύτερα βαδίζουμε, τόσο περισσότερο χρειάζεται να λυγίζουμε τα άκρα μας (βραχιόνες και σκέλη) για να προσαρμόζουμε (δηλαδή να αυξάνουμε) τις συχνότητες συντονισμού στην επιθυμητή ταχύτητα. Όταν τρέχουμε γρήγορα, τα πόδια λυγίζουν σε πολύ οξεία γωνία. Εντούτοις, όσο κι αν προσπαθήσουμε, η κατασκευή των σκελών μας δεν θα μας επιτρέψει να καταφέρουμε ποτέ κάτι καλύτερο από το να τα διπλώσουμε στα δύο. Το πολύ πολύ, λοιπόν, να πετύχουμε να μειώσουμε το ανηγμένο μήκος τους στο μισό. Συνεπώς, αδυνατούμε να αυξήσουμε τη συχνότητα συντονισμού κατά παράγοντα μεγαλύτερο του  $\sqrt{2}$ . (Αν, μάλιστα, λάβουμε υπόψη μας ότι το σκέλος που πατά στο έδαφος ωθώντας μας προς τα εμπρός δεν μπορεί παρά να είναι τεντωμένο, μαντεύουμε αμέσως ότι η πραγματική αύξηση της συχνότητας υπολείπεται σημαντικά του  $\sqrt{2}$ .)

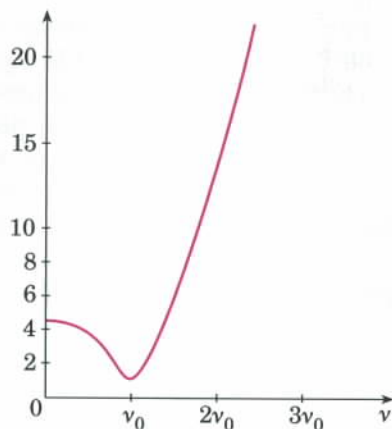
Έτσι, διαπιστώνουμε ότι η «προσαρμογή» της συχνότητας συντονισμού στην επιθυμητή ταχύτητα βάδισης είναι δυνατή σε περιορισμένο μόνο βαθμό. Αν κανείς πρέπει να τρέξει πολύ γρήγορα, η δυναμική ενέργεια που συσσωρεύει το σκέλος όταν υψώνεται δεν αρκεί για να του προσφέρει την αναγκαία ταλαντωτική κινητική ενέργεια. Για να καλυφθεί αυτό το έλλειμμα, πρέπει να εργαστούν οι μύες. Η απαιτούμενη κινητική ενέργεια αυξάνεται γρήγορα με

την ταχύτητα του δρομέα: είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητάς του. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για σταθερό μήκος διασκελισμού η ταχύτητα είναι ανάλογη προς τον αριθμό των βημάτων ανά δευτερόλεπτο, διαπιστώνουμε ότι κατά την αιώρηση των σκελών με ταχύ ρυθμό έχουμε «απώλειες» ενέργειας ανάλογες προς τον κύβο της ταχύτητας. Τούτο σημαίνει ότι για να αυξήσει κανείς την ταχύτητα με την οποία τρέχει κατά μόνο 10%, πρέπει να καταναλώνει ενέργεια αυξημένη κατά ένα τρίτο και ο διπλασιασμός της ταχύτητας απαιτεί τον οκταπλασιασμό της κατανάλωσης ενέργειας. Όσον αφορά δε τις δυνάμεις που πρέπει να ασκούν οι μύες για να κινούν τα σκέλη όταν τρέχουμε γρήγορα, είναι ανάλογες με το τετράγωνο της ταχύτητας.

Η έντονη μη γραμμική εξάρτηση της κατανάλωσης ενέργειας από την ταχύτητα εξηγεί τη σχετικά μικρή διαφορά ανάμεσα στις ταχύτητες που επιτυγχάνουν οι κάτοχοι των παγκοσμίων ρεκόρ στο σπριντ και οι δρομείς μέσωσων επιδόσεων. Καταλαβαίνουμε τώρα γιατί είναι τόσο δύσκολο να ρίξει κανείς κατά ένα ακόμη εκατοστό του δευτερολέπτου το χρόνο του στο δρόμο των εκατό μέτρων. Η απότομη εξάρτηση της ενέργειας από την ταχύτητα, ειρήσθω εν παρόδω, εξηγεί επίσης γιατί οι δρομείς μεγάλων αποστάσεων διατηρούν τα ενεργειακά τους αποθέματα τρέχοντας με μεγάλο διασκελισμό και κινώντας τα σκέλη τους σχεδόν με τη συχνότητα συντονισμού. Και τούτο παρά το γεγονός ότι ο μεγαλύτερος διασκελισμός απαιτεί πρόσθετη ενέργεια.

Για να προσδιορίσουμε την ποσοτική εξάρτηση των δυνάμεων που αναπτύσσουν οι μύες από τη συχνότητα βάδισης, χρειάζεται να γνωρίζουμε όχι μόνο τη φυσική συχνότητα των σκελών, αλλά και τη μείωση του πλάτους των ταλαντώσεών τους. Όπως σημειώσαμε ήδη, για τους ανθρώπους το πλάτος υποδιπλασιάζεται στη διάρκεια μίας περιόδου.

Η δύναμη των μυών που κινούν τα σκέλη μπρος-πίσω δρα περιοδικά. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η περιοδικότητά της περιγράφεται από μια ημιτονική συνάρτηση. Δεδομέ-



Σχήμα 1

*Η εξάρτηση των δυνάμεων που κινούν τα σκέλη μας από την ταχύτητα βάδισης, όπου με  $v$  συμβολίζουμε τη συχνότητα των αιωρήσεων των σκελών —δηλαδή τον αριθμό των βημάτων ανά δευτερόλεπτο—, ενώ το  $v_0$  δηλώνει τη συχνότητα συντονισμού τους. Ο κατακόρυφος άξονας δίνει τον παράγοντα κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι μυϊκές δυνάμεις εν συγκρίσει προς τη βάδιση με τη συχνότητα συντονισμού.*

νων τούτων των παραδοχών, βρισκόμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη δύναμη που απαιτείται για κάθε ρυθμό βηματισμού στηριζόμενοι σε μεθόδους και αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της θεωρίας των ταλαντώσεων.

Τα ποσοτικά συμπεράσματα στα οποία οδηγούν τέτοιοι υπολογισμοί φαίνονται στο Σχήμα 1. Από την εικονιζόμενη γραφική παράσταση προκύπτει πως η απαιτούμενη δύναμη ελαχιστοποιείται όταν η συχνότητα βάδισης ισούται με τη συχνότητα συντονισμού, ενώ αυξάνεται δραστικά τόσο στις υψηλότερες όσο και στις χαμηλότερες συχνότητες. Ειδικότερα, η εν λόγω γραφική παράσταση καθιστά απολύτως σαφές το πόσο αποδοτικότερο είναι να βαδίζουμε κινώντας τα σκέλη μας με τη συχνότητα συντονισμού αλλά και το πόσο καταστροφικά αυξάνονται οι δυνάμεις που απαιτούνται για τη βάδιση όσο ανεβαίνει η ταχύτητα. Για παράδειγμα, ο διπλασιασμός του ρυθμού βηματισμού (σε σύγκριση με τη συχνότητα συντονισμού) —δηλαδή η αύξηση του αριθμού των βημάτων ανά δευτερόλεπτο κατά έναν παράγοντα 2— χωρίς μεταβολή του μήκους διασκελισμού αυξάνει το φορτίο που δέχο-

νται οι μύες κατά έναν παράγοντα 14! Ακόμη κι αν ο ρυθμός βηματισμού αποκλίνει από τη συχνότητα συντονισμού μόνο κατά 10%, οι απαιτούμενες μυϊκές δυνάμεις αυξάνονται σημαντικά. Τώρα αντιλαμβανόμαστε γιατί ο κάθε άνθρωπος περπατά με βηματισμό που συμφωνεί ακριβώς με την ατομική του συχνότητα συντονισμού: ο συγκεκριμένος βηματισμός προσφέρεται ως ο πλέον εύκολος και αποδοτικός γι' αυτόν. (Η γραφική παράσταση του Σχήματος 1 περιγράφει ποιοτικά και τη διαδικασία του τρεξίματος. Εν προκειμένω, πρέπει να υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι η συχνότητα συντονισμού για το τρεξιμο έχει κατά τι υψηλότερη τιμή από την αντίστοιχή της για το βάδισμα επειδή τα πόδια μας λυγίζουν λίγο περισσότερο όταν τρέχουμε απ' ό,τι όταν βαδίζουμε.)

Όσο μειώνεται το ανηγμένο μήκος των κινητήριων άκρων (δηλαδή, από πρακτικής απόψεως, όσο περισσότερο λεπταίνουν τα κινητήρια άκρα από πάνω προς τα κάτω), τόσο αυξάνεται η συχνότητα συντονισμού και μαζί της η ταχύτητα η οποία μπορεί να επιτευχθεί με την ίδια προσπάθεια. Από την άλλη πλευρά, τα ελαφρότερα άκρα απαιτούν μικρότερη μυϊκή προσπάθεια για να κινηθούν με την ίδια ταχύτητα, καθότι η δύναμη είναι ανάλογη της μάζας. Έτσι εξηγείται γιατί τα γοργοπόδαρα ζώα (λόγου χάριν, οι αντιλόπες, τα τσιτάχ, τα άλογα ιπποδρομιών και τα κυνηγετικά σκυλιά) διαθέτουν μάλλον ελαφρά άκρα που παρουσιάζουν έντονη λέπτυνση προς τα κάτω.

Βέβαια, οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι η δεύτερη προϋπόθεση υπολείπεται σε σπουδαιότητα της πρώτης, διότι τον αποφασιστικό ρόλο στην ταχύτητα του τρεξίματος τον παίζουν οι συντονισμένες ταλαντώσεις των άκρων. Οι ελέφαντες, για παράδειγμα, που τα άκρα τους, αν και βαριά, έχουν καλές αναλογίες, είναι σχεδόν χαριτωμένοι όταν τρέχουν —στην Ινδία, το να πεις σε κάποιον ότι «περπατά σαν ελέφαντας» εκλαμβάνεται ως φιλοφρόνηση.

Ωστόσο, δεν χρειάζεται να ταξιδέψετε στην Ασία ή την Αφρική για να ανακαλύψετε παραδείγματα που να

επιβεβαιώνουν τους ισχυρισμούς μας: δεν έχετε παρά να προσπαθήσετε να πιάσετε ένα γουρουνόπουλο όποτε σας δοθεί η ευκαιρία! Τα άκρα του γουρουνιού (τα «μεριά» του) έχουν σχήμα κώνου, λεπταίνοντας απότομα προς τα κάτω. Το γουρουνόπουλο χρειάζεται τα μεριά του, όχι βέβαια για να ομορφαίνουν τις πιατέλες μας, αλλά για να αυξάνεται η συχνότητα συντονισμού των άκρων του. Τα κοντά άκρα του γουρουνόπουλου έχουν τόσο υψηλή συχνότητα συντονισμού ώστε θα τα καταφέρει μια χαρά σε έναν αγώνα δρόμου με έναν άνθρωπο, ο οποίος διαθέτει κατά πολύ μακρύτερα σκέλη.

Συνεπώς, η συχνότητα συντονισμού των άκρων παίζει βασικό ρόλο στην ταχύτητα με την οποία τρέχουν και βαδίζουν τα διάφορα πλάσματα της φύσης. Φυσιολογικά, λοιπόν, εγείρεται ένα ερώτημα: μπορεί η συχνότητα αυτή να αυξηθεί; Το εγχείρημα φαίνεται πολύ δελεαστικό: αν επιτύχουμε να αυξήσουμε τη συχνότητα συντονισμού, θα βελτιώσουμε και τις επιδόσεις των δρομέων και των βαδιστών.

Κατ' αρχήν, υπάρχουν δύο τουλάχιστον τρόποι για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα. Ο πρώτος έγκειται στο να αυξήσουμε τη δύναμη της βαρύτητας. Η συχνότητα συντονισμού των εκκρεμών είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Κατά συνέπεια, ο διπλασιασμός της βαρυτικής δύναμης σημαίνει αύξηση της φυσικής συχνότητας του σκέλους κατά έναν παράγοντα  $\sqrt{2}$ . Βεβαίως, η αύξηση της βαρύτητας της Γης δεν αποτελεί εύκολο εγχείρημα (για να μεταχειριστώ μια ήπια διατύπωση), και μάλιστα ίσως να μην αξίζει καν τον κόπο. Για τους μελλοντικούς ταξιδιώτες του Διαστήματος όμως, οι οποίοι θα τρέχουν και θα βαδίζουν σε άλλους πλανήτες, η εξάρτηση της συχνότητας συντονισμού των σκελών τους από τη βαρύτητα δεν αποτελεί θεωρητικό ζήτημα: ως γνωστόν, κάθε πλανήτη έχει και τη δική του επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι κατά πολύ απλούστερη. Αν η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται όποτε υ-

ψώνεται το σκέλος δεν επαρκεί ώστε να του δώσει την αναγκαία για την ταλαντωτική κίνηση ταχύτητα, μπορούμε να συζεύξουμε τα σκέλη μεταξύ τους με ένα ελαστικό σκοινί ή να τους προσαρμόσουμε κάποιους άλλους ελαστικούς μηχανισμούς σύζευξης που υποβοηθούν την επαναφορά των σκελών στη θέση ισορροπίας. Τοιουτοτρόπως μπορούμε να αυξήσουμε τη δυναμική ενέργεια που συσσωρεύει το υψωμένο σκέλος (με επιπρόσθετη δαπάνη κινητικής ενέργειας), κάτι το οποίο θα έχει ως συνέπεια να μειωθεί το περιττό φορτίο που ασκείται στους μύς προκειμένου να υπερνικήσουν την αδράνεια των κινούμενων σκελών.

Οι ελαστικοί μηχανισμοί σύζευξης που προσδένονται στα σκέλη παίζουν το ρόλο «συσσωρευτών» δυναμικής ενέργειας, οι οποίοι «φορτίζονται» και «εκφορτίζονται» δύο φορές κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου της ταλάντωσης. Όσο μεγαλύτερη ελαστικότητα έχει ο μηχανισμός σύζευξης (ας πούμε, όσο παχύτερο είναι το λαστιχένιο σκοινί που συνδέει τα πόδια), τόσο αυξάνεται η συχνότητα συντονισμού. Έτσι οδηγηθήκαμε σε ένα παράδοξο συμπέρασμα: για να τρέξετε γρήγορα, θα έπρεπε να έχετε δέσει τα πόδια σας — με λάστιχο, φυσικά.

Σε ένα παλιό γερμανικό παραμύθι περιγράφεται κάποιος άντρας που μπορούσε να τρέχει απίστευτα γρήγορα. Για να περπατά με κανονική ταχύτητα, έδενε βαρίδια στα πόδια του. Ε, λοιπόν, αυτός ο τύπος πρέπει να ήξερε τι έκανε! Προσθέτοντας τα βαρίδια, αύξανε το ανηγμένο μήκος των σκελών του, με αποτέλεσμα να μειώνεται η συχνότητα συντονισμού, και μαζί της η ταχύτητα με την οποία βάδιζε. Αν αντί να κρεμάει βαρίδια στα πόδια του τα συνέδεε με ένα ελαστικό σκοινί, τότε θα έτρεχε ακόμη γρηγορότερα. Ωστόσο, κανείς θα έτεινε να υποψιαστεί πως το μυστικό τούτου του υπερφυσικά γρήγορου δρομέα συνίστατο στο ότι τα πόδια του είχαν πολύ υψηλότερη συχνότητα συντονισμού απ' ό,τι τα πόδια των κοινών ανθρώπων.

Κάθε υγιής άνθρωπος μπορεί να μετατρέψει εαυτόν σε γρήγορο δρομέα αυξάνοντας τη συχνότητα συντο-

νισμού των σκελών του με κάποιον ελαστικό μηχανισμό σύζευξης. Φανταστείτε πως το κάνετε εσείς ο ίδιος: μόλις πριν από την έναρξη ενός αγώνα δρόμου, δένετε τα πόδια σας το ένα με το άλλο. Όταν οι κριτές σας ζητούν να τους εξηγήσετε την παράξενη συμπεριφορά σας, εσείς απαντάτε όλο μετριοφροσύνη ότι, επειδή είστε υπερβολικά γρήγορος, δένετε τα πόδια σας για να μην αφήσετε πάρα πολύ πίσω τους υπόλοιπους συναθλητές σας.

Καθώς λαμβάνετε θέση εκκίνησης, τεντώνετε το σκέλος σας προς τα πίσω καταβάλλοντας κάποια προσπάθεια, «φορτίζοντάς» το έτσι με δυναμική ενέργεια. Όταν ακούγεται η εκπυροσκόρπηση του πιστολιού, σηκώνετε αυτό το σκέλος από το έδαφος, κι εκείνο χύνεται προς τα εμπρός λες κι έχει εκτοξευτεί από σφεντόνα. Αυτό έχει ως συνέπεια να μειωθεί και ο χρόνος επιτάχυνσης. Θα φτάσετε στη γραμμή τερματισμού πρώτος — εσείς, με τα πόδια σας δεμένα!

Στην πραγματικότητα, το δύσκολο θα είναι να σταματήσετε στο τέλος της διαδρομής — τα ελαστικά συζευγμένα σκέλη σας θα «τρέχουν από μόνα τους».

Αν θα θέλαμε να οδηγήσουμε αυτό το πείραμα στη λογική του ολοκλήρωσης, θα φαινόταν εύλογο να προσδέσετε ελαστικούς μηχανισμούς σύζευξης και στους βραχίονές σας, διότι όταν τρέχετε τους χρησιμοποιείτε κι αυτούς. Έτσι, θα έπρεπε απλώς να στερεώσετε ελαστικά σκοινιά στους βραχίονές σας (πάνω από τους καρπούς) και να τα δέσετε στη μέση σας. Ιδού, λοιπόν, το τελικό μας συμπέρασμα: αν θέλετε να κάνετε τους ανθρώπους να τρέχουν γρηγορότερα, δέστε τους χειροπόδαρα!

Όταν έθεσα το συμπέρασμα αυτό υπόψη μερικών συναδέλφων μου, εκείνοι, παρότι γέλασαν, κατ' αρχήν συμφώνησαν μαζί μου. Ένας ανάμεσά τους, όμως, δεν αρκέστηκε απλώς να βασανίσει το μυαλό του — ήθελε να υποβάλει την ιδέα μου σε έλεγχο. Έτσι, βρήκαμε κάποιο παχύ λαστιχένιο σκοινί που απορροφούσε τους κραδασμούς και το οποίο αποτελούσαν από πολλά παράλληλα ελαστικά λαστιχένια νήματα. Κατόπιν, κό-

ψαμε τμήματα μήκους 57 cm από αυτά τα νήματα και τα χρησιμοποιήσαμε για να φτιάξουμε λαστιχένιους δακτύλιους πάχους περίπου 1 cm. Η κατασκευή τους ήταν μάλλον απλή: δένοντας τις άκρες κάθε λαστιχένιου νήματος φτιάχναμε και από έναν δακτύλιο, και μια δέσμη από επτά ή οκτώ απ' αυτούς αποτελούσε έναν σύνθετο δακτύλιο. Ο σύνθετος δακτύλιος έφερε περιδέσεις από σπάγκο σε κανονικές αποστάσεις.

Αν περάσετε έναν τέτοιο δακτύλιο γύρω από τα σκέλη σας και τα κρατήσετε ενωμένα, ο δακτύλιος δεν είναι ούτε τεντωμένος ούτε χαλαρός —περισφίγγει ελαφρά τα σκέλη σας. Όταν βαδίζετε ή τρέχετε, τεντώνεται περιοδικά. Οι παραγόμενες ελαστικές δυνάμεις τείνουν να επαναφέρουν τα σκέλη σας στη θέση ισορροπίας αυξάνοντας έτσι τη συχνότητα συντονισμού. Στα πειράματά μας, ο δακτύλιος περνούσε γύρω από τα σκέλη στο ύψος της γάμπας και αύξανε τη συχνότητα συντονισμού κατά έναν παράγοντα 1,5.

Για να εμποδίσουμε το δακτύλιο να συμπέζει τα αιμοφόρα αγγεία, τον στερεώσαμε στις κνήμες με σκληρούς προστατευτικούς επιδέσμους φτιαγμένους από χαρτόνι ή κάποιο υλικό με παρεμφερείς ιδιότητες. Για να εμποδίσουμε το δακτύλιο να γλιστρήσει προς τα επάνω, τον στερεώσαμε στους προστατευτικούς επιδέσμους και επίσης τον συνδέσαμε με τα παπούτσια μας με σπάγκους. Οι σπάγκοι αυτοί δεν παρενοχλούσαν την κίνηση του δακτύλιου στο οριζόντιο επίπεδο, επειδή η γωνία μεταξύ των σπάγκων και των κνημών παρέμενε πάντοτε μικρή —οι σπάγκοι διατηρούνταν πρακτικά παράλληλοι με τις κνήμες.

Ο λαστιχένιος δακτύλιος αύξανε τη συχνότητα συντονισμού ανεξαρτήτως του ύψους στο οποίο στερεωνόταν —πάνω από το γόνατο ή κάτω από αυτό. Εφόσον η ταλαντωτική κινητική ενέργεια του κάτω μέρους του σκέλους (κάτω από το γόνατο) υπερβαίνει κατά πέντε έως έξι φορές την κινητική ενέργεια του πάνω μέρους (πάνω από το γόνατο), φαίνεται λογικό να στερεώσουμε το δακτύλιο κάτω από το γόνατο.

Προσπάθησα να περπατήσω με έναν τέτοιο μηχανισμό και διαπίστωσα ότι η ταχύτητα του βαδίσματός μου αυξήθηκε. Ένωσα σαν κάτι να με βοηθούσε να κινήσω τα σκέλη μου. Όταν θέλησα να σταματήσω, βρήκα τον εαυτό μου να κάνει μερικά βήματα παραπάνω.

Ο λαστιχένιος δακτύλιος έλκει τα σκέλη προς τη θέση ισορροπίας, οπότε πιέζει το κάθε σκέλος εναλλάξ από εμπρός και από πίσω. Εφόσον αυτό το συνεχές «μασάζ» παραταθεί αρκετά, μπορεί να αποβεί επιβλαβές. Αν λοιπόν σκοπεύετε να διανύσετε μεγάλες αποστάσεις, ενδείκνυται να στερεώσετε το μηχανισμό κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα μέρη του να μη συμπιέζουν περιοχές των μυών που έχουν πολλά αιμοφόρα αγγεία. Ο ευκολότερος ίσως τρόπος για να τον στερεώσετε είναι να δέσετε τις άκρες του λαστιχένιου σκοινιού σε ταινίες τυλιγμένες στα πόδια σας.

Για να μην αφήσετε το σκοινί να κρέμεται χαλαρά ανάμεσα στα πόδια σας όταν δεν είναι τεντωμένο, προσδέστε μια λαστιχένια λουριδα στο μέσο του και στερεώστε την άκρη αυτής της ελαφρά τεντωμένης λουριδας στη ζώνη σας. Αν ακολουθήσετε τη μέθοδο που σας προτείνουμε, η μέση του ελαστικού σκοινιού θα βρίσκεται κάπως ψηλότερα, αλλά κάτι τέτοιο δεν παρεμποδίζει την κίνηση. Πρέπει να επισημάνουμε, ωστόσο, ότι όταν το λαστιχένιο σκοινί τεντώνεται πολύ, «προσπαθεί» να στρέψει τα πόδια σας περί τον κατακόρυφο άξονα. Τη ροπή αυτή πρέπει να την εξισορροπούν οι μύες· ειδάλλως θα μοιάζετε

με τα αστυνομικά σκυλιά στο *Χρυσό κλειδί* του Α.Ν. Τολστόι, τα οποία «έτρεχαν μ' έναν περίεργο καλπασμό, με τα ποινά τους πόδια να κινούνται κυκλοτερώς προς τα πλάγια». Μπορείτε να εξαλείψετε τούτο το ελάττωμα αντικαθιστώντας τις τυλιγμένες γύρω από τα πόδια σας ταινίες με έναν λαστιχένιο δακτύλιο που περνά γύρω από τα πόδια και κυλιέται γύρω τους καθώς κινείστε.

Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τον ίδιο μηχανισμό και στα άλογα, στερεώνοντας τις ελαστικές ταινίες στις οπλές τους (ένα ελαστικό σκοινί για τις μπροστινές και ένα για τις πσινές).

Αν η τεχνολογία μάς δώσει ποτέ «βαδίζοντα μηχανήματα» και ρομπότ, οι μελλοντικοί σχεδιαστές θα πρέπει να έχουν κατά νουν ότι μπορούν να αυξήσουν την ταχύτητά τους ή και να περιορίσουν την απαιτούμενη ενέργεια συνδέοντας τα «σκέλη» τους με ένα ελαστικό σκοινί.

Φυσικά, δεν είναι ανάγκη να δέσουμε τα πόδια μας για να αυξήσουμε την ταχύτητά μας. Υπάρχουν πολλά σχέδια για τέτοιους ελαστικούς μηχανισμούς σύζευξης όπως και μέθοδοι για την πρόσδεσή τους. Ωστόσο, όλα τα συστήματα αυτού του είδους πρέπει να μοιράζονται την εξής κοινή ιδιότητα: οι ελαστικοί μηχανισμοί σύζευξης πρέπει να αναπτύσσουν δυνάμεις που τείνουν να αποκαταστήσουν την ισορροπία. Με άλλα λόγια, πρέπει να αυξάνουν τη συχνότητα συντονισμού αυτού του υπέρροχου ζεύγους βιολογικών εκκρεμών —των σκελών μας. ●



# Καμπυλωμένη πραγματικότητα

*«Υπάρχουν πάντοτε δύο επιλογές, δύο δρόμοι να τραβήξεις. Ο ένας είναι εύκολος. Κι άλλη ανταμοιβή δεν έχει να σου δώσει εξόν από την ευκολία του.»*

—Αγνώστου

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**Δ**ΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΛΕΣ ΟΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ Ισοδύναμες. Από τη νηπακή μας κιόλας ηλικία, όταν ακόμη δεν έχουμε συμπληρώσει δύο ή τρεις μήνες ζωής, μπορούμε να διακρίνουμε τις ευθείες γραμμές από τις καμπύλες. Όταν μπαίνουμε πια στο δημοτικό, μαζί με τα πρώτα γράμματα αρχίζουμε να διδασκόμαστε και γεωμετρία, η οποία βασίζεται κυρίως στις ευθείες γραμμές και τα σχήματα που συντίθενται από αυτές — τρίγωνα, τετράγωνα, εξαγωνα κ.τ.ό. Όσο μας διakaτεύει ο ενθουσιασμός να ανακαλύψουμε τις φανερές αλλά και τις πιο μύχιες ιδιότητες τούτων των πολυγώνων, λησμονούμε να εγείρουμε το ερώτημα της σχέσης τους με τον πραγματικό, φυσικό κόσμο. Αναμφίβολα, τα τετράγωνα μας είναι αναγκαία για να σχεδιάζουμε τα δωμάτια των σπιτιών μας και τους κήπους μας. Τα τρίγωνα, πάλι, μας επιτρέπουν να προσδιορίζουμε το ύψος του ιστού της σημαίας μετρώντας τη σκιά του. Και τέλος, χρειαζόμαστε τις ευθείες για να βρίσκουμε τον συντομότερο δρόμο που ενώνει δύο σημεία.

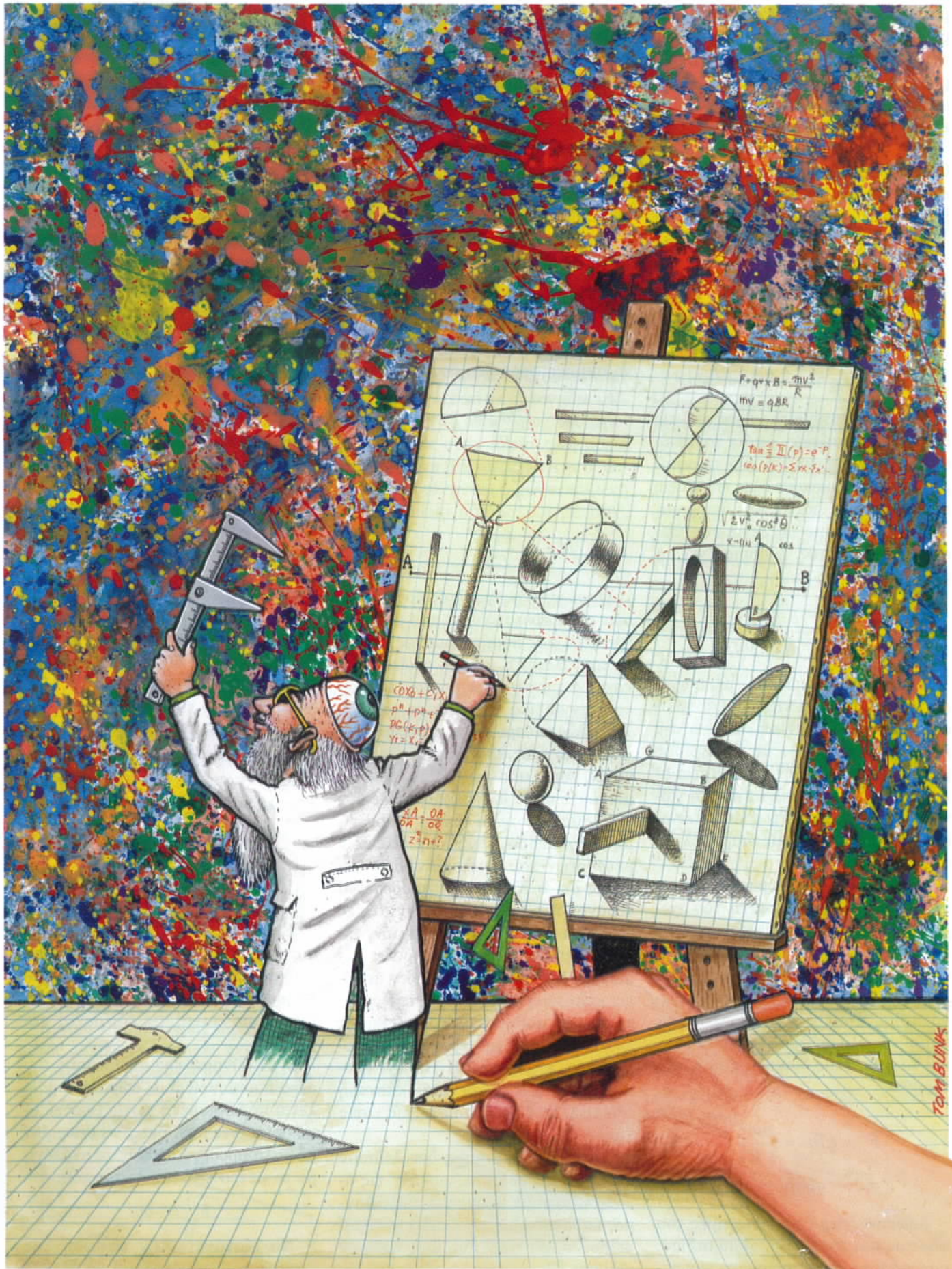
Συμμερίζεται τάχα η φύση την αδυναμία που τρέφουμε εμείς οι άνθρωποι για τις ευθείες; Πόσο συχνά συναντάμε ευθείες στη φύση; Ο ορίζοντας πέρα μακριά μοιάζει βέβαια με

ευθεία, ξέρουμε όμως πολύ καλά ότι δεν μπορεί παρά να έχει μια μικρή έστω καμπυλότητα, δεδομένου ότι η Γη έχει σχήμα σφαίρας. Παράδειγμα ευθείας γραμμής στη φύση αποτελούν οι ακτίνες του φωτός που καταφέρνουν να διαπεράσουν τα σύννεφα. Όταν η Σελήνη βρίσκεται στο πρώτο της τέταρτο και φωτίζεται από τον Ήλιο υπό την κατάλληλη γωνία, μας παρέχει μία ακόμη φυσική ευθεία γραμμή. Είναι άραγε ευθεία γραμμή η ακμή ενός κρυστάλλου; Υπάρχουν άλλα παραδείγματα φυσικών ευθειών; Θα χαιρόμασταν ειλικρινά αν οι αναγνώστες της στήλης μάς ενημέρωναν για τις πιθανές επιτυχίες που θα σημειώσουν στην προσπάθειά τους να εμπλουτίσουν αυτό τον σύντομο κατάλογο φυσικών ευθειών.

Πιθανόν οι ευθείες γραμμές της φύσης να μη διακρίνονται τόσο εύκολα. Ή δεν αποκλείεται πάλι να υπάρχουν όχι για τα κανονικά μας μάτια, αλλά για τα μάτια του νου μας. Αν αφήσουμε μια σφαίρα να πέσει, εκείνη διαγράφει μια κατακόρυφη ευθεία. Αχ και να μπορούσαμε να δούμε τη σφαίρα σε όλες τις θέσεις της συγχρόνως; τι όμορφα που θα 'ταν! Μετρώντας πόσο επιμηκύνεται ένα ελατήριο όταν κρεμάμε από το

ένα άκρο του διαφορετικά βάρη, ανακαλύπτουμε το νόμο του Hooke, ο οποίος λέει ότι η επιμήκυνση είναι ευθέως ανάλογη με την τείνουσα δύναμη. Αν θελήσουμε να τον εκφράσουμε με τη μορφή αλγεβρικής εξίσωσης, γράφουμε με άκρα συντομία  $F = -kx$ . Όταν δε τούτη τη σχέση την παραστήσουμε γραφικά, ανακαλύπτουμε μία από τις ευθείες γραμμές της φύσης. Κάθε σχέση ευθείας αναλογίας, από τη  $x = vt$  ως την  $F = mg$  και τη  $V = IR$ , μας προσφέρει την ευκαιρία να ανακαλύψουμε μια ευθεία γραμμή στη φύση.

Αλλά ας επιστρέψουμε στην άμεση οπτική εμπειρία μας και ας αναρωτηθούμε: Αν η φύση δεν δείχνει ιδιαίτερη αδυναμία στις ευθείες γραμμές, μήπως τάχα ευνοεί τις καμπύλες; Όπως είπαμε ήδη, δεν είναι όλες οι καμπύλες ισοδύναμες. Προτιμά άραγε η φύση τον κύκλο (το σύμβολο της τελειότητας των αρχαίων Ελλήνων) από την παραβολή; Ποια εμφανίζεται πιο συχνά, η υπερβολή ή η έλλειψη; Και μήπως την κυκλοειδή τη συναντάμε τακτικότερα από την αλυσσοειδή; Ας επιχειρήσουμε λοιπόν μια σύντομη περιήγηση σε μερικά απλά θέματα φυσικής, όντας διαρκώς σε ετοιμότητα ώστε να μη μας διαφύγει ούτε μία από τις κα-



$F = qv \times B = \frac{mv^2}{R}$   
 $mv = qBR$

$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{c} \left( \frac{p}{m_0 c} + \frac{1}{\gamma} \right)$   
 $\cos \alpha = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)$

$\sqrt{2v^2} \cos^2 \theta$   
 $x = \beta \mu \cos \alpha$

$(OX_0 + CY_0)$   
 $z^2 = n^2 + ?$

$\sum A = OA$   
 $OA = OC$   
 $z^2 = n^2 + ?$

TOM BLINK

μπύλες που μπορεί να συναντήσουμε στη διαδρομή μας. Και παίρνοντας παράδειγμα από την ιδέα της τροχιάς μιας σφαίρας που πέφτει ελεύθερα, ας αναζητήσουμε τις τροχιές άλλων κινούμενων αντικειμένων.

Μια σφαίρα που εκτελεί βολή, αν θεωρήσουμε ότι απουσιάζει η αντίσταση του αέρα, διαγράφει μια παραβολή. Αυτό αποδεικνύεται πάρα πολύ απλά αν γράψουμε τις εξισώσεις της κίνησης για την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση:

$$x = v_0 t \cos \theta,$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \theta.$$

Αν απαλείψουμε το χρόνο από τις δύο αυτές εξισώσεις —κάτι το οποίο θα μας επιτρέψει να «δούμε» τη σφαίρα μας ταυτόχρονα σε όλες τις θέσεις που κατέλαβε κατά τη διαδρομή της—, παίρνουμε τη λεγόμενη εξίσωση της τροχιάς, η οποία έχει τη μορφή:

$$y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{x \eta \mu \theta}{\cos \theta}.$$

Εύκολα αναγνωρίζουμε ότι η σχέση που περιγράφει την τροχιά αυτή συμπίπτει με τη γενική εξίσωση της παραβολής:  $y = ax^2 + bx$ . Η ακριβής μορφή της παραβολής καθορίζεται από την αρχική ταχύτητα και τη γωνία βολής. Όλες πάντως οι βολές οδηγούν σε τροχιές με παραβολικό σχήμα.

Ένα φορτισμένο σωματίδιο που εκτοξεύεται σε μια περιοχή του χώρου όπου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη η οποία ασκείται κάθετα τόσο στη στιγμιαία ταχύτητά του όσο και στο μαγνητικό πεδίο. Τούτη η κάθετη δύναμη παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης, και το σωματίδιο διαγράφει κυκλική τροχιά:

$$F = qBv = \frac{mv^2}{R},$$

$$mv = qBR.$$

Εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές του φορτίου και του μαγνητικού πεδίου, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ορ-

μή του φορτισμένου σωματιδίου μετρώντας την ακτίνα της καμπυλωμένης τροχιάς του.

Καμπυλωμένη επίσης τροχιά ακολουθεί και κάθε τεχνητός δορυφόρος που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης τον αναλαμβάνει η βαρυτική έλξη που αναπτύσσεται ανάμεσα στο δορυφόρο και τη Γη. Εφόσον η ταχύτητα της περιφοράς εκφράζεται συναρτήσει της περιόδου και της ακτίνας της τροχιάς, που αμφότερες επιδέχονται μέτρηση, μας ανοίγεται η δυνατότητα να προσδιορίσουμε τη μάζα της Γης μελετώντας τη συμπεριφορά του δορυφόρου:

$$F = \frac{GM_r m}{R^2} = \frac{mv^2}{R},$$

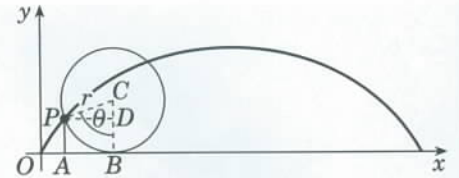
$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

$$M_r = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

Ομοίως, ένας φυσικός δορυφόρος που περιφέρεται γύρω από κάποιον πλανήτη μάς παρέχει αμέσως τη μάζα του πλανήτη εφόσον σταθούμε ικανοί να μετρήσουμε την περίοδο του και την ακτίνα της τροχιάς του.

Καθώς οι δορυφόροι περιφέρονται γύρω από τους πλανήτες και οι πλανήτες γύρω από τον Ήλιο, ούτε οι μιν ούτε οι δε διαγράφουν τέλειους κύκλους. Αποτελεί αιώνιο φόρο τιμής στην πειραματική ακρίβεια των μετρήσεων του Tycho Brahe το γεγονός ότι ο Kepler δεν μπόρεσε να «επαναπαυτεί» στις προσεγγιστικές κυκλικές τροχιές των πλανητών, αλλά υποχρεώθηκε να διακηρύξει ότι διαγράφουν ελλείψεις. Και δεν υπάρχει καλύτερη απόδειξη για την ορθότητα της μαθηματικής διαίσθησης του Kepler από την τροχιά που ακολουθεί ο κομήτης του Halley, η οποία είναι μια εξαιρετικά έκκεντρη έλλειψη, με τον Ήλιο στη μία εστία της.

Από τη φύση, όμως, δεν λείπουν ούτε οι υπερβολικές τροχιές: τις ανακαλύπτουμε όταν, για παράδειγμα, παρατηρούμε τη σκέδαση σωματιδίων άλφα από πυρήνες ατόμων χρυσού. Το πείραμα σκέδασης του



Σχήμα 1

Rutherford απέδειξε ότι σε κάθε άτομο υπάρχει ένας πυρήνας, ο οποίος περιέχει (σχεδόν) ολόκληρη τη μάζα και όλο το θετικό φορτίο του ατόμου συγκεντρωμένα σε έναν εξαιρετικά μικρό όγκο. Εφόσον γνωρίζουμε τη γωνία εκτροπής του σωματιδίου άλφα, έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την παράμετρο κρούσης, ή και αντίστροφα. Η θεωρητική εξίσωση που συνδέει τα δύο αυτά βασικά μεγέθη έχει ως εξής:

$$\epsilon \varphi \frac{\Theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{m b v_0^2},$$

όπου με  $\Theta$  συμβολίζουμε τη γωνία σκέδασης και με  $b$  την παράμετρο κρούσης.

Μια εξόχως ενδιαφέρουσα καμπύλη διαγράφει και ένα σημείο της περιφέρειας ενός κυλιόμενου τροχού (Σχήμα 1). Μερικές φορές σάς δίνεται η ευκαιρία να δείτε αυτή την καμπύλη καθώς τη «σχεδιάζουν» οι ανακλαστήρες των ελαστικών των ποδηλάτων:

$$x = OA = OB - AB = OB - PD \\ = r\theta - r\eta\mu\theta = r(\theta - \eta\mu\theta),$$

$$y = AP = BD = BC - CD \\ = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta).$$

Ελπίζουμε ότι το πρόβλημα που σας καλούμε να λύσετε σ' αυτό το τεύχος θα σας παρακινήσει να αποκτήσετε «στενότερες επαφές» με μερικές από αυτές τις υπέροχες καμπύλες.

1. Η δύναμη της αντίστασης του αέρα που ασκείται σε σώμα που βάλεται υπό ορισμένη γωνία μπορεί, υπό ορισμένες συνθήκες, να θεωρηθεί σε καλή προσέγγιση ευθέως ανάλογη με το μέτρο της ταχύτητάς του:

$$F_{av} = -bv.$$

Να εξαγάγετε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος και να δώσετε



σκαριφήματά της για διάφορες τιμές τού  $b$ .

2. Σε μια περιοχή του χώρου υπάρχουν ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο. Τα δύο πεδία είναι ομογενή, στατικά και κάθετα μεταξύ τους. Στην περιοχή αυτή, ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται κάθετα και προς τα δύο πεδία.

(α) Αν το σωματίδιο διασχίσει την περιοχή των πεδίων χωρίς να υποστεί απολύτως καμία εκτροπή, δείξτε ότι η ταχύτητά του ισούται με  $E/B$ . Πρόκειται για αποτέλεσμα το οποίο μας υποδεικνύει την αρχή λειτουργίας για έναν επιλογέα ταχυτήτων.

(β) Θα διαπιστώσουμε και πάλι απουσία εκτροπής εάν το σωματίδιο διασχίσει την περιοχή των πεδίων κινούμενο με την ίδια ταχύτητα  $E/B$  αλλά κατά την αντίθετη κατεύθυνση;

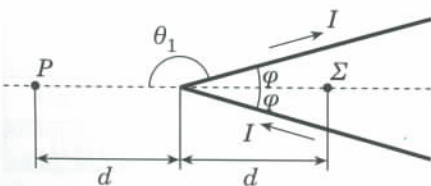
(γ) Έστω ότι το σωματίδιο διασχίζει την περιοχή των δύο πεδίων κινούμενο κατά την αρχική κατεύθυνση αλλά με ταχύτητα διαφορετική από  $E/B$ . Καθορίστε την ακριβή μορφή της καμπυλωμένης τροχιάς που θα διαγράψει.

## Μαγνητικές αιχμές

Στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου, σας ζητούσαμε να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που παράγει στα σημεία  $P$  και  $\Sigma$  το ρεύμα το οποίο διαρρέει τη μαγνητική αιχμή του Σχήματος 2.

Α. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού, διαπιστώνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγουν στο  $P$  το καθένα από τα ρεύματα που διαρρέουν τους δύο αγωγούς τού «V» έχει κατεύθυνση από τη σελίδα προς τον αναγνώστη· στο  $\Sigma$ , το πεδίο έχει την αντίθετη κατεύθυνση.

Β. Από τη συμμετρία του προβλήματος αντιλαμβανόμαστε ότι το ολικό πεδίο στο σημείο  $P$  ισούται με το



Σχήμα 2

διπλάσιο του πεδίου που παράγει η καθεμία από τις δύο πλευρές τού «V». Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο πάνω αγωγός, χρησιμοποιούμε τον τύπο για τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό πεπερασμένου μήκους τον οποίο εξαγάγαμε (τεύχος Μαΐου/Ιουνίου). Η πρώτη γωνία που υπεισέρχεται σ' εκείνον τον τύπο, η  $\theta_1$ , ορίζεται για το αριστερό άκρο του αγωγού. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζει το ρεύμα με το διάνυσμα θέσης του σημείου  $P$ . Συνεπώς,

$$\sin\theta_1 = \sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi.$$

Η δεύτερη γωνία που συναντάμε στον τύπο ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο, αλλά για το δεξιό άκρο του αγωγού. Εφόσον στην περίπτωση μας ο αγωγός θεωρείται απειρομήκης σ' αυτή την κατεύθυνση, η συγκεκριμένη γωνία ισούται ουσιαστικά με  $180^\circ$ , οπότε

$$\sin\theta_2 = \sin\pi = -1.$$

Τέλος, η απόσταση του σημείου  $P$  από τον αγωγό (ή, αν προτιμάτε, από την προέκτασή του) είναι  $d\eta\mu\varphi$ . Έτσι, ενθουσιάζομενοι να πολλαπλασιάσουμε επί 2 ώστε να λάβουμε υπόψη τη συνεισφορά και των δύο πλευρών τού «V», έχουμε

$$\begin{aligned} B &= 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1 - \sin\varphi}{d\eta\mu\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \epsilon\varphi \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Για το σημείο  $\Sigma$ ,

$$\sin\theta_1 = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$

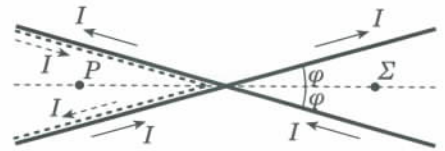
και

$$\sin\theta_2 = \sin(-\pi) = -1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1 + \sin\varphi}{d\eta\mu\varphi} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sigma\varphi \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Το μέρος  $B$  μπορούμε επίσης να το λύσουμε χειριζόμενοι το σημείο  $\Sigma$  ως εάν βρισκόταν στο εξωτερικό ενός «V» ημίσειας γωνίας  $(\pi - \varphi)$  που το



Σχήμα 3

διαρρέει ρεύμα  $I$  κατά την αντίθετη φορά. Τότε,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \epsilon\varphi \left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sigma\varphi \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Αλλά υπάρχει και τρίτη μέθοδος λύσης: μπορούμε να προσφύγουμε στην αρχή της υπέρθεσης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, η διάταξη του προβλήματός μας είναι ισοδύναμη, από την άποψη του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου, με δύο διασταυρωμένους άπειρους ρευματοφόρους αγωγούς συν ένα «V» στα αριστερά που διαρρέεται από ρεύμα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τα ρεύματα στα δύο επάλληλα «V» στα αριστερά αναιρούνται αμοιβαίως, οπότε επανερχόμαστε στην αρχική διάταξη. Η υπέρθεση των πεδίων που οφείλονται αφ' ενός στο «V» στα αριστερά και αφ' ετέρου στους διασταυρωμένους άπειρους αγωγούς μάς παρέχει τη ζητούμενη απάντηση.

Ο καθένας από τους άπειρους αγωγούς παράγει ένα πεδίο που έχει μέτρο

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d \eta\mu\varphi}$$

και κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Η συνεισφορά στο μαγνητικό πεδίο λόγω του «V» στα αριστερά έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη και μέτρο που δίνεται από την απάντησή μας για το σημείο  $P$ . Συνεπώς, το ολικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \left( \frac{2}{\eta\mu\varphi} - \epsilon\varphi \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sigma\varphi \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

# Περί ημιπεριοδικών ακολουθιών

και ταιριαστών πολυγωνικών γραμμών

A. Levitov, A. Sidorov και A. Stoyanovsky

**Α**Σ ΠΑΙΞΟΥΜΕ ΛΙΓΟ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ αποτελούμενες από μηδέν και ένα. Οι ακολουθίες αυτές μπορεί να είναι πεπερασμένες ή άπειρες (ή ακόμη άπειρες και προς τις δύο κατευθύνσεις)<sup>1</sup>. Ιδού ένα παράδειγμα άπειρης ακολουθίας (η οποία είναι περιοδική):

...011001011001011001011001...

Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας κατασκευάζεται ως εξής: Ορίζουμε ένα μετασχηματισμό  $\Pi$  ο οποίος σε κάθε ακολουθία  $S$  αντιστοιχίζει μια νέα ακολουθία  $S' = \Pi(S)$ . Αυτός ο μετασχηματισμός αντικαθιστά ταυτόχρονα κάθε 1 της  $S$  με τα τρία ψηφία 100, και κάθε 0 της  $S$  με τα δύο ψηφία 10. Για παράδειγμα, η ακολουθία  $S = 11010$  μετασχηματίζεται στην  $\Pi(S) = 1001001010010$ . Προφανώς, η  $\Pi(S)$  έχει μεγαλύτερο μήκος από την  $S$ .

Ας πάρουμε τώρα  $S_0 = 1$  και ας θέσουμε  $S_1 = \Pi(S_0)$ ,  $S_2 = \Pi(S_1)$ ,  $S_3 = \Pi(S_2)$ ,  $S_4 = \Pi(S_3)$ , κ.ο.κ. (Πίνακας 1). Παρατηρούμε ότι κάθε ακολουθία αποτελεί συνέχεια της προηγούμενης.

### Άσκηση 1.

- (α) Αποδείξτε αυτό το γεγονός.
- (β) Διατυπώστε μια παρόμοια πρόταση για την περίπτωση  $S_0 = 0$ .

1. Στην περίπτωση της άπειρης ακολουθίας έχουμε μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε θετικό ακέραιο το 0 ή το 1. Μια διπλά άπειρη ακολουθία είναι μια συνάρτηση που ορίζεται για όλους τους ακεραίους (θετικούς, αρνητικούς και μηδέν).



Συνεπώς, οι ακολουθίες  $S_n$  αποτελούν τα αρχικά τμήματα μιας άπειρης ακολουθίας  $S_\infty$ . Αυτό είναι το πρώτο μας ενδιαφέρον παράδειγμα ακολουθίας.

**Άσκηση 2.** Αποδείξτε ότι  $\Pi(S_\infty) = S_\infty$ .

Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την ακολουθία  $S_\infty$ . Πρώτα απ' όλα, δεν είναι περιοδική.

**Άσκηση 3.** Αποδείξτε αυτό το γεγονός (ή περιμένετε να διαβάσετε την απόδειξη στη συνέχεια).

Ας εξετάσουμε κατόπιν την πυ-

$n$	$S_n$	$c_n$
0	1	1
1	100	$1/3 = 0,33333...$
2	1001010	$3/7 = 0,42857...$
3	10010101001010010	$7/17 = 0,41176...$
4	100101010010100101001010010100101010010	$17/41 = 0,41463...$
5	...	$41/99 = 0,414141...$
6	...	$99/239 = 0,41422...$
7	...	$239/577 = 0,41421...$
8	...	$577/1393 = 0,41421...$

Πίνακας 1

κνότητα των μονάδων σε αυτή την ακολουθία. Η μέση πυκνότητα  $c$  δίνεται (με μεγάλη ακρίβεια) από την ισότητα  $c \approx (\text{το πλήθος των μονάδων σε } 1 \text{ km της ακολουθίας})/(\text{το πλήθος των ψηφίων σε } 1 \text{ km της ακολουθίας})$ .

Σε μαθηματική γλώσσα, αυτός ο ορισμός διατυπώνεται ως εξής: Η ζητούμενη πυκνότητα είναι το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , όπου  $c_n = (\text{το πλήθος των μονάδων στην } S_n)/(\text{το πλήθος των ψηφίων στην } S_n)$ . Οι πρώτες τιμές του  $c_n$  δίνονται στον Πίνακα 1. Παρατηρούμε ότι ο  $c_n$  προσεγγίζει ταχύτατα έναν αριθμό  $c = 0,41421\dots$ . Ίσως μαντέψατε ότι αυτός ο αριθμός είναι ο  $c = \sqrt{2} - 1$ .

**Πρόβλημα 2.** Αριθμούμε τα ψηφία της  $S_\infty$  χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς. Έστω  $m_i$  η θέση της  $i$ -στης μονάδας της ακολουθίας. Αποδείξτε ότι ο επόμενος τύπος μάς δίνει ακριβώς την τιμή του  $m_i$ :

$$m_i = \left[ i(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right],$$

όπου με  $[a]$  δηλώνουμε το ακέραιο μέρος του  $a$ .

Γνωρίσαμε, λοιπόν, τον πρώτο κάτοικο του φανταστικού κόσμου των ημιπεριοδικών ακολουθιών. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με διπλά άπειρες ακολουθίες.

ζεται καλή αν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή άπειρες φορές ο αντίστροφος από τον  $\Pi$  μετασχηματισμός. Με άλλα λόγια, η  $S$  είναι καλή αν υπάρχουν ακολουθίες  $S', S'', S''', \dots$  τέτοιες ώστε  $S = \Pi(S'), S' = \Pi(S''), S'' = \Pi(S''')$ , κ.ο.κ.

Το κύριο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η ταξινόμηση όλων των καλών ακολουθιών. Όπως είναι φυσικό, δεν θα κάνουμε διάκριση μεταξύ των ακολουθιών που προκύπτουν η μία από την άλλη μέσω μετατόπισης.

Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι το κατά πόσον υπάρχει έστω και μία καλή ακολουθία. Η απάντηση δίνεται στην επόμενη άσκηση.

**Άσκηση 6.** Αποδείξτε ότι αν ενώσουμε την ακολουθία της Άσκησης 1(β) (η οποία είναι άπειρη προς τα αριστερά) με την ακολουθία  $S_\infty$  (η οποία είναι άπειρη προς τα δεξιά), προκύπτει μια καλή ακολουθία  $S$  και  $\Pi(S) = S$ .

Το επόμενο ερώτημα είναι: Υπάρχουν άλλες καλές ακολουθίες, και αν ναι, πόσες; Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μια πρόχειρη απάντηση στο ερώτημα. Έστω  $S$  και  $T$  δύο καλές ακολουθίες.

**Άσκηση 7.** Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο τμήμα της  $S$  εμφανίζεται στην  $T$ , και αντιστρόφως.

Το αποτέλεσμα της Άσκησης 7 ερμηνεύεται ως εξής. Ας φανταστούμε ότι γράφουμε τις ακολουθίες  $S$  και  $T$  σε δύο λωρίδες χαρτιού και τις τοποθετούμε σε ένα τραπέζι που εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ας φανταστούμε ακόμη ότι μια απείρου μεγέθους επιτροπή κάθεται στο τραπέζι και προσπαθεί να καθορίσει αν οι ακολουθίες είναι ταυτόσημες. Αν κάθε μέλος της επιτροπής έχει τη δυνατότητα να εξετάσει πεπερασμένο μόνο τμήμα των ακολουθιών, η επιτροπή δεν θα είναι σε θέση να βρει διαφορές μεταξύ της  $S$  και της  $T$ .

Δικαιολογείται η επιτροπή να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι  $S = T$ ; (Εμείς, από την άλλη πλευρά, μπορούμε να κοιτάξουμε ολόκληρη την  $T$  και να διαπιστώσουμε ότι είναι αδύνατο ή όχι να ταυτίσουμε με την  $S$  μέσω κάποιας μετατόπισης.)

**Άσκηση 4.** Αποδείξτε αυτό το γεγονός.

(Υπόδειξη:  $c_{n+1} = \frac{1}{2 + c_n}$ .)

Επομένως, κατασκευάσαμε μια ακολουθία με την εξής αξιοσημείωτη ιδιότητα: η πυκνότητα των μονάδων της δίνεται από έναν άρρητο αριθμό. Επισημαίνουμε ότι οι περιοδικές άπειρες ακολουθίες δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.

**Άσκηση 5.** Αποδείξτε αυτό το γεγονός (και συμπεράνετε έτσι ότι ισχύει η πρόταση της Άσκησης 3).

Κατά την πρώτη ανάγνωση του άρθρου μπορείτε να μην ασχοληθείτε με τα επόμενα προβλήματα, τα οποία αφορούν μερικές ακόμη ιδιότητες της ακολουθίας  $S_\infty$ .

**Πρόβλημα 1.** Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $S_\infty$  είναι ημιπεριοδική —δηλαδή, κάθε πεπερασμένο τμήμα της  $S_\infty$  εμφανίζεται άπειρες φορές σε διαφορετικά σημεία της ακολουθίας.

## Διατύπωση του κύριου προβλήματος

Έστω  $S$  μια διπλά άπειρη ακολουθία αποτελούμενη από 1 και 0. Υπάρχει ακολουθία  $S'$  τέτοια ώστε  $\Pi(S') = S$ ; Είναι προφανές ότι η  $S'$  υπάρχει εάν και μόνο εάν η  $S$  αναλύεται σε τμήματα της μορφής 100 και 10. Θα ονομάζουμε μια τέτοια ακολουθία *ταιριαστή*. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε  $S' = \Pi^{-1}(S)$ . Ας υποθέσουμε τώρα ότι και η ακολουθία  $\Pi^{-1}(S)$  είναι *ταιριαστή*. Τότε υπάρχει μια ακολουθία  $S''$  τέτοια ώστε  $\Pi(S'') = S'$  και, συνεπώς,  $\Pi(\Pi(S'')) = S$ . Σε αυτή την περίπτωση, η  $S$  καλείται *πολύ ταιριαστή*. Όπως ίσως μαντέψετε, μια ακολουθία  $S$  για την οποία υπάρχει μια ακολουθία  $S'''$  τέτοια ώστε  $\Pi(\Pi(\Pi(S'''))) = S$  καλείται *πολύ πολύ ταιριαστή*, κ.ο.κ. Τέλος, το πιο σημαντικό σημείο:

**Ορισμός.** Η ακολουθία  $S$  ονομά-

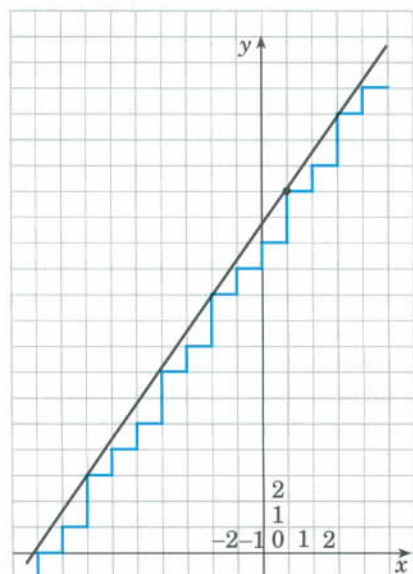


Υπάρχουν, λοιπόν, διαφορετικές καλές ακολουθίες; Για να απαντήσουμε σ' αυτό και σε κάποια άλλα ερωτήματα, θα χρησιμοποιήσουμε ένα απροσδόκητο αλλά ισχυρό εργαλείο —το τετραγωνισμένο χαρτί που χρησιμοποιούν οι μαθητές του δημοτικού στο μάθημα της αριθμητικής τους.

## Μια γεωμετρική ερμηνεία

Ας πάρουμε ένα μεγάλο φύλλο τετραγωνισμένου χαρτιού. Εισάγουμε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, με μονάδα των αξόνων συντεταγμένων ίση με την πλευρά ενός τετραγώνου του τετραγωνισμένου χαρτιού. Θα απεικονίσουμε κάθε ακολουθία ως μια πολυγωνική γραμμή αποτελούμενη από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τους άξονες των συντεταγμένων. Αν το επόμενο ψηφίο της ακολουθίας είναι 1, η πολυγωνική γραμμή κινείται κατά ένα τετράγωνο δεξιά. Αν το επόμενο ψηφίο είναι 0, κινείται ένα τετράγωνο προς τα πάνω (Σχήμα 1). Η πολυγωνική γραμμή που αντιστοιχεί σε μια καλή (ή σε μια ταιριαστή) ακολουθία θα καλείται επίσης καλή (αντίστοιχα, ταιριαστή).

Αν παρατηρήσουμε μια καλή πολυγωνική γραμμή, όπως αυτή του Σχήματος 1, θα διαπιστώσουμε ότι μοιάζει πολύ με ευθεία. Για την α-



...101001010010101001010010101001010010...

Σχήμα 1

κρίβεια, μεταξύ της πολυγωνικής γραμμής και μιας ευθείας δεν υπάρχει κανείς κόμβος του τετραγωνισμένου χαρτιού.

Η πολυγωνική γραμμή προσεγγίζει την ευθεία. Για να περιγράψουμε αυτή την ευθεία πρέπει, πρώτα απ' όλα, να βρούμε την κλίση της  $k$ . Είναι προφανές ότι αυτή η κλίση ισούται κατά προσέγγιση με το λόγο  $k \approx$  (το πλήθος των κατακόρυφων τμημάτων σε 1 km της πολυγωνικής διαδρομής)/(το πλήθος των οριζόντιων τμημάτων σε 1 km της πολυγωνικής διαδρομής)  $\approx$

$$\frac{1 - c}{c},$$

όπου  $c$  είναι η μέση πυκνότητα των μονάδων. Γνωρίζουμε ότι  $c = \sqrt{2} - 1$  (δείτε τις Ασκήσεις 4, 6 και 7). Επομένως,

$$k = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

Αυτό το είδος προσεγγιστικής αντιμετώπισης (το οποίο οι μαθηματικοί ονομάζουν *ευρετική μέθοδο*) μας προσφέρει έναν τρόπο κατασκευής πολλών παραδειγμάτων καλών ακολουθιών.

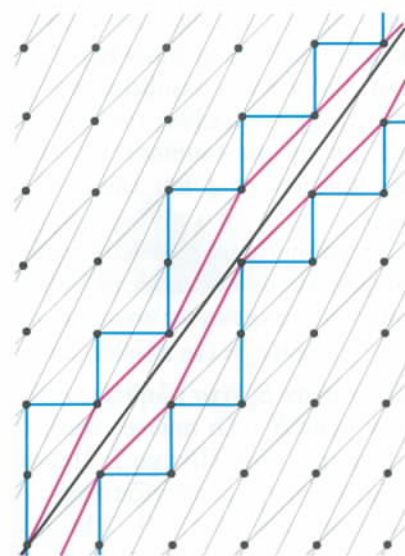
**Θεώρημα 1.** Έστω  $l$  μια ευθεία γραμμή που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = \sqrt{2}x + b$  (όπου  $b$  ένας τυχαίος αριθμός), και έστω  $\Lambda_A(l)$  και  $\Lambda_B(l)$  πολυγωνικές γραμμές που προσεγγίζουν την  $l$  από πάνω και από κάτω, αντίστοιχα. Τότε οι  $\Lambda_A$  και  $\Lambda_B$  είναι καλές.

Μια ιδέα για την απόδειξη. Οι  $\Lambda_A$  και  $\Lambda_B$  είναι ταιριαστές.

**Άσκηση 8.** Αποδείξτε το γεγονός.

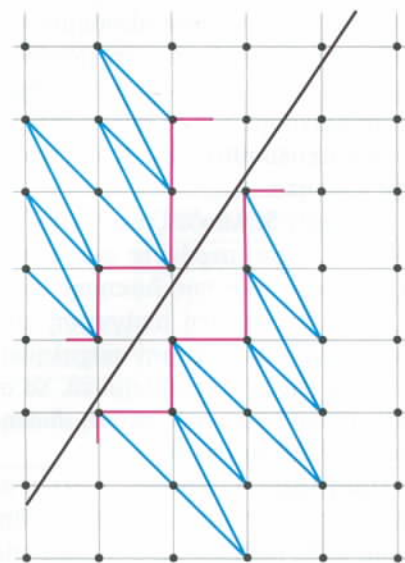
Θα αποδείξουμε ότι και οι πολυγωνικές γραμμές  $\Pi^{-1}(\Lambda_A)$  και  $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$  προσεγγίζουν από κάτω και από πάνω μια συγκεκριμένη ευθεία  $l'$ , με εξίσωση  $y = \sqrt{2}x + b'$  (για κάποιο συγκεκριμένο  $b'$ ). Από αυτό το γεγονός έπεται ότι οι  $\Pi^{-1}(\Lambda_A)$  και  $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$  είναι επίσης ταιριαστές, κ.ο.κ.

**Απόδειξη.** Συνδέουμε τα άκρα των τμημάτων της πολυγωνικής γραμμής που αντιστοιχούν στο 100 και στο 10 με ευθύγραμμα τμήματα (τα κόκκινα τμήματα στο Σχήμα 2). Προκύπτουν δύο νέες πολυγωνικές γραμ-



Σχήμα 2

μές  $\tilde{\Lambda}_A$  και  $\tilde{\Lambda}_B$ . Τα τμήματα αυτών των πολυγωνικών γραμμών βρίσκονται σε ένα νέο πλέγμα που αποτελείται από ευθείες με κλίσεις 1 ή 2 (οι κόμβοι του νέου πλέγματος συμπίπτουν με τους κόμβους του αρχικού). Ας φανταστούμε τώρα ότι το σχέδιο του Σχήματος 2 είναι χαραγμένο σε ένα διαφανές ελαστικό φύλλο. Τεντώνουμε το ελαστικό φύλλο έτσι ώστε το νέο πλέγμα να συμπίπτει με το αρχικό (ορθογώνιο) πλέγμα. Στη συνέχεια γυρίζουμε το φύλλο ανάποδα, όπως στο Σχήμα 3. Έπειτα από αυτούς τους μετασχηματισμούς, οι πολυγωνικές γραμμές  $\Lambda_A$



Σχήμα 3

και  $\Lambda_B$  έχουν μεταφερθεί στις  $\Pi^{-1}(\Lambda_A)$  και  $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$ , αντίστοιχα. Πράγματι, τα τμήματα που στην παλιά πολυγωνική γραμμή  $\Lambda_B$  αντιστοιχούσαν στο 100 απεικονίζονται σε οριζόντια τμήματα της νέας πολυγωνικής γραμμής: τα τμήματα που αντιστοιχούσαν στο 10 απεικονίζονται σε κατακόρυφα τμήματα. Το ίδιο ισχύει για τη  $\Lambda_A$ .

Ο μετασχηματισμός  $F$  του επιπέδου των συντεταγμένων που εφαρμόσαμε (τέντωμα και αναποδογύρισμα) μεταφέρει ένα σημείο  $(x, y)$  στο σημείο

$$F(x, y) = (-x + y, 2x - y). \quad (*)$$

Ειδικά,  $F(1, 2) = (1, 0)$  και  $F(1, 1) = (0, 1)$ . Η αρχή των αξόνων είναι σταθερό σημείο του μετασχηματισμού  $F$ . Ο μετασχηματισμός αυτός μεταφέρει κάθε ευθεία σε ευθεία και διατηρεί τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

**Άσκηση 9.** Αποδείξτε βάσει του τύπου (\*) αυτές τις ιδιότητες του  $F$ .

Οι μετασχηματισμοί αυτού του τύπου καλούνται *γραμμικοί*.

**Άσκηση 10.** Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός  $F$  μεταφέρει την ευθεία  $l$  που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = \sqrt{2}x + b$  στην ευθεία  $l'$  που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = \sqrt{2}x + b'$  και βρείτε το συντελεστή  $b'$ .

Απομένει να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχουν κόμβοι του πλέγματος μεταξύ των πολυγωνικών γραμμών  $\Pi^{-1}(\Lambda_A)$  και  $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$  και της ευθείας  $l'$  (βλ. Σχήμα 3). Το ίδιο ισχύει και για τις  $\Lambda_A$  και  $\Lambda_B$  και την ευθεία  $l$  στο Σχήμα 2. Επομένως, οι  $\Pi^{-1}(\Lambda_A)$  και  $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$  προσεγγίζουν την ευθεία  $l'$ . Άρα, το θεώρημα αποδείχτηκε.

## Λύση του κύριου προβλήματος

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.** Έστω  $\Lambda$  μια καλή πολυγωνική γραμμή. Τότε, η  $\Lambda$  προσεγγίζει από πάνω ή από κάτω μια ευθεία  $l$  με εξίσωση  $y = \sqrt{2}x + b$ .

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα δοθεί στη συνέχεια. Πρώτα, όμως, θα εξηγήσουμε πώς μας βοηθά να ταξινομήσουμε τις καλές ακο-

λουθίες (ή πολυγωνικές γραμμές). Απομένει να βρούμε ποιες πολυγωνικές γραμμές της μορφής  $\Lambda_A(l)$  και  $\Lambda_B(l)$  δίνουν ταυτόσημες ακολουθίες (ακολουθίες που ταυτίζονται έπειτα από μια παράλληλη μετατόπιση).

**Άσκηση 11.** Αποδείξτε τις επόμενες προτάσεις.

(α) Η ευθεία  $l$  περιέχει έναν κόμβο του πλέγματος αν και μόνο αν  $b = m + n\sqrt{2}$  για ακραίους  $m$  και  $n$ .

(β) Αν η ευθεία  $l$  δεν περιέχει κόμβους του πλέγματος, τότε οι πολυγωνικές γραμμές  $\Lambda_A(l)$  και  $\Lambda_B(l)$  είναι ισοδύναμες. Δηλαδή, η πάνω ευθεία προκύπτει από την κάτω έπειτα από παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα  $(-1, 1)$ .

(γ) Έστω  $l_1$  και  $l_2$  δύο ευθείες που περιγράφονται από τις εξισώσεις  $y = \sqrt{2}x + b_1$  και  $y = \sqrt{2}x + b_2$ , αντίστοιχα. Τότε, οι πολυγωνικές γραμμές  $\Lambda_A(l_1)$  και  $\Lambda_A(l_2)$  είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν  $b_1 - b_2 = m + n\sqrt{2}$ , όπου τα  $m$  και  $n$  είναι ακέραιοι.

(δ) Οι πολυγωνικές γραμμές  $\Lambda_A(l_0)$  και  $\Lambda_B(l_0)$  που αντιστοιχούν στην ευθεία  $l_0$  με εξίσωση  $y = \sqrt{2}x$  δεν είναι ισοδύναμες.

Επομένως, σε κάθε αριθμό  $b$  αντιστοιχεί μια καλή ακολουθία (εκτός από τους αριθμούς  $b$  της μορφής  $m + n\sqrt{2}$ , στους οποίους αντιστοιχούν δύο διαφορετικές καλές ακολουθίες), και δύο ακολουθίες είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι αριθμοί  $b_1$  και  $b_2$  διαφέρουν κατά  $m + n\sqrt{2}$ . Αυτή είναι η πλήρης λύση του προβλήματος της ταξινόμησης.

**Άσκηση 12.** (α) Αποδείξτε ότι το σύνολο των καλών ακολουθιών είναι άπειρο.

(β) Βρείτε έναν τύπο που θα δίνει τη θέση της  $i$ -οστής μονάδας στην ακολουθία που αντιστοιχεί στον αριθμό  $b$ .

(γ) Βρείτε τον αριθμό  $b$  για την ακολουθία  $S$  της Άσκησης 6.

Και τώρα, ας αποδείξουμε το Θεώρημα 2.

**Λήμμα.** Κάθε καλή πολυγωνική γραμμή μπορεί να τοποθετηθεί σε μια λωρίδα η οποία βρίσκεται μεταξύ δύο ευθειών με κλίση  $\sqrt{2}$ . Η ευθεία που αποτελεί το πάνω σύνορο αυτής της λωρίδας προέρχεται από την παράλληλη μετατόπιση της κάτω ευθείας

κατά το διάνυσμα  $(-1, 1)$ .

**Απόδειξη.** Ας προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τη  $\Lambda$  σε μια λωρίδα με τα χαρακτηριστικά που περιγράφει το λήμμα (την οποία θα καλούμε *λωρίδα κανονικού πλάτους*). Θεωρούμε μια ευθεία  $l_1$  με κλίση  $k = \sqrt{2}$  η οποία βρίσκεται πολύ ψηλά (πάνω από τη  $\Lambda$ ) και αρχίζουμε να τη μετακινούμε προς τα κάτω έως ότου προσεγγίσει τη  $\Lambda$ . (Καθώς μετακινούμε την ευθεία, μπορεί να εμφανιστεί μια κατάσταση κατά την οποία δεν θα εφάπτεται στην πολυγωνική γραμμή. Ταυτόχρονα, θα είναι αδύνατο να τη μετακινήσουμε προς τα κάτω, διότι διάφορα «δόντια» της πολυγωνικής γραμμής θα πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά της.) Εκτελούμε την ίδια πράξη με την κάτω ευθεία: Θεωρούμε μια ευθεία  $l_2$  με κλίση  $k = \sqrt{2}$  και τη μετακινούμε προς τα πάνω. Ισχυριζόμαστε ότι το πλάτος της λωρίδας που περιέχει τη  $\Lambda$  δεν είναι μεγαλύτερο του κανονικού. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η λωρίδα που περιέχει τη  $\Lambda$  είναι πλατύτερη. Μετακινούμε ελάχιστα τις ευθείες  $l_1$  και  $l_2$ , έτσι ώστε να πλησιάσουν περισσότερο μεταξύ τους. Τότε, η πολυγωνική γραμμή θα τέμνει τα σύνορα της λωρίδας, η οποία εξακολουθεί να έχει μεγαλύτερο πλάτος από το κανονικό. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο τμήμα της πολυγωνικής γραμμής που περιέχει τα σημεία τομής της με τις ευθείες  $l_1$  και  $l_2$ . Όμως, τα πεπερασμένα τμήματα της  $\Lambda$  είναι ταυτόσημα με τα πεπερασμένα τμήματα κάποιας πολυγωνικής γραμμής  $\Lambda_B(l)$  (δείτε την Άσκηση 7), η οποία μπορεί να τοποθετηθεί σε μια λωρίδα κανονικού πλάτους (αφήνουμε την απόδειξη αυτού του γεγονότος στους αναγνώστες). Συνεπώς καταλήγουμε σε αντίφαση, γεγονός που αποδεικνύει το λήμμα.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 2.** Τοποθετούμε την πολυγωνική γραμμή  $\Lambda$  ανάμεσα στις ευθείες  $l_1$  και  $l_2$  (κάτι που μπορούμε να κάνουμε λόγω του λήμματος). Τότε ισχύει είτε  $\Lambda = \Lambda_B(l_1)$  είτε  $\Lambda = \Lambda_A(l_2)$  είτε και τα δύο.

**Άσκηση 13.** Αποδείξτε τούτο το γεγονός.

Επομένως, το Θεώρημα 2 αποδείχτηκε.

## Συμπέρασμα

Ας συνοψίσουμε. Γνωρίσαμε ημι-περιοδικές ακολουθίες ενός ειδικού τύπου (που σχετίζονται με το μετασχηματισμό  $\Pi$ ). Επιπλέον, μελετήσαμε τη δομή πολυγωνικών γραμμών που προσεγγίζουν μια ευθεία γραμμή με κλίση  $\sqrt{2}$ .

Μπορούμε να συνεχίσουμε τη μελέτη μας προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη είναι να εξετάσουμε μετασχηματισμούς διαφορετικούς από τον  $\Pi$ . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το μετασχηματισμό  $\tilde{\Pi}$  ο οποίος απεικονίζει το 1 στο

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ μηδέν}}$$

και το 0 στο

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n-1 \text{ μηδέν}}$$

**Πρόβλημα 3.** Ταξινομήστε τις ακολουθίες που είναι καλές ως προς το μετασχηματισμό  $\tilde{\Pi}$ . Η περίπτωση είναι απολύτως όμοια με αυτή του μετασχηματισμού  $\Pi$ , με μόνη διαφορά ότι το ρόλο του  $\sqrt{2}$  παίζει ο αριθμός

$$\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} - 1.$$

**Πρόβλημα 4** (για περαιτέρω έρευνα —γεγονός το οποίο σημαίνει ότι οι συγγραφείς του άρθρου δεν γνωρίζουν την απάντηση). Αντί του  $\Pi$  θεωρήστε γενικότερους μετασχη-

ματισμούς (για παράδειγμα,

$$1 \rightarrow \underbrace{11 \dots 100 \dots 0}_{p \text{ μονάδες } q \text{ μηδέν}}$$

και

$$0 \rightarrow \underbrace{11 \dots 100 \dots 0}_{r \text{ μονάδες } s \text{ μηδέν}}$$

και άλλους παρόμοιους μετασχηματισμούς) και ταξινομήστε τις αντίστοιχες καλές ακολουθίες.

Η άλλη κατεύθυνση μελέτης είναι να θεωρήσουμε ευθείες με άλλες άρρητες κλίσεις  $k$ , και να μελετήσουμε πολυγωνικές διαδρομές που προσεγγίζουν τέτοιες ευθείες. Αποδεικνύεται ότι η δομή αυτών των πολυγωνικών ευθειών εξαρτάται από τον τρόπο αναπαράστασης του αριθμού  $k + 1$  ως *συνεχές κλάσμα*. Ιδού ένα παράδειγμα συνεχούς κλάσματος:

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Παρομοίως, το  $k + 1$  μπορεί να γραφεί ως

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

όπου τα  $n_i$  είναι φυσικοί αριθμοί. Η μελέτη των συνεχών κλασμάτων αποτελεί ένα ξεχωριστό και ενδιαφέρον θέμα. Δεν είναι δυνατόν να το

εξετάσουμε εδώ λόγω του περιορισμένου χώρου. Μια λεπτομερή ανάπτυξη του θέματος μπορείτε να διαβάσετε στο άρθρο των Y. Nesterenko και E. Nikishin στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 2000 του *Quantum*.

Ιδού το τελευταίο πρόβλημα.

**Πρόβλημα 5.** Εξετάστε τη δομή των πολυγωνικών γραμμών που προσεγγίζουν ευθείες γραμμές με άρρητη κλίση  $k$ . Για παράδειγμα, είναι προφανές ότι τέτοιες πολυγωνικές γραμμές αναλύονται σε τμήματα της μορφής

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n_1 \text{ μηδέν}}$$

και

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n_1-1 \text{ μηδέν}}$$

όπου  $n_1 = [k + 1]$ . Τι συμβαίνει όταν αντικαταστήσουμε κάθε τμήμα

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n_1 \text{ μηδέν}}$$

με το 1, και κάθε τμήμα

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n_1-1 \text{ μηδέν}} \text{ με το } 0;$$

Το πρόβλημα που μελετήσαμε στο άρθρο το έλυσε ο Alexander Sidorov, την εποχή που ήταν μαθητής στο Σχολείο 57 της Μόσχας. Παρουσίασε μια αναφορά γι' αυτό το πρόβλημα στο 19ο Συνέδριο Μαθητών στο Βατούμ της Γεωργίας (τον Νοέμβριο του 1988). Την 1η Ιουλίου του 1990, η ζωή του πήρε τραγικό τέλος. Αφιερώνουμε το παρόν άρθρο στη μνήμη του.



### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το *Quantum* εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 40 τεύχη του. Αντά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

# Μια σύντομη ιστορία των κλασμάτων

«Εάν κόψεις ένα ακέραιον εις μέρη και απ' αυτά τα μέρη να πάρεις τινά, αυτό λέγεται τζάκισμα, ήγουν ένα μέρος.»

—Από τον ορισμό του κλάσματος (τζακίσματος)  
στην Πρακτική Αριθμητική του Μανουήλ Γλυζωνίου, Βενετία, 1569

N.Ya. Vilenkin

**Τ**Ο ΠΡΩΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΑΝ ΟΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ ΉΤΑΝ ΤΟ ΜΙΣΟ. Ενώ τα ονόματα όλων των άλλων κλασμάτων σχετίζονται με το όνομα του αριθμού στον παρονομαστή τους (ένα τρίτο, ένα τέταρτο, κ.λπ.), δεν συμβαίνει το ίδιο και με το μισό. Σε πολλές γλώσσες, η ο-

νομασία του δεν έχει τίποτα το κοινό με τη λέξη για το δύο. Το επόμενο κλάσμα ήταν το τρίτο. Αυτά και μερικά ακόμη κλάσματα συναντώνται στα αρχαιότερα μαθηματικά κείμενα που έχουν διασωθεί, τα οποία γράφηκαν πριν από 5000 τουλάχιστον έτη σε αιγυπτιακούς παπύρους

και βαβυλωνιακές πήλινες πινακίδες. Και οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα  $1/3$  και  $2/3$ , διαφορετικό από το συμβολισμό των άλλων κλασμάτων.

Οι Αιγύπτιοι προσπαθούσαν να γράφουν όλα τα κλάσματά τους ως



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

αθροίσματα κλασμάτων της μονάδας<sup>1</sup>, δηλαδή, κλασμάτων της μορφής  $1/n$ . Η μοναδική εξαίρεση ήταν το  $2/3$ . Για παράδειγμα, τα  $8/15$  γράφονταν ως  $1/3 + 1/5$ . Αυτό μερικές φορές αποδεικνυόταν βολικό. Για παράδειγμα, ο πάπυρος του Rhind περιέχει το εξής πρόβλημα: *Μοιράστε επτά καρβέλια σε οκτώ ανθρώπους*. Αν κόψουμε κάθε καρβέλι σε 8 μέρη, θα χρειαστούν 49 τομές —περισσότερες από όσες είναι απαραίτητες. Οι Αιγύπτιοι έλυσαν το πρόβλημα ως εξής. Έγραψαν το  $7/8$  ως  $1/2 + 1/4 + 1/8$ . Τώρα είναι φανερό ότι 4 καρβέλια πρέπει να χωριστούν στα δύο, 2 καρβέλια στα τέσσερα και μόνο 1 στα οκτώ —επομένως, χρειάζονται συνολικά 17 τομές.

Ωστόσο, η πρόσθεση κλασμάτων γραμμένων ως αθροίσματα κλασμάτων της μονάδας ήταν άβολη. Όταν εμφανιζόταν το ίδιο κλάσμα της μονάδας και στους δύο όρους, το άθροισμα περιείχε το απαγορευόμενο κλάσμα  $2/n$ . Γι' αυτό το λόγο, ο πάπυρος του Rhind ξεκινά με έναν πίνακα στον οποίο όλα τα κλάσματα της μορφής  $2/n$ , από το  $2/3$  έως το  $2/101$  γράφονται ως άθροισμα κλασμάτων της μονάδας. Ο ίδιος πίνακας χρησιμοποιείται για τη διαίρεση των ακεραίων. Για παράδειγμα, ιδού ο τρόπος διαίρεσης του 5 διά του 21:

$$\begin{aligned} \frac{5}{21} &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} \\ &= \frac{1}{21} + \left( \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \right) + \left( \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \right) \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} = \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν επίσης να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν κλάσματα. Για να τα πολλαπλασιάσουν, τα εξέφραζαν ως αθροίσματα κλασμάτων της μονάδας, τα οποία στη συνέχεια πολλαπλασίαζαν. Και σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν να εμφανιστούν δύο όμοια κλάσματα της μονάδας, οπότε και πάλι

1. Δείτε το άρθρο «Αιγυπτιακά κλάσματα» στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1990.

χρησιμοποιούσαν τον πίνακα με τα κλάσματα της μορφής  $2/n$ .

Οι Βαβυλώνιοι εφαρμόζαν μια διαφορετική προσέγγιση. Χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα (σύστημα αρίθμησης με βάση το 60). Έτσι, μια μονάδα σε κάποια θέση ήταν εξήντα φορές μεγαλύτερη από τη μονάδα στην προηγούμενη θέση. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός  $14^{\circ}42'38$  ισοδυναμούσε με το  $14 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60 + 38$ , δηλαδή με τον αριθμό 52958 του δικού μας συστήματος (φυσικά, τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι για τα ψηφία ήταν διαφορετικά από τα δικά μας: ως βάση είχαν σφηνοειδείς χαρακτήρες). Τα βαβυλωνιακά κλάσματα ήταν επίσης εξηκονταδικά. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε ακόμα τέτοια κλάσματα όταν μετράμε χρόνο και γωνίες. Για παράδειγμα, η ώρα 3ω 17λ 28δ, μπορεί να γραφτεί ως  $3,17'28''$  και διαβάζεται ως *τρεις ώρες 17 εξηκοστά και 28 τρισηχλιάδες εξακοισοστά της ώρας*. Αντί των λέξεων εξηκοστά και τρισηχλιάδες εξακοισοστά χρησιμοποιούσαν τους συντομότερους όρους *πρώτο μικρό μέρος* και *δεύτερο μικρό μέρος*, απ' όπου προέρχονται και οι δικοί μας όροι *πρώτο λεπτό* και *δεύτερο λεπτό*.

Είναι αδύνατο να γράψουμε κάθε κλάσμα ως πεπερασμένο εξηκονταδικό κλάσμα (όπως ακριβώς δεν γράφεται κάθε κλάσμα ως πεπερασμένο δεκαδικό κλάσμα). Για παράδειγμα, τα  $1/7$ ,  $1/11$  και  $1/13$  δεν γράφονται ως πεπερασμένα εξηκονταδικά κλάσματα. Είναι δυνατόν όμως να προσεγγιστούν από πεπερασμένα εξηκονταδικά κλάσματα με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Με αυτό τον τρόπο τα έγραφαν οι Βαβυλώνιοι.

Εξηκονταδικά κλάσματα χρησιμοποιούσαν επίσης οι Έλληνες και οι Άραβες μαθηματικοί και αστρονόμοι. Όμως, η χρήση δεκαδικού συμβολισμού για τους ακεραίους και εξηκονταδικού για τα κλάσματα προκαλούσε προβλήματα. Οι υπολογισμοί με κλάσματα ήταν ακόμη πιο δύσκολοι: για παράδειγμα, προσπαθήστε να προσθέσετε ή να πολλαπλασιάσετε τα  $785/2213$  και  $8917/3411$ .

Γι' αυτό το λόγο, το 1585 ο ολλανδός μαθηματικός και μηχανικός Si-

mon Stevin πρότεινε τη χρήση των δεκαδικών κλασμάτων. Αρχικά, ο συμβολισμός ήταν μάλλον δύσχρηστος, αλλά σταδιακά επικράτησε ο σύγχρονος συμβολισμός. Εκατόν πενήντα χρόνια πριν τον Stevin, ο αστρονόμος Jamshid al-Kashi, ο οποίος εργαζόταν στο αστροσκοπείο που ίδρυσε ο τάταρος βασιλιάς Ulugh Beg (βασιλεία 1447-49) στη Σαμαρκάνδη, χρησιμοποίησε δεκαδικά κλάσματα, η εργασία του όμως παρέμεινε άγνωστη στους ευρωπαϊούς μαθηματικούς.

Στις μέρες μας, χρησιμοποιούμε στους υπολογιστές δυαδικά κλάσματα. Στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, η μονάδα μιας θέσης είναι διπλάσια της μονάδας της προηγούμενης θέσης. Για παράδειγμα, το 100101 συμβολίζει τον αριθμό  $1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 37$ . Αυτός ο συμβολισμός, αν και αρκετά μακρύς, χρησιμοποιεί δύο μόνο ψηφία. Αυτό το είδος συμβολισμού υλοποιείται εύκολα σε έναν υπολογιστή μέσω του ηλεκτρικού ρεύματος. Για παράδειγμα, το ψηφίο 1 μπορεί να αντιπροσωπεύεται από το ρεύμα που διέρχεται μέσω μιας πύλης, ενώ το 0 από την απουσία τέτοιου ρεύματος. Παράδειγμα δυαδικού κλάσματος είναι το 0,101101. (Προσπαθήστε να γράψετε αυτό το κλάσμα στο δεκαδικό σύστημα.) Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι στην παλιά Ρωσία τα δυαδικά κλάσματα ήταν συνήθη, και χρησιμοποιούνταν κλάσματα όπως *μισό, τέταρτο, μισό τέταρτο, μισό του μισού τέταρτου*, κ.ο.κ.

Ένα ενδιαφέρον σύστημα κλασμάτων συναντάμε στην αρχαία Ρώμη. Βασίζόταν στη διαίρεση της μονάδας βάρους, του ασσαρίου (λατινικά: *as*, ή *assarius*), σε 12 μέρη. Το ένα δωδέκατο του *as* ονομαζόταν *uncia* (ουγκιά). Η απόσταση και ο χρόνος αντιμετωπιζόνταν κατ' αναλογία με το οικείο σύστημα σταθμών. Για παράδειγμα, ένας Ρωμαίος θα έλεγε ότι είχε διασχίσει 7 ουγκιές ενός δρόμου ή ότι είχε διαβάσει 5 ουγκιές ενός βιβλίου, εννοώντας ότι είχε διασχίσει τα  $7/12$  του δρόμου ή ότι διάβασε τα  $5/12$  του βιβλίου, αντίστοιχα. Χρησιμοποιούσαν ειδικές ονομασίες για τα ανάγωγα κλάσματα που προέκυπταν από συγκεκριμένο πλήθος δωδεκά-



των, καθώς και γι' αυτά που προέκυπταν από τη διαίρεση των δωδεκάτων σε ακόμη μικρότερες μονάδες. Το 1/288 του ασαρίου ονομαζόταν *scrupulus*. Άλλες ονομασίες που χρησιμοποιούσαν ήταν *semis* (μισό του *as*), *sextans* (1/6 του *as*), *semiuncia* (μισό της *uncia*, ή 1/24 του *as*), κ.ο.κ. Χρησιμοποιούσαν δεκαοκτώ διαφορετικά ονόματα. Οι πράξεις με κλάσματα γίνονταν με τη βοήθεια πινάκων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Έτσι, ένας ρωμαίος έμπορος απομνημόνευε ότι η πρόσθεση ενός *triens* (1/3 του *as*) και ενός *sextans* δίνει ένα *semis*, ενώ ο πολλαπλασιασμός ενός *bes* (2/3 του *as*) επί μία *sesquiuncia* (3/2 της *uncia*, ή 1/8 του *as*) δίνει μια ουγκιά. Φυσικά, αντιλαμβανόντουσαν πλήρως ότι αυτό που πολλαπλασιάζαν δεν ήταν τα ίδια τα βάρη αλλά κλάσματα που αντιπροσώπευαν ένα συγκεκριμένο βάρος. Για να διευκολύνουν τους υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν ειδικούς πίνακες, μερικοί από τους οποίους έχουν διασωθεί.

Συνεπώς, στην αρχαία Ρώμη ο αριθμός 12 έπαιζε τον ίδιο ρόλο με τον αριθμό 60 στη Βαβυλώνα και το 2 στην παλιά Ρωσία. Το ρωμαϊκό σύστημα μέτρων και σταθμών ήταν δω-

δεκαδικό, αλλά το σύστημα αρίθμησης ήταν δεκαδικό (αν και διαφορετικό από το σύγχρονο). Αφού οι αριθμοί της μορφής 1/10<sup>n</sup> δεν μπορούν να παρασταθούν ως πεπερασμένα δωδεκαδικά κλάσματα, οι Ρωμαίοι δεν μπορούσαν να γράψουν με τη μορφή κλάσματος το αποτέλεσμα της διαίρεσης ενός αριθμού διά του 10, του 100, κ.λπ. Για παράδειγμα, ιδού πώς θα διαιρούσε ένας ρωμαίος μαθηματικός το 1001 διά του 100. Πρώτα θα έγγραφε το ακέραιο μέρος, δηλαδή 10 *as*. Μετά θα διαιρούσε το 1 *as* του υπολοίπου σε *unciae*, κ.λπ. Πάντοτε όμως θα έμενε κάποιο υπόλοιπο.

Υπάρχουν έργα της κλασικής περιόδου των αρχαίων Ελλήνων όπου δεν εμφανίζονται κλάσματα: για παράδειγμα, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, όπου υπάρχει μελέτη της θεωρίας αριθμών, εξετάζονται μόνο ακέραιοι αριθμοί. Τα κλάσματα ήταν κυρίως για τους εμπόρους και τους τεχνίτες, τους αστρονόμους και τους μηχανικούς. Ωστόσο, τα κλάσματα εισήλθαν στα επιστημονικά έργα από πλάγιο δρόμο. Τα ελληνικά μαθηματικά, εκτός από την αριθμητική και τη γεωμετρία, περιελάμβαναν τη *μουσική*. Σε αυτή μελετούσαν, μεταξύ των άλλων, τους λόγους και τις αναλογίες.

Πώς προήλθε αυτή η παράξενη κατάσταση; Οι Έλληνες είχαν αναπτύξει μια επιστημονική θεωρία της μουσικής. Γνώριζαν ότι όσο μακρύτερη είναι μια χορδή τόσο χαμηλότερο ήχο παράγει, ενώ όσο κοντότερη είναι τόσο οξύτερο ήχο. Τα μουσικά όργανα έχουν συνήθως αρκετές χορδές. Για να ηχούν αρμονικά, τα μήκη των χορδών τους πρέπει να έχουν συγκεκριμένη σχέση. Παραδείγματος χάριν, για να διαφέρει κατά μία οκτάβα το ύψος των ήχων που παράγουν δύο χορδές, το μήκος τους πρέπει να έχει λόγο 1 + 2. Παρομοίως, ο λόγος 2 + 3 αντιστοιχεί στο διάστημα πέμπτης, και ο λόγος 3 + 4 στο διάστημα τετάρτης. Έτσι, οι Έλληνες θεώρησαν ότι το κομμάτι της αριθμητικής που ασχολείται με τους λόγους και τα κλάσματα αποτελεί και τμήμα της μουσικής.

Το σύγχρονο σύστημα συμβολισμού των κλασμάτων με αριθμητή και παρονομαστή αναπτύχθηκε στην Ινδία. Όμως, οι Ινδοί έγγραφαν πάνω τον παρονομαστή και κάτω τον αριθμητή, χωρίς να χρησιμοποιούν τη γραμμή του κλάσματος. Οι πρώτοι που έγγραφαν τα κλάσματα ακριβώς όπως τα χρησιμοποιούμε σήμερα ήταν οι Άραβες. □

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΟΜΟΣ



Τόμος Α': 527 σελ., Α/Μ, 14 × 21 εκ., 7.500 δρχ.  
Τόμος Β': 440 σελ., Α/Μ, 14 × 21 εκ., 7.000 δρχ.

Eduard Driault

### ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών

Ο Eduard Driault (1864-1947), Καθηγητής Ιστορίας στη Σορβόνη, δημοσίευσε συμπληρωμένο το μνημώδες έργο του *Το Ανατολικό Ζήτημα* το 1921. Από τότε, το βιβλίο του θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση όλων εκείνων των βαθύτερων αιτιών που προκάλεσαν, και εξακολουθούν να προκαλούν, εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και των κρατών, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη. Σ' αυτό εξετάζεται αναλυτικά και σφαιρικά η ιστορία του Ανατολικού ζητήματος, από τις απαρχές του κατά τους χρόνους του Βυζαντίου, την παγίωσή του επί Οθωμανικής Αυτοκρατορίας, μέχρι και τη Συνθήκη των Σεβρών (1920). Άξιο προσοχής είναι ότι μελετά το συγκρουσιακό πρότυπο που ορίζει τις σχέσεις των Μεγάλων Δυνάμεων, με όλες τις εναλλαγές τους κατά τις διάφορες ιστορικές περιόδους, αλλά και τη δυναμική που αναπτύσσεται στο διεθνές πολιτικό πεδίο. Ενδιαφέρει ιδιαίτερος τον σύγχρονο αναγνώστη, διότι στις σελίδες του εξηγούνται σημερινές καταστάσεις και προβλήματα της Βαλκανικής χερσονήσου και των λαών της.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Tycho Brahe

Ο άρχοντας του Ουράνιμποργκ

J.D. Haines

**Ο** ΣΟ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΘΥΜΗΘΕΙ ΤΟΝ ΕΥΑΤΟ ΤΟΥ, Ο Tycho λάτρευε να παρατηρεί τα άστρα. Παρακολουθώντας τα νύχτες ατελείωτες, τη μία πίσω από την άλλη, αντιλήφθηκε κάποιες κανονικότητες στην κίνησή τους. Πρέπει να υπάρχει ένας τρόπος να κατανοήσω την κίνηση των άστρων, σκέφτηκε· και κάποιος τρόπος για να μετρήσω πόσο μακριά βρίσκονται. Περισσότερο από καθετί άλλο, ο Tycho ποθούσε να μελετήσει τους ουρανοί.

Το 1546, τη χρονιά που γεννήθηκε στη Σουηδία ο Tycho Brahe, πολύ λίγα ήταν γνωστά για την αστρονομία. Οι άνθρωποι εξακολουθούσαν να πιστεύουν πως το σύμπαν το κυβερνούσαν οι νόμοι του Αριστοτέλη, του περίφημου αρχαίου Έλληνα φιλοσόφου. Ο Αριστοτέλης είχε δεχτεί ότι η Γη αποτελούσε το κέντρο του σύμπαντος· είχε επίσης ισχυριστεί ότι το γίγνεσθαι δεν αγγίζει τα ουράνια, που έτσι παραμένουν εσαεί αμετάβλητα. Ο Tycho επέπρωτο να αλλάξει τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι κατανοούσαν το σύμπαν.

Ο πατέρας του Tycho ήταν ευγενής, και η οικογένειά του ζούσε σε ένα κάστρο. Η μητέρα του ήταν επικεφαλής της ακολουθίας της Βασίλισσας. Ο Tycho υπήρξε το πρώτο παιδί του ζεύγους. Όμως, κάτι το εξαιρετικά περίεργο συνέβη όταν γεννήθηκε ο μικρότερος αδελφός του. Ο θεός του Tycho, ένας σημαντικός δανός ναύαρχος, και η σύζυγός του είχαν μείνει άτεκνοι, και λαχταρούσαν να αποκτήσουν ένα παιδί, έστω και θετό. Έτσι, λοιπόν, αποφάσισαν να υιοθετήσουν τον Tycho. Αντί όμως να ζητήσουν τη συγκατάθεση των γονέων του στα σχέδιά τους, τον απήγαγαν λίγο μετά τη γέννηση του αδελφού του.

Στο πλαίσιο της οικογένειας συνήφθη τελικά μια συμφωνία που επέτρεπε στο θείο και τη γυναίκα του να αναθρέψουν τον Tycho σαν δικό τους γιο. Όσο για τους πραγματικούς του γονείς, απέκτησαν εκτός από εκείνον δέκα ακόμη παιδιά. Μόνο ένα όμως από τα έντεκα προοριζόταν να δοξαστεί. Ο Tycho δεν λησμόνησε ποτέ τον ενθουσιασμό που του ενέπνεαν τα άστρα. Στα δεκαπέντε του, εγκατέλειψε το σπίτι του θείου για να φοιτήσει στο



πανεπιστήμιο. Ανακοίνωσε στο θείο του ότι σκόπευε να σπουδάσει αστρονομία.

«Και τι είναι αυτή η αστρονομία;» ρώτησε ο θείος. «Ανόητο αγνάπημα των άστρων; Γιά σοβαρέψου σε παρακαλώ. Εσύ είσαι ευγενής. Χρειάζεσαι ένα αληθινό επάγγελμα. Πρέπει να ασχοληθείς με τα νομικά και τη διοίκηση του κράτους. Έχω ήδη λάβει την απόφαση: θα

σπουδάσεις νομικά στη Λειψία».

Ο Tycho απογοητεύθηκε βαθιά. Δεν είχε σκοπό να αναλώσει τη ζωή του σκυμμένος πάνω από πληκτικά, σκονισμένα νομικά βιβλία. Το πάθος του ήταν τα ουράνια σώματα. Ήξερε, όμως, ότι το να διαφωνήσει ανοιχτά με τις βουλές του θείου του δεν θα οδηγούσε πουθενά. Έτσι, λίγο μετά την άφιξή του στο πανεπιστήμιο, αγόρασε κρυφά βιβλία αστρονομίας και βάλθηκε να τα μελετά, περιφρονώντας τελειώς τα νομικά. Λίγο προτού αναχωρήσει από τη Δανία, ο Tycho είχε την ευτυχία να παρακολουθήσει μια μερική έκλειψη Ηλίου. Όταν έφτασε σε ηλικία δεκαεννέα ετών, ο θείος του πέθανε. Έτσι, ο Tycho ήταν πλέον ελεύθερος να αφοσιωθεί στη σπουδή της αστρονομίας χωρίς να κρύβεται.

Ως νεαρός, ο Tycho είχε εκρηκτικό ταμπεραμέντο. Κάποτε ενεπλάκη σε διαμάχη με έναν άλλο δανό ευγενή, η οποία κατέληξε σε μονομαχία. Αγωνίστηκαν μεταξύ τους με σπάθες. Ευτυχώς, επέζησαν και οι δύο. Ο Tycho, όμως, έχασε ένα μέρος από τη μύτη του. Παράγγειλε να του φτιάξουν μια τεχνητή μύτη από χρυσό και ασήμι, που τη φορούσε σε όλη την υπόλοιπη ζωή του. Στον τομέα της αστρονομίας, ο Tycho έθεσε ως πρώτο του στόχο να βελτιώσει τα πενιχρά τότε διαθέσιμα όργανα για την παρατήρηση των άστρων. Η μεγαλύτερή του ανακάλυψη ονομαζόταν κρικωτή σφαίρα. Είχε ένα δακτύλιο διαμέτρου εννέα ποδών (2,7 μέτρων) και χρησίμευε για τον ακριβή εντοπισμό των άστρων.

Ο Tycho περνούσε όλες του τις νύχτες χαρτογραφώντας τον ουρανό με τα όργανά του. Τότε, στις 11 Νοεμβρίου του 1572, έκανε μια απίστευτη ανακάλυψη. Παρατήρησε ένα «καινούργιο» άστρο το ίδιο φωτεινό με την Αφροδίτη. Σήμερα γνωρίζουμε ότι είχε δει ένα σουπερνόβα, έναν μεταβλητό αστέρα ο οποίος αυξάνει απότομα τη φωτεινότητά του προτού σκοτεινιάσει για πάντα. Αυτή η ανακάλυψη επέτρεψε στον Tycho να πραγματοποιήσει δύο καίριας σημασίας επιτεύγματα. Κατά πρώτον, απέδειξε ότι στα ουράνια συντελούνται πράγματι μεταβολές, σε αντίθε-

ση με ό,τι πρόσβευε το αριστοτελικό δόγμα. Κατά δεύτερον, με τις μετρήσεις που διεξήγαγε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το καινούργιο άστρο απείχε από τη Γη όσο και τα υπόλοιπα.

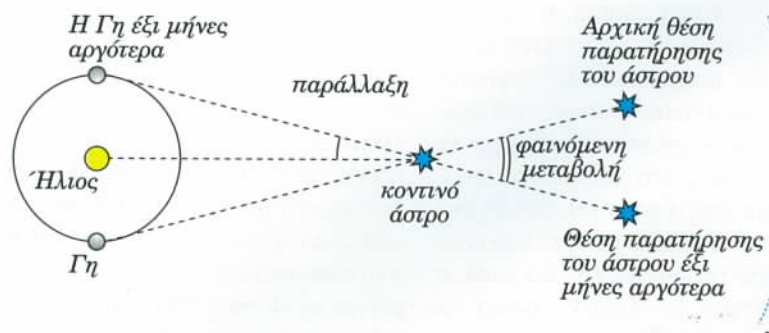
Στα είκοσι επτά του, ο Tycho θεωρούνταν ο δεινότερος αστρονόμος σε ολόκληρη την Ευρώπη. Ο βασιλιάς της Δανίας του παραχώρησε τη νήσο Βεν και του έχτισε εκεί ένα κάστρο, που εκείνος το μετέτρεψε στο μεγαλύτερο αστεροσκοπείο παγκοσμίως. Ο Tycho ονόμασε το αστεροσκοπείο του Ουράνιμποργκ, που σημαίνει «κάστρο των ουρανών». Η επόμενη μεγάλη του ανακάλυψη υπήρξε η παρατήρηση του κομήτη του 1577, η οποία έθεσε σε ακόμη μεγαλύτερη αμφισβήτηση το αριστοτελικό δόγμα του στατικού σύμπαντος. Για μια ολόκληρη εικοσαετία ο Tycho δίδασκε αστρονομία και χαρτογραφούσε επιμελώς τον ουρανό. Εγγάρασε τις θέσεις των άστρων σε ορειχάλκινες πλάκες που κάλυπταν μian ουράνια σφαίρα διαμέτρου πέντε ποδών (1,5 περίπου μέτρου).

Ο Tycho εισήγαγε πρώτος και μια μέθοδο για τη μέτρηση των αποστάσεων των άστρων που ονομάζεται αστρική παράλλαξη. Πρόσεξε ότι ένα κοντινό άστρο που παρατηρείται από αντιδιαμετρικά σημεία της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο φαίνεται να αλλάζει θέση (βλ. Σχήμα 1). Αν κανείς υπολογίσει με τη βοήθεια ενός μαθηματικού τύπου την παράλλαξη, δηλαδή τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η τροχιά της Γης από το άστρο, τότε είναι δυνατόν να προσδιορίσει την απόσταση του άστρου από τη Γη.

Ο Tycho εξαναγκάστηκε να εγκα-

ταλείψει το Ουράνιμποργκ όταν πέθανε ο βασιλιάς που τον υποστήριζε. Μετακινήθηκε στην Πράγα, όπου κατέλαβε τη θέση του αυτοκρατορικού μαθηματικού στην υπηρεσία του αυτοκράτορα Ροδόλφου Β'. Ο Tycho είχε πλέον γεράσει, και χρειαζόταν τη συνδρομή κάποιου νεότερου για να συνεχίσει το έργο της ζωής του. Γνώρισε τον Johannes Kepler, ο οποίος έγινε βοηθός και κληρονόμος του. Μετά το θάνατο του Tycho, το 1601, ο Kepler βρέθηκε στην πολύ ευχάριστη θέση να μπορεί να επεξεργαστεί τις παρατηρήσεις για την τροχιά του Άρη του εκλιπόντος, οι οποίες του επέτρεψαν να διατυπώσει τους γνωστούς νόμους του για την κίνηση των πλανητών. Στη συνέχεια, οι ανακαλύψεις του Kepler οδήγησαν στη διατύπωση του νευτώνειου νόμου της παγκόσμιας έλξης και στην εξήγηση της λειτουργίας του ηλιακού συστήματος με τη βοήθεια της βαρύτητας. Το έργο του Νεύτωνα, με τη σειρά του, έπαιξε το ρόλο του εφαλτηρίου για το μεγάλο άλμα που πραγματοποίησε κατά τον 20ό αιώνα ο Αϊνστάιν διατυπώνοντας τη θεωρία της σχετικότητας.

Όπως και να έχει, η αγάπη του Tycho για τα άστρα και οι προσεκτικές παρατηρήσεις του υπήρξαν αυτές που έθεσαν τις βάσεις για πολλές από τις ιστορικές ανακαλύψεις τις οποίες πραγματοποίησαν οι μεταγενέστεροι αστρονόμοι. Έχει λεχθεί ότι η κάθε γενιά καταφέρνει να δει λίγο μακρύτερα μέσα στο άγνωστο, μόνο και μόνο επειδή πατά στους ώμους της προηγούμενης. Αλλά και σήμερα υπάρχουν πολλοί επιστήμονες που πατούν στους ώμους του Tycho. ■



Σχήμα 1

# Πίεση πεδίου

Προβλήματα που αφορούν τα στατικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία

A. Chernoutsan

**Κ**ΟΙΤΑΖΟΝΤΑΣ ΤΟΝ ΤΙΤΛΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ άρθρου, πιθανόν να σκεφτήκατε ότι θα αφορά τη λεγόμενη πίεση του φωτός (το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Δεν αποκλείεται να έχετε συναντήσει το εν λόγω φαινόμενο στα βιβλία σας της φυσικής. Τη φύση της πίεσης της φωτεινής ακτινοβολίας μπορείτε να την κατανοήσετε σχετικά εύκολα αν έχετε κάνει κτήμα σας τη διττή φύση του φωτός, το οποίο μπορεί να ιδωθεί τόσο ως κύμα όσο και ως ροή σωματιδίων (φωτονίων), που φυσικά έχουν ορμή. Όταν τα φωτόνια που προσπίπτουν σε ένα αντικείμενο ανακλώνται ή απορροφούνται, η ορμή τους μεταβάλλεται, κάτι το οποίο σημαίνει ότι στο αντικείμενο ασκείται κάποια δύναμη.

Σ' αυτή την προσέγγιση του φαινομένου, πραγματευόμαστε την πίεση του φωτός όπως ακριβώς την πίεση ενός ιδανικού αερίου, η οποία εξηγείται στο πλαίσιο της κινητικής θεωρίας ως μακροσκοπική έκφραση των προσκρούσεων μορίων στα τοιχώματα του δοχείου που περιέχει το αέριο. Αν, όμως, επιχειρήσουμε να εξηγήσουμε την πίεση του φωτός χωρίς να εξέλθουμε από τα όρια της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, η εμφάνιση των δυνάμεων πρέπει να συνδεθεί με το πώς δρα στα ευθύγραμμα και ομαλά κινούμενα φορτία

της ουσίας το μαγνητικό πεδίο του κύματος, το οποίο επάγεται από την άλλη συνιστώσα του κύματος —το ηλεκτρικό του πεδίο.

Ωστόσο, δεν πρόκειται να εμπλακούμε σε μια τέτοια τεχνική συζήτηση για την πίεση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, επειδή το παρόν άρθρο αφορά κάτι εντελώς διαφορετικό —την πίεση των *στατικών* πεδίων (είτε ηλεκτρικά είτε μαγνητικά είναι αυτά). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, προφανώς, κανείς λόγος δεν μπορεί να γίνει για μεταβολές της ορμής, οπότε και ο ίδιος ο όρος «πίεση» πρέπει να αντιμετωπίζεται με επιφύλαξη. Εντούτοις, η εν λόγω έννοια εμφανίζεται συχνά-πυκνά στα περιοδικά και τα βιβλία εκλαΐκευσης της επιστήμης. Για παράδειγμα, όταν διαβάζουμε για την παραγωγή εξαιρετικά ισχυρών μαγνητικών πεδίων, πληροφορούμαστε ότι ένα από τα βασικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν συνίσταται στην πίεση την οποία ασκεί το πεδίο στα τοιχώματα του σωληνοειδούς. Πρόκειται για πρόβλημα που συνδέεται στενά με την ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη, όπου το καυτό πλάσμα πρέπει να κρατηθεί «υπό περιορισμό» από ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο (μαγνητική φιάλη). Ωστόσο, θα προτιμήσουμε να αρχίσουμε όχι με το μαγνητικό πεδίο, αλλά με τον παλιό μας γνώριμο, το ηλεκτρικό πεδίο.

## Η πίεση του ηλεκτρικού πεδίου

Ξεκινάμε από την περίπτωση όπου κάποιο ηλεκτρικό πεδίο ασκεί πίεση σε μια φορτισμένη επιφάνεια. Η πίεση αυτή εμφανίζεται όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου λαμβάνει διαφορετικές τιμές στις δύο όψεις της επιφάνειας. Ως συνήθως, το απλούστερο δυνατό παράδειγμα μας το προσφέρει ο φορτισμένος πυκνωτής με επίπεδους και παράλληλους οπλισμούς. Στο εσωτερικό ενός τέτοιου πυκνωτή, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την έκφραση

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

όπου με  $\sigma = q/S$  δηλώνουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου των δύο πλακών που παίζουν το ρόλο των οπλισμών. Όταν υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκείται σε ένα τμήμα μοναδιαίου εμβαδού κάποιας από τις πλάκες, χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μόνο το πεδίο το οποίο παράγει η άλλη πλάκα ( $E/2$ ), διότι η ίδια η πλάκα δεν νοείται να ασκεί δύναμη στον εαυτό της:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{E}{2}\sigma = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε.



The magnetic yoke: press and pull

Тимков 2010

Πρώτον, η πίεση εκφράζεται συναρτήσει αποκλειστικά και μόνο της έντασης του πεδίου που υπάρχει από τη μία πλευρά της πλάκας (το πεδίο έξω από τον πυκνωτή είναι αμελητέο). Δεύτερον, η δύναμη που ασκείται στην πλάκα κατευθύνεται προς το εσωτερικό του πυκνωτή —δηλαδή, οι δύο πλάκες έλκονται αμοιβαίως. Τούτο σημαίνει ότι, αν θέλουμε να αποδώσουμε πίεση στο ηλεκτρικό πεδίο, θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε την εν λόγω πίεση ως αρνητική. Με άλλα λόγια, το ηλεκτρικό πεδίο δεν «αποωθεί» τα αντικείμενα, τα «έλκει». Και τρίτον, η πίεση του πεδίου ισούται —κατ' απόλυτη τιμή— με την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου,  $U$ , η οποία βρίσκεται αποθηκευμένη στον πυκνωτή:

$$P = -u = -\frac{U}{V} = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1)$$

Τα ανωτέρω χαρακτηριστικά του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να επεξηγηθούν με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς απομονωμένο από οποιαδήποτε ηλεκτρική πηγή. Έστω τώρα ότι ασκώντας μια εξωτερική δύναμη αυξάνουμε αργά την απόσταση μεταξύ των πλακών του κατά κάποια τιμή  $\Delta x$ . Εφόσον η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες παραμένει σταθερή (καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τη  $\sigma$ ), η ενέργεια του πεδίου αυξάνεται κατά  $uS\Delta x$ . Επομένως, η εξωτερική δύναμη παράγει θετικό έργο  $F\Delta x$ , ενώ η δύναμη λόγω της πίεσης του πεδίου πρέπει να εκτελεί αρνητικό έργο  $PS\Delta x$ . Κατά συνέπεια, η πίεση του ηλεκτρικού πεδίου είναι αρνητική, ενώ η απόλυτη τιμή της ισούται με την πυκνότητα της ηλεκτρικής ενέργειας.

Ο τύπος (1) ισχύει επίσης και στην περίπτωση φορτισμένης επιφάνειας οποιουδήποτε σχήματος, με την προϋπόθεση ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζεται σε μια από τις όψεις της. Ιδού ένα σημαντικό παράδειγμα: Σε ένα μικρότατο τμήμα κάποιας από τις επιφάνειες ενός πυκνωτή, το οποίο έχει εμβαδόν  $\Delta S$  και

όπου το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με  $E$ , ασκείται από τα έξω δύναμη  $\Delta F = (\epsilon_0 E^2/2)\Delta S$ . Ας μη μας απορροφήσει όμως η απόδειξη αυτού του τύπου, και ας προσπαθήσουμε να εξαγάγουμε το γενικό αποτέλεσμα: Αν τα ηλεκτρικά πεδία στις δύο όψεις μιας φορτισμένης επιφάνειας είναι  $E_1$  και  $E_2$ , τότε στην επιφάνεια δρα μια δύναμη με κατεύθυνση από την πρώτη προς τη δεύτερη περιοχή η οποία αντιστοιχεί στην πίεση

$$P = \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2}. \quad (2)$$

Ο ανωτέρω τύπος μπορεί να αποδειχθεί με τρεις τρόπους. Ο απλούστερος και φυσιολογικότερος τρόπος στηρίζεται στην ενέργεια. Μετατοπίζουμε νοητά την επιφάνεια κατά απόσταση  $\Delta x$  και εξισώνουμε το έργο της εξωτερικής δύναμης με τη μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου. (Το έργο το οφειλόμενο στην πίεση που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το έργο το οποίο εκτελεί η εξωτερική δύναμη, αλλά έχει αντίθετο πρόσημο.)

Είναι επίσης δυνατόν, όπως στην περίπτωση του πυκνωτή με τους επίπεδους και παράλληλους οπλισμούς, να διαχωρίσουμε τα εξωτερικά από τα εσωτερικά πεδία (Σχήμα 1). Υποθέστε ότι και τα δύο πεδία είναι κάθετα στη φορτισμένη επιφάνεια. Στην πραγματικότητα, η επαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου (εάν υπάρχει) πρέπει να έχει την ίδια τιμή και στις δύο όψεις της φορτισμένης επιφάνειας (πρόκειται για συμπέρασμα που απορρέει από τη διατηρητική φύση του ηλεκτροστατικού πεδίου —αποδειξτε το

μόνοι σας), οπότε ούτως ή άλλως δίνει μηδενική συνεισφορά στην έκφραση για την πίεση. Αν λοιπόν εισαγάγουμε το εσωτερικό πεδίο  $E_{εσ}$  και το εξωτερικό πεδίο  $E_{εξ}$ , μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} E_1 = E_{εξ} - E_{εσ}, \\ E_2 = E_{εξ} + E_{εσ}. \end{cases}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια δεν διαφέρει από το πεδίο που παράγει μια πλάκα με την ίδια πυκνότητα φορτίου  $\sigma$  —δηλαδή,  $E_{εσ} = \sigma/2\epsilon_0$ . Αντικαθιστώντας το  $E_{εσ}$  με αυτή την έκφραση στις δύο παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε αμέσως το  $E_{εξ}$  και τη  $\sigma$ :

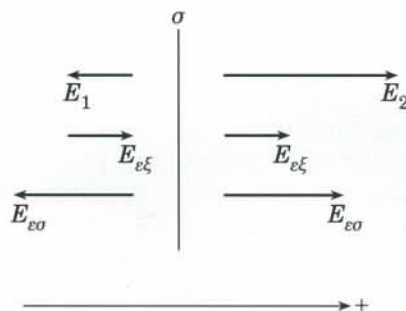
$$\begin{aligned} E_{εξ} &= \frac{E_1 + E_2}{2}, \\ \sigma &= \epsilon_0(E_2 - E_1), \end{aligned} \quad (3)$$

από όπου υπολογίζουμε την πίεση

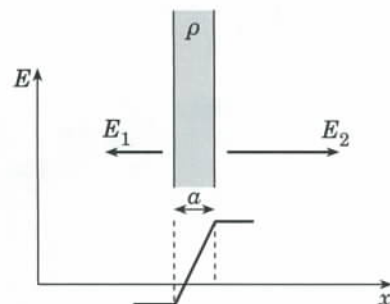
$$P = \sigma E_{εξ},$$

καταλήγοντας σε μια έκφραση ταυτόσημη με τον τύπο (2).

Για να υπογραμμίσουμε ακόμη περισσότερο το γεγονός ότι την πίεση την καθορίζει αποκλειστικά το ολικό πεδίο, ενώ ο διαχωρισμός του πεδίου σε εσωτερικό και εξωτερικό αποτελεί απλώς ένα βολικό μαθηματικό τέχνασμα, ας θεωρήσουμε τη δύναμη που ασκείται σε ένα λεπτό στρώμα χωρικού φορτίου (Σχήμα 2). Στο εσωτερικό του στρώματος, η ένταση του πεδίου βαθμιαία μεταβάλλει την τιμή της από  $E_1$  στη μια επιφάνεια σε  $E_2$  στην άλλη. Αν η χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho$  θεωρηθεί σταθερή, η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται γραμμικά, και η δύναμη που ασκείται σε ένα τμήμα του



Σχήμα 1



Σχήμα 2

στρώματος εμβαδού  $S$  μπορεί να εκφραστεί μέσω της μέσης έντασης του πεδίου:

$$F = \sigma S \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$= \epsilon_0 (E_2 - E_1) S \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$= \left( \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \right) S,$$

όπου η  $\sigma = \rho a$  αντιπροσωπεύει το φορτίο ενός τμήματος του στρώματος με μοναδιαίο εμβαδόν επιφανείας. Η σχέση που συνδέει τα  $\sigma$ ,  $E_1$  και  $E_2$  μπορεί να εξαχθεί με τη βοήθεια του νόμου του Gauss (για περισσότερες λεπτομέρειες, συμβουλευθείτε τις αναφορές που παρατίθενται στο τέλος του άρθρου) ή με την εισαγωγή του εξωτερικού και του εσωτερικού πεδίου, όπως έγινε στην εξαγωγή του τύπου (3).

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση  $\rho(x)$  θεωρείται αυθαίρετη, διαιρούμε το στρώμα σε πολλούς λεπτότατους φλοιούς πάχους  $dx$  και αθροίζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον καθένα από αυτούς (Σχήμα 3):

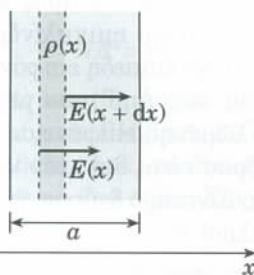
$$F = \int_0^a E(x) \rho(x) S dx.$$

Η μεταβολή της έντασης του πεδίου από τον ένα φλοιό στον επόμενο ισούται με

$$dE = \frac{\rho dx}{\epsilon_0},$$

σχέση η οποία εξάγεται είτε βάσει του νόμου του Gauss είτε με τη βοήθεια της εξίσωσης (3). Έτσι, για την πίεση βρίσκουμε

$$P = \frac{F}{S} = \int_1^2 E \epsilon_0 dE = \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2}.$$



Σχήμα 3

Εν προκειμένω, οφείλουμε να σας επιστήσουμε την προσοχή σε μια σπουδαία λεπτομέρεια: Στην περίπτωση του χωρικού φορτίου, δεν χρειάζεται να ξεχωρίσουμε το εσωτερικό πεδίο. Ο λόγος έγκειται στο ότι καθώς μειώνεται το πάχος του φλοιού, το εσωτερικό του πεδίο τείνει στο μηδέν.

## Η πίεση του μαγνητικού πεδίου

Στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου έχουμε να αντιμετωπίσουμε δύο δυσκολίες. Η μία είναι αυστηρώς παιδαγωγικής φύσεως. Τα διδακτικά εγχειρίδια συνήθως δεν δίνουν τους τύπους για το μαγνητικό πεδίο που παράγει σε κάποιο σημείο του χώρου ένα στοιχειώδες τμήμα ρευματοφόρου αγωγού (δηλαδή το νόμο των Biot-Savart) ή που παράγει ένα ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο διαρρέει ευθύγραμμο σύρμα ή πηνίο (σωληνοειδές) πεπερασμένου μήκους. Επίσης, δεν δίνουν την έκφραση για την πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου.

Κατά συνέπεια, θα περιορίσουμε τη συζήτησή μας στην περίπτωση του σωληνοειδούς μεγάλου μήκους (όλες μας οι γενικεύσεις θα ακολουθήσουν την ίδια πορεία όπως και στην περίπτωση της πίεσης του ηλεκτρικού πεδίου). Το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς είναι ομογενές σχεδόν παντού (εκτός από τα άκρα του) και ισούται με

$$B = \mu_0 IN/l = \mu_0 i, \quad (4)$$

όπου με  $\mu_0$  συμβολίζουμε τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, με  $l$  το μήκος του σωληνοειδούς και με  $N$  τον ολικό αριθμό των σπειρών του, ενώ η  $i$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα μήκους), η οποία αποτελεί στη μαγνητοστατική το αντίστοιχο της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου στην ηλεκτροστατική. Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού. Η μαγνητική ροή που διαπερνά όλες τις σπείρες του σωληνοειδούς δίνεται από την έκφραση  $\Phi = NBS$ , από την οποία μπο-

ρούμε να βρούμε τόσο το συντελεστή αυτεπαγωγής  $L = \Phi/I$  όσο και την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που βρίσκεται αποθηκευμένη στο σωληνοειδές  $U = LI^2/2$ . Διαιρώντας την ενέργεια με τον όγκο του σωληνοειδούς, παίρνουμε αμέσως τον τύπο για την πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου:

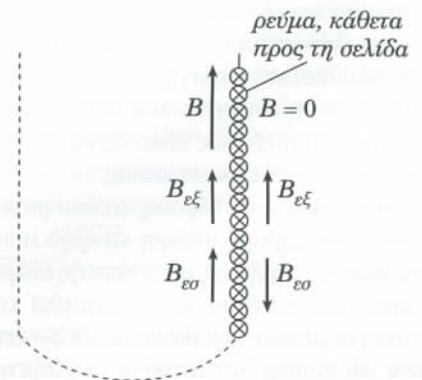
$$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Η δεύτερη δυσκολία ανακύπτει λόγω της συχνά απρόσεκτης εφαρμογής των ενεργειακών σχέσεων σε προβλήματα όπου υπεισέρχεται κάποιο μαγνητικό πεδίο. Αν κανείς επιδείξει επιπολαιότητα, διατρέχει τον κίνδυνο να περιπέσει σε φαινομενικά παράδοξα και αντιφάσεις. Για κάτι τέτοιο κινδυνεύουμε και στην περίπτωση μας.

Ο υπολογισμός της δύναμης που ασκείται σε μια μικρή ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού  $\Delta S$  θα βασιστεί σε μια συλλογιστική ανάλογη με εκείνη που ακολουθήσαμε στην ηλεκτροστατική (Σχήμα 4). Διαιρούμε το μαγνητικό πεδίο πλησίον της επιφάνειας σε ένα εσωτερικό πεδίο  $B_{ew}$  (που πολύ κοντά στην επιφάνεια θα πρέπει να ισούται με το πεδίο το οποίο παράγει ένα άπειρο ρευματοφόρο επίπεδο) και σε ένα εξωτερικό πεδίο  $B_{ex}$  (το πεδίο που παράγεται από τα υπόλοιπα μέρη του σωληνοειδούς). Έτσι, έχουμε

$$\begin{cases} B = B_{ex} + B_{ew} \\ 0 = B_{ex} - B_{ew} \end{cases}$$

ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο δι-



Σχήμα 4

νει  $B_{εξ} = B_{ω} = B/2$ . Το μέτρο της δύναμης μπορούμε να το προσδιορίσουμε με τη βοήθεια του νόμου του Laplace (λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση (4)):

$$\Delta F = B_{εξ}(i\Delta l)\Delta d = \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta S,$$

όπου με  $\Delta l$  δηλώνουμε το πλάτος ενός τμήματος επιφάνειας παράλληλα προς τον άξονα του σωληνοειδούς και με  $\Delta d$  το μήκος του κατά τη διεύθυνση του ρεύματος.

Εκ πρώτης όψεως, τα πάντα φαίνονται εντάξει και μας θυμίζουν τα αποτελέσματα που εξαγάγαμε στην ηλεκτροστατική: Η πίεση του πεδίου ισούται αριθμητικά με την πυκνότητα της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου. Ωστόσο, αν μπούμε στον κόπο να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της δύναμης με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού, θα διαπιστώσουμε μια σημαντικότητα διαφορά: η δύναμη κατευθύνεται προς τα έξω, οπότε, σε αντίθεση με το ηλεκτρικό πεδίο, η πίεση του μαγνητικού πεδίου πρέπει να θεωρείται θετική.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν υπάρχει τίποτε το προβληματικό στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα —μάλιστα, εναρμονίζεται καλύτερα με τις συμβατικές απόψεις περί πίεσης. Ωστόσο, δεν δυσκολευόμαστε να αντιληφθούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό αντιφάσκει προς τη διατήρηση της ενέργειας. Πράγματι, αν μετακινήσουμε νοητά τη ρευματοφόρο επιφάνεια, ως πούμε, προς τον άξονα του σωληνοειδούς (δηλαδή, αν μειώσουμε την ακτίνα του σωληνοειδούς), οι εξωτερικές δυνάμεις εκτελούν θετικό έργο για να υπερνικήσουν τις ανθιστάμενες μαγνητικές δυνάμεις, ενώ ο όγκος του σωληνοειδούς που περιέχει το πεδίο μειώνεται —πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ενέργεια του πεδίου μειώνεται επίσης! Πώς είναι δυνατόν να επιλυθεί η αντίφαση αυτή;

Η εν λόγω αντίφαση ανέκυψε επειδή δεν λάβαμε υπόψη το έργο που εκτελεί η πηγή της ηλεκτρικής ενέργειας προκειμένου να διατηρηθεί το συνεχές ρεύμα στο σωληνοειδές —αν δεν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, η τιμή του μαγνητικού πεδίου εντός του σωληνοειδούς δεν θα μπορούσε

να διατηρηθεί σταθερή. Το πρόσθετο έργο της πηγής πρέπει να αντισταθμίζει το έργο της επαγόμενης ΗΕΔ που οφείλεται στη μείωση της μαγνητικής ροής στο σωληνοειδές. Η μετακίνηση του μικρού τμήματος της επιφάνειας κατά απόσταση  $\Delta x$  αντιστοιχεί σε μια μεταβολή της μαγνητικής ροής

$$\Delta\Phi = -B\Delta x\Delta d,$$

η οποία δημιουργεί σ' αυτό το τμήμα μια επαγόμενη ΗΕΔ ίση με

$$\mathcal{E}_{n-\epsilon} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας την εξίσωση (4), διαπιστώνουμε ότι το έργο που παράγει η πηγή και καταναλώνει η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται με

$$W_n = -\mathcal{E}_{n-\epsilon}\Delta q = -\frac{B\Delta x\Delta d}{\Delta t} i\Delta l\Delta t \\ = -\frac{B^2}{\mu_0} \Delta V,$$

όπου με  $\Delta q$  δηλώνουμε το φορτίο που διήλθε από το τμήμα της επιφάνειας εντός του χρόνου  $\Delta t$ . Έτσι, καθίσταται πλέον σαφές πως το έργο που παρήγαγαν η εξωτερική δύναμη και η πηγή ισούται επακριβώς με τη μεταβολή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου!

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ένα παρεμφερές πρόβλημα αναφύεται όταν προσπαθούμε να διατυπώσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας (τον Πρώτο Νόμο της θερμοδυναμικής) για την ισοβαρή μεταβολή ενός ιδανικού αερίου, όπου η πίεση είναι ομοίως θετική. Το να θεωρήσουμε μια ισοβαρή διαδικασία μάς διευκολύνει επειδή εν προκειμένω η πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας παραμένει σταθερή:


$$u = \frac{U}{V} = \frac{nC_V T}{V} = \frac{C_V}{R} P,$$

όπου το  $C_V$  συμβολίζει τη μοριακή θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο. Για παράδειγμα, η ισοβαρής συστολή του αερίου πραγματοποιείται με την παραγωγή θετικού έργου από κάποια εξωτερική δύναμη. (Συνεπώς, το αέριο παρήγαγε αρνητικό έργο.)

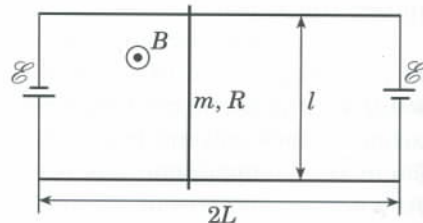
Εντούτοις, η εσωτερική ενέργεια του αερίου μειώνεται στην πορεία της εν λόγω διαδικασίας. Πρόκειται για ένα «παράδοξο» που εξηγείται μάλλον εύκολα: Η ποσότητα της θερμότητας η οποία απάγεται από το αέριο ισούται ακριβώς με εκείνη που χρειάζεται ώστε να ικανοποιείται η διατήρηση της ενέργειας. Στην προκειμένη περίπτωση, λοιπόν, η δεξαμενή θερμότητας παίζει ακριβώς τον ίδιο ρόλο όπως και η ηλεκτρική πηγή στο πρόβλημα του σωληνοειδούς.

#### Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

• D. Tselykh, «Το μαγνητικό πεδίο», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.

• A. Stasenko, «Ένας περιστρεφόμενος πυκνωτής», Ιούλιος/Αύγουστος 1999. 


⇒ Συνέχεια από τη σελ. 27



Σχήμα 2

ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B$ . Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων που προκαλούνται όταν μετακινήσουμε το συνδέτη από τη θέση ισορροπίας του. Αγνοήστε την απόσβεση των ταλαντώσεων, τις εσωτερικές αντιστάσεις των ηλεκτρικών πηγών, την αντίσταση των επαφών και το συντελεστή αυτεπαγωγής του κυκλώματος. (A. Yakuta)

#### Φ200

Φωτεινή δέσμη σε ημικύλινδρο. Μια φωτεινή δέσμη που διαδίδεται στο επίπεδο το κάθετο προς τον άξονα ενός γυάλινου ημικυλίνδρου προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνειά του υπό γωνία  $45^\circ$ . Από ποιο μέρος της καμπυλωμένης επιφάνειας του ημικυλίνδρου είναι δυνατόν να εξέλθει το φως; Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού  $n$ . 

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

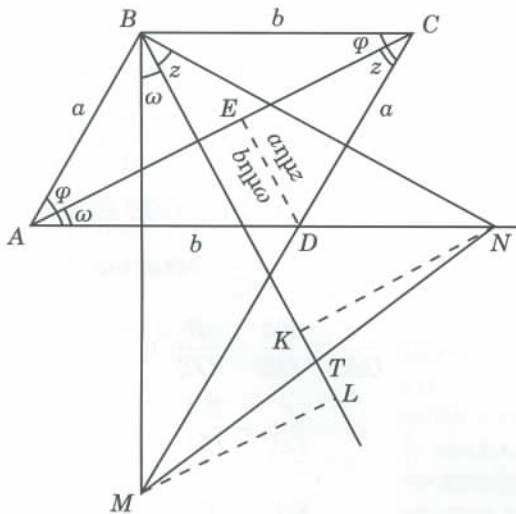


**Κι άλλη γραμμική σκέψη**

Αξιότιμοι κύριοι,

Θα ήθελα να προτείνω μια άλλη λύση στο πρόβλημα M193 του τεύχους Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 2000:

Στο παραλληλόγραμμο ABCD, θέτω  $AB = DC = a$ ,  $BC = AD = b$ ,  $\angle BAD = \angle BCD = \angle \varphi$ ,  $\angle CAD = \angle ACB = \angle \omega$  και  $\angle ACD = \angle BAC = \angle z$ . Επίσης  $\angle MBT = \angle CAD = \angle \omega$ , διότι είναι οξείες με κάθετες πλευρές, και  $\angle TBN = \angle ACD = \angle z$  για παρόμοιο λόγο.



Φέρω τις κάθετες DE, NK, ML. Ισχύει

$$DE = a \eta \mu z = b \eta \mu \omega. \tag{1}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BCM, είναι

$$BM = b \epsilon \varphi \varphi. \tag{2}$$

Αντίστοιχα, στο ορθογώνιο τρίγωνο ABN είναι

$$BN = a \epsilon \varphi \varphi. \tag{3}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BML είναι  $ML = BM \eta \mu \omega$ , και λόγω της (2)

$$ML = b \epsilon \varphi \varphi \eta \mu \omega. \tag{4}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BNK είναι  $NK = BN \eta \mu z$ , και λόγω της (3)

$$NK = a \epsilon \varphi \varphi \eta \mu z. \tag{5}$$

Οι σχέσεις (4) και (5), λόγω της (1), δίνουν  $ML = NK$ , δηλαδή τα τρίγωνα BMT και BNT με κοινή βάση τη BT έχουν ίσα εμβαδά. Άρα, τα ίδια τρίγωνα με κοινή κορυφή το B έχουν το ίδιο ύψος. Συνεπώς έχουν ίσες βάσεις:  $MT = TN$ .

Μιχαήλ Γ. Μούκας, φυσικός, καθηγητής  
Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης, Τμήμα Ηλεκτρονικής

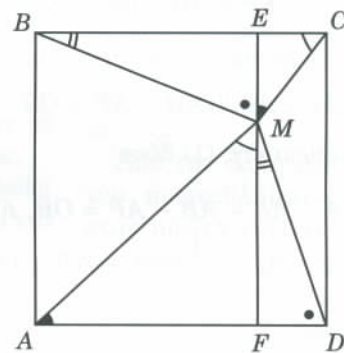
**Ένα γενικότερο πρόβλημα**

Αγαπητοί κύριοι,

Στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1998 δημοσιεύθηκε μια δεύτερη λύση του προβλήματος M127 από τον κύριο Μιχαήλ Μούκα. Στην προσπάθειά μου να επινοήσω και μια τρίτη λύση του ίδιου προβλήματος, ανακάλυψα ότι το ουσιώδες για το σημείο M δεν είναι η ακριβής τιμή των γωνιών, αλλά το ότι  $\angle MAD + \angle MCB = \angle MBC + \angle MDA = 90^\circ$ . Έτσι διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το εξής γενικότερο πρόβλημα:

Έστω σημείο M στο εσωτερικό παραλληλογράμμου ABCD. Γνωρίζουμε ότι  $\angle MAD + \angle MCB = \angle MBC + \angle MDA = 90^\circ$ . Βρείτε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

Λύση. Παρατηρούμε ότι, αν E και F είναι τα σημεία τομής των πλευρών BC και AD του παραλληλογράμμου με την ευθεία η οποία είναι κάθετη προς αυτές και διέρχεται από το σημείο M, τότε  $\angle EMC = \angle MAF$  και  $\angle FMD = \angle MBE$ . Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα MEC και MFA είναι όμοια, όπως επίσης και τα ορθογώνια τρίγωνα MEB και MFD. Έτσι έχουμε  $AF/EM = MF/EC$  και



$EM/FD = BE/MF$ . Άρα,  $AF/FD = BE/EC$  ή, ισοδύναμα,  $AD/FD = BC/EC$ . Αφού  $AD = BC$ , έπεται ότι  $FD = EC$ . Συνεπώς, το τετράπλευρο FECD είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ίδιο ισχύει για το ABCD.

Παρατηρήσεις. (α) Η ιδέα της λύσης του M127 που παρατέθηκε στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1998 εφαρμόζεται και για το παραπάνω γενικότερο πρόβλημα. Πράγματι, παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε τις σχέσεις (1)  $\angle M'BM + \angle M'CM = 180^\circ$  (δηλαδή ότι το τετράπλευρο M'BMC είναι εγγράψιμο σε κύκλο) και (2)  $\angle M'KC = 90^\circ$ . Για την (1) έχουμε  $\angle M'BM + \angle M'CM = (\angle MAD + \angle MBC) + (\angle MCB + \angle MDA) = 180^\circ$ , ενώ  $\angle M'KC = 180^\circ - (\angle KM'C + \angle M'CB) = 180^\circ - (\angle MBC + \angle MDA) = 90^\circ$ .

(β) Από τα παραπάνω προκύπτει το εξής ερώτημα: «Ποιος είναι ο γεωμετρικός τύπος των σημείων M του επιπέδου τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό ενός (ορθογωνίου) παραλληλογράμμου ABCD και ικανοποιούν

τη σχέση  $\angle MAD + \angle MCB = \angle MBC + \angle MDA = 90^\circ$ ;

Φιλικά,

Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, φοιτητής,  
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών,  
asin@ath.forthnet.gr

## Χωρίς τριγωνομετρία

Αγαπητοί κύριοι,

Για το πρόβλημα M185 του τεύχους Μαΐου/Ιουνίου 2000 θα ήθελα να προτείνω την παρακάτω λύση με χρήση καθαρής γεωμετρίας.

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $AB = B\Gamma = a$ .  
Ακόμη,  $A\Gamma = 2\beta$ . Ισχύει:

$$A\Lambda = AP \quad (1)$$

$$BP = BK \quad (2)$$

$$O\Lambda = OK \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3), λαμβάνουμε  $O\Lambda + BP = OK + BK$ , οπότε

$$O\Lambda + BP = OB. \quad (4)$$

Όμως

$$O\Lambda = OA - A\Lambda \quad (5)$$

και

$$BP = AB - AP. \quad (6)$$

Έτσι, η (4) με τη βοήθεια των (5) και (6) γίνεται:

$$OA - A\Lambda + AB - AP = OB. \quad (7)$$

Αυτή με τη βοήθεια της (1) δίνει:

$$OA - AP + AB - AP = OB, \text{ ή} \\ AP = \frac{1}{2}(OA + AB - OB). \quad (8)$$

Ομοίως προκύπτει

$$A\Gamma M = \frac{1}{2}(OB + B\Gamma - O\Gamma). \quad (9)$$

Προσθέτοντας τις (8) και (9), λαμβάνουμε  $AP + A\Gamma M =$

$$\frac{1}{2}(OA + AB - OB + AB + B\Gamma - O\Gamma) = \frac{1}{2}(OA - O\Gamma + 2AB) \\ = \frac{1}{2}(2AB - A\Gamma), \text{ οπότε } AP + A\Gamma M = \frac{1}{2}(2a - 2\beta), \text{ ή}$$

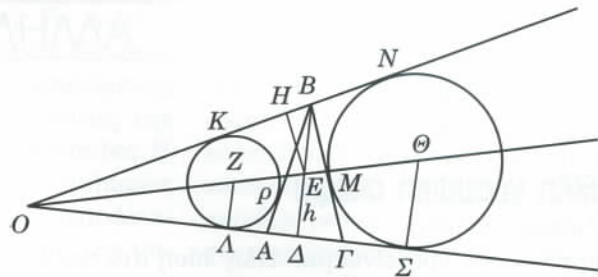
$$AP + A\Gamma M = a - \beta. \quad (10)$$

Φέρουμε τη διάκεντρο (η οποία διέρχεται από το  $O$ ). Αυτή τέμνει τη  $B\Delta (= h)$  στο  $E$ . Από το  $E$  φέρουμε κάθετο προς την  $ON$ : την τέμνει στο  $H$ . Ισχύει:

$$E\Delta = EH \quad (11)$$

Έχουμε  $h = B\Delta = BE + E\Delta$ , οπότε με τη βοήθεια της (11) καταλήγουμε:

$$h = BE + EH. \quad (12)$$



Αλλά τα τρίγωνα  $EHB$  και  $O\Delta B$  είναι όμοια, ως ορθογώνια και έχοντα  $\angle BO\Delta = \angle HEB$  (οξείες, με πλευρές κάθετες μία προς μία). Άρα  $\frac{OB}{O\Delta} = \frac{BE}{EH}$ , ή

$$BE = \frac{OB}{O\Delta} EH. \quad (13)$$

Έτσι, η (12) με τη βοήθεια της (13) γίνεται:

$$h = \frac{OB}{O\Delta} EH + EH, \text{ ή } h = \left(\frac{OB}{O\Delta} + 1\right) EH. \quad (14)$$

Όμως, τα τρίγωνα  $OZ\Lambda$ ,  $O\epsilon\Delta$  και  $O\Theta\Sigma$  είναι προφανώς

όμοια. Άρα,  $\frac{Z\Lambda}{O\Lambda} = \frac{E\Delta}{O\Delta} = \frac{\Theta\Sigma}{O\Sigma}$ . Θέτοντας  $Z\Lambda = r$  και

$$\Theta\Sigma = R, \text{ έχουμε: } \frac{r}{O\Lambda} = \frac{E\Delta}{O\Delta} = \frac{R}{O\Sigma}, \text{ ή} \\ \frac{r}{O\Lambda} = \frac{E\Delta}{O\Delta} \quad (15)$$

και

$$\frac{E\Delta}{O\Delta} = \frac{R}{O\Sigma}. \quad (16)$$

Όμως  $OB = OK + KB$ , και με τη βοήθεια των (3), (2):

$$OB = O\Lambda + BP. \quad (17)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας διαδοχικά τις (17), (15), (11), (16) στη (14), καταλήγουμε στην

$$h = r + \left(\frac{BP + O\Delta}{O\Sigma}\right) R. \quad (18)$$

Αλλά  $BP + PA = AB = a$ , ή

$$BP = a - AP. \quad (19)$$

Επίσης,

$$\Sigma\Delta = \Sigma\Gamma + \Gamma\Delta = \Gamma M + \Gamma\Delta = \Gamma M + \beta. \quad (20)$$

Από την (10) προκύπτει  $\Gamma M = a - \beta - AP$ , οπότε η (20) γίνεται  $\Sigma\Delta = a - \beta - AP + \beta$ , ή  $\Sigma\Delta = a - AP$ . Οπότε, με βάση αυτή και τη (19) προκύπτει:  $BP = \Sigma\Delta$ . Επομένως,

$$h = r + \left(\frac{\Sigma\Delta + \Delta O}{\Sigma O}\right) R, \text{ ή } h = r + \frac{\Sigma O}{\Sigma O} R, \text{ ή } h = r + R.$$

Δίνεται  $2r + 2R = 2$ , άρα  $r + R = 1$ . Συνεπώς  $h = 1$ .

Να είστε καλά.

Νίκος Ελληνάκης,  
Χολαργός

**Μαθηματικά**

**M196**

Έστω  $d, q$  και  $r$  ( $0 < r < d$ ) ο διαιρέτης, το ημίγιο και το υπόλοιπο, αντίστοιχα. Τότε

$$201 = dq + r. \quad (1)$$

Αφού  $r < d$ , το  $r$  είναι είτε το πρώτο είτε το δεύτερο στοιχείο της γεωμετρικής προόδου. Μπορεί να είναι το δεύτερο; Αν ήταν, τότε θα ίσχυε  $dq = r^2$ . Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1), παίρνουμε  $201 = r^2 + r$ . Μια απλή διερεύνηση μας δείχνει ότι αυτή η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις. Άρα, το  $r$  δεν μπορεί να είναι το δεύτερο στοιχείο της γεωμετρικής προόδου, οπότε είναι το μικρότερο. Έστω ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, εκφρασμένος ως ανάγωγο κλάσμα, είναι  $m/n$ . Ο αριθμός  $rm^2/n^2$  πρέπει να είναι ακέραιος και, επομένως,  $r = kn^2$ , όπου  $k$  είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Τότε, τα  $d$  και  $q$  θα είναι ίσα με τα  $kmn$  και  $km^2$ , με κάποια σειρά. Άρα, η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί ως

$$201 = (kmn)(km^2) + kn^2 = kn(km^3 + n). \quad (2)$$

Συνεπώς, ο  $n$  είναι διαιρέτης του 201, και ισούται με 1, 3, 67 ή 201. Από τους τελευταίους δύο αριθμούς δεν προκύπτει κάποια λύση. Για  $n = 1$ , έχουμε  $201 = k^2m^3 + k$ , και το  $k$  είναι διαιρέτης του 201. Αν δοκιμάσουμε όλες τις πιθανές τιμές, θα διαπιστώσουμε ότι ούτε γι' αυτή την τιμή του  $n$  προκύπτει λύση. Επομένως,  $n = 3$ . Αν διαιρέσουμε τη (2) διά του 3, προκύπτει η εξίσωση  $67 = k^2m^3 + 3k$ , λύσεις της οποίας είναι τα  $k = 1, m = 4$ . Άρα, το υπόλοιπο είναι 9 και ο διαιρέτης μπορεί να είναι 16 ή 12.

**M197**

Έστω  $x = 42.000, y = 58.000$ . Θα

αποδείξουμε ότι η μέγιστη απόσταση είναι  $5xy/2(x+y) = 60.900$  km. Έπειτα από 1 km, καθένα από τα πίσω λάστιχα έχει  $1/x$  μονάδες φθοράς, όπου ως μονάδα ορίζουμε το σημείο στο οποίο παύει να είναι δυνατή η χρήση του λάστιχου. Καθένα από τα μπροστινά λάστιχα έχει αντίστοιχα  $1/y$  μονάδες φθοράς, και, επομένως, η συνολική φθορά είναι  $2/x + 2/y$ . Αφού κάθε λάστιχο μπορεί να έχει το πολύ 1 μονάδα φθοράς, η μέγιστη φθορά για όλο το ταξίδι μπορεί να είναι 5, οπότε η μέγιστη απόσταση ισούται το πολύ με  $5/(2/x + 2/y) = 5xy/2(x+y)$ .

Για να φτάσουμε σε αυτή την απόσταση, οδηγούμε επί  $xy/2(x+y)$  χιλιόμετρα, αλλάζουμε κυκλικά τα πέντε λάστιχα, οδηγούμε επί άλλα  $xy/2(x+y)$  χιλιόμετρα, αλλάζουμε πάλι κυκλικά τα πέντε λάστιχα, και ούτω καθεξής, έως ότου επανέλθουν τα λάστιχα στις αρχικές τους θέσεις.

Τότε, κάθε λάστιχο θα έχει βρεθεί δύο φορές μπροστά και δύο πίσω, και η φθορά του θα ισούται με

$$(2/x + 2/y)(xy/2(x+y)) = 1.$$

**M198**

Αυτή η ανακατάταξη μπορεί να συμβεί αν το πλήθος  $n$  των διαγωνιζομένων είναι περιττό, αλλά δεν μπορεί να συμβεί αν το  $n$  είναι άρτιο.

Ας υποθέσουμε ότι στο πρωτάθλημα διαγωνίζονται  $n$  παίκτες. Αφού η βαθμολογία καθενός είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $1/2$  και όλες οι βαθμολογίες είναι διαφορετικές, δύο διαφορετικές βαθμολογίες πρέπει να διαφέρουν κατά  $1/2$  τουλάχιστον. Έτσι, αν εξετάσουμε όλες τις βαθμολογίες των παικτών μετά τον πρώτο γύρο, από τη μικρότερη έως τη μεγαλύτερη, θα διαφέρουν όλες κατά τουλάχιστον  $1/2$  βαθμό· επομένως, η μεγαλύτερη βαθμολογία θα ισούται τουλάχιστον με  $(n-1)/2$ . Αυτό ισχύει και για τους δύο γύρους ξεχωριστά.

Ας αναλύσουμε περισσότερο το συγκεκριμένο σημείο. Έστω  $k$  το πλήθος των βαθμών που συγκέντρωσε στον πρώτο γύρο ο παίκτης με τη μικρότερη βαθμολογία (έπειτα από το τέλος του πρώτου γύρου). Επισημαίνουμε ότι αυτός ο παίκτης θα κερδίσει το πρωτάθλημα. Βάσει του επιχειρήματος της προηγούμενης παραγράφου, η μεγαλύτερη βαθμολογία του πρώτου γύρου ισούται τουλάχιστον με  $k + (n-1)/2$ .

Η ελάχιστη δυνατή μέγιστη βαθμολογία του πρώτου γύρου ισούται με  $k + (n-1)/2$  και η ελάχιστη δυνατή μέγιστη βαθμολογία του δεύτερου γύρου με  $(n-1)/2$ . Επομένως, η ελάχιστη συνολική μέγιστη βαθμολογία—η βαθμολογία του πρωταθλητή—δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το άθροισμά τους, δηλαδή  $k + (n-1)$ .

Από την άλλη πλευρά, ο νικητής του πρωταθλήματος συγκέντρωσε στον πρώτο γύρο (στον οποίο ήταν τελευταίος)  $k$  βαθμούς, ενώ στον δεύτερο γύρο μπορεί να συγκεντρώσει το πολύ  $(n-1)$  βαθμούς (κερδίζοντας μία φορά όλους τους άλλους παίκτες). Συνεπώς, μπορεί να συγκεντρώσει το πολύ  $k + (n-1)$  βαθμούς.

Από τις δύο τελευταίες παραγράφους έπεται ότι ο νικητής του πρωταθλήματος κέρδισε ακριβώς  $k + (n-1)$  βαθμούς. Αλλά πώς έγινε αυτό; Δοιπόν, ο νικητής του πρώτου γύρου πρέπει να συγκέντρωσε (για δεδομένο  $k$ ) την ελάχιστη δυνατή μέγιστη βαθμολογία (η οποία ισούται με  $k + (n-1)/2$ ), και τα αποτελέσματα σε αυτό το γύρο θα πρέπει να είχαν την ελάχιστη δυνατή διαφορά μεταξύ τους, η οποία ισούται με  $1/2$ .

Ποιο είναι το άθροισμα των βαθμολογιών του πρώτου γύρου; Από τη μία, ισούται απλώς με το πλήθος των παιχνιδιών, δηλαδή με  $n(n-1)/2$ . Από την άλλη, ισούται με  $k + (k+1/2)$

$+ (k + 2/2) + (k + 3/2) + \dots + (k + (n - 1)/2) = nk + n(n - 1)/4$ . Φυσικά, αυτοί οι δύο τρόποι υπολογισμού πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, οπότε  $nk + n(n - 1)/4 = n(n - 1)/2$  ή  $k = (n - 1)/4$ . Αυτό είναι βεβαίως αδύνατο όταν το  $n$  είναι άρτιο, διότι το  $k$  πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $1/2$ .

Είναι, όμως, πάντοτε δυνατό για περιττές τιμές του  $n$ ;

Με τη βοήθεια μιας επαγωγικής κατασκευής θα αποδείξουμε ότι όντως είναι. Έστω  $a_i$  η βαθμολογία που συγκέντρωσε στον πρώτο γύρο ο παίκτης που κατετάγη στην  $i$  θέση, και  $b_i$  η βαθμολογία που συγκέντρωσε ο ίδιος κατά τον δεύτερο γύρο.

Θα αρχίσουμε με τρεις διαγωνιζόμενους. Η προηγούμενη ανάλυση μας δείχνει ότι οι βαθμολογίες τους κατά τον πρώτο γύρο πρέπει να είναι συγκεντρωμένες και να δίνουν άθροισμα 3. Αυτό το επιτυγχάνουμε αν θέσουμε  $a_1 = 1/2$ ,  $a_2 = 1$  και  $a_3 = 3/2$ .

Αν οι παίκτες είναι οι  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$ , αυτό σημαίνει ότι ο  $A_1$  έχασε από τον  $A_2$  και ήρθε ισόπαλος με τον  $A_3$ , ενώ ο  $A_3$  έχασε από τον  $A_2$ . Κατασκευάζουμε στη συνέχεια έναν δεύτερο γύρο, στον οποίο ο παίκτης  $i$  κερδίζει τον  $j$  αν  $i < j$ . Έτσι, θα έχουμε  $b_3 = 0$ ,  $b_2 = 1$  και  $b_1 = 2$ . Οι αναγνώστες μπορούν να κατασκευάσουν τις κατάλληλες νίκες και ήττες και να επαληθεύσουν ότι τα αθροίσματα  $a_i + b_i$  δίνουν τη σωστή τελική κατάταξη.

Για να κατασκευάσουμε ένα πρωτάθλημα με πέντε παίκτες, επαναλαμβάνουμε το πρωτάθλημα με τους προηγούμενους τρεις διαγωνιζόμενους και μετά εισάγουμε τους παίκτες 1 και 2 (οι παίκτες  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$  του προηγούμενου πρωταθλήματος γίνονται πλέον  $A_3$ ,  $A_4$  και  $A_5$ , αντίστοιχα). Για  $i \geq 3$ , αν το  $i$  είναι άρτιο, ο παίκτης  $i$  κερδίζει τον παίκτη 1 και έρχεται ισόπαλος με τον παίκτη 2, ενώ, αν το  $i$  είναι περιττό, συμβαίνει το αντίστροφο. Τέλος, ο παίκτης 2 κερδίζει τον παίκτη 1. Η βαθμολογία του πρώτου γύρου θα είναι  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3/2$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 5/2$  και  $a_5 = 3$ .

Στον δεύτερο γύρο, ο παίκτης  $i$  κερδίζει τον παίκτη  $j$  όταν  $i < j$ . Θα έχουμε τότε  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 2$ ,  $b_4 = 1$ ,  $b_5 = 0$ , και τα αθροίσματα  $a_i + b_i$

μας δίνουν τη σωστή κατάταξη.

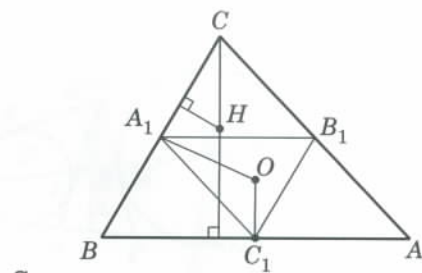
Αυτή η κατασκευή γενικεύεται. Αν έχουμε οργανώσει ένα πρωτάθλημα για  $n$  διαγωνιζόμενους, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρωτάθλημα για  $(n + 2)$  διαγωνιζόμενους ως εξής: Διοργανώνουμε έναν πρώτο γύρο μεταξύ του 3ου, του 4ου, ... και του  $(n + 2)$ -ού παίκτη στον οποίο η χαμηλότερη βαθμολογία είναι  $(n - 1)/4$  (αυτό είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $1/2$  όταν το  $n$  είναι περιττό). Στη συνέχεια, για  $i \geq 3$ , ορίζουμε ότι, αν το  $i$  είναι άρτιο, ο παίκτης  $i$  κερδίζει τον παίκτη 1 και έρχεται ισόπαλος με τον παίκτη 2, και το αντίστροφο αν το  $i$  είναι περιττό. Τέλος, ο παίκτης 2 κερδίζει τον παίκτη 1. Κατόπιν, στον δεύτερο γύρο ο παίκτης  $i$  κερδίζει τον παίκτη  $j$ , όποτε  $i < j$ . Έτσι θα έχουμε  $b_i = n - i$ , και οι τελικές βαθμολογίες θα δίνουν την επιθυμητή κατάταξη.

### M199

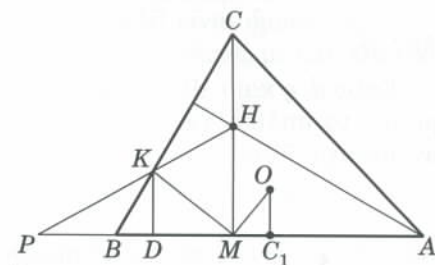
Για να λύσουμε το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε το εξής πολύ γνωστό γεγονός: η απόσταση οποιασδήποτε κορυφής ενός τριγώνου από το σημείο τομής των υψών του (το *ορθόκεντρο*) ισούται με το διπλάσιο της απόστασης του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή την κορυφή.

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, έστω  $H$  το σημείο τομής των υψών του τριγώνου  $ABC$  και έστω  $O$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (βλ. Σχήμα 1α). Συμβολίζουμε με  $A_1$ ,  $B_1$  και  $C_1$  τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών του  $ABC$ . Το τρίγωνο  $A_1B_1C_1$  είναι όμοιο με το  $ABC$ , με λόγο ομοιότητας  $1/2$ . Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του  $ABC$  περιέχουν τα ύψη του τριγώνου  $A_1B_1C_1$ , και, επομένως, το  $O$  είναι στην πραγματικότητα το ορθόκεντρο του τριγώνου  $A_1B_1C_1$ . Άρα ισχύει  $CH = 2C_1O$  (και δύο ακόμη παρόμοιες ισότητες).

Ας επιστρέψουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα. Έστω  $H$  το σημείο τομής των υψών του δεδομένου τριγώνου  $ABC$  (Σχήμα 1β). Έστω ότι η ευθεία  $KH$  (για την οποία μας δίνεται ότι είναι συμμετρική της  $AH$  ως προς



α



β

Σχήμα 1

τη  $CM$ ) τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $P$  και έστω  $C_1$  το μέσον της  $AB$ . Συμβολίζουμε με  $D$  την προβολή του  $K$  στην  $AB$ . Έχουμε ότι  $\angle HPM = \angle HAM = \angle HCK$  (η τελευταία ισότητα έπεται από το γεγονός ότι και οι δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $B$  του τριγώνου όταν αυτή είναι οξεία, και συμπληρωματικές της εξωτερικής γωνίας  $B$  του τριγώνου όταν αυτή είναι αμβλεία). Από τη βοηθητική πρόταση που αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε ότι

$$CH = 2C_1O. \quad (1)$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $AC > BC$  (η περίπτωση  $AC = BC$  είναι απλή). Τότε,  $AM > BM$ . Αφού  $C_1$  είναι το μέσο της  $AB$ , έχουμε

$$\begin{aligned} MC_1 &= BC_1 - BM = (1/2)AB - BM \\ &= (1/2)(AM + MB) - BM \\ &= (1/2)(AM - MB). \end{aligned} \quad (2)$$

Αφού  $PM = AM$ , έχουμε

$$PB = PM - BM = AM - BM. \quad (3)$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $KHC$  και  $KBP$  είναι όμοια. Πράγματι, έχουμε ότι  $\angle KPB = \angle HPM = \angle HAM = \angle HCK$  (οι δύο τελευταίες γωνίες είναι ίσες ως συμπληρωματικές της  $\angle CBM$ )· ακόμη  $\angle PKB = \angle CKH$  (είναι κατακορυφήν γωνίες). Έχουμε τώρα ότι τα ύψη

που φέρουμε σε αντίστοιχες πλευρές όμοιων τριγώνων είναι ανάλογα με αυτές τις πλευρές. Στην περίπτωση μας, το  $KD$  είναι ύψος του τριγώνου  $KBP$  και το  $DM$  είναι ίσο με το αντίστοιχο ύψος του τριγώνου  $KHC$ . Άρα, από τα όμοια τρίγωνα και από τις (3), (2) και (1), έχουμε

$$\frac{KD}{DM} = \frac{PB}{CH} = \frac{MA - BM}{CH} = \frac{2MC_1}{2OC_1} = \frac{MC_1}{OC_1}.$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα  $KDM$  και  $MC_1O$  είναι όμοια. Άρα έχουμε (για την περίπτωση του Σχήματος 1β)  $\angle KMD + \angle OMC_1 = \angle KMD + \angle MKD = 90^\circ$  και  $\angle OMK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

### M200

Συμβολίζουμε το κλάσμα στο αριθμητικό μέλος της εξίσωσης ως  $Q_n$ . Έχουμε τότε

$$Q_n = \frac{1}{x_n + \frac{1}{x_n + Q_{n-1}}}. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$Q_1 = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η ανισότητα

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (2)$$

ισχύει για κάθε θετικό  $x$ , ενώ η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$ . Μπορούμε να γράψουμε

$$Q_2 = \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_2 + Q_1}}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{Q_2} = x_2 + \frac{1}{x_2 + Q_1} = (x_2 + Q_1) + \frac{1}{(x_2 + Q_1)} - Q_1.$$

Λόγω της ανισότητας (2), έχουμε

$$\frac{1}{Q_2} \geq 2 - Q_1 \geq \frac{3}{2}.$$

Συνεπώς,

$$Q_2 \leq \frac{2}{3},$$

ενώ η ισότητα ισχύει μόνο όταν  $Q_1 = 1/2$  (δηλαδή, όταν  $x_1 = 1$ ) και  $x_2 + Q_1 = 1$  (δηλαδή, όταν  $x_2 = 1/2$ ). Θα αποδείξουμε τώρα με τέλεια επαγωγή ότι

$$Q_k \leq \frac{k}{k+1},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $x_m = 1/m$ , οπότε έχουμε

$$Q_m = \frac{m}{m+1}$$

για  $m = 1, 2, \dots, k$ .

Απόδειξη: Για  $k = 1$  και  $2$ , η ανισότητα έχει ήδη αποδειχτεί (στην πραγματικότητα, για την τέλεια επαγωγή αρκεί να επαληθεύσουμε ότι η πρόταση ισχύει για  $k = 1$ ). Απομένει να αποδείξουμε ότι αν η πρόταση ισχύει για  $k$ , τότε ισχύει και για  $k + 1$ . Από την εξίσωση (1) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{k+1}} &= x_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1} + Q_k} \\ &= x_{k+1} + Q_k + \frac{1}{x_{k+1} + Q_k} - Q_k. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα (2), έχουμε

$$\frac{1}{Q_{k+1}} \geq 2 - Q_k,$$

ενώ η ισότητα ισχύει αν

$$x_{k+1} + Q_k = 1. \quad (3)$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης έχουμε

$$Q_k \leq \frac{k}{k+1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &\leq \frac{1}{2 - Q_k} \leq \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν

$$Q_{k+1} = \frac{k+1}{k+2},$$

τότε

$$Q_k = \frac{k}{k+1}$$

(απ' όπου, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έπεται ότι  $x_m = 1/m$  για  $m = 1, 2, \dots, k$ ). Επιπλέον, από τη σχέση (3) έχουμε

$$x_{k+1} = 1 - Q_k = 1 - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Η ανισότητα αποδείχτηκε.

Απάντηση:  $x_1 = 1, x_2 = 1/2, \dots, x_n = 1/n$ .

## Φυσική

### Φ196

Ας συμβολίσουμε τη μάζα του σκοινιού με  $m$  και την τάση στα σημεία  $A$  και  $B$  με  $T_A$  και  $T_B$ , αντίστοιχα. Σας υπενθυμίζω ότι η τάση σε κάθε σημείο ασκείται κατά την τοπική εφαπτομένη του σκοινιού. Εφόσον το σκοινί βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, το άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω του ισούται με μηδέν:

$$T_A + T_B + mg = 0.$$

Ο διανυσματικός χαρακτήρας της ανωτέρω εξίσωσης συνεπάγεται ότι και το άθροισμα των προβολών αυτών των δυνάμεων σε οποιονδήποτε άξονα μηδενίζεται. Ειδικότερα, στην περίπτωση του κατακόρυφου άξονα  $Oy$  μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

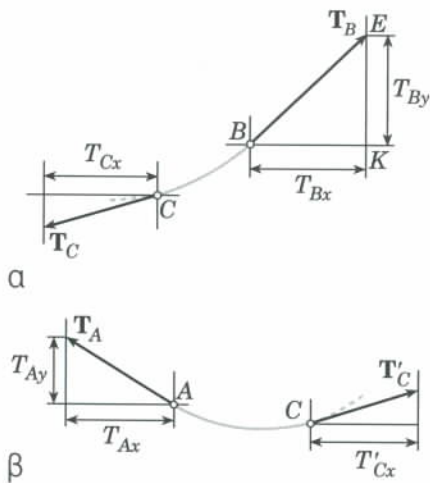
$$T_{Ay} + T_{By} - mg = 0,$$

από την οποία βρίσκουμε

$$m = \frac{T_{Ay} + T_{By}}{g}.$$

Επομένως, για να προσδιορίσουμε τη μάζα του σκοινιού, χρειάζεται να βρούμε τις  $T_{Ay}$  και  $T_{By}$ .

Το τμήμα  $CB$  του σκοινιού βρίσκεται επίσης σε ισορροπία. Κατά συνέπεια, αν προβάλλουμε στον οριζόντιο άξονα  $Ox$  τις δυνάμεις που δρουν



Σχήμα 2

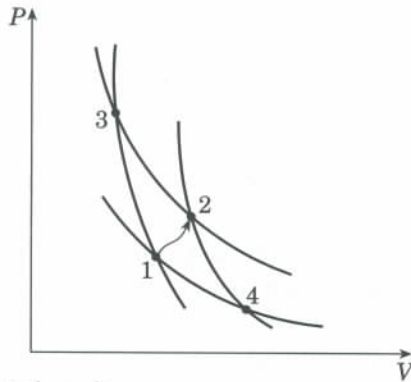
στο σκοινί στα σημεία C και B, το άθροισμα των προβολών αυτών ισούται με μηδέν:

$$T_{Cx} + T_{Bx} = 0.$$

Χαράζετε τώρα τη διανυσματική δύναμη  $T_C$  υπό αυθαίρετη κλίμακα (Σχήμα 2α). Όπως είπαμε, η  $T_C$  ασκείται κατά την εφαπτομένη του σκοινιού στο σημείο C. Ας βρούμε τώρα την προβολή της εν λόγω δύναμης στον άξονα των x και ας φέρουμε την εφαπτομένη του σκοινιού στο σημείο B, κατά την οποία ασκείται η δύναμη  $T_B$ . Το επόμενο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την οριζόντια συνιστώσα  $BK$  της δύναμης  $T_B$ . Αυτή η προβολή ισούται με  $-T_{Cx}$ . Για να προσδιορίσουμε τη δύναμη  $T_B$ , αρκεί να φέρουμε την κατακόρυφο από το σημείο K. Η ευθεία αυτή τέμνει την αγόμενη από το B εφαπτομένη του σκοινιού στο σημείο E. Μπορούμε πλέον ευκολότατα να βρούμε την προβολή της δύναμης  $T_B$  στον κατακόρυφο άξονα. Καθορίζεται από το μήκος του τμήματος  $KE$  μετρημένο στην κλίμακα που επιλέξαμε για να σχεδιάσουμε τη δύναμη  $T_C$ . Στην περίπτωση μας,  $T_{By} \cong 22 \text{ N}$ .

Με ανάλογο τρόπο χαράσσουμε την τάση  $T_A$  στο σημείο A (Σχήμα 2β), και βρίσκουμε την προβολή της στον άξονα των y. Στην περίπτωση μας, η εν λόγω προβολή ισούται με περίπου 9 N. Επομένως,

$$m = \frac{22 + 9}{9,8} \text{ kg} \approx 3,2 \text{ kg}.$$



Σχήμα 3

### Φ197

Ας μελετήσουμε τη ζητούμενη μεταβολή στο επίπεδο  $(P, V)$  και ας παραστήσουμε τις καταστάσεις θερμοκρασίας  $T_1$  και  $T_2$  με τα σημεία 1 και 2, αντίστοιχα (Σχήμα 3). Κατόπιν, χαράσσουμε τις ισόθερμες και αδιαβατικές καμπύλες που διέρχονται απ' αυτά τα σημεία και καλούμε τις τομές τους 3 και 4. Από την εκφώνηση του προβλήματος, γνωρίζουμε ότι είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μια μεταβολή  $1 \rightarrow 2$ , κατά την οποία το αέριο δεν παρουσιάζει ούτε μείωση της θερμοκρασίας του ούτε απώλειες θερμότητας. Από τούτο συμπεραίνουμε ότι το σημείο 2 βρίσκεται στα δεξιά της αδιαβατικής καμπύλης που διέρχεται από το σημείο 1. Επιπροσθέτως, η γραφική παράσταση μιας τυχούσας μεταβολής  $1 \rightarrow 2$  που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος πρέπει να περιέχεται εξ ολοκλήρου εντός του κύκλου  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Έστω ότι συμβολίζουμε με  $Q_{12}$ ,  $Q_{132}$  και  $Q_{142}$  τη θερμότητα που απορροφά το αέριο κατά τις μεταβολές  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  και  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ , αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε τώρα την κυκλική μεταβολή  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Στην εν λόγω διαδικασία, το αέριο αποκτά θερμότητα  $Q_{132}$  και κατόπιν χάνει θερμότητα  $Q_{12}$ , παράγοντας εν τω μεταξύ έργο  $Q_{132} - Q_{12}$ . Το έργο αυτό ισούται με το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από τις γραμμές  $1 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 2$  και  $2 \rightarrow 1$ . Εφόσον το συγκεκριμένο εμβαδόν δεν είναι αρνητικό, ισχύει η ανισότητα

$$Q_{132} \geq Q_{12}.$$

Με παρόμοιο τρόπο εξετάζουμε και

την κυκλική μεταβολή  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ . Το έργο που παράγει το αέριο κατ' αυτή τη διαδικασία είναι επίσης μη αρνητικό και ίσο με  $Q_{12} - Q_{142}$ , από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$Q_{12} \geq Q_{142}.$$

Αν συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω ανισότητες, παίρνουμε

$$Q_{142} \leq Q_{12} \leq Q_{132}.$$

Εφόσον η μεταβολή  $1 \rightarrow 2$  είναι αυθαίρετη (πρόκειται απλώς για μια από τις μεταβολές που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος), η τελευταία ανισότητα σημαίνει ότι η ελάχιστη ποσότητα θερμότητας που μπορεί να προσδοθεί στο αέριο κατά τη διάρκεια μιας τέτοιας μεταβολής συμπίπτει με την  $Q_{142}$ . Με την ίδια συλλογιστική, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί στο αέριο σε μια τέτοια μεταβολή ισούται με  $Q_{132}$ .

Για να λύσουμε το πρόβλημα, επομένως, πρέπει να εξετάσουμε τον κύκλο Carnot  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ , ο οποίος έχει θερμοδυναμικό συντελεστή απόδοσης

$$\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $Q_{142} = Q_1$  και  $Q_{132} = Q_2$ , καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

### Φ198

Την ηλεκτρόλυση του νερού τη συνοδεύει η πόλωση των ηλεκτροδίων, πράγμα που σημαίνει ότι το ηλεκτρολυτικό στοιχείο μετατρέπεται σε γαλβανικό στοιχείο. Η ΗΕΔ E του στοιχείου αυτού μπορεί να υπολογιστεί αν δεχτούμε ότι η ενέργεια η οποία εκλύεται κατά την καύση του υδρογόνου δεν μετατρέπεται σε έργο που καταναλώνεται από εξωτερικές ηλεκτρικές δυνάμεις. Για να παραχθεί υδρογόνο μάζας m, από το ηλεκτρολυτικό στοιχείο πρέπει, σύμφωνα με το νόμο της ηλεκτρόλυσης του Faraday, να περάσει φορτίο q που δίνεται από την έκφραση

$$q = \frac{mZeN_A}{M},$$

όπου με  $Z = 1$  συμβολίζουμε το σθένος των ιόντων  $H^+$ , με  $M = 1 \text{ g/grat}$  τη γραμμοατομική μάζα του υδρογόνου, με  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο και με  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  τον αριθμό του Avogadro. Όπως επισημάνσαμε ήδη, κατά τη διαδικασία αυτή πρέπει να παραχθεί έργο ίσο με  $Q$ :

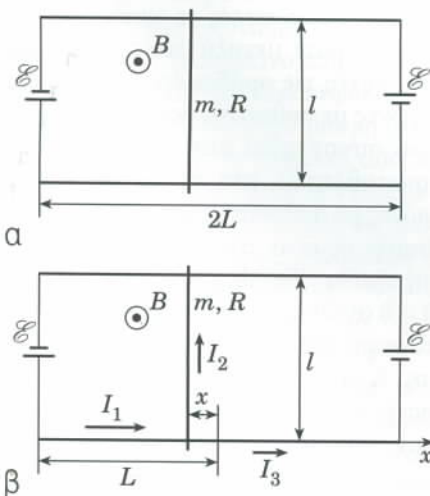
$$\mathcal{E} = \frac{Q}{q} = \frac{QM}{mZeN_A}.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής συντελεστή απόδοσης (ο οποίος ισούται με το συντελεστή απόδοσης του αντίστοιχου γαλβανικού στοιχείου και, επομένως, του ηλεκτρολυτικού στοιχείου):

$$\eta = \frac{W_{\omega\phi}}{W_{\kappa\alpha\tau}} = \frac{q\mathcal{E}}{qV} = \frac{QM}{mZeN_A V} \approx 0,75 = 75\%.$$

### Φ199

Ας βρούμε πρώτα τη θέση ισορροπίας του ηλεκτρικού συνδέτη. Εφόσον και οι δύο ηλεκτρικές πηγές έχουν την ίδια ΗΕΔ, η τάση μεταξύ των μέσων των δύο ραγών θα ισούται με μηδέν (Σχήμα 4α). Αν, λοιπόν, ο συνδέτης ηρεμεί με τα άκρα του ακριβώς στα μέσα των ραγών, τότε δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, και έτσι δεν του ασκείται μαγνητική



Σχήμα 4

δύναμη. Συνεπώς, αυτή είναι η θέση ισορροπίας του συνδέτη. Μάλιστα, όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα, πρόκειται για θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Αν τώρα ο συνδέτης εκτελεί μικρές κινήσεις περί τη θέση ισορροπίας του, τότε διαρρέεται από ρεύμα το οποίο προέρχεται από δύο πηγές: κατά πρώτον, από τη μεταβολή της αντίστασης στα δύο τμήματα του ηλεκτρικού κυκλώματος εκατέρωθεν του συνδέτη και, κατά δεύτερον, από την εμφάνιση επαγόμενης ΗΕΔ. Σύμφωνα με το νόμο του Lentz, μέρος της μαγνητικής δύναμης που οφείλεται στο επαγόμενο ρεύμα προκαλεί την απόσβεση των ταλαντώσεων (αποδεικνύεται ότι το συγκεκριμένο μέρος της μαγνητικής δύναμης είναι ευθέως ανάλογο προς την ταχύτητα του συνδέτη και μπορεί να θεωρηθεί ως το αντίστοιχο της τριβής εκ συννεκτικότητας). Η εκφώνηση του προβλήματος μας υποδεικνύει να αγνοήσουμε την επαγόμενη ΗΕΔ.

Ας ορίσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσο της κάτω ράγας και με τον θετικό ημιάξονα των  $x$  να εκτείνεται προς τα δεξιά (Σχήμα 4β). Ας θεωρήσουμε τώρα μια μικρή μετατόπιση του συνδέτη κατά μήκος του άξονα των  $x$  —προς τα αριστερά, ας πούμε. Αν ο συνδέτης μετατοπιστεί κατά απόσταση  $x$ , θα άγει ηλεκτρικό ρεύμα. Συμβολίζουμε το ρεύμα που ρέει από την αριστερή ηλεκτρική πηγή προς το συνδέτη με  $I_1$ , το ρεύμα που διαρρέει το συνδέτη με  $I_2$ , και το ρεύμα που εισέρχεται στη δεξιά ηλεκτρική πηγή με  $I_3$ . Βάσει του πρώτου νόμου του Kirchhoff, έχουμε

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Ας γράψουμε τώρα τον δεύτερο νόμο του Kirchhoff για το βρόχο του κυκλώματος που περιέχει την αριστερή ηλεκτρική πηγή και τη γέφυρα βραχυκύκλωσης καθώς και για το βρόχο που περιέχει τη δεξιά ηλεκτρική πηγή και τη γέφυρα βραχυκύκλωσης:

$$\begin{aligned} 2I_1\rho(L-x) + I_2R &= \mathcal{E}, \\ 2I_3\rho(L+x) - I_2R &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών ε-

ξισώσεων, βρίσκουμε το ρεύμα που διαρρέει το συνδέτη:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}x}{\rho(L^2 - x^2) + RL} \approx \frac{\mathcal{E}x}{\rho L^2 + RL},$$

όπου στην τελική έκφραση αγνοήσαμε τον όρο  $\rho x^2$  στον παρονομαστή λόγω του μικρού πλάτους των ταλαντώσεων.

Εφόσον ο συνδέτης βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου, δέχεται μαγνητική δύναμη:

$$F_A = I_2 l B = \frac{\mathcal{E} l B x}{L(\rho L + R)}.$$

Η συγκεκριμένη δύναμη κατευθύνεται προς τα δεξιά και τείνει να επαναφέρει το συνδέτη στη θέση ισορροπίας του. Η εξίσωση κίνησης του συνδέτη γράφεται ως

$$m\gamma_x = -\frac{\mathcal{E} l B}{L(\rho L + R)} x,$$

και από αυτήν προκύπτει αμέσως η περίοδος των μικρών ταλαντώσεών του:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E} l B}}.$$

### Φ200

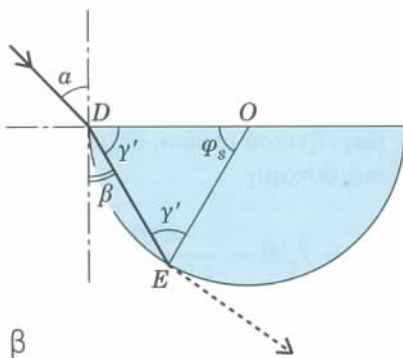
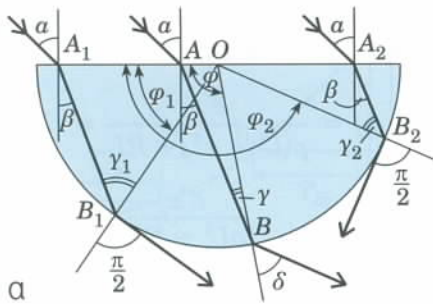
Η δέσμη που προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια του ημικυλίνδρου στο σημείο  $A$  υπό γωνία πρόσπτωσης  $\alpha = 45^\circ$  υφίσταται διάθλαση και κατόπιν διαδίδεται μέσα στο γυαλί υπό γωνία  $\beta$  (Σχήμα 5α), τέτοια ώστε να ικανοποιείται ο νόμος του Snell

$$\frac{\eta \mu \alpha}{\eta \mu \beta} = n,$$

σχέση από την οποία προκύπτει αμέσως ότι

$$\beta = \text{τοξ}\eta\mu \frac{\eta \mu \alpha}{n} = \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Εν συνεχεία, η δέσμη προσπίπτει στην καμπυλωμένη επιφάνεια στο σημείο  $B$  υπό κάποια γωνία  $\gamma$ , η οποία εξαρτάται από τη γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει η ακτίνα  $OB$  με την ε-



Σχήμα 5

πίπεδη όψη του ημικυλίνδρου:  $\gamma = \pi/2 + \beta - \varphi$  (Σχήμα 5α). Η δέσμη αυτή αναδύεται από τον ημικύλινδρο υπό γωνία  $\delta$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\delta} = \frac{1}{n}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\eta\mu\gamma = \frac{\eta\mu\delta}{n}$$

Δεδομένου ότι ισχύει η τετριμμένη ανισότητα  $\eta\mu\delta \leq 1$ , διαπιστώνουμε αμέσως ότι οι γωνίες πρόσπτωσης  $\gamma$  των ακτινών που κατορθώνουν να δραπετεύσουν από τον ημικύλινδρο υπόκεινται στον περιορισμό  $\eta\mu\gamma \leq 1/n$ . Στο Σχήμα 5α έχουν χαραχτεί οι δύο ακτίνες που εξέρχονται εφαπτομενικά από την καμπυλωμένη επιφάνεια ( $\delta = \pi/2$ ,  $\eta\mu\gamma_1 = \eta\mu\gamma_2 = 1/n$ ). Με τη βοήθεια του σχήματος αυτού διαπιστώνουμε αμέσως πως οι μόνες ακτίνες που αναδύονται από το γυαλί είναι όσες προσπίπτουν στην καμπυλωμένη επιφάνεια του ημικυλίνδρου ανάμεσα στα σημεία  $B_1$  και  $B_2$ , και για τις οποίες ισχύει  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . Εφόσον

$$\varphi_1 = \pi/2 - \gamma_1 + \beta, \quad \varphi_2 = \pi/2 + \gamma_2 + \beta$$

και

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n},$$

τελικά βρίσκουμε

$$\frac{\pi}{2} + \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}} - \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n} \leq \varphi \leq \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n} + \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}.$$

Προφανώς, το άνω όριο δεν επιτρέπεται να υπερβαίνει την τιμή  $\pi$ . Συνεπώς, για τις τιμές του  $n$  που αντιστοιχούν σε  $\varphi_2 > \pi$ , το άνω όριο για τη  $\varphi$  ισούται με  $\pi$ .

Είναι πιθανόν ότι για κάποιες τιμές του  $n$  το κάτω όριο της  $\varphi$  (δηλαδή, η  $\varphi_1$ ) θα αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή όπου δεν πέφτει απολύτως καμία ακτίνα. Το σύνορο της εν λόγω περιοχής μπορεί να προσδιοριστεί από την τροχιά της ακτίνας η οποία προσπίπτει στον ημικύλινδρο στο σημείο  $D$  (Σχήμα 5β). Προφανώς, η σκιασμένη περιοχή περικλείεται από το τόξο  $DE$  και την αντίστοιχη του χορδή.

Εφόσον το τρίγωνο  $DEO$  είναι ισοσκελές και έχει παρά τη βάση γωνία ίση με

$$\gamma' = \frac{\pi - \varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

έπεται ότι

$$\varphi_0 = 2\beta = 2 \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Το κατώτερο όριο της φωτισμένης περιοχής ισούται με  $\varphi_0$  εφόσον  $\varphi_0 > \varphi_1$  —δηλαδή όταν

$$2 \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2} +$$

$$\text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}} - \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n},$$

ή για

$$\text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n\sqrt{2}} + \text{τοξ}\eta\mu \frac{1}{n} > \frac{\pi}{2}.$$

### Σπαζοκεφαλιές

#### Σ196

Από τη διατύπωση του προβλήματος είναι φανερό ότι ο Βασίλης πήρε περισσότερο από το 1/10 των φρού-

των και λιγότερο από το 1/8. Επομένως, πήρε το 1/9 των φρούτων. Άρα, η κυρία Κόκκινου έχει εννέα εγγόνια. Η κατάσταση που περιγράφουμε είναι δυνατή αν, για παράδειγμα, υπάρχουν στο καλάθι οκτώ μήλα και δέκα αχλάδια. Σε αυτή την περίπτωση, οκτώ εγγόνια θα πάρουν από ένα μήλο και ένα αχλάδι, και ένα θα πάρει δύο αχλάδια. Είναι δυνατές και άλλες περιπτώσεις, όπου το πλήθος των φρούτων θα είναι μεγαλύτερο.

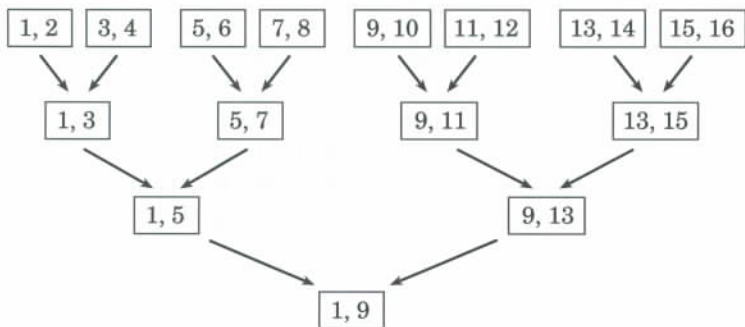
#### Σ197

Ας υποθέσουμε ότι το παιδί που απάντησε ότι χόρευε σε 5 τραγούδια είναι αγόρι. Τότε, κάθε κορίτσι χόρευε σε 3, 6 ή 9 τραγούδια, και έτσι το πλήθος των τραγουδιών που δηλώνουν τα κορίτσια διαιρείται διά του 3. Όμως, κάθε φορά που χόρευε ένα κορίτσι, χόρευε και ένα αγόρι (ο καβαλιέρος της). Συνεπώς, το πλήθος των τραγουδιών που χορέψαν τα αγόρια διαιρείται επίσης διά του 3. Όμως, το συνολικό πλήθος των χορών είναι  $6 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 9 = 56$ , και οι μισοί, 28, έγιναν από κορίτσια. Αφού το 28 δεν διαιρείται διά του 3, κάποια απάντηση είναι λανθασμένη. (Παρόμοια αντιμετωπίζουμε την περίπτωση που τους 5 χορούς τους δηλώνει κορίτσι.)

#### Σ198

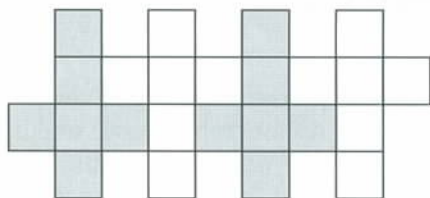
Ας υποθέσουμε ότι όλα τα παιχνίδια ήταν ενδιαφέροντα. Τότε, η ομάδα που κατετάγη 1η στην αρχική φάση, στη δεύτερη φάση έπαιξε με τη 2η, την 3η, την 4η και την 5η ομάδα. Συνεπώς, αυτές οι ομάδες δεν αγωνίστηκαν μεταξύ τους. Άρα, μία απ' αυτές τις ομάδες έπαιξε σε τρεις αγώνες με ασθενέστερες ομάδες (προτού συναντηθεί και χάσει από τον πρωταθλητή), μία έπαιξε σε δύο αγώνες με ασθενέστερη ομάδα, και μία έπαιξε σε έναν αγώνα με ασθενέστερη ομάδα. Συνολικά έδωσαν  $1 + 2 + 3 = 6$  αγώνες με ομάδες που είχαν καταταγεί από την 6η έως τη 16η θέση. Άρα, μία απ' αυτές τις ομάδες έπαιξε σε αγώνα με ομάδα που βρισκόταν στη 10η ή σε χαμηλότερη θέση, και αυτός ο αγώνας ήταν αδιάφορος. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να οργανώσουμε το πρωτάθλημα έτσι





Σχήμα 6

ώστε να υπάρχει μόνο ένα αδιάφορο παιχνίδι (βλ. Σχήμα 6). Δυστυχώς, αυτό πρέπει να είναι το παιχνίδι που θα κρίνει τον πρωταθλητή. (Οι οργανωτές ενός πραγματικού πρωταθλήματος με σειρά αγώνων «πλέι-οφ» πρέπει οπωσδήποτε να αποφύγουν μια τέτοια περίπτωση.)



Σχήμα 7

### Σ199

Δείτε το Σχήμα 7. Ας προσπαθήσουν οι αναγνώστες να βρουν τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να διπλωθεί αυτό το σχήμα για να δημιουργηθεί ο κύβος.

### Σ200

Το φιλμ αντιδρά στο κόκκινο φως σαν να υπήρχε σκοτάδι —επομένως, δεν διακρίνει το κόκκινο από το μαύρο. Άρα, η κόκκινη νεκροκεφαλή στο άσπρο φόντο θα φαίνεται μαύρη (στη φωτογραφία που θα τυπωθεί από το εν λόγω αρνητικό), ενώ η νεκροκεφαλή στη μαύρη σημαία δεν θα φαίνεται καθόλου (δηλαδή, ολόκληρη η σημαία θα φαίνεται μαύρη).

### Εκκωφαντικό λήπασμα

1. Εφόσον οι συγκεντρώσεις των αρχικών ουσιών μεταβάλλονται μόνο ελαφρά (πρόκειται για τυπική περίπτωση «μεταβολής μικρού βάθους»), η ταχύτητα της αντίδρασης μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Συνεπώς, ο ζη-

τούμενος χρόνος  $\tau$  καθορίζεται μέσω της απλής εξίσωσης  $\nu\tau = 10^{-2}n$ , ή

$$\tau = \frac{10^{-2}n}{z} e^{E/kT} = 7 \cdot 10^{-12} e^{E/kT} \text{ (s)}.$$

Αν εισαγάγουμε στην ανωτέρω έκφραση τις τιμές της ενέργειας ενεργοποίησης και της θερμοκρασίας, βρίσκουμε

$$\tau_{273} = 7 \cdot 10^{19} \text{ s} = 2 \cdot 10^{12} \text{ έτη}.$$

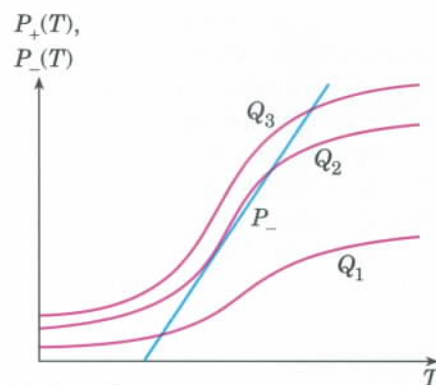
Πρόκειται για ένα χρονικό διάστημα μεγαλύτερο και από την ηλικία του σύμπαντος! Είναι απολύτως φυσικό λοιπόν να θεωρούμε αδρανές το αέριο μείγμα σ' αυτή τη συγκεκριμένη θερμοκρασία. Σε θερμοκρασία 600 K, ο χρόνος της αντίδρασης ανέρχεται σε  $\tau_{600} = 7 \cdot 10^2 \text{ s} \approx 10 \text{ min}$ , κάτι που υποδηλώνει βραδεία αντίδραση. Τέλος,  $\tau_{800} = 0,3 \text{ s}$ , αποτέλεσμα το οποίο φανερώνει ταχεία αντίδραση.

Συνεπώς, μια αύξηση της απόλυτης θερμοκρασίας του μείγματος μόνο κατά παράγοντα 2 (από τους 273 στους 600 K) μεταβάλλει την ταχύτητα των χημικών αντιδράσεων κατά δεκαεπτά ολόκληρες τάξεις μεγέθους!

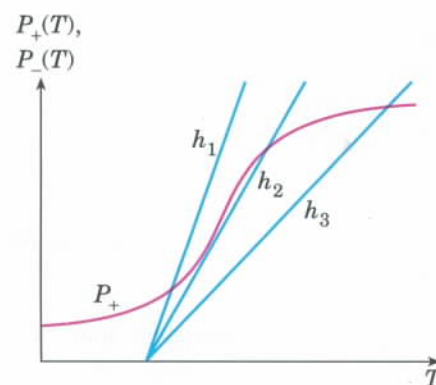
2. Αν η καμπύλη μεταβίβασης θερμότητας έχει μεγαλύτερη κλίση απ' ό,τι η καμπύλη παραγωγής θερμότητας, μια τυχαία αύξηση της θερμοκρασίας θα οδηγούσε στην ανισότητα  $P_- > P_+$ , οπότε το σύστημα θα ψυχόταν και θα επέστρεφε στο σημείο εκκίνησης.

Ομοίως, μια τυχαία μείωση της θερμοκρασίας οδηγεί στην αντίθετη ανισότητα, οπότε το σύστημα θερμαίνεται και η ισορροπία αποκαθίσταται πάλι.

Απεναντίας, αν η κλίση της κα-



Σχήμα 8



Σχήμα 9

μπύλης παραγωγής θερμότητας είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι της καμπύλης μεταβίβασης θερμότητας, μια μικρή μεταβολή της θερμοκρασίας που παρουσιάζεται τυχαία θα τείνει να αυξηθεί περαιτέρω —με άλλα λόγια, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

3. (α) Η μεταβολή της θερμότητας καύσης μιας αντίδρασης αλλάζει τη συνάρτηση παραγωγής θερμότητας (οι τεταγμένες των σημείων της καμπύλης πολλαπλασιάζονται επί έναν σταθερό συντελεστή), ενώ η ευθεία γραμμή που παριστά τη συνάρτηση μεταβίβασης θερμότητας δεν πρόκειται να αλλάξει. Στο Σχήμα 8,  $Q_1 < Q_2 < Q_3$ .

(β) Η μεταβολή του συντελεστή μεταβίβασης θερμότητας  $h$  θα έχει ως αποτέλεσμα να αλλάξει η κλίση της ευθείας μεταβίβασης θερμότητας. Στο Σχήμα 9,  $h_1 > h_2 > h_3$ .

### Καλειδοσκόπιο

1. Εφόσον και τα δύο αντικείμενα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, η απόσταση μεταξύ τους θα παραμείνει αμετάβλητη.

2. Το (φαινόμενο) βάρος ενός αν-

θρώπου που βρίσκεται εξ ολοκλήρου βυθισμένος στο νερό είναι ανάλογο με την επιτάχυνση της βαρύτητας και με τη διαφορά της πυκνότητας του σώματός του από εκείνης του νερού. Αν υποθέσουμε ότι το νερό παρουσιάζει τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες στη Γη και τη Σελήνη, τότε η κολύμβηση είναι ευκολότερη στη Σελήνη, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας ανέρχεται στο 1/6 περίπου εκείνης της Γης.

3. Ναι.

4. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, όταν κάποιο αντικείμενο μετακινείται από την επιφάνεια της Γης στο άπειρο, η ελκτική δύναμη μειώνεται από την τιμή  $mg$  ως το μηδέν. Συνεπώς, στην περίπτωση μας το βάρος των επιβατών μειώνεται από  $2mg$  στην επιφάνεια της Γης σε  $mg$  στο άπειρο.

5. Όχι.

6. Μετά την επιστροφή τους στη Γη, οι αστροναύτες κοιμούνται χωρίς μαξιλάρια για να αντισταθμίσουν τη δραστική ανακατανομή του αίματος που προκαλεί η μετάβαση από την κατάσταση έλλειψης βαρύτητας στις συνθήκες κανονικής βαρύτητας της Γης, και κατ' αυτό τον τρόπο να εξασφαλίσουν την τροφοδότηση του εγκεφάλου με επαρκή ποσότητα οξυγόνου. Ο ύπνος «με το κεφάλι χαμηλότερα από τα πόδια» προσομοιώνει την κατάσταση έλλειψης βαρύτητας στην οποία είχαν συνηθίσει οι αστροναύτες στη διάρκεια μιας μακρόχρο-

νης αποστολής.

7. Ναι, διότι η κατάσταση έλλειψης βαρύτητας δεν επηρεάζει τη διαδικασία της θερμικής διαστολής των υγρών.

8. Όχι.

9. Η διαφορά βάρους οφείλεται στην περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της.

10. Στους πλανήτες, οι οποίοι έχουν μεγάλη μάζα, η δύναμη της βαρύτητας κυριαρχεί επί των ελαστικών απωστικών δυνάμεων. Επομένως, η δράση της τείνει να ισοπεδώσει κάθε εξοχή του πλανητικού τοπίου.

Αντίθετα, στους αστεροειδείς και τους κομήτες η δύναμη της βαρύτητας είναι αμελητέα, οπότε το σχήμα αυτών των μικρών αντικειμένων το καθορίζουν διαδικασίες όπου τον κύριο ρόλο τον παίζουν οι συγκρούσεις, οι μοριακές δυνάμεις συνάφειας και οι κάθε είδους καταστροφές.

11. Η Γη είναι ελαφρώς «πεπλατυσμένη» στους πόλους, οπότε η διαδρομή κατά μήκος του μεσημβρινού είναι συντομότερη απ' ό,τι εκείνη κατά μήκος του ισημερινού. Έτσι, ο ταξιδιώτης που θα περάσει από τους πόλους θα φτάσει πρώτος στη γραμμή τερματισμού.

12. Η γραμμική ταχύτητα περιστροφής του ισημερινού πρέπει να ισούται με την ταχύτητα διαφυγής.

13. Θα απαντήσουμε παραφράζοντας την εξήγηση γι' αυτό το φαινόμενο που έδωσε ο Richard Feynman:

Η έλξη της ξηράς και των υδάτων από τη Σελήνη εξισορροπούνται στο κέντρο της Γης. Απεναντίας, η Σελήνη έλκει τα ύδατα που βρίσκονται στη «σεληνιακή» πλευρά της Γης πιο έντονα απ' ό,τι έλκει κατά μέσο όρο τη Γη, ενώ η έλξη των υδάτων στην απώτερη πλευρά του πλανήτη μας είναι ασθενέστερη από τη μέση έλξη της Γης. Επιπροσθέτως, σε αντίθεση με τα στερεά πετρώματα, το νερό έχει την ιδιότητα να ρέει. Αυτοί οι δύο παράγοντες προκαλούν τις παλίρροιας.

14. Η παλιρροϊκή επίδραση της Σελήνης προστίθεται στην παλιρροϊκή επίδραση του Ήλιου.

15. Οι εκλείψεις του Ήλιου όχι μόνο θα συνέβαιναν συχνότερα, αλλά θα διαρκούσαν και περισσότερο, επειδή η σκιά της Σελήνης θα κάλυπτε πολύ μεγαλύτερη επιφάνεια πάνω στη Γη απ' ό,τι στην πραγματικότητα.

16. Λόγω της ετερογένειας του βαρυτικού πεδίου του Ήλιου, ακόμη και σ' έναν σφαιρικά συμμετρικό πλανήτη που δεν περιστρέφεται, η επιτάχυνση της βαρύτητας θα διέφερε από σημείο σε σημείο πάνω στην επιφάνειά του.

#### Μικροπειραματισμοί

Όχι. Στην προκειμένη περίπτωση, το συνολικό βάρος εξισορροπείται από την άνωση, ενώ στην κατάσταση έλλειψης βαρύτητας η μοναδική δρώσα δύναμη είναι το βάρος.

### Μοναδικά εκπαιδευτικά βιβλία από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο



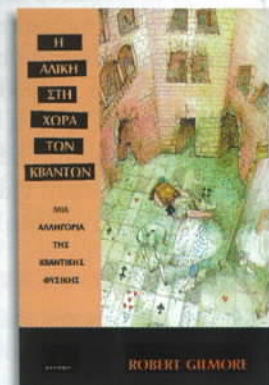
Σελ.: 284, 17 × 25 εκ., Α/Μ, Πανόδετο, 6.500 δρχ.



Σελ.: 148, 17 × 25 εκ., Α/Μ & Έγχρ., Πανόδετο, 5.400 δρχ.



Σελ.: 160, 17 × 25 εκ., Α/Μ, Πανόδετο, 5.500 δρχ.



Σελ.: 246, 17 × 25 εκ., Α/Μ, Πανόδετο, 6.500 δρχ.

# Μόνο για συνδρομητές

Προνόμιο  
έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και ταχυδρομήστε μας ή τηλεφωνήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 6 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 1.200 δρ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).\*

Η προσφορά δεν ισχύει:

— για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)

— για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)

— αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 31 Δεκεμβρίου 2000

— αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

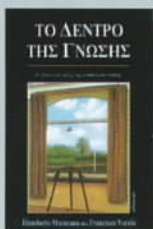
Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.

\* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.



Roger Penrose  
**Το μεγάλο, το μικρό και η ανθρώπινη νόηση**  
Πανόδετο  
Σελ.: 248, 6.500 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.550 δρχ.



H. Maturana & F. Varela  
**Το δέντρο της γνώσης**  
Οι βιολογικές ρίζες της ανθρώπινης νόησης  
Σελ.: 268, 7.200 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 5.000 δρχ.



René Dubos  
**Το όραμα της υγείας**  
Ουτοπία, πρόοδος και βιολογικές αλλαγές  
Σελ.: 312, 6.300 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.400 δρχ.



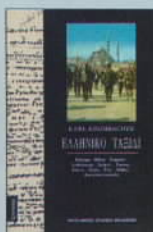
Raymond Smullyan  
**Την κυρία ή την τίγρη και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής**  
Σελ.: 240, 7.000 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.900 δρχ.



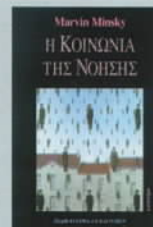
Peter Atkins  
**Το περιοδικό βασίλειο**  
Ταξιδεύοντας στη χώρα των χημικών στοιχείων  
Σελ.: 172, 5.300 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.700 δρχ.



Karl Krumbacher  
**Ελληνικό ταξίδι**  
Σελ.: 512, 7.000 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.900 δρχ.



Marvin Minsky  
**Η κοινωνία της νόησης**  
Σελ.: 580, 8.500 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 5.950 δρχ.



John Haugeland  
**Τεχνητή νοημοσύνη**  
Σχεδιάζοντας τη νόηση: από την υπολογιστική θεωρία στις σύγχρονες ενφνεείς μηχανές  
Σελ.: 378, 6.800 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.750 δρχ.



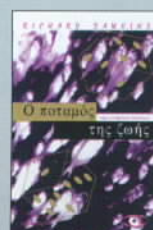
Boris Cyrulnik  
**Η γέννηση του νοήματος**  
Σελ.: 144, 3.300 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 2.300 δρχ.



Ian Stewart  
**Οι αριθμοί της φύσης**  
Οι μαθηματικές κανονικότητες των φυσικών μορφών  
Σελ.: 176, 5.200 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.650 δρχ.



Richard Dawkins  
**Ο ποταμός της ζωής**  
Μια δαρβινική θεώρηση  
Σελ.: 206, 5.200 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.650 δρχ.



Édouard Driault  
**Το Ανατολικό ζήτημα**  
Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών (τόμ. Α')

Σελ.: 528, 7.500 δρχ.  
Τιμή για τους συνδρομητές: 5.250 δρχ.

Εάν τους αναγνωρίζετε...



[www.leaderbooks.gr](http://www.leaderbooks.gr)

[www.leaderbooks.com](http://www.leaderbooks.com)

...θα τους συναντήσετε  
στα βιβλιοπωλεία που ξεχωρίζουν.



Leader Books A.E.

- Κατάστημα Α': Παναγή Κυριακού 17, Αμπελόκηποι, Τηλ.: 64.66.118  
Κατάστημα Β': Σόλωνος & Εμ. Μπενάκη 45, Τηλ.: 38.11.937  
Κατάστημα Γ': Αγ. Ιωάννου 75, Αγία Παρασκευή, Τηλ.: 60.15.435  
Κατάστημα Δ': Παν/πολη Ζωγράφου, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τηλ.: 72.57.485  
Κατάστημα Ε': Παν/πολη Ζωγράφου, Φιλοσοφική Σχολή, Τηλ.: 72.77.024-5  
Γραφεία: Κόνιαρη 62, Αμπελόκηποι, Τηλ.: 64.52.825 - 64.50.048, Fax: 64.49.924  
e-mail: [info@leaderbooks.com](mailto:info@leaderbooks.com)