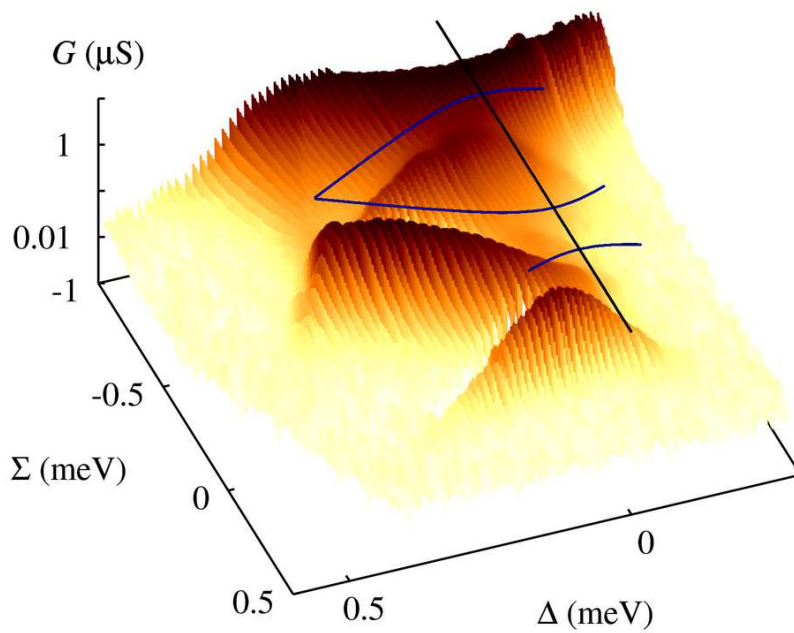


# Gekoppelte Quantenpunkte im Bereich niedrigster Elektronenzahlen



Dissertation der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
Andreas Klaus Hüttel  
aus Ludwigshafen am Rhein

München, den 8. Juni 2005

---

Erstgutachter: Prof. Dr. Jörg P. Kotthaus  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jan von Delft  
Tag der mündlichen Prüfung: 3. August 2005

Die Abbildung auf der Titelseite zeigt den differentiellen Leitwert eines mit maximal einem Elektron geladenen Doppelquantenpunkts bei endlicher *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = -0,75 \text{ mV}$  und starker Tunnelkopplung zwischen den zwei Quantenpunkten, als Funktion von mittlerem chemischen Potential in beiden Quantenpunkten  $\Sigma$  und Potentialasymmetrie  $\Delta$ . Es handelt sich hierbei um eine dreidimensionale Aufbereitung der Meßdaten von Abbildung 8.5(b), Seite 90. Für eine detaillierte Behandlung sei auf Kapitel 8 verwiesen.

Diese Dissertationsschrift ist bei **Verlag Dr. Hut München**  
unter der ISBN 3-89963-248-6 als Buch erschienen.

Die vorliegende PDF-Version ist im Vergleich zur Druckversion durch Hyperlinks ergänzt, was leichte Änderungen im Seitenumbruch mit sich bringt. Weiterhin sind hier alle Graphiken in Farbe wiedergegeben.

# Inhaltsangabe

Quantenpunkte sind elektrisch leitende Inseln in einem ansonsten nichtleitenden Halbleiter. In ihnen sind Elektronen in einem Potential gefangen, so daß man auch von „künstlichen Atomen“ spricht. In Analogie zur Molekülphysik können Quantenpunkte kohärent zu Doppelquantenpunkten gekoppelt werden, in denen delokalisierte „molekulare“ Zustände vorliegen. Sind Quantenpunkte durch Tunnelbarrieren an Zuleitungen gekoppelt, so kann der quantenmechanische Zustand der Elektronen durch Transportspektroskopie untersucht werden. Es wird mit ausgenutzt, daß aufgrund der Coulomb-Abstoßung Strom durch einen Quantenpunkt über sequentielles Einzelelektronentunneln nur bei bestimmten Werten des elektrostatischen Potentials fließt. In dieser Arbeit werden Quantenpunkte im zweidimensionalen Elektronengas einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur mittels Gatterelektroden bei tiefen Temperaturen elektrostatisch definiert. Tunnelstrom und differentieller Leitwert durch die Quantenpunkte werden u.A. in Abhängigkeit von angelegten Spannungen und Magnetfeldern betrachtet. Zusätzlich wird ein Quantenpunktkontakt als kapazitiver Ladungsdetektor verwendet.

Messungen an einem Quantenpunkt, der vollständig von Leitungsbandelektronen entleert werden kann, werden präsentiert. Hierbei werden ansatzweise die elektronischen Zustände eines zweidimensionalen harmonischen Potentials sichtbar. Bei stärkerer Ankopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen wird ein magnetfeldabhängiger Hybridisierungseffekt von lokalisierten Zuständen und Zuständen der Zuleitungen, der sogenannte Kondo-Effekt, beobachtet. Bei hohem Magnetfeld werden Asymmetrie-Effekte beobachtet, deren Ursache noch nicht identifiziert ist.

Durch Verzerrung des Potentials wird dieser Quantenpunkt in einen Doppelquantenpunkt, d.h. ein Doppelmuldenpotential für die Elektronen, verformt. Das Transportspektrum dieses Systems wird für  $0 \leq N \leq 2$  gefangene Elektronen detailliert betrachtet. Die Niveauabstoßung zwischen symmetrischem Grundzustand und antisymmetrischem angeregten Zustand eines Elektrons als Funktion der Potentialasymmetrie wird direkt beobachtet. Dies ermöglicht eine eindeutige Zuordnung dieser Zustände sowie eine Bestimmung der Tunnelaufspaltung. Bei endlichem Magnetfeld wird eine zusätzliche Niveauabstoßung sichtbar. Hier hybridisiert der Grundzustand einer Potentialmulde mit einem angeregten Zustand der zweiten Mulde. Das Transportspektrum wird auf Zwei-Elektronen-Effekte wie z.B. die Spin-Austauschwechselwirkung untersucht und mit theoretischen Vorhersagen verglichen.

Weiterhin werden Messungen vorgestellt, in denen ein Quantenpunkt im Magnetfeld einen Speichereffekt auf einer Zeitskala von 10 min aufweist. Die Abhängigkeit dieses Speichereffekts von verschiedenen Parametern wird diskutiert. Eine Interpretation der Beobachtungen als durch die tunnelnden Elektronen induzierte dynamische Kernspinpolarisation wird gegeben. Abschließend wird von Messungen an einem Quantenpunkt berichtet, der sich in einer oberflächennahen Heterostruktur unterhalb einer einzelnen Gatterelektrode bildet. Hierbei kann insbesondere ein sehr deutlicher Kondo-Effekt beobachtet werden.

## INHALTSANGABE

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsangabe</b>	<b>iii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Probenherstellung</b>	<b>5</b>
2.1 Niedrigdimensionale Elektronensysteme . . . . .	5
2.2 Lithographische Strukturierung . . . . .	9
2.2.1 Optische Lithographie . . . . .	9
2.2.2 Elektronenstrahl-Lithographie . . . . .	12
<b>3 Theorie des Einzelelektronentunnelns durch Quantenpunkte</b>	<b>15</b>
3.1 Linearer Transport . . . . .	15
3.1.1 Klassische Coulomb-Blockade . . . . .	16
3.1.2 Von der klassischen metallischen Insel zum Quantenpunkt . . .	20
3.1.3 Das „constant interaction model“ . . . . .	22
3.2 Nichtlinearer Transport . . . . .	23
3.3 Transportspektroskopie mittels externer Magnetfelder . . . . .	27
3.3.1 Einfluß der Zuleitungen . . . . .	27
3.3.2 Spinzustände, Zeeman-Aufspaltung . . . . .	28

3.3.3	Fock-Darwin-Spektrum . . . . .	29
3.4	Tunnelprozesse höherer Ordnung . . . . .	31
3.4.1	Kotunneln in Coulomb-Blockade . . . . .	31
3.4.2	Kondo-Effekt . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Theorie des Transports durch Doppelquantenpunkte</b>	<b>37</b>
4.1	Schwache Tunnelkopplung . . . . .	37
4.1.1	Linearer Transport . . . . .	37
4.1.2	Nichtlinearer Transport . . . . .	42
4.2	Starke Tunnelkopplung . . . . .	44
4.2.1	Ein Elektron im Doppelquantenpunkt . . . . .	44
4.2.2	Zwei Elektronen im Doppelquantenpunkt . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Meßaufbau</b>	<b>55</b>
6.1	Kühlapparaturen . . . . .	55
6.1.1	Oxford Instruments Kelvinox 100 . . . . .	55
6.1.2	Mischkryostat-Eigenbau des Walther-Meissner-Instituts . . . . .	57
6.2	Meßprinzip und elektronischer Meßaufbau . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Ein Quantenpunkt mit <math>N=0,1,2,\dots</math> Elektronen</b>	<b>61</b>
7.1	Probengeometrie . . . . .	61
7.2	Beobachtung der Fock-Darwin-Zustände . . . . .	64
7.2.1	Elektronenzahl und Energieskalen . . . . .	64
7.2.2	Fock-Darwin-Zustände . . . . .	66
7.3	Starke Kopplung an die Zuleitungen . . . . .	69
7.3.1	Kern-Ring-Modell des Magnetfeld-modulierten Kondo-Effekts	71
7.3.2	Abhängigkeit von Temperatur und source-drain-Spannung . . . . .	72
7.4	Resonanzaufspaltungen bei hohem Magnetfeld . . . . .	74

<b>8</b>	<b>Ein Doppelquantenpunkt mit <math>N=0,1,2,\dots</math> Elektronen</b>	<b>81</b>
8.1	Verformung eines Einzelquantenpunkts zum Doppelquantenpunkt . . .	81
8.2	Transport bei endlicher source-drain-Spannung . . . . .	85
8.3	Transportspektrum für $0 \leq N \leq 1$ . . . . .	88
8.3.1	Einzelelektronentunneln . . . . .	88
8.3.2	Kotunnelprozesse in der Coulomb-Blockade . . . . .	94
8.3.3	Auswirkungen eines senkrechten Magnetfelds . . . . .	95
8.3.4	Kontrolle der Tunnelaufspaltung . . . . .	99
8.4	Transportspektrum für $1 \leq N \leq 2$ Elektronen . . . . .	103
8.4.1	Gemeinsamkeiten mit dem Fall $0 \leq N \leq 1$ . . . . .	103
8.4.2	Unterschiede im Transportspektrum der Tripelpunkte . . . . .	107
8.5	Annähernd symmetrische Potentialvariation durch $U_{gC}$ . . . . .	108
8.5.1	Vergleich der Meßmethoden und Fehlerabschätzung . . . . .	108
8.5.2	Einelektronen-Spektrum und Tunnelkopplung . . . . .	110
8.5.3	Zweielektronen-Spektrum . . . . .	114
8.5.4	Tunnelprozesse höherer Ordnung . . . . .	117
<b>9</b>	<b>Kopplung von Elektronen- und Kernspins in einem Quantenpunkt</b>	<b>121</b>
9.1	Meßaufbau und Charakterisierung des Quantenpunkts . . . . .	121
9.2	Pumpstrom bei HF-Einstrahlung . . . . .	125
9.3	Auftreten eines Speichereffekts bei variiertem Magnetfeld $B_{\perp}$ . . . . .	129
9.3.1	Beobachtung und Quantifizierung . . . . .	129
9.3.2	Abhängigkeit des Speichereffekts von externen Parametern . . . . .	132
9.4	Interpretation als Kernspinpolarisation . . . . .	134
<b>10</b>	<b>Spineffekte in einem Einzelgatter-Quantenpunkt</b>	<b>139</b>
10.1	Probengeometrie und Besonderheiten . . . . .	139
10.2	Definition eines Einzelgatter-Quantenpunkts . . . . .	141
10.3	Beobachtung des Kondo-Effekts . . . . .	144
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>149</b>

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>A</b>	<b>Verwendete Heterostrukturen</b>	<b>155</b>
A.1	Heterostruktur #81059, K. Eberl . . . . .	155
A.2	Heterostruktur C021223A, W. Wegscheider . . . . .	155
<b>B</b>	<b>Parameter der Probenpräparation</b>	<b>157</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>161</b>
	<b>Publikationsliste</b>	<b>179</b>
	<b>Dank</b>	<b>181</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>183</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Aufbau und Bandkantenverlauf einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur . . . . .	6
2.2	Lokale Verarmung eines zweidimensionalen Elektronengases . . . . .	8
2.3	Definition eines Quantenpunkts durch <i>split gates</i> . . . . .	9
2.4	Optische Kontaktlithographie . . . . .	10
2.5	Strukturformel von Polymethylmethacrylat . . . . .	12
2.6	Strukturformel von Calixaren . . . . .	13
3.1	Kapazitives Ersatzschaltbild eines Quantenpunkts . . . . .	16
3.2	Energiediagramm eines Quantenpunkts . . . . .	18
3.3	Überblick zur klassischen Coulomb-Blockade . . . . .	19
3.4	Nichtlineare Transportspektroskopie eines Quantenpunkts . . . . .	24
3.5	Chemisches Potential der Zuleitungen im Magnetfeld . . . . .	28
3.6	Fock-Darwin-Eigenzustände im Magnetfeld . . . . .	30
3.7	Kotunneln durch einen Quantenpunkt . . . . .	32
3.8	Kondo-Effekt für Störstellen in Metallen und Quantenpunkte . . . . .	34
4.1	Kapazitives Ersatzschaltbild eines seriellen Doppelquantenpunkts . . . . .	38
4.2	Stabilitätsdiagramm eines Doppelquantenpunkts . . . . .	39
4.3	Transportbedingung bei endlicher <i>source-drain</i> -Spannung . . . . .	43
4.4	Gekoppeltes Zweizustandssystem . . . . .	44
4.5	Auswirkungen starker Tunnelkopplung auf das Stabilitätsdiagramm . . . . .	45
5.1	Kennlinie eines Quantenpunktkontakts . . . . .	52
5.2	Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt . . . . .	52

6.1	Mischkryostat Oxford Instruments Kelvinox 100 . . . . .	56
6.2	Mischkryostat-Eigenbau des WMI Garching . . . . .	58
6.3	Schematischer Aufbau der Meßelektronik . . . . .	60
7.1	Gattergeometrie der verwendeten Probe . . . . .	62
7.2	Nichtlinearer Transport und Nachweis der Elektronenzahl . . . . .	65
7.3	Verschiebung der Leitwertmaxima im senkrechten Magnetfeld . . . . .	67
7.4	Magnetfeldabhängigkeit von $G$ für offenere Tunnelbarrieren . . . . .	70
7.5	Modell des Magnetfeld-modulierten Kondo-Effekts . . . . .	72
7.6	Temperaturabhängigkeit ausgewählter „Kondo-Schachbrett“-Felder . . . . .	73
7.7	Auswertung der Temperaturabhängigkeit des Kondo-Leitwerts . . . . .	75
7.8	Aufspaltung der Leitwertmaxima bei hohem Magnetfeld . . . . .	76
7.9	Magnetfeldabhängigkeit der Aufspaltung . . . . .	77
7.10	Abhängigkeit der Linienaufspaltung von $U_{gL}$ und $U_{gR}$ . . . . .	78
7.11	Nichtlineare Transportmessung bei $B_{\perp} = 6\text{T}$ . . . . .	79
7.12	Spekulatives Modell für die Aufspaltung . . . . .	80
8.1	Verformung eines Quantenpunkts zum Doppelquantenpunkt . . . . .	83
8.2	Stabilitätsdiagramm des Doppelquantenpunkts . . . . .	84
8.3	Schwach gekoppelter Doppelquantenpunkt bei $ U_{SD}  \gg 0$ . . . . .	86
8.4	Stark gekoppelter Doppelquantenpunkt bei $ U_{SD}  \gg 0$ . . . . .	87
8.5	Strom, Leitwert und Ladungsdetektion für $N \leq 1$ . . . . .	90
8.6	Kotunneln im Bereich der Coulomb-Blockade . . . . .	94
8.7	Strom, Leitwert und Ladungsdetektion für $N \leq 1$ im Magnetfeld . . . . .	96
8.8	Niveauabstoßung von Grund- und angeregtem Zustand . . . . .	98
8.9	Tunnelaufspaltung und Ladeenergie als Funktion von $U_{gC}$ und $B_{\perp}$ . . . . .	99
8.10	Skizze zur Magnetfeldabhängigkeit von $2t_0$ . . . . .	101
8.11	Ermittlung der Tunnelkopplung nach [DiCarlo u. a. 2004] . . . . .	102
8.12	Strom, Leitwert und Ladungsdetektion für $1 \leq N \leq 2$ im Magnetfeld . . . . .	104
8.13	Zusätzliche Kotunnelprozesse für zwei Elektronen . . . . .	105
8.14	Methoden zur symmetrischen Potentialvariation . . . . .	108
8.15	Nichtlinearer Transport für $\Delta \simeq 0$ . . . . .	110

8.16	Linienverschiebung für $\Delta \simeq 0$ im Magnetfeld . . . . .	112
8.17	Magnetfeldabhängigkeit der Tunnelaufspaltung . . . . .	113
8.18	Anregungsenergie des ersten höher angeregten Zustands . . . . .	114
8.19	Vorhersage und Messung des Transportspektrums bei $1 \leq N \leq 2$ . . . . .	115
8.20	Breite der Leitwertmaxima im Magnetfeld . . . . .	116
8.21	Tunnelprozesse höherer Ordnung in Coulomb-Blockade . . . . .	118
9.1	Probenbühne des WMI-Mischkryostaten mit HF-Antennen . . . . .	122
9.2	Gatterstruktur der verwendeten Probe . . . . .	123
9.3	Nichtlineare Transportmessung des Quantenpunkts . . . . .	124
9.4	Gleichrichtungseffekte bei Strahlungseinkopplung . . . . .	126
9.5	Gleichrichtung durch adiabatische Einkopplung . . . . .	127
9.6	Gleichrichtungseffekte bei Strahlungseinkopplung und $B_{\perp} > 0$ . . . . .	129
9.7	Beobachtung eines Langzeit-Speichereffekts . . . . .	130
9.8	Relaxation des Speichereffekts . . . . .	131
9.9	Abhängigkeit des Speichereffekts von externen Parametern . . . . .	133
9.10	Provisorisches Modell eines Polarisationsmechanismus . . . . .	135
9.11	Anomalie der Relaxationszeit . . . . .	136
9.12	Coulomb-„Blockade“ der Kernspinrelaxation . . . . .	137
10.1	Gatterstruktur der verwendeten Probe . . . . .	140
10.2	Lithographisch hergestellte Schleifenantenne . . . . .	141
10.3	Umladungen in der oberflächennahen Heterostruktur . . . . .	142
10.4	Nichtlinearer Transport . . . . .	143
10.5	Zeeman-Aufspaltung im parallelen Magnetfeld . . . . .	144
10.6	Nichtlinearer Transport im Kondo-Regime . . . . .	145
10.7	Temperaturabhängigkeit des Kondo-Leitwerts . . . . .	146
10.8	Kondo-Effekt im senkrechten Magnetfeld . . . . .	147
A.1	Schichtenfolge in Heterostruktur C021223A . . . . .	156

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

---

# Tabellenverzeichnis

3.1	Im Einzelektronentunneln auftretende Transportregimes . . . . .	22
7.1	Gatterspannungen bei den Einzelquantenpunkt-Messungen . . . . .	64
8.1	Konversionsfaktoren des Doppelquantenpunkts . . . . .	88
8.2	Gatterspannungen bei den Doppelquantenpunkt-Messungen . . . . .	109

## TABELLENVERZEICHNIS

---

# Symbolverzeichnis

$\vec{A}$	Magnetisches Vektorpotential
$A$	Verformungsmaß der Strom-Kennlinie (Gleichung 9.3, Seite 131)
$\alpha_g$	Konversionsfaktor im Einzelquantenpunkt, $d\mu_{\text{QD}}/(e dU_g)$ (Gleichung 3.7, Seite 18)
$\alpha_{gX}^Y$	Konversionsfaktor im Doppelquantenpunkt, $d\mu_Y/(e dU_{gX})$ (Gleichung 4.3, Seite 40)
$\vec{B}, B_{\perp}, B_{\parallel}$	Magnetfeld, senkrecht bzw. parallel zur Ebene des zweidimensionalen Elektronengases ausgerichtet
$C_g, C_{gY}^X$	Kapazität zwischen Quantenpunkt und Gatter bzw. zwischen Quantenpunkt X und Gatter Y
$C_{\Sigma}, C_{\Sigma X}$	Gesamtkapazität eines Quantenpunkts bzw. des Quantenpunkts X
$\mathcal{C}$	<i>concurrence</i> eines Quantenzustands [Wootters 1997, Schliemann u. a. 2001]
$D$	Zustandsdichte
$\Delta$	Energiekoordinate der Asymmetrie im Doppelquantenpunkt; $(\mu_R - \mu_L)/2$ (Gleichung 4.8, Seite 41)
$E$	Energie, Grundzustandsenergie eines Quantenpunkts
$E^*$	Energie eines angeregten Zustands eines Quantenpunkts
$E_{\text{klass.}}$	Klassische elektrostatische Gesamtenergie eines Quantenpunkts (Gleichung 3.6, Seite 18)
$E_C$	Ladeenergie eines Quantenpunkts (Gleichung 3.1, Seite 16)
$E_{C2}, E_{C3}$	Ladeenergie zum Laden mit dem zweiten bzw. dritten Elektron
$E_F$	Fermi-Energie
$E_L$	Energie der Unterkante des Leitungsbands
$E_+, E_-$	Energie des symmetrischen und antisymmetrischen molekularen Einelektronenzustands im Doppelpotentialtopf (Gleichung 4.13, Seite 45)

$E_S, E_T$	Energie des niedrigstliegenden Singlet- und des Tripletzustands zweier Elektronen im Doppelpotentialtopf (Gleichung 4.21, Seite 48)
$\delta E$	Energieunschärfe
$\mathcal{E}_n$	Energie des $n$ -ten Subbands im zweidimensionalen Elektronengas
$e$	Elementarladung; $ e  = -e$
$\epsilon_n$	Eigenenergie des $n$ -ten Einteilchenniveaus in einem Potentialtopf
$\Delta \epsilon$	Unterschied zwischen Eigenenergien von Elektronenzuständen, Anregungsenergie, Skala der orbitalen Niveauquantisierung
$F$	Freie Energie, Helmholtz-Potential
$f$	Frequenz
$f_{\text{lock-in}}$	Modulationsfrequenz des Lock-in-Verstärkers
$G$	Differentieller Leitwert
$G_0$	Leitwertquantum, $e^2/h$
$G_T$	Steilheit ( <i>transconductance</i> ), $dI_{\text{QPC}}/dU_g$ (Gleichung 5.1, Seite 53)
$G_\Sigma$	Summe der Leitwerte aller an einen Quantenpunkt ankoppelnden Zuleitungen
$g$	Landé-Faktor der Zeeman-Aufspaltung
$\Gamma$	Tunnelrate entsprechend der Lebensdauer verbreiterung in einem Quantenpunkt
$\Gamma_S, \Gamma_D$	Tunnelrate zwischen Quantenpunkt und <i>source</i> - bzw. <i>drain</i> -Zuleitung
$H_C$	Hamilton-Operator der Coulomb-Wechselwirkung zweier Elektronen (Gleichung 4.19, Seite 47)
$H_Z$	Hamilton-Operator der Zeeman-Wechselwirkung (Gleichung 3.30, Seite 28)
$h$	Planck'sches Wirkungsquantum
$I$	Strom
$\vec{I}$	Kernspin
$J$	Heisenberg-Austauschwechselwirkung zweier Elektronen, $E_T - E_S$ (Gleichung 4.25, Seite 49)
$k_B$	Boltzmann-Konstante
$L_n^m(x)$	Laguerre-Polynom (Gleichung 3.39, Seite 30)
$L$	Mittlere freie Weglänge
$l_0$	Fock-Darwin-Länge (Gleichung 3.38, Seite 30)



$l_B$	Magnetische Länge (Gleichung 3.38, Seite 30)
$l_z$	$z$ -Komponente des Drehimpulsoperators
$\lambda$	Index eines Landauniveaus ( $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ )
$\lambda_F$	Fermi-Wellenlänge
$m$	Drehimpulsquantenzahl eines Fock-Darwin-Zustands ( $m = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$ )
$m^*$	Effektive Elektronenmasse in GaAs
$\tilde{\mu}$	Beweglichkeit im Drude-Modell
$\mu_S, \mu_D, \mu$	Chemisches Potential in Zuleitung <i>source</i> bzw. <i>drain</i> oder in beiden Zuleitungen
$\mu_{QP}$	Chemisches Potential in einem Quantenpunkt (Gleichung 3.5, Seite 18)
$\mu_L, \mu_R$	Chemisches Potential im linken bzw. rechten Quantenpunkt eines Doppelquantenpunkts (Gleichung 4.2, Seite 38)
$N$	Zahl der Elektronen in einem Quantenpunkt
$N_L, N_R$	Zahl der Elektronen im linken bzw. rechten Quantenpunkt eines Doppelquantenpunkts
$n$	Hauptquantenzahl (Energiequantenzahl) eines Fock-Darwin-Zustands ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )
$n_r$	Radialquantenzahl eines Fock-Darwin-Zustands
$n_s$	Elektronenflächendichte des zweidimensionalen Elektronengases
$\nu$	Füllfaktor eines Quantenpunkts
$\nu_{2DEG}$	Füllfaktor des zweidimensionalen Elektronengases
$\Omega$	Großkanonisches Potential (Gleichung 3.3, Seite 17)
$\omega_0$	Oszillatorkonstante eines parabolischen Potentials
$\omega_c$	Zyklotronfrequenz, $ e  B_{\perp} / m^*$
$P$	Ausgangsleistung eines cw-Hochfrequenzgenerators
$\vec{p}$	Impuls, Impulsoperator
$\Phi_{nm}(r, \theta)$	Fock-Darwin-Wellenfunktion
$\phi$	Wechselwirkungsparameter zweier Elektronen im Doppelquantenpunkt (Gleichung 4.22, Seite 48)
$\Psi_m(\theta)$	Winkelanteil einer Fock-Darwin-Wellenfunktion
$R_{nm}(r)$	Radialteil einer Fock-Darwin-Wellenfunktion
$S$	Entropie

$\vec{S}$	Elektronenspin
$\Sigma$	Symmetrische Energiekoordinate im Doppelquantenpunkt; $(\mu_R + \mu_L)/2$ (Gleichung 4.8, Seite 41)
$T$	Temperatur
$T_{el}$	Elektronentemperatur im zweidimensionalen Elektronengas
$T_{MC}$	Mischkammertemperatur des Kryostaten
$T_K$	Kondo-Temperatur (Gleichung 3.43, Seite 35)
$t_0$	Tunnelkopplung im Doppelquantenpunkt (Gleichung 4.12, Seite 44)
$t$	Zeit
$t_2$	Phasenkohärenzzeit
$\tau_A$	Zeitkonstante der exponentiellen Abnahme von $\mathcal{A}(t)$ (Gleichung 9.3, Seite 131)
$\theta$	Winkel
$U_g, U_{gX}$	Gatterspannung (angelegt an Gatter $gX$ )
$U_{SD}$	<i>source-drain</i> -Spannung eines Quantenpunkts
$\vec{x}$	Ort, Ortsoperator
$Z$	Zustandssumme

---

# Kapitel 1

## Einleitung

Quantenpunkte, also elektrisch leitfähige Inseln inmitten eines nichtleitenden Materials, haben sich im Lauf des vergangenen Jahrzehnts zu einem vielbeachteten Forschungsgebiet entwickelt. Die Skala aktueller Arbeiten umfaßt viele Materialsysteme. Sie reicht von Halbleiter-Nanokristallen [Müller u. a. 2004, Alivisatos 1996] über selbstorganisierend gewachsene InAs-Quantenpunkte [Högele u. a. 2004, Kroutvar u. a. 2004], isolierte Si-Inseln [Gorman u. a. 2005] und aus einer Heterostruktur geätzte Pfeiler [Hatano u. a. 2004] bis zu den hier verwendeten elektrostatisch in einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur definierten Systemen [Ciorga u. a. 2004, Johnson u. a. 2005, Hanson u. a. 2004].

Mehrere Faktoren haben zu dem großen Interesse an diesem Forschungsgebiet beigetragen. In der mesoskopischen Physik [Imry 1997] wird der Übergang zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik betrachtet. Da in Quantenpunkten Elektronen ähnlich der Hülle eines Atoms in einem Potential gefangen sind, wurde schon frühzeitig der Begriff „künstliche Atome“ für sie geprägt [Ashoori 1996]. Analog entstand die Bezeichnung „künstliche Moleküle“ für kohärent tunnelgekoppelte Quantenpunktsysteme [Blick u. a. 1996, Livermore u. a. 1996]. Quantenmechanische Effekte prägen mit die Eigenschaften dieser ausgedehnten Objekte. Die Einbettung der Quantenpunkte in das umgebende Kristallgitter ermöglicht Einblicke in Dekohärenzmechanismen der Ladungs- und Spinzustände wie Elektron-Phonon-Kopplung [Fujisawa u. a. 1998, Weig u. a. 2004], Spin-Bahn-Kopplung [Zumbühl u. a. 2002] und Hyperfeinkopplung zu den Kernspins des Kristallgitters [Khaetskii u. a. 2002, Petta 2005]. Hierbei liegen im Vergleich zu Atomen und Molekülen in Halbleiter-Quantenpunkten unterschiedliche Energieskalen vor. Ladeenergien von 1 – 5 meV statt atomaren Ionisierungsenergien von  $\sim 10$  eV und Anregungsenergien von 0,05 – 1 meV statt  $\sim 1$  eV ermöglichen die detaillierte Beobachtung von Phänomenen der Atom- und Molekülphysik, die an realen Atomen und Molekülen der Verwendung im Labor unerreichbarer hoher magnetischer und elektrischer Felder bedarf. Zumin-

dest auf theoretischer Seite bietet sich dabei die direkte Übernahme von Methoden und Modellen der Atom- und Molekülphysik an [Golovach und Loss 2004].

Weiterhin liefert auch die Halbleiterindustrie einen Anreiz für die Forschung an elektronischen Nanostrukturen. Die rapide fortschreitende Miniaturisierung und Integration von Chipstrukturen folgt im Moment noch weitgehend dem Moore'schen Gesetz — einer Vorhersage exponentiell zunehmender Bauteilintegration, die erstmals 1965 formuliert wurde [Moore 1965]. Die typische Längenskala der Transistoren kommerziell erhältlicher integrierter Schaltkreise liegt jedoch bereits unter 100 nm, so daß ein Erreichen des Quantenlimes in absehbarer Zeit bevorsteht [Moore 2005]. Insbesondere auch die hohe Dissipation in Bauteilen hoher Integration mit Taktfrequenzen im GHz-Bereich stellt derzeit ein Problem dar. Mehrere Auswege wurden bereits vorgeschlagen, sind jedoch alle noch weit von der großtechnischen Realisierung entfernt. Zu diesen zählt molekulare Elektronik [Flood u. a. 2004] oder der Ansatz der *spintronics* [Sharma 2005], in dem Spin- statt Ladungsströme verwendet werden sollen. Eine weitere Möglichkeit ist der „klassische“ Einzelelektronentransistor. Er verwendet einzelne Elementarladungen zum Speichern binärer Zustände und ist bis auf das Materialsystem Metall den hier verwendeten Quantenpunkten sehr ähnlich. In der Forschung haben sich Einzelelektronentransistoren inzwischen zu einem von mehreren Standardbauteilen zur Detektion von Ladungsverschiebungen entwickelt. Ihr Einsatzgebiet rangiert von der Detektion lokalisierter Ladungszustände im Quanten-Hall-Regime [Ilani u. a. 2004] bis hin zur ultraschnellen Ladungsdetektion und dem Zählen einzelner Elektronen im Stromfluß [Bylander u. a. 2005].

Ein weiterer Ansporn für Forschung an Quantenpunkten schließlich geht von der Möglichkeit aus, die Kohärenz der Atom- und Molekülphysik mit der Funktion der Rechnerbauteile zu kombinieren. Die bereits erwähnten Modelle für neuartige Rechnerarchitekturen beruhen alle auf der klassischen binären Logik, die auch die Grundlage heutiger Datenverarbeitung bildet. Die sogenannte *strong Church-Turing thesis*, ein Postulat der theoretischen Informatik, besagt in diesem Fall, daß die prinzipiellen Fähigkeiten derartiger Rechnerarchitekturen äquivalent sind. Das Modell des sogenannten Quantencomputers [Feynman 1985, Deutsch 1985], das im vergangenen Jahrzehnt ständig wachsendes theoretisches und experimentelles Interesse geweckt hat, steht hierzu im direkten Gegensatz. Mit der Verwendung eines quantenmechanischen Zweizustandssystems als Speicherregister und kohärenter unitärer Transformationen als Rechenoperationen ergeben sich aufgrund des über Linearkombinationen von Zuständen inhärenten Quantenparallelismus und über das Phänomen der Verschränkung von Zuständen prinzipiell neue Möglichkeiten. Dies wurde insbesondere durch die Entwicklung mehrerer Quantenalgorithmen [Shor 1994, Grover 1996, Abrams und Lloyd 1999] verdeutlicht, die bei der Lösung spezieller Probleme deutlich besser als alle bekannten klassischen Verfahren skalieren. Insofern ist der hypothetische Quantencomputer nicht nur Gegenstand aktueller Forschung der Physik, auch in

---

Mathematik und theoretischer Informatik werden die Perspektiven dieses neuen Berechenbarkeitsmodells betrachtet.

Halbleiter-Quantenpunkte wurden bereits früh als mögliche Realisierung von *qubits*, den elementaren Bausteinen des hypothetischen Quantencomputers, vorgeschlagen [Barenco u. a. 1995]. Zwei Modelle haben sich insbesondere als interessant herausgestellt. Zum einen kann im sogenannten Spin-Qubit die Ausrichtung eines Elektronenspins in einem Quantenpunkt als Informationsträger verwendet werden [Loss und DiVincenzo 1998, Vandersypen u. a. 2002]. Die schwache Kopplung des Elektronenspins an seine Umgebung bedingt eine für ein elektronisches System im Festkörper lange Kohärenz von  $t_2 \sim 10 \dots 100$  ns [Kikkawa und Awschalom 1998, Petta 2005], gleichzeitig aber auch schwierige Manipulation und Detektion [Elzerman u. a. 2004]. Zum anderen können die räumlichen Zustände einer Ladung im Doppelpotentialtopf eines gekoppelten Systems aus zwei Quantenpunkten als Basiszustände eines Qubits angesetzt werden [van der Wiel u. a. 2001, Hayashi u. a. 2003]. Hier führt die Ladung des Elektrons zu einer starken Kopplung an die Umgebung und daher zu kürzeren Kohärenzzeiten  $t_2 \sim 1$  ns [Hayashi u. a. 2003], aber auch leichterer Detektion [DiCarlo u. a. 2004]. Neueste Resultate deuten darauf hin, daß isolierte Doppelquantenpunkte wesentlich längere Kohärenzzeiten aufweisen [Gorman u. a. 2005]. Das Interesse an Quanteninformationsverarbeitung führt zu einer bemerkenswerten Konvergenz von Teilen der Festkörperphysik und der Atomphysik. Dem „Atom auf einem Chip“ [Treutlein u. a. 2004] steht das „künstliche Atom im Chip“ gegenüber.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

- Kapitel 2 führt in die Herstellung der verwendeten Chipstrukturen mittels lithographischer Verfahren ein.
- Kapitel 3 und 4 geben die Grundzüge der Theorie des Transports durch Quantenpunkte bzw. Doppelquantenpunkte wieder.
- Kapitel 5 stellt die Methode der Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt vor.
- Kapitel 6 beschreibt die Prinzipien des verwendeten Meßaufbaus.
- Kapitel 7 gibt Messungen an einem Einzelquantenpunkt wieder, der vollständig von Elektronen verarmt werden kann.
- Kapitel 8 behandelt Messungen des Transportspektrums eines Doppelquantenpunkts, der durch Potentialverformung aus dem Einzelquantenpunkt von Kapitel 7 hergestellt wird.
- Kapitel 9 beschreibt eine Messung, bei der im Transport durch einen Quantenpunkt Speichereffekte auf einer Zeitskala von  $\sim 10$  min beobachtet wurden.

## 1. Einleitung

---

- Kapitel 10 stellt Messungen von Spineffekten an durch ein einzelnes Gatter geformten Quantenpunkten vor.
- Kapitel 11 ist eine Zusammenfassung mit Ausblick auf mögliche zukünftige Entwicklungen.

---

# Kapitel 2

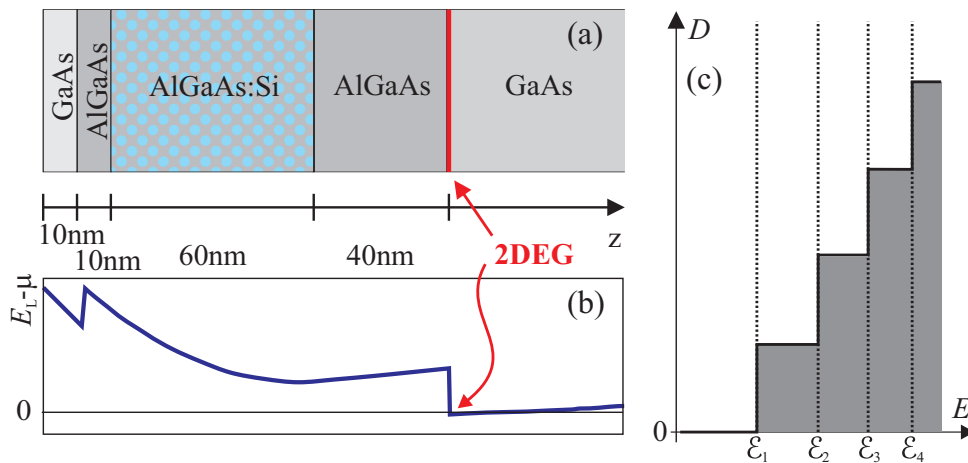
## Probenherstellung

In diesem Kapitel werden die bei der Herstellung der Proben verwendeten Verfahren vorgestellt. Die Eigenschaften der verwendeten Heterostrukturen sind tabellarisch in Anhang A, die Parameter der Präparation in Anhang B wiedergegeben.

### 2.1 Niedrigdimensionale Elektronensysteme

Ausgangspunkt für die Definition lateraler Quantenpunkte ist eine durch Molekularstrahlepitaxie (siehe z.B. [Sze 1981]) hergestellte AlGaAs-GaAs-Heterostruktur. Bei dem Verfahren der Molekularstrahlepitaxie wird ein thermischer Atomstrahl im Ultrahochvakuum mit der Oberfläche einer Halbleiter-Einkristallscheibe (eines *wafer*) in Kontakt gebracht. Bei ausreichend niedriger Strahldichte können nahezu störstellenfreie Schichten von Materialien gleicher Gitterstruktur und ähnlicher Gitterkonstante epitaktisch aufgewachsen werden. Durch Verwendung von Halbleitermaterialien mit unterschiedlichen elektronischen Eigenschaften ist es möglich, den Verlauf von Valenz- und Leitungsbandkante zu kontrollieren und Einschlußpotentiale in Wachstumsrichtung für Elektronen oder Löcher zu erzeugen.

Mit Ausnahme von Kapitel 10 wurden alle im Rahmen dieser Arbeit beschriebenen Messungen an Probenchips aus einem *wafer* durchgeführt. Die folgende Betrachtung von Heterostruktur-Eigenschaften orientiert sich an dieser Heterostruktur. Sie wurde von Dr. K. Eberl am Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart gewachsen und hat die Fabrikationsnummer #81059. Als Materialien sind GaAs sowie  $\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$ , in dem ein Drittel der Gallium-Atome im Kristall stochastisch durch Aluminium ersetzt ist, verwendet. Der Unterschied der Gitterkonstanten beider Materialien beträgt weniger als 0,2%, was epitaktisches Wachstum einer hochwertigen Heterostruktur ermöglicht. Abbildung 2.1(a) zeigt die Schichtenfolge des Kristalls,



**Abbildung 2.1:** (a), (b): Schematische Zeichnung der Schichtenfolge (a) und des energetischen Verlaufs (b) des Leitungsbands in einer durch Molekularstrahlepitaxie gewachsenen AlGaAs/GaAs-Heterostruktur (*wafers* #81059, K. Eberl). (c): Zustandsdichte im Potentialtopf einer Heterostruktur.

Abbildung 2.1(b) eine Skizze des Leitungsbandverlaufs. Auf eine Deckschicht (*cap layer*) aus GaAs, die im wesentlichen zur Oberflächenversiegelung dient, folgt eine Schicht AlGaAs. Diese wird über 60 nm mit Silizium-Atomen dotiert. Silizium wirkt in AlGaAs als leitungsbandnaher Donator (*shallow donor*) mit einer Aktivierungsenergie der Donatorelektronen von 5,8 meV [Sze 1981] im Vergleich zur Bandlücke in  $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$  von 1,8 eV. Unter der AlGaAs-Schicht folgt wiederum eine Schicht GaAs mit einer Dicke von  $\sim 1 \mu\text{m}$ . Am Übergang zwischen AlGaAs und GaAs, also bei der vorliegenden Struktur 120 nm unter der Kristalloberfläche, nimmt die Bandlücke des Halbleiters abrupt von ca. 1,8 eV auf ca. 1,4 eV ab [Sze 1985]. Thermisch angeregte Donatorelektronen können aus der Si-dotierten Schicht durch den Kristall über die vom Leitungsband an diesem Übergang gebildete Potentialstufe diffundieren. Aufgrund der Anziehungskraft der ionisierten Donatoratome bleiben sie in der Nähe der Grenzschicht im Leitungsband gefangen. Die entstehende Raumladungsverteilung führt zu einem elektrischen Feld und damit einer Krümmung der Bandkanten, so daß sich ein Gleichgewichtszustand einstellt. Mit der Ladungsakkumulation liegt das Leitungsband in GaAs nahe der Grenzschicht unterhalb der Fermikante. Hier bildet sich für die Elektronen ein näherungsweise dreieckiger Potentialtopf in der Kristallwachstumsrichtung, die im folgenden auch als  $z$ -Richtung bezeichnet wird.

In GaAs, einem Material, in dem keine orbitale Entartung am Energieminimum des Leitungsbands vorliegt, ist die Zustandsdichte im Falle einer derartigen Einschränkung der Elektronenbewegung in genau einer Raumrichtung in Abhängigkeit von der Ener-



gie  $E$  durch

$$D(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \sum_n \theta(E - \varepsilon_n) \quad (2.1)$$

gegeben [Datta 1995]. In Gleichung 2.1 bezeichnet  $\theta(x)$  die Heaviside-Stufenfunktion,  $m^*$  die effektive Elektronenmasse in GaAs sowie  $\varepsilon_n$  den  $n$ -ten Energieeigenwert des dreieckigen Potentialtopfs. Der Verlauf von  $D(E)$  ist in Abbildung 2.1(c) skizziert. Die Gesamtheit aller Elektronenzustände mit gleicher Wellenfunktion in  $z$ -Richtung wird auch als Subband bezeichnet. Man spricht von einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG), wenn nur das unterste Subband, d.h. nur der unterste Zustand der Quantisierung in  $z$ -Richtung besetzt ist. Diese Bedingung ist bei ausreichend geringer Elektronenflächendichte  $n_s$  typischerweise für Temperaturen im Bereich  $T \lesssim 4$  K erfüllt.

Zusätzlich zur Elektronenflächendichte ist eine wesentliche weitere Kenngröße des zweidimensionalen Elektronengases die Elektronenbeweglichkeit  $\tilde{\mu}$ . Sie ist mit durch die Streuung der Elektronen am ungeordneten Potential der ionisierten Donoratomene begrenzt. Daher wird zum Erreichen hoher Beweglichkeiten zwischen dem Materialübergang, an dem das zweidimensionale Elektronengas gebildet werden soll, und der Dotierungsschicht eine Schicht undotiertes AlGaAs als Abstandshalter (engl. *spacer*) gewachsen. Am verwendeten Kristall wurden bei  $T = 4,2$  K die Werte  $n_s \simeq 1,8 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  und  $\tilde{\mu} \simeq 75 \text{ m}^2/\text{Vs}$  gemessen [Eberl 1998]. Damit kann die Fermi-Energie

$$E_F = \frac{\hbar^2 \pi n_s}{m^*} \simeq 6,3 \text{ meV}, \quad (2.2)$$

die Fermi-Wellenlänge

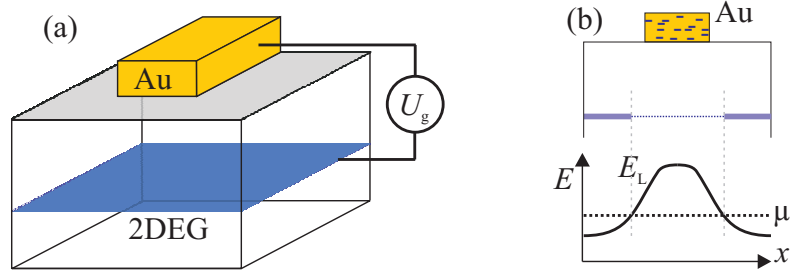
$$\lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}} \simeq 60 \text{ nm} \quad (2.3)$$

und die mittlere freie Weglänge

$$L = \frac{\tilde{\mu}\hbar}{|e|} \sqrt{2\pi n_s} \simeq 5,2 \mu\text{m} \quad (2.4)$$

der Elektronen im zweidimensionalen Elektronengas abgeschätzt werden [Datta 1995, Kittel 1996].

Das Anlegen von elektrischen Feldern ermöglicht eine weitere Einschränkung der elektronischen Freiheitsgrade. Bei der sogenannten *split-gate*-Technik werden metallische Gatterelektroden auf der Kristalloberfläche aufgebracht. Abbildung 2.2(a) zeigt schematisch eine derartige Elektrode auf der Oberfläche der Heterostruktur. Anlegen einer negativen Spannung relativ zum zweidimensionalen Elektronengas an der Gatterelektrode führt über den Feldeffekt zu einer lokalen Erhöhung der



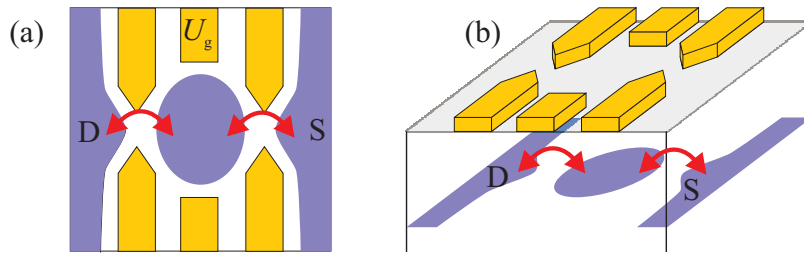
**Abbildung 2.2:** Verarmung eines zweidimensionalen Elektronengases durch *split gates*: (a) Perspektivische Ansicht einer Goldelektrode auf der Kristalloberfläche über dem zweidimensionalen Elektronengas. (b) Unterhalb einer negativ geladenen Gatterelektrode wird die Leitungsbandkante  $E_L$  über das chemische Potential  $\mu$  gehoben. Das Elektronengas verarmt lokal.

Leitungsband-Energie  $E_L$ , wie in Abbildung 2.2(b) in einem Schnitt schematisch skizziert. Die Schottky-Barriere am Metall-Halbleiter-Übergang [Sze 1985] verhindert hierbei Stromfluß aus dem Halbleiter in die Gatterelektrode. Für Gatterspannungen  $U_g$  von typischerweise  $U_g \lesssim -0,3\text{ V}$  wird das Leitungsband unterhalb der Gatterelektrode über das chemische Potential  $\mu$  des zweidimensionalen Elektronengases gehoben, so daß eine vollständige lokale Verarmung des Elektronengases eintritt. In lateraler Richtung innerhalb des zweidimensionalen Elektronengases entsteht eine Potentialbarriere.

Durch derartige Einschränkung der Elektronenbewegung in beiden Richtungen der Ebene des zweidimensionalen Elektronengases kann eine „nulldimensionale“, punktförmige Elektroneninsel mit einer der Fermi-Wellenlänge vergleichbaren Größe, also ein Quantenpunkt, definiert werden. In diesem Fall tritt eine vollständige Quantisierung der elektronischen Zustände

$$D(E) \propto \sum_n \delta(E - \epsilon_n) \quad (2.5)$$

ein. Abbildung 2.3 zeigt eine einfache Geometrie von Gatterelektroden, die zur Definition eines solchen Quantenpunkts geeignet ist. Zwei Paare von gegenüberliegenden Elektroden definieren Potentialbarrieren zum zweidimensionalen Elektronengas, durch die ein Tunnelstrom stattfinden kann. Diese Tunnelbarrieren verbinden den Quantenpunkt mit dem freien zweidimensionalen Elektronengas und damit mit den Zuleitungen. Die Zuleitungen werden mit den Begriffen *source* (S) und *drain* (D) bezeichnet. Bei Transportmessungen wird zwischen ihnen die *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  angelegt. Das in Abbildung 2.2 mittlere Paar von gegenüberliegenden Elektroden kann durch Variieren der angelegten Gatterspannung  $U_g$  zur Steuerung des lokalen elektrostatischen Potentials am Ort des Quantenpunkts eingesetzt werden. Letzteres bestimmt die Ausdehnung des Quantenpunkts und, wie noch erklärt werden wird, dessen Ladung.



**Abbildung 2.3:** Definition eines Quantenpunkts durch *split gates*: (a) Aufsicht einer einfachen Gattergeometrie, (b) perspektivische Ansicht. In beiden Zeichnungen ist das zweidimensionale Elektronengas, soweit nicht verarmt, hellblau eingezeichnet.

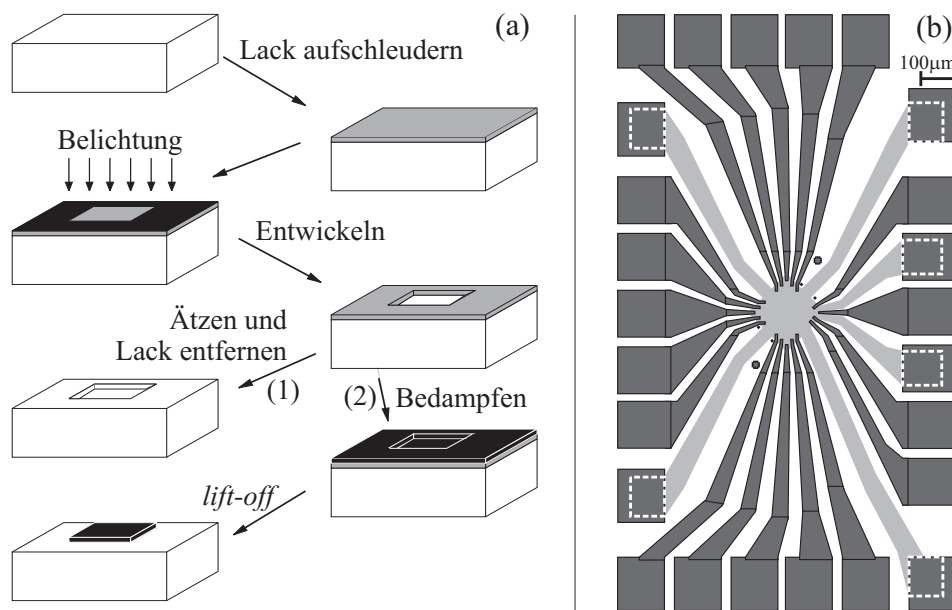
## 2.2 Lithographische Strukturierung

Zur Strukturierung der Heterostruktur senkrecht zur Wachstumsrichtung und insbesondere zur Herstellung der Gatterelektroden und ihrer Zuleitungen werden lithographische Verfahren eingesetzt.

Vor Beginn dieser Prozessierung wird von dem zur Verfügung stehenden *wafers* ein quadratisches Stück von ca. 5 mm Kantenlänge abgespalten. Der so erhaltene Probenchip wird zur Reinigung wiederholt in Lösungsmitteln wie Wasser, Aceton, Ethanol oder Isopropanol gebadet und anschließend mit staubfreiem Stickstoff trockengeblasen. Zur Entfernung festklebender Verunreinigungen sind weitere Schritte wie zum Beispiel ein vorsichtiges Überstreifen der Oberfläche mit einem lösungsmittelgetränkten fusselfreien Linsenputztuch möglich. Der Einsatz eines Ultraschallgenerators zum Lösen von Verunreinigungen durch Erschütterung kann hilfreich sein. Dies sollte jedoch vermieden werden, da Erschütterungen zur Fortpflanzung von Kristallfehlern führen, was den Bruch des Chips zur Folge haben kann.

### 2.2.1 Optische Lithographie

Drei optische Lithographieschritte dienen zur Definition der größeren Strukturen der Probe. Im ersten Schritt, bei der Definition der sogenannten Mesa (von engl. *mesa* Tafelberg), werden Deck- und Dotierungsschicht und damit das zweidimensionale Elektronengas durch Ätzen auf großen Teilen der Oberfläche entfernt, um einzelne Probenfelder mit klar definierten Zuleitungen zu erhalten. Im zweiten und dritten Schritt wird eine lokale Metallisierung zur Herstellung von Ohm'schen Kontakten zum zweidimensionalen Elektronengas und von Zuleitungen zu den später definierten Gatterelektroden aufgebracht. Das grundlegende Lithographieprinzip bleibt in allen drei Fällen gleich und ist in Abbildung 2.4(a) wiedergegeben. Die Probenoberfläche wird



**Abbildung 2.4:** (a) Prinzip der optische Kontaktlithographie: Schematische Darstellung der Prozessschritte zum lokalen Ätzen (1) oder zur lokalen Metallisierung (2) des GaAs/AlGaAs-Kristalls. (b) Geometrie der verwendeten Lithographiemasken in Aufsicht. Der resultierende Mesa-Bereich mit zweidimensionalem Elektronengas ist hellgrau, die Gatterzuleitungen dunkel gezeichnet. Gestrichelte Linien markieren die Flächen der Ohm'schen Kontakte.

mit kommerziell erhältlichem Photolack beträufelt und sofort anschließend auf einer Lackschleuder in Rotation versetzt. Bei etwa 5000 U/min bildet sich abhängig von der genauen Lackzusammensetzung ein gleichmäßiger Film mit einer Dicke von ca.  $0,4 \dots 1,6 \mu\text{m}$ . Dieser wird in einem Ofen gehärtet. In einem *mask aligner* wird anschließend die Lackschicht selektiv belichtet. Hierzu wird eine dünne Quarzglasscheibe, welche teilweise mit Chrom beschichtet ist, als Maske verwendet. Als Lichtquelle dient eine Quecksilberdampfampe mit Emission im UV-Bereich des Spektrums. Die Wahl der Lichtwellenlänge  $\lambda_{\text{UV}}$  ergibt sich aus der Forderung nach möglichst hohem Auflösungsvermögen. Die minimalen Abmessungen bei optischer Lithographie können mit  $\Delta x_{\text{min}} = \sqrt{\lambda_{\text{UV}} z}$  abgeschätzt werden, wobei der Abstand  $z$  zwischen Maske und Substrat die Dicke der Lackschicht beinhaltet.

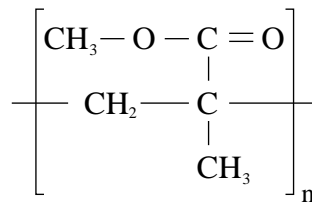
Durch Eintauchen der Probe in eine Entwicklerflüssigkeit wird der Lack, da es sich um einen Positivlack handelt, in den belichteten Bereichen entfernt. Das weitere Vorgehen ist vom jeweiligen Prozessierungsschritt abhängig.

### Mesa-Definition

Als Mesa wird der Teil der Oberfläche des Probenchips, der ein zweidimensionales Elektronengas enthält, bezeichnet. Zur Definition von einzelnen Mesabereichen und ihren Zuleitungen wird ein photolithographischer Schritt durchgeführt, so daß nur noch im Zentrum eines Probenbereichs und über auf ihn zuleitenden Armen Lack auf der Probenoberfläche haftet. Die entsprechende Fläche ist in Abbildung 2.4(b) hellgrau eingezeichnet. Durch Eintauchen des Probenchips in eine verdünnte Mischung von Schwefelsäure und Wasserstoffperoxid wird auf den ungeschützten Bereichen der Oberfläche die elektronisch aktive Schichtstruktur des Kristalls weggeätzt. Die durch unbelichteten Photolack geschützten Flächen bleiben dagegen unversehrt. Nach Entfernen des Photolacks bilden sie eine erhöhte Fläche, die „Mesa“.

### Ohm'sche Kontakte

Um Messungen des Stroms und des differentiellen Leitwerts durch das zweidimensionale Elektronengas durchführen zu können, muß dieses kontaktiert werden. Übliche Vorgehensweise ist hierbei das lokale Einbringen einer  $n^+$ -Dotierung. Nach einem Lithographieschritt, der nur die zu dotierenden Kontaktflächen der Probe unbedeckt läßt, wird eine Metallschichtenfolge, die insbesondere eine Gold-Germanium-Legierung enthält, im Vakuum auf die Probenoberfläche aufgedampft. Anschließend wird die Metallschicht im sogenannten *lift-off*-Schritt durch Eintauchen der Probe in heißes Lösungsmittel und Ablösen des restlichen Photolacks überall dort entfernt, wo sie nicht direkt mit der Probenoberfläche verbunden ist. Erhitzen unter Schutzgas auf maximal  $420^\circ\text{C}$  für etwa 30sec führt zu Eindiffundieren der Germanium-Atome in



**Abbildung 2.5:** Strukturformel von Polymethylmethacrylat (PMMA)

den Halbleiterkristall. Die Kontakteigenschaften werden dabei von Entmischungsprozessen während der Diffusion dominiert und hängen somit von den Prozeßparametern ab [Braslau 1981]. Die Bereiche der Ohm'schen Kontakte sind in Abbildung 2.4(b) durch weiße gestrichelte Linien markiert.

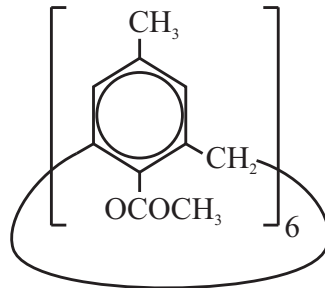
### Gatterzuleitungen

In einem zweiten optischen Lithographieschritt mit nachfolgender Metallisierung, bei dem die Schichtmaterialien NiCr oder Titan als Haftvermittler sowie Gold verwendet werden, werden Leiterbahnen auf der Oberfläche des Kristalls aufgebracht. Diese sind in Abbildung 2.4(b) dunkelgrau eingezeichnet und dienen zur Kontaktierung der im Anschluß mittels Elektronenstrahl-Lithographie definierten Gatterelektroden.

### 2.2.2 Elektronenstrahl-Lithographie

Zur Herstellung der Gatterelektroden mit charakteristischen Abmessungen von  $\lesssim 100\text{nm}$  wird eine höhere Auflösung benötigt, als dies mit den Methoden der optischen Lithographie möglich wäre. Das verwendete Verfahren der Elektronenstrahl-Lithographie ist demjenigen der optischen Lithographie sehr ähnlich. Als elektronensensitiver Positivlack wird eine Doppelschicht von Polymethylmethacrylat (PMMA, siehe Abbildung 2.5) verwendet. Das Polymer wird in Methylisobutylketon gelöst auf die Chipoberfläche aufgeschleudert und anschließend bei  $120^\circ\text{C}$  ausgebacken. Für die erste Schicht wird PMMA mit einem mittleren Molekulargewicht von  $1,5 \cdot 10^5 \text{u}$ , für die zweite im Anschluß aufgebrachte Schicht PMMA mit mittlerem Molekulargewicht  $5 \cdot 10^5 \text{u}$  verwendet.

Die Belichtung dieses Lacks findet durch den fokussierten Strahl niederenergetischer Elektronen ( $5\text{keV}$ ) eines Rasterelektronenmikroskos statt. Eine typische Bestrahlungsdosis hierbei ist  $50\mu\text{As}/\text{cm}^2$ . Unter Elektronenbeschuß brechen die langkettigen Polymermoleküle zu kurzen Ketten auf, so daß die belichteten Regionen mit Methylisobutylketon abgelöst werden können. Die Auflösung wird hierbei durch die Fo-



**Abbildung 2.6:** Strukturformel von Hexaazetat-p-methyl-calix[6]aren, kurz Calixaren

kussierung sowie die Auflösung des bei der Ansteuerung verwendeten Digital-Analog-Konverters und die elektronenoptische Vergrößerung beschränkt. Das Doppelschicht-Verfahren dient der Erleichterung des *lift-off* bei der nachfolgenden Metallisierung mit Titan und Gold. Die kürzeren Molekülketten der tieferliegenden ersten Lackschicht führen zu einer höheren Empfindlichkeit, so daß nach Belichtung und Entwicklung ein unterkehliges Lackprofil entsteht. Wird nun ein nicht zu dicker Metallfilm aufgedampft, so ist der Kontakt zwischen den Bereichen auf dem Lack und auf dem Halbleiterkristall im Idealfall unterbrochen. Dies ermöglicht ein leichteres Ablösen der auf dem Lack aufliegenden Metallfilm-Flächen.

Bei der Herstellung der Schleifenantenne in Kapitel 10 wurde zusätzlich als elektronensensitiver Negativlack Hexaazetat-p-methyl-calix[6]aren, kurz Calixaren (siehe Abbildung 2.6) verwendet [Fujita u. a. 1996, Holleitner u. a. 2002, Holleitner 2002]. Unter Bestrahlung brechen die Ringmoleküle dieser Verbindung auf und haften an der Oberfläche, so daß sie durch den Entwickler Xylol nicht abgelöst werden. Calixaren ist elektrisch isolierend mit einer Dielektrizitätskonstante von  $\epsilon_r \simeq 7$  [Vogel 1997]. Es wird hier als lokale isolierende Schicht zwischen Schleifenantenne und Gatterelektroden eingesetzt.

## 2. Probenherstellung

---



---

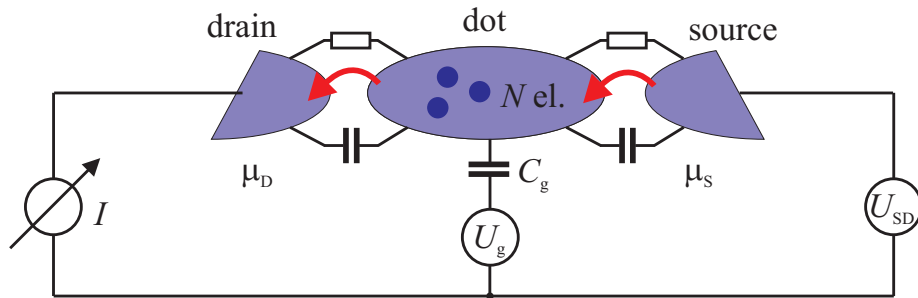
## Kapitel 3

# Theorie des Einzelelektronentunnels durch Quantenpunkte

Transportspektroskopie an Quantenpunkten basiert auf der Messung von Tunnelströmen durch elektrostatisch definierte Potentialstrukturen. Im vorliegenden Kapitel soll ein Überblick über die Theorie des Tunnels durch einen einzelnen Quantenpunkt gegeben werden. In Abschnitt 3.1 wird ausgehend von der klassischen Coulomb-Blockade in metallischen Inseln die Theorie des linearen Transports durch Quantenpunkte entwickelt. Dies wird in Abschnitt 3.2 durch Behandlung der nichtlinearen Transporteigenschaften fortgesetzt. In Abschnitt 3.3 wird aufgeführt, wie durch Anlegen externer Magnetfelder Spektroskopie an den vorliegenden Quantenzuständen betrieben werden kann. Ausgewählte Tunnelprozesse höherer Ordnung werden in Abschnitt 3.4 beschrieben.

### 3.1 Linearer Transport

Ein Quantenpunkt ist eine elektrisch leitende Insel von einigen hundert Nanometern Größe. Ist sie bei tiefen Temperaturen nur schwach durch Tunnelbarrieren an Zuleitungen gekoppelt, so tritt im durch diese Insel getragenen Strom das Phänomen der Coulomb-Blockade auf [Kulik und Shekhter 1975, Averin und Likharev 1986]. Aufgrund der elektrostatischen Wechselwirkung kann der Quantenpunkt im allgemeinen nicht mit einer zusätzlichen Elementarladung geladen werden, so daß Strom durch das System unterdrückt ist. Nur für bestimmte Werte des elektrostatischen Potentials im Quantenpunkt ist Ladungstransport möglich. Damit treten in Abhängigkeit von einer dieses Potential steuernden Gatterspannung  $U_g$  Oszillationen des Stroms oder des differentiellen Leitwerts, die sogenannten Coulomb-Blockade-Oszillationen auf.



**Abbildung 3.1:** Klassisches Ersatzschaltbild für einen Quantenpunkt. Die *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und die Gatterspannung  $U_g$  sowie die niederohmige Strommessung sind angedeutet. Die Tunnelbarrieren zu *source* und *drain* werden durch einen hochohmigen Widerstand, die Coulomb-Wechselwirkung durch eine parallelgeschaltete Kapazität modelliert.

Abbildung 3.1 zeigt ein einfaches Ersatzschaltbild für einen über Tunnelbarrieren an zwei mit *source* und *drain* bezeichnete Reservoirs gekoppelten Quantenpunkt. Dieser kann zum Beispiel durch *split gates*, wie in Abschnitt 2.1 und Abbildung 2.3 dargestellt, definiert werden. Die Tunnelbarrieren zwischen dem Quantenpunkt und seinen Zuleitungen werden durch hochohmige Widerstände, die Coulomb-Wechselwirkung durch eine jeweils parallelgeschaltete Kapazität modelliert. In Abbildung 3.1 ist auch die grundsätzliche Anordnung zur Messung eines Stroms durch den Quantenpunkt angedeutet. Eine *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und eine rein kapazitiv an den Quantenpunkt koppelnde Gatterspannung  $U_g$  werden durch externe Spannungsquellen angelegt.

Der Grenzfall kleiner *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  zwischen den Zuleitungen des Quantenpunkts, in dem eine lineare Abhängigkeit zwischen  $U_{SD}$  und dem Tunnelstrom beobachtet wird, soll zuerst betrachtet werden. Man bezeichnet den entsprechenden Bereich für  $|U_{SD}|$  auch als Bereich linearer Antwort. Zur Vereinfachung der theoretischen Betrachtung setzt man hier in der Regel  $U_{SD} \simeq 0$ .

### 3.1.1 Klassische Coulomb-Blockade

Die zum Auftreten von Coulomb-Blockade benötigte Temperatur kann grob dadurch abgeschätzt werden, daß thermische Fluktuationen die Ladung des Quantenpunkts nicht beeinflussen. Mit der Gesamtkapazität des Quantenpunkts  $C_\Sigma = \sum_i C_i$  als Summe aller Kapazitäten zu Gattern, Zuleitungen und Masse und mit  $T_{el}$  als der Elektronentemperatur der Zuleitungen gilt dann

$$k_B T_{el} \ll E_C \equiv \frac{e^2}{C_\Sigma}. \quad (3.1)$$

Die Größe  $E_C \equiv e^2/C_\Sigma$  ist die sogenannte Ladeenergie des Quantenpunkts. Sie gibt, wie später gezeigt werden wird, im klassischen Fall die Änderung des chemischen Potentials im Quantenpunkt wieder, die zum Laden mit einem weiteren Elektron benötigt wird.

Für die Ankopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen bei Beobachtung von Coulomb-Blockade läßt sich nach [Kawabata 1998, Grabert und Devoret 1992] die zulässige Obergrenze aus der Heisenberg'schen Unschärferelation abschätzen. Befindet sich ein überzähliges Elektron auf dem Quantenpunkt, so ist aufgrund der benötigten Ladeenergie  $E_C$  weiterer Transport blockiert. Die typische Zeitskala, in der das Elektron den Quantenpunkt wieder verläßt, sei mit  $G_\Sigma \equiv 1/R_\Sigma$  als dem gesamten den Quantenpunkt an die Umgebung anbindenden Tunnelleitwert als  $\tau = R_\Sigma C_\Sigma = C_\Sigma/G_\Sigma$  angenommen. Damit ein nachfolgendes Elektron die vorhandene Ladung „fühlt“ und Coulomb-Blockade stattfindet, muß die der Zeit  $\tau$  entsprechende Energieunschärfe  $\delta E \gtrsim \hbar/\tau$  deutlich kleiner als  $E_C$  sein. Aus diesen Bedingungen ergibt sich für  $G_\Sigma$  direkt die Beziehung

$$G_\Sigma = \frac{C_\Sigma}{\tau} \lesssim \frac{C_\Sigma}{\hbar} \delta E \ll \frac{e^2}{\hbar}. \quad (3.2)$$

Die ersten Beobachtungen von Coulomb-Blockade-Phänomenen wurden an metallischen Inseln durchgeführt [Grabert und Devoret 1992]. Aufgrund der hohen Zustandsdichte im Leitungsband findet hier bei realisierbaren Temperaturen immer Transport durch eine Vielzahl von orbitalen Elektronenzuständen statt. Unter Vernachlässigung der räumlichen Quantisierungsenergien der Elektronen im durch den Quantenpunkt gegebenen Einschlußpotential kann daher ein elektrostatisches „orthodoxes“ Modell der Coulomb-Blockade aufgestellt werden [Beenakker 1991]. Dieses geht bei der Herleitung der Coulomb-Blockade-Oszillationen von thermodynamischen Betrachtungen aus. Aus dem großkanonischen Ensemble ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß ein Quantenpunkt mit  $N$  Elektronen geladen ist, als

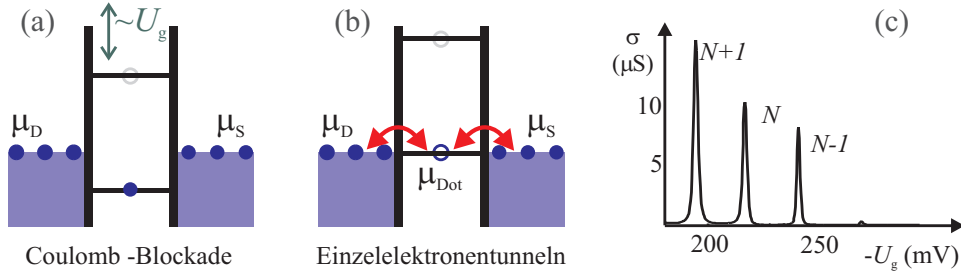
$$P(N) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\Omega(N)}{k_B T}\right) \quad (3.3)$$

mit dem großkanonischen Potential  $\Omega(N) = F(N) - \mu N$ , dem chemischen Potential der Zuleitungen  $\mu$ , und der freien Energie  $F(N) = E(N) - ST$ . Bei ausreichend tiefer Elektronentemperatur  $T$  kann  $F(N)$  durch die Grundzustandsenergie des Quantenpunkts  $E(N)$  angenähert werden.

Damit ein Tunnelstrom durch den Quantenpunkt fließen kann, muß die Elektronenzahl  $N$  auf dem Quantenpunkt mindestens um  $\Delta N = 1$  fluktuieren können. Im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  ist dies nur möglich für  $P(N+1) = P(N)$ . Aus dieser Bedingung ergibt sich nach trivialen Umformungen

$$E(N+1) - E(N) = \mu, \quad (3.4)$$

### 3. Theorie des Einzelelektronentunnels durch Quantenpunkte



**Abbildung 3.2:** Energiediagramm für Einzelelektronentunneln durch einen Quantenpunkt. Durch eine Gatterspannung  $U_g$  kann das lokale elektrostatische Potential variiert werden, so daß dieser aus Coulomb-Blockade (a) zum Einzelelektronentunneln (b) übergeht und sich die Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt ändert. Als Funktion der Gatterspannung  $U_g$  mißt man Coulomb-Blockade-Oszillationen des Leitwertes (c).

d.h. die Differenz der Grundzustandsenergien für  $N$  und  $N + 1$  Elektronen auf dem Quantenpunkt ist gleich dem chemischen Potential der Zuleitungen. Anschaulich entspricht dies der Situation, daß ein Elektron von der Fermikante auf den Quantenpunkt tunneln kann, diesen aber auch wieder verlassen kann, da es einen freien Zustand an der Fermikante der Zuleitung findet. Zur Vereinfachung kann nun das chemische Potential des Quantenpunktes als

$$\mu_{\text{QP}}(N) \equiv E(N + 1) - E(N) \quad (3.5)$$

definiert werden. Dann reduziert sich die Bedingung für Einzelelektronentunneln („single electron tunneling“, SET) im Bereich linearer Antwort auf  $\mu = \mu_{\text{QP}}$ , wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht. Vernachlässigt man im Falle einer metallischen Insel die Zustandsquantisierung, so läßt sich die Energie  $E(N)$  durch die klassische Ladeenergie eines Kondensators mit Gesamtkapazität  $C_{\Sigma}$  annähern. In der Nähe einer Gatterelektrode, die über eine Kapazität  $C_g$  an den Quantenpunkt koppelt und an der die Spannung  $U_g$  relativ zu den Zuleitungen der Insel angelegt ist, gilt dann

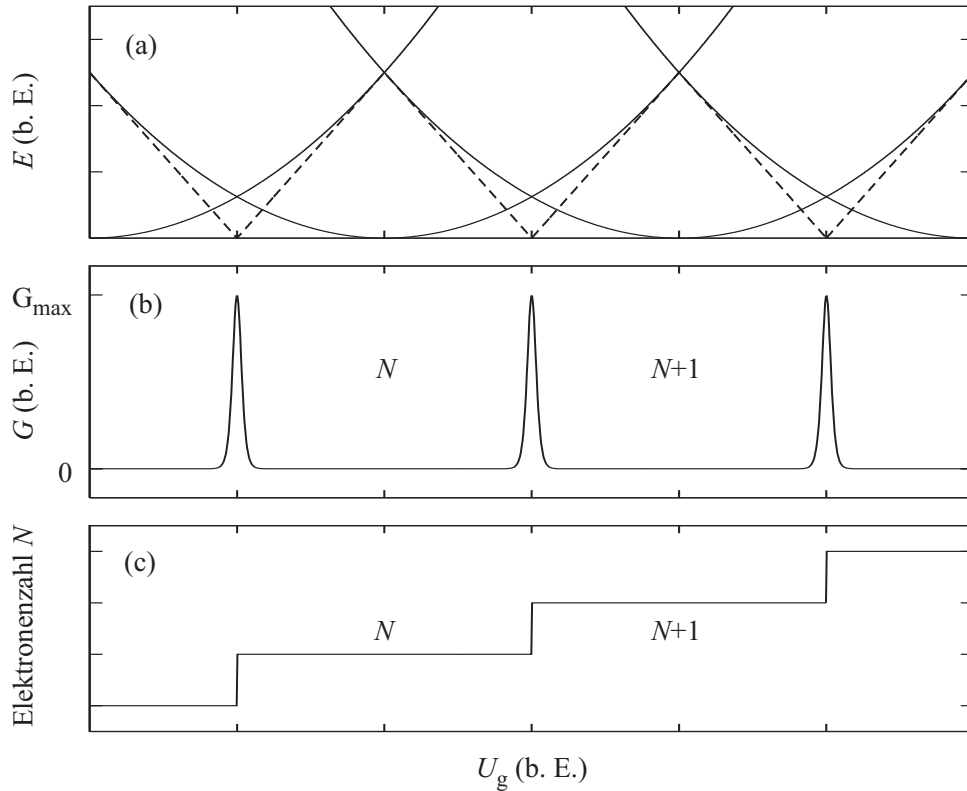
$$E(N) \simeq E_{\text{klass.}}(N, U_g) = \frac{1}{2C_{\Sigma}} (eN + C_g U_g)^2. \quad (3.6)$$

Der Gatter-Konversionsfaktor  $\alpha_g$  wird als Anteil der Kapazität zwischen Quantenpunkt und diesem Gatter an der Gesamtkapazität des Quantenpunkts

$$\alpha_g \equiv \frac{C_g}{C_{\Sigma}} \quad (3.7)$$

definiert. Aus Gleichungen 3.4 und 3.6 erhält man dann im Falle von Einzelelektronentunneln

$$\mu = e\alpha_g U_g + \frac{e^2}{C_{\Sigma}} \left( N + \frac{1}{2} \right) = e\alpha_g U_g + E_C \left( N + \frac{1}{2} \right). \quad (3.8)$$



**Abbildung 3.3:** Klassische Coulomb-Blockade: Modell des schrittweisen Ladens einer metallischen Insel durch Variieren einer kapazitiv ankoppelnden Gatterspannung  $U_g$ . (a) Elektrostatistische Energie des Quantenpunkts bei sukzessiven Elektronenzahlen (durchgezogene Linien) und Energiedifferenz zwischen benachbarten Konfigurationen (gestrichelte Linie), (b) differentieller Leitwert (für  $T \simeq 0$  und  $U_{SD} \simeq 0$ ) durch den Quantenpunkt und (c) mittlere Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt als Funktion von  $U_g$ .

Nimmt man  $\alpha_g$  als konstant an, so ergeben sich äquidistante Coulomb-Blockade-Oszillationen mit Periode

$$\Delta U_g = \frac{e}{\alpha_g C_\Sigma} = \frac{e}{C_g}. \quad (3.9)$$

Abbildung 3.3 illustriert nochmals diese Zusammenhänge: Die durchgezogenen Linien in Skizze 3.3(a) geben die elektrostatistische Energie des Quantenpunkts nach Gleichung 3.6 bei verschiedenen sich jeweils um  $\Delta N = 1$  unterscheidenden Elektronenzahlen als Funktion der Gatterspannung  $U_g$  wieder. Als gestrichelte Linie ist der Energieunterschied zwischen den jeweils zwei energetisch günstigsten Konfigurationen aufgetragen. Setzt man die Gatterspannung  $U_g$  so, daß zwei Konfigurationen energetisch äquivalent sind, so kann ein Tunnelstrom fließen, wie in Abbildung 3.3(b) zu

sehen ist. Abseits dieser Gatterspannungswerte in Coulomb-Blockade ist die Elektronenzahl im Quantenpunkt konstant. Erhöht man  $U_g$ , so nimmt sie jeweils beim Durchqueren eines Leitwertmaximums um  $\Delta N = 1$  zu (Abbildung 3.3(c)).

#### 3.1.2 Von der klassischen metallischen Insel zum Quantenpunkt

Bisher wurde ausschließlich der Fall einer metallischen Insel behandelt. Die räumliche Quantisierung der Elektronenzustände im Einschränkungspotential kann hier aufgrund der hohen elektronischen Zustandsdichte im Leitungsband vernachlässigt werden. Im Gegensatz dazu können in Halbleiter-Nanostrukturen Potentiale erreicht werden, deren Einteilchen-Niveauabstand  $\Delta\epsilon$  die thermische Verbreiterung  $k_B T$  überschreitet. Damit werden quantenmechanische Effekte im Transport maßgeblich. Die Messung der Coulomb-Blockade-Oszillationen ermöglicht so die Transportspektroskopie der „künstlichen Atome“.

Drei Parameterbereiche können abhängig vom Einteilchen-Niveauabstand  $\Delta\epsilon$  und der Lebensdauererbreiterung  $\hbar\Gamma$  der Elektronenzustände im Quantenpunkt unterschieden werden. Hierbei wird mit  $k_B T \ll E_C \equiv e^2/C_\Sigma$  vorausgesetzt, daß Coulomb-Blockade vorliegen kann.

##### 1. Metallischer (klassischer) Limes: $\hbar\Gamma \ll \Delta\epsilon \ll k_B T \ll E_C$

Unter Annahme einer quasi-kontinuierlichen Zustandsdichte findet Tunneln durch eine Vielzahl von Quantenniveaus im thermisch zugänglichen Energiebereich statt. Dies entspricht dem im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Fall, beschrieben durch das „orthodoxe Modell“ der Coulomb-Blockade [Kulik und Shekhter 1975, Averin und Likharev 1986, Beenakker 1991]. Da die klassische elektrostatische Ladeenergie die Gesamtenergie des Quantenpunkts dominiert, treten die Coulomb-Blockade-Oszillationen nahezu äquidistant auf.  $D$  sei die Zustandsdichte in der metallischen Insel,  $\Gamma_S$  und  $\Gamma_D$  die Tunnelraten zwischen Insel und Zuleitung *source* bzw. *drain*. Ferner sei mit  $U_{g0}$  der Gatterspannungswert bezeichnet, an dem das Zentrum eines Leitwertmaximums auftritt. Ausgehend von der Fermi-Verteilung der Elektronen in den Zuleitungen können dann für Linienform und maximalen Leitwert die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 G &= G_{\max} \frac{e\alpha_g (U_g - U_{g0})}{k_B T} \sinh^{-1} \left( \frac{e\alpha_g (U_g - U_{g0})}{k_B T} \right) \\
 &\simeq G_{\max} \cosh^{-2} \left( \frac{e\alpha_g (U_g - U_{g0})}{2,5k_B T} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

sowie

$$G_{\max} = \frac{e^2 D}{2} \frac{\Gamma_S \Gamma_D}{\Gamma_S + \Gamma_D} \quad (3.11)$$

hergeleitet werden [Beenakker 1991].

2. Thermisch verbreitertes Einzelniveautunneln:  $\hbar\Gamma \ll k_B T \ll \Delta\varepsilon \lesssim E_C$

Ist die Elektronentemperatur der Zuleitungen ausreichend niedrig, so findet Tunneln nur durch einen einzelnen Quantenzustand statt. Abhängig vom Verhältnis zwischen  $\Delta\varepsilon$  und der klassischen Ladeenergie können nahezu regelmäßige oder aperiodische Coulomb-Blockade-Oszillationen auftreten. Die Linienform wird nach [Beenakker 1991] durch

$$G = G_{\max} \cosh^{-2} \left( \frac{e\alpha_g (U_g - U_{g0})}{2k_B T} \right) \quad (3.12)$$

mit

$$G_{\max} = \frac{e^2}{4k_B T} \frac{\Gamma_S \Gamma_D}{\Gamma_S + \Gamma_D} \quad (3.13)$$

beschrieben. Insbesondere gilt  $G_{\max} \propto T^{-1}$ .

3. Lebensdauerbreitertes Einzelniveautunneln:  $k_B T \ll \hbar\Gamma \ll \Delta\varepsilon$

Dominiert die Lebensdauerbreiterung des lokalisierten Elektronenzustands über die thermische Verbreiterung der Fermikante in den Zuleitungen, so nähert man sich dem Fall kohärenten wechselwirkungsfreien Tunnelns durch eine Doppelbarrierenstruktur. Die Linienform ist dann durch eine Breit-Wigner-Kurve

$$G = G_{\max} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (e\alpha_g (U_g - U_{g0}))^2} \quad (3.14)$$

mit Maximalwert

$$G_{\max} = \mathcal{G} \frac{e^2}{h} \frac{\Gamma_S \Gamma_D}{\Gamma_S + \Gamma_D} \frac{4}{\Gamma} \quad (3.15)$$

gegeben [Beenakker 1991]. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{G}$  die Entartung des am Tunneln beteiligten Elektronenzustands.  $\Gamma$  ist wie bisher die der Lebensdauerbreiterung entsprechende Tunnelrate.

Tabelle 3.1 faßt diese drei Fälle nochmals zusammen. Da in experimentell realisierten elektrostatisch definierten Quantenpunkten oft  $k_B T \simeq \hbar\Gamma$  gilt, muß in diesem Falle eine Faltung der entsprechenden Kurvenformen aus Parameterbereichen 2 und 3

$\hbar\Gamma \ll k_B T$ $\Delta\varepsilon \ll k_B T$	metallische Insel, kontinuierliche Zustandsdichte Äquidistante CB-Oszillationen Thermische Linienverbreiterung der Leitwertmaxima Linienform nach Gleichung 3.10 Leitwertmaximum $G_{\max}(T) = \text{const.}$
$\hbar\Gamma \ll k_B T \ll \Delta\varepsilon$	Tunneln durch einen einzelnen Quantenzustand Aperiodische CB-Oszillationen Thermische Linienverbreiterung der Leitwertmaxima Linienform nach Gleichung 3.12 Leitwertmaximum $G_{\max}(T) \propto T^{-1}$
$k_B T \ll \hbar\Gamma \ll \Delta\varepsilon$	Tunneln durch einen einzelnen Quantenzustand Aperiodische CB-Oszillationen Breite der Leitwertmaxima durch Lebensdauer des Quantenzustands dominiert Linienform nach Gleichung 3.14 Leitwertmaximum $G_{\max}(T) = \text{const.}$

**Tabelle 3.1:** Im Einzelelektronentunneln auftretende Transportregimes. Generell werden die Bedingungen für Coulomb-Blockade entsprechend Gleichungen 3.1 und 3.2 vorausgesetzt.

angenommen werden. Nach [Goldhaber-Gordon u. a. 1998a] ergibt sich dann für die Halbwertsbreite der Einzelelektronentunneln-Resonanzen die Näherung

$$\text{FWHM}(\Gamma, T) = 0,78\Gamma + 3,52k_B T. \quad (3.16)$$

Mittels temperaturabhängiger Messungen kann diese Beziehung zur Bestimmung von  $\Gamma$  und der minimal erreichbaren Elektronentemperatur verwendet werden.

### 3.1.3 Das „constant interaction model“

Liegt Tunneln durch einen einzelnen Elektronenzustand vor, so kann der quantenmechanische Anteil der Ladeenergie zur Transportspektroskopie, d.h. zur Charakterisierung der elektronischen Zustände des Quantenpunkts, genutzt werden. Im Bereich linearen Transports ist dabei lediglich der Grundzustand des Quantenpunkts bei verschiedenen Elektronenzahlen  $N$  zugänglich („*addition spectroscopy*“).

In der Näherung des sogenannten *constant interaction model* [Glazman und Shekhter 1989, McEuen u. a. 1991] wird angenommen, daß sich die Grundzustandsenergie  $E(N)$  des mit  $N$  Elektronen geladenen Quantenpunkts als Summe der klassischen Ladeenergie  $E_{\text{klass.}}(N)$  aus Gleichung 3.6 und der



quantenmechanischen Einteilchen-Energien  $\varepsilon_i$  aller Elektronen im elektrostatischen Begrenzungspotential

$$E(N) = E_{\text{klass.}}(N) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (3.17)$$

beschreiben läßt. Wechselwirkungen der Elektronen mit dem umgebenden Kristallgitter gehen über die effektive Elektronenmasse in das Modell ein. Wechselwirkungen zwischen den im Potentialtopf gefangenen Elektronen werden jedoch allein durch die klassische elektrostatische Energie  $E_{\text{klass.}}(N)$  berücksichtigt.

In Analogie zu Gleichungen 3.8 und 3.9 ist nun die Bedingung für das Leitwertmaximum am Übergang zwischen Elektronenzahlen  $N$  und  $N + 1$

$$U_g(N) = \frac{1}{e\alpha_g} (\mu - \varepsilon_{N+1}) - \frac{e}{C_g} \left( N + \frac{1}{2} \right). \quad (3.18)$$

Der Abstand zwischen den aufeinanderfolgenden Leitwertmaxima, an denen die Elektronenzahl zwischen  $N - 1$  und  $N$  bzw. zwischen  $N$  und  $N + 1$  fluktuiert, ist durch

$$|\Delta U_g(N)| = \frac{1}{e\alpha_g} (\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N) + \frac{e}{C_g} \quad (3.19)$$

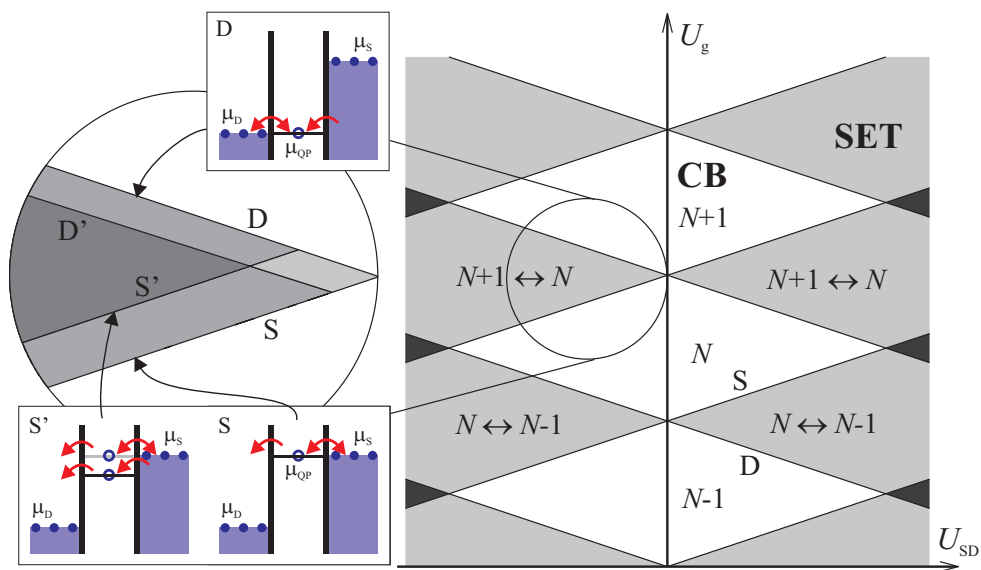
gegeben. Zur Vereinfachung der Notation soll ein Leitwertmaximum, an dem die Elektronenzahl beispielsweise zwischen  $N$  und  $N + 1$  fluktuiert, im folgenden als „Leitwertmaximum mit Elektronenzahl  $N \leftrightarrow N + 1$ “ oder „Leitwertmaximum am Übergang  $N \leftrightarrow N + 1$ “ bezeichnet werden. Mit dem „Übergang bei den Elektronenzahlen  $N = 1 \leftrightarrow 2$ “ wird dementsprechend das Leitwertmaximum bezeichnet, an dem die Elektronenzahl zwischen  $N = 1$  und  $N = 2$  fluktuiert.

Für das quantenmechanische Einschränkungspotential kann als Modell ein zweidimensionaler parabolischer Potentialtopf angenommen werden. Auf die Transportspektroskopie mittels externer Magnetfelder, die sich die Dispersion der Zustände zunutze macht, wird in Abschnitt 3.3 eingegangen.

## 3.2 Nichtlinearer Transport

Im bisher betrachteten Bereich linearer Antwort ist der Strom durch einen Quantenpunkt proportional zur *source-drain*-Spannung  $U_{\text{SD}}$ . Dies ist im Allgemeinen nur für sehr kleine Spannungen  $|U_{\text{SD}}|$  gegeben, bei denen  $|eU_{\text{SD}}|$  die Linienbreite der Leitwertmaxima deutlich unterschreitet. Eine endliche *source-drain*-Spannung öffnet ein endliches Transportfenster, und für  $\mu_{\text{D}} < \mu_{\text{S}}$  wird Einzelelektronentunneln bei

$$\mu_{\text{D}} \leq \mu_{\text{QP}} \leq \mu_{\text{S}} \quad (3.20)$$



**Abbildung 3.4:** Nichtlineare Transportspektroskopie: Schema einer Messung des Stroms durch einen Quantenpunkt als Funktion der Spannung an einem Kontrollgatter  $U_g$  und der *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$ . Coulomb-Blockade (CB) findet in rautenförmigen hellen Bereichen entlang  $U_{SD} = 0$  statt. An den eingezeichneten Kanten dieses Bereichs, S und D, setzt Einzelelektronentunneln (SET, *single electron tunneling*) ein. Die Ausschnittsvergrößerung zeigt zusätzlich Stufen im Tunnelstrom, die durch angeregte Zustände des Quantenpunkts entstehen (siehe Text).

beobachtet. Dies ist in Abbildung 3.4 demonstriert. Die weißen Bereiche, in denen aufgrund von Coulomb-Blockade kein Ladungstransport stattfindet, bilden Rauten entlang  $U_{SD} = 0$ . Die Grenzen dieser Coulomb-Blockade-Bereiche sind durch Ungleichung 3.20 gegeben. Linie S in Abbildung 3.4 entspricht der Ausrichtung des chemischen Potentials des Grundzustandsübergangs im Quantenpunkt am chemischen Potential in der *source*-Zuleitung, Linie D der Ausrichtung am chemischen Potential in der *drain*. An beiden Linien öffnet sich jeweils ein Transportkanal, so daß in den angrenzenden Rautenfeldern Einzelelektronentunneln stattfindet. Dies ist zur Verdeutlichung in Abbildung 3.4 schematisch dargestellt. Bei weiterer Erhöhung von  $|U_{SD}|$  werden sukzessive Mehrelektronenprozesse ermöglicht, so daß der Tunnelstrom zunimmt. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der sogenannten *Coulomb staircase*.

Zur quantitativen Berücksichtigung einer endlichen *source-drain*-Spannung muß im elektrostatischen Modell von Abschnitt 3.1.1 zusätzlich der Effekt einer Potentialänderung in den Kontakten auf den Quantenpunkt mit einbezogen werden. Man definiert  $C_S$  und  $C_D$  als Kapazitäten zwischen Quantenpunkt und *source* bzw. *drain* und  $\alpha_S \equiv C_S/C_\Sigma$  bzw.  $\alpha_D \equiv C_D/C_\Sigma$  als die entsprechenden Konversionsfaktoren. Für die Gesamtkapazität setzt man dann  $C_\Sigma = C_S + C_D + C_g + C_{\text{Rest}}$  an. Die *source-drain*-Spannung entspricht dem Potentialunterschied  $\mu_S - \mu_D = eU_{SD}$ . Für die Rechnung sei angenommen, daß  $\mu_D = \text{const.}$  gilt.

Entlang Linie D wird die Bedingung  $\mu_D = \mu_{QP}$  erfüllt. Damit gilt in Analogie zu Gleichung 3.18

$$\mu_D = \epsilon_N + \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{C_\Sigma} + e(\alpha_S U_{SD} + \alpha_g U_g) = \text{const.} \quad (3.21)$$

Entsprechend läßt sich für Linie S die Beziehung

$$\mu_D = \epsilon_N + \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{C_\Sigma} + e((\alpha_S - 1)U_{SD} + \alpha_g U_g) = \text{const.} \quad (3.22)$$

ableiten. Die Steigungen der beiden Grenzlinien ergeben sich damit zu

$$s_D \equiv \left. \frac{dU_g}{dU_{SD}} \right|_D = -\frac{\alpha_S}{\alpha_g} = -\frac{C_S}{C_g} \quad (3.23)$$

$$s_S \equiv \left. \frac{dU_g}{dU_{SD}} \right|_S = \frac{1 - \alpha_S}{\alpha_g} = \frac{C_\Sigma - C_S}{C_g} \quad (3.24)$$

und erlauben über

$$\alpha_g = \frac{1}{|s_S| + |s_D|} \quad (3.25)$$

eine direkte Bestimmung des Konversionskoeffizients  $\alpha_g$ .

Die in Abbildung 3.4 grau schattierten Bereiche des Einzelelektronentunnelns sind wie in der Ausschnittsvergrößerung angedeutet bei Halbleiterquantenpunkten nicht strukturlos. Mit zunehmender *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  tragen zusätzlich zu den elektronischen Grundzuständen auch angeregte Zustände des Quantenpunkts mit zum Transport bei. In der Ausschnittsvergrößerung in Abbildung 3.4 ist schematisch das Öffnen zweier zusätzlicher Transportkanäle eingezeichnet. Nach Überschreiten von Linie S' steht ausreichend Energie zur Verfügung, daß Elektronen aus Zuleitung *source* in einen angeregten  $(N + 1)$ -Elektronen-Zustand des Quantenpunkts mit Energie  $E^*(N + 1) > E(N + 1)$  tunneln können. Entlang Linie S' ist also die Bedingung

$$\mu_S = E^*(N + 1) - E(N) > E(N + 1) - E(N) \quad (3.26)$$

erfüllt. Analog kann nach Überschreiten von Linie D' nicht nur das energetisch höchste, sondern auch ein energetisch tieferliegendes Elektron beim Übergang von  $(N + 1)$  Elektronen zu  $N$  Elektronen den Quantenpunkt verlassen. Dieser verbleibt in einem angeregten  $N$ -Elektronen-Zustand. Die Lage von Linie D' wird entsprechend durch die Gleichung

$$\mu_D = E(N + 1) - E^*(N) < E(N + 1) - E(N) \quad (3.27)$$

beschrieben. Höhere Anregungen sowie Tunnelprozesse, die sowohl einen angeregten  $N$ -Elektronen-Zustand als auch einen angeregten  $(N + 1)$ -Elektronen-Zustand involvieren, sind ebenfalls möglich. Messungen im nichtlinearen Transport ermöglichen damit bei entsprechend hoher *source-drain*-Spannung die Charakterisierung angeregter Zustände innerhalb des durch  $U_{SD}$  gegebenen Energiefensters („*excitation spectroscopy*“).

Die Verfügbarkeit eines zusätzlichen Transportkanals führt allerdings nicht notwendigerweise zu einer Erhöhung des Tunnelstroms. Dies kann dadurch erklärt werden, daß auch bei Vorhandensein mehrerer Transportkanäle aufgrund der Coulomb-Abstoßung zu einem Zeitpunkt immer nur ein Elektron über genau einen der entsprechenden Zustände zum Strom beitragen kann (sequenzielles Tunneln). Ist ein neu entstehender Transportkanal beispielsweise schwächer an den *drain*-Kontakt als an *source* gekoppelt, so kann ein Elektron mit hoher Wahrscheinlichkeit in den entsprechenden Zustand auf den Quantenpunkt tunneln. Es verbleibt dort jedoch lange und blockiert so das Einzelelektronentunneln. Der durch den Quantenpunkt fließende Strom geht damit zurück. Ein möglicher Mechanismus, der zu einem derartigen Szenario führt, ist die sogenannte Spin-Blockade Typ I angeregter Zustände [Weinmann u. a. 1995, 1996, Weis u. a. 1993].

Um eine höhere Auflösung zu erreichen, wird bei der Transportspektroskopie angeregter Zustände typischerweise mittels einer Lock-in-Messung statt des Stroms durch den Quantenpunkt der differentielle Leitwert  $dI/dU_{SD}$  bestimmt. Trägt man ihn als

Funktion der *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und einer Gatterspannung  $U_g$  auf, so werden die Kanten aus Abbildung 3.4, entlang derer der Tunnelstrom zu- oder abnimmt, als diskrete Linien endlichen Leitwerts sichtbar.

## 3.3 Transportspektroskopie mittels externer Magnetfelder

### 3.3.1 Einfluß der Zuleitungen

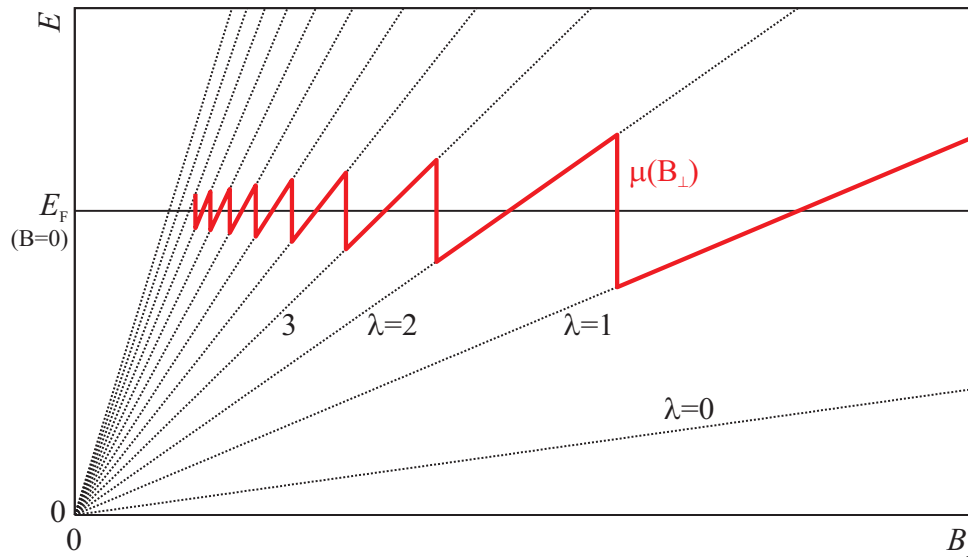
Bringt man ein zweidimensionales Elektronengas hoher Beweglichkeit in ein starkes Magnetfeld senkrecht zur Ebene des Elektronengases, so bilden sich diskrete elektronische Energieniveaus, die sogenannten Landau-Niveaus [Kittel 1996]. Mit  $\omega_c = |e|B_{\perp}/m^*$  als der Zyklotronfrequenz ist die Energie des Landau-Niveaus mit Index  $\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ ) durch

$$E_{\text{Land.},\lambda} = \hbar\omega_c \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (3.28)$$

gegeben. Der Füllfaktor  $\nu_{2\text{DEG}}$  des zweidimensionalen Elektronengases ist dann definiert als der Quotient aus der Elektronenflächendichte  $n_s$  und der Zahl der Zustände pro Fläche und Landau-Niveau ohne Berücksichtigung der Spinentartung, also

$$\nu_{2\text{DEG}} = \frac{n_s}{|e|B_{\perp}/h}. \quad (3.29)$$

Damit ist die Zahl der bei  $T = 0$  vollständig besetzten zweifach spinentarteten Landau-Niveaus gleich dem ganzzahligen Anteil von  $\nu_{2\text{DEG}}/2$  [Datta 1995]. Die diskreten Energieniveaus führen bei Variation des Magnetfelds zu einer Oszillation des chemischen Potentials um die Fermi-Energie bei  $B_{\perp} = 0$ . Dies ist in Abbildung 3.5 für den Fall vernachlässigbarer Zeeman-Aufspaltung der elektronischen Zustände dargestellt. Die gepunkteten Linien geben die Energien der Landau-Niveaus in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B_{\perp}$  wieder. Jeweils bei Vorliegen eines geradzahligen Füllfaktors findet ein Übergang des durchgezogen eingezeichneten chemischen Potentials zum nächstniedrigeren Landau-Niveau statt. Da die Gatterspannung, bei der Leitwertmaxima eines Quantenpunkts auftreten, sowohl von der Lage der diskreten Energieniveaus des Quantenpunkts als auch vom chemischen Potential der Zuleitungen abhängt, kann eine entsprechende Verschiebung der Maxima in magnetfeldabhängigen Messungen beobachtet werden. Sie wirkt gleichermaßen auf alle Maxima, ohne Rücksicht auf Elektronenzahl oder Quantenzustand des Quantenpunkts.



**Abbildung 3.5:** Oszillation des chemischen Potentials  $\mu$  der Zuleitungen im variierten Magnetfeld. Die Sprünge des chemischen Potentials treten jeweils bei geradzahligem Füllfaktor  $\nu_{2\text{DEG}}$  im zweidimensionalen Elektronengas auf. Die Energien der Landau-Niveaus sind als gepunktete Linien eingezeichnet.

### 3.3.2 Spinzustände, Zeeman-Aufspaltung

Die Zeeman-Wechselwirkung der Elektronenspins mit dem externen Magnetfeld

$$H_Z = g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (3.30)$$

bewirkt eine Aufspaltung der elektronischen Zustände unabhängig von der Ausrichtung des Magnetfelds. In GaAs führt die niedrige effektive Elektronenmasse  $m^* = 0,066 m_e$  zu einem verstärkten Einfluß orbitaler Effekte auf die Zustandsenergien. Deshalb und wegen des in GaAs niedrigen effektiven Landé-Faktors  $g = -0,44$  ist die Zeeman-Aufspaltung der Spin-Zustände um mehr als eine Größenordnung kleiner als orbitale Drehimpulseffekte. Sie ergibt sich für  $\Delta S_z = 1$  zu

$$\Delta E_Z = g\mu_B B_z \simeq 25,5 \frac{\mu\text{eV}}{\text{T}}. \quad (3.31)$$

Eine direkte Beobachtung erfordert niedrige Linienbreiten und hohe magnetische Felder [Hanson u. a. 2003, 2004].

### 3.3.3 Fock-Darwin-Spektrum

Für das Einschränkungspotential eines Quantenpunkts wird als Modell oft ein zweidimensionaler parabolischer Potentialtopf mit Oszillatorkonstante  $\omega_0$  angenommen. Wegen des endlichen Abstands der Gatterelektroden vom zweidimensionalen Elektronengas handelt es sich hierbei um eine gute Näherung. Der zugehörige orbitale Einteilchen-Hamiltonoperator in einem Magnetfeld  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  ergibt sich zu

$$H = \frac{1}{2m^*} \left( \vec{p} - |e|\vec{A} \right)^2 + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 r^2. \quad (3.32)$$

Ist das Magnetfeld  $B_\perp$  senkrecht zur Ebene des zweidimensionalen Elektronengases gerichtet, so erhält man unter Zuhilfenahme der Zyklotronfrequenz  $\omega_c = |e|B_\perp/m^*$

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^* \left( \omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2 \right) r^2 - \frac{1}{2}\omega_c l_z \quad (3.33)$$

mit  $\vec{r}$  als Orts-,  $\vec{p}$  als Impuls- und  $l_z = xp_y - yp_x$  als Drehimpulsoperator in  $z$ -Richtung parallel zum Magnetfeld.

Die Einteilchen-Eigenzustände eines derartigen Potentialtopfes wurden von V. Fock und C. G. Darwin analysiert [Fock 1928, Darwin 1930, Jacak u. a. 1998]. Seine Energieeigenwerte sind durch

$$\varepsilon_{nm} = \hbar \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2} (n+1) - \frac{1}{2}\hbar\omega_c m \quad (3.34)$$

gegeben, wobei  $n = 0, 1, \dots$  die Hauptquantenzahl (entsprechend der Energie) und  $m = -n, -n+2, \dots, n-2, n$  die Winkelquantenzahl (entsprechend dem Drehimpuls) darstellt.

Analog zum Wasserstoffatom ist eine Aufspaltung der Wellenfunktionen in radialen und winkelabhängigen Teil

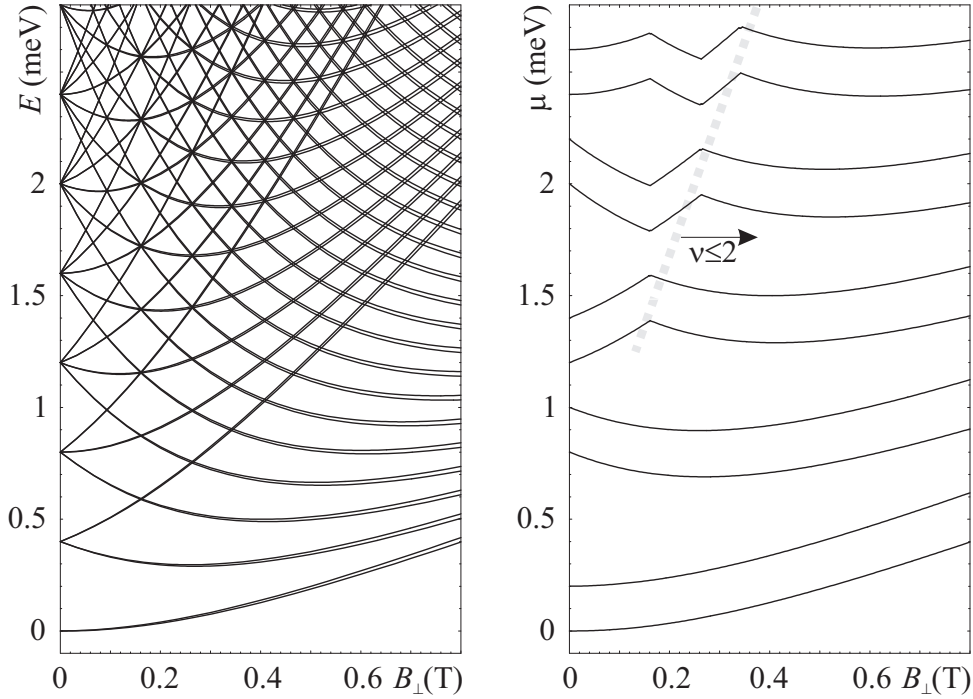
$$\Phi(r, \theta) = \Psi_m(\theta) R_{nm}(r) \quad (3.35)$$

sinnvoll. Aus der Rotationssymmetrie des Modellpotentials ergibt sich die triviale Winkelabhängigkeit

$$\Psi_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} \quad (3.36)$$

als Eigenfunktion des zweidimensionalen Drehimpulsoperators. Der radiale Teil der Wellenfunktion kann durch

$$R_{nm}(r) = \frac{\sqrt{2}}{l_0} \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + |m|)!}} \left( \frac{r}{l_0} \right)^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{2l_0^2}\right) L_{n_r}^{|m|} \left( \frac{r^2}{l_0^2} \right) \quad (3.37)$$



**Abbildung 3.6:** (a) Energie der Fock-Darwin-Einteilchenzustände im Magnetfeld  $B_{\perp}$  für  $\omega_0 = 0,4 \text{ meV}$ , unter zusätzlicher Berücksichtigung der Spinartung (für  $B = 0$ ) beziehungsweise der Zeeman-Aufspaltung  $\Delta E_Z = g\mu_B B$ . (b) Entsprechende Verschiebung der ersten 10 Leitwertmaxima im *constant interaction model* entsprechend Gleichungen 3.18 und 3.34. Zur besseren Verdeutlichung der Verschiebung wird eine (unrealistisch kleine) Ladeenergie  $E_C = 0,2 \text{ meV}$  angenommen. Wechselwirkungen zwischen den Elektronen sind vernachlässigt, so daß alle orbitalen Zustände immer abwechselnd mit Elektronen entgegengesetzt ausgerichteten Spins aufgefüllt werden.

ausgedrückt werden. Hierbei ist  $l_0$  die charakteristische Längenskala der Wellenfunktion, im folgenden auch als Fock-Darwin-Länge bezeichnet,

$$l_0 = \frac{l_B}{\sqrt[4]{1 + 4\omega_0^2/\omega_c^2}}, \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{|e|B_{\perp}}}. \quad (3.38)$$

$L_{n_r}^{|m|}$  bezeichnet die Laguerre-Polynome

$$L_{n_r}^{|m|}(x) = \frac{1}{m!} x^{-|m|} e^x \frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}} \left( x^{n_r+|m|} e^{-x} \right), \quad (3.39)$$

und die Radialquantenzahl  $n_r$  ergibt sich als  $n_r = (n - |m|)/2$ .



Die Entwicklung der Zustandsenergien im Magnetfeld ist in Abbildung 3.6(a) für  $\omega_0 = 0,4 \text{ meV}$  dargestellt; Abbildung 3.6(b) verdeutlicht die hieraus resultierenden Positionen der Leitwertmaxima. Die Spin-Entartung (bei  $B = 0$ ) und Zeeman-Aufspaltung (bei  $B > 0$ ) wird in einem einfachen Modell mit einbezogen, nicht jedoch Wechselwirkungen der Elektronen untereinander oder die Hund'schen Regeln. Für eine detailliertere Behandlung sei auf [Kouwenhoven u. a. 2001] verwiesen.

Im Grenzfall kleinen Magnetfelds  $B_{\perp} \simeq 0$  ergibt sich in GaAs für  $\Delta m = 2$  eine Drehimpulsaufspaltung der bei  $B_{\perp} = 0$  entarteten Oszillatorzustände von

$$\Delta \varepsilon_{B_{\perp} \simeq 0}(B_{\perp}) \simeq \hbar \omega_c \simeq 1,75 \frac{\text{meV}}{\text{T}}. \quad (3.40)$$

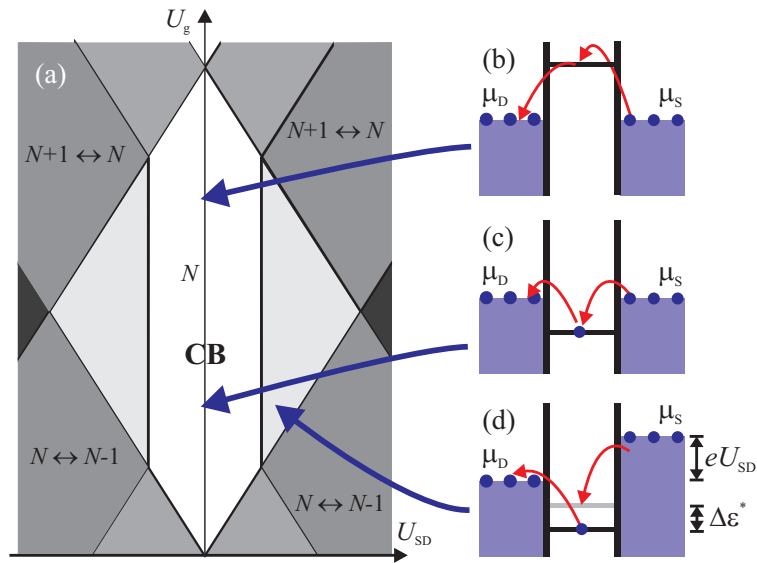
Für  $N > 4$  Elektronen finden mit wachsendem Magnetfeld Grundzustandsübergänge statt. Der energetisch niedrigste verfügbare Quantenzustand wechselt, was an einer Änderung der Magnetfeldabhängigkeit der Eigenenergie sichtbar wird. Im Fall hohen Magnetfelds existiert für  $B_{\perp} \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $\varepsilon_{n,m} \rightarrow \hbar \omega_c (n - m + 1)/2$ . Damit gehen die Zustände aufgrund der magnetischen Einschränkung in die Landau-Niveaus des freien zweidimensionalen Elektronengases über. Ein Zustand mit Quantenzahlen  $n$  und  $m$  kann dem Landau-Niveau mit Index  $\lambda = (n - m)/2$  zugeordnet werden. Definiert man einen Füllfaktor  $\nu$  des Quantenpunkts analog zum Füllfaktor des freien Elektronengases, so liegt bei Erhöhen des Magnetfelds  $\nu \leq 2$  nach dem letzten orbitalen Grundzustandsübergang vor. Im Bereich  $2 \geq \nu \geq 1$  werden aufgrund der Zeeman-Wechselwirkung die Elektronenspins sukzessive ausgerichtet, was zu weiteren Grundzustandsübergängen auf kleinerer Energieskala führt. Für  $\nu \lesssim 1$  bildet sich ein sogenanntes *maximum density droplet* spinpolarisierter Elektronen [Oosterkamp u. a. 1999].

## 3.4 Tunnelprozesse höherer Ordnung

Liegt Coulomb-Blockade vor, so kann ein Tunnelstrom nicht durch Tunnelprozesse erster Ordnung getragen werden. Prozesse höherer Ordnung, die durch Tunneln über virtuelle Zustände oder Mehrelektronenprozesse beschrieben werden, bleiben jedoch möglich und können insbesondere bei tiefen Temperaturen beobachtet werden.

### 3.4.1 Kotunneln in Coulomb-Blockade

Mit dem Begriff Kotunneln werden zusammenfassend Tunnelprozesse höherer Ordnung bezeichnet. Diese können, aber müssen nicht zu zusätzlichen Beiträgen im Strom



**Abbildung 3.7:** Kottunneln durch einen Quantenpunkt. (a) Schema einer Strom-Messung als Funktion von Gatterspannung  $U_g$  und *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  (vgl. Abbildung 3.4). (b) Elastisches Kottunneln unter Ausnutzung eines „virtuellen“ unbesetzten Zustands. (c) Beispiel für einen zwei Elektronen involvierenden elastischen Kottunnelprozess. (d) Inelastisches Kottunneln. Nach [De Franceschi u. a. 2001].

durch einen Quantenpunkt führen. Sie werden insbesondere im Bereich der Coulomb-Blockade, in dem Tunnelprozesse erster Ordnung energetisch unmöglich sind, sichtbar [Geerligs u. a. 1990, De Franceschi u. a. 2001]. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit einer Einteilung in zwei Kategorien. Unter elastischem Kottunneln versteht man Prozesse, bei denen die Energie des Quantenpunkts nach Abschluß des Prozesses unverändert ist. Inelastisches Kottunneln hingegen kann den Quantenpunkt in einem angeregten Zustand hinterlassen.

Abbildung 3.7 skizziert mehrere derartige Prozesse. Dabei sind speziell diejenigen Fälle ausgewählt, die einen Beitrag zum meßbaren Tunnelstrom liefern können. In Abbildung 3.7(b) findet elastisches Kottunneln durch einen unbesetzten Zustand oberhalb des chemischen Potentials statt. Ein Elektron tunnelt durch die rechte Tunnelbarriere auf einen „virtuellen Zustand“ des Quantenpunkts. Die Lebensdauer dieses Zustands hängt über die Heisenberg’sche Unschärferelation mit dem Fehlbetrag an Ladeenergie, der zu seiner Besetzung benötigt wird, zusammen. Abbildung 3.7(c) gibt den hierzu spiegelbildlichen Prozeß wieder, der auch durch das Kottunneln eines Lochs über einen virtuellen Zustand in entgegengesetzter Richtung beschrieben werden kann. Hier findet ein Zweielektronen-Prozeß statt. Ein im Quantenpunkt gefangenes Elektron verläßt diesen in Richtung *drain*-Kontakt, ein zweites Elektron tunnelt zugleich

aus dem *source*-Kontakt in den Quantenpunkt. Beide Vorgänge aus Abbildung 3.7(b) und (c) haben gemeinsam, daß die Energie der tunnelnden Elektronen und die Energie des Quantenpunkts nach Abschluß des Tunnelprozesses den gleichen Wert wie zuvor annehmen. Damit handelt es sich in beiden Fällen um elastisches Kotunneln.

In Abbildung 3.7(d) ist im Gegensatz hierzu ein inelastischer Kotunnelprozeß skizziert. Ein Elektron verläßt den Quantenpunkt aus dessen Grundzustand, ein zweites tunnelt im durch die Heisenberg'sche Unschärferelation gegebenen Zeitfenster in einen angeregten Zustand des Quantenpunkts mit Anregungsenergie  $\Delta\epsilon^*$ . Hierbei wird dem Quantenpunkt Energie hinzugefügt. Damit ist dieser Prozeß nur bei ausreichend großer *source-drain*-Spannung möglich. Der Kotunnelstrom in Coulomb-Blockade nimmt zu, sobald der Betrag der Source-Drain-Spannung den Wert  $\Delta\epsilon^*/e$  überschreitet. Dies ist in Abbildung 3.7(a) durch die hellgrauen Bereiche innerhalb der Coulomb-Blockade-Region verdeutlicht.

### 3.4.2 Kondo-Effekt

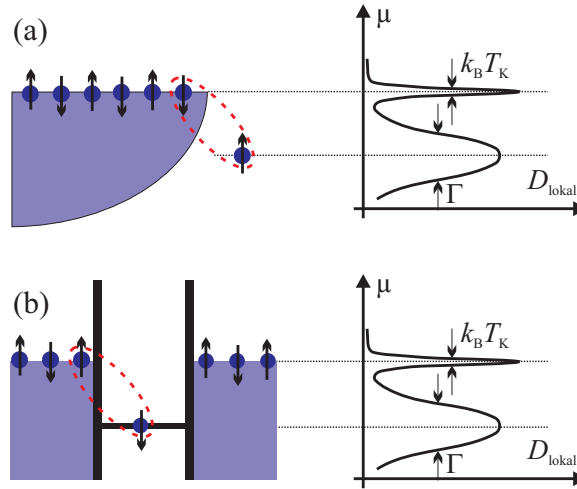
Der sogenannte Kondo-Effekt beschreibt eine bei tiefen Temperaturen auftretende Anomalie der elektrischen Leitung von Metallen. Magnetische Verunreinigungen führen zu einem Anstieg des Widerstandes unterhalb der charakteristischen Kondo-Temperatur  $T_K$ . Das Modell hierzu beruht darauf, daß eine spinentartete, aber nur einfach mit einem Elektron besetzte Störstelle vorliegt. Als Folge virtueller Übergänge von Leitungsbandelektroden in den unbesetzten Zustand bildet sich eine effektive antiferromagnetische Austauschwechselwirkung [Anderson 1984] zwischen der Störstelle und den umgebenden Elektronen.

Dies wurde von Jun Kondo 1964 durch den Hamilton-Operator

$$H_{\text{Kondo}} = \sum_{\sigma, \vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} c_{\sigma\vec{k}}^\dagger c_{\sigma\vec{k}} - 2J\vec{s}(0) \cdot \vec{S} \quad (3.41)$$

beschrieben [Kondo 1964]. Hierbei ist  $\vec{s}(0)$  der effektive Spin der Leitungsbandelektroden am Ort der Störstelle und  $\vec{S}$  der Spin der Störstelle.  $c_{\sigma\vec{k}}^\dagger$  stellt den Erzeugeroperator für ein Leitungsbandelektron mit Spin  $\sigma$  und Wellenvektor  $\vec{k}$  dar.

Der sogenannte Anderson-Hamiltonoperator [Anderson 1961] liefert eine allgemeinere Beschreibung des Problems. Mit  $f_\chi^\dagger$  als Erzeugeroperator für ein Störstellenelektron mit Spin  $\chi$ ,  $E_C$  als Maß für die Ladeenergie der Störstelle und den  $\mathcal{V}_{\chi\sigma\vec{k}}^*$  als



**Abbildung 3.8:** Kondo-Effekt in Metallen und Quantenpunkten: (a) Schematische Zeichnung einer Störstelle mit ungepaartem Spin in einem Metall (links). Die Hybridisierung des lokalisierten Spins mit Leitungsbandelektronen führt zu einem Maximum der lokalen Zustandsdichte an der Fermikante (rechts). (b) Analoge Zeichnung für einen mit einem Elektron geladenen Quantenpunkt (siehe Text).

Übergangsmatrixelementen zwischen Leitungsband und Störstelle ist er durch

$$\begin{aligned}
 H_{\text{Anderson}} = & \sum_{\sigma, \vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} c_{\sigma \vec{k}}^\dagger c_{\sigma \vec{k}} + \varepsilon^f \sum_{\chi} f_{\chi}^\dagger f_{\chi} + \frac{E_C}{2} \sum_{\chi' \neq \chi} f_{\chi'}^\dagger f_{\chi'} f_{\chi}^\dagger f_{\chi} + \\
 & \sum_{\chi, \sigma, \vec{k}} \left( \mathcal{V}_{\chi \sigma \vec{k}} f_{\chi}^\dagger c_{\sigma \vec{k}} + \mathcal{V}_{\chi \sigma \vec{k}}^* f_{\chi} c_{\sigma \vec{k}}^\dagger \right), \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

gegeben. In Gleichung 3.42 beschreiben die ersten beiden Terme die Energie der Leitungsband- und Störstellenelektronen in Abwesenheit der Wechselwirkung. Der dritte Term bewirkt eine Unterdrückung der Doppelbesetzung der Störstelle. Die letzte Summe schließlich beschreibt die Austauschwechselwirkung. Es kann gezeigt werden, daß  $H_{\text{Kondo}}$  ein effektiver Hamiltonoperator für niederenergetische Prozesse ist. Er folgt aus  $H_{\text{Anderson}}$  in Abwesenheit von Prozessen, die die Störstelle entleeren oder doppelt besetzen [Anderson 1984, Schrieffer und Wolff 1966].

Die Austauschwechselwirkung führt zur Ausbildung eines gebundenen Zustands aus dem Störstellenspin und einem „Spin der Umgebung“. Als weitere Konsequenz bildet sich ein lokales Maximum der Zustandsdichte der Störstelle an der Fermikante, wie in Abbildung 3.8(a) verdeutlicht wird. Elektron-Elektron-Streuung führt dann zu der beobachteten Erhöhung des elektrischen Widerstandes in Metallen unterhalb der Kondo-Temperatur  $T_K$ .

Das Modell einer lokalisierten magnetischen Störstelle läßt sich auf einen ungepaarten Elektronenspin in einem Quantenpunkt übertragen [Glazman und Raikh 1988, Ng und Lee 1988]. Wie im Falle des metallischen Kondo-Effekts bildet sich auch hier ein lokales Maximum der Zustandsdichte an der Fermikante der Zuleitungen. Allerdings führt dies nicht wie im Metall zu einem erhöhten elektrischem Widerstand für  $T < T_K$ , sondern zu erhöhtem Leitwert, da Tunneln durch den Quantenpunkt auch im Bereich der Coulomb-Blockade ermöglicht wird. Messungen zeigen eine bemerkenswerte Übereinstimmung von Theorie und Experiment [Goldhaber-Gordon u. a. 1998b,a, Cronenwett u. a. 1998].

Die Kondo-Temperatur  $T_K$  eines isolierten Spins im Quantenpunkt mit  $N$  Elektronen kann nach [Haldane 1978, Goldhaber-Gordon u. a. 1998a] mit der Ladeenergie  $E_C$  des Quantenpunkts, der Gatterspannung  $U_{g0}$ , bei der das Leitwertmaximum mit Elektronenzahl  $N - 1 \leftrightarrow N$  vorliegt, und der Lebensdauer verbreiterung  $\Gamma$  des ersten unbesetzten Quantenpunkt-Zustandes mit  $N + 1$  Elektronen als

$$k_B T_K = \frac{\sqrt{\Gamma E_C}}{2} \exp\left(\frac{\pi(-\alpha_g)(U_g - U_{g0})((-\alpha_g)(U_g - U_{g0}) + E_C)}{\Gamma E_C}\right) \quad (3.43)$$

abgeschätzt werden. Dementsprechend erwartet man eine hohe Kondo-Temperatur und damit ein deutliches Auftreten des Effekts bei starker Kopplung  $\Gamma$  des Quantenpunkts an die Zuleitungen. Die Temperaturabhängigkeit des Leitwerts wird nach [Goldhaber-Gordon u. a. 1998a] näherungsweise durch

$$G(T) = G_0 \left( \frac{T_K'^2}{T^2 + T_K'^2} \right)^s \quad (3.44)$$

mit  $T_K' = T_K / \sqrt{2^{1/s} - 1}$  beschrieben. Für den Parameter  $s$  wird hierbei aufgrund von Modellen, die auf dem Prinzip der numerischen Renormalisierungsgruppen beruhen, im Falle eines Störstellenspins  $1/2$  ein Wert von  $s = 0,22 \pm 0,01$  erwartet [Goldhaber-Gordon u. a. 1998a]. Als Funktion der *source-drain*-Spannung erwartet man ein deutliches Maximum des Leitwerts bei  $U_{SD} = 0$  [Meir u. a. 1993].



---

## Kapitel 4

# Theorie des Transports durch Doppelquantenpunkte

Bezeichnet man Quantenpunkte als „künstliche Atome“, so liegt für kohärent tunnelgekoppelte Doppel- und Mehrfachquantenpunkte der Begriff „künstliche Moleküle“ nahe. Mit Kapitel 3 als Grundlage soll hier ein Überblick über die für die Messungen relevante Theorie des Transports durch Doppelquantenpunkte gegeben werden. Abschnitt 4.1 beschreibt den Grenzfall schwacher Tunnelkopplung, in dem die elektrostatische Wechselwirkung dominiert. Abschnitt 4.2 geht auf den Fall starker Tunnelkopplung mit delokalisierten „molekularen“ Zuständen ein.

### 4.1 Schwache Tunnelkopplung

#### 4.1.1 Linearer Transport

Analog zum Modell einer metallischen Insel in Abschnitt 3.1.1 kann im Grenzfall schwacher Tunnelkopplung zwischen zwei Quantenpunkten für diese ein elektrostatisches „orthodoxes“ Modell aufgestellt werden. Der von ihnen gebildete Doppelquantenpunkt wird durch zwei metallische Inseln und ein Netzwerk aus Kapazitäten und Widerständen modelliert. Um das Potential in beiden Quantenpunkten getrennt steuern zu können, werden zwei Gatterelektroden eingesetzt, die an die Quantenpunkte unterschiedlich koppeln. Weiterhin existiert nun auch eine direkte kapazitive Wechselwirkung zwischen den beiden Quantenpunkten. Abbildung 4.1 zeigt das resultierende Ersatzschaltbild für den Fall eines seriellen Doppelquantenpunkts, d.h. eines Doppelquantenpunkts, bei dem Elektronen bei Stromfluß beide Quantenpunkte nacheinander durchtunneln. In dieser Anordnung ist ein Tunnelstrom nur möglich, wenn die Elektronenzahl in beiden Quantenpunkten fluktuieren kann.

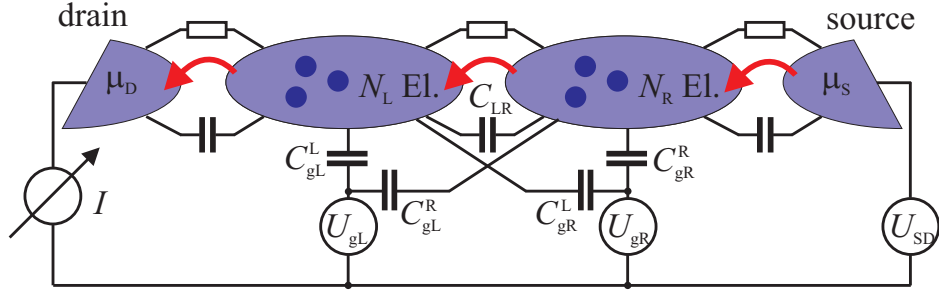


Abbildung 4.1: Kapazitives Ersatzschaltbild eines seriellen Doppelquantenpunkts

Analog zu Gleichung 3.6 für einen Einzelquantenpunkt kann eine klassische elektrostatische Energie des Doppelquantenpunkts angesetzt werden [Hofmann u. a. 1995, Hofmann 1994, van der Wiel u. a. 2003]. Unter Verwendung der Kapazitäten, Spannungen und Elektronenzahlen aus Abbildung 4.1 ist sie durch

$$\begin{aligned}
 E_{\text{klass.}}(N_L, N_R, U_{gL}, U_{gR}) &= \frac{1}{C_{\Sigma L} C_{\Sigma R} - (C_{LR})^2} \cdot \\
 &\cdot \left[ \frac{1}{2} C_{\Sigma R} (eN_L + C_{gL}^L U_{gL} + C_{gR}^L U_{gR})^2 \right. \\
 &+ \frac{1}{2} C_{\Sigma L} (eN_R + C_{gR}^R U_{gR} + C_{gL}^R U_{gL})^2 \\
 &\left. + C_{LR} (eN_L + C_{gL}^L U_{gL} + C_{gR}^L U_{gR}) (eN_R + C_{gR}^R U_{gR} + C_{gL}^R U_{gL}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

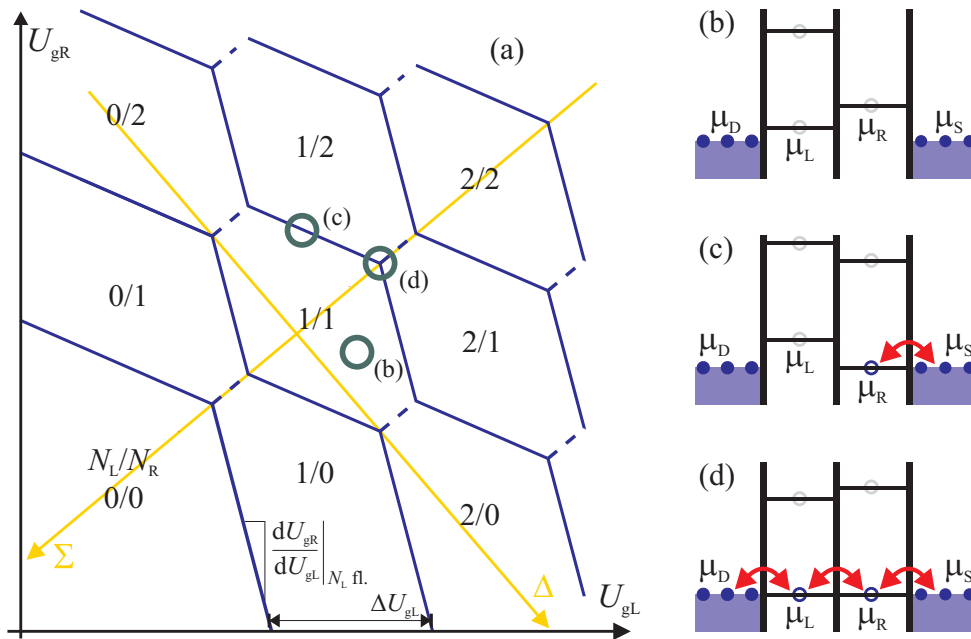
gegeben. Hierbei bezeichnen  $C_{\Sigma L}$  und  $C_{\Sigma R}$  die Gesamtkapazitäten des linken und rechten Quantenpunkts.

Die Elektronenzahl auf jedem der Quantenpunkte stellt sich über Tunnelprozesse derart ein, daß diese Energie minimiert wird. Im sogenannten Stabilitätsdiagramm eines Doppelquantenpunkts kann nun die jeweils stabile Ladungskonfiguration als Funktion der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  aufgetragen werden. Das sich aus Gleichung 4.1 ergebende Resultat ist in Abbildung 4.2 schematisch aufgetragen. Die Bereiche konstanter Elektronenzahl bilden nun ein Sechseck-Gitter in der Ebene der beiden Gatterspannungen.

Die Geometrie des Sechseck-Gitters ist vollständig von den Kapazitätskoeffizienten aus Gleichung 4.1 bestimmt. Dies wird im folgenden an Beispielen illustriert. Nimmt man die Elektronenzahl im rechten Quantenpunkt  $N_R$  als konstant an, so kann ein chemisches Potential des linken Quantenpunkts analog zu Gleichung 3.5 als

$$\mu_L(N_L, N_R, U_{gL}, U_{gR}) \equiv E_{\text{klass.}}(N_L + 1, N_R, U_{gL}, U_{gR}) - E_{\text{klass.}}(N_L, N_R, U_{gL}, U_{gR}) \tag{4.2}$$





**Abbildung 4.2:** (a) Stabilitätsdiagramm eines Doppelquantenpunkts unter Berücksichtigung kapazitiver Wechselwirkungen. Die Bereiche konstanter Elektronenzahl  $N_L$  und  $N_R$  im linken bzw. rechten Quantenpunkt als Funktion der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  bilden Sechsecke. Die im Text beispielhaft berechneten Größen  $\Delta U_{gL}$  und  $dU_{gR}/dU_{gL}|_{N_L \text{ flukt.}}$  sind eingezeichnet. (b)–(d) Schematische Darstellung der chemischen Potentiale für die in (a) gekennzeichneten Gatterspannungen. Für (b) liegt in beiden Quantenpunkten Coulomb-Blockade vor, für (c) im linken Quantenpunkt. Nur wenn in beiden Quantenpunkten die Elektronenzahl fluktuieren kann (d), ist Einzelelektronentunneln möglich — d.h. an den „Tripelpunkten“ des Stabilitätsdiagramms.

#### 4. Theorie des Transports durch Doppelquantenpunkte

---

definiert werden. Das chemische Potential  $\mu_L$  hängt linear von den Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  und den Elektronenzahlen  $N_L$  und  $N_R$  ab. Einsetzen von Gleichung 4.1 in Gleichung 4.2 ergibt

$$\begin{aligned} \mu_L(U_{gL}, U_{gR}) = & \underbrace{\frac{C_{LR}C_{gL}^R + C_{gL}^L C_{\Sigma R}}{C_{\Sigma L}C_{\Sigma R} - C_{LR}^2}}_{\equiv \alpha_{gL}^L} eU_{gL} + \underbrace{\frac{C_{LR}C_{gR}^R + C_{gR}^L C_{\Sigma R}}{C_{\Sigma L}C_{\Sigma R} - C_{LR}^2}}_{\equiv \alpha_{gR}^L} eU_{gR} + \\ & + \frac{(N_L + \frac{1}{2})C_{\Sigma R} + N_R C_{LR}}{C_{\Sigma L}C_{\Sigma R} - C_{LR}^2} e^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Kapazitätsverhältnisse  $\alpha_{gL}^L$  und  $\alpha_{gR}^L$  sind dabei die effektiven Konversionsfaktoren zwischen Gatterspannungen und Quantenpunktpotential. Die Definitionen für  $\alpha_{gR}^R$  und  $\alpha_{gL}^R$  ergeben sich analog durch Vertauschen der Bezeichnungen „L“ und „R“. Im Stabilitätsdiagramm des Doppelquantenpunkts ist entlang einer Sechseckgrenze, an der die Elektronenzahl im linken Quantenpunkt fluktuiert, das chemische Potential  $\mu_L$  als Funktion der Gatterspannungen konstant. Die Steigung  $dU_{gR}/dU_{gL}$  derartiger Sechseckgrenzen erhält man durch Auflösen der Bedingung

$$\frac{\partial \mu_L}{\partial U_{gL}} U_{gL} + \frac{\partial \mu_L}{\partial U_{gR}} U_{gR} = 0 \quad (4.4)$$

nach  $U_{gR}$  und Ableiten nach  $U_{gL}$ . Unter Verwendung der Definitionen aus Gleichung 4.3 ist sie durch

$$\left. \frac{dU_{gR}}{dU_{gL}} \right|_{N_L \text{ flukt.}} = -\frac{\alpha_{gL}^L}{\alpha_{gR}^L} \quad (4.5)$$

gegeben.

Der Potentialunterschied  $\Delta\mu_L$  zwischen aufeinanderfolgenden Grenzlinien der Bereiche konstanter Ladung im linken Quantenpunkt beträgt

$$\begin{aligned} \Delta\mu_L = & \mu_L(N_L + 1, N_R, U_{gL}, U_{gR}) - \mu_L(N_L, N_R, U_{gL}, U_{gR}) \\ = & e^2/C_{\Sigma L}^* \quad \text{mit} \quad C_{\Sigma L}^* = C_{\Sigma L} \left( 1 - \frac{C_{LR}^2}{C_{\Sigma L}C_{\Sigma R}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Er ist demnach unabhängig von der Elektronenzahl im Doppelquantenpunkt, solange die Kapazitäten näherungsweise konstant sind und quantenmechanische Effekte vernachlässigt werden. Betrachtet man als Skala die Gatterspannung  $U_{gL}$ , dann ist der Abstand zwischen den Konfigurationsgrenzen im Stabilitätsdiagramm (vgl. Abbildung

4.2(a)) durch

$$\begin{aligned}\Delta U_{\text{gL}} &= \Delta \mu_{\text{L}} \left( \frac{\partial \mu_{\text{L}}}{\partial U_{\text{gL}}} \right)^{-1} \\ &= \frac{e C_{\Sigma\text{R}}}{C_{\text{LR}} C_{\text{gL}}^{\text{R}} + C_{\text{gL}}^{\text{L}} C_{\Sigma\text{R}}}\end{aligned}\quad (4.7)$$

gegeben. Wie im Falle einer einzelnen metallischen Insel treten auch hier die Ladungsänderungen äquidistant auf.

Die Kenntnis der chemischen Potentiale der beiden Quantenpunkte ermöglicht die Einführung eines an die Symmetrie des Doppelquantenpunkts angepaßten Koordinatensystems. Dieses ist in Abbildung 4.2(a) durch hell eingezeichnete Achsen mit Beschriftung  $\Sigma$  und  $\Delta$  angedeutet. Entlang der  $\Sigma$ -Achse gilt  $\mu_{\text{L}} = \mu_{\text{R}}$ , d.h. die chemischen Potentiale der beiden Quantenpunkte liegen auf gleicher Höhe. Entlang der  $\Delta$ -Achse hingegen bleibt das arithmetische Mittel der beiden Potentiale konstant, sie verschieben sich jedoch relativ zueinander. Die Energiekoordinaten  $\Sigma$  und  $\Delta$  des Doppelquantenpunkts ergeben sich damit als

$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv \frac{\mu_{\text{R}} + \mu_{\text{L}}}{2} = \frac{1}{2} (\alpha_{\text{gR}}^{\text{R}} U_{\text{gR}} + \alpha_{\text{gL}}^{\text{R}} U_{\text{gL}} + \alpha_{\text{gR}}^{\text{L}} U_{\text{gR}} + \alpha_{\text{gL}}^{\text{L}} U_{\text{gL}}) \\ \Delta &\equiv \frac{\mu_{\text{R}} - \mu_{\text{L}}}{2} = \frac{1}{2} (\alpha_{\text{gR}}^{\text{R}} U_{\text{gR}} + \alpha_{\text{gL}}^{\text{R}} U_{\text{gL}} - \alpha_{\text{gR}}^{\text{L}} U_{\text{gR}} - \alpha_{\text{gL}}^{\text{L}} U_{\text{gL}}).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Abbildungen 4.2(b) bis (d) verdeutlichen die bereits kurz erwähnte Bedingung für Einzelelektronentunneln durch einen seriellen Doppelquantenpunkt. Im Inneren eines Felds des Stabilitätsdiagramms liegt in beiden Quantenpunkten Coulomb-Blockade vor (Abbildung 4.2(b)). Auf den Grenzlinien kann die Elektronenzahl in einem der beiden Quantenpunkte fluktuieren (Abbildung 4.2(c)), was aber für Ladungstransport in der seriellen Geometrie nicht ausreicht. Nur an den „Tripelpunkten“ des Diagramms, an denen sich drei Regionen unterschiedlicher Ladungskonfiguration berühren, kann ein Tunnelstrom beobachtet werden (Abbildung 4.2(d)). In Analogie zu Gleichung 3.4 für einen Einzelquantenpunkt ergibt sich für einen seriellen Doppelquantenpunkt die Transportbedingung

$$\mu_{\text{L}} = \mu_{\text{R}} = \mu. \quad (4.9)$$

Dies entspricht diskreten Leitwertmaxima an den „Tripelpunkten“ des Stabilitätsdiagramms.

Durch die in diesem Abschnitt angedeutete Auswertung des Stabilitätsdiagramms ist prinzipiell eine vollständige Charakterisierung der relativen Kapazitätsverhältnisse des Doppelquantenpunkts möglich. Für die Details sei auf entsprechende Literatur

verwiesen [Hofmann 1994, Hofmann u. a. 1995, van der Wiel u. a. 2003]. Die Absolutwerte der Kapazitäten können jedoch nur durch Vergleich mit einer extern vorgegebenen Energieskala bestimmt werden. Hierfür bieten sich — wie im folgenden beschrieben — nichtlineare Transportmessungen an.

### 4.1.2 Nichtlinearer Transport

Bei Anlegen einer endlichen *source-drain*-Spannung mit  $\mu_S > \mu_D$  gilt unter der Annahme, daß wie in den Skizzen von Abbildungen 4.1 und 4.2 der rechte Quantenpunkt an den *source*-Kontakt koppelt, die Transportbedingung

$$\mu_S \geq \mu_R \geq \mu_L \geq \mu_D. \quad (4.10)$$

Diese Ungleichung beschreibt für konstantes  $\mu_S$  und  $\mu_D$  ein Dreieck in der  $\mu_L$ - $\mu_R$ -Ebene [Dixon u. a. 1996, van der Wiel u. a. 2003, Johnson u. a. 2004]. Da ein linearer Zusammenhang zwischen Gatterspannungen und chemischen Potentialen vorliegt, entsteht aus jedem Tripelpunkt des Stabilitätsdiagramms als Funktion der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  eine dreieckige Region endlichen Tunnelstroms. Abbildung 4.3(a) verdeutlicht dies am Beispiel zweier benachbarter Tripelpunkte.

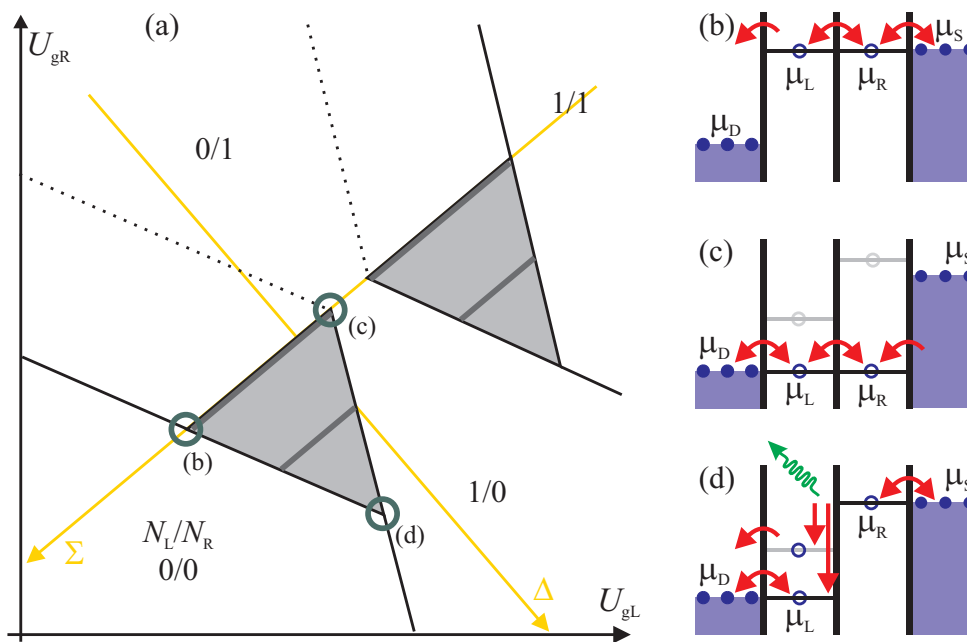
Die Lage der chemischen Potentiale in den Quantenpunkten an den Eckpunkten des aus dem ersten Tripelpunkt entstehenden Dreiecks ist in Abbildungen 4.3(b)–(d) skizziert. In der Situation von Abbildung 4.3(b) gilt  $\mu_S = \mu_L^{(b)} = \mu_R^{(b)}$ , in Abbildung 4.3(c) analog  $\mu_D = \mu_L^{(c)} = \mu_R^{(c)}$ . Die diese Ecken des Dreiecks verbindende Kante liegt mit  $\mu_L = \mu_R$  parallel zur  $\Sigma$ -Achse. Für ihre Endpunkte gilt

$$\Delta\mu_L = \mu_L^{(b)} - \mu_L^{(c)} = \Delta\mu_R = \mu_R^{(b)} - \mu_R^{(c)} = eU_{SD}. \quad (4.11)$$

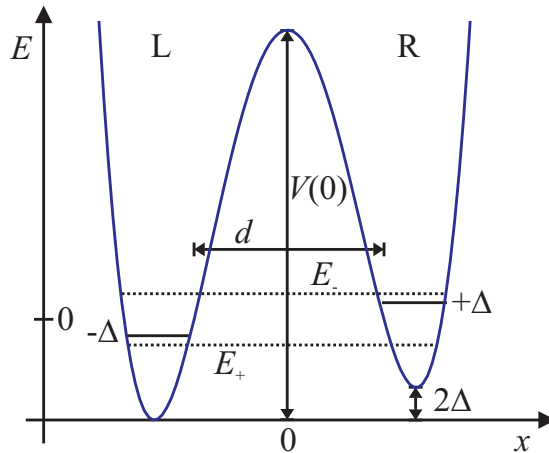
Da  $eU_{SD}$  im Experiment eine bekannte Energieskala darstellt, ermöglicht dies die Vervollständigung der aus dem Stabilitätsdiagramm des vorherigen Abschnitts bestimmten Parametersätze.

Stimmen die chemischen Potentiale im linken und rechten Quantenpunkt nicht überein, so ist eine Energierelaxation zum Durchtunneln des Doppelquantenpunkts notwendig. Dies ist in Abbildung 4.3(d) am Beispiel des dritten Eckpunkts des Dreiecks mit  $\mu_R = \mu_S$  und  $\mu_L = \mu_D$  dargestellt. Angeregte Zustände der Quantenpunkte äußern sich als Linien erhöhten Tunnelstroms parallel zur  $\Sigma$ -Achse. Eine derartige Linie ist in Abbildung 4.3(a) eingezeichnet. Sie entspricht derjenigen Asymmetrie  $\Delta = (\mu_R - \mu_L)/2$ , bei der der in Abbildungen 4.3(b)–(d) grau eingezeichnete angeregte Zustand des linken Quantenpunkts auf gleicher Energie wie der Grundzustand des rechten Quantenpunkts liegt.

Für eine detaillierte Betrachtung des Stabilitätsdiagramms bei endlicher *source-drain*-Spannung sei auf [van der Wiel u. a. 2003] verwiesen.



**Abbildung 4.3:** (a) Liegt eine endliche *source-drain*-Spannung an, so entstehen aus den Tripelpunkten des Stabilitätsdiagramms (vgl. Abbildung 4.2(a)) dreieckige Regionen, in denen Einzelelektronentunneln möglich ist. (b)-(d) Skizzen der Lage der chemischen Potentiale  $\mu_L$  und  $\mu_R$  in beiden Quantenpunkten und der Tunnelprozesse an den in (a) markierten Ecken eines Tripelpunkt-Dreiecks.



**Abbildung 4.4:** Schema eines gekoppelten Zweizustandssystems mit Energie-Asymmetrie  $2\Delta$  (siehe Text).

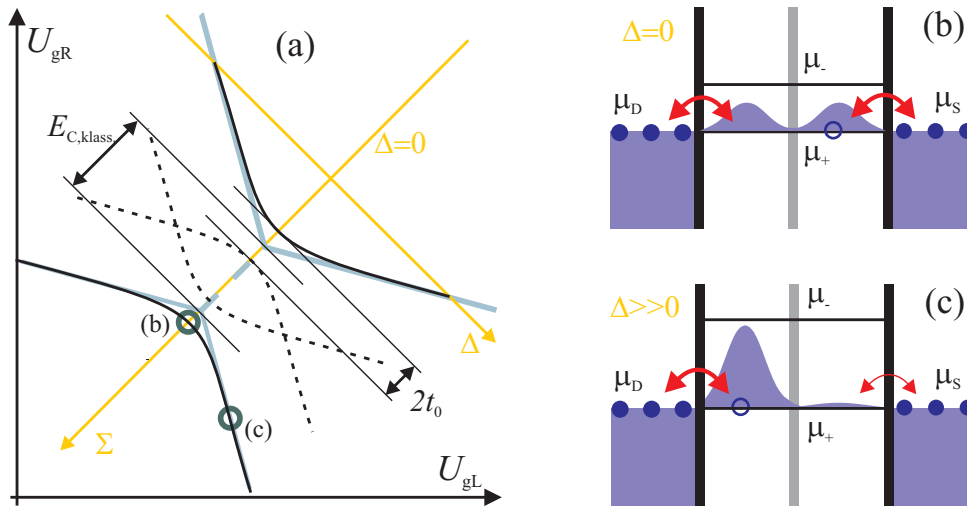
## 4.2 Starke Tunnelkopplung

### 4.2.1 Ein Elektron im Doppelquantenpunkt

In den Betrachtungen des letzten Abschnitts wurde angenommen, daß die quantenmechanische Tunnelkopplung gegenüber der kapazitiven Kopplung zwischen den Quantenpunkten vernachlässigt werden kann. Bei endlichem Überlapp der Wellenfunktionen der beiden Quantenpunkte tritt eine Hybridisierung der lokalisierten elektronischen Zustände auf [Blick u. a. 1998]. Betrachtet man ausschließlich die Grundzustände der einzelnen Quantenpunkte, so ergibt sich ein quantenmechanisches Zweizustandssystem mit Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} \Delta & -t_0 \\ -t_0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

bezüglich der lokalisierten Basis  $\{|\psi_R\rangle, |\psi_L\rangle\}$ , in der sich ein Elektron entweder im rechten oder im linken Quantenpunkt aufhält. Hierbei bezeichnet  $2\Delta$  den Energieunterschied der lokalisierten Grundzustände des rechten und linken Quantenpunkts,  $t_0$  ist ein Maß für die Tunnelkopplung der beiden Quantenpunkte. Der Energienullpunkt ist derart gewählt, daß die ungekoppelten Zustände die Eigenenergien  $\pm\Delta$  aufweisen. Abbildung 4.4 skizziert dieses Modell am Beispiel eines quartischen Potentials. Wie im Falle des Fock-Darwin-Modells in Abschnitt 3.3.3 handelt es sich hier auch um ein effektives Einteilchenmodell, da die Eigenzustände eines statischen Potentials ohne Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen den Potentialtopf besetzenden Elektronen betrachtet werden.



**Abbildung 4.5:** Auswirkungen starker Tunnelkopplung zwischen zwei Quantenpunkten auf das Stabilitätsdiagramm des von ihnen gebildeten Doppelquantenpunkts. (a) Abrundung der Tripelpunkte durch den Energiegewinn bei der Hybridisierung. (b), (c) Schematische Darstellung des Tunnelns durch delokalisierte „molekulare“ Zustände für symmetrisches (b) und asymmetrisches (c) Potential.

Die Eigenenergien des Hamiltonoperators aus Gleichung 4.12 ergeben sich als

$$E_{\pm} = \mp \sqrt{\Delta^2 + t_0^2}. \quad (4.13)$$

Die Tunnelaufspaltung zwischen den delokalisierten Zuständen beträgt damit im symmetrischen Potential  $2t_0$  und für beliebige Asymmetrie  $2\sqrt{\Delta^2 + t_0^2}$ . Besetzt man den Grundzustand dieses Potentials mit einem Elektron, so ist dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit im rechten oder linken Quantenpunkt durch die Ausdrücke

$$P_L = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + t_0^2}} \right) \quad P_R = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + t_0^2}} \right) \quad (4.14)$$

gegeben.

In der Messung des Ladungstransports durch einen seriellen Doppelquantenpunkt äußert sich die Hybridisierung der Zustände primär in zwei Phänomenen [Blick u. a. 1996, 1998], die beide in Abbildung 4.5 skizziert sind. Die Tunnelaufspaltung führt zu einer Abrundung der Grenzen stabiler Ladungskonfiguration an den Tripelpunkten des Stabilitätsdiagramms, so daß der Abstand zwischen den in Abbildung 4.5 schwarz eingezeichneten Grenzlinien in  $\Sigma$ -Richtung  $E_{C, \text{klass.}} + 2\sqrt{\Delta^2 + t_0^2}$  beträgt. Zusätzlich

ist bei genügend großer Tunnelkopplung Transport direkt durch die delokalisierten Zustände des Doppelpotentialtopfs möglich. Eine Übereinstimmung der chemischen Potentiale der Einzelquantenpunkte, wie sie im Fall schwacher Kopplung notwendig war, fällt als Transportbedingung weg. Dies äußert sich in Einzelelektronentunneln entlang der Verbindungslinien der Tripelpunkte, die die Regionen konstanter Gesamtelektronenzahl im Doppelquantenpunkt begrenzen (Abbildung 4.5(c)).

Die Größe der Tunnelaufspaltung kann mit Hilfe der WKB-Näherung (siehe z.B. [Sakurai 1995, Landau und Lifshitz 1979]) grob abgeschätzt werden. Unter Annahme eines eindimensionalen quartischen Doppelmuldenpotentials erhält man unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abbildung 4.4

$$2t_0 \simeq \frac{2E_0}{\pi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m^*V(0)}d}{2\hbar}\right) \quad (4.15)$$

(vgl. z.B. [Ludwig und Osheroff 2003]).  $E_0$  ist dabei die mittleren Grundzustandsenergie jedes der beiden Quantenpunkte relativ zum Minimum des Potentialtopfs. Sie dient hier als Abschätzung für die Versuchsfrequenz, mit der Elektronen gegen den Potentialwall mit Höhe  $V(0) \gg E_0$  anlaufen, während die Exponentialfunktion in Gleichung 4.15 dessen Transmissionswahrscheinlichkeit beschreibt. Für einen Vergleich zu Messungen im Fall eines einzelnen Elektrons im Doppelmuldenpotential sei auf Kapitel 8 verwiesen.

### 4.2.2 Zwei Elektronen im Doppelquantenpunkt

Das bisher beschriebene Modell eines Doppelpotentialtopfs kann auch als Grundlage für die Betrachtung eines mit mehreren Elektronen geladenen Doppelquantenpunkts verwendet werden. Qualitativ bleibt die Hybridisierung der Zustände erhalten, und damit auch die Abrundung der Konfigurationsgrenzen im Stabilitätsdiagramm und Tunnelstrom abseits der Tripelpunkte in linearen Transport. Im Anregungsspektrum oder bei quantitativer Betrachtung der Zustandsenergien müssen jedoch zusätzlich Vielteilcheneffekte wie die Coulomb-Abstoßung der Elektronen und die Austauschwechselwirkung berücksichtigt werden.

Ist ein Doppelquantenpunkt mit zwei Elektronen geladen, so kann das gekoppelte System durch den Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1,2} h_i + H_C + H_Z \quad (4.16)$$

[Burkard u. a. 1999, Burkard 2001] modelliert werden. Hierbei beschreibt  $h_i$  den Einteilchen-Hamiltonoperator im Einschränkungspotential  $V(\vec{r}_i)$ , Magnetfeld  $\vec{B} =$



rot  $\vec{A}$  und elektrischen Feld parallel zur  $x$ -Achse  $E$ ,

$$h_i = \frac{1}{2m} \left( \vec{p}_i - e\vec{A}(\vec{r}_i) \right)^2 + ex_i E + V(\vec{r}_i). \quad (4.17)$$

Als Einschränkungspotential wird das zweidimensionale quartische Potential mit Oszillatorkonstante  $\omega_0$  der Einzelquantenpunkte und Abstand  $d_\infty$  der Potentialminima

$$V(x,y) = \frac{m^* \omega_0^2}{2} \left( \frac{1}{4d_\infty^2} (x^2 - d_\infty^2)^2 + y^2 \right). \quad (4.18)$$

angenommen. Der zweite Term in Gleichung 4.16 beschreibt die Coulomb-Wechselwirkung der zwei Elektronen

$$H_C = \frac{e^2}{\kappa |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (4.19)$$

Wie im Falle eines Einzelquantenpunkts kann die in Gleichung 4.16 der Vollständigkeit halber aufgeführte Zeeman-Aufspaltung der Spinzustände  $H_Z = g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{S}$  bei senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas orientierten kleinen Magnetfeldern im Vergleich zur orbitalen Energieskala vernachlässigt werden.

Eine vollständige analytische Lösung dieses Problems ist nicht bekannt. Jedoch existieren verschiedene Näherungslösungen, in enger Analogie zur quantenmechanischen Behandlung des Wasserstoffmoleküls  $H_2$ . In der Heitler–London–Näherung (siehe z.B. [Haken und Wolf 1998]), die die Zustände des gekoppelten Systems als Linearkombination der ungekoppelten Einzelquantenpunkt-Zustände ansetzt, kann bereits eine qualitative Aussage über das Verhalten der Spin-Austauschwechselwirkung getroffen werden [Burkard u. a. 1999]. Eine aussagekräftigere Näherung liefert das Hund–Mullikan–Verfahren, das zusätzlich die mögliche Doppelbesetzung eines der beiden Quantenpunkte berücksichtigt [Hu und Das Sarma 2000, Burkard u. a. 1999, Golovach und Loss 2004, 2003].

Das niedrigliegende Zweielektronen-Spektrum des Doppelquantenpunkts wird in Analogie zum Hubbard-Modell des Wasserstoffmoleküls [Ashcroft und Mermin 1976] angenähert durch antisymmetrische (für das Spin-Singlet) und symmetrische (für das Spin-Triplet) Linearkombinationen der beiden Einzelquantenpunkt-Grundzustände. Als deren orbitalen Anteil verwendet man die um  $\pm a$  vom Ursprung verschobenen Fock-Darwin-Zustände

$$\Phi_{\pm d_\infty}(x,y) = \frac{1}{l_0 \sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{(x \mp d_\infty)^2 + y^2}{2l_0^2} \pm \frac{iyd_\infty}{2l_B^2} \right) \quad (4.20)$$

(vergleiche hierzu Abschnitt 3.3.3). Der die magnetische Länge  $l_B$  enthaltende Phasenfaktor im Exponenten entstammt der Eichtransformation des magnetischen Vektorpotentials bei der Verschiebung.

Unter Berücksichtigung der zwei möglichen Spinzustände für jedes Elektron ergeben sich aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Elektronen und des fermionischen Charakters  $\binom{4}{2} = 6$  mögliche Elektronenzustände. Die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen läßt eine Einteilung der 6 Zustände in zwei Gruppen zu. Ausgehend von den Ein-Elektron-Zuständen  $|L \uparrow\rangle$ ,  $|R \uparrow\rangle$ ,  $|L \downarrow\rangle$  und  $|R \downarrow\rangle$  erhält man nach [Golovach und Loss 2004] als energetisch niedrigste Zwei-Elektronen-Zustände ein Spin-Singlet und ein ohne Magnetfeld dreifach entartetes Spin-Triplet, also

$$\begin{aligned}
 |S\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{1+\phi^2}} \left[ (1+\phi) \left( |L \uparrow, R \downarrow\rangle - |L \downarrow, R \uparrow\rangle \right) + \right. \\
 &\quad \left. (1-\phi) \left( |L \uparrow, L \downarrow\rangle + |R \uparrow, R \downarrow\rangle \right) \right], \\
 |T_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |L \uparrow, R \downarrow\rangle + |L \downarrow, R \uparrow\rangle \right), \\
 |T_-\rangle &= |L \downarrow, R \downarrow\rangle \text{ und} \\
 |T_+\rangle &= |L \uparrow, R \uparrow\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Der Parameter  $\phi$  resultiert aus dem Wechselspiel von Coulomb-Abstoßung und Tunnelkopplung. Mit der Tunnelamplitude  $t_H = t_0 + t_C > t_0$  zwischen den beiden Quantenpunkten einschließlich des durch die Coulomb-Wechselwirkung renormalisierten Anteils  $t_C(t_0)$  [Golovach und Loss 2003] und der Coulomb-Abstoßung  $U_H$  zweier Elektronen im gleichen Quantenpunkt ist er durch

$$\phi = \sqrt{1 + \left( \frac{4t_H}{U_H} \right)^2} - \frac{4t_H}{U_H} \tag{4.22}$$

gegeben [Golovach und Loss 2003]. Zwei weitere Singlet-Zustände, in denen ein Quantenpunkt überwiegend doppelt besetzt ist,

$$\begin{aligned}
 |S_a^*\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |L \uparrow, L \downarrow\rangle - |R \uparrow, R \downarrow\rangle \right) \text{ und} \\
 |S_b^*\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{1+\phi^2}} \left[ (\phi-1) \left( |L \uparrow, R \downarrow\rangle - |L \downarrow, R \uparrow\rangle \right) + \right. \\
 &\quad \left. (1+\phi) \left( |L \uparrow, L \downarrow\rangle + |R \uparrow, R \downarrow\rangle \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

liegen energetisch signifikant höher und können daher vernachlässigt werden.

Der Wechselwirkungsparameter  $\phi$  geht in viele charakteristische Größen der Zustände ein. Insbesondere ist auch die *concurrence*  $\mathcal{C}_S$  [Wootters 1997, Schliemann u. a. 2001] des Singlet-Zustands  $|S\rangle$ , die ein Maß für die Verschränkung der beiden Elektronenspins in diesem Zustand darstellt, durch den Ausdruck

$$\mathcal{C}_S = \frac{2\phi}{1+\phi^2} \tag{4.24}$$

gegeben. Für kleine Tunnelkopplung  $t_H \rightarrow 0$  gilt  $\phi \rightarrow 1$  und  $\mathcal{C}_S(\phi) \rightarrow 1$ , d.h.  $|S\rangle$  wird zum maximal verschränkten Zustand zweier getrennter Elektronen. Im Gegensatz hierzu gilt für den Grenzfall sehr starker Tunnelkopplung  $t_H \gg U_H$  und damit zwei miteinander verschmelzende Quantenpunkte  $\phi \rightarrow 0$ , und die Verschränkung wird reduziert. Besetzen die Elektronen den gleichen orbitalen Zustand, so liegt mit  $\phi = 0$  und  $\mathcal{C}_S(\phi) = 0$  keine Verschränkung mehr vor [Golovach und Loss 2004].

Die Austauschkopplung  $J$ , die als effektive Heisenberg–Wechselwirkung

$$H = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (4.25)$$

zwischen den Spins wirkt, ist der Energieunterschied zwischen dem energetisch niedrigstliegenden Singlet-Zustand  $|S\rangle$  und den entarteten Triplet-Zuständen. Sie wird nach der Hund-Mulliken-Methode durch

$$J = V_C + \frac{1}{2}\sqrt{U_H^2 + 16t_H^2} - \frac{U_H}{2} \quad (4.26)$$

beschrieben. Der Term  $V_C$ , der den Unterschied an Coulomb-Energie zwischen den Singlet- und Triplet-Zuständen ohne Doppelbesetzung eines Potentialtopfs beschreibt [Burkard u. a. 1999], ist negativ und verursacht einen Vorzeichenwechsel der Austauschkopplung  $J$ , also einen Singlet-Triplet-Übergang des Grundzustands, bei endlichem magnetischen Feld. Als Näherung für schwach gekoppelte Doppelquantenpunkte erhält man

$$J \simeq \frac{4t_H^2}{U_H}. \quad (4.27)$$

Basierend auf diesem Modell existieren detaillierte Vorhersagen für das Transportspektrum eines Doppelquantenpunkts [Golovach und Loss 2004]. Insbesondere ermöglichen sie prinzipiell die direkte Bestimmung der charakteristischen Energien  $J$  und  $t_0$  aus Messungen des differentiellen Leitwerts bei endlicher *source-drain*-Spannung ( $|eU_{SD}| > t_0$ ).



---

## Kapitel 5

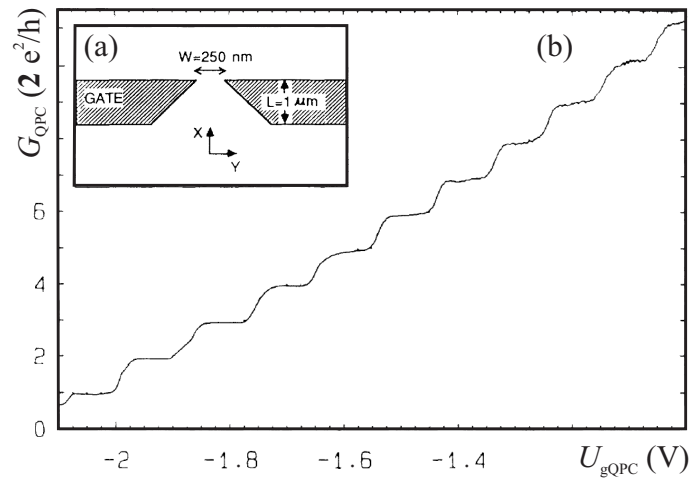
# Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt

Zur Detektion der Umladungen eines Quantenpunkts oder Doppelquantenpunkts kann ein in der Nähe definierter Quantenpunktkontakt eingesetzt werden.

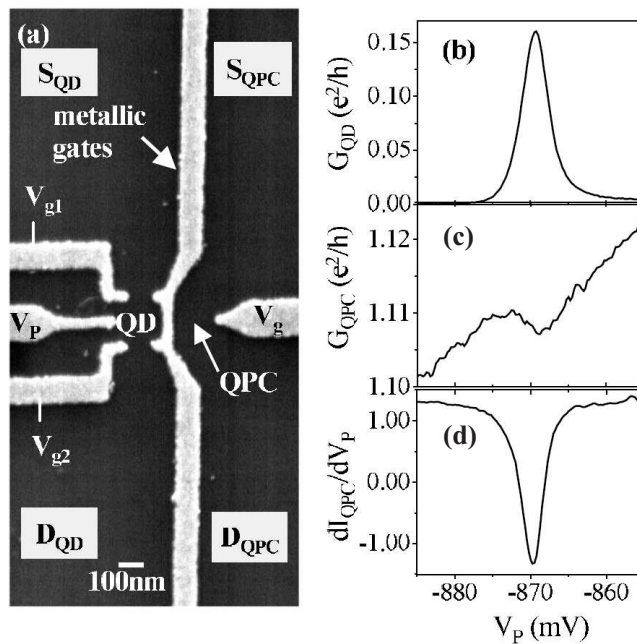
Ein Quantenpunktkontakt (engl. *quantum point contact*, QPC) ist eine eindimensionale Verengung des zweidimensionalen Elektronengases mit einer Breite in der Größenordnung der Fermi-Wellenlänge der Elektronen. Abbildung 5.1(a) zeigt eine schematische Zeichnung zweier Gatterelektroden, unter denen das zweidimensionale Elektronengas lokal verarmt werden kann, so daß eine derartige eindimensionale Einschränkung entsteht. Die typische stufenförmige Leitwert-Kennlinie des Quantenpunktkontakts in Abhängigkeit von der Spannung  $U_{g\text{QPC}}$  an den beiden Gatterelektroden relativ zum zweidimensionalen Elektronengas ist in Abbildung 5.1(b) zu sehen. Die Höhe der Stufen beträgt  $2e^2/h$  und beschreibt die Quantisierung des elektrischen Leitwerts bei Spinentartung der Elektronen ( $B = 0$ ). Jeder offene Transportkanal trägt dabei mit zwei Leitwertquanten  $G_0 = e^2/h$  zum Strom bei [Büttiker u. a. 1984, van Wees u. a. 1998, Wharam u. a. 1988]. Um den genauen Verlauf des Leitwerts zwischen zwei Stufen zu beschreiben, müssen die Transmissionskoeffizienten der eindimensionalen Kanäle in Abhängigkeit vom elektrostatischen Potential am Ort des Quantenpunktkontakts betrachtet werden [Kawabata 1989].

Bei der Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt wird ausgenutzt, daß dieser aufgrund der Leitwertquantisierung innerhalb bestimmter Gatterspannungsbereiche sehr empfindlich auf das elektrostatische Potential der Umgebung reagiert [Field u. a. 1993]. Im Allgemeinen wird der Arbeitspunkt des Quantenpunktkontakts zur Ladungsdetektion im Bereich maximaler Steigung  $dG_{\text{QPC}}/dU_{g\text{QPC}}$  der untersten Stufe des Leitwerts gewählt, da dort bei gleichzeitiger hoher Empfindlichkeit geringes Stromrauschen vorliegt.

## 5. Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt



**Abbildung 5.1:** (a) Zeichnung der Gatterelektroden zur Definition eines Quantenpunktkontakts im darunterliegenden zweidimensionalen Elektronengas. (b) Leitwert des so definierten Quantenpunktkontakts als Funktion der an den Elektroden angelegten Gatterspannung. Aus [van Wees u. a. 1998].



**Abbildung 5.2:** Ladungsdetektion durch einen Quantenpunktkontakt. (a) Gatterstruktur zur Definition eines Quantenpunkts und eines Quantenpunktkontakts. (b)–(d): Leitwert des Quantenpunkts (b), Leitwert des Quantenpunktkontakts (c) und Steilheit des Quantenpunktkontakts (d) als Funktion der Gatterspannung  $V_P$  des Quantenpunkts. Aus [Sprinzak u. a. 2002].

Abbildung 5.2 demonstriert das Verfahren anhand eines Beispiels aus der Literatur. Bild 5.2(a) zeigt die in [Sprinzak u. a. 2002] verwendete Gatterstruktur zur gleichzeitigen Definition eines nah beieinanderliegenden Quantenpunkts und Quantenpunktkontakts. Das Potential im Quantenpunkt wird durch die Gatterspannung  $V_P$  an der entsprechend markierten Elektrode gesteuert. In Abbildung 5.2(b) ist der Leitwert des Quantenpunkts als Funktion von  $V_P$  aufgetragen. Man erkennt eines der Leitwertmaxima, an dem sich die Zahl der im Quantenpunkt gefangenen Elektronen ändert.

Betrachtet man den Leitwert des Quantenpunktkontakts als Funktion der Gatterspannung  $V_P$ , wie in Abbildung 5.2(c) aufgetragen, so beobachtet man zwei Effekte [Field u. a. 1993, Sprinzak u. a. 2002]. Die direkte kapazitive Wechselwirkung zwischen Gatter und Quantenpunktkontakt führt zu einer graduellen, kontinuierlichen Veränderung des Leitwerts des Quantenpunktkontakts und damit einer Verschiebung des Arbeitspunkts. Zusätzlich kann jedesmal, wenn die kontinuierliche Veränderung der Gatterspannung eine Änderung der Elektronenzahl im Quantenpunkt bewirkt, diese diskrete Ladungsänderung über einen Sprung des Leitwerts des Quantenpunktkontakts nachgewiesen werden. Eine positivere Gatterspannung bewirkt hierbei eine um  $\Delta N = 1$  höhere Elektronenzahl im Quantenpunkt und damit einen diskreten Rückgang des Leitwerts des Quantenpunktkontakts, so daß wie in Abbildung 5.2(c) eine sägezahnförmige Kennlinie des Leitwerts des Quantenpunktkontakts beobachtet wird.

Zur Rauschunterdrückung bei dieser Ladungsdetektion kann ein Lock-in-Verstärker eingesetzt werden [Sprinzak u. a. 2002]. Hierzu wird der Gatterspannung  $V_P$  ein Wechsellspannungssignal mit Frequenz  $f_{\text{lock-in}}$  aufmoduliert. Der Verstärker detektiert die resultierende Modulation des Stroms  $I_{\text{QPC}}$  durch den Quantenpunktkontakt. Bei ausreichend kleiner Modulationsspannung entspricht die hierbei effektiv gemessene Größe der Ableitung des Stroms  $I_{\text{QPC}}$  nach der Gatterspannung  $V_P$ . In Analogie zu den Kenngrößen von Röhren und Transistoren soll sie im weiteren als Steilheit  $G_T$  (englisch *transconductance*) bezeichnet werden. In der Notation dieser Arbeit mit  $U_g$  als Gatterspannung des Quantenpunkts gilt also

$$G_T \equiv \frac{dI_{\text{QPC}}}{dU_g}. \quad (5.1)$$

Wird durch eine positivere Gatterspannung der Quantenpunkt mit einem weiteren Elektron geladen, so geht bei der entsprechenden Gatterspannung wie in Abbildung 5.2(c) zu sehen der Leitwert des Quantenpunktkontakts zurück. In der Steilheit  $G_T$ , die zur Ableitung des Leitwerts proportional ist, beobachtet man hier ein deutliches Minimum (Abbildung 5.2(d)).

Direktes Messen des Tunnelstroms durch einen Quantenpunkt läßt oft keine Entscheidung zu, ob aufgrund einer großen Potentialbarriere zu einer der Zuleitungen der Tunnelstrom unterhalb der Nachweisgrenze liegt oder ob der Quantenpunkt bereits vollständig von Elektronen entleert ist. Im Gegensatz hierzu ist die Umladungs-

detektion mithilfe eines Quantenpunktkontakts nahezu unabhängig von der Transmission der den Quantenpunkt bildenden Tunnelbarrieren. Speziell bei Messung der Steilheit  $G_T$  kann eine Ladungsänderung im Quantenpunkt noch so lange detektiert werden, wie der Quantenpunkt auf der Zeitskala  $1/f_{\text{lock-in}}$  auch nur über eine seiner Tunnelbarrieren die Ladung ausgleichen kann. Bei einer typischen Lock-in-Frequenz von  $f_{\text{lock-in}} = 10 \dots 100 \text{ Hz}$  würde eine entsprechende Tunnelrate im dc-Transport durch den Quantenpunkt zu einem Strom  $I = e f_{\text{lock-in}} \simeq 0.001 \dots 0.01 \text{ fA}$  führen. Dies liegt deutlich unterhalb der Nachweisgrenze der experimentell eingesetzten Strom-Spannungs-Wandler.

Bei der Betrachtung von Doppelquantenpunkten können die vorgestellten Methoden analog angewandt werden [Elzerman u. a. 2003]. Wenn der Quantenpunktkontakt unterschiedlich stark an die zwei Quantenpunkte ankoppelt, wird im Falle schwacher Tunnelkopplung eine diskrete Ladungsumverteilung zwischen beiden Quantenpunkten ebenfalls durch extremale Steilheit  $G_T$  sichtbar. Dies kann zur Bestimmung der Tunnelkopplung zwischen beiden Quantenpunkten genutzt werden [DiCarlo u. a. 2004]. Der in Kapitel 8 vorgestellte Doppelquantenpunkt weist starke Tunnelkopplung auf, so daß aufgrund der delokalisierten Elektronenzustände dieses Extremum der Steilheit eine sehr hohe Linienbreite besitzt. Wegen des damit schlechten Verhältnisses zwischen Signal und Rauschen ist in diesem Fall eine Bestimmung der Tunnelkopplung mit dieser Methode nicht möglich.



---

# Kapitel 6

## Meßaufbau

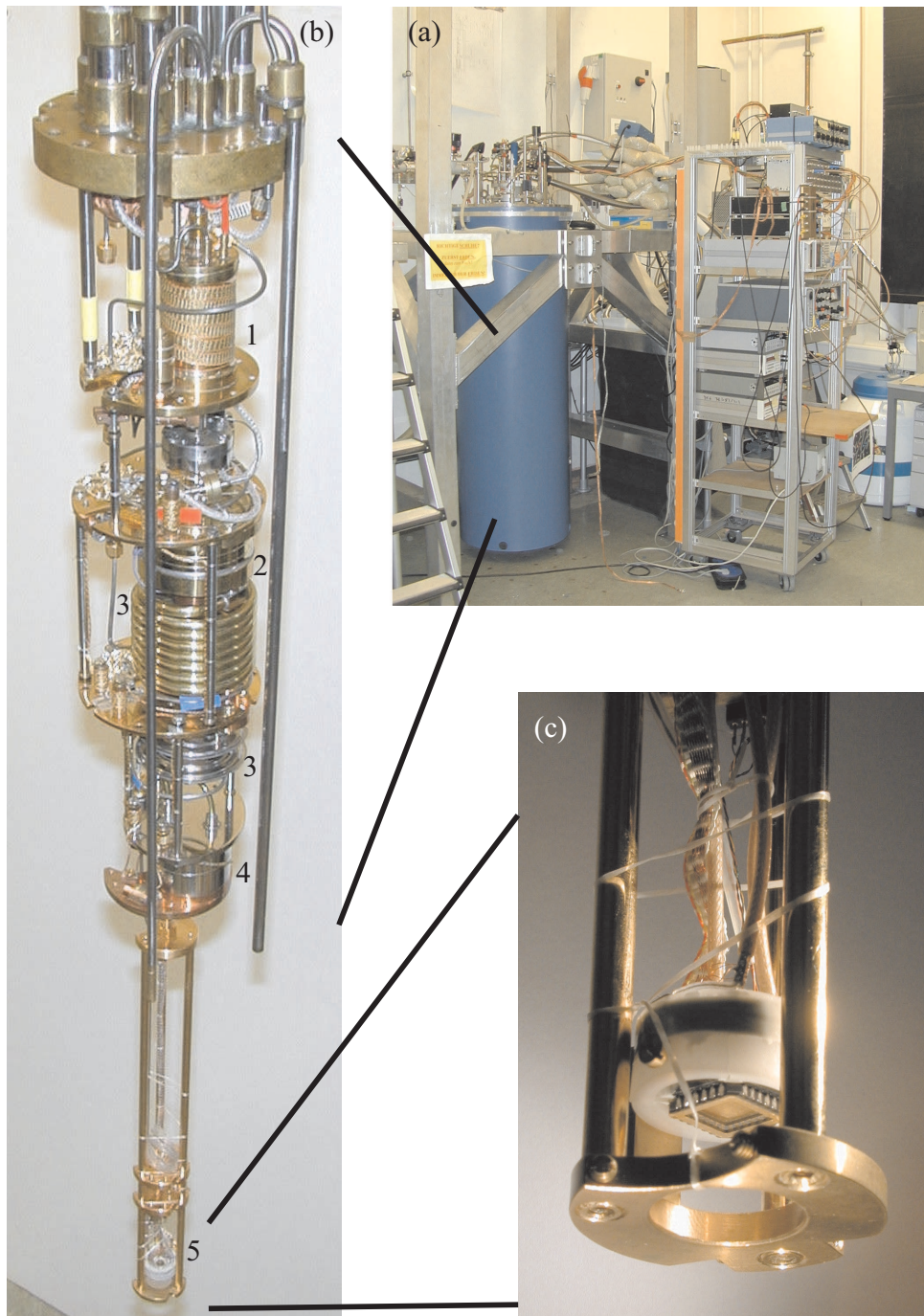
In diesem Kapitel werden zwei wesentliche technische Aspekte der Messung betrachtet. Abschnitt 6.1 beschreibt die für das Erreichen von Temperaturen unter 0,1 K verwendete Kryotechnik, Abschnitt 6.2 den Aufbau der Meßelektronik zur Durchführung von Coulomb-Blockade-Messungen.

### 6.1 Kühlapparaturen

Zum Nachweis einzelner Quantenzustände ist das Erreichen tiefster Kristall- und insbesondere auch Elektronentemperaturen im zweidimensionalen Elektronengas wünschenswert. Die Messungen dieser Arbeit wurden daher in  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Mischkryostaten durchgeführt (siehe z.B. [Pobell 1992]), die eine Kühlung bis in den Millikelvin-Bereich ermöglichen. Zwei Geräte fanden hierbei Verwendung.

#### 6.1.1 Oxford Instruments Kelvinox 100

Die Messungen der Kapitel 7, 8 und 10 wurden an einem kommerziell erhältlichen  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Mischkryostat des Typs Oxford Instruments Kelvinox 100 durchgeführt. Abbildung 6.1(a) zeigt den entsprechenden Meßplatz. Der Mischkryostat kann mit Hilfe einer zylinderförmigen Dichtung aus glasfaserverstärktem Kunststoff, eines sogenannten *sliding seal*, zum Probenwechsel aus dem in der Abbildung sichtbaren  $^4\text{He}$ -Dewar aus- und eingebaut werden, während dieses flüssiges Helium enthält. In Abbildung 6.1(b) ist der eigentliche Mischkühler-Einsatz nach Entfernen des *sliding seal* und Öffnen der inneren Vakuumkammer zu sehen. Das Gerät hat eine nominelle Kühlleistung von  $100\mu\text{W}$  bei  $T_{\text{MC}} = 100\text{mK}$  und eine nominelle Minimaltemperatur von



**Abbildung 6.1:** (a) Gesamtansicht des Meßaufbaus mit Mischkryostat Oxford Instruments Kelvinox 100. (b) Kryostat-Einsatz nach Entfernen des *sliding seal* und Öffnen der Vakuumkammer. 1:  $^4\text{He}$ -Verdampfungskühlung, 2:  $^3\text{He}$ -Destille, 3: Wärmetauscher, 4: Mischkammer, 5: Probenbühne. (c) Probenbühne und Chipsockel, hier mit einem leeren Chipcarrier.

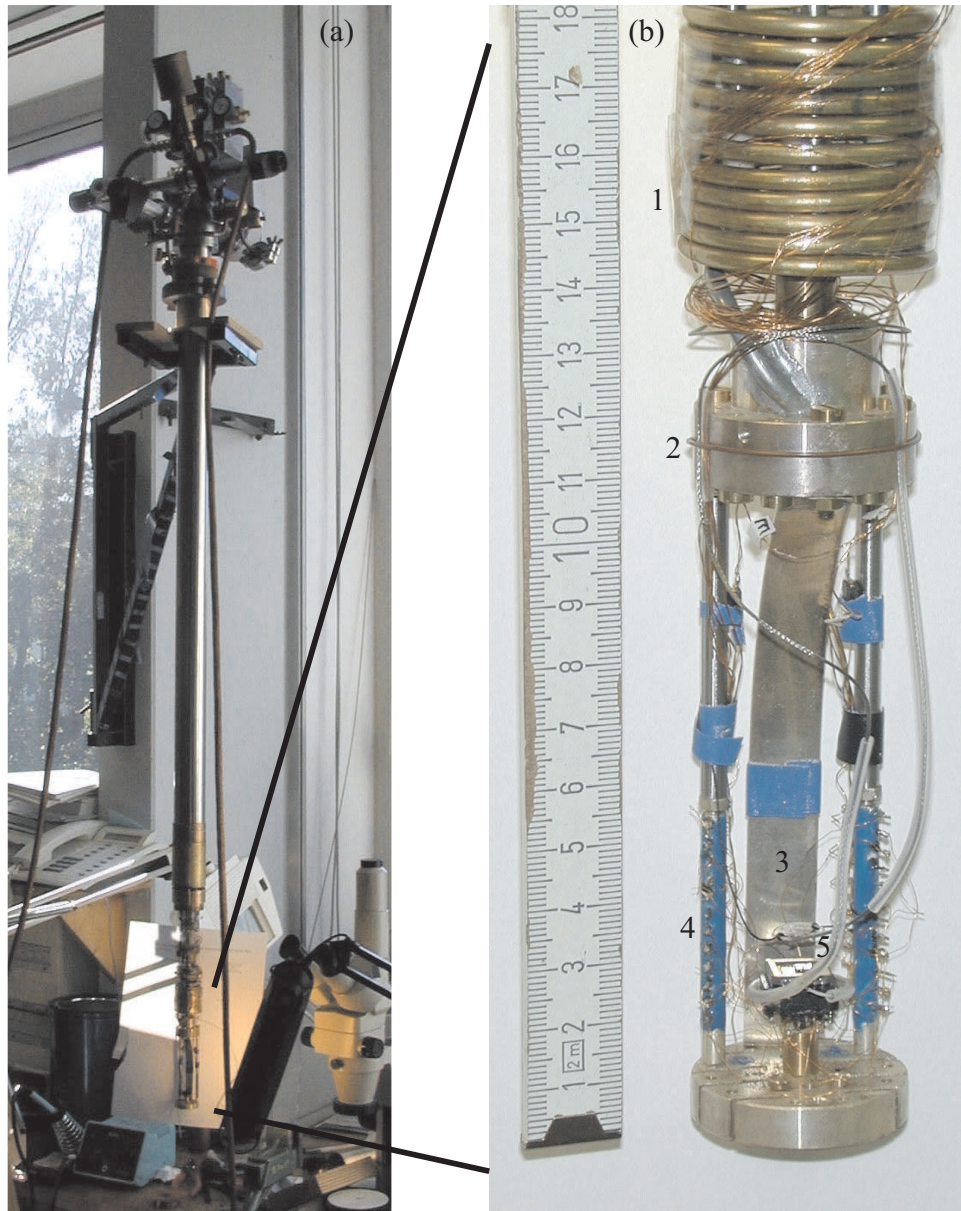
$T_{MC} \leq 15$  mK [Oxford Instruments 2001]. Im Betrieb wurden bei ausschließlicher Verwendung von dc-Kabeln Mischkammer-Temperaturen von  $T_{MC} \lesssim 9$  mK beobachtet. Der Sockel für den Probenchip, vergrößert in Abbildung 6.1(c) dargestellt, befindet sich im Vakuum und ist im wesentlichen über seine Zuleitungen gekühlt. Aus temperaturabhängigen Messungen der Coulomb-Blockade-Oszillationen läßt sich auf eine Elektronentemperatur im zweidimensionalen Elektronengas von  $T_{el} \simeq 200$  mK schließen. Eine Filterung der dc-Kabel und eine bessere thermische Ankopplung der Probe zum Erreichen tieferer Elektronentemperaturen ist für zukünftige Messungen in Vorbereitung.

Der Mischkühler wurde als funktionelle Einheit zusammen mit einem Gasventilsystem, einem Magnetnetzteil und einer Temperaturmeßbrücke geliefert. Diese Kombination erwies sich bei Coulomb-Blockade-Messungen als problematisch, da deutliche Störsignale im Meßkreis sichtbar wurden. Abhilfe bringt das Abtrennen der Leitungen zur Temperaturmessung, wobei gleichzeitig jedoch Mischkammer- und  $^3\text{He}$ -Destille-Heizung nicht mehr betrieben werden können. Eine alternative vollständige Auftrennung der Erdverbindungen zwischen Steuerelektronik und Kryostat erwies sich als problematisch, da die Filterung der Temperaturmeßleitungen hierdurch außer Kraft gesetzt wurde. In zukünftigen Messungen sollte der Einsatz einer separaten Temperaturmeßbrücke angestrebt werden.

### 6.1.2 Mischkryostat-Eigenbau des Walther-Meissner-Instituts

Die Messungen aus Kapitel 9 wurden an einem am Walther-Meissner-Institut der Bayerischen Akademie der Wissenschaften entwickelten stabförmigen Mischkryostat, zu sehen in Abbildung 6.2(a), durchgeführt. Das Gerät kann mit einem Stabdurchmesser von 5 cm sowohl in Flüssighelium-Transportkannen als auch in einem Dewar betrieben werden. Es kommt bei der Vorkühlung und Verflüssigung des  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Gemischs ohne eine  $^4\text{He}$ -Verdampfungsstufe aus. Abbildung 6.2(b) zeigt vergrößert Wärmetauscher, Mischkammer sowie die Probenbühne mit Chipsockel und thermischer Ankopplung der dc-Kabel. Mischkammer und Probenbühne sind zur besseren thermischen Leitfähigkeit aus Silber gefertigt.

An Mischkryostaten dieses Typs wurden in Coulomb-Blockade-Messungen Badtemperaturen von  $T_{MC} \simeq 20$  mK und Elektronentemperaturen von  $T_{el} \lesssim 95$  mK beobachtet. Hierbei wirkt sich vermutlich positiv aus, daß sämtliche dc-Leitungen direkt am Kryostaten Tiefpaßfilter durchlaufen (vgl. Abbildung 6.3).



**Abbildung 6.2:** Mischkryostat-Eigenbau des Walther-Meissner-Instituts Garching. (a) Gesamtansicht, (b) Detailaufnahme bei geöffneter Vakuumkammer. 1: Wärmetauscher, 2: Mischkammer, 3: thermische Ankopplung der Probenbühne, 4: thermische Ankopplung der dc-Kabel, 5: Chipsocket, hier mit Probenchip.

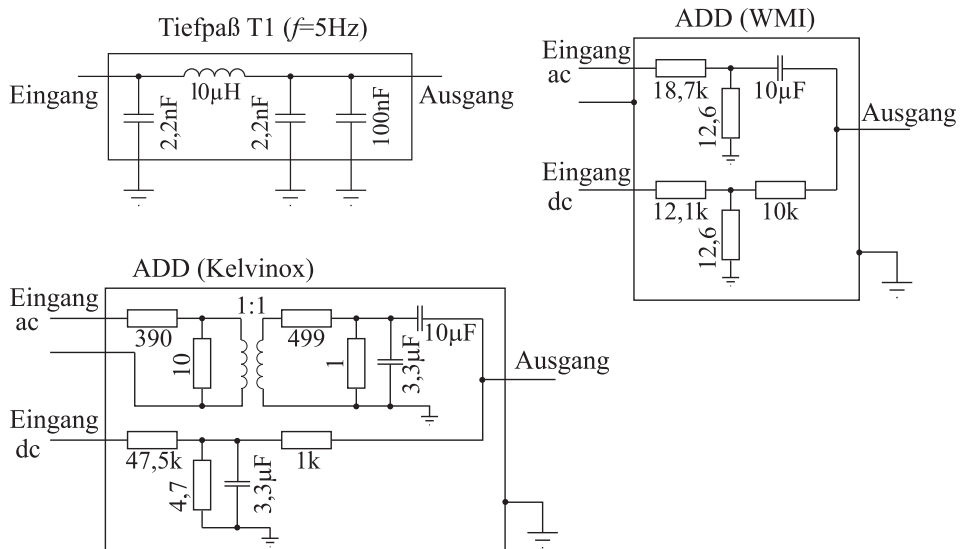
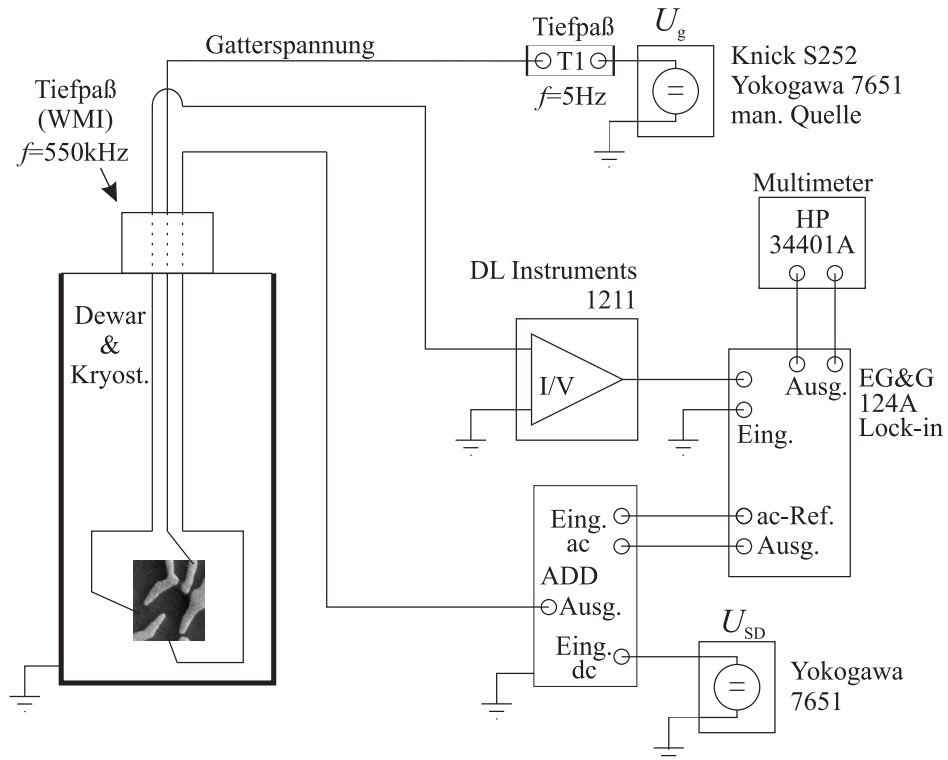
## 6.2 Meßprinzip und elektronischer Meßaufbau

Aufgrund des hohen Probenwiderstands  $R \gtrsim R_K \simeq 25,8\text{k}\Omega$  werden Messungen von Coulomb-Blockade-Phänomenen im Zweipunktaufbau durchgeführt. Der Serienwiderstand der Zuleitungen kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Abbildung 6.3 zeigt schematisch die Verschaltung des Meßaufbaus am Beispiel einer Messung des differentiellen Leitwerts. Die Masse des Kryostaten, die mit einer separaten Erde und dem Metallrahmen des Meßracks verbunden ist, dient als Bezugspunkt aller Spannungen. Zur Vereinfachung wird in der Zeichnung nur eine Gatterspannung angelegt. Als stabilisierte, rechnergesteuerte Spannungsquellen für Gatterspannungen und *source-drain*-Spannung finden Geräte des Typs Knick DC Calibrator S252 sowie Yokogawa 7651 Einsatz.

Die Gatterspannungen werden zur Störungsunterdrückung durch einen Tiefpaßfilter mit Grenzfrequenz  $f = 5\text{Hz}$  geleitet. Zur Versorgung der *source-drain*-Spannung, die für Messungen des differentiellen Leitwerts aus einem Gleichspannungsanteil und der Modulationsspannung eines Lock-in-Verstärkers des Typs Princeton Applied Research (EG&G) 124A besteht, dient eine Spannungsaddierer-Schaltung (ADD in Abbildung 6.3). Sie teilt ac- und dc-Eingangssignal um mehrere Größenordnungen und entkoppelt im Meßaufbau am Oxford Instruments Kelvinox – Mischkühler zusätzlich die Referenz-Wechselspannung des Lock-in-Verstärkers galvanisch.

Zur Detektion werden Strom-Spannungs-Wandler des Typs DL Instruments 1211 verwendet. Diesen ist gegebenenfalls wie in Abbildung 6.3 skizziert ein Lock-in-Verstärker nachgeschaltet. Die dann erhaltenen Meßwerte für den differentiellen Leitwert sind bei der Auftragung entsprechend den eingestellten Verstärkungsfaktoren und der angelegten Modulationsspannung in Vielfache von  $G_0 = e^2/h$  umgerechnet. Aufgrund der angestrebten Messung von Strömen im Bereich  $I \ll 1\text{nA}$  in hochohmigen Systemen muß bei Aufbau der Meßschaltungen viel Sorgfalt in eine systematische Abschirmung und die Vermeidung von Erdungsschleifen investiert werden. Alle verwendeten Kabel sind nach Durchlaufen der Filter doppelt durch Kupfergeflecht geschirmt. Im Falle der Messung am WMI-Kryostaten wurden zusätzlich alle an das Dewar führenden Schläuche zur Zu- und Ableitung des  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Gemischs sowie zur  $^4\text{He}$ -Rückleitung elektrisch isoliert, so daß die Abschirmung des Meßkabels die einzige Verbindung zur Kryostatmasse darstellte. Ein ähnliches Vorgehen am Oxford Instruments Kelvinox – Meßplatz wurde angestrebt. Dies erwies sich jedoch wegen der Integration des Geräts in die Mischkryostat-Steuerungselektronik als schwierig umsetzbar.



**Abbildung 6.3:** Schematischer Aufbau der Meßelektronik. Mit (WMI) gekennzeichnete Bauteile wurden nur in den Messungen von Kapitel 9, mit (Kelvinox) gekennzeichnete Bauteile nur in den restlichen Messungen eingesetzt. Zahlen ohne Einheit bezeichnen Widerstandswerte in  $\Omega$ .

---

# Kapitel 7

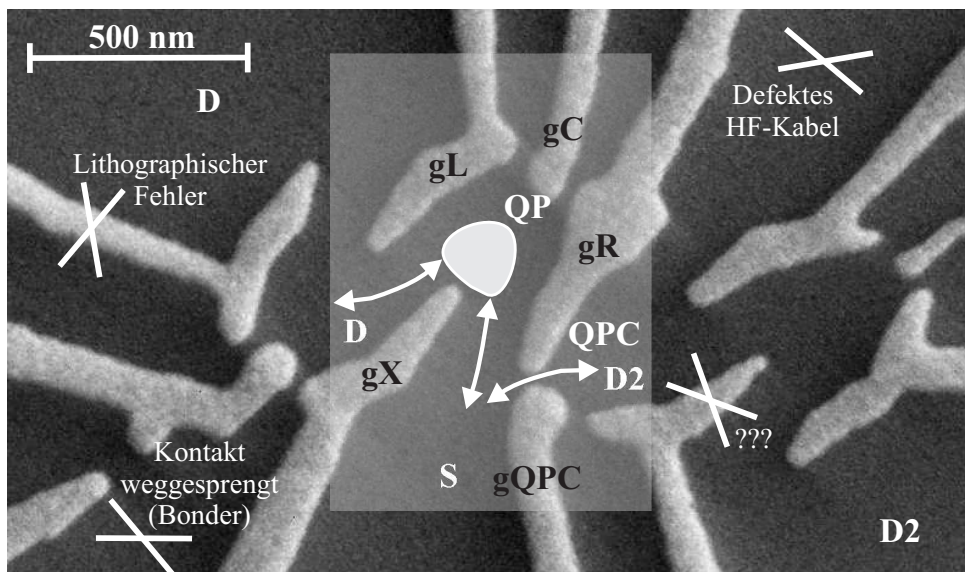
## Ein Quantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

In den Messungen dieses Kapitels wird ein vollständig von Elektronen entleerbarer Quantenpunkt vorgestellt. Die dadurch gewonnene exakte Kenntnis der Elektronenzahl in einem weiten Gatterspannungsbereich ermöglicht die Untersuchung der vorliegenden Elektronenzustände. Abschnitt 7.1 beschreibt die verwendete Gattergeometrie. Die sich daran anschließenden Abschnitte 7.2, 7.3 und 7.4 betrachten verschiedene Aspekte des beobachteten Transportspektrums bei jeweils unterschiedlicher Stärke der Kopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen. Der Quantenpunkt kann durch Veränderung der angelegten Gatterspannungen zu einem Doppelquantenpunkt verformt werden. Auf die entsprechenden Messungen wird in Kapitel 8 eingegangen.

### 7.1 Probengeometrie

Abbildung 7.1 zeigt die vollständige mittels Elektronenstrahl-Lithographie hergestellte Gattergeometrie. Ziel war hierbei die Definition zweier kapazitiv gekoppelter Doppelquantenpunkte („Ladungs-Qubits“, vgl. Einleitung) in getrennten Stromkreisen, kombiniert mit integrierter Ladungsdetektion. Hieraus ergaben sich folgende Designkriterien für die Gattergeometrie:

1. Zwei tunnelgekoppelte serielle Doppelquantenpunkte in getrennten Stromkreisen sollten untereinander kapazitiv gekoppelt werden, ähnlich der in [Hüttel 2001, Weber 2002] verwendeten Strukturen.
2. Die Elektronenzahl in jedem beteiligten Quantenpunkt sollte bei noch nachweisbarem Einzelelektronen-Tunnelstrom auf  $N = 1$  reduziert werden können. Dies



**Abbildung 7.1:** Vollständige Gattergeometrie der verwendeten Probe. Das aufgehellte Rechteck verdeutlicht, welche Gatter für die Messungen verwendet wurden. Die ungefähre Lage des definierten Quantenpunkts und Quantenpunktkontakts sowie die Strompfade sind schematisch eingezeichnet. Weiße Kreuze markieren aufgrund von Defekten unbenutzbare Gatter oder Mesa-Zuleitungen.



bedingt eine dreiecksförmige Gattergeometrie vergleichbar der in [Ciorga u. a. 2000, Elzerman u. a. 2003] verwendeten.

3. Zum Nachweis des Ladens und Entladens von Quantenpunkten und somit zum Zählen der vorliegenden Elementarladungen sollte in einem zusätzlichen separaten Stromkreis ein Quantenpunktkontakt definierbar sein [Field u. a. 1993, Sprinzak u. a. 2002, Elzerman u. a. 2003]. Dieser sollte kapazitiv an alle vier Quantenpunkte ankoppeln.

Tunnelgekoppelte Doppelquantenpunkte mit einer Ladung von nur einem Elektron wurden zum Zeitpunkt der Messung bereits von zwei Forschungsgruppen realisiert [Elzerman u. a. 2003, Petta u. a. 2004]. Die in beiden Fällen auf sehr ähnliche Weise verwendete Geometrie erschwert es jedoch, zwei derartige Doppelquantenpunkte nahe aneinander auf einer Probe zu kombinieren. Abbildung 7.1 zeigt die Gatterstruktur, die im Rahmen dieser Arbeit neu entworfen wurde, um eine derartige Integration zu ermöglichen.

Wie auch in Abbildung 7.1 angedeutet führten technische Schwierigkeiten dazu, daß nur ein Teil der Probe funktionsfähig war. Zu den Problemen zählten einerseits beim Bonden zerstörte Kontaktflächen, zum anderen war ein Gatter aufgrund eines lithographischen Fehlers, der eventuell auf eine Drift der Elektronenmikroskop-Probenbühne zurückgeht, unbrauchbar. Ein Mesaanschluß war mit einem Koaxialkabel im Kryostaten verbunden, das sich im kalten Zustand als offener Kontakt erwies, ein weiteres Gatter konnte das darunterliegende Elektronengas nicht ausreichend verarmen. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, daß sich die Gatterspitze von der Kristalloberfläche gelöst hat.

Für sämtliche Messungen an dieser Struktur wurden ausschließlich die in Abbildung 7.1 mit Buchstabenkombinationen gekennzeichneten Gatter bzw. Mesaanschlüsse verwendet. Der damit für die Definition des Quantenpunkts und des Quantenpunktkontakts relevante Teil der Gattergeometrie ist in Abbildung 7.1 durch eine rechteckige Aufhellung verdeutlicht. Seitengatter  $g_L$  und  $g_R$  sowie das Steuergatter  $g_C$  und das ihm gegenüberliegende zentrale Gatter  $g_X$  bilden eine dreiecksartige Potentialstruktur. Mesaanschluß  $S$  wird als *source* mit einer Spannungsquelle verbunden, Mesaanschluß  $D$  als *drain* mit einem niederohmigen Strom-Spannungs-Wandler. Weiterhin bildet Gatter  $g_R$  zusammen mit gQPC einen Quantenpunktkontakt zwischen *source* und Mesaanschluß  $D2$ .

In den im folgenden präsentierten Messungen wird an Gatter  $g_X$  ausschließlich die Spannung  $U_{g_X} = -0,3\text{V}$  angelegt. Gatter  $g_C$  dient zur Steuerung des Quantenpunktpotentials. Die Kopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen wird durch die an die Seitengatter  $g_L$  und  $g_R$  angelegten Spannungen variiert. Die Messungen werden auf drei Parametersätze entsprechend den für  $U_{g_L}$  und  $U_{g_R}$  gewählten

Parametersatz	$U_{gX}(\text{V})$	$U_{gL}(\text{V})$	$U_{gR}(\text{V})$	$U_{gC}(\text{V})$
„abgeschlossen“	-0,3	-0,52	-0,565	variiert
„mittel“	-0,3	-0,508	-0,535	variiert
„offen“	-0,3	-0,508	-0,495	variiert

**Tabelle 7.1:** Verwendete Gatterspannungen bei den Einzelquantenpunkt-Messungen

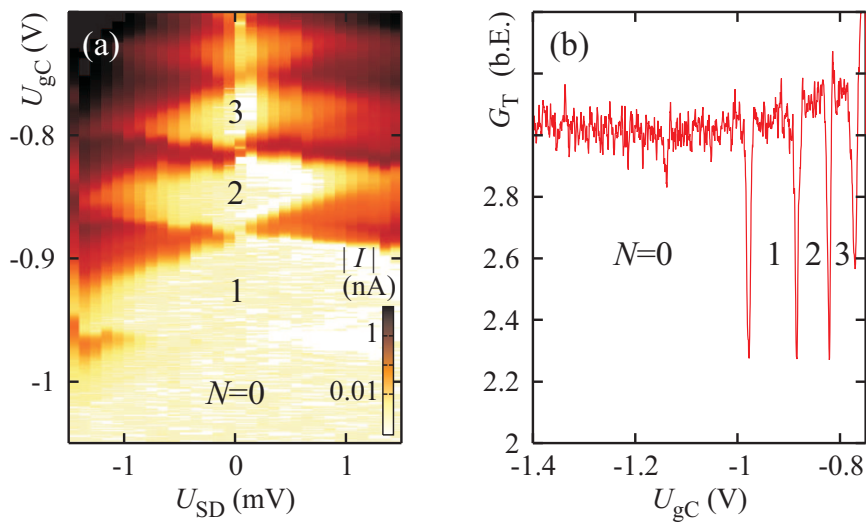
Werten aufgeteilt. Die folgenden Abschnitte gehen auf Messungen bei jeweils einem dieser Parametersätze ein, nämlich dem „abgeschlossenen Quantenpunkt“ mit  $U_{gL} = -0,52 \text{ V}$  und  $U_{gR} = -0,565 \text{ V}$  (Abschnitt 7.2), dem „mittleren Quantenpunkt“ mit  $U_{gL} = -0,508 \text{ V}$  und  $U_{gR} = -0,535 \text{ V}$  (Abschnitt 7.4) und dem „offenen Quantenpunkt“ mit  $U_{gL} = -0,508 \text{ V}$  und  $U_{gR} = -0,495 \text{ V}$  (Abschnitt 7.3). Tabelle 7.1 faßt dies nochmals zusammen. Der Effekt von Gatterspannung  $U_{gQPC}$  auf den Quantenpunkt ist nur sehr gering und kann daher im weiteren vernachlässigt werden.

## 7.2 Beobachtung der Fock-Darwin-Zustände

Bei Seitengatterspannungen von  $U_{gL} = -0,52 \text{ V}$  und  $U_{gR} = -0,565 \text{ V}$  entsprechend dem Parametersatz „abgeschlossener Quantenpunkt“ (siehe oben) können klare Coulomb-Blockade-Oszillationen des Leitwerts beobachtet werden. Der betrachtete Quantenpunkt ist hier im Vergleich zu den Messungen der folgenden Abschnitte nur schwach an die Zuleitungen gekoppelt. Dies ermöglicht wie im folgenden gezeigt Transportspektroskopie der orbitalen Zustände.

### 7.2.1 Elektronenzahl und Energieskalen

Abbildung 7.2(a) zeigt eine beispielhafte Messung des Stroms in Abhängigkeit von  $U_{SD}$  und  $U_{gC}$ . In Abbildung 7.2(b) ist hierzu das bei gleichen Parametern durch einen Lock-in-Verstärker am Quantenpunktkontakt detektierte Wechselstromsignal bei Modulation der Gatterspannung  $U_{gL}$ , also effektiv die Steilheit  $G_T \equiv dI_{QPC}/dU_{gL}$  des Quantenpunktkontakts, wiedergegeben. Bei einer Anregungsspannung von  $U_{gL,ac} = 0,16 \text{ mV}$  Effektivwert mit Frequenz  $f = 840 \text{ Hz}$  an Gatter gL entspricht ein Skalenteil hier beispielhaft einer Modulation des Quantenpunktkontakt-Stroms um  $1 \text{ pA}$ . Damit findet in der Messung von Abbildung 7.2(b) eine Detektion der Umladungen im Quantenpunkt durch den Quantenpunktkontakt nach dem in Kapitel 5 beschriebenen Lock-in-Verfahren hoher Sensitivität statt. Für  $U_{gC} < -1 \text{ V}$  lassen sich keine Ladungsänderungen im Quantenpunkt mehr als Minima der Steilheit nachweisen. Der Quantenpunkt ist offensichtlich vollständig entladen. Die hieraus erschlossenen Elektronen-



**Abbildung 7.2:** (a) Absolutbetrag des Stroms durch den Quantenpunkt als Funktion von  $U_{SD}$  und  $U_{gC}$  (logarithmische Farbskala). Die weiteren Gatterspannungen sind entsprechend dem Parametersatz „abgeschlossener Quantenpunkt“ (siehe Text) gewählt. (b) Lock-in-Messung der Steilheit  $G_T$  des Quantenpunktkontakts als Funktion von  $U_{gC}$ , gemittelt über 40 Meßspuren. Die aus der Ladungsdetektion hervorgehende Zahl der Elektronen im Quantenpunkt ist in beiden Graphiken eingezeichnet (siehe Text).

zahlen für die angrenzenden Coulomb-Blockade-Bereiche des Quantenpunkts sind in Abbildung 7.2(a) und (b) eingezeichnet.

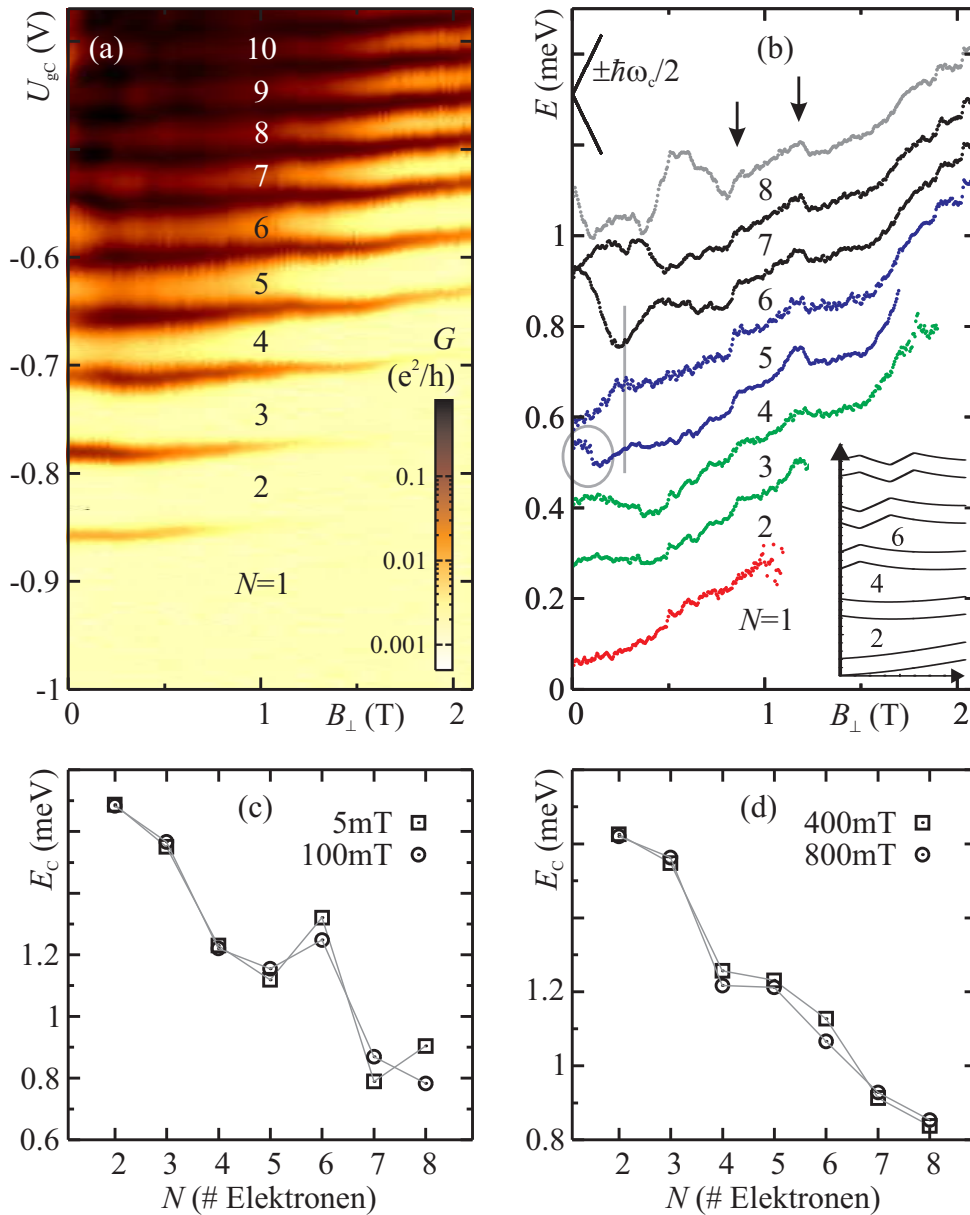
In der Strommessung von Abbildung 7.2(a) kann der aus der Ladungsdetektion erschlossene Übergang zwischen den Elektronenzahlen  $N = 0 \leftrightarrow 1$  nur bei hoher *source-drain*-Spannung beobachtet werden. Eine mögliche Ursache hierfür ist eine Asymmetrie der Tunnelbarrieren zu *source*- und *drain*-Zuleitung bei den verwendeten Parametern. Für die letzte im Strom klar erkennbare Coulomb-Blockade-Oszillation mit beteiligten Elektronenzahlen  $N = 1 \leftrightarrow 2$  wird aus dem nichtlinearen Transport ein Konversionsfaktor  $\alpha_{gC} \simeq 0,022$  bestimmt. Die Ladeenergie im angrenzenden Coulomb-Blockade-Bereich mit  $N = 2$  beträgt  $E_C \simeq 1,65$  meV.

### 7.2.2 Fock-Darwin-Zustände

Die Abhängigkeit der Position der Coulomb-Blockade-Resonanzen von einem extern angelegten Magnetfeld kann wie in Kapitel 3 dargelegt zur Charakterisierung der am Transport beteiligten Quantenzustände genutzt werden. Eine entsprechende Messung ist in Abbildung 7.3(a) dargestellt. Sie zeigt den differentiellen Leitwert des Quantenpunkts in linearer Antwort als Funktion von Gatterspannung  $U_{gC}$  und senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas angelegtem Magnetfeld  $B_{\perp}$ . Die restlichen Gatterspannungen werden identisch wie in der Messung von Abbildung 7.2 gewählt (siehe auch Tabelle 7.1, Parametersatz „abgeschlossener Quantenpunkt“).

Die Amplitude des Leitwerts nimmt mit zunehmendem Magnetfeld aufgrund der Einschnürung der elektronischen Zustände für jede einzelne Coulomb-Blockade-Oszillation ab (vgl. Abschnitte 3.3.3 und 8.3.4). Zusätzlich ändern sich die Werte der Gatterspannung  $U_{gC}$ , bei denen die Maxima des Leitwerts auftreten, mit zunehmendem Feld. Um diese Positionsänderung zu verdeutlichen, wurde die Lage der Maxima numerisch ermittelt und unter Annahme eines konstanten Konversionsfaktors  $\alpha_{gC} = 0,022$  in eine Energieskala umgerechnet. Auf die so erhaltenen Werte wurde ein für jedes Leitwertmaximum konstanter Offset addiert, so daß die Coulomb-Blockade-Oszillationen bei  $B_{\perp} = 1$  T äquidistant mit einem Abstand von  $\Delta E = 0,12$  meV liegen. Physikalisch entspricht dies dem Setzen der Ladeenergie  $E_C$  des Quantenpunkts auf einen kleinen von der Elektronenzahl unabhängigen Wert.

Abbildung 7.3(b) zeigt die Ergebnisse dieser Auswertung. Für große Magnetfelder  $B_{\perp} \gtrsim 1$  T verändern sich die Positionen aller Maxima gleichartig. Im Bereich kleiner Magnetfelder dagegen tritt teilweise eine Paarbildung der Leitwertmaxima auf. Für  $N = 1 \leftrightarrow 2$  nimmt die Steigung  $dE_{\max}/dB_{\perp}$  stetig zu. Die Positionen der Übergänge  $N = 2 \leftrightarrow 3$  und  $N = 3 \leftrightarrow 4$  verlaufen zueinander parallel mit einem Minimum der Energie bei  $B_{\perp} \simeq 0,4$  T. Ebenso verhalten sich bis auf eine Abweichung für  $B_{\perp} \lesssim 0,2$  T die Übergänge  $N = 4 \leftrightarrow 5$  und  $N = 5 \leftrightarrow 6$  zueinander ähnlich. Sie zeigen eine Änderung



**Abbildung 7.3:** (a) Differentieller Leitwert als Funktion von Gatterspannung  $U_{gC}$  und Magnetfeld  $B_{\perp}$  senkrecht zum 2DEG. (b) Energien der Leitwertmaxima unter Annahme eines konstanten Konversionsfaktors von  $\alpha_{gC} = 0,022$ . Zur Verdeutlichung der Änderungen wurde für jedes Leitwertmaximum ein Offset subtrahiert, so daß die Linien bei  $B_{\perp} = 1$  T äquidistant sind. Inset: Vorhersage für nicht wechselwirkende Elektronen im Fock-Darwin-Potential. (c), (d): Abhängigkeit der Ladeenergie  $E_C$  von der Elektronenzahl. Für  $B_{\perp} \lesssim 0,1$  T ist die „magische“ Elektronenzahl  $N = 6$  bei Abschluß einer Zustandsschale klar erkennbar.

der Steigung  $dE_{\max}/dB_{\perp}$  und damit einem Grundzustandsübergang (vgl. Abschnitt 3.3) bei  $0,25\text{ T} \lesssim B_{\perp} \lesssim 0,3\text{ T}$ . Dies ist in Abbildung 7.3(b) durch eine vertikale Linie angedeutet. Die Grundzustandsübergänge werden auch bei höheren Elektronenzahlen beobachtet, allerdings kann eine klare Paarbildung der Coulomb-Blockade-Oszillationen hier nicht festgestellt werden.

Wie ein Vergleich mit dem Modell aus Kapitel 3 ergibt, ist die Verschiebung der Maxima bei wachsendem Magnetfeld für  $N \leq 6$  der Vorhersage des Fock-Darwin-Modells aus Abbildung 3.6(b) ähnlich. Diese ist in Abbildung 7.3(b) nochmals verkleinert wiedergegeben. Die typischen Energieabhängigkeiten des Fock-Darwin-Modells,  $E(B_{\perp}) = \pm \hbar\omega_c/2$ , sind oben links in der Graphik eingetragen und stehen im Einklang mit den beobachteten Energieänderungen bei kleinem Magnetfeld für  $N = 5$  oder  $N = 6$ . Die Lage der ersten Grundzustandsübergänge für  $N = 4 \leftrightarrow 5$  und  $N = 5 \leftrightarrow 6$  läßt nach Gleichung 3.34 für ein Fock-Darwin-Potential den Rückschluß auf das Oszillatorquantum  $\hbar\omega_0 = \sqrt{2}\hbar\omega_c(B_{\perp}) \simeq 620 - 740\mu\text{eV}$  zu.

Mehrere Abweichungen vom Fock-Darwin-Modell können beobachtet werden. Die Pfeile in Abbildung 7.3(b) markieren parallele Verschiebungen sämtlicher beobachteten Maxima bei  $B_{\perp} \simeq 0,88\text{ T}$  und  $B_{\perp} \simeq 1,17\text{ T}$ . Die Elektronenflächendichte des freien zweidimensionalen Elektronengases der Probe  $n_s = 1,7 \cdot 10^{15}\text{ 1/m}^2$  läßt die Identifikation dieser energetischen Verschiebung als Erreichen der geradzahlgiger Füllfaktoren im zweidimensionalen Elektronengas der Zuleitungen (siehe Abschnitt 3.3.1) zu. Man erhält als Werte für den Füllfaktor  $\nu_{\text{2DEG}}(0,88\text{ T}) \simeq 8$  bzw.  $\nu_{\text{2DEG}}(1,17\text{ T}) \simeq 6$ .

Das Verhalten des Übergangs  $N = 4 \leftrightarrow 5$  weicht bei niedrigen Magnetfeldern  $B_{\perp} \lesssim 0,2\text{ T}$  von dem beobachteten Paarmuster ab. Dies ist in Abbildung 7.3(b) mit einer Ellipse markiert. Mögliche Erklärungen hierfür können durch die nicht im Fock-Darwin-Modell berücksichtigte Wechselwirkung der Elektronen und zum Beispiel die Hund'sche Regel [Tarucha u. a. 1996] gegeben werden. Hier ist auch der Grund für die zunehmenden Diskrepanzen zwischen Modell und Messung bei höheren Elektronenzahlen zu suchen. Zusätzlich muß berücksichtigt werden, daß das Quantenpunktpotential allein schon aufgrund der Tunnelbarrieren nicht den hohen Symmetriegrad des zweidimensionalen harmonischen Oszillators aufweist.

Abbildungen 7.3(c) und (d) zeigen die Ladeenergie  $E_C$  des Quantenpunkts als Funktion der Elektronenzahl  $N$ . Für  $B_{\perp} \lesssim 0,1\text{ T}$  (c) ist ein lokales Maximum der Additionsenergie bei  $N = 6$  klar erkennbar. In Analogie zur Atomphysik kann dies so interpretiert werden, daß hier eine Schale der Elektronenkonfiguration abgeschlossen wird [Tarucha u. a. 1996, Ciorga u. a. 2000]. Bereits bei  $B_{\perp} \simeq 200\text{ mT}$  ist dieser Effekt jedoch für  $N = 6$  aufgrund der aufgehobenen Niveaumentartung vollständig unterdrückt. Die aufgrund der Spinentartung erwartete Oszillation der Ladeenergien mit Periode  $\Delta N = 2$  kann nicht klar beobachtet werden.

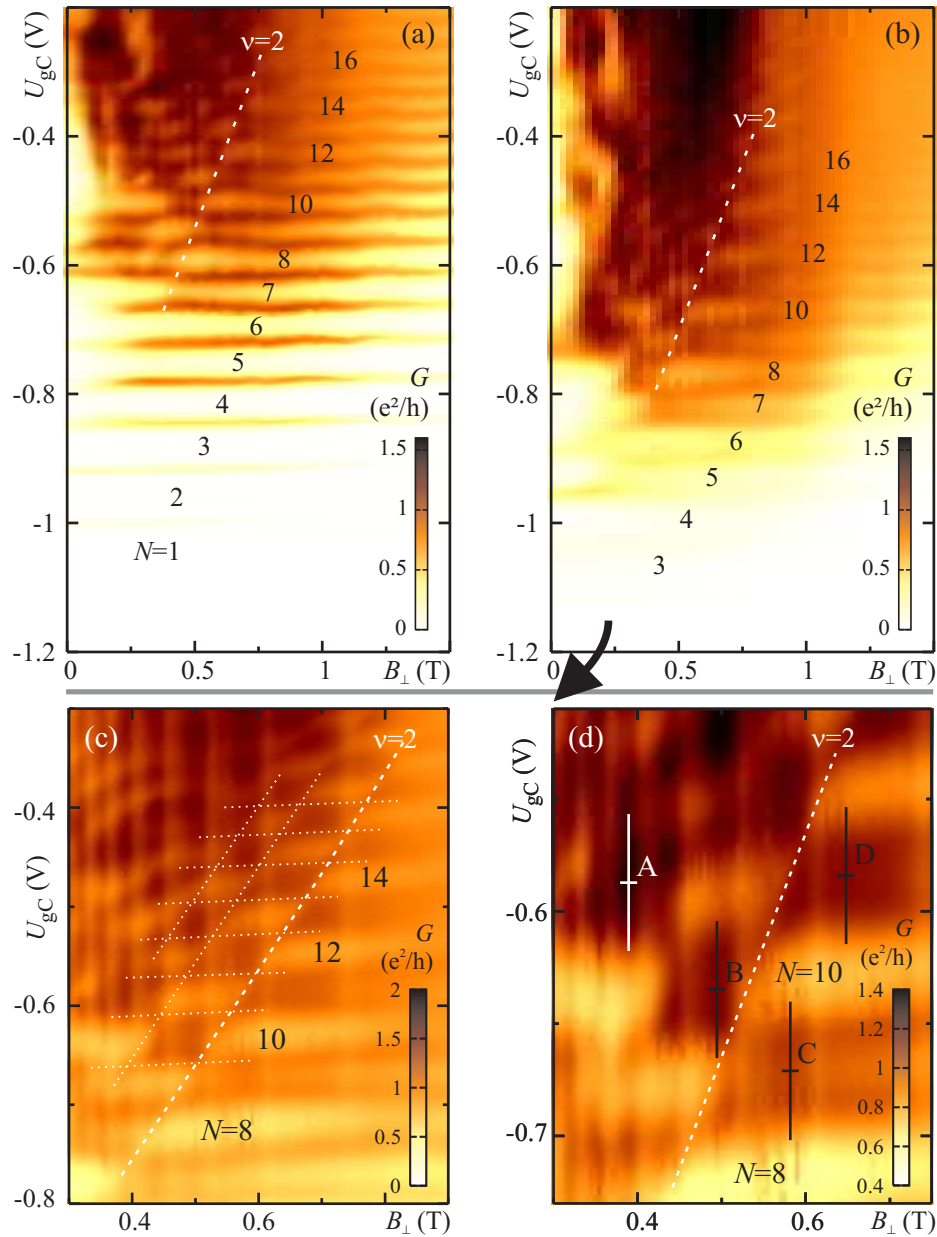
### 7.3 Starke Kopplung an die Zuleitungen

Wird die Tunnelkopplung zwischen Quantenpunkt und Zuleitungen erhöht, so gewinnen Tunneleffekte höherer Ordnung an Gewicht. Abbildung 7.4 zeigt den differentiellen Leitwert  $G$  des auch bisher betrachteten Quantenpunkts als Funktion von Gatterspannung  $U_{gC}$  und Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas  $B_{\perp}$ . Im Vergleich zu Abbildung 7.3(a) sind positivere Seitengatterspannungen und damit eine stärkere Kopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen gewählt. Die Spannungswerte entsprechen dem Parametersatz „mittlerer Quantenpunkt“ (Abbildung 7.4(a)) bzw. „offener Quantenpunkt“ (Abbildung 7.4(b)–(d)) aus Tabelle 7.1.

Mehrere Veränderungen im Additionsspektrum fallen mit wachsender Kopplung des Quantenpunkts an die Zuleitungen auf. Für geringes Magnetfeld  $B_{\perp} \lesssim 0,1 \text{ T}$  und Gatterspannungen  $U_{gC} > -0,6 \text{ V}$  (Abbildung 7.4(a)) bzw.  $U_{gC} > -0,8 \text{ V}$  (Abbildung 7.4(b)) sind keine klaren Coulomb-Blockade-Oszillationen mehr erkennbar. Dies kann auf den Verlust des Einschränkungspotentials bei Öffnung der Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen zurückgeführt werden [Schmid u. a. 2000]. Bei größerem Magnetfeld treten die Coulomb-Blockade-Oszillationen wieder deutlich hervor, da über die Verringerung der magnetischen Länge eine effektive Verbreiterung der Tunnelbarrieren stattfindet. Die Oszillationen verschieben sich aufgrund der kapazitiven Wechselwirkung des Quantenpunkts mit Gattern  $g_L$  und  $g_R$  bei stärkerer Kopplung zu den Zuleitungen in Richtung negativerer Spannung  $U_{gC}$ . Sie werden breiter und mehr und mehr von einem gleichmäßigen Hintergrundleitwert dominiert. Für Füllfaktoren  $\nu < 2$ , d.h. rechts der in Abbildungen 7.4(a) und (b) eingezeichneten Linie mit  $\nu = 2$ , treten die Leitwertmaxima regulär auf. Im Bereich  $\nu \lesssim 2$  hingegen wird ein komplexes Muster von Bereichen erhöhten differentiellen Leitwerts beobachtet.

Abbildungen 7.4(c) und (d) zeigen eine Messung von Teilen des Parameterbereichs aus Abbildung 7.4(b) bei wesentlich feinerer Rasterung. Die Gatterspannungen entsprechen wiederum dem Parametersatz „offener Quantenpunkt“ aus Tabelle 7.1. Vertikale Streifen niedrigen Leitwerts können nun äquidistant in  $1/B_{\perp}$  jeweils bei ungeradzahligem Füllfaktoren des freien zweidimensionalen Elektronengases aufgelöst werden. Sie überlagern das Leitwertmuster ohne erkennbare Übereinstimmungen. Dies legt nahe, daß es sich hierbei um die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen des Leitwerts im freien zweidimensionalen Elektronengas der Zuleitungen handelt [Fowler u. a. 1966, Zozoulenko u. a. 1999]. Insbesondere treten jedoch Bereiche größeren und kleineren Leitwerts des Quantenpunkts für  $\nu \lesssim 2$  wie in Abbildung 7.4(c) durch Linien angedeutet als „Schachbrettmuster“ hervor. Der in Richtung höheren Magnetfelds letzte Übergang zwischen zwei Spalten dieses „Schachbretts“ liegt auf der Linie konstanten Füllfaktors  $\nu = 2$  im Quantenpunkt.

## 7. Ein Quantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 7.4:** Differenzieller Leitwert  $G$  des Quantenpunkts als Funktion des Magnetfelds  $B_{\perp}$  senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas und der Gatterspannung  $U_{gC}$ , analog zu Abbildung 7.3(a), aber für weiter geöffnete Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen. (a) Übersichtsmessung für den Parametersatz „mittlerer Quantenpunkt“ ( $U_{gL} = -0,508$  V,  $U_{gR} = -0,535$  V, vgl. Tabelle 7.1), (b) Übersichtsmessung des „offenen Quantenpunkts“ ( $U_{gL} = -0,508$  V,  $U_{gR} = -0,495$  V). (c), (d): Detailmessung höherer Auflösung bei gleichen Gatterspannungen wie (b). Die in (c) und (d) aufgetragenen Daten wurden einige Tage nach (b) aufgezeichnet. Vermutlich aufgrund von Umladungen haben sich die Oszillationen in  $U_{gC}$  verschoben. Die mittels Quantenpunktkontakt-Detektion bestimmte Elektronenzahl sowie die Lage des Füllfaktors  $\nu = 2$  im Quantenpunkt ist jeweils eingetragen.



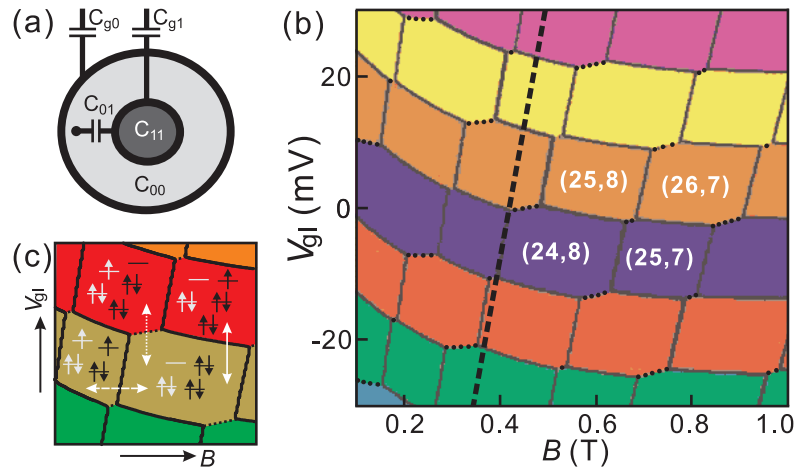
### 7.3.1 Kern-Ring-Modell des Magnetfeld-modulierten Kondo-Effekts

Schachbrettartige Muster erhöhten Leitwerts im linearen Transportregime wurden bereits an offenen Vielelektronen-Quantenpunkten beobachtet und über nichtlinearen Transport und temperaturabhängige Messungen als Kondo-Effekt identifiziert [Schmid u. a. 2000]. Der Wechsel von hohem und niedrigem Leitwert in Coulomb-Blockade in Abhängigkeit von der Elektronenzahl  $N$  kann über das Auftreten des Kondo-Effekts bei Vorhandensein eines ungepaarten Elektronenspins, also bei ungerader Elektronenzahl, erklärt werden. Dieses Modell kann jedoch nicht die Magnetfeldabhängigkeit des Kondo-Effekts bei konstanter Ladung des Quantenpunkts beschreiben. Diese Magnetfeldabhängigkeit beruht auf der Separation der elektronischen Zustände eines Vielelektronen-Quantenpunkts in Landau-Niveaus ähnlich denen des freien zweidimensionalen Elektronengases [Keller u. a. 2001]. Dem Landau-Niveau mit Index  $\lambda$  können jeweils alle Fock-Darwin-Zustände mit Quantenzahlen  $(n - m)/2 = \lambda = \text{const.}$  (vgl. Abschnitt 3.3.3) zugeordnet werden.

Die Landau-Niveaus in einem Quantenpunkt können als konzentrische Ringzustände veranschaulicht werden. Man nimmt nun an, daß allein der Spin der äußersten Randzustände, also der Elektronenzustand des niedrigsten Landau-Niveaus mit  $\lambda = 0$ , dafür ausschlaggebend ist, ob eine Hybridisierung mit den Zuleitungen und damit Kondo-Effekt möglich ist. Eine Erhöhung des Magnetfelds bewirkt eine sukzessive Umverteilung der Elektronen zwischen Ring- (d.h.  $\lambda = 0$ ) und Kernzuständen (d.h.  $\lambda > 0$ ), so daß im äußeren Landau-Niveau  $\lambda = 0$  die Zahl der Elektronen abwechselnd gerade bzw. ungerade ist. Läßt man höhere Spinzustände unberücksichtigt, so tritt Kondo-Effekt nur für ungerade Elektronenzahl und damit einen ungepaarten Elektronenspin im Ringzustand auf.

Bei der Umverteilung der Elektronen zwischen Kern und Ring entspricht jeder Transfer eines Elektrons anschaulich dem Hinzufügen eines magnetischen Flußquantums zur effektiven Fläche des Quantenpunkts [Stopa u. a. 2003]. Beispielsweise hat das „Schachbrett-Feld“ um Position B in Abbildung 7.4(d) eine Breite von  $\Delta B_{\perp} \simeq 80 \text{ mT}$ , was dem Hinzufügen eines magnetischen Flußquantums  $\Phi_0 = h/2e$  in einer Kreisscheibe mit Radius  $r_{\text{eff}} \simeq 90 \text{ nm}$  entspricht.

Die Skizze in Abbildung 7.5(a) verdeutlicht das Ring-Kern-Modell für einen Quantenpunkt mit zwei besetzten Landau-Niveaus. Die Umverteilung der Ladung konnte mittels Quantenpunktkontakt-Detektion in einem dem hier beschriebenen sehr ähnlichen Meßaufbau für  $7 \leq N \leq 13$  Elektronen direkt nachgewiesen werden [Sprinzak u. a. 2002]. Das Ring-Kern-Modell liefert auch eine Erklärung für eine in dieser Situation beobachtete Verschiebung der Leitwertmaxima bei Variation des Magnetfelds. In der Skizze von Abbildung 7.5(a) sind die beiden Landau-Niveaus bereits als getrennte Elektronensysteme gezeichnet. Man modelliert sie nun durch einen

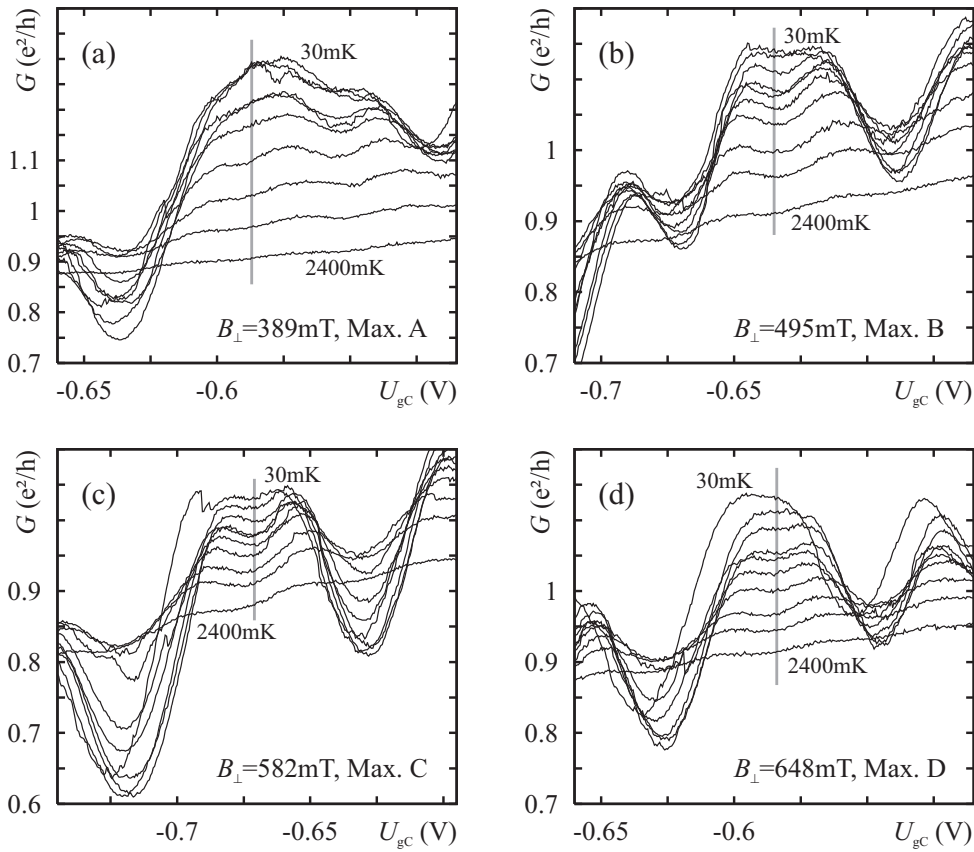


**Abbildung 7.5:** (a) Schematische Skizze eines Quantenpunkts mit zwei besetzten Landau-Niveaus. Die durch die zwei Niveaus gegebenen Elektronensysteme werden als tunnelgekoppelter Doppelquantenpunkt modelliert. (b), (c) Auswirkung von Änderungen der angelegten Gatterspannung  $V$  und des Magnetfelds  $B_{\perp}$ :  $V$  ändert die Gesamtelektronenzahl  $N$ ,  $B_{\perp}$  führt zu einer Umverteilung der Elektronen zwischen Ring- und Kernzuständen. In (b) sind beispielhafte Elektronenzahlen in Ring und Kern in der Form  $(N_{\text{Ring}}/N_{\text{Kern}})$ , in (c) beispielhafte Spinkonfigurationen eingezeichnet. Graphik aus [Stopa u. a. 2003].

tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkt [Stopa u. a. 2003], was zu einem Sechseck-Muster stabiler Elektronenzahlen wie in Abbildung 7.5(b) gezeichnet führt. An die Stelle der zwei Gatterspannungen, die in einem Doppelquantenpunkt die Potentiale steuern, treten hier Gatterspannung und Magnetfeld.

### 7.3.2 Abhängigkeit von Temperatur und source-drain-Spannung

Abbildung 7.6 zeigt bei verschiedenen Magnetfeldern  $B_{\perp}$  jeweils Messungen des differentiellen Leiterts als Funktion der Gatterspannung  $U_{gC}$  für unterschiedliche Temperaturen. Die Temperatur  $T_{MC}$  wird an der Mischkammer des Verdünnungskryostaten gemessen und geregelt. Sie stellt eine Untergrenze für Kristall- und Elektronentemperatur des Probenchips dar. Aufgrund von elektronischem Rauschen tritt bei tiefen Temperaturen eine Sättigung der für den elektronischen Transport relevanten Elektronentemperatur des zweidimensionalen Elektronengases bei  $T_{el} \simeq 200$  mK ein. Das Magnetfeld  $B_{\perp}$  und der dargestellte Gatterspannungsbereich sind in Abbildung 7.6 jeweils derartig gewählt, daß bei niedriger Temperatur in der Mitte jeder Teilgraphik Kondo-Effekt vorliegt. Die entsprechenden Parameter sind zum Vergleich auch in Abbildung 7.4(d) mit A, B, C, D gekennzeichnet. Die Meßspuren sind bei den Temperaturen  $T_{MC} = 30$  mK, 130 mK, 230 mK, 330 mK, 430 mK, 530 mK, 730 mK,  $\sim 1000$  mK,



**Abbildung 7.6:** Temperaturabhängigkeit ausgewählter „Kondo-Schachbrett“-Felder:  $G(U_{gc})$  für jeweils konstantes Magnetfeld und die Mischkammer-Temperaturen  $T_{MC} = 30 \text{ mK}$ ,  $130 \text{ mK}$ ,  $230 \text{ mK}$ ,  $330 \text{ mK}$ ,  $430 \text{ mK}$ ,  $530 \text{ mK}$ ,  $730 \text{ mK}$ ,  $\sim 1000 \text{ mK}$ ,  $1500 \text{ mK}$  und  $2400 \text{ mK}$ , entsprechend Schnitten durch die in Abbildung 7.4(d) eingezeichneten Leitwertmaxima. (a):  $B_{\perp} = 389 \text{ mT}$ , Maximum A; (b):  $B_{\perp} = 495 \text{ mT}$ , Maximum B; (c):  $B_{\perp} = 582 \text{ mT}$ , Maximum C; (d):  $B_{\perp} = 648 \text{ mT}$ , Maximum D.

1500 mK und 2400 mK aufgezeichnet.

In allen beobachteten Fällen ist zu erkennen, daß sich mit steigender Temperatur ein zusätzliches Minimum des Leitwerts in der Nähe der jeweils senkrecht grau eingezeichneten Linie entwickelt, entsprechend dem für  $T \rightarrow 0$  unterdrückten Coulomb-Blockade-Bereich. Für die höchste in der Messung verwendete Temperatur  $T = 2,4$  K sind die Coulomb-Blockade-Oszillationen stark temperaturverbreitert und deshalb unabhängig von der Elektronenzahl im Quantenpunkt nur sehr schwach erkennbar.

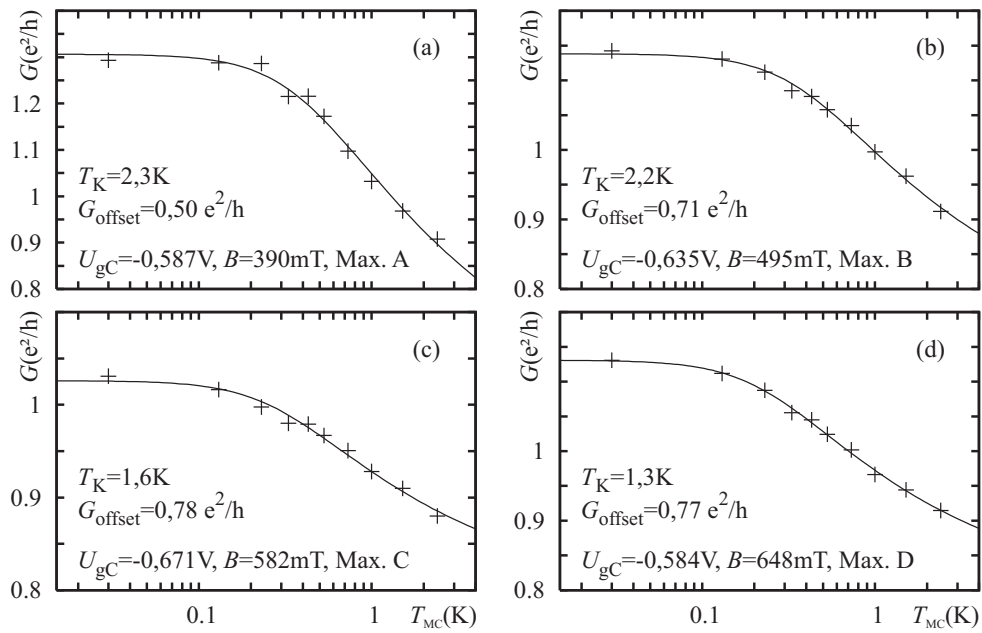
Aufgrund des beobachteten Hintergrundleitwerts führt eine direkte Kurvenanpassung zur Bestimmung der Kondo-Temperatur nach Gleichung 3.44 zu physikalisch nicht sinnvollen Kurvenparametern. Ein einfacher Weg, den Hintergrund zu berücksichtigen, ist das Einführen eines zusätzlichen temperaturunabhängigen Leitwert-Offset in Gleichung 3.44 als Fitparameter und das Setzen von  $s = 0,2$  entsprechend der theoretischen Vorhersage [Goldhaber-Gordon u. a. 1998a]. Die anzupassende Funktion ist dann durch

$$G(T) = G_0 \left( \frac{T_K'^2}{T^2 + T_K'^2} \right)^{0,2} + G_{\text{offset}} \quad \text{mit} \quad T_K' = \frac{T_K}{\sqrt{2^5 - 1}} \quad (7.1)$$

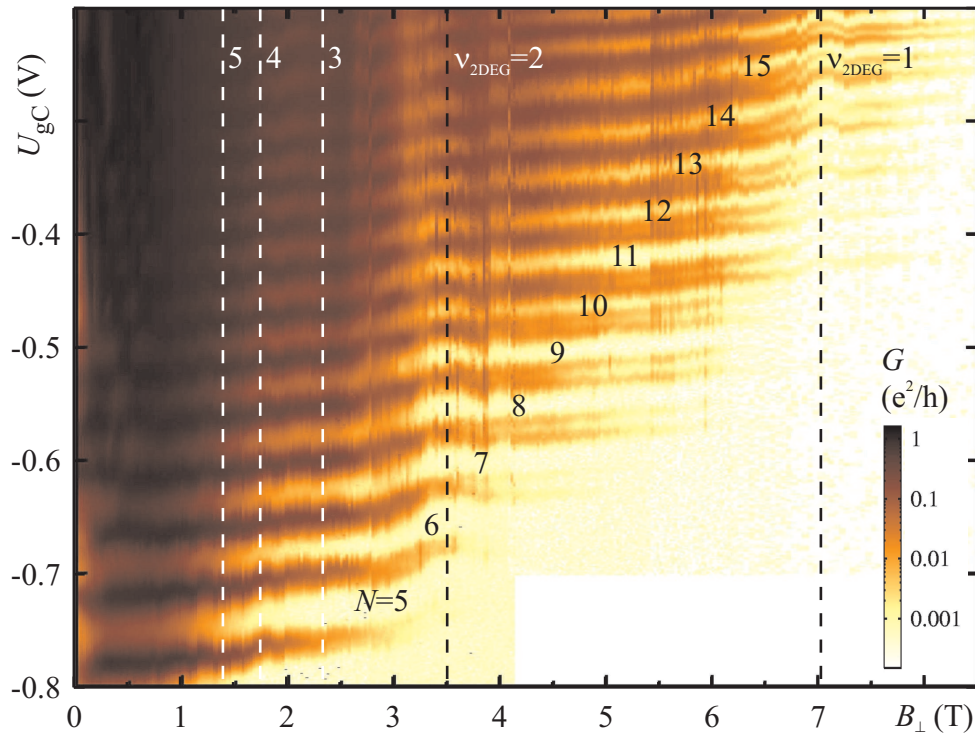
gegeben. Abbildung 7.7 zeigt die Temperaturabhängigkeit des Leitwerts bei den in Abbildung 7.6 mit senkrechten Linien markierten Gatterspannungen. Die durchgezogenen Linien entsprechen Kurvenanpassungen nach Gleichung 7.1. Die resultierenden Fitparameter sind ebenfalls in Abbildung 7.7 eingetragen. Da die genaue Temperaturabhängigkeit des Leitwerthintergrunds nicht bekannt ist, müssen die Werte für die Kondo-Temperatur jedoch mit Vorsicht betrachtet werden.

## 7.4 Resonanzaufspaltungen bei hohem Magnetfeld

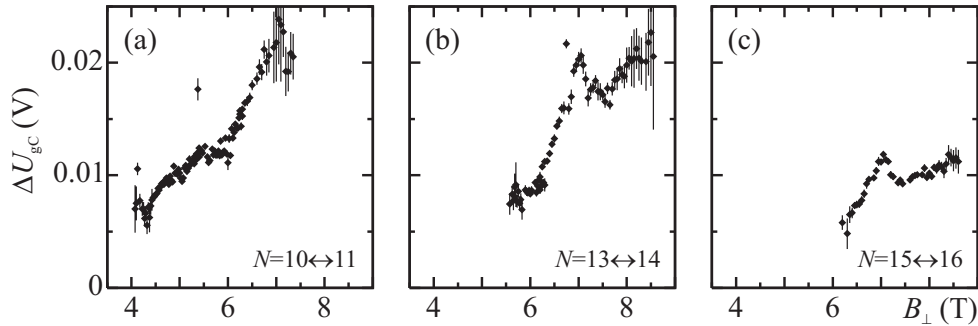
Abbildung 7.8 zeigt über einen weiten Magnetfeldbereich eine Messung des differentiellen Leitwerts des Quantenpunkts für Gatterspannungen entsprechend dem Parametersatz „mittlerer Quantenpunkt“ ( $U_{gL} = -0,508$  V,  $U_{gR} = -0,535$  V). Für kleine Magnetfelder  $B_{\perp} < 0,75$  T treten, wie bereits für andere Gatterspannungen beschrieben, orbitale Übergänge im elektronischen System auf. Das Magnetfeld, oberhalb dessen im Quantenpunkt ein Füllfaktor  $\nu < 2$  vorliegt, liegt im betrachteten Gatterspannungsbereich bei  $0,4$  T  $\lesssim B_{\perp} \lesssim 0,75$  T (vgl. Abbildung 3.6 sowie Abbildung 7.4(a), in der ein anderer Ausschnitt der Messung von Abbildung 7.8 in angepaßter Farbskala aufgetragen ist). Der Übergang des Quantenpunkts zum Füllfaktor  $\nu < 1$  kann daraus grob in den Bereich  $1,5$  T  $\lesssim B_{\perp} \lesssim 2,5$  T abgeschätzt werden. Oberhalb dieses Übergangs bildet ein Quantenpunkt ein sogenanntes *maximum density droplet* spinpolarisierter Elektronen. Bei weiterer Erhöhung des Magnetfeldes werden aufgrund der



**Abbildung 7.7:** Temperaturabhängigkeit des differentiellen Leitwerts für ausgewählte Gatterspannungs- und Magnetfeldwerte. Die entsprechenden Positionen sind in Abbildung 7.4(d) mit A, B, C, D sowie in Abbildung 7.6(a)-(d) mit senkrechten Linien gekennzeichnet. Die durchgezogenen Linien sind Kurvenanpassungen nach Gleichung 7.1 (siehe Text).



**Abbildung 7.8:** Differentieller Leitwert  $G$  für  $U_{SD} \simeq 0$  als Funktion von  $U_{gC}$  und  $B_{\perp}$  (logarithmische Farbskala). Die Tunnelbarrieren sind entsprechend dem Parametersatz „mittlerer Quantenpunkt“ justiert ( $U_{gL} = -0,508$  V,  $U_{gR} = -0,535$  V). Man erkennt deutlich eine Aufspaltung aller Leitwertmaxima bei hohem Magnetfeld  $B_{\perp} \gtrsim 4$  T. Die gestrichelten senkrechten Linien bezeichnen ganzzahlige Füllfaktoren im freien zweidimensionalen Elektronengas. Die Elektronenzahl  $N$  im Quantenpunkt ist eingezeichnet.



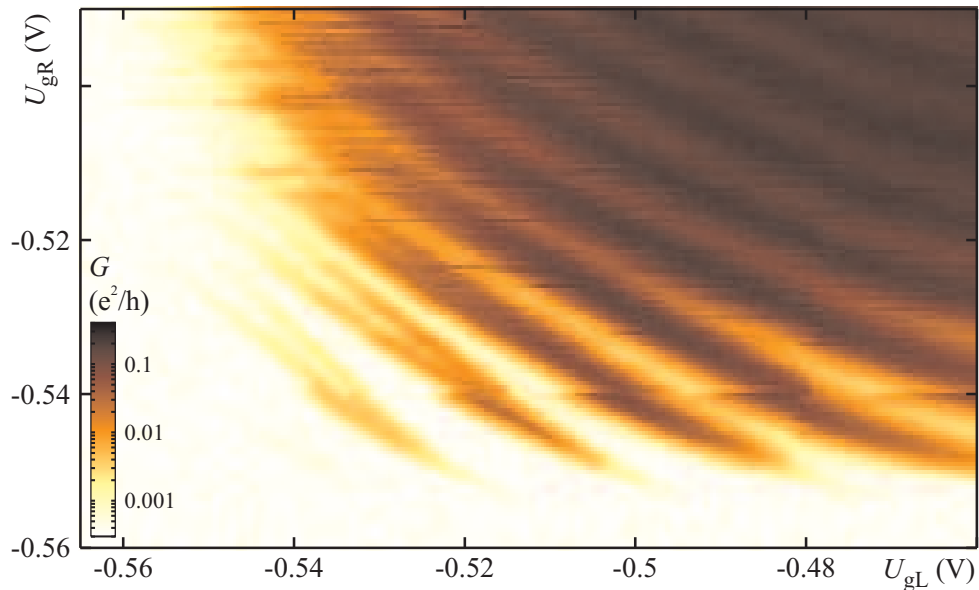
**Abbildung 7.9:** Magnetfeldabhängigkeit der Aufspaltung für drei benachbarte Coulomb-Blockade-Oszillationen. Abstand der zwei Maxima  $\Delta U_{gC}$  als Funktion des Magnetfelds  $B_{\perp}$  für (a)  $N = 10 \leftrightarrow 11$ , (b)  $N = 13 \leftrightarrow 14$  und (c)  $N = 15 \leftrightarrow 16$ , ermittelt durch halbautomatische Kurvenanpassung.

starken magnetischen Kompression der Zustände komplexe Zustände ungleichmäßiger Ladungsverteilung oder Spin-Textur erwartet [Oosterkamp u. a. 1999].

Deutlich sichtbar in Abbildung 7.8 sind parallele Verschiebungen aller Leitwertmaxima bei  $B_{\perp} \simeq 3,5\text{T}$  und  $B_{\perp} \simeq 7\text{T}$ . Bei den in der Abbildung durch senkrechte gestrichelte Linien markierten Magnetfeldern liegen für die bekannte Elektronenflächendichte des *wafers* ganzzahlige Füllfaktoren in den Zuleitungen vor. Die gute Übereinstimmung der Magnetfelder der Verschiebungen mit Füllfaktor  $\nu_{2\text{DEG}} = 2$  und  $\nu_{2\text{DEG}} = 1$  legt nahe, daß hier wie in Abschnitt 3.3.1 für geradzahlige Füllfaktoren beschrieben ein Sprung des chemischen Potentials in den Zuleitungen vorliegt. Es bleibt ungeklärt, warum eine Verschiebung für den ungeradzahligen Füllfaktor  $\nu_{2\text{DEG}} = 1$  auftritt. Die Beobachtung deckt sich jedoch mit denjenigen anderer Arbeitsgruppen [Ciorga u. a. 2000].

Von besonderem Interesse ist, daß bei hohen Magnetfeldern alle beobachteten Leitwertmaxima unabhängig von der Elektronenzahl in zwei getrennte Maxima aufspalten. Die Aufspaltung kann in Abbildung 7.8 bis zu Magnetfeldern von  $B_{\perp} > 7\text{T}$  beobachtet werden. In diesem Magnetfeldbereich ist das zweidimensionale Elektronengas sowohl innerhalb als auch außerhalb des Quantenpunkts vollständig spinpolarisiert. Damit sind Spinaufspaltungen der elektronischen Zustände als Ursache unwahrscheinlich.

Abbildung 7.9 zeigt den Abstand der zwei sich jeweils bildenden Maxima als Funktion des Magnetfelds für drei beispielhaft ausgewählte Coulomb-Blockade-Oszillationen. Zur Ermittlung wurde eine Summe von zwei  $\cosh^{-2}$ -Funktionen gleicher Breite an die Meßdaten halbautomatisch angepaßt. Die beobachtete Abhängigkeit der Aufspaltung vom Magnetfeld ist nicht linear. Sie zeigt in allen betrachteten Fällen ein lokales Maximum bei  $B_{\perp} \simeq 7\text{T}$ . In Energie umgerechnet liegt der Betrag

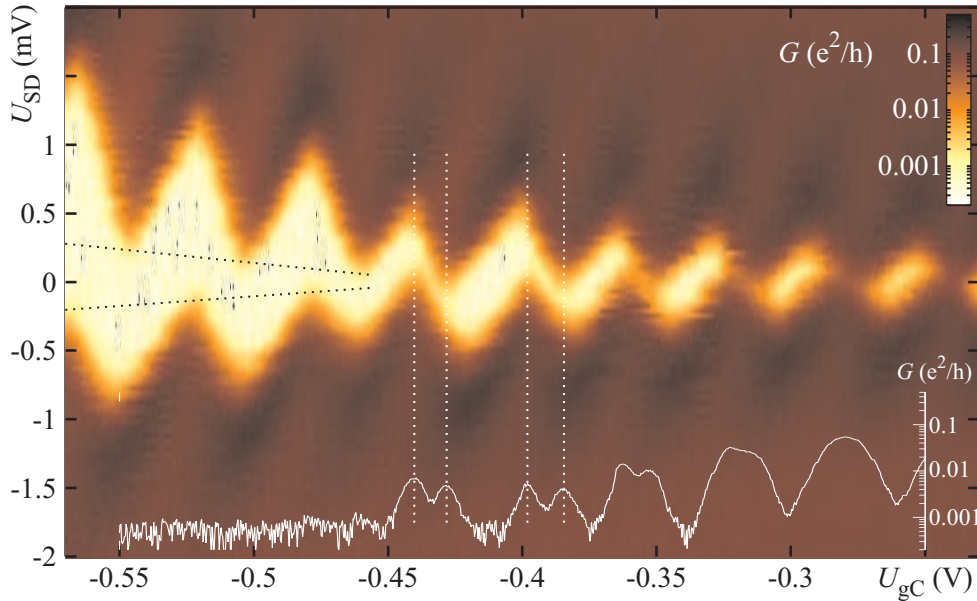


**Abbildung 7.10:** Abhängigkeit der Aufspaltung von der Asymmetrie der Gatterspannungen. Differentieller Leitwert des Quantenpunkts als Funktion der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  bei konstantem  $U_{gC} = -0,4\text{ V}$ . Als Magnetfeld ist konstant  $B_{\perp} = 6\text{ T}$  angelegt.

der beobachteten Aufspaltung grob in der Größenordnung des Zeeman-Effekts. Trotzdem kann es sich hierbei nicht um die Zeeman-Aufspaltung handeln. Diese ist linear in  $B_{\perp}$  und wird in der Regel nur bei endlicher *source-drain*-Spannung (vgl. Kapitel 10 und [Hanson u. a. 2003]) sichtbar. Zudem hängt der beobachtete Effekt offenbar nicht nur von Magnetfeld, sondern auch von den Gatterspannungen ab, wie in Abbildung 7.10 verdeutlicht ist. Hier ist der differentielle Leitwert des Quantenpunkts bei konstantem  $U_{gC} = -0,4\text{ V}$  als Funktion der an den seitlichen Gattern  $g_L$  und  $g_R$  angelegten Spannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  aufgetragen. Das Magnetfeld ist hierbei konstant  $B_{\perp} = 6\text{ T}$ . In der Abbildung ist deutlich zu erkennen, daß die Größe der Aufspaltung der Leitwertmaxima vom Verhältnis der Höhen der Tunnelbarrieren zu *source*- und *drain*-Zuleitung abhängt. Für eine relativ niedrige Tunnelbarriere zur *source*-Zuleitung ist sie maximal, im entgegengesetzten Fall einer niedrigen Tunnelbarriere zum *drain*-Kontakt nicht mehr nachweisbar. Damit liegt offensichtlich ein von der Potentialgeometrie abhängiger Effekt vor.

Eine Messung des nichtlinearen Transportspektrums des Quantenpunkts bei hohem Magnetfeld liefert zusätzliche unerwartete Resultate. In Abbildung 7.11 ist der differentielle Leitwert durch den Quantenpunkt bei  $B_{\perp} = 6\text{ T}$  als Funktion von *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und Gatterspannung  $U_{gC}$  aufgetragen. Die Bereiche des Einzelelektronentunnels bei positiver bzw. negativer *source-drain*-Spannung sind gegen-





**Abbildung 7.11:** Differenzieller Leitwert des Quantenpunkts als Funktion von  $U_{SD}$  und  $U_{gC}$  bei  $B_{\perp} = 6\text{ T}$  (Parametersatz „mittlerer Quantenpunkt“, logarithmische Farbskala). Die Spur für  $U_{SD} = 0$  ist zusätzlich in logarithmischer Skala als Linie aufgetragen.

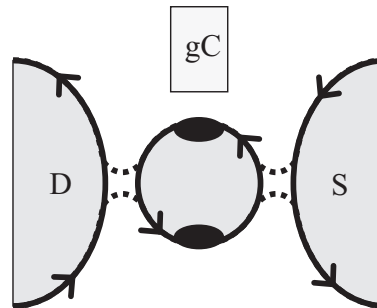
einander verschoben. Die dreiecksförmigen Bereiche endlichen Leitwerts für  $U_{SD} \geq 0$  ragen für einen Bereich der Gatterspannung  $U_{gC}$  noch mit ihrer Spitze über  $U_{SD} = 0$  hinaus, ebenso diejenigen für  $U_{SD} \leq 0$ . Im linearen Transport wird damit aufgrund der Verschiebung zwischen den beiden Bereichen eine Doppelmaximum-Struktur sichtbar. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs ist in Abbildung 7.11 der Leitwert in linearer Antwort ( $U_{SD} = 0$ ) nochmals als Linienplot in gleicher  $U_{gC}$ -Skala aufgetragen.

Die relative Verschiebung in  $U_{gC}$  zwischen Einzelelektronentunneln bei positiver und negativer *source-drain*-Spannung nimmt mit negativerer Spannung  $U_{gC}$  am zentralen Gatter zu. Zusätzlich kann für  $U_{gC} < -0,45\text{ V}$  kein linearer Transport mehr beobachtet werden. Wie in Abbildung 7.11 durch schwarze gepunktete Linien angedeutet, wird für weiter negative Gatterspannung  $U_{gC}$  eine größere und größere *source-drain*-Spannung  $|U_{SD}|$  benötigt, um diese Transportblockade aufzuheben.

Verzerrte Coulomb-Diamanten wurden bereits bei hohen Magnetfeldern beobachtet und auf eine Umordnung der Elektronenzustände bei diskreten Magnetfeldwerten zurückgeführt [Oosterkamp u. a. 1999, Tans u. a. 1998]. Der hier beobachtete Effekt ist jedoch gleichermaßen über einen weiten Magnetfeldbereich sichtbar, so daß diese Ursache ausscheidet. Das Verhalten in Abbildung 7.11 legt nahe, daß das Potential, entlang dessen sich Elektronen durch den Quantenpunkt bewegen, von dem Vorzeichen des Stroms abhängt.

## 7. Ein Quantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

---



**Abbildung 7.12:** Spekulatives Modell für die Aufspaltung der Leitwertmaxima (siehe Text).

Man kann spekulieren, daß sich die Elektronen im hohen Magnetfeld entlang eines Randkanals durch den Quantenpunkt bewegen, wie in [Abbildung 7.12](#) skizziert ist. Abhängig von der Richtung des Tunnelstroms befindet sich das effektive Potentialminimum für das tunnelnde Elektron nahe oder entfernt der Gatterelektrode. Damit wird das Elektron unterschiedlich stark kapazitiv von der Gatterspannung  $U_{gC}$  beeinflusst. Eine Änderung des Magnetfelds führt zu einer Änderung der Lage der Randkanäle und damit anderer Ankopplung, wie auch unterschiedliche Gatterspannungen an den seitlichen Gattern.

Eine endgültige Erklärung dieses beobachteten Phänomens erfordert allerdings weitere eingehende Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit aus Zeitgründen nicht mehr durchgeführt werden konnten.

---

# Kapitel 8

## Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

Der in Kapitel 7 vorgestellte Quantenpunkt kann durch Veränderung der angelegten Gatterspannungen zu einem tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkt verformt werden. Das Transportspektrum des so definierten Doppelquantenpunkts bei niedrigen Elektronenzahlen  $N = 0,1,2,\dots$  wird in diesem Kapitel betrachtet. Abschnitt 8.1 beschreibt die Verformung des Einzelquantenpunkts zum Doppelquantenpunkt und dessen grundlegende Eigenschaften. In Abschnitt 8.2 werden die Transporteigenschaften des Doppelquantenpunkts bei endlicher *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  untersucht. Abschnitt 8.3 betrachtet im Detail die Eigenschaften des Transportspektrums für die Elektronenzahl  $N \leq 1$  und stellt ein neuartiges Verfahren zur eindeutigen Identifikation der Quantenzustände und zur Bestimmung der Tunnelkopplung vor. Abschnitt 8.4 geht auf das analog aufgenommene Spektrum bei  $1 \leq N \leq 2$  ein. Abschließend werden in Abschnitt 8.5 Messungen des Transportspektrums für beide Bereiche der Elektronenzahl vorgestellt, bei denen die Gatterspannung  $U_{gC}$  anstelle der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  zur annähernd symmetrischen Potentialvariation eingesetzt wird.

### 8.1 Verformung eines Einzelquantenpunkts zum Doppelquantenpunkt

Im Gegensatz zu vertikal geätzten Quantenpunkten [Reed u. a. 1986], bei denen die Form des freistehenden Pfeilers den Symmetrieanforderungen angepasst werden kann [Tarucha u. a. 2000], ist das Einschränkungspotential lateraler Quantenpunkte im allgemeinen asymmetrisch. Selbst bei einer weitgehend symmetrischen Gatteranordnung

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

---

ergibt sich eine Abweichung vom Fock-Darwin-Potential allein schon durch die Anwesenheit von Tunnelbarrieren zu den Kontakten.

In den Messungen des vorherigen Kapitels wurden Eigenschaften eines Einzelquantenpunkts betrachtet. Messungen des Leitwerts in Abhängigkeit von den Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  lieferten keinerlei Hinweise auf das Vorliegen eines Doppelpotentialtopfs. Wählt man die Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  der seitlichen Gatter positiver und zugleich die an den zentralen Gattern angelegten Spannungen  $U_{gC}$  und  $U_{gX}$  negativer, so verstärkt sich die aufgrund der Tunnelbarrieren bereits vorhandene Symmetriebrechung. Das Elektronensystem des Einzelquantenpunkts verformt sich zunehmend. Die Auswirkungen hiervon auf den Fock-Darwin-Hamiltonoperator können für kleine Verzerrung beispielsweise nach [Kyriakidis u. a. 2002] mit

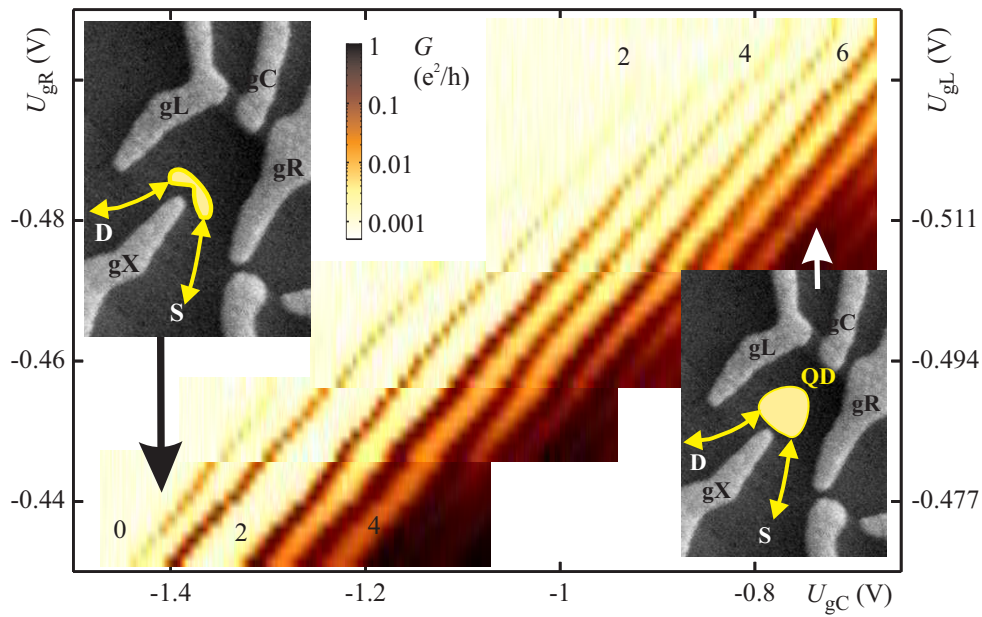
$$H = H_{\text{Fock-Darwin}} + \gamma \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \left( x - \frac{y^2}{\zeta} \right)^2 \quad (8.1)$$

beschrieben werden, wobei die Parameter  $\gamma$  und  $\zeta$  die Potentialverzerrung charakterisieren. Hier wird dem parabolischen Potential ein näherungsweise halbkreisförmiger Graben mit parabolischem Schnitt überlagert. Betrachtet man die Verformung als kleine Störung, so ergibt sich eine Verschiebung der Eigenenergien des Einzelquantenpunkts. Starke Verformung kann zur Bildung eines Doppelmuldenpotentials, also eines Doppelquantenpunkts führen.

Dies ist in Abbildung 8.1 anhand einer Messung illustriert. Ausgehend von den Parametern aus Kapitel 7 wird die Gatterspannung  $U_{gX}$  auf  $-0,566$  V gesetzt. Die Abbildung zeigt den differentiellen Leitwert als Funktion von  $U_{gC}$  und den an den seitlichen Gattern angelegten Spannungen. Hierbei werden  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  gleichzeitig proportional zueinander variiert. Für positivere Werte von  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  verschieben sich die Coulomb-Blockade-Oszillationen des Quantenpunkts in Richtung negativerer Werte von  $U_{gC}$ . Am unteren Rand des Plots von Abbildung 8.1, also bei  $U_{gL} = -0,47$  V,  $U_{gR} = -0,4315$  V und  $U_{gX} = -0,566$  V, kann eine Vergrößerung des Coulomb-Blockade-Bereichs mit zwei Elektronen, sowie eine Verkleinerung der Bereiche mit  $N = 1$  und  $N = 3$  beobachtet werden.

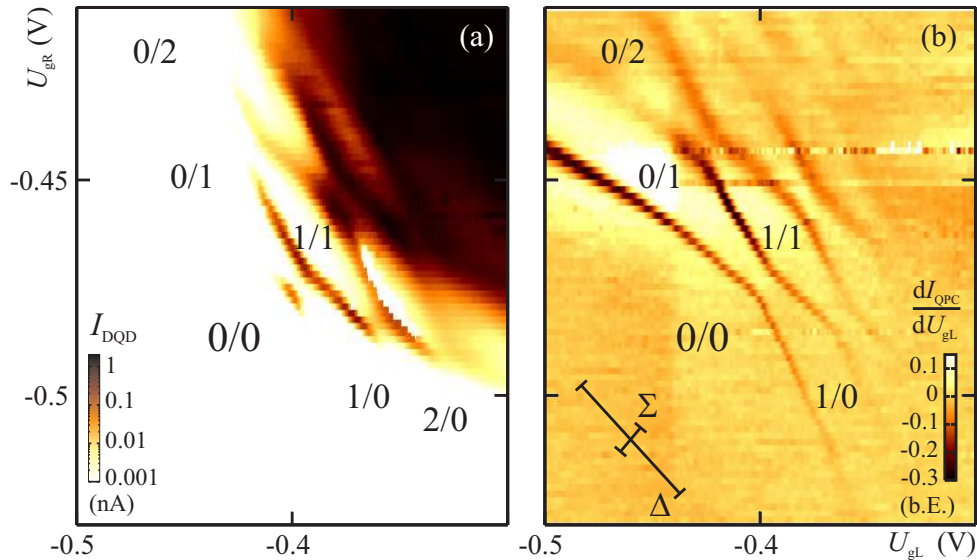
Diese Paarbildung der Leitwertmaxima liefert einen Hinweis auf das mögliche Vorliegen eines Doppelquantenpunkts. Zum Hinzufügen des zweiten Elektrons muß die vergleichsweise geringe Coulomb-Abstoßung zwischen zwei Elektronen in verschiedenen Quantenpunkten überwunden werden, d.h. der Coulomb-Blockade-Bereich für  $N = 1$  ist auf der Gatterspannungsskala entsprechend klein. Im Gegensatz hierzu muß das dritte Elektron auf einen bereits besetzten Quantenpunkt geladen werden, und es wirkt die deutlich größere Coulomb-Abstoßung zweier Elektronen innerhalb eines Quantenpunkts. Im Stabilitätsdiagramm eines Doppelquantenpunkts (siehe Abbildung 4.2) entspricht diese Messung einer Spur entlang der  $\Sigma$ -Achse durch die Tripelpunkte

## 8.1. Verformung eines Einzelquantenpunkts zum Doppelquantenpunkt



**Abbildung 8.1:** Graduelle Verformung eines Quantenpunktes zum Doppelquantenpunkt durch Verschiebung des Gleichgewichts zwischen den zentralen und äußeren Gatterspannungen: Der differentieller Leitwert  $G$  ist als Funktion der zentralen Gatterspannung  $U_{gC}$  und der proportional zueinander variierten Seitengatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  aufgetragen. Drift der Gatterspannungen zwischen den einzelnen Meßbereichen ist in der Abbildung manuell korrigiert.

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.2:** (a) dc-Strom durch den seriellen Doppelquantenpunkt bei  $U_{\text{SD,dc}} = 50 \mu\text{V}$  als Funktion von  $U_{\text{gL}}$  und  $U_{\text{gR}}$ . Die weiteren Gatterspannungen sind konstant  $U_{\text{gC}} = -1,4 \text{V}$ ,  $U_{\text{gX}} = -0,566 \text{V}$  und  $U_{\text{gQPC}} = -0,458 \text{V}$ . (b) Quantenpunktkontakt-Signal  $dI_{\text{QPC}}/dU_{\text{gL}}$  bei identischen Gatterspannungen. Für besseren Kontrast wurde ein linearer Hintergrund subtrahiert (Details siehe Text).

symmetrischer Ladungsverteilung  $N_{\text{L}}/N_{\text{R}} = 0/0 \leftrightarrow 1/0 \leftrightarrow 0/1$  und  $1/0 \leftrightarrow 0/1 \leftrightarrow 1/1$  mit  $N_{\text{L}}$  ( $N_{\text{R}}$ ) als der Elektronenzahl im linken (rechten) Quantenpunkt. Im folgenden werden diese beiden Tripelpunkte des Stabilitätsdiagramms mit TP1 und TP2 abgekürzt.

Der eindeutige Nachweis, daß es sich bei dem beobachteten System um einen Doppelquantenpunkt handelt, ist durch die in Abbildung 8.2 gezeigte Messung geführt. Abbildung 8.2(a) zeigt den dc-Strom im Bereich linearer Antwort mit  $U_{\text{SD}} = 50 \mu\text{V}$ , als Funktion der beiden Seitengatterspannungen  $U_{\text{gL}}$  und  $U_{\text{gR}}$ . Die weiteren Gatterspannungen sind konstant  $U_{\text{gC}} = -1,4 \text{V}$ ,  $U_{\text{gX}} = -0,566 \text{V}$  und  $U_{\text{gQPC}} = -0,458 \text{V}$ . In Abbildung 8.2(b) ist für identische Gatterspannungen die am Quantenpunktkontakt detektierte Steilheit  $G_{\text{T}}$  aufgetragen. Dabei wurde an Mesaanschluß D2 (vgl. Abbildung 7.1) eine Spannung von  $U_{\text{SD,QPC}} = 1,5 \text{mV}$  angelegt. Die Anschlüsse zu den *source*- und *drain*-Kontakten S und D wurden gemeinsam mit dem Eingang des Strom-Spannungswandlers verbunden. Damit war sichergestellt, daß keine *source-drain*-Spannung  $U_{\text{SD}}$  über den Doppelquantenpunkt abfällt. Die Amplitude des resultierenden Signals zeigt starke Abhängigkeit von  $U_{\text{gR}}$ , da Gatter  $g_{\text{R}}$  dicht am Quantenpunktkontakt liegt. Um in Abbildung 8.2(b) einen besseren Kontrast zu erhalten, wurde für jede Zeile der Graphik (also  $U_{\text{gR}} = \text{const.}$ ) eine Gerade  $\tilde{G}(U_{\text{gL}})$  numerisch angepaßt und von den

Meßdaten subtrahiert. Der gleiche Prozeß wurde dann für jede Spalte ( $U_{gL} = \text{const.}$ ) wiederholt.

Die charakteristische Wabenstruktur des Stabilitätsdiagramms eines Doppelquantenpunkts, wie in Abschnitt 4.1 erklärt, ist bei beiden Größen  $I$  und  $G_T$  erkennbar. Mit Hilfe des Quantenpunktkontakts können die vollständigen Konfigurationsgrenzen des Doppelquantenpunkts aufgelöst werden. Soweit diese im Strom auch sichtbar sind, stimmt die Lage der Konfigurationsgrenzen und der Tripelpunkte in beiden Messungen sehr gut überein. Beide in Abschnitt 4.2 beschriebenen Kriterien für starke Tunnelkopplung in einem Doppelquantenpunkt können deutlich beobachtet werden — sowohl die Abrundung der Grenzen fester Elektronenkonfigurationen als auch das Vorliegen von Transport auf Konfigurationsgrenzen abseits der Tripelpunkte [Blick u. a. 1996, 1998].

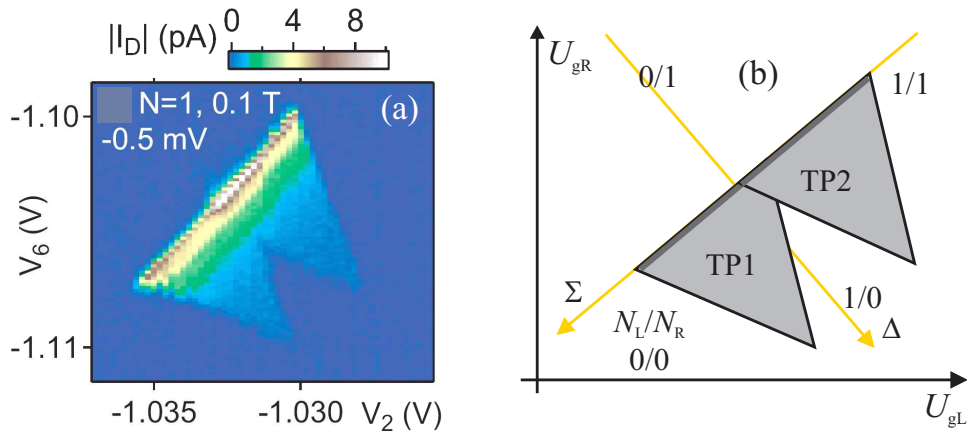
Im Quantenpunktkontakt-Signal sind über den gesamten mit 0/0 markierten Bereich in Abbildung 8.2(b) keine Linien reduzierter Steilheit sichtbar, die auf Änderungen der Elektronenzahl hinweisen würden. Auf beiden Seiten des Doppelquantenpunkts ist offensichtlich jedoch die Detektion von Umladungen noch bei wesentlich höherem Potential möglich. Daher kann der Doppelquantenpunkt hier als gänzlich entladen angenommen werden [Elzerman u. a. 2003, Petta u. a. 2004]. Die Leitwertmaxima des Systems wurden während der Verformung vom Einzelquantenpunkt zum Doppelquantenpunkt kontinuierlich gemessen. Dies ermöglicht den Vergleich zu der Elektronenzahl-Bestimmung des Quantenpunkts aus Kapitel 7, was obige Schlußfolgerung bestätigt. Die Zahl der im linken (rechten) Quantenpunkt gefangenen Elektronen wird im folgenden als  $N_L$  ( $N_R$ ) bezeichnet. In den Bereichen konstanter Ladung des Stabilitätsdiagramms in Abbildung 8.2 ist die Ladungskonfiguration jeweils in der Form „ $N_L/N_R$ “ angegeben.

## 8.2 Transport bei endlicher source-drain-Spannung

Durch einen Doppelquantenpunkt schwacher Tunnelkopplung ist Strom im Bereich linearer Antwort nur direkt an den Tripelpunkten des Stabilitätsdiagramms möglich, da die Elektronenzahl in beiden Quantenpunkten fluktuieren können muß. Liegt eine endliche *source-drain*-Spannung an, so entsteht hierdurch wie in Kapitel 4 beschrieben ein endliches Transportfenster, das im Stabilitätsdiagramm pro Tripelpunkt einen dreieckigen Bereich umfaßt [Dixon u. a. 1996, van der Wiel u. a. 2003, Johnson u. a. 2004]. Dies ist in Abbildung 8.3 anhand eines Beispiels aus der Literatur nochmals demonstriert.

Abbildung 8.4 zeigt für den Fall starker Tunnelkopplung zwischen den zwei Quantenpunkten den Strom und den differentiellen Leitwert durch den Doppelquantenpunkt

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

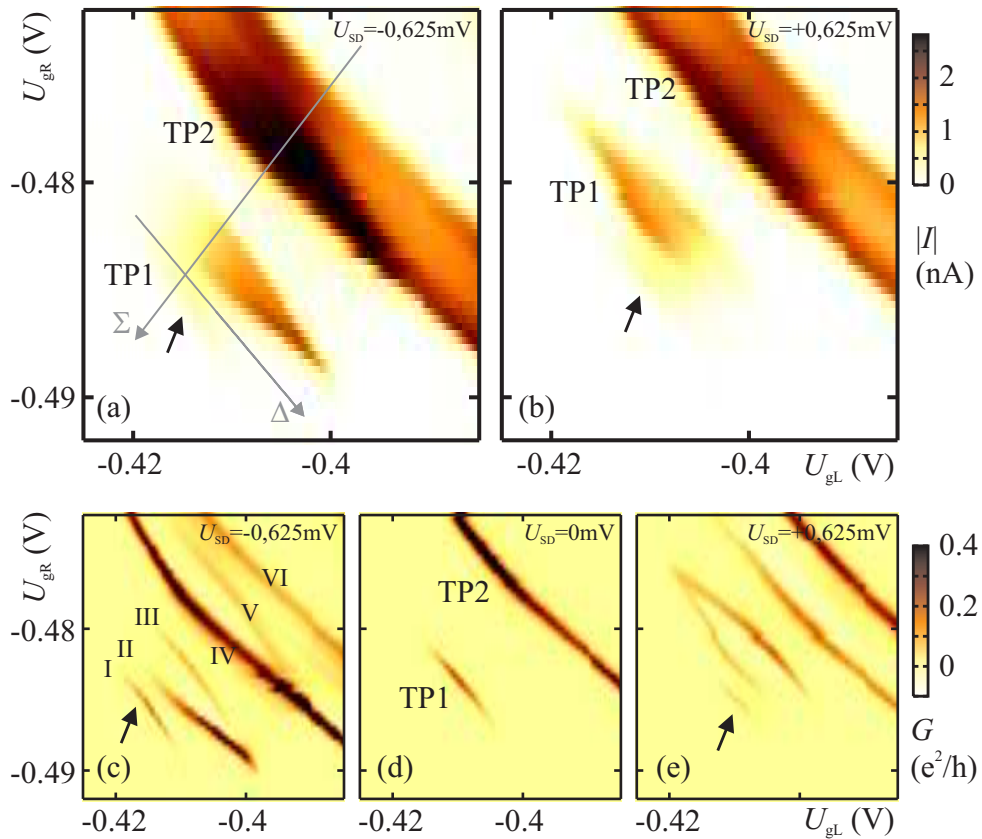


**Abbildung 8.3:** Aufweitung der Tripelpunkte im Stabilitätsdiagramm eines schwach tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkts bei endlicher *source-drain*-Spannung. (a) Messung des Tunnelstroms aus [Johnson u. a. 2004] bei  $U_{SD} = -0,5$  mV. (b) Skizze hierzu in Analogie zu Abbildung 4.3.

als Funktion von  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$ . Dabei wird der Gatterspannungsbereich in der Nähe der Tripelpunkte TP1 und TP2 betrachtet. In diesem Bereich des Stabilitätsdiagramms befinden sich bis zu einem bzw. zwischen einem und zwei Elektronen im Doppelquantenpunkt. Im Vergleich von Abbildungen 8.4(a) und (b) mit dem Fall schwacher Tunnelkopplung in Abbildung 8.3(a) ergeben sich mehrere deutliche Unterschiede. Die beiden Tripelpunkte verschmelzen bei der vorliegenden *source-drain*-Spannung nicht, da mit der stärkeren Tunnelkopplung auch eine stärkere kapazitive Kopplung als in den Messungen aus [Johnson u. a. 2004] vorliegt. Weiterhin geht der Tunnelstrom für  $N = 1 \leftrightarrow 2$  auch auf der Grenze der Ladungskonfigurationen abseits des Tripelpunkts TP2 nicht auf Null zurück. Die Grenzlinie wird bei endlicher *source-drain*-Spannung als breiter Streifen endlichen Stroms sichtbar.

Insbesondere führen jedoch bei starker Tunnelkopplung die delokalisierten molekularen Zustände zu einer charakteristischen Vergrößerung des Bereichs erhöhten Stroms direkt an den Tripelpunkten. Dies kann deutlich an Tripelpunkt TP1 beobachtet werden. Zusätzlich zu der dreiecksähnlichen Region wird ein in Abbildungen 8.4(a) und (b) mit Pfeilen markierter Bereich beobachtet, in dem Einzelelektronentunneln stattfindet. Abbildungen 8.4(c)–(e) zeigen den gleichzeitig bei identischen Parametern aufgezeichneten differentiellen Leitwert des Doppelquantenpunkts. Hier werden die Grenzen der Bereiche erhöhten Stroms als Linien endlichen differentiellen Leitwerts sichtbar. Beide Tripelpunkte spalten nicht in zwei Linien, wie im Fall schwacher Tunnelkopplung erwartet, sondern in drei Linien auf. In Abbildung 8.4(c) sind diese mit I, II, III (für Tripelpunkt TP1) beziehungsweise IV, V, VI (für Tripelpunkt TP2)





**Abbildung 8.4:** Aufspaltung der Tripelpunkte  $N_L/N_R = 0/0 \leftrightarrow 1/0 \leftrightarrow 0/1$  (TP1) und  $1/0 \leftrightarrow 0/1 \leftrightarrow 1/1$  (TP2) im Stabilitätsdiagramm eines stark tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkts bei endlicher *source-drain*-Spannung. (a), (b): Strom durch den Doppelquantenpunkt bei  $U_{SD} = -0,625 \text{ mV}$  bzw.  $U_{SD} = +0,625 \text{ mV}$ . (c)–(e): Differentieller Leitwert bei  $U_{SD} = -0,625 \text{ mV}$ ,  $U_{SD} = 0 \text{ mV}$  und  $U_{SD} = +0,625 \text{ mV}$ . Die nicht eingezeichneten Gatterspannungen sind konstant  $U_{gC} = -1,446 \text{ V}$  und  $U_{gX} = -0,566 \text{ V}$ . In (a) sind zusätzlich  $\Sigma$ - und  $\Delta$ -Achse, in (c) die Linienbezeichnungen (siehe Text) eingetragen.

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

$U_{gC}$ (V)	$B_{\perp}$ (T)	$\alpha_{gL}^L$	$\alpha_{gR}^L$	$\alpha_{gR}^R$	$\alpha_{gL}^R$	Abbildungen
-1,470 V	0	0,063	0,075	0,113	0,040	8.5, 8.12(a,e,i)
-1,470 V	0,5	0,067	0,075	0,112	0,040	8.7(a,e,h), 8.12(b,f,j)
-1,470 V	1	0,071	0,075	0,112	0,040	8.7(b,f,i), 8.12(c,g,k)
-1,470 V	1,5	0,074	0,085	0,125	0,044	8.7(c,g,j), 8.8, 8.12(d,h,l)
-1,470 V	1,95	0,083	0,096	0,139	0,053	8.7(d,k), 8.11

**Tabelle 8.1:** Konversionsfaktoren des Doppelquantenpunkts für verschiedene Magnetfelder  $B_{\perp}$ . Die angegebenen Werte werden nach Gleichung 4.8 zum Umrechnen der Gatterspannungen in Energieskala verwendet. Die Spalte „Abbildungen“ gibt an, in welchen Graphiken der entsprechende Parametersatz verwendet wird.

markiert. Ein Vergleich mit dem Verhalten des differentiellen Leitwerts eines Einzelquantenpunkts bei Anlegen einer endlichen *source-drain*-Spannung legt nahe, daß die jeweils äußeren Linien, also z.B. I und III, der Ausrichtung des Grundzustands des Systems mit dem chemischen Potential von *source* oder *drain* entsprechen, und bei Linie II ein angeregter Zustand in das Transportfenster eintritt. Dies soll nun zuerst anhand des ersten Tripelpunkts TP1 detailliert betrachtet werden.

## 8.3 Transportspektrum für maximal ein Elektron im Doppelquantenpunkt

### 8.3.1 Einzelelektronentunneln

Zur weiteren qualitativen Behandlung soll nun von vornherein bei der Auftragung der Meßdaten das bereits in Kapitel 4, Gleichung 4.8 eingeführte intrinsische Koordinatensystem des Doppelquantenpunkts mit  $\Sigma = (\mu_R + \mu_L)/2$  und  $\Delta = (\mu_R - \mu_L)/2$  verwendet werden. Zum Vergleich der Koordinatensysteme sind die  $\Sigma$ - und die  $\Delta$ -Achse in Abbildung 8.4(a) bereits eingezeichnet. Tabelle 8.1 faßt die verwendeten Umrechnungskoeffizienten für die Graphiken dieses und der folgenden Abschnitte zusammen. Sie geben wie in Kapitel 4 beschrieben die geometrischen Kapazitäten des Doppelquantenpunkts wieder und hängen insbesondere auch vom Magnetfeld und der gewählten Gatterspannung  $U_{gC}$  ab. Die in Tabelle 8.1 angegebenen Werte sind durch iteratives Anpassen aus Messungen der Steilheit wie z.B. der in Abbildung 8.5(c) gezeigten ermittelt. Es stellt sich heraus, daß die Verhältnisse der Umrechnungskoeffizienten untereinander und damit die Richtungen der Achsen näherungsweise unabhängig vom Magnetfeld sind, im Gegensatz zur Skalierung der Achsen.

Alle betrachteten Phänomene sind prinzipiell auch direkt in den Rohdaten sichtbar. Die Koordinatentransformation dient lediglich der Veranschaulichung und Vereinfachung der qualitativen Betrachtung. In den quantitativen Auswertungen (z.B. von Abschnitt 8.3.4) werden lediglich Längenverhältnisse auf Geraden in der Gatterspannungs- bzw.  $\Sigma/\Delta$ -Ebene verwendet. Fehler der Koordinatentransformation wirken sich in diesem Fall aufgrund der Linearität der Transformation nicht auf das Ergebnis aus.

Abbildungen 8.5(a) und (b) zeigen den Strom und den differentiellen Leitwert im Bereich des ersten Tripelpunkts bei  $U_{SD} = -0,75 \text{ mV}$  und  $U_{gC} = -1,47 \text{ V}$ , nun in beiden Fällen aufgetragen als Funktion der intrinsischen Energieachsen  $\Sigma$  und  $\Delta$  entsprechend den Umrechnungsfaktoren aus Tabelle 8.1. In Abbildung 8.5(c) ist in gleicher Auftragung die am Quantenpunktkontakt detektierte Steilheit  $G_T$  zu sehen. Die im differentiellen Leitwert bereits beobachteten Linien I und II in Abbildung 8.5(b) sowie die dementsprechenden Stufen im gemessenen Strom in Abbildung 8.5(a) zeigen abhängig von der Asymmetrie  $\Delta$  eine deutliche Niveauabstoßung (engl. *level anti-crossing*). Wie in Kapitel 4 ausgeführt wird für starke Tunnelkopplung zwischen zwei Quantenpunkten eine Hybridisierung der lokalisierten Einzelquantenpunktzustände zu delokalisierten Molekülzuständen mit Energie

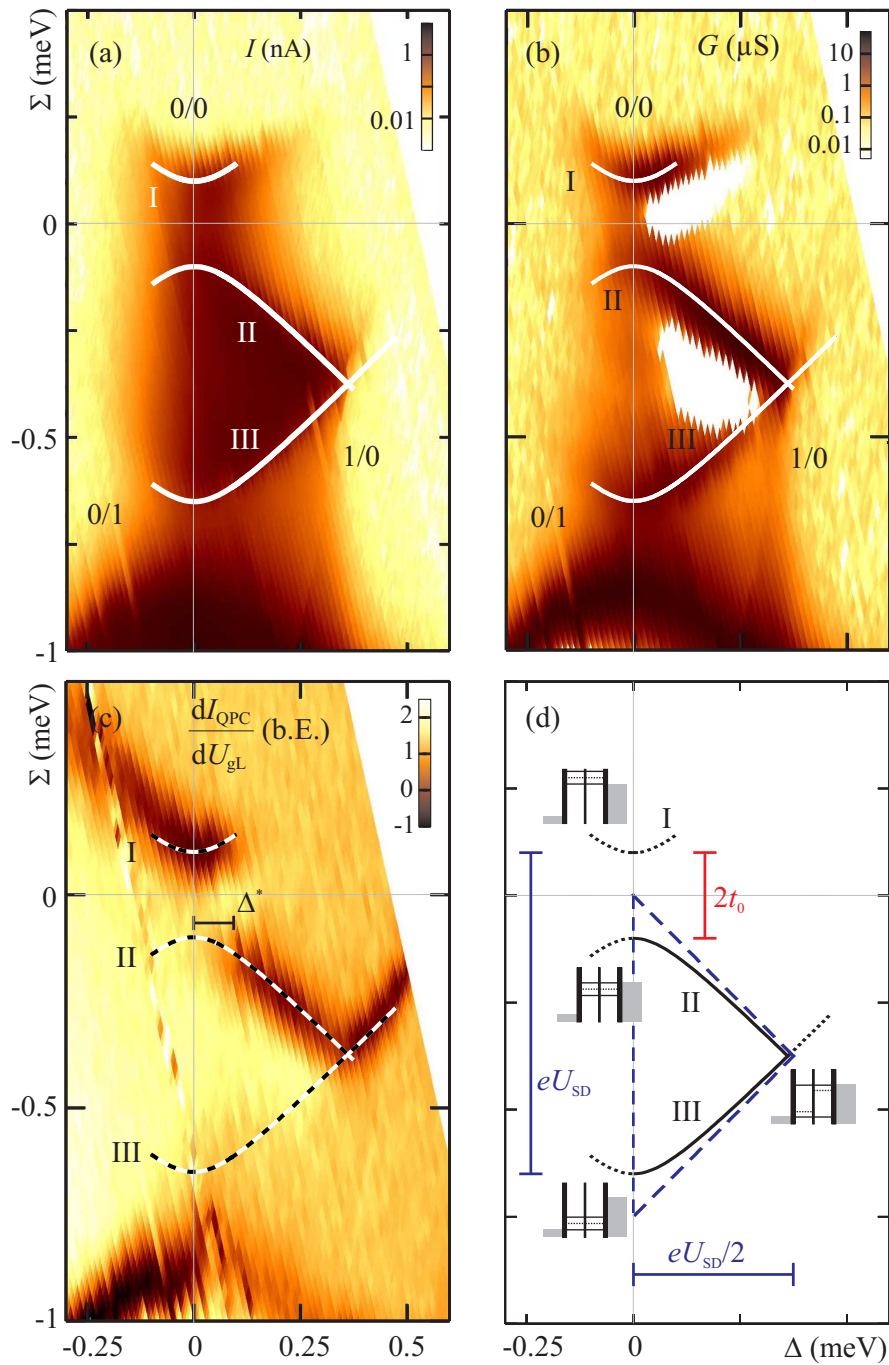
$$E_{\pm} \equiv E_0 \mp \sqrt{\Delta^2 + t_0^2} \quad (8.2)$$

erwartet. Am Tripelpunkt TP1 fluktuiert die Gesamtelektronenzahl auf dem stark tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkt zwischen  $N = 0$  und  $N = 1$ , so daß sich für sein chemische Potential entsprechend Gleichung 3.5 die Beziehung

$$\mu_{DQP} = E(1) - E(0) = E(1) + \text{const.} \quad (8.3)$$

im Modell von Kapitel 3 ergibt. Damit können durch Wahl des Energienullpunkts in diesem Spezialfall maximal eines Elektrons chemische Potentiale des Doppelquantenpunkts den Energien seiner Zustände gleichgesetzt werden. Eine vergleichbare Argumentation ist im Fall schwacher Tunnelkopplung für die chemischen Potentiale  $\mu_L$  und  $\mu_R$  des linken und des rechten Quantenpunkts im Modell von Kapitel 4 möglich. In Abbildung 8.5(b) entspricht dann Linie I der Ausrichtung des symmetrischen Grundzustands am chemischen Potential im *source*-Kontakt. Entlang Linie II liegt der antisymmetrische angeregte Zustand energetisch auf gleicher Höhe wie dieses Potential. Bei Linie III liegt der symmetrische Grundzustand auf Höhe des chemischen Potentials im *drain*-Kontakt. Die in allen Graphiken von Abbildung 8.5 identisch eingezeichneten

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.5:** Aufspaltung des Tripelpunkts TP1 bei  $U_{\text{SD}} = -0,75$  mV und  $U_{\text{gC}} = -1,47$  V. (a) dc-Strom, (b) differentieller Leitwert und (c) Steilheit des Quantenpunktkontakts, aufgetragen als Funktion von Schwerpunktpotential  $\Sigma(U_{\text{gL}}, U_{\text{gR}})$  und Asymmetrie  $\Delta(U_{\text{gL}}, U_{\text{gR}})$  des Doppelquantenpunkts (vergleiche Kapitel 4). (d) Modell für die beobachteten Phänomene (siehe Text).

gekrümmten Hilfslinien sind dementsprechend durch die analytischen Ausdrücke

$$\Sigma_{\text{I}}(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + t_0^2} \quad (8.4)$$

$$\Sigma_{\text{II}}(\Delta) = -\sqrt{\Delta^2 + t_0^2} \quad (8.5)$$

$$\Sigma_{\text{III}}(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + t_0^2} - eU_{\text{SD}} \quad (8.6)$$

mit  $t_0 = 0,1 \mu\text{eV}$  gegeben. Man beobachtet eine sehr gute Übereinstimmung mit den Stufen des Stroms (Abbildung 8.5(a)) bzw. den dazugehörigen Linien endlichen differentiellen Leitwerts (Abbildung 8.5(b)).

Das verwendete Modell der molekularen Zustände ist in Abbildung 8.5(d) nochmals im Detail verdeutlicht. Das gestrichelte Dreieck gibt dabei zum Vergleich den Bereich endlichen Stroms im Grenzfall schwacher Tunnelkopplung (Abbildungen 4.3 und 8.3) wieder. Einzelelektronentunneln durch den Doppelquantenpunkt ist möglich innerhalb des durch Linien I und III aufgespannten Parameterbereichs. Ein erster Transportkanal wird entlang Linie I zugänglich. Hier liegt der molekulare (symmetrische) Grundzustand auf der energetischen Höhe des chemischen Potentials im *source*-Kontakt. Ab Linie II ist Tunneln ebenfalls durch den angeregten (asymmetrischen) Zustand möglich, so daß sich eine Erhöhung des Stroms ergibt. Unterhalb Linie III liegt der Grundzustand des Doppelquantenpunkts unter dem chemischen Potential des *drain*-Kontakts, der Doppelquantenpunkt ist dauerhaft mit einem Elektron besetzt und Coulomb-Blockade unterdrückt den Strom. Das beobachtete Restsignal ist auf Tunnelprozesse höherer Ordnung zurückzuführen (siehe Abschnitt 8.3.2). Der Abstand auf der  $\Sigma$ -Achse zwischen Linien I und III entspricht dem bekannten Potentialunterschied zwischen *source*- und *drain*-Kontakt  $eU_{\text{SD}}$ , der Abstand zwischen Linien I und II der Tunnelaufspaltung  $2t_0$ . Am unteren Bildrand beginnt bereits Tripelpunkt TP2, auf dessen Verhalten später eingegangen werden soll (Abschnitt 8.4). Mit Hilfe dieses Modells kann eine detaillierte Diskussion der gemessenen Transportspektren vorgenommen werden.

## Tunnelstrom

Abbildung 8.5(a) zeigt den Strom durch den Doppelquantenpunkt als Funktion der Koordinaten  $\Sigma$  und  $\Delta$ . Oberhalb von Linie I sind keine Zustände des Doppelquantenpunkts energetisch zugänglich, und elektronischer Transport ist unterdrückt. Zwischen Hilfslinien I und II ist Tunneln nur durch den (für  $\Sigma = 0$  symmetrischen) delokalisierten Grundzustand möglich. Strom kann nur bei kleiner Asymmetrie  $|\Delta| \lesssim t_0$  beobachtet werden. Dies erklärt sich daraus, daß bei wachsender Asymmetrie der Grundzustand mehr und mehr in einem der beiden Quantenpunkte lokalisiert wird und damit den

Überlapp mit einem der beiden Reservoirs verliert. Der für  $\Delta < 0$  geringere Strom kann durch eine auf der *drain*-Seite größere Tunnelbarriere erklärt werden.

Zwischen Linien II und III tragen die beiden energetisch niedrigsten Quantenzustände des Doppelpotentialtopfs, der Grundzustand und der für  $\Delta = 0$  antisymmetrische angeregte molekulare Zustand, zum Strom bei. Als zusätzlicher Prozeß tritt Energierelaxation zwischen den beiden Zuständen auf. Für  $\Delta < 0$  führt diese zu einer rückläufigen Stromkomponente, da der Grundzustand näher am *source*-Anschluß lokalisiert ist. Bei hoher negativer Asymmetrie  $\Delta \ll 0$  ist der Grundzustand kontinuierlich mit einem Elektron besetzt und nur sehr schwach an die *drain*-Zuleitung gekoppelt, so daß Coulomb-Blockade den Transport durch das System unterdrückt.

Im Gegensatz hierzu gilt im von Linien II, III, und der  $\Sigma$ -Achse aufgespannten dreiecksähnlichen Bereich mit  $\Delta \geq 0$  die Ungleichung  $\mu_R \geq \mu_- \geq \mu_+ \geq \mu_L$ . Bei kleiner Asymmetrie trägt Tunneln durch beide delokalisierten Zustände zum Strom bei. Mit zunehmender Asymmetrie und damit einhergehender Lokalisierung wird dieser Prozeß unterdrückt. Tunneln in den am *source*-Kontakt lokalisierten angeregten Zustand mit anschließender Relaxation in den nahe des *drain*-Kontakts lokalisierten Grundzustand bleibt jedoch möglich.

### Differentieller Leitwert

Abbildung 8.5(b) gibt eine entsprechende Messung des differentiellen Leitwerts wieder. Die Tunnelaufspaltung zwischen Linien I und II tritt hier wesentlich deutlicher als im Strom hervor. Zwei Regionen negativen differentiellen Leitwerts, in der Abbildung in weiß eingetragen, werden beobachtet. Zwischen Linien II und III kann der negative differentielle Leitwert durch eine Abhängigkeit der Relaxationsrate von dem Energieabstand der beteiligten Niveaus erklärt werden [Fujisawa u. a. 1998]. Eine Erhöhung der *source-drain*-Spannung  $|U_{SD}|$  führt kapazitiv zu einer Erhöhung der Asymmetrie und damit zu einer effektiven Verringerung des Gesamtstroms. Die Lock-in-Messung mit ihrer Modulation der *source-drain*-Spannung läßt dies als negativen differentiellen Leitwert sichtbar werden. Die Situation zwischen Linien I und II ist komplexer. Vermutlich spielen hier Kotunnelprozesse über den angeregten Zustand eine Rolle.

### Ladung

In Abbildung 8.5(c) ist die am Quantenpunktkontakt gemessene Steilheit  $G_T = dI_{QPC}/dU_{g_L}$  im identischen Parameterbereich wiedergegeben. Man sieht eine Linie verminderter Steilheit, die für  $\Delta < \Delta^*$  Hilfslinie I, für  $\Delta^* < \Delta < eU_{SD}/2$  (vgl. Abbildung 8.5(c)) Hilfslinie II und schließlich für  $\Delta > eU_{SD}/2$  Hilfslinie III folgt. Diese

Linie entspricht der Änderung der zeitlich gemittelten Ladung auf dem Doppelquantenpunkt von  $N = 0$  nach  $N = 1$ . Daß hier nur eine entsprechende Linie im Bereich des Tripelpunkts sichtbar ist, deutet darauf hin, daß an dieser Linie der Übergang der zeitlich gemittelten Elektronenzahl des Doppelquantenpunkts von  $N = 0$  nach  $N = 1$  beinahe vollständig von sich geht. Der dunkle Bereich geringerer Steilheit am unteren Rand des Plots entspricht bereits dem Laden mit einem zweiten Elektron, auf das später eingegangen werden soll.

Wie der Tunnelstrom läßt auch die Steilheit einen Rückschluß auf die Tunnelraten des Systems zu. Für  $\Delta < \Delta^*$  ist der Doppelquantenpunkt im zeitlichen Mittel mit einem Elektron geladen, sobald  $\mu_+ < \mu_S$  und damit der Grundzustand im Transportfenster liegt. Im Bereich  $\Delta^* < \Delta < eU_{SD}/2$  ist dies erst der Fall, wenn mit  $\mu_- < \mu_S$  auch der angeregte Zustand zugänglich ist. Damit koppelt der molekulare Grundzustand für  $\Delta < \Delta^*$  stärker an die *source*-Zuleitung und für  $\Delta > \Delta^*$  stärker an die *drain*-Zuleitung. Daß der Übergang zwischen beiden Fällen bei einem endlichen positiven  $\Delta^*$  stattfindet, weist auf unterschiedlich große Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen hin.

Dies kann auch anhand eines einfachen Ratenmodells unter Vernachlässigung von Relaxationsprozessen illustriert werden. Nimmt man eine konstante Zustandsdichte in den Zuleitungen  $D_S(\mu) = D_D(\mu) = D$  und starke Tunnelkopplung zwischen den Quantenpunkten  $2t_0 \gg \hbar\Gamma_{S,D}$  an, so sind die effektiven Tunnelraten durch die beiden äußeren Tunnelbarrieren durch

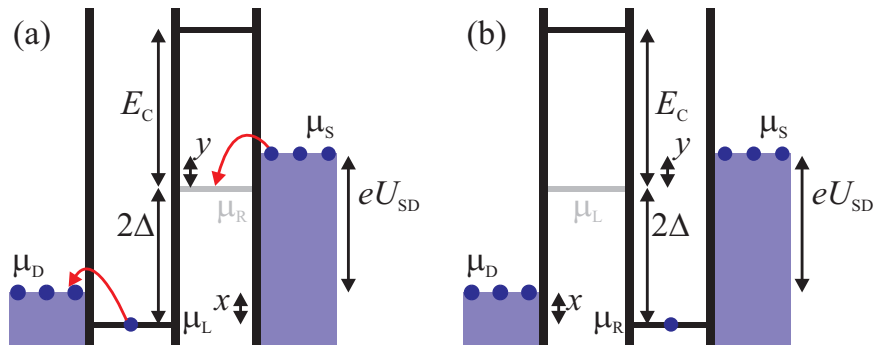
$$\Gamma_S = \gamma_S P_L \quad \Gamma_D = \gamma_D P_R \quad (8.7)$$

gegeben. Hierbei ist  $P_L$  ( $P_R$ ) die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der elektronischen Wellenfunktion im linken (rechten) Quantenpunkt und  $\gamma_S$  ( $\gamma_D$ ) die Tunnelrate zur *source*- bzw. *drain*-Zuleitung unter der Bedingung, daß der an sie ankoppelnde Quantenpunkt besetzt ist. Nun sei  $\tau$  die durchschnittliche Zeit, in der ein Elektron das System durchquert, also  $I = e/\tau$ . Weiterhin sei angenommen, daß Elektronen nur in Vorwärtsrichtung das System durchtunneln. Aufgrund der Ladungserhaltung gilt dann  $\tau^{-1} = \tau_S^{-1} \equiv \tau_D^{-1}$  mit  $\tau_S$  ( $\tau_D$ ) als der durchschnittlichen Zeit, in der ein Elektron die Tunnelbarriere von der *source*-Zuleitung bzw. zu der *drain*-Zuleitung passiert. Nimmt man  $P_{\text{leer}}$  als die Wahrscheinlichkeit an, daß der Doppelquantenpunkt unbesetzt ist, so ergibt sich dann als Verbindung zu obigen Tunnelraten

$$\tau_S^{-1} \propto \Gamma_S P_{\text{leer}} \quad \tau_D^{-1} \propto \Gamma_D (1 - P_{\text{leer}}). \quad (8.8)$$

Damit erhält man den Zusammenhang

$$P_{\text{leer}} = \frac{\Gamma_D}{\Gamma_D + \Gamma_S}. \quad (8.9)$$



**Abbildung 8.6:** Kotunneln im Bereich der Coulomb-Blockade ( $N = 1$ ): (a) Für  $0 \lesssim 2\Delta \lesssim eU_{SD}$  kann durch gleichzeitiges Tunneln aus dem linken Quantenpunkt in den *drain*-Kontakt und aus dem *source*-Kontakt in den rechten Quantenpunkt, gefolgt von Energierelaxation, Strom getragen werden. (b) Bei negativer Asymmetrie befindet sich der Doppelquantenpunkt effektiv in Coulomb-Blockade.

Der Übergangspunkt, an dem der Doppelquantenpunkt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  geladen ist, definiert sich durch

$$P_{\text{leer}} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \Gamma_S = \Gamma_D \quad \longrightarrow \quad \frac{\gamma_D}{\gamma_S} = \frac{P_R}{P_L} \quad (8.10)$$

Aus Abbildung 8.5(c) kann  $\Delta^* \simeq 0,1 \text{ meV}$  abgeschätzt werden. Das Verhältnis der beiden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten  $P_R/P_L$  ergibt sich dann näherungsweise aus dem in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Zweizustandssystem nach Gleichung 4.14 als  $P_R/P_L \simeq 1/5$ . Damit gilt für die beiden Tunnelbarrieren zwischen Doppelquantenpunkt und *source*- bzw. *drain*-Zuleitung die Beziehung  $\gamma_S \simeq 5\gamma_D$ .

### 8.3.2 Kotunnelprozesse in der Coulomb-Blockade

Ein auffallendes Merkmal in Abbildung 8.5(a) und (b) ist endlicher Strom bzw. Leitwert im Coulomb-Blockade-Bereich mit  $N = 1$ , sobald  $0 \lesssim 2\Delta \lesssim eU_{SD}$  gilt. Dies kann durch das Einsetzen von Kotunnelprozessen erklärt werden. In Abbildung 8.6(a) ist ein möglicher derartiger Prozeß skizziert. Hierbei sind in der Näherung hoher Asymmetrie die lokalisierten Zustände mit den chemischen Potentialen  $\mu_L \simeq \mu_+$  und  $\mu_R \simeq \mu_-$  eingezeichnet. Der Prozeß ist analog dem inelastischen Kotunneln in einen angeregten Einzelquantenpunkt-Zustand [De Franceschi u. a. 2001], wie es bereits in Abschnitt 3.4 vorgestellt wurde. Ein Elektron verläßt das System in Richtung *drain*-Kontakt unter Aufwendung des Energiebetrags  $x = \mu_L - \mu_D$  (siehe Abbildung 8.6(a)), ein zweites tunnelt innerhalb des über die Heisenberg'sche Unschärferelation zur Verfügung stehenden Zeitfensters  $\Delta t \lesssim \hbar/E_C$  in das System mit einem Energiegewinn von maximal



$y = \mu_S - \mu_R$ . Mit

$$\mu_R - \mu_L = 2\Delta < eU_{SD} \quad (8.11)$$

gilt dann zugleich

$$x + y = (\mu_S - \mu_D) + (\mu_L - \mu_R) = eU_{SD} - 2\Delta > 0, \quad (8.12)$$

d.h. die benötigte Energie kann von der *source-drain*-Spannung versorgt werden. Der Prozeß wird unabhängig davon beobachtet, ob der angeregte Zustand ober- oder unterhalb des *drain*-Potentials liegt, d.h. ob ein Tunnelprozeß erster Ordnung folgen kann [De Franceschi u. a. 2001]. Es folgt eine Energierelaxation des Elektrons aus dem rechten Quantenpunkt in den energetisch niedrigeren linken Quantenpunkt, so daß der Ausgangszustand wiederhergestellt ist.

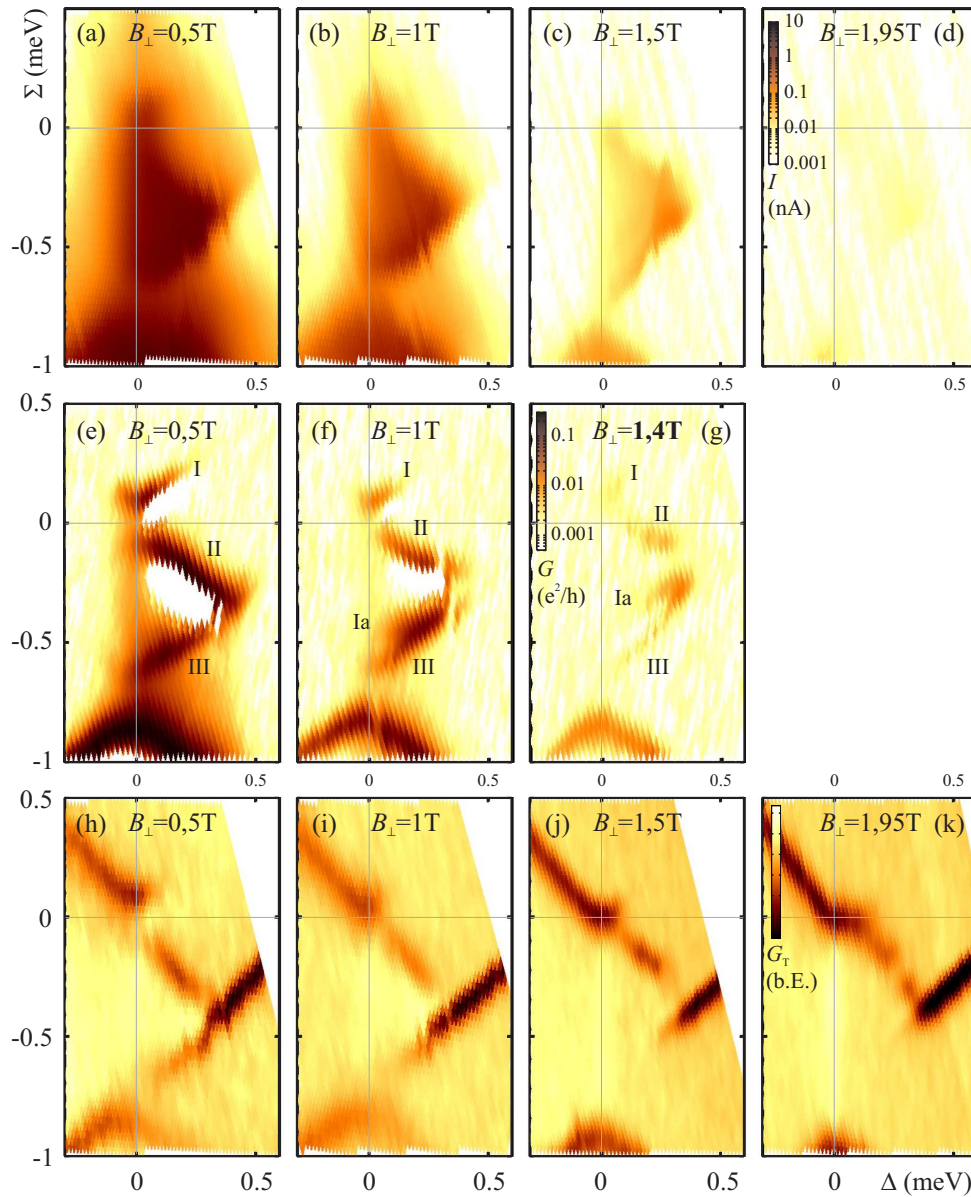
Die Analogie zum Einzelquantenpunkt bricht bei einer Umkehrung der Asymmetrie  $\Delta$  sofort zusammen. Für  $\Delta < 0$  ist kein entsprechender Kotunnelstrom erkennbar. Abbildung 8.6(b) zeigt die in diesem Fall vorliegende Anordnung der chemischen Potentiale. Der rechte Quantenpunkt ist kontinuierlich mit einem Elektron besetzt. Der Überlapp sowohl zwischen *source*-Kontakt und dem freien Zustand im linken Quantenpunkt als auch zwischen dem besetzten Zustand im rechten Quantenpunkt und dem *drain*-Kontakt ist verschwindend gering. Eine Doppelbesetzung des rechten Quantenpunkts ist ebenfalls nicht möglich, da hierzu die nochmals größere Einzelquantenpunkt-Ladeenergie aufgewendet werden müßte. Der Doppelquantenpunkt befindet sich in einer effektiven Coulomb-Blockade.

### 8.3.3 Auswirkungen eines senkrechten Magnetfelds

Abbildung 8.7 demonstriert die Auswirkungen eines Magnetfelds senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas auf Strom und differentiellen Leitwert des Doppelquantenpunkts und Steilheit des Quantenpunktkontakts bei *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = -0,75$  mV. Abbildungen 8.7(a)-(d) und (h)-(k) (d.h. Strom und Steilheit des Quantenpunktkontakts) wurden bei  $U_{gC} = -1,47$  V, Abbildungen 8.7(e)-(g) bei  $U_{gC} = -1,446$  V und nur bis zu einem maximalen Magnetfeld von  $B_{\perp} = 1,4$  T aufgezeichnet. Die Umrechnungskoeffizienten der Koordinatentransformation  $(U_{gL}, U_{gR}) \rightarrow (\Sigma, \Delta)$  sind in Tabelle 8.1 wiedergegeben. In Abbildung 8.7 in einer Spalte liegende Graphen sind direkt vergleichbar.

Der Strom durch den Doppelquantenpunkt, aufgetragen in Abbildungen 8.7(a)-(d), nimmt mit wachsendem Magnetfeld stark ab. Dies kann durch die abnehmende Fock-Darwin-Länge  $l_0$  (siehe Gleichung 3.38 in Kapitel 3) erklärt werden, welche ein Maß für die Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktion in einem zweidimensionalen harmonischen Potential im Magnetfeld ist.

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.7:** Entwicklung des Stroms, des differentiellen Leitwerts und der Steilheit des Quantenpunktkontakts am ersten Tripelpunkt TP1 bei endlichem Magnetfeld  $B_{\perp}$ . (a)-(d) Strom in nA (logarithmische Farbskala,  $U_{gC} = -1,47$  V,  $U_{SD} = -0,75$  mV), (e)-(g): Differentieller Leitwert (logarithmische Farbskala,  $U_{gC} = -1,445$  V,  $U_{SD} = -0,75$  mV), (h)-(k): Steilheit  $G_T$  des Quantenpunktkontakts (lineare Farbskala, b.E.,  $U_{gC} = -1,47$  V,  $U_{SD} = -0,75$  mV). Die Parameter der Koordinatentransformation  $(U_{gL}, U_{gR}) \rightarrow (\Sigma, \Delta)$  für jedes Magnetfeld sind in Tabelle 8.1 wiedergegeben.

Der differentielle Leitwert in Abbildung 8.7(e)-(g) nimmt ebenfalls stark mit wachsendem Magnetfeld ab. Zugleich geht die Tunnelaufspaltung bei  $\Delta = 0$  zwischen Linien I und II, die hier mit den gleichen Bezeichnungen wie in Abbildung 8.5 versehen sind, zurück. Auch dies ist durch die abnehmende Fock-Darwin-Länge bedingt. Die Messung der Steilheit des Quantenpunktkontakts in Abbildung 8.7(h)-(k) ermöglicht die gleiche Beobachtung. Hier verändert sich nicht nur die Lage der dunkel sichtbaren Umladungslinien verringerter Steilheit. Zusätzlich wird auch eine helle Linie erhöhter Steilheit entlang der  $\Sigma$ -Achse am Ort der Ladungsumverteilung zwischen den beiden Quantenpunkten sichtbar. Sie kann durch die zunehmende Lokalisierung der elektronischen Zustände in die Ladungskonfigurationen 0/1 und 1/0 erklärt werden und ist eine Konsequenz der Tatsache, daß die beiden Quantenpunkte unterschiedlich stark an den Quantenpunktkontakt koppeln [Petta u. a. 2004, DiCarlo u. a. 2004].

In der Messung des differentiellen Leitwerts wird bei  $B_{\perp} \simeq 1$  T (Abbildung 8.7(f)) eine bisher nicht beobachtete Linie erhöhten differentiellen Leitwerts zwischen Linien II und III sichtbar. Sie wird im folgenden als Linie Ia bezeichnet. Entlang ihr ist ein höherer angeregter Zustand, der bei positiver Asymmetrie  $\Delta$  wie der Grundzustand des Doppelquantenpunkts im linken Quantenpunkt lokalisiert ist, energetisch am chemischen Potential der *source*-Zuleitung ausgerichtet. Die Anregungsenergie dieses Zustands nimmt mit wachsendem Magnetfeld ab, so daß sich Linie Ia auf Linie I zubewegt. Für endliche Asymmetrie  $\Delta \simeq 0,3$  meV wird dabei eine deutliche Niveauabstoßung zwischen Linien II und Ia sichtbar.

Offensichtlich liegt auch hier eine Hybridisierung der elektronischen Zustände, allerdings diesmal zwischen Grundzustand des rechten und angeregtem Zustand des linken Quantenpunkts vor. Abbildungen 8.8(a)-(c) geben Vergrößerungen von Abbildungen 8.7(c), (g) und (j) mit angepaßter Farbskala und für diesen Fall eingezeichneten Hilfslinien wieder. Die Hilfslinien entsprechen der Annahme, daß bei  $\Delta = 0,275$  meV der angeregte Zustand des linken Quantenpunkts und der Grundzustand des rechten Quantenpunkts entartet sind, und daß zwischen ihnen eine Tunnelkopplung von  $2t_0^* = 0,1$  meV besteht. Die Tunnelaufspaltung aufgrund der Kopplung der beiden Grundzustände bei  $\Delta = 0$  wird vernachlässigt. Damit ergeben sich ähnlich Gleichung 8.4 für  $\Delta > 0$  die funktionellen Abhängigkeiten

$$\Sigma_{\text{I}}(\Delta) = \Delta \quad (8.13)$$

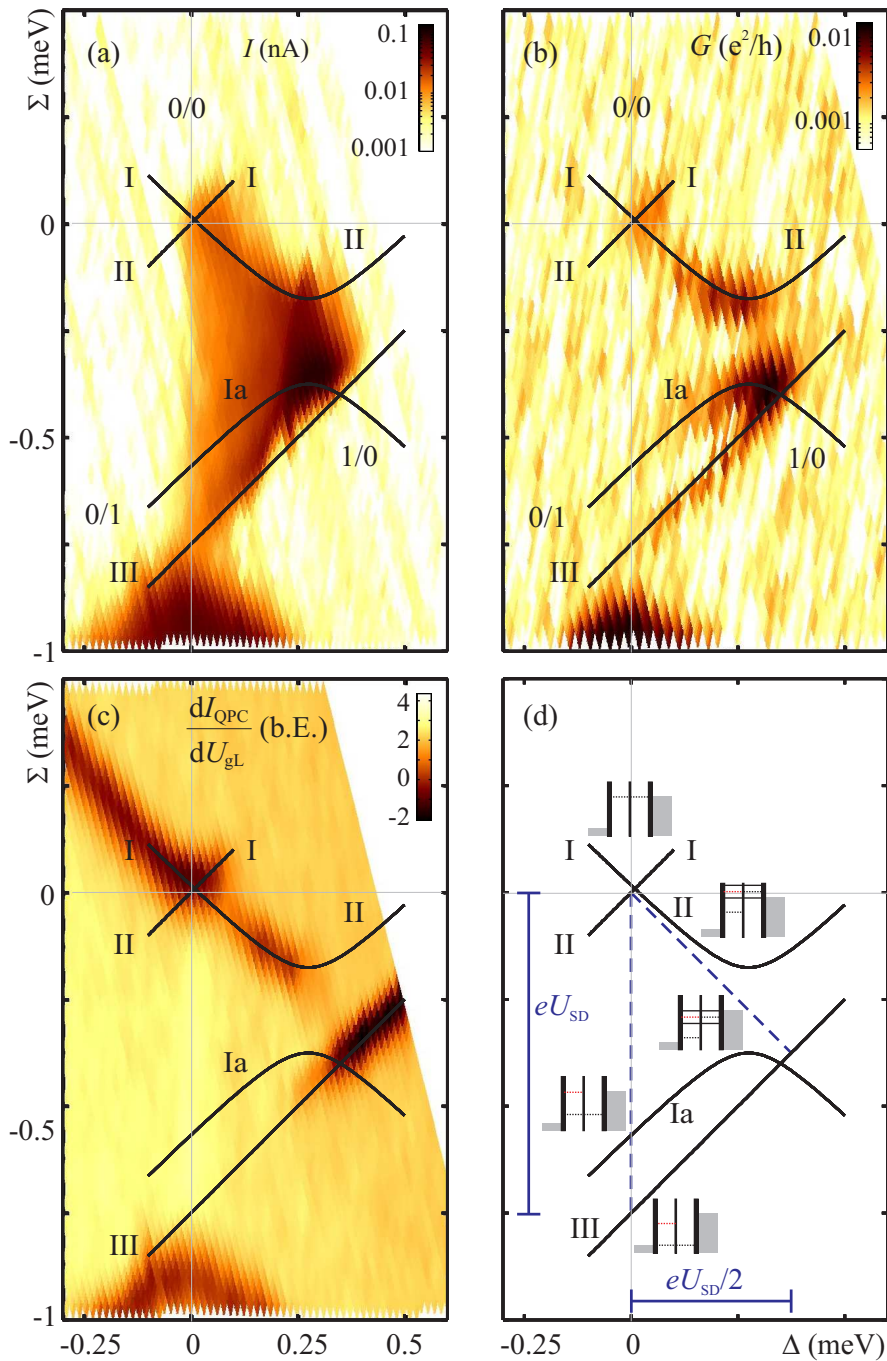
$$\Sigma_{\text{Ia}}(\Delta) = -\sqrt{(\Delta - 0,275 \text{ meV})^2 + t_0^2} - 0,275 \text{ meV}, \quad (8.14)$$

$$\Sigma_{\text{II}}(\Delta) = \sqrt{(\Delta - 0,275 \text{ meV})^2 + t_0^2} - 0,275 \text{ meV} \quad \text{und} \quad (8.15)$$

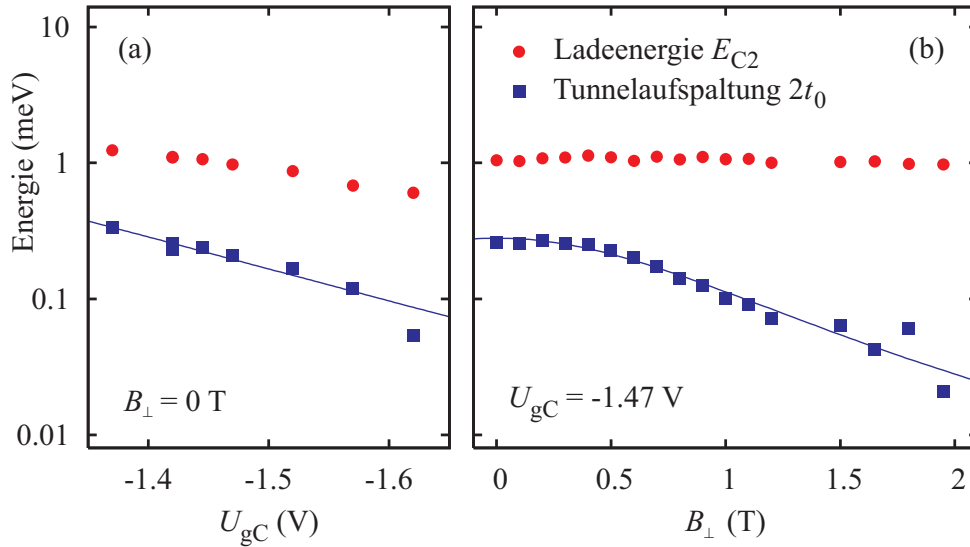
$$\Sigma_{\text{III}}(\Delta) = \Delta - eU_{\text{SD}}. \quad (8.16)$$

Abbildung 8.8 zeigt eine Vielzahl von Übereinstimmungen zwischen den Messungen und diesem Modell. Lage und Krümmung der gemessenen Linien erhöhten Leit-

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.8:** Aufspaltung des Tripelpunkts TP1 bei  $U_{SD} = -0,75$  mV und  $B_{\perp} = 1,5$  T. (a) dc-Strom, (b) differentieller Leitwert (bei 1,4 T) und (c) Steilheit des Quantenpunkt-kontakts, aufgetragen als Funktion von Schwerpunktpotential  $\Sigma(U_{gL}, U_{gR})$  und Asymmetrie  $\Delta(U_{gL}, U_{gR})$  des Doppelquantenpunkts (vergleiche Kapitel 4). (d) Modell für die beobachtete Niveaubestimmung des Grundzustands im rechten Quantenpunkt mit dem angeregten Zustand des linken Quantenpunkts (siehe Text).



**Abbildung 8.9:** Tunnelaufspaltung  $2t_0$  und Ladeenergie für das zweite Elektron  $E_{C2}$  in Abhängigkeit von (a) der Gatterspannung  $U_{gC}$  und (b) dem Magnetfeld  $B_{\perp}$ . Die Werte in (a) wurden aus Messungen des differentiellen Leitwerts bei  $B_{\perp} = 0$  T, die in (b) aus Messungen der Steilheit des Quantenpunktkontakts bei  $U_{gC} = -1,47$  V ermittelt.

werts stimmt mit den entsprechenden Hilfslinien gut überein. Im Bereich delokalisierten Zustände  $\Delta \simeq 0,275$  meV kann in Abbildung 8.8(a) ein erhöhter Tunnelstrom beobachtet werden. In der Ladungsdetektion in Abbildung 8.8(c) wird in diesem Asymmetrie-Bereich sowohl Linie II als auch Linie III sichtbar. Dies kann durch die Annahme erklärt werden, daß aufgrund der Delokalisierung und der Beteiligung eines energetisch hochliegenden Zustands im linken Quantenpunkt Elektronen den Doppelquantenpunkt sowohl schnell besetzen als auch schnell verlassen können.

### 8.3.4 Kontrolle der Tunnelaufspaltung

Zwei Parameter eignen sich besonders gut, um im vorliegenden Doppelquantenpunkt die Tunnelaufspaltung zu beeinflussen. Zum einen definiert die Gatterspannung  $U_{gC}$  die effektive Tunnelbarriere, zum anderen verändert ein Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas  $B_{\perp}$  die räumliche Ausdehnung der Quantenzustände und damit den Überlapp der Wellenfunktionen in linkem und rechtem Quantenpunkt. Abbildung 8.9 zeigt die aus Messungen des differentiellen Leitwerts bzw. der Steilheit erhaltenen Werte für  $2t_0$ . Zur Bestimmung der Werte wurden die Abstände zwischen Linien I, II und III entlang der  $\Sigma$ -Achse ermittelt. Da der Abstand zwischen Linien I und III der bekannten Energieskala  $e U_{SD}$  entspricht, ergibt sich unter

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

---

der Annahme konstanter Umrechnungsfaktoren  $\alpha_{gL}^L$ ,  $\alpha_{gR}^L$ ,  $\alpha_{gR}^R$  und  $\alpha_{gL}^R$  die Tunnelaufspaltung  $2t_0$  aus einem Dreisatz. Ungenauigkeiten der Koordinatentransformation  $(U_{gL}, U_{gR}) \rightarrow (\Sigma, \Delta)$  wirken sich aufgrund der Linearität der Transformation bei dieser Auswertung nicht aus.

Zusätzlich zur Tunnelaufspaltung  $2t_0$  ist in Abbildung 8.9 die Ladeenergie  $E_{C2}$  für das zweite Elektron, die näherungsweise der Coulomb-Abstoßung zwischen zwei Elektronen in unterschiedlichen Quantenpunkten entspricht, aufgetragen. Sie kann in den Stabilitätsdiagrammen des vorherigen Abschnitts aus dem Abstand von Linie I und dem Einsetzen des durch Zweielektronenzustände getragenen Tunnelns am unteren Ende der Graphiken abgelesen werden. Die Bestimmung wurde analog zur Tunnelaufspaltung durchgeführt.  $E_{C2}$  hängt in erster Ordnung vom Abstand der Ladungsschwerpunkte der beiden Quantenpunkte ab und kann daher als Maß für die Entfernung der beiden Quantenpunkte betrachtet werden.

Mit negativerer Gatterspannung  $U_{gC}$  nehmen sowohl  $2t_0$  als auch  $E_{C2}$  annähernd exponentiell ab. Das Verhalten von  $E_{C2}$  deutet darauf hin, daß die beiden Quantenpunkte durch eine Erhöhung der Tunnelbarriere zwischen ihnen auseinandergedrängt werden. Aus dem Vergleich mit der WKB-Näherung (Gleichung 4.15) erhält man damit als Abschätzung eine lineare Abhängigkeit

$$\sqrt{2m^*V(0)}d \propto U_{gC} \quad (8.17)$$

des Tunnelparameters von  $U_{gC}$ .

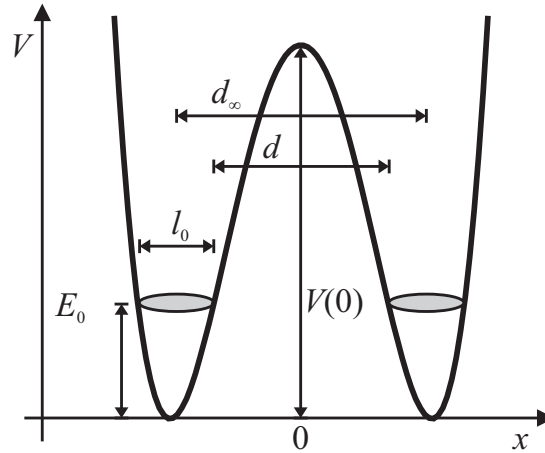
Im senkrechten Magnetfeld (Abbildung 8.9(b)) kann im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Änderung von  $E_{C2}$  festgestellt werden. Dies ist konsistent mit der Annahme, daß sich der Ladungsschwerpunkt der Quantenpunkte abhängig vom Magnetfeld nicht verschiebt. Im Gegensatz zu  $E_{C2}$  geht für  $B_{\perp} > 0,4\text{T}$  die Tunnelaufspaltung mit wachsendem Magnetfeld stark zurück. Dies kann auf die Verringerung der Fock-Darwin-Länge  $l_0$  zurückgeführt werden. Zum Vergleich mit der WKB-Näherung sei angenommen, daß die effektive Breite  $d$  der Tunnelbarriere zwischen den zwei Quantenpunkten bei konstantem Abstand der Ladungsschwerpunkte  $d_{\infty}$  durch

$$d = d_{\infty} - l_0(B_{\perp}) \quad (8.18)$$

gegeben ist. Abbildung 8.10 enthält eine Skizze eines Doppelmuldenpotentials, in der die entsprechenden Längen- und Energieskalen eingezeichnet sind.

Man erhält aus Gleichungen 3.38, 4.15 und 8.18 eine funktionale Abhängigkeit für  $2t_0(B_{\perp})$  der Form

$$2t_0(B_{\perp}) = \exp \left( C_1 + \frac{C_2}{\sqrt[4]{B_{\perp}^2 + C_3^2}} \right), \quad (8.19)$$



**Abbildung 8.10:** Skizze zur Magnetfeldabhängigkeit der Tunnelaufspaltung  $2t_0$  in einem quartischen Potential. In Erweiterung von Abbildung 4.4 bezeichnet die Länge  $d_\infty$  den Abstand der Potentialminima,  $l_0$  wird mit der Fock-Darwin-Länge (Gleichung 3.38) identifiziert.

wobei die Parameter  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  sich aus  $d_\infty$ ,  $V(0)$  und  $\omega_0$  als

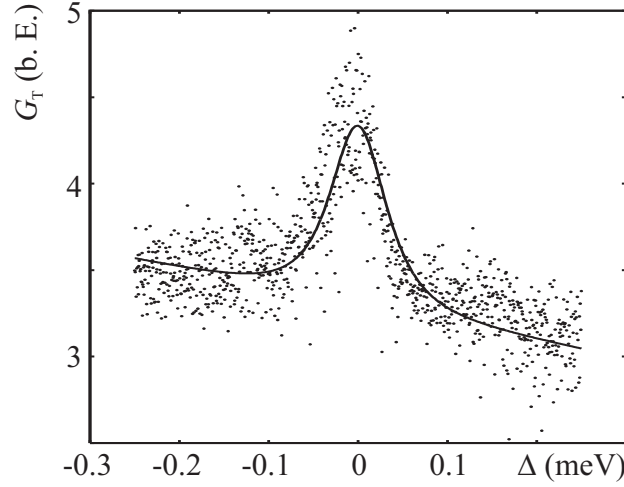
$$C_1 = \log\left(\frac{2}{\pi}E_0\right) \frac{\sqrt{2m^*V(0)}}{2\hbar} \quad (8.20)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{m^*V(0)}{2\hbar e}} \quad (8.21)$$

$$C_3 = \frac{2m^*\omega_0}{e} \quad (8.22)$$

ergeben und aus der Näherung des harmonischen Oszillators  $E_0 = \hbar\omega_0/2$  angenommen wird. Die durchgezogene Linie in Abbildungen 8.9(b) resultiert aus einer Kurvenanpassung dieser Funktion und stimmt qualitativ gut mit den Meßpunkten überein. Als Fitparameter erhält man  $\omega_0 \simeq 1,7 \text{ meV}$ ,  $V(0) \simeq 0,5 \text{ eV}$ , und  $d_\infty \simeq 105 \text{ nm}$ . Da das real vorliegende Potential von der im Modell angenommenen quartischen Form abweicht, sind diese Werte jedoch mit Vorsicht zu betrachten.

Bei kleinen Tunnelaufspaltungen ist die präsentierte Methode zur Bestimmung von  $2t_0$  aufgrund der endlichen Linienbreiten in der Messung sehr ungenau. Abbildung 8.11 demonstriert im Gegensatz hierzu ein von den bisherigen Betrachtungen unabhängiges Verfahren, die Tunnelaufspaltung zu bestimmen, das sich insbesondere für sehr schwache Tunnelkopplung eignet [DiCarlo u. a. 2004]. Hierbei wird ausgenutzt, daß der Leitwert des zur Ladungsdetektion eingesetzten Quantenpunktkontakts annähernd linear von der Ladung in beiden Quantenpunkten abhängt, und daß der Quantenpunktkontakt stärker an den ihm näher liegenden Quantenpunkt ankoppelt.



**Abbildung 8.11:** Ermittlung der Tunnelkopplung aus der Breite des Übergangs zwischen den Ladungskonfigurationen  $N_L/N_R = 0/1 \leftrightarrow 1/0$  in  $\Delta$  [DiCarlo u. a. 2004]: Am Quantenpunktkontakt gemessene Steilheit  $G_T$  als Funktion von  $\Delta$  bei  $B_{\perp} = 1,95$  T. Alle Meßpunkte im Bereich  $-0,75 \text{ meV} \leq \Sigma \leq -0,25 \text{ meV}$  sind zugleich aufgetragen. Die durchgezogene Linie ist eine Kurvenanpassung nach Gleichung 8.24 mit einem zusätzlichen Term linear in  $\Delta$ .

Im thermischen Gleichgewicht ergibt sich als effektiv auf den Quantenpunktkontakt wirkende Ladung des Doppelquantenpunkts

$$Q_{\text{eff.}} \propto \frac{\Delta}{\sqrt{t_0^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{t_0^2 + \Delta^2}}{k_B T}\right) \quad (8.23)$$

aus der Besetzungswahrscheinlichkeit der molekularen Zustände und deren Aufenthaltswahrscheinlichkeiten aus Gleichung 4.14 [DiCarlo u. a. 2004].

In Coulomb-Blockade wirkt eine Modulation der Gatterspannung  $U_{\text{gL}}$  auf den Doppelquantenpunkt wie eine Modulation der Asymmetrie  $\Delta$ , da eine alleinige Änderung des mittleren Potentials  $\Sigma$  die Ladungsverteilung innerhalb des Doppelquantenpunkts nicht beeinflusst. Für die Steilheit kann damit

$$\begin{aligned} G_T &\equiv \frac{dI_{\text{QPC}}}{dU_{\text{gL}}} \propto \frac{dI_{\text{QPC}}}{d\Delta} \propto \frac{dQ_{\text{eff.}}}{d\Delta} + \text{const.} \\ &= \frac{\Delta^2}{k_B T (t_0^2 + \Delta^2)} \text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{t_0^2 + \Delta^2}}{k_B T}\right) + \frac{t_0^2}{(t_0^2 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}}} \tanh^2\left(\frac{\sqrt{t_0^2 + \Delta^2}}{k_B T}\right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (8.24)$$



angenommen werden. Die Konstante in Gleichung 8.24 beschreibt die Verschiebung des Arbeitspunkts des Quantenpunktkontakts durch eine Änderung der Gatterspannung  $U_{gL}$ . Abbildung 8.11 zeigt Meßpunkte aus der Rastermessung der Steilheit  $G_T$  bei  $B_{\perp} = 1,95 \text{ T}$  von Abbildung 8.7(h). Aufgrund des stark verrauschten Signals wurden alle Meßpunkte des Bereichs  $-0,75 \text{ meV} < \Sigma < -0,25 \text{ meV}$  zugleich als Funktion von  $\Delta$  aufgetragen. Die in Abbildung 8.11 als durchgezogene Linie gezeichnete Modellkurve entsprechend Gleichung 8.24 unter Zuhilfenahme eines zusätzlichen Terms linear in  $\Delta$  liefert als Tunnelaufspaltung  $2t_0 \simeq 0,1 \text{ meV}$ . Im Gegensatz zur Bestimmung der Tunnelkopplung aus den Abständen der Resonanzlinien gehen hier jedoch Ungenauigkeiten in der Koordinatentransformation in das Resultat ein. Durch die hier durchgeführte Mittelung über einen größeren  $\Sigma$ -Bereich und das schlechte Signal-Rauschen-Verhältnis verstärkt sich dieser Effekt zudem noch. Die Temperatur hat im vorliegenden Parameterbereich fast keinen Einfluß auf die Modellkurve, so daß auf sie kein Rückschluß gezogen werden kann.

## 8.4 Transportspektrum für $1 \leq N \leq 2$ Elektronen

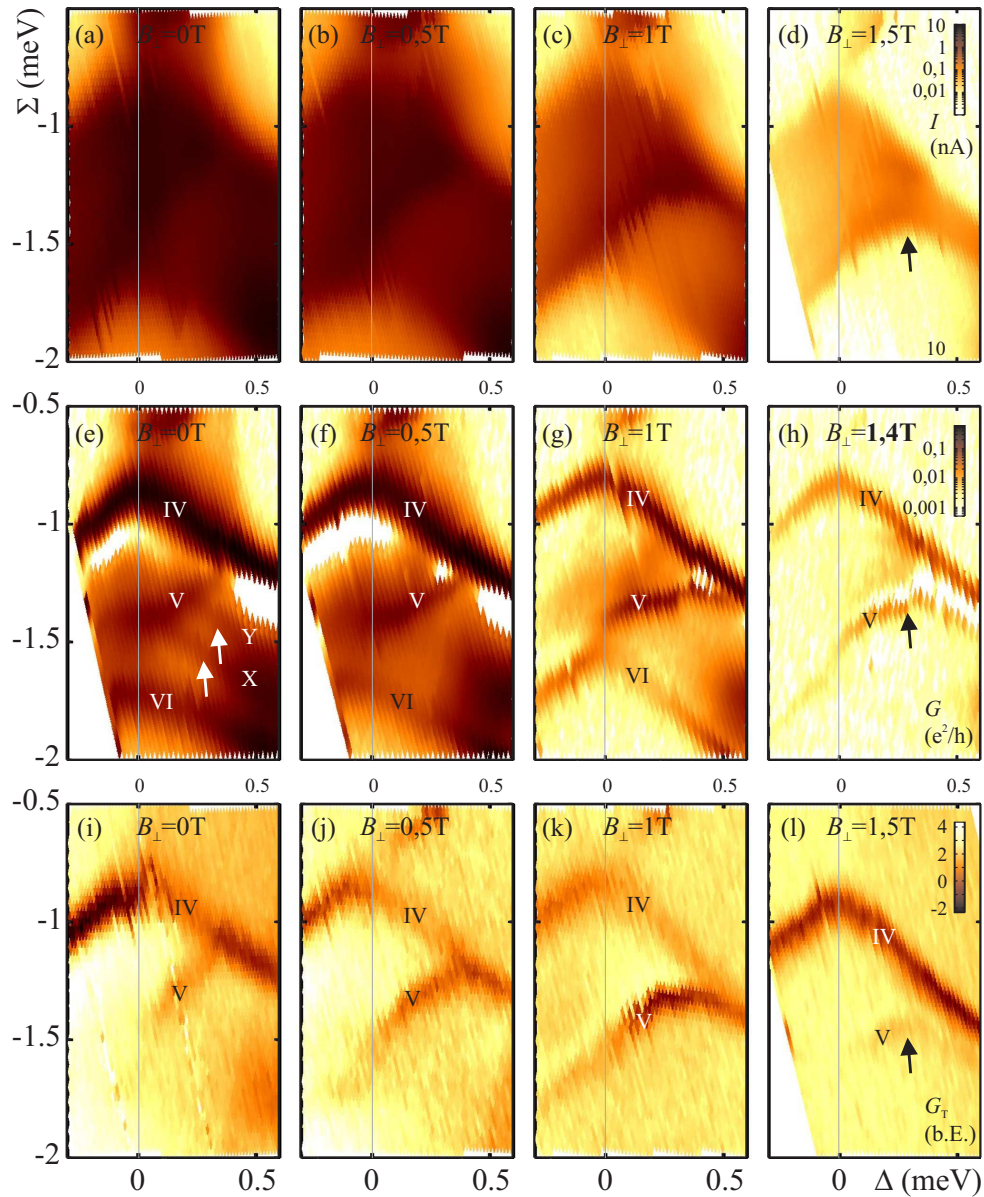
### 8.4.1 Gemeinsamkeiten mit dem Fall $0 \leq N \leq 1$

Abbildung 8.12 zeigt die drei bereits im vorherigen Abschnitt betrachteten Größen Strom, differentieller Leitwert und Steilheit, diesmal im Bereich des zweiten Tripelpunkts TP2 des Stabilitätsdiagramms (vgl. Abbildungen 8.2 und 8.4). Hierbei sind die Umrechnungsfaktoren der Koordinatentransformation  $(U_{gL}, U_{gR}) \rightarrow (\Sigma, \Delta)$  zur besseren Vergleichbarkeit für jedes Magnetfeld wie in Abbildungen 8.5 und 8.7 gewählt. Abbildung 8.12 setzt diese damit mit einem geringen Überlapp am oberen Rand der Graphiken in Richtung negativen Schwerpunktpotentials  $\Sigma$  fort.

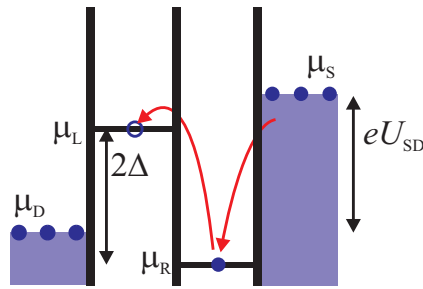
Der Doppelquantenpunkt ist an Tripelpunkt TP2 immer mit mindestens einem Elektron besetzt. Die Ladungskonfiguration fluktuiert bei Einzelelektronentunneln zwischen den Besetzungszahlen  $N_L/N_R = 0/1 \leftrightarrow 1/1 \leftrightarrow 1/0$ . Damit geht auch das Zustandsspektrum eines mit zwei Elektronen besetzten Doppelquantenpunkts in die beobachteten Phänomene mit ein.

Strom und Leitwert durch den Doppelquantenpunkt sind im hier vorliegenden Gatterspannungsbereich bereits wesentlich höher als im Bereich des ersten Tripelpunkts TP1 und gehen auch abseits des Tripelpunkts nicht unter die Nachweisgrenze zurück. Dies kann zum Teil auf eine weiter erhöhte Tunnelkopplung zu den Kontakten zurückgeführt werden, aufgrund derer Transport durch die molekularen Zustände erleichtert ist. Da eine Besetzung des Doppelquantenpunkts durch zwei Elektronen nun elektrostatisch erlaubt ist, werden weiterhin zusätzliche Kotunnelprozesse über Ladungsverteilungen im Doppelquantenpunkt möglich und tragen zum Strom bei. Dies ist in

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.12:** Entwicklung des Stroms, des differentiellen Leitwerts und der Steilheit des Quantenpunktkontakts am zweiten Tripelpunkt TP2 bei  $U_{SD} = -0,75$  mV und  $B_{\perp} = 0, 0,5, 1, 1,5$  T: (a)-(d) Strom in nA (logarithmische Farbskala,  $U_{gC} = -1,47$  V), (e)-(h): Differentieller Leitwert (logarithmische Farbskala,  $U_{gC} = -1,445$  V), (i)-(l): Steilheit  $G_T$  des Quantenpunktkontakts (lineare Farbskala, b.E.,  $U_{gC} = -1,47$  V). Die Parameter der Koordinatentransformation  $(U_{gL}, U_{gR}) \rightarrow (\Sigma, \Delta)$  sind in Tabelle 8.1 wiedergegeben.



**Abbildung 8.13:** Beispiel für einen Kottunnelprozess, der im Fall  $N = 1 \leftrightarrow 2$  zu zusätzlichem Strom durch den Doppelquantenpunkt führt (siehe Text).

Abbildung 8.13 anhand eines Beispiels im Modell schwacher Tunnelkopplung illustriert. Im abgebildeten Prozess tunnelt das im rechten Quantenpunkt gefangene Elektron in den linken Quantenpunkt, und zugleich, d.h. im durch die Heisenberg'sche Unschärferelation gegebenen Zeitrahmen, tunnelt ein zweites Elektron in den rechten Quantenpunkt nach. Der Doppelquantenpunkt ist im Anschluß mit zwei Elektronen geladen, und ein Elektron kann in Richtung *drain*-Kontakt abgegeben werden.

### Linienstruktur des Einelektronen-Spektrums

Ein Vergleich mit den bisher betrachteten Messungen des ersten Tripelpunkts zeigt, daß die in beiden Fällen vorliegenden Abhängigkeiten des Stroms und des differentiellen Leitwerts von  $\Sigma$  und  $\Delta$  sich sehr ähnlich sind. In den Messungen des Stroms werden wiederum drei Kanten, die einen Bereich erhöhten Stroms eingrenzen, sichtbar. Diese sieht man ebenso in den Messungen des differentiellen Leitwerts als diskrete Linien. Hier sind sie mit den Kürzeln IV, V und VI gekennzeichnet. Tripelpunkt TP2 ähnelt einem Spiegelbild von Tripelpunkt TP1, gespiegelt an einer Parallelen zur  $\Delta$ -Achse.

Dies kann formell dadurch beschrieben werden, daß nun die chemischen Potentiale des Doppelquantenpunkts, deren Ausrichtung am chemischen Potential der *source*- oder *drain*-Zuleitung eine Änderung des Stroms bedingt, abhängig von Einelektronen-Energien  $E(1)$  und Zweielektronen-Energien  $E(2)$  in der Form

$$\mu_{\text{DQP}} = E(2) - E(1) \quad (8.25)$$

gegeben sind (siehe Gleichungen 3.5 und 4.2). Potentialabhängigkeit und Anregungsenergien des mit einem Elektron besetzten Doppelquantenpunkts, wie sie im vorhergehenden Abschnitt betrachtet wurden, treten hier wieder auf, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen. Außerdem werden zusätzliche Leitwertmaxima aufgrund des Zweielektronen-Anregungsspektrums erwartet.

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

---

Die mit IV, V und VI gekennzeichneten Linien erklären sich im einzelnen wie folgt. Da für den Grundzustand des mit zwei Elektronen besetzten Doppelquantenpunkts ein Spin-Singlet erwartet wird, soll dessen Energie mit  $E_S$  bezeichnet werden. Entlang Linie IV tritt mit  $\mu_{IV} \equiv E_S - E_+ = \mu_S$  der Grundzustandsübergang mit Gesamtelektronenzahl  $N = 1 \leftrightarrow 2$  in das Transportfenster ein. Die *source-drain*-Spannung ist ausreichend hoch, daß der Doppelquantenpunkt durch Einzelelektronentunneln auch im angeregten Zustand mit Energie  $E_-$  hinterlassen werden kann. Beide Transportkanäle von Tripelpunkt TP1 werden also hier zugleich geöffnet. Linie V beschreibt die Situation  $\mu_V \equiv E_S - E_- = \mu_D$ , ab der dies nicht mehr der Fall ist. Unterhalb dieser Linie verlangt die Energieerhaltung, daß ein Elektron, das den Doppelquantenpunkt durchtunnelt, diesen auch wieder im Einelektronen-Grundzustand hinterläßt. An Linie VI schließlich gilt  $\mu_{VI} \equiv E_S - E_+ = \mu_D$ , d.h. der Grundzustandsübergang liegt am chemischen Potential der *drain*-Zuleitung an. Hier beginnt der folgende Coulomb-Blockade-Bereich. Unterhalb von Linie VI ist der Doppelquantenpunkt kontinuierlich mit zwei Elektronen geladen.

In Analogie zu Abschnitt 8.4 ermöglicht die Beobachtung von Linien V und VI wiederum eine Bestimmung der Tunnelaufspaltung des mit einem Elektron geladenen Doppelquantenpunkts. Für  $B_\perp = 0$  erhält man  $2t_0 \simeq 0,26 \text{ meV}$  im Vergleich zu  $0,185 \text{ meV}$  am ersten Tripelpunkt. Diese Abweichung beruht auf der Abhängigkeit der Tunnelaufspaltung von den Gatterspannungen. Wie im Falle des ersten Tripelpunkts bleibt  $2t_0$  für  $B_\perp < 0,4 \text{ T}$  konstant und nimmt bei höheren Werten ab.

### Zweite Niveau-Abstoßung bei endlichem Magnetfeld

Bei hohen Magnetfeldern  $B_\perp > 1 \text{ T}$  wird eine Verzerrung von Linie V im differenziellen Leitwert beobachtet. Wie in Abschnitt 8.3.3 kann dies durch eine Hybridisierung mit einem höher angeregten Einelektronen-Zustand erklärt werden (siehe z.B. Abbildung 8.12(h)). Konsistent hierzu fließt im Bereich der delokalisierten Zustände mit  $\Delta \simeq 0,3 \text{ meV}$  ein erhöhter Strom durch den Doppelquantenpunkt (Abbildung 8.12(d)).

### Ladungsdetektion

Abbildung 8.12(i)-(l) zeigt die Ladungsdetektion im Bereich des zweiten Tripelpunkts TP2. Über einen weiten Magnetfeldbereich sind sowohl Linie IV als auch Linie V bei identischer Asymmetrie als Änderung der zeitlich gemittelten Elektronenzahl  $N$  sichtbar. Damit gilt im Bereich zwischen Linien IV und V, in dem beide Einelektronenzustände zum Strom durch den Doppelquantenpunkt beitragen,  $1 < N < 2$ . Die Tatsache, daß Linie VI nicht als lokales Minimum der Steilheit zu sehen ist, weist wiederum auf eine höhere Tunnelbarriere zwischen Doppelquantenpunkt und *drain*-

Kontakt hin. Die Niveau-Abstoßung bei  $\Delta \simeq 0,3 \text{ meV}$  und  $B_{\perp} > 1 \text{ T}$  ist auch in der Ladungsdetektion deutlich erkennbar.

### 8.4.2 Unterschiede im Transportspektrum der Tripelpunkte

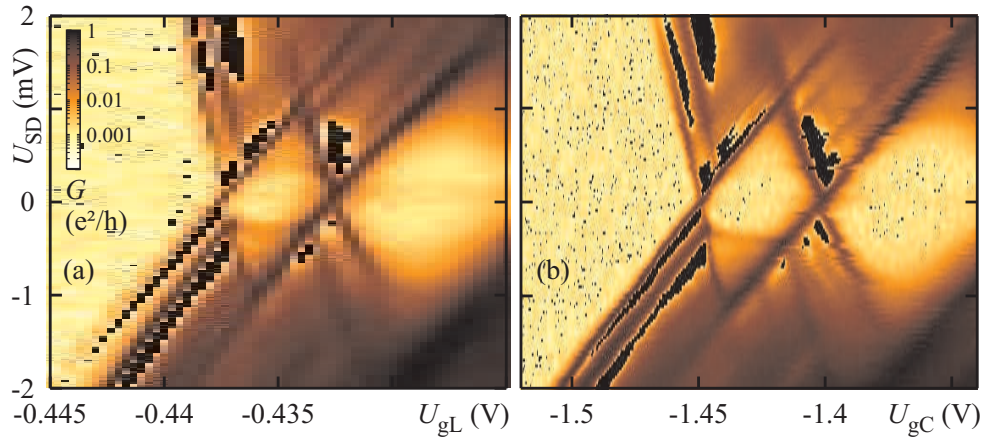
Eine Abweichung vom Transportspektrum des Tripelpunkts TP1 ist in Abbildung 8.12(e) in der Messung des differentiellen Leitwerts bei  $B_{\perp} = 0$  zu erkennen. Zwei mit X und Y markierte Linien erhöhten Leitwerts parallel zu Linien IV und VI sind sichtbar. Hier nicht gezeigte Messungen legen nahe, daß ihr Abstand zu Linie VI unabhängig von der *source-drain*-Spannung ist. Deshalb können sie eindeutig auf Ein-elektronenanregungen zurückgeführt werden (vgl. Abschnitt 3.2), die bei Übereinstimmung des chemischen Potentials des Doppelquantenpunkts mit dem chemischen Potential im *drain*-Kontakt auftreten. Aus dem Abstand zu Linie VI können die Anregungsenergien als  $E_X - E_+ \simeq 0,26 \text{ meV}$  und  $E_Y - E_+ \simeq 0,44 \text{ meV}$  bestimmt werden. Bereits bei  $B_{\perp} = 0,1 \text{ T}$ , dem niedrigsten endlichen Magnetfeld, bei dem eine Messung ähnlich Abbildungen 8.12(e)-(h) durchgeführt wurde, sind Linien X und Y nicht mehr zu erkennen, so daß die Magnetfeldabhängigkeit der Anregungsenergien nicht bestimmt werden kann.

Für  $\Delta = 0$  kann in Abbildung 8.12(e) beobachtet werden, daß Linie X mit Linie V verschmilzt. Damit hat der angeregte Einelektronen-Zustand, der Linie X verursacht, in etwa die gleiche Anregungsenergie  $2t_0$  wie der antisymmetrische angeregte Doppelquantenpunkt-Zustand eines Elektrons. Der abweichende Verlauf der Linie läßt jedoch keine direkte Identifikation hiermit zu. Hier liegt möglicherweise ein weiterer angeregter Zustand vor, der die gleiche Symmetrie in Bezug auf die Asymmetrie  $\Delta$  wie der Doppelquantenpunkt-Grundzustand besitzt. Dies bedeutet aber auch, daß von TP1 zu TP2 die Einzelquantenpunkt-Anregungsenergien wesentlich zurückgegangen sind.

Theoretische Betrachtungen zeigen, daß der Grundzustand eines Zweielektronensystems bei verschwindendem Magnetfeld ein Spin-Singlet darstellt (siehe Abschnitt 4.2.2). Als niedrigster angeregter Zustand des Zweielektronenspektrums wird ein Spin-Triplet mit Anregungsenergie  $J = E_T - E_S$  erwartet. Die zu erwartende Größenordnung von  $J$  kann nach Gleichung 4.27 aus der Tunnelaufspaltung  $2t_0 \lesssim 0,4 \text{ meV} \sim t_H$  und der Ladeenergie des dritten Elektrons  $E_{C3} \simeq 1,9 \text{ meV} \gtrsim U_H$  grob als

$$J \lesssim \frac{4t_0^2}{E_{C3}} \lesssim 0,085 \text{ meV} \quad (8.26)$$

abgeschätzt werden. Dies liegt innerhalb der hier beobachteten Linienbreite. Eine Singlet-Triplet-Aufspaltung könnte sich nach dieser Abschätzung also nur als Verbreiterung der beobachteten Linien äußern. Die Frage bleibt allerdings offen, ob die in die Gleichungen von Abschnitt 4.2.2 eingehenden Näherungen im hier vorliegenden



**Abbildung 8.14:** Vergleich zweier Methoden zur symmetrischen Potentialvariation: (a) Abhängigkeit des differentiellen Leitwertes  $G$  von *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und dem näherungsweise symmetrischen Potential in beiden Hälften des Doppelquantenpunkts bei gleichzeitiger entsprechender Variation der Spannungen an den Seitengattern  $U_{gR}$  und  $U_{gL}$ . Es gilt  $\Delta U_{gR} \simeq 1,49\Delta U_{gL}$ . (b) Differentieller Leitwert als Funktion von  $U_{SD}$  und  $U_{gC}$ . Die Gatterspannungen der seitlichen Gatter sind  $U_{gL} = -0,4371$  V und  $U_{gR} = -0,48305$  V (Parametersatz J1-1 aus Tabelle 8.2). Logarithmische Farbskala, isolierte schwarze Flächen bezeichnen negativen differentiellen Leitwert.

Fall starker Tunnelkopplung zwischen den beiden Quantenpunkten noch gelten. Auch höher angeregte Zustände des Zweielektronensystems können in der Messung jedoch nicht direkt beobachtet werden.

## 8.5 Annähernd symmetrische Potentialvariation durch $U_{gC}$

### 8.5.1 Vergleich der Meßmethoden und Fehlerabschätzung

Für die Betrachtung des Spektrums eines Doppelquantenpunkts bei starker Tunnelkopplung ist es in vielen Fällen ausreichend, Messungen bei symmetrischer Potentialvariation, d.h. auf der  $\Sigma$ -Achse der letzten Abschnitte, durchzuführen. Zwei Möglichkeiten hierzu ergeben sich. Zum einen können die beiden Seitengatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  derart schrittweise angesteuert werden, daß das Potential immer symmetrisch bleibt und als Nebeneffekt lediglich die Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen variiert werden. Eine derartige Messung ist in Abbildung 8.14(a) dargestellt. Die entsprechende Ansteuerung der Spannungsquellen erwies sich jedoch aufgrund Beschränkungen

Parametersatz	symm. bei	$U_{gX}(V)$	$U_{gL}(V)$	$U_{gR}(V)$	Abbildungen
J1-1	TP1	-0,566	-0,4371	-0,48305	8.14(b), 8.15, 8.19(b)
J1-2	TP1	-0,566	-0,4383	-0,484	8.16, 8.18
J2	TP2	-0,566	-0,4412	-0,4812	8.21

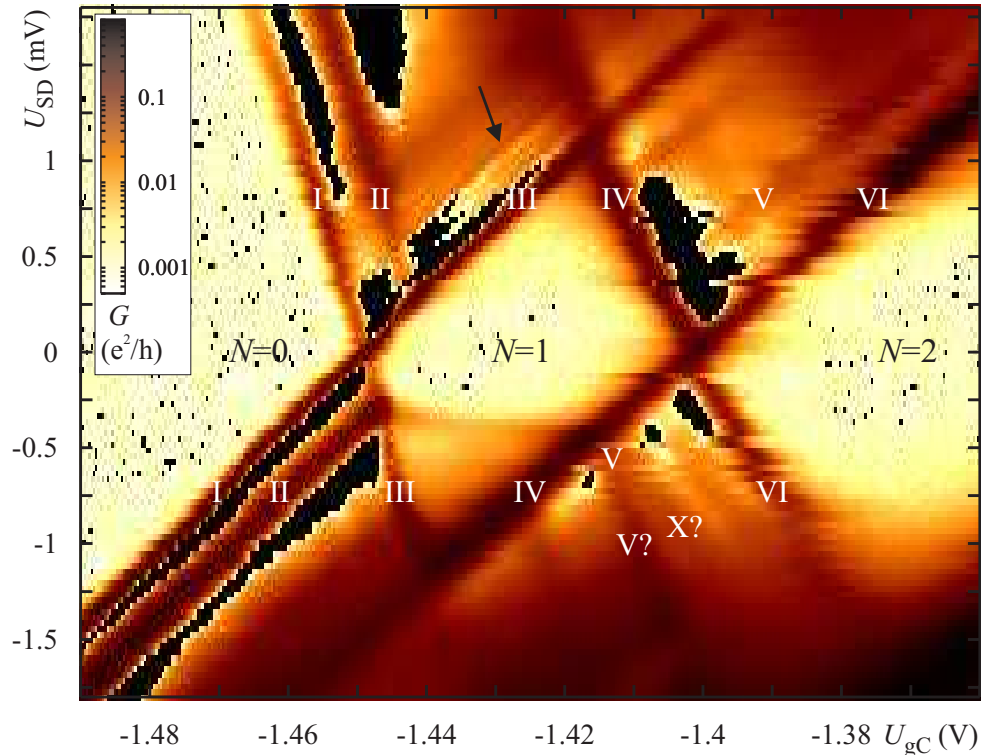
**Tabelle 8.2:** Verwendete Gatterspannungen bei den Doppelquantenpunkt-Messungen mit symmetrischer Potentialvariation durch  $U_{gC}$ .

des verwendeten Steuerprogramms als schwierig und zeitaufwendig.

Als Alternative koppelt das zentrale Gatter  $gC$ , durch welches die Aufspaltung des Doppelquantenpunkts hervorgerufen wird, annähernd symmetrisch an die beiden Quantenpunkte. Als Konversionsfaktoren wurden beispielhaft für  $U_{gL} = -0,441 V$ ,  $-0,5 V \leq U_{gR} \leq -0,46 V$ , und  $-1,47 V \leq U_{gC} \leq -1,35 V$  die Werte  $\alpha_{gC}^L \simeq 0,0245$  und  $\alpha_{gC}^R \simeq 0,0231$  bestimmt. Damit liegt bei guter Justierung des Startpunkts die Abweichung der Potentialänderung in beiden Quantenpunkten unter 10%. Nimmt man eine graduelle Veränderung der Größe der Tunnelaufspaltung über den  $U_{gC}$ -Meßbereich in Kauf, so kann dieses Gatter damit ebenfalls zur Potentialvariation benutzt werden. Abbildung 8.14(b) gibt eine entsprechende Messung des differentiellen Leitwerts  $G$  in Abhängigkeit von  $U_{gC}$  und  $U_{SD}$  bei festen Gatterspannungen  $U_{gL}$ ,  $U_{gR}$  und  $U_{gX}$  wieder. Hier wurden die Seitengatter derart einjustiert, daß der erste Tripelpunkt TP1 mit symmetrischem Potential im Doppelquantenpunkt für  $U_{SD} \simeq 0$  bei  $U_{gC} = -1,4456 V$  liegt. Die an den seitlichen Gattern angelegten Spannungen sind in Tabelle 8.2 wiedergegeben. Abgesehen von Detailabweichungen wird die Struktur des Transportspektrums im wesentlichen reproduziert. Ein Vergleich mit der Kurvenanpassung aus Abbildung 8.9(a) läßt für  $-1,475 \leq U_{gC} \leq -1,375$  Tunnelaufspaltungen von  $0,19 \text{ meV} \leq 2t_0 \leq 0,33 \text{ meV}$  erwarten.

Im folgenden soll das Ein- und Zweielektronenspektrum anhand von Messungen wie der in Abbildung 8.14(b) abgebildeten und Schnitten aus ihnen bei variiertem Magnetfeld diskutiert werden. Die Gatterspannungen der Seitengatter sind dabei derart gewählt, daß bei  $U_{SD} \simeq 0$  Tripelpunkt TP1 (bei Parametersätzen J1-1 und J1-2 in Tabelle 8.2) bzw. Tripelpunkt TP2 (bei Parametersatz J2) jeweils bei Variation von  $U_{gC}$  durchschnitten wird.

Da der Effekt der Gatterspannungen auf den Doppelquantenpunkt sich in der Messung teilweise erst nach  $\sim 30$  min stabilisierte, ist insgesamt trotz sorgfältiger Kalibrierung eine Abweichung vom symmetrischen Fall nicht auszuschließen. Bei der Ermittlung der Gatterspannungswerte zu Parametersatz J2 erwies es sich weiterhin als schwierig, die genaue Position des Tripelpunkts TP2 zu ermitteln, da das dort vorliegende Leitwertmaximum bereits stark zu einer Linie verbreitert ist (siehe z.B. Abbildung 8.4). Die Justierung der Gatterspannungen fand, um ein diskretes Maximum des



**Abbildung 8.15:** Nichtlineares Transportspektrum des symmetrischen Doppelquantenpunkts: Differentieller Leitwert  $G$  in logarithmischer Farbskala als Funktion von  $U_{SD}$  und  $U_{gC}$  (Vergrößerung von Abbildung 8.14(b) mit angepaßter Farbskala). Isolierte schwarze Flächen bezeichnen negativen differentiellen Leitwert. Die Gatterspannungen sind entsprechend Parametersatz J1-1 aus Tabelle 8.2 gewählt.

Leitwerts vorliegen zu haben, bei  $U_{SD} \simeq 0$  statt. Kapazitive Ankopplung der Quantenpunkte an die *source*- und *drain*-Zuleitungen führt für endliches  $U_{SD}$  zu einer zusätzlichen Asymmetrie. Die Unsicherheit in  $\Delta$  ist damit der hauptsächliche Nachteil der verwendeten Meßmethode.

## 8.5.2 Einelektronen-Spektrum und Tunnelkopplung

### Abhängigkeit von der source-drain-Spannung

Abbildung 8.15 zeigt vergrößert eine Messung des differentiellen Leitwerts als Funktion von Gatterspannung  $U_{gC}$  und *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$ . Durch Vergleich mit den Messungen aus Abschnitten 8.3 und 8.4 können die Linien I, II, III, IV, V und VI erhöhten differentiellen Leitwerts auch hier identifiziert werden. Damit ent-



spricht wiederum der Abstand in  $U_{gC}$  zwischen Linien I und II der Energieaufspaltung  $E_- - E_+ = 2\sqrt{\Delta^2 + t_0^2}$ , der Abstand zwischen Linien I und III der Größe  $eU_{SD}$  usw. Solange der genaue Wert der Asymmetrie  $\Delta$  nicht bekannt ist, gibt der Abstand zwischen Linien I und II jedoch keine Auskunft über die Tunnelaufspaltung  $2t_0$ .

Im Bereich des Einzelelektronentunnelns durch Einelektronen-Zustände bei positiver *source-drain*-Spannung werden scharfe Parallelen zu Linie III, in Abbildung 8.15 mit einem schwarzen Pfeil markiert, sichtbar. Linien erhöhten Leitwerts mit dieser Steigung werden im Modell des Einzel- oder Doppelquantenpunkts aus Kapitel 3 hier nicht erwartet. Trotzdem sind derartige Linien auch bereits von anderer Seite [Kouwenhoven u. a. 1997] beobachtet worden. Sie können dadurch erklärt werden, daß ein diskretes Niveau des Doppelquantenpunkts als Sensor die Zustandsdichte der *drain*-Zuleitung abtastet [Schmidt u. a. 1997, 1996]. Fluktuationen der Zustandsdichte führen zu Stufen im Strom und damit Linien endlichen differentiellen Leitwerts.

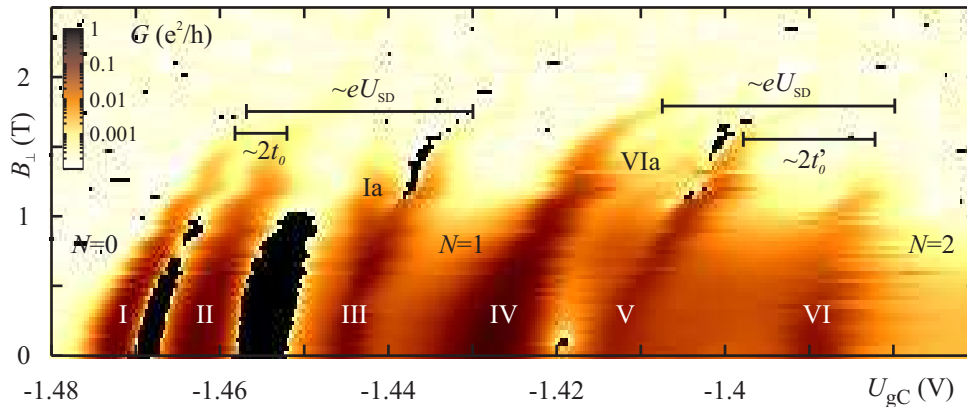
Eine weitere auffallende Beobachtung in der Messung von Abbildung 8.15 ist, daß die Linie V erhöhten differentiellen Leitwerts, die am Tripelpunkt TP2 mit  $N = 1 \leftrightarrow 2$  dem angeregten Einelektronen-Zustand entspricht, für negative *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  in zwei nicht zueinander parallele Linien aufspaltet. Möglicherweise handelt es sich hierbei, wie in der Abbildung durch die Beschriftung angedeutet, um die Aufspaltung zwischen Linien V und X, wie sie in Abbildung 8.12(e) für zunehmende Asymmetrie  $\Delta$  sichtbar wird. Ist diese Interpretation korrekt, so kann in der Krümmung der in Abbildung 8.15 mit V? bezeichneten Linie weg von Linie VI mit wachsender *source-drain*-Spannung  $|U_{SD}|$  direkt die Abhängigkeit der Asymmetrie  $\Delta(U_{SD}, U_{gC})$  von den angelegten Spannungen beobachtet werden.

### Abhängigkeit vom Magnetfeld

Da mit  $U_{gC}$  nur noch ein Parameter zur Variation des Potentials im Doppelquantenpunkt benötigt wird, ist es auf diesem Wege wesentlich leichter, die Magnetfeldabhängigkeit der Linien erhöhten Leitwerts zu untersuchen. Wie in Abschnitt 8.5.1 diskutiert können hierbei allerdings z.B. aufgrund der leicht unterschiedlichen Ankopplung des Gatters  $gC$  an beide Quantenpunkte oder aufgrund der kapazitiven Einwirkung der *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  Abweichungen vom symmetrischen Fall auftreten. Abbildung 8.16 zeigt beispielhaft eine Messung des differentiellen Leitwerts als Funktion von  $B_{\perp}$  und  $U_{gC}$ . Dabei wurde nach dem Kriterium  $2t_0 < eU_{SD} \lesssim EC_2$  als *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = -0,75$  mV gewählt. Die Seitengatter wurden derart justiert, daß bei  $U_{gC} = -1,455$  V der Doppelquantenpunkt sich im Leitwertmaximum bei TP1 befand.

Die Maxima des differentiellen Leitwerts in Abbildung 8.16 können mit den bisher beobachteten Linien endlichen differentiellen Leitwerts identifiziert werden und sind

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

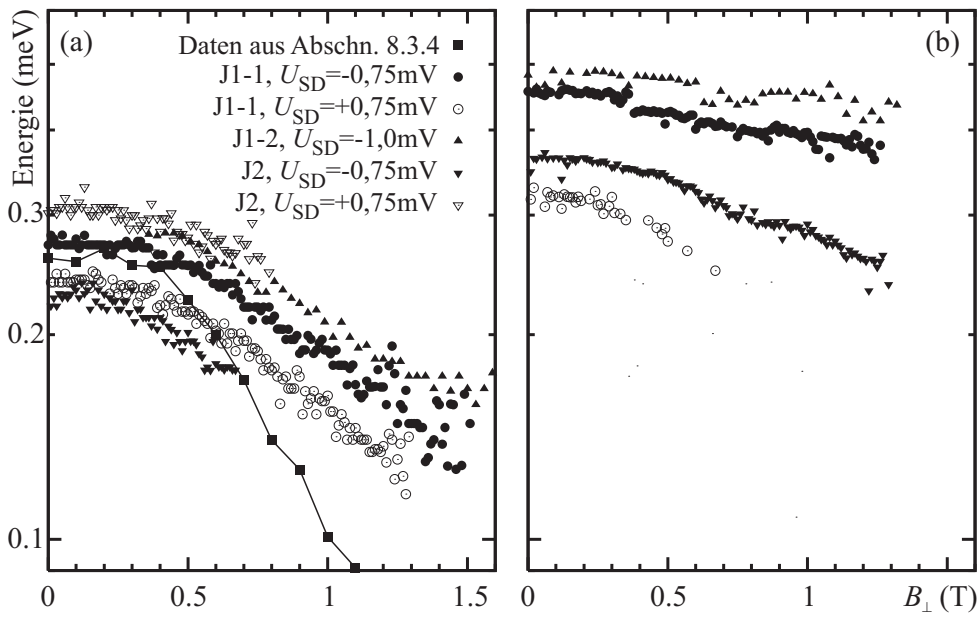


**Abbildung 8.16:** Messung des differentiellen Leitwerts  $G$  als Funktion von  $U_{gC}$  und  $B_{\perp}$  für konstante *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = -0,75$  mV (logarithmische Farbskala). Die an den Seitengattern angelegten Spannungen sind in Tabelle 8.2, Parametersatz J1-1, wiedergegeben.

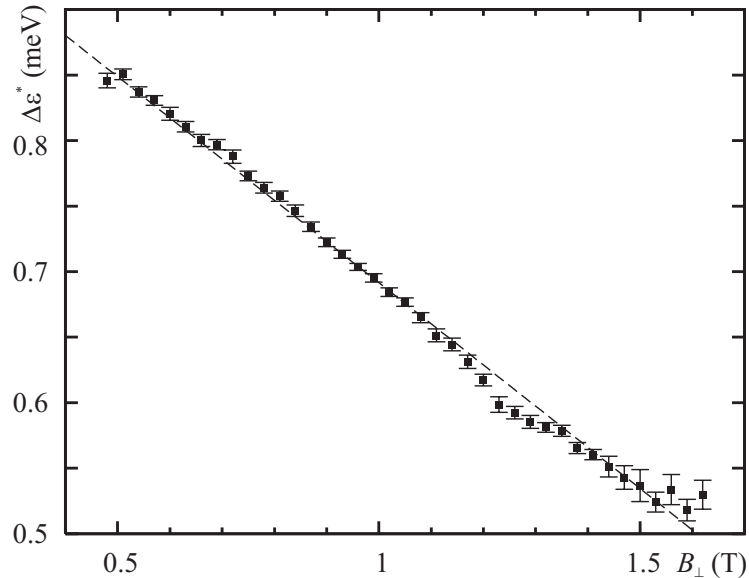
entsprechend mit I, II, III, IV, V und VI beschriftet. Nimmt man als Näherung eine lineare Abhängigkeit des symmetrischen Potentials  $\Sigma$  von  $U_{gC}$  an, so erhält man durch Vergleich der Abstände zwischen Linien I und III bzw. I und II wiederum Abschätzungen für die Tunnelaufspaltung. Diese sind für verschiedene Justierungen der Seitengatter und *source-drain*-Spannungen in Abbildung 8.17 in Abhängigkeit von  $B_{\perp}$  aufgetragen. Die Lage der Linien wurde dabei durch rechnerunterstützte Suche der Maxima des Leitwerts für jedes Magnetfeld ermittelt. Zusätzlich sind in Abbildung 8.17(a) die aus der Auswertung von Abbildung 8.9(b), Abschnitt 8.3.4 resultierenden Werte als mit einer durchgezogenen Linie verbundene Quadrate dargestellt.

Die Abhängigkeit der Anregungsenergie des antisymmetrischen angeregten Doppelquantenpunktzustands vom Magnetfeld bei Tripelpunkt TP1 in Abbildung 8.17(a) ist qualitativ ähnlich wie in Abschnitt 8.3.4. Quantitativ ist der Rückgang der Anregungsenergie mit wachsendem  $B_{\perp}$  jedoch wesentlich schwächer, wie am Vergleich mit den Meßwerten aus Abbildung 8.9(b) sofort deutlich wird. Dies läßt sich erklären, wenn man die Abhängigkeit der Tunnelaufspaltung von Gatterspannung  $U_{gC}$  sowie eine mit  $U_{gC}$  zunehmende Asymmetrie  $\Delta$  berücksichtigt. Da diese Abhängigkeiten in der Bestimmungsmethode aus Abschnitt 8.3.4, Abbildung 8.9 kompensiert bzw. nicht vorhanden sind, kann angenommen werden, daß die tatsächliche Abhängigkeit der Tunnelaufspaltung  $2t_0$  von  $B_{\perp}$  durch die Daten aus Abbildung 8.9(b) gegeben ist.

Am zweiten Tripelpunkt ist die in Energie umgerechnete Aufspaltung zwischen Linien V und VI wesentlich größer, wie in Abbildung 8.17(b) zu sehen ist. Bei einigen Parametersätzen ist eine zuverlässige Bestimmung der Linienpositionen aufgrund deren starker Verbreiterung nicht möglich, so daß weniger Daten zur Verfügung stehen. Der beobachtete Abstand zwischen den Linien hängt nur vergleichsweise schwach



**Abbildung 8.17:** Anregungsenergie des antisymmetrischen angeregten Einelektronenzustands im Magnetfeld, abgeleitet aus Messungen des differentiellen Leitwerts in Abhängigkeit von  $U_{gC}$  und  $B_{\perp}$ . (a) Tripelpunkt TP1,  $N = 0 \leftrightarrow 1$  Elektronen, (b) Tripelpunkt TP2,  $N = 1 \leftrightarrow 2$  Elektronen. In (a) sind zusätzlich zum Vergleich die Werte aus Abbildung 8.9(b) als mit einer durchgezogenen Linie verbundene Quadrate eingetragen.



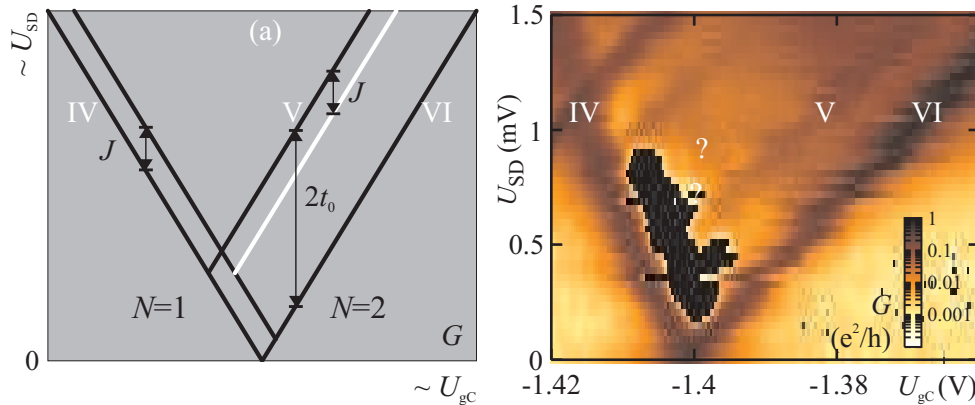
**Abbildung 8.18:** Magnetfeldabhängigkeit der Anregungsenergie des ersten höher angeregten Zustands des Doppelquantenpunkts bei  $0 \leq N \leq 1$ , ermittelt aus der Lage der Leitwertmaxima von Linien I, Ia und III in  $U_{gC}$  (vgl. Abbildung 8.16). Die verwendeten Gatterspannungen entsprechen Parametersatz J1-2 in Tabelle 8.2.

vom Magnetfeld ab. Dies läßt vermuten, daß die Asymmetrie bereits die beobachtete Aufspaltung dominiert.

Ein weiteres interessantes Detail, das in Abbildung 8.16 beobachtet werden kann, ist das Eintreten des ersten höher angeregten orbitale Zustands in das Transportfenster als Linie Ia bei  $B_{\perp} \simeq 0,9\text{T}$ . Es handelt sich hierbei mit hoher Wahrscheinlichkeit um denjenigen Zustand, der in Abschnitt 8.3.3, Abbildung 8.8 zu einer zweiten Niveau-Abstoßung bei endlicher Asymmetrie führt. Messungen bei höherer *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = -1\text{mV}$  ermöglichen die Bestimmung der Magnetfeldabhängigkeit seiner Anregungsenergie. Sie ist in Abbildung 8.18 wiedergegeben. Die Anregungsenergie  $\Delta\epsilon^*$  nimmt für  $0,5\text{T} \leq B_{\perp} \leq 1,5\text{T}$  nahezu linear in  $B_{\perp}$  mit  $\Delta\epsilon^* = 1,03\text{meV} - 0,34 \frac{\text{meV}}{\text{T}} B_{\perp}$  ab. Dies läßt eine grobe Extrapolation auf  $\Delta\epsilon^*(B_{\perp} = 0) \simeq 1\text{meV}$  zu, in Übereinstimmung mit den Spektren von Abbildung 8.14.

### 8.5.3 Zweielektronen-Spektrum

Wie bereits in Abschnitt 4.2.2 behandelt, wird für den Fall von einem bis zwei Elektronen im Doppelquantenpunkt ein komplexeres Zustandsspektrum als für den Fall von maximal einem Elektron im Doppelquantenpunkt erwartet. Modellrechnungen in



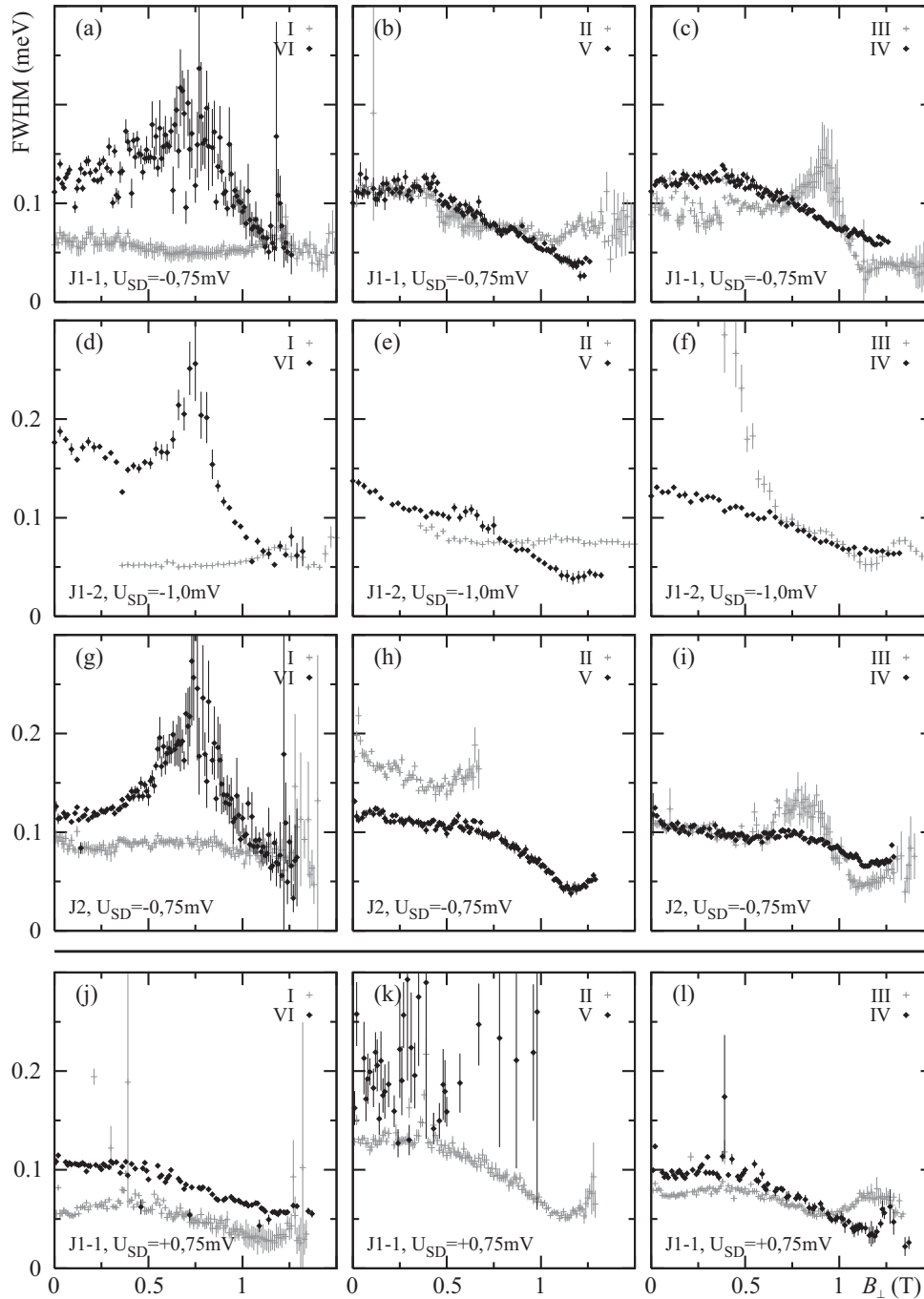
**Abbildung 8.19:** (a) Vorhersage aus [Golovach und Loss 2004] für das Transportspektrum eines symmetrischen Doppelquantenpunkts im Bereich  $1 \leq N \leq 2$ . (b) Vergleichbarer Ausschnitt von Abbildung 8.14(b). Differentieller Leitwert des Doppelquantenpunkts als Funktion von  $U_{gC}$  und  $U_{SD}$  (logarithmische Farbskala).

[Golovach und Loss 2004] sagen eine Aufspaltung der Resonanzlinien IV und V aufgrund der Austauschwechselwirkung  $J$  der Elektronenspins voraus. Diese Vorhersage ist in Abbildung 8.19(a) schematisch dargestellt, zusammen mit einer Messung des entsprechenden Teils des Transportspektrums in Abbildung 8.19(b). Die Größenordnung von  $J$  kann über Gleichung 4.27, die den Grenzfall schwacher Kopplung zwischen den Quantenpunkten beschreibt, als  $J \lesssim 0,085 \text{ meV}$  abgeschätzt werden. Nach dieser Abschätzung liegt die Aufspaltung innerhalb der beobachteten Linienbreiten der Linien IV und V. Dennoch könnte eine Messung der Linienbreiten in Abhängigkeit von  $B_{\perp}$  Hinweise auf die Austauschwechselwirkung  $J$  liefern.

Abbildung 8.20 zeigt eine entsprechende Auswertung. Ausgehend von Messungen des differentiellen Leitwerts in Abhängigkeit von  $B_{\perp}$  und  $U_{gC}$  wie der in Abbildung 8.16 dargestellten wurde die Position der Maxima der Linien I bis VI in  $U_{gC}$  bestimmt. Jeweils an die Datenpunkte innerhalb einer Umgebung der Maxima von  $\Delta U_{gC} = \pm 2 \text{ mV}$  wurde programmgesteuert eine  $\cosh^{-2}$ -Funktion angepaßt und aus deren Parametern die volle Halbwertsbreite errechnet. Der Abstand zwischen den Maxima der Linien I und III bzw. der Linien IV und VI, der jeweils der Energie  $e U_{SD}$  entspricht, wurde dabei zur Umrechnung in Energieeinheiten herangezogen.

In Abbildung 8.20 sind innerhalb jeder Zeile von Graphiken die Halbwertsbreiten aller sechs Linien für einen festen Parametersatz (Spannungen der Seitengatter  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  sowie *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$ ) in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B_{\perp}$  aufgetragen. Die in einer Spalte angeordneten Graphiken enthalten Linienbreiten identischer Linien für unterschiedliche Parametersätze. In jeder Spalte sind jeweils die Linienbreiten der zwei sich „spiegelbildlich“ zueinander verhaltenden Resonanzlinien

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.20:** Volle Halbwertsbreite der Leitwert-Linien I – VI im Magnetfeld (zu den Details der Bestimmung siehe Text). (a)-(c): Parametersatz J1-1 (siehe Tabelle 8.2),  $U_{SD} = -0,75$  mV. (d)-(f): Parametersatz J1-2,  $U_{SD} = -1$  mV. (g)-(i): Parametersatz J2,  $U_{SD} = -0,75$  mV. (j)-(k): Parametersatz J2,  $U_{SD} = +0,75$  mV.

aus den Tripelpunkten TP1 und TP2 zusammen aufgetragen.

Linien I bis III werden allein durch Einelektronen-Prozesse beschrieben. Im Modell von [Golovach und Loss 2004] werden Linien IV und V durch die Austauschkopplung aufgespalten, Linie VI nicht. Unter Annahme einer charakteristischen Abhängigkeit der Austauschkopplung vom Magnetfeld erwartet man damit in einem einfachstmöglichen Modell, daß sich die Breiten von Linien I und VI ähnlich im Magnetfeld verhalten, während diejenigen von Linien II und V sowie von Linien III und IV jeweils aufgrund der Aufspaltung einer der beiden Linien voneinander abweichen. Im Gegensatz zu dieser Erwartung weichen die Verläufe der Linienbreiten in sämtlichen Graphen in Abbildung 8.20 voneinander ab.

Die Auswertungen von Abbildung 8.20(a)-(i) entsprechen negativer Gatterspannung, diejenigen von Abbildung 8.20(j)-(l) positiver Gatterspannung. Ein Vergleich zeigt, daß sich die Messungen bei Parametersätzen mit negativer *source-drain*-Spannung untereinander ähnlich verhalten, während die Resultate in Abbildungen 8.20(j)-(l) bei positiver *source-drain*-Spannung deutlich abweichen. Hierfür kann ein Zusammenhang mit der beobachteten Asymmetrie der Tunnelbarrieren des Doppelquantenpunkts vermutet werden.

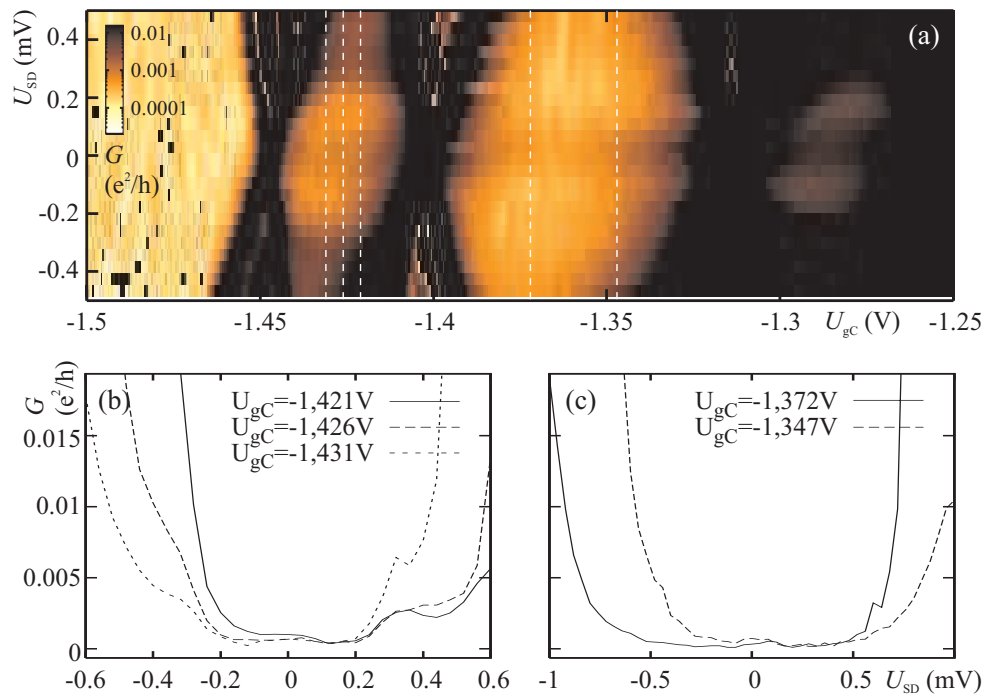
Die Linienbreite nimmt generell mit wachsendem Magnetfeld ab. Im Fall negativer *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  können allerdings Maxima der Breiten von Linie VI in Abbildungen 8.20(a),(d),(g) bei  $B_{\perp} \simeq 0,75$  T und von Linie III in Abbildungen 8.20(c) und (i) bei  $B_{\perp} \simeq 0,85$  T beobachtet werden. Das Maximum der Halbwertsbreite von Linie III tritt bei dem Magnetfeld auf, bei dem ein höher angeregter Zustand in das Transportfenster eintritt und damit Linie Ia und Linie III kreuzen (vgl. Abbildung 8.7). In Abbildung 8.20(f) liegt eine höhere *source-drain*-Spannung vor, und die Linien kreuzen für wesentlich niedrigeres Magnetfeld. Ein ähnlicher Vorgang kann für Linie VI vermutet werden. Hier liegt ein Grundzustandsübergang des Doppelquantenpunkts vor.

#### 8.5.4 Tunnelprozesse höherer Ordnung

Abbildung 8.21(a) zeigt eine Messung des differentiellen Leitwerts durch den Doppelquantenpunkt als Funktion der *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und der Gatterspannung  $U_{gC}$ . Ziel der Justierung der Gatterspannungen  $U_{gL}$  und  $U_{gR}$  war ein symmetrisches Potential am Tripelpunkt TP2 bei  $U_{gC} \simeq -1,4$  V. Die Farbskala ist derart gewählt, daß die Struktur des Transportspektrums innerhalb der Coulomb-Blockade-Bereiche erkennbar wird.

Im Coulomb-Blockade-Bereich mit  $N = 1$  Elektronen wird in Abbildung 8.21(a) erhöhter Leitwert aufgrund des Einsatzes von inelastischen Kotunnelprozessen beobachtet, sobald der Potentialunterschied von *source*- und *drain*-Kontakt die Anregungs-

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen



**Abbildung 8.21:** Tunnelprozesse höherer Ordnung in Coulomb-Blockade. (a) Differentieller Leitwert als Funktion von *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  und Gatterspannung  $U_{gC}$  (Parametersatz J2 aus Tabelle 8.2, logarithmische Farbskala). Der Skalenbereich ist derart gewählt, daß die Struktur innerhalb der Coulomb-Blockade-Bereiche hervortritt. (b), (c): Schnitte durch die Messung von (a) bei jeweils konstanter Gatterspannung  $U_{gC}$ . Die entsprechenden Werte sind in (a) durch weiße gestrichelte Linien gekennzeichnet.



energie des antisymmetrischen angeregten molekularen Zustands überschreitet. Abbildung 8.21(b) demonstriert dies nochmals anhand von Schnitten durch Abbildung 8.21(a) bei den mit gestrichelten Linien markierten Werten der Gatterspannung  $U_{gC}$ . Bei  $|U_{SD}| \simeq 0,25$  mV nimmt der differentielle Leitwert im Coulomb-Blockade-Bereich stufenartig zu. In einer der ausgewählten Spuren liegt bei  $U_{SD} \simeq 0,35$  mV ein lokales Maximum des Leitwerts vor, generell bleibt der Leitwert für größere *source-drain*-Spannung aber deutlich über dem Wert im Zentrum des Coulomb-Blockade-Bereichs. Qualitativ kann dies im Einzelquantenpunkt-Modell von [De Franceschi u. a. 2001] erklärt werden, wie es auch in Abschnitt 3.4 vorgestellt ist. Eine quantitative Betrachtung für einen Doppelquantenpunkt ist in [Hartmann 2002] gegeben. Im hierbei verwendeten Modell wird allerdings angenommen, daß der Doppelquantenpunkt nur sehr schwach an die Zuleitungen ankoppelt. Diese Bedingung ist im Rahmen der vorliegenden Messung nicht erfüllt.

Im Coulomb-Blockade-Bereich mit  $N = 2$  Elektronen kann kein Übergang zu inelastischem Kottunneln beobachtet werden. Auch die Schnitte von Abbildung 8.21(c), in denen der Leitwert bis zum Rand des Blockadebereichs aufgetragen ist, zeigen keine Stufenstruktur bei endlicher *source-drain*-Spannung.

Bei  $U_{SD} \simeq 0$  ist in Abbildung 8.21(a) sowohl für  $N = 1$  als auch für  $N = 2$  ein leicht erhöhter Leitwert als dunkler waagrechter Streifen sichtbar. Dies deutet sich auch als schwaches Maximum des Leitwerts bei  $U_{SD} \simeq 0$  in Abbildungen 8.21(b) und (c) an. Eine Identifikation als Kondo-Effekt ist insbesondere für  $N = 1$  naheliegend, da hier ein ungepaarter Spin im Doppelquantenpunkt vorliegt. Daß auch für die Elektronenzahl  $N = 2$  ein derartiges Maximum beobachtet wird, ist unerwartet, da der Zweielektronen-Grundzustand eines Doppelquantenpunkts in der Regel ein Spin-Singlet bildet. Das beobachtete Signal ist nur schwer vom Rauschen zu trennen. Dies erschwert insbesondere die Betrachtung der Temperaturabhängigkeit, da durch die Temperaturmeßbrücke verursachte Störungen das Signal überlagern. Die Auswertung von späteren Messungen an diesem Probenchip wird hoffentlich wertvolle Informationen über die Natur der vorliegenden Kondo-Phänomene liefern [Schröder 2005].

## 8. Ein Doppelquantenpunkt mit $N=0,1,2,\dots$ Elektronen

---

---

## Kapitel 9

# Kopplung von Elektronen- und Kernspins in einem Quantenpunkt

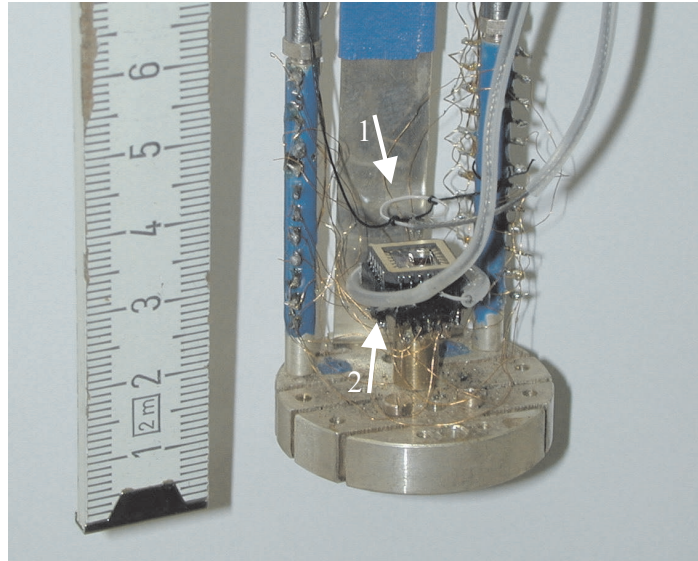
In diesem Kapitel werden Resultate zusammengefaßt, die in Zusammenarbeit mit Jan Weber in Messungen an einem Einzelquantenpunkt erzielt wurden. Die Meßergebnisse sind bereits in [Weber 2002] und [Hüttel u. a. 2004b] beschrieben. Abschnitt 9.1 geht auf die Besonderheiten des Meßaufbaus ein. Weiterhin wird der definierte Quantenpunkt charakterisiert. Abschnitt 9.2 beschreibt beobachtete strahlungsinduzierte Gleichrichtungseffekte. Ein im Strom durch den Quantenpunkt sichtbarer Speichereffekt auf einer Zeitskala von mehreren Minuten wird in Abschnitt 9.3 dargestellt. Abschnitt 9.4 geht auf dessen Interpretation als dynamisch induzierte Kernspinpolarisation ein.

### 9.1 Meßaufbau und Charakterisierung des Quantenpunkts

Die hier beschriebene Messung fand an einem stabförmigen Mischkryostat des Walther-Meissner-Instituts für Tieftemperaturphysik der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Garching bei München, statt. Informationen zur verwendeten Apparatur sind in Abschnitt 6.1 zu finden. Zur Einstrahlung von Hochfrequenzsignalen standen Koaxialkabel zur Verfügung. In Abbildung 9.1 sind die beiden als Antennen verwendeten Kabelenden mit Pfeilen markiert. Antenne 1, als offenes Ende eines Koaxialkabels, ist über der Chipstruktur aufgehängt und diente zur Einstrahlung von Signalen im GHz-Frequenzbereich. Eine ähnliche Technik wurde bereits in früheren Arbeiten der Forschungsgruppe [Qin u. a. 2001, Qin 2001] erfolgreich eingesetzt. Antenne 2 umwindet den Chipsockel als magnetische Schleifenantenne. Zusätzlich wurde in der

## 9. Kopplung von Elektronen- und Kernspins in einem Quantenpunkt

---

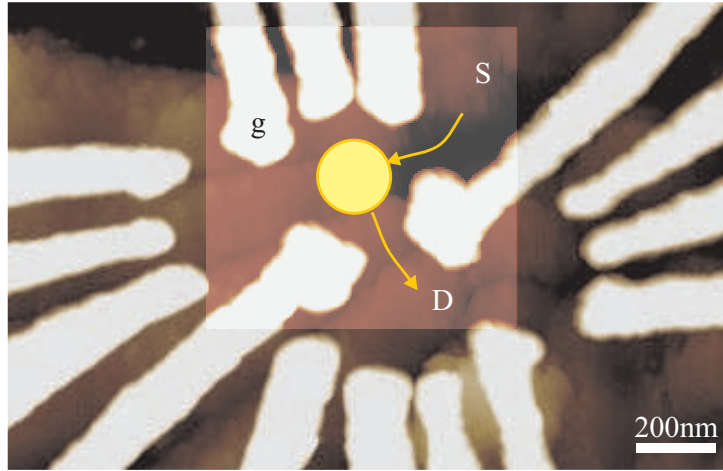


**Abbildung 9.1:** Probenbühne des am Walther-Meissner-Institut eingesetzten Mischkühlers. Über dem eingesetzten Chip endet ein Koaxialkabel offen als HF-Antenne (1). Ein weiteres Koaxialkabel (2) umwindet den Chipsockel als magnetische Schleifenantenne.

Messung ein in das  $^4\text{He}$ -Dewar eingebauter zweiachsiger supraleitender Magnet verwendet. Dies ermöglichte das Anlegen von Magnetfeldern sowohl senkrecht als auch parallel zum zweidimensionalen Elektronengas.

Die in der Messung verwendete Gatterstruktur ist in [Abbildung 9.2](#) in einer Rasterkraftmikroskop-Aufnahme zu sehen. In Erweiterung der Geometrie aus [[Hüttel 2001](#)], wo bereits zwei Doppelquantenpunkte in separaten Stromkreisen definiert wurden, sollte hier eine zusätzliche steuerbare Tunnelkopplung zwischen diesen beiden Systemen ermöglicht werden. Die in [Abbildung 9.2](#) durch unterschiedliche Helligkeit sichtbaren Unregelmäßigkeiten der Probenoberfläche zwischen den Gattern lassen sich vermutlich auf nicht vollständig nach Lithographieschritten abgelöste Lackreste zurückführen. Entgegen der Planung konnte während der Messung nur ein Quantenpunkt definiert werden. Dieser ist in [Abbildung 9.2](#) schematisch markiert, wie auch die letztendlich verwendeten *source*- und *drain*-Anschlüsse. Das aufgehellte Rechteck in der [Abbildung](#) verdeutlicht, welche Gatterelektroden bei der Definition des Quantenpunkts zum Einsatz kamen. Die mit ‘g’ gekennzeichnete Gatterelektrode wurde zur Kontrolle des Quantenpunkt-Potentials verwendet. Dabei wurde darauf geachtet, daß die von ihr mit gesteuerte Tunnelbarriere zu einer weiteren Zuleitung des Quantenpunkts (in [Abbildung 9.2](#) nach links) undurchlässig war.

Die Coulomb-Blockade-Oszillationen des Quantenpunkts sind in [Abbildung 9.3](#) anhand einer Messung des differentiellen Leitwerts als Funktion von  $U_g$  und  $U_{SD}$  zu



**Abbildung 9.2:** Rasterkraftmikroskop-Aufnahme der Gatterstruktur der verwendeten Probe. Das aufgehellte Rechteck markiert die in der Messung zur Definition eines Quantenpunkts verwendeten Gatterelektroden. Die Lage des definierten Quantenpunkts sowie die verwendeten Zuleitungen sind schematisch eingezeichnet. Nach [Weber 2002].

sehen. Hierbei werden typische Ladeenergien von  $1,0\text{ meV} \lesssim E_C \lesssim 1,5\text{ meV}$  bei einem Konversionsfaktor von  $\alpha_g = 0,065$  beobachtet (vgl. Abschnitt 3.1). Die maximal vorhandene Elektronenzahl läßt sich aus der Elektronenflächendichte des freien zweidimensionalen Elektronengases und der Gesamtkapazität des Quantenpunkts als Kapazität einer metallischen Kreisscheibe mit Radius  $R$  als

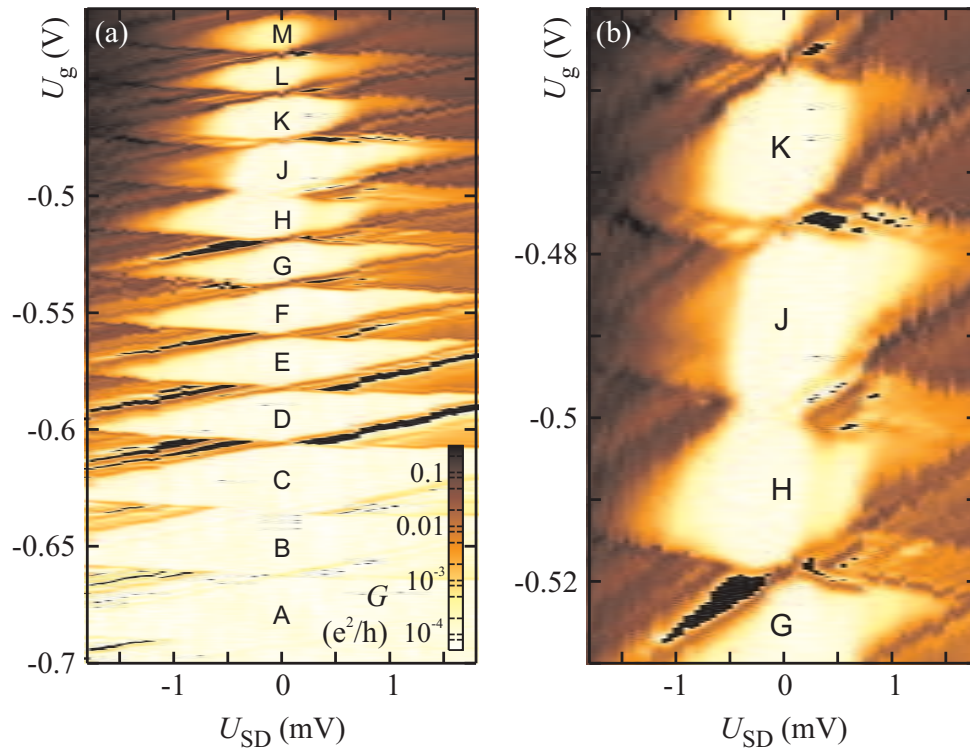
$$N \lesssim n_s \pi R^2 \simeq n_s \pi \left( \frac{C_\Sigma}{8\epsilon_0 \epsilon_r} \right)^2 = n_s \pi \left( \frac{e^2}{8\epsilon_0 \epsilon_r E_C} \right) \simeq 85 \quad (9.1)$$

abschätzen. Eine weitere Abschätzung geht von einem harmonischen Einschlußpotential aus. Die Energie des ersten angeregten Zustands  $\Delta\epsilon \simeq 0,2\text{ meV}$  und die Fermi-Energie des freien zweidimensionalen Elektronengases liefern

$$N \lesssim \frac{2E_F}{\Delta\epsilon} \simeq 60. \quad (9.2)$$

Da die exakte Elektronenzahl nicht bekannt ist, werden die beobachteten Coulomb-Blockade-Bereiche und die in ihnen vorliegenden Elektronenzahlen im folgenden wie auch in Abbildung 9.3 mit den Buchstaben A, B, ..., M (ohne I) bezeichnet.

Die regelmäßige Abfolge der Coulomb-Blockade-Oszillationen bei  $U_{SD} \simeq 0$  ist für den Übergang zwischen den Bereichen H und J unterbrochen. Eine Vergrößerung dieses Bereichs in Abbildung 9.3(b) zeigt, daß nicht nur der differentielle Leitwert in



**Abbildung 9.3:** Differentieller Leitwert des Quantenpunkts in logarithmischer Farbskala als Funktion von  $U_g$  und  $U_{SD}$ . Da die genaue Zahl der im Quantenpunkt gefangenen Elektronen nicht bekannt ist, werden die Coulomb-Blockade-Bereiche sowie die in ihnen jeweils vorliegenden Elektronenzahlen mit den Buchstaben A, B, ..., M (ohne I) bezeichnet. Isolierte schwarze Flächen sind Bereiche negativen differentiellen Leitwerts. (a) Übersicht, (b) Detailvergrößerung bei gleicher Farbskala im Bereich um das unterdrückte Leitwertmaximum  $H \leftrightarrow J$ . Aus [Weber 2002].

linearer Antwort zwischen H und J vollständig unterdrückt bleibt. Zusätzlich wird eine Asymmetrie von Kottunnelphänomenen bezüglich  $U_{SD}$  in den Coulomb-Blockade-Bereichen H und J sichtbar. Bereits ein geringes Magnetfeld  $B_{\perp} \simeq 0,2\text{T}$  senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas führt zur vollständigen Aufhebung der Transportblockade. Der Übergang  $H \leftrightarrow J$  unterscheidet sich für  $B_{\perp} > 0,2\text{T}$  nicht mehr wesentlich von denen benachbarter Elektronenzahlen.

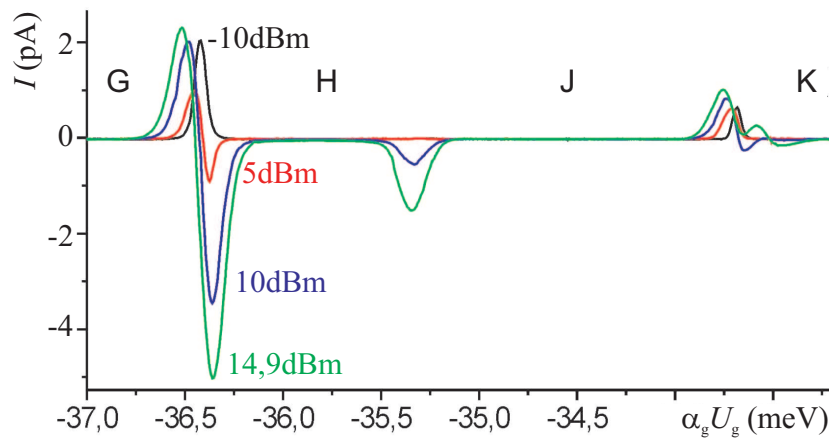
Anhand der vorliegenden Daten ist keine Aussage über den genauen Blockademechanismus möglich. Verschiedene Mechanismen zur Unterdrückung linearen Transports sind bekannt. Eine Möglichkeit besteht darin, daß sich bei bestimmten Gatterspannungen ein Doppelpotentialtopf und damit ein effektiver serieller Doppelquantenpunkt ausbildet, so daß nur bei Ausrichtung der zwei diskreten Energieniveaus in beiden Hälften ein Tunnelstrom möglich ist. Dies ist insofern unwahrscheinlich, als sowohl für kleinere als auch für größere Gatterspannungen keine Blockadeeffekte beobachtet werden.

Ein weiterer möglicher Mechanismus zur Unterdrückung linearen Transports ist Grundzustands-Spinblockade (Spin-Blockade Type II, siehe [Weinmann u. a. 1996, 1995, Hüttel u. a. 2003]). Mit einer Änderung der Zahl der in einem Quantenpunkt gefangenen Elektronen geht aufgrund von Elektron-Elektron-Wechselwirkungen auch eine Modifikation des elektronischen Zustandsspektrums einher. Führt dies zu einer Änderung der Quantenzahlen des Grundzustands, so ist eine Situation denkbar, in der in benachbarten Coulomb-Blockade-Bereichen (wie hier H und J) unterschiedliche Spinkopplungen im Grundzustand des Quantenpunkts auftreten. Bei einem Unterschied des Grundzustandspins von  $\Delta S > 1/2$  ist an dem entsprechenden Leitwertmaximum zwischen diesen Bereichen ein direkter Übergang von Grundzustand zu Grundzustand durch Einzelelektronentunneln unmöglich. Das entsprechende Maximum ist stark unterdrückt, und nur ein Restleitwert aufgrund von Spinrelaxation bleibt sichtbar [Hüttel u. a. 2003].

## 9.2 Pumpstrom bei HF-Einstrahlung

Wird über die erwähnten Antennen ein Hochfrequenzsignal in die Probe eingekoppelt, so verändert sich die Form der Coulomb-Blockade-Oszillationen. Abbildung 9.4 zeigt eine Messung des Tunnelstroms durch den Quantenpunkt bei  $U_{SD} = 20\mu\text{V}$  und Einkopplung eines Hochfrequenz-Signals von  $f = 10,01\text{GHz}$ . Eine Abschätzung der in den Quantenpunkt eingekoppelten Strahlungsleistung erweist sich aufgrund der komplexen Geometrie als schwierig. Für einen entsprechenden Versuch sei auf [Weber 2002] verwiesen. Da während der Versuchsdurchführung die Anordnung der Koaxialkabel und Antennen unverändert bleibt, wird die hierzu proportionale Ausgangsleistung des HF-Generators als Vergleichswert herangezogen.

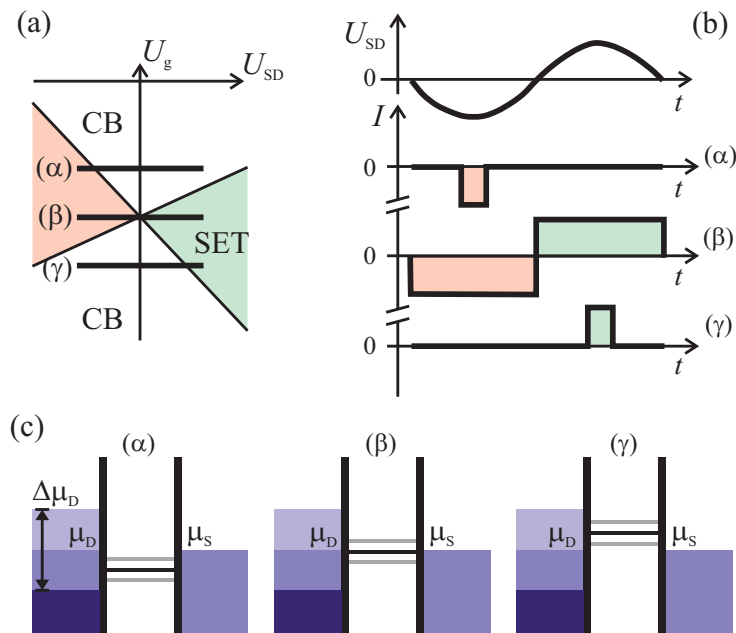
## 9. Kopplung von Elektronen- und Kernspins in einem Quantenpunkt



**Abbildung 9.4:** Gleichrichtungseffekte bei Strahlungseinkopplung: dc-Strom durch den Quantenpunkt bei  $U_{SD} = 20 \mu\text{V}$  und Einkopplung eines HF-Signals von  $f = 10,01 \text{ GHz}$  und  $P = -10, 5, 10$  und  $14,9 \text{ dBm}$  Ausgangsleistung des Signalgenerators. Übergang  $G \leftrightarrow H$  zeigt das Gleichrichtungsverhalten nach [Weis u. a. 1995], wie es auch an allen weiteren hier nicht abgebildeten Leitwertmaxima in dieser Messung beobachtet wird. Aus [Weber 2002].

Die in Abbildung 9.4 schwarz eingezeichnete Kurve bei  $-10 \text{ dBm}$  Generatorleistung zeigt keine strahlungsinduzierten Effekte. Sie kann als Vergleichsmessung ohne Hochfrequenzeinstrahlung verwendet werden. Unabhängig von der geringen *source-drain*-Spannung wird bei Erhöhen der eingestrahelten Leistung eine Verformung der meisten beobachteten Coulomb-Blockade-Oszillationen in jeweils ein vorwärts- und ein rückwärtsgerichtetes Strom-Maximum beobachtet. Der Übergang zwischen Elektronenzahlen  $G$  und  $H$  ist in Abbildung 9.4 beispielhaft für alle weiteren Oszillationen, die dieses Verhalten zeigen, aufgetragen. Ein möglicher Prozeß, der dies erklärt, ist asymmetrische adiabatische Einkopplung des Mikrowellensignals [Weis u. a. 1995]. Aufgrund einer im allgemeinen vorhandenen Asymmetrie der Kopplung des Mikrowellensignals an *source* und *drain* und des Quantenpunkts an seine Zuleitungen findet ein Gleichrichtungseffekt statt, sobald das chemische Potential des Quantenpunkts etwas ober- oder unterhalb des zeitlich gemittelten Potentials von *source* und *drain* liegt. Dies ist in Abbildung 9.5 verdeutlicht. Hier wird angenommen, daß einzig das Potential in der *drain*-Zuleitung um  $\Delta\mu_D$  fluktuiert und hierdurch eine effektive *source-drain*-Wechselspannung entsteht. Ist die Gatterspannung genau auf die Position eines Leitwertmaximums eingestellt, so kann für jedes Vorzeichen dieser Spannung Strom fließen (Fall ( $\beta$ )). Über die Oszillationsperiode gemittelt ist der Strom Null. Für leicht abweichende Gatterspannung, wie in den abgebildeten Fällen ( $\alpha$ ) und ( $\gamma$ ), ist nur während eines Teils genau einer Halbwelle Einzelelektronentunneln möglich, so daß der zeitlich gemittelte Strom gleichgerichtet ist. Der Quantenpunkt agiert damit als





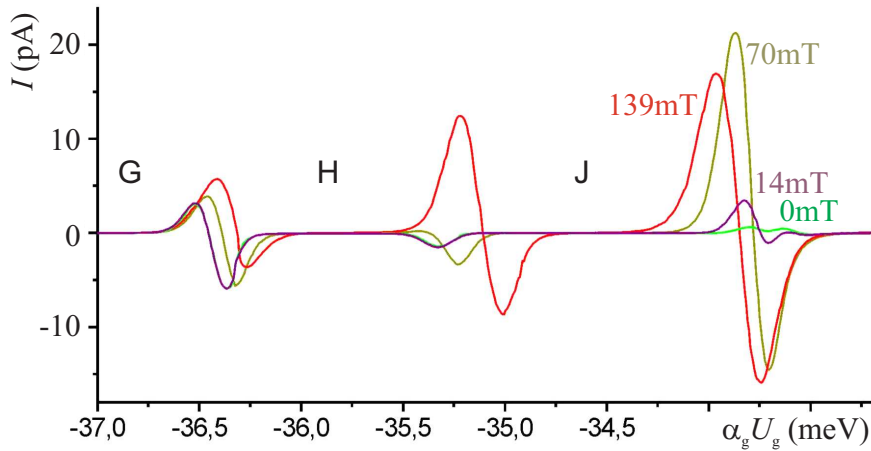
**Abbildung 9.5:** Gleichrichtung durch adiabatische Einkopplung eines Mikrowellensignals. (a) Schematischer Ausschnitt einer Messung des nichtlinearen Transports wie z.B. in Abbildung 3.4 mit eingezeichneten Gatterspannungen ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) und ( $\gamma$ ). Die Einkopplung der Hochfrequenz wirkt wie eine Modulation der *source-drain*-Spannung entlang der waagrechten Linien. (b) Stromfluß aufgrund dieser Modulation bei den in (a) eingezeichneten Gatterspannungen. (c) Lage und Variation des chemischen Potentials in Quantenpunkt und Zuleitungen bei alleiniger Modulation des *drain*-Potentials um  $\Delta\mu_D$ . Aufgrund der kapazitiven Kopplung des Quantenpunkts an die *drain*-Zuleitung oszilliert das chemische Potential im Quantenpunkt ebenfalls innerhalb des durch graue Linien gegebenen Intervalls. Zeichnung nach [Weis u. a. 1995].

„Elektronenpumpe“. Dem Teilchencharakter der Strahlung entsprechende *photon assisted tunneling* - Prozesse [Oosterkamp u. a. 1997] konnten im Rahmen der Messung nicht beobachtet werden.

Die Maxima des Tunnelstroms an den Übergängen zwischen Elektronenzahlen  $H \leftrightarrow J$  und  $J \leftrightarrow K$  zeigen als einzige beobachtete abweichendes Verhalten. Am ohne Hochfrequenzeinstrahlung blockierten Übergang  $H \leftrightarrow J$  wechselt der Gleichrichtungsstrom nicht das Vorzeichen. Gleichrichtung findet nur in einer Transportrichtung statt. Dies kann unter Annahme einer Grundzustands-Transportblockade wie z.B. Spin-Blockade Typ II [Hüttel u. a. 2003] erklärt werden. Der direkte Übergang zwischen den Grundzuständen für  $H$  und  $J$  Elektronen trägt nahezu nicht zum Strom bei. Für Einzelelektronentunneln durch den Quantenpunkt muß ein angeregter Zustand energetisch erreichbar sein. Man nimmt nun zusätzlich an, daß bei Elektronenzahlen  $H$  und  $J$  stark unterschiedliche Anregungsenergien für den jeweils ersten angeregten Zustand des Quantenpunkts vorliegen [Weinmann 2002]. Ist genau einer dieser angeregten Zustände, z.B. der erste angeregte Zustand bei Elektronenzahl  $J$ , energetisch niedrigliegend und seine Anregungsenergie vergleichbar mit der durch die Strahlung verursachten Potentialvariation, so kann nur durch ihn Strom getragen werden. Dies führt zu einem Gleichrichtungseffekt entsprechend der Beobachtung. Gleichrichtung in anderer Richtung durch den angeregten Zustand von  $H$  findet nicht statt, da nicht ausreichend Energie zur Verfügung steht.

Übergang  $J \leftrightarrow K$  entwickelt mit Einschalten der Strahlungsquelle eine Doppelmaximumstruktur, ähnlich den in [Fujii u. a. 1996] präsentierten Messungen. Im Gegensatz zu den dort präsentierten Daten wird jedoch über einen weiten Bereich  $P = 13 \dots 17,5$  dBm der Strahlungsleistung die Aufspaltung als konstant  $\Delta\varepsilon \simeq 180 \mu\text{eV}$  beobachtet. Dies läßt vermuten, daß auch hier durch die strahlungsinduzierte Potentialfluktuation ein angeregter Zustand erreichbar wird, der sich im Transportspektrum zeigt. Die genauen Mechanismen hierzu sind allerdings nicht bekannt. Der induzierte Strom bei  $J \leftrightarrow K$  fließt wiederum fast ausschließlich in eine Richtung, allerdings entgegengesetzt zum Pumpstrom bei  $H \leftrightarrow J$ .

Wie im vorherigen Abschnitt führt bereits ein schwaches senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas angelegtes Magnetfeld dazu, daß sich die Struktur der Strom-Kennlinie der Übergänge  $H \leftrightarrow J$  und  $J \leftrightarrow K$  vollständig der bei benachbarten Elektronenzahlen angleicht. Abbildung 9.6 demonstriert dies an einer Messung des Pumpstroms bei verschiedenen Magnetfeldern  $B_{\perp}$ . Bereits bei  $B_{\perp} \simeq 140$  mT sind keine Abweichungen von der erwarteten Gleichrichtungs-Kurve nach [Weis u. a. 1995] mehr beobachtbar.

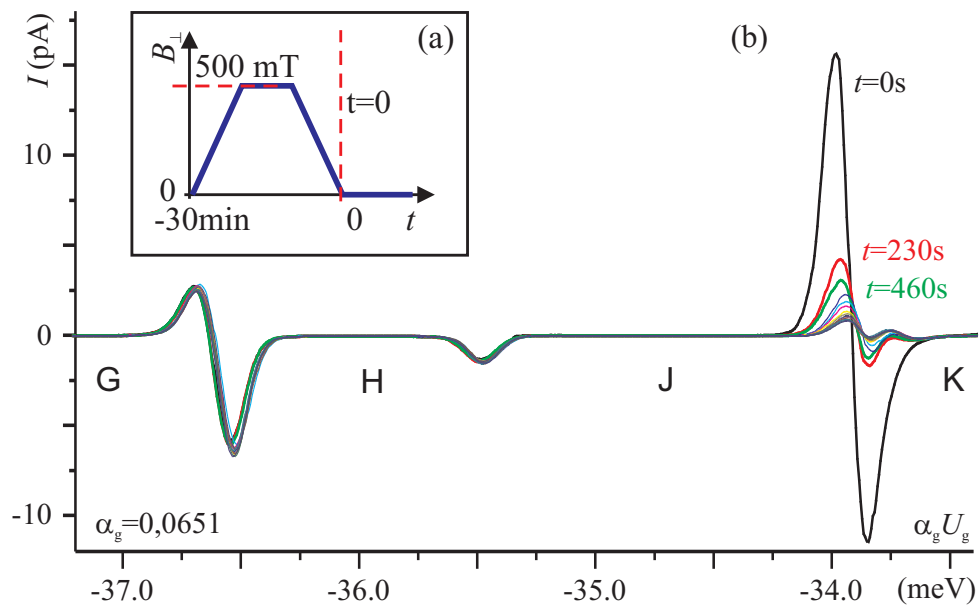


**Abbildung 9.6:** Auswirkungen eines Magnetfelds senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas auf den Gleichrichtungseffekt. dc-Strom durch den Quantenpunkt ( $U_{SD} = 20\mu\text{V}$ ) bei Einkopplung eines HF-Signals von  $f = 10,01\text{GHz}$  und  $P = 14,9\text{dBm}$  Ausgangsleistung des Signalgenerators für Magnetfelder von  $B_{\perp} = 0\text{mT}$ ,  $14\text{mT}$ ,  $70\text{mT}$  und  $139\text{mT}$ . Aus [Weber 2002].

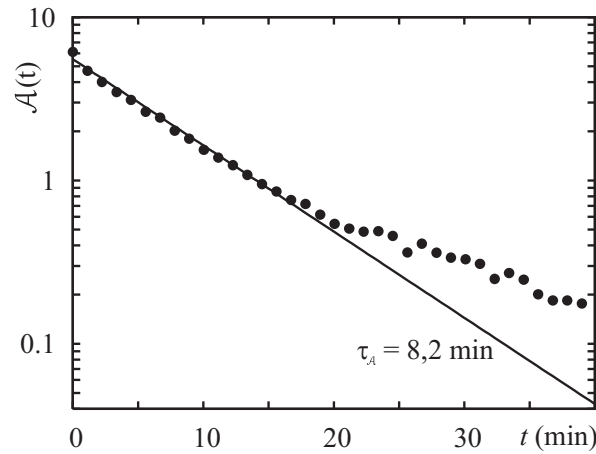
## 9.3 Auftreten eines Speichereffekts bei variiertem Magnetfeld $B_{\perp}$

### 9.3.1 Beobachtung und Quantifizierung

Abbildung 9.7 zeigt eine Messung, bei der nach Anlegen und Abschalten eines Magnetfelds ein Speichereffekt im Strom durch den Quantenpunkt auf einer Zeitskala von  $\sim 10\text{min}$  beobachtet wurde. Der Ablauf der Messung ist in Abbildung 9.7(a) detailliert dargestellt. Wie in den Gleichrichtungsmessungen des vorherigen Abschnitts wird kontinuierlich ein Hochfrequenzsignal von  $f = 10,01\text{GHz}$  eingestrahlt. Das Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas  $B_{\perp}$  wird beginnend von  $B_{\perp} = 0$  über einen Zeitraum von  $\tau_{\text{ramp}} \simeq 11\text{min}$  langsam auf einen endlichen kleinen Wert  $B_{\perp,\text{max}} \simeq 0,5\text{T}$  gefahren, dort für  $\tau_B \simeq 6\text{min}$  belassen und schließlich mit der gleichen Geschwindigkeit wieder in  $\tau_{\text{ramp}} \simeq 11\text{min}$  auf  $B_{\perp} = 0$  reduziert. Die Aufzeichnung der in Abbildung 9.7(b) dargestellten Messungen des Stroms durch den Quantenpunkt beginnt in dem Moment, in dem das Feld wieder  $B_{\perp} = 0$  erreicht. Dieser Zeitpunkt wird als  $t = 0$  definiert. In der darauf folgenden Zeit werden keine externen Parameter mehr verändert. Das Maximum des Tunnelstroms am Übergang  $J \leftrightarrow K$  zeigt dennoch zu Beginn eine starke Verformung und kehrt erst über einen Zeitraum von mehreren Minuten in einen Gleichgewichtszustand zurück. Diese Beobachtung ist insofern unerwartet, als die elektronischen Zustände eines Quantenpunkts auf der langsamen



**Abbildung 9.7:** Beobachtung eines Langzeit-Speichereffekts in einem Quantenpunkt. (a) Schema des experimentellen Vorgehens. Das Magnetfeld  $B_{\perp}$  senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas wird langsam auf  $B_{\perp} \simeq 0,5$  T erhöht und nach einer Wartezeit wieder auf  $B_{\perp} = 0$  verringert.  $t = 0$  definiert den Zeitpunkt, an dem das Feld  $B_{\perp} = 0$  erreicht. Kontinuierlich ist hierbei ein Mikrowellensignal von  $f = 10,01$  GHz sowie eine *source-drain*-Spannung  $U_{SD} = 20 \mu\text{V}$  angelegt (nicht eingezeichnet). (b) Ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  (aus (a)) aufgenommene Spuren des dc-Stroms durch den Quantenpunkt als Funktion der Gatterspannung  $U_g$ .



**Abbildung 9.8:** Beispielhafte Auswertung der Relaxation des Speichereffekts am Übergang zwischen Elektronenzahlen J und K: Das Verformungsmaß  $\mathcal{A}(t)$  (vgl. Gleichung 9.3) zeigt nach Ein- und Ausschalten des Magnetfelds senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas (wie in Abbildung 9.7(a) skizziert) über einen Zeitraum von 20 min einen nahezu exponentiellen Abfall mit Zeitkonstante  $\tau_{\mathcal{A}} \simeq 8,2 \text{ min}$ . Aus [Weber 2002].

Zeitskala der Magnetfeldänderung eines supraleitenden Magneten hoher Induktivität dem Feld in der Regel unmittelbar folgen.

Um eine Quantifizierung dieses beobachteten Effekts zu ermöglichen, wird als Maß für die Auslenkung das Integral  $\mathcal{A}(t)$  über den Absolutbetrag der Differenz des Stroms zwischen ausgelenkter und relaxierter ( $t \rightarrow \infty$ ) Kennlinie, normiert auf das Integral über die relaxierte Kennlinie,

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{\int_{U_{g,1}}^{U_{g,2}} |I(U_g, t) - I(U_g, \infty)| dU_g}{\int_{U_{g,1}}^{U_{g,2}} |I(U_g, \infty)| dU_g}, \quad (9.3)$$

verwendet. Die Grenzen  $U_{g,1}$  und  $U_{g,2}$  werden dabei in den Coulomb-Blockade-Bereichen J und K gewählt, so daß die Integration über den gesamten Übergang  $J \leftrightarrow K$  verläuft. Der resultierende Zahlenwert ist für  $t = 0$  maximal und strebt mit der graduellen Relaxation der Kurve entsprechend der Definition von  $\mathcal{A}(t)$  gegen  $\mathcal{A}(t \rightarrow \infty) \equiv 0$ . Eine beispielhafte Auswertung ist in Abbildung 9.8 zu sehen. Die Auslenkung  $\mathcal{A}(t)$  der Stromkennlinie nimmt über einen Zeitraum  $\sim 20 \text{ min}$  exponentiell mit in diesem Fall charakteristischer Zeitkonstante  $\tau_{\mathcal{A}} \simeq 8,2 \text{ min}$  ab.

Eine mögliche Hypothese für das Zustandekommen des beobachteten Effekts ist eine Beeinflussung der Proben temperatur durch Wirbelströme, die während der Variation des externen Magnetfelds induziert wurden. Der Speichereffekt ließ sich jedoch bereits bei derart kleinen maximalen Magnetfeldern  $B_{\perp, \max} \simeq 80 \text{ mT}$  nachweisen, daß die Mischkammertemperatur während der Messung nie über  $T_{\text{MC}} = 80 \text{ mK}$  stieg. Temperaturabhängige Vergleichsmessungen zeigten lediglich eine Verbreiterung der Resonanzen, jedoch keine Änderung der Kurvenform. Damit kann ein Temperatureffekt ausgeschlossen werden.

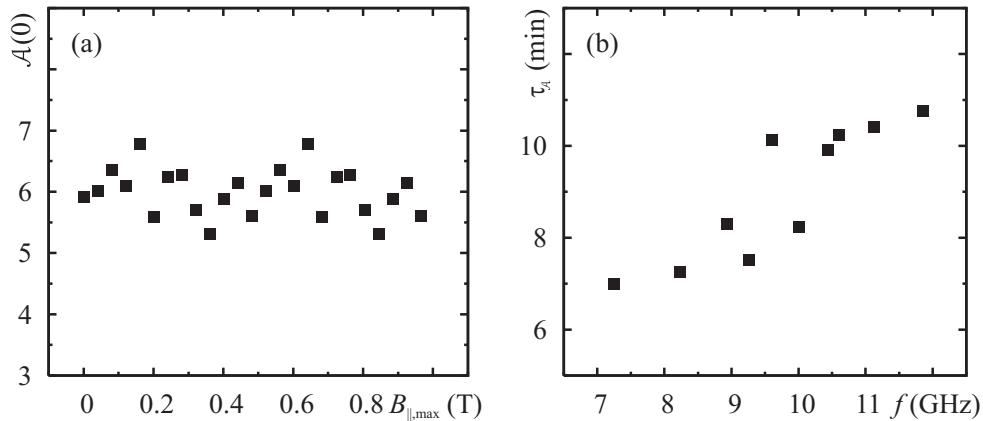
Eine weitere Möglichkeit besteht in der Existenz eines Restmagnetfeldes im Probenraum nach Abschalten des extern angelegten Magnetfelds. Durch Vergleich der bei  $t = 0$  beobachteten Verformung der Strom-Kennlinie mit der zeitunabhängigen Verformung durch ein lange konstant gehaltenes Magnetfeld  $B_{\perp}$  kann ein derartig benötigtes Restmagnetfeld als  $B_{\perp, \text{rest}} \simeq 30 \text{ mT}$  abgeschätzt werden. Das Magnetnetzteil scheidet als Ursache aus. Eine direkte Messung des Stroms durch die Magnetzuleitungen ergab nach Ablauf des Feld-Zyklus aus Abbildung 9.7(a) eine Stabilisierung auf  $0 \pm 0,3 \text{ mA}$  innerhalb von wenigen Sekunden, entsprechend einem Feld von  $0 \pm 0,021 \text{ mT}$ .

### 9.3.2 Abhängigkeit des Speichereffekts von externen Parametern

Im folgenden wird die Abhängigkeit des Speichereffekts von extern steuerbaren Parametern betrachtet. Dabei ist das Vorgehen im Allgemeinen analog zum vorherigen Abschnitt. Sofern nicht explizit erwähnt, wird entsprechend dem Schema von Abbildung 9.7(a) unter kontinuierlicher Einstrahlung eines Hochfrequenz-Signals von  $f = 10,01 \text{ GHz}$  ein senkrecht Magnetfeld  $B_{\perp}$  angelegt, wieder auf  $B_{\perp} = 0$  gesetzt und im Anschluß der Tunnelstrom als Funktion der Gatterspannung  $U_g$  wiederholt aufgezeichnet. Aus den resultierenden Kennlinien wird das Verformungsmaß  $\mathcal{A}(t)$  nach Gleichung 9.3 bestimmt. Anpassung einer Exponentialfunktion an  $\mathcal{A}(t)$  ergibt die Relaxationszeit  $\tau_{\mathcal{A}}$ .

#### Maximales senkrecht Magnetfeld

Eine Betrachtung der Abhängigkeit von  $\mathcal{A}(t = 0)$  vom maximal angesteuerten senkrechten Magnetfeld  $B_{\perp, \max}$  liefert ein nahezu lineares Anwachsen von  $\mathcal{A}(t = 0)$  mit  $B_{\perp, \max}$  bis hin zu  $B_{\perp, \max} \simeq 35 \text{ mT}$ . Oberhalb dieses Werts beginnt der Effekt zu sättigen.



**Abbildung 9.9:** Abhängigkeit des Speichereffekts von extern steuerbaren Parametern. (a) Verformung des Strom-Maximums  $\mathcal{A}(0)$  zur Zeit  $t = 0$  als Funktion der parallel zum zweidimensionalen Elektronengas angelegten Magnetfeldkomponente (siehe Text). (b) Zeitkonstante der Verformung  $\tau_{\mathcal{A}}$  als Funktion der Mikrowellenfrequenz. Aus [Weber 2002].

### Temperatur

Der Speichereffekt-Versuch wurde entsprechend dem Schema von Abbildung 9.7(a) bei verschiedenen Mischkammertemperaturen  $T_{MC}$  im Bereich  $70\text{mK} \leq T_{MC} \leq 650\text{mK}$  durchgeführt. Eine Auswertung der Temperaturabhängigkeit der Abklingzeit  $\tau_{\mathcal{A}}$  ergibt keine über beobachtete Schwankungen hinausgehende klare Tendenz.

### Richtung des Magnetfelds

Das in Abbildung 9.7(a) skizzierte Vorgehen wurde unter ausschließlicher Verwendung eines Magnetfelds  $B_{\parallel}$  parallel zum zweidimensionalen Elektronengas wiederholt. Hier kann bis hin zu maximalen Feldern von  $B_{\parallel,\text{max}} \simeq 2,7\text{T}$  keine Zeitabhängigkeit des Stroms  $I(U_g)$  nach Reduzieren des Felds auf  $B_{\parallel} = 0$  beobachtet werden.

Zur detaillierteren Untersuchung der Abhängigkeit des Speichereffekts von der Richtung des Magnetfelds wurden Magnetfeldkomponenten senkrecht und parallel zum zweidimensionalen Elektronengas proportional zueinander gleichzeitig hochgefahren und wieder auf Null gesetzt. Abbildung 9.9(a) zeigt die Auslenkung  $\mathcal{A}(t = 0)$  als Funktion der maximal während des Magnetfeld-Zyklus angelegten parallelen Feldkomponente  $B_{\parallel,\text{max}}$  bei festem  $B_{\perp,\text{max}}$ . Im Rahmen der Meßgenauigkeit ist keine Abhängigkeit des Verformungseffekts von  $B_{\parallel,\text{max}}$  erkennbar.

### Strahlungsfrequenz

Abbildung 9.9(b) zeigt die Abhängigkeit der Zeitkonstante des Abklingens  $\tau_A$  von der Mikrowellenfrequenz. Ein Anstieg mit wachsender Frequenz  $f$  kann beobachtet werden.

Da die Einkopplung der Hochfrequenzsignale sowohl in die verwendeten Kabel als auch von der Antenne in die Probe von der verwendeten Frequenz abhängt, ist eine weitergehende systematische Auswertung schwierig. Die maximale Auslenkung  $\mathcal{A}(t=0)$  sowie die exakte Form der Kennlinie  $I(U_g)$  werden hierdurch stark beeinflusst und können daher nicht zu einem einfachen Vergleich verschiedener Frequenzbereiche hergenommen werden [Weber 2002].

## 9.4 Interpretation als Kernspinpolarisation

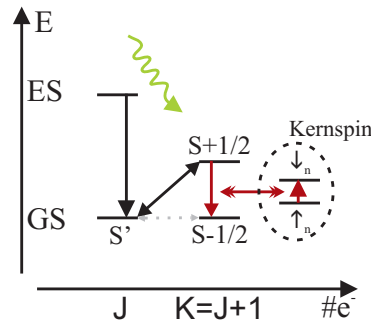
In verschiedenen Versuchen wurde bereits nachgewiesen, daß spinpolarisierte Elektronen eine lokale dynamische Kernspinpolarisation erzeugen können [Wald u. a. 1994, Dobers u. a. 1988, Kronmüller u. a. 1999, Smet u. a. 2002]. Der Transfer findet hierbei über die Hyperfein-Wechselwirkung zwischen Elektronenspins und Kernspins statt. Sie wird für die Elektronen des Leitungsbands mit s-Bloch-Wellenfunktionen näherungsweise als Kontaktwechselwirkung mit Hamilton-Operator

$$H_{\text{HF}} = A\vec{S}\cdot\vec{I} = \frac{1}{2}A(S_-I_+ + S_+I_-) + AS_zI_z \quad (9.4)$$

mit  $\vec{I}$  als Kernspin-Operator und  $\vec{S}$  als dem effektiven Elektronenspin am Ort des Atomkerns beschrieben [Slichter 1996]. Der geklammerte Ausdruck, auch als „flip flop term“ bezeichnet, enthält die Leiteroperatoren  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  und  $I_{\pm} = I_x \pm iI_y$  und entspricht dem simultanen Umklappen eines Elektronenspins und eines Kernspins in jeweils entgegengesetzter Richtung. Der zweite Summand gibt eine effektive Zeeman-Wechselwirkung zwischen den zwei Spins wieder. Relaxation über Flip-Flop-Prozesse ist für endliche Magnetfelder aufgrund des großen Unterschieds in elektronischer und Kernspin-Zeemanaufspaltung unterdrückt. Die Energiedifferenz kann durch gleichzeitige Emission eines Phonons ausgeglichen werden [Erlingsson u. a. 2001].

Während sich Dephasierung und Energierelaxation der Elektronenspins im Halbleiter in Sekundenbruchteilen abspielen [Kroutvar u. a. 2004], bewegen sich die Relaxationszeiten der Kernspins des Kristallgitters bei tiefen Temperaturen im Zeitrahmen mehrerer Minuten. Damit bietet sich eine Kopplung an Kernspins und eine dynamisch erzeugte Kernspinpolarisation als Erklärung für den Langzeit-Speichereffekt des vorherigen Abschnitts an. Eine grobe Abschätzung ergibt eine Zahl von  $\sim 10^7$  Atomkernen im elektronischen Volumen des Quantenpunkts, im Vergleich zu  $\sim 10^8 \dots 10^9$





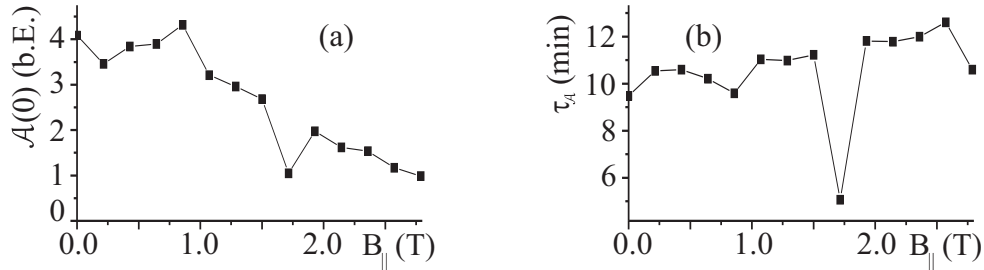
**Abbildung 9.10:** Provisorisches Modell eines Polarisationsmechanismus (siehe Text). Aus [Hüttel u. a. 2004b].

Elektronen, die den Quantenpunkt während der 30 min des Ein- und Ausschaltens des Magnetfelds passieren.

Daß der beobachtete Speichereffekt ausschließlich bei Verwendung eines Magnetfelds  $B_{\perp}$  senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas auftritt, läßt schließen, daß auch orbitale Niveaushiftungen beim Zustandekommen des Effekts eine Rolle spielen müssen. Abbildung 9.10 zeigt ein provisorisches Modell für einen Polarisationsmechanismus, wie er sich, während das Magnetfeld eingeschaltet ist, abspielen könnte. Entsprechend der Beobachtung wird angenommen, daß der Grundzustandsübergang zwischen Elektronenzahlen  $J$  und  $K$  teilweise unterdrückt ist. Bei Elektronenzahl  $K$  existiert ein niedrigliegender angeregter Zustand, der anstelle des unterdrückten Grundzustandsübergangs bei Einzelelektronentunneln besetzt wird. Dies ist in Abbildung 9.10 durch einen diagonalen Pfeil dargestellt. Relaxiert der angeregte Zustand auch nur für einen geringen Anteil der Tunnelvorgänge über einen Flip-Flop-Prozess in den Grundzustand mit  $K$  Elektronen, wie in der Skizze grau eingezeichnet, so wird bei jeder solchen Relaxation ein benachbarter Kernspin ausgerichtet. Dies führt zu einer graduellen Akkumulation einer Kernspinpolarisation. Berechnete Raten für diese Hyperfeinrelaxation sind konsistent mit dem Aufbau einer lokalen Polarisation im Quantenpunkt im Zeitrahmen des Magnetfeldzyklus von Abbildung 9.7(a) [Erlingsson u. a. 2001]. Tunnelstrom ist nach der Relaxation blockiert, bis der Quantenpunkt über den langsamen Grundzustandsübergang zur Elektronenzahl  $J$  zurückkehrt. Das Modell erklärt allerdings nicht, weshalb sich diese lokale Kernspinpolarisation auf die gemessenen Gleichrichtungseffekte auswirkt. Hier könnte mit eine Rolle spielen, daß bei Vorliegen einer lokalen Polarisation der Kernspins keine Hyperfeinrelaxation mehr stattfindet und obiger Blockademechanismus unmöglich wird.

Zwei beobachtete Details unterstützen die Hypothese eines Spineffekts. Abbildung 9.11 zeigt ermittelte Auslenkungen  $\mathcal{A}(t=0)$  und Relaxationszeiten  $\tau_{\mathcal{A}}$  der Strom-Kennlinie (vgl. Gleichung 9.3 und Abbildung 9.7). Für jeden Meßpunkt wurde ein

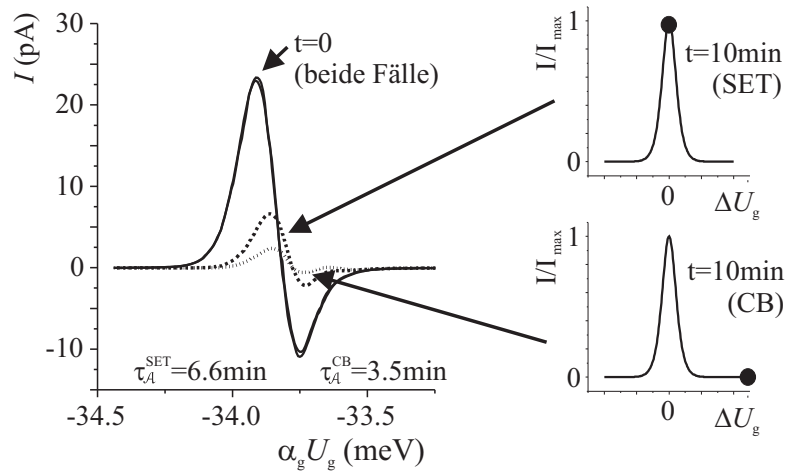
## 9. Kopplung von Elektronen- und Kernspins in einem Quantenpunkt



**Abbildung 9.11:** Anomalie der Relaxationszeit: Maximale Auslenkung der Strom-Kennlinie  $A(0)$  (a) und Relaxationszeit  $\tau_A$  (b) als Funktion eines konstant angelegten Magnetfelds parallel zum zweidimensionalen Elektronengas  $B_{\parallel}$ . Aus [Weber 2002].

Magnetfeld  $B_{\parallel}$  parallel zum zweidimensionalen Elektronengas auf einen bestimmten Wert gefahren und dort belassen. Das Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas wurde jeweils erhöht und wieder auf Null reduziert, bevor mehrfach die Strom-Kennlinie wie in Abbildung 9.7(b) bestimmt wurde. Eine Kurvenanpassung an die Zeitabhängigkeit des Verformungsmaßes  $\mathcal{A}(t)$  ergibt die Relaxationszeit  $\tau_A$  und die maximale Verformung  $\mathcal{A}(0)$  als Funktion von  $B_{\parallel}$ . Beide Größen zeigen einen deutlichen Rückgang bei  $B_{\parallel} \simeq 1,7$  T, einem Magnetfeld, bei dem das kontinuierlich eingestrahlte Mikrowellensignal mit  $f = 10,01$  GHz in der Nähe der Elektronenspinresonanz liegt. Eine mögliche Interpretation hierfür ist, daß die Hyperfeinrelaxation des Modells aus Abbildung 9.10 hier durch strahlungsinduzierte Spinübergänge „kurzgeschlossen“ ist.

Eine weitere Abhängigkeit ist in Abbildung 9.12 demonstriert. Hier wird für jede Meßkurve jeweils der „Polarisationszyklus“ durchfahren, also das Magnetfeld erhöht und wieder ausgeschaltet. Im Anschluß unterscheidet sich das Vorgehen jedoch von dem der bisherigen Messungen. Zur Zeit  $t = 0$ , also direkt nachdem das Magnetfeld  $B_{\perp} = 0$  erreicht hat, wird eine Meßspur  $I(U_g)$  aufgezeichnet. Unmittelbar danach wird die Gatterspannung  $U_g$  auf einen festen Wert gesetzt und dort für  $\Delta t = 10$  min belassen. Zur Zeit  $t = 10$  min wird eine zweite Meßkurve aufgenommen. Abbildung 9.12 zeigt das Resultat für zwei verschiedene, schematisch dargestellte Wartepositionen. Ist der Quantenpunkt für die Dauer der 10 min in Coulomb-Blockade („CB“), so ist die Kurve nach der Wartezeit bereits stärker abgeklungen. Für eine Warteposition, an der Tunnelstrom fließt („SET“, Einzelelektronentunneln), bleibt die Auslenkung länger erhalten. Aus der Messung lassen sich die Zeitkonstanten  $\tau_A^{\text{CB}} = 3,5$  min sowie  $\tau_A^{\text{SET}} = 6,6$  min abschätzen. Die Resultate sind quantitativ konsistent mit einer theoretischen Vorhersage aus [Lyanda-Geller u. a. 2002]. In besagtem Artikel wird argumentiert, daß unterschiedliche Tunnelprozesse in Coulomb-Blockade oder im Fall des Einzelelektronentunnelns zu unterschiedlichen Beiträgen der Spin-Bahn-Kopplung und damit zu



**Abbildung 9.12:** Coulomb-, „Blockade“ der Kernspinrelaxation: Abhängigkeit der Relaxation der gemessenen Stromkennlinie von der Warteposition der Gatterspannung. Nach Aufnahme der Kennlinie zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird die Gatterspannung für  $\Delta t = 10$  min konstant gehalten. Danach wird eine weitere Kurve aufgezeichnet. Die Wartepositionen sind schematisch angedeutet. Aus [Hüttel u. a. 2004b].

unterschiedlichen zeitlich fluktuierenden effektiven Magnetfeldern im Quantenpunkt führen. Nimmt man eine lokale Kernspinpolarisation an, so wird diese hierdurch im Falle von Coulomb-Blockade schneller durch Wechselwirkung mit den Elektronen depolarisiert.

Ein Versuch des direkten Nachweises der Kernspinpolarisation durch ein Spinresonanzexperiment war im Rahmen der Messung nicht erfolgreich. Vermutlich aufgrund eines elektrostatischen Schocks fand die Messung bald darauf ein erzwungenes Ende, da unvermittelt keine Coulomb-Blockade-Oszillationen in der Probe mehr nachweisbar waren. Seitdem konnte in keinem untersuchten Probenchip ein ähnlicher Speichereffekt beobachtet werden. Dies läßt vermuten, daß eine spezifische und nur selten auftretende energetische Anordnung der Elektronenniveaus im Quantenpunkt zu dem hier beobachteten Effekt führt. Beobachtungen von Kernspineffekten an vertikalen Doppelquantenpunkten [Ono und Tarucha 2004] sowie aktuelle Forschungsergebnisse an lateralen Doppelquantenpunkten [Petta 2005, Folk 2005] unterstützen jedoch ebenfalls die Hypothese eines Effekts der Hyperfeinwechselwirkung.



---

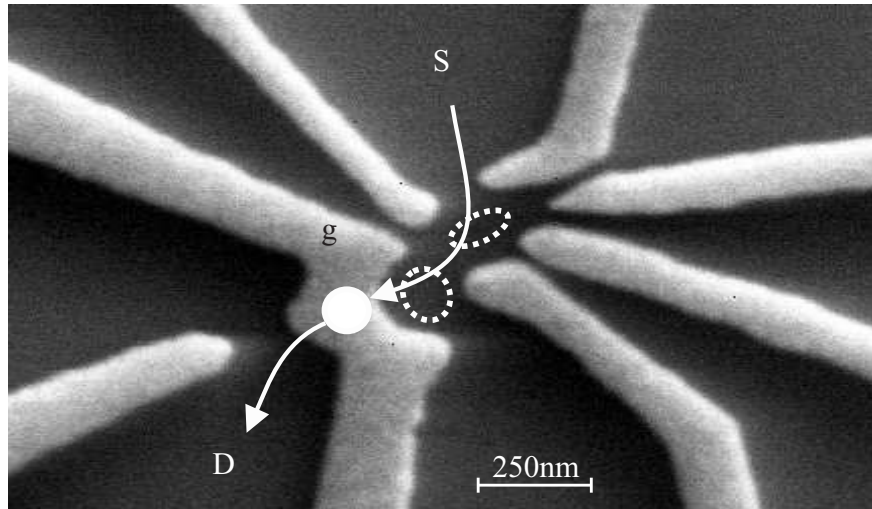
# Kapitel 10

## Spineffekte in einem Einzelgatter-Quantenpunkt

Im vorliegenden Kapitel wird eine kurze Zusammenfassung von Meßergebnissen präsentiert, die in Zusammenarbeit mit Clemens Rössler an einem Einzelquantenpunkt erzielt wurden. Eine ausführlichere Betrachtung ist in [Rössler 2004] gegeben. Abschnitt 10.1 stellt die verwendete Probengeometrie vor. In Abschnitt 10.2 wird ein Quantenpunkt, der unter einem einzelnen Gatter definiert wurde, charakterisiert und eine Messung des Zeeman-Effekts im parallelen Magnetfeld demonstriert. Abschnitt 10.3 beschreibt Messungen des Kondo-Effekts an einem Quantenpunkt.

### 10.1 Probengeometrie und Besonderheiten

Die Probenchips der Messungen dieses Kapitels entstammen im Gegensatz zu allen anderen in dieser Arbeit verwendeten einer Heterostruktur mit  $\delta$ -Dotierungsprofil und einem nur 37 nm tiefen zweidimensionalen Elektronengas (siehe Anhang A.2). Abbildung 10.1 zeigt eine Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme der in der Messung verwendeten Gatterstruktur. Ziel bei der Entwicklung der Gattergeometrie war die gleichzeitige Definition eines Doppelquantenpunkts mit starker Tunnelkopplung bei möglichst niedriger Elektronenzahl und eines Quantenpunktkontakts zur Detektion der vorhandenen Ladung. Die ungefähre Lage der beabsichtigten Quantenpunkte ist in Abbildung 10.1 durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. Das in der Abbildung mit „g“ gekennzeichnete bügelförmige Gatter, im folgenden auch als „Bügelgatter“ bezeichnet, teilt die Mesa in zwei Teile. Es kann an beiden Enden jeweils mit einer Zuleitung verbunden werden. Dies ermöglicht eine definierte Verwendung des Bügelgatters als drahtförmige Antenne zur Nahfeld-Einkopplung elektromagnetischer Wechselfelder.

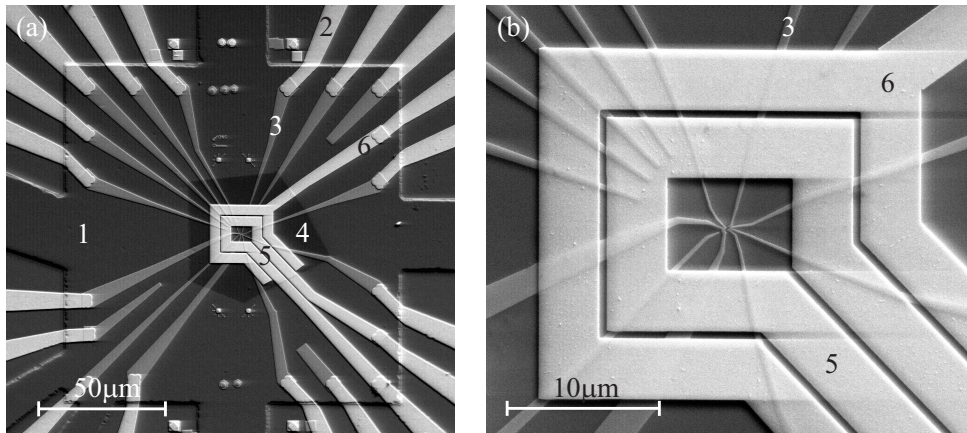


**Abbildung 10.1:** Elektronenmikroskopische Aufnahme der Gatterstruktur der verwendeten Proben. Die bei der Messung des Einzelgatter-Quantenpunkts unter Bügelgatter  $g$  verwendeten Anschlüsse sowie die vermutete Lage des Quantenpunkts und der Stromfluß sind eingezeichnet. Die gestrichelten Kreise geben die im Rahmen der Gattergeometrie vorgesehenen Quantenpunkte wieder. Nach [Rössler 2004].

Zusätzlich wurde zur Einkopplung möglichst rein magnetischer Wechselfelder, insbesondere im Hinblick auf Spinresonanz-Experimente [Engel und Loss 2002], eine lithographisch definierte, näherungsweise impedanzangepaßte Hochfrequenz-Antenne auf dem Chip entwickelt. Abbildung 10.2(a) zeigt eine Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme einer Teststruktur aus semiisolierendem GaAs, an der alle lithographischen Schritte gleichermaßen wie an einem Probenchip durchgeführt wurden. Als nahezu bildfüllendes Quadrat mit vier „Armen“ ist der erhöhte Bereich der Mesa zu sehen. Auf sie laufen von außen die durch optische Lithographie definierten Gatterzuleitungen zu (vgl. Abbildung 2.4(b)), die durch die in einem ersten elektronenlithographischen Schritt hergestellten Gatterelektroden fortgesetzt werden.

Als dunkles Fünfeck im Zentrum der Mesa ist eine Calixaren-Schicht zu erkennen. Sie wird in einem zweiten Elektronenstrahl-Lithographie-Schritt als lokaler Isolator über den Gatterelektroden aufgebracht. Über dieser Schicht wiederum wird in einem dritten Schritt mit dem gleichen Metallisierungsverfahren wie bei den Gatterelektroden eine rechteckförmige Schleifenantenne, die von einer zusätzlichen Abschirmungselektrode umgeben ist, aufgebracht. Abbildung 10.2(b) zeigt diese sowie die darunterliegenden Gatterelektroden nochmals vergrößert.

Im Rahmen der hier vorgestellten Messungen kam die lithographische Schleifenantenne aus Zeitgründen nicht mehr zum Einsatz. Die Proben der folgenden Abschnitte



**Abbildung 10.2:** Elektronenmikroskop-Aufnahmen der lithographisch hergestellten Schleifenantenne. (a) Übersichtsaufnahme mit Gatterzuleitungen, zentralem Mesabereich und Calixaren-Zwischenschicht (dunkles Fünfeck). (b) Detailaufnahme der rechteckförmigen Antenne mit Abschirmleitung (äußere Antennenschleife) über den Gatterelektroden. 1: Mesa, 2: Gatterzuleitungen, 3: Gatterelektroden, 4: Calixaren-Schicht (dunkel), 5: Schleifenantenne, 6: geerdete Abschirmung. Aus [Rössler 2004].

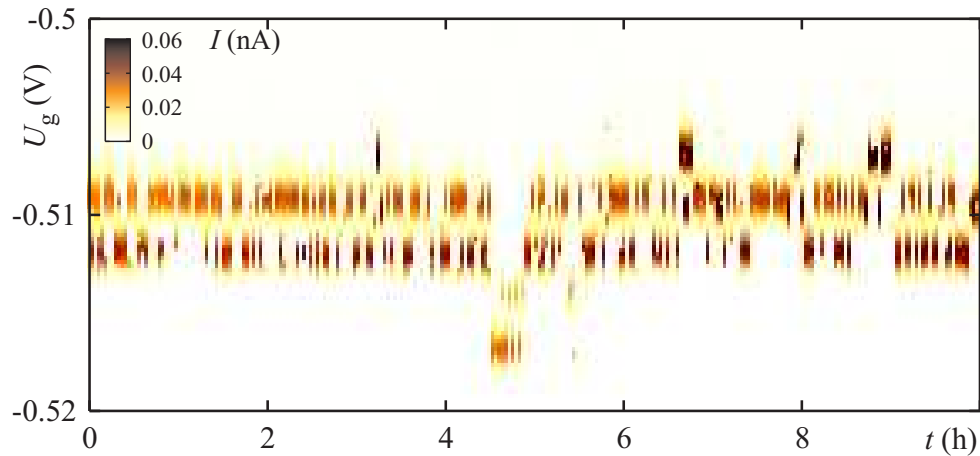
weisen die in Abbildung 10.1 dargestellte Gatterstruktur, jedoch ohne Calixarenschicht und Antenne auf.

Während der Messung wurde weiterhin eine neu konstruierte Probenhalterung getestet, die ein Verkippen der Probe relativ zum Magnetfeld und damit Messungen bei Magnetfeldern parallel zum zweidimensionalen Elektronengas ermöglicht. Eine Änderung der Probenorientierung war jedoch nur manuell bei aufgewärmtem und geöffnetem Kryostaten möglich.

## 10.2 Definition eines Einzelgatter-Quantenpunkts

Die Definition eines Quantenpunkts entsprechend der geplanten und durch die Gatterelektroden realisierten Geometrie von Abbildung 10.1 war prinzipiell möglich, wie auch die Ladungsdetektion mit Hilfe des Quantenpunktkontakts. Die beobachteten Coulomb-Blockade-Oszillationen weisen jedoch starke Fluktuationen auf. Abbildung 10.3 zeigt beispielhaft das Resultat einer kontinuierlich über mehrere Stunden hinweg wiederholten Aufzeichnung von  $I(U_g)$ . Die Gatterspannung, an der das Maximum des Tunnelstroms einer Coulomb-Blockade-Oszillation auftritt, nimmt bei jeder Wiederholung der Messung zufällig einen von mehreren diskreten Werten an. Diese Fluktuationen können durch diskrete Umladungen in der Umgebung des Quantenpunkts

## 10. Spineffekte in einem Einzelgatter-Quantenpunkt



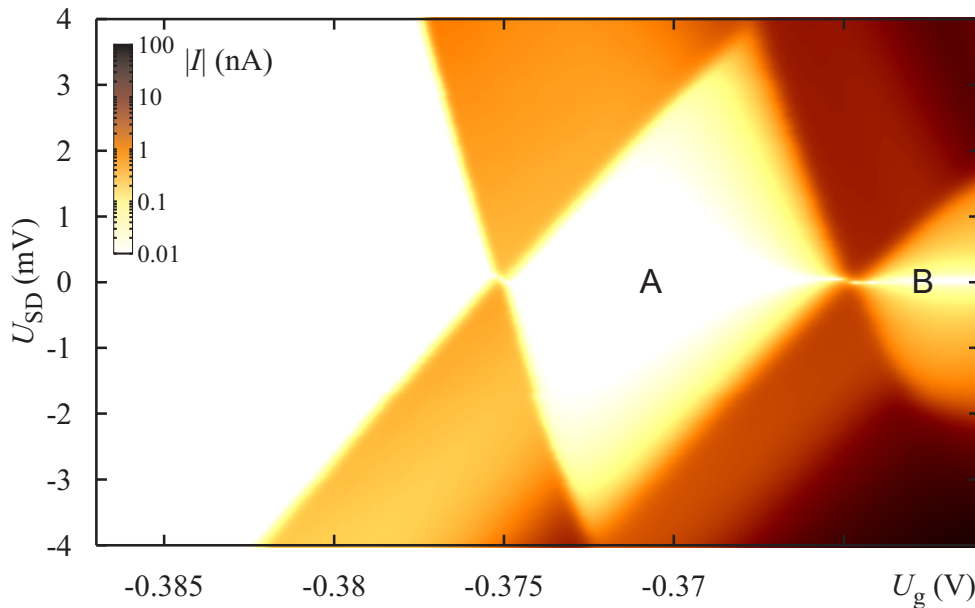
**Abbildung 10.3:** Beispiel für Umladungen in der oberflächennahen Heterostruktur. Wiederholte Messungen des dc-Stroms durch den Quantenpunkt bei  $U_{SD} = 40\mu\text{V}$ , nebeneinander aufgetragen. Jede vertikale Spur  $I(U_g)$  benötigt 2,3 min. Die Gatterspannungs-Position des beobachteten Leitwertmaximums springt in der Zeit um diskrete Beträge.

erklärt werden [Rössler 2004]. Es handelt sich hierbei vermutlich um ein Charakteristikum der verwendeten Heterostruktur, da in weiteren Untersuchungen am gleichen *wafers* ähnliche Beobachtungen gemacht wurden [Schröder 2005].

Anlegen einer negativen Spannung an das in Abbildung 10.1 mit „g“ markierte Bügelgatter teilt das zweidimensionale Elektronengas aufgrund dessen besonderer Geometrie in zwei Hälften. Der Strom durch diese Barriere unter Verwendung der in Abbildung 10.1 mit „S“ und „D“ gekennzeichneten Zuleitungen zeigt deutliche Coulomb-Blockade-Oszillationen in Abhängigkeit von der Gatterspannung, wie in Abbildung 10.4 demonstriert. Im Gegensatz zu Transportmessungen unter Verwendung mehrerer Gatter sind hier keine Fluktuationen aufgrund von Umladungseffekten beobachtbar. Für  $U_g \simeq -0,375\text{V}$  ergibt sich ein Konversionsfaktor von  $\alpha_g \simeq 0,43$ . Im Bereich der Coulomb-Blockade mit fester Elektronenzahl  $A$  (siehe Abbildung 10.4) wird eine Ladeenergie von  $E_C \simeq 4\text{meV}$  beobachtet. Dies ermöglicht eine grobe Abschätzung der Elektronenzahl aus der Elektronenflächendichte des freien zweidimensionalen Elektronengases analog Gleichung 9.1 als  $N \lesssim 22$ .

Der Grund für das Auftreten der Coulomb-Blockade-Oszillationen bei Verwendung nur einer Gatterelektrode kann mit den vorliegenden Daten nicht eindeutig identifiziert werden. Die Coulomb-Blockade-Oszillationen treten sehr ähnlich in zwei Probenchips mit gleicher Gattergeometrie auf. Hierdurch erscheint eine Störstelle bzw. eine Verunreinigung unter dem Bügelgatter als Ursache eines lokalen Potentialminimums unwahrscheinlich. Ein beispielsweise eingefangenes Staubpartikel müsste zudem mindestens eine der Tiefe des zweidimensionalen Elektronengases vergleichbare

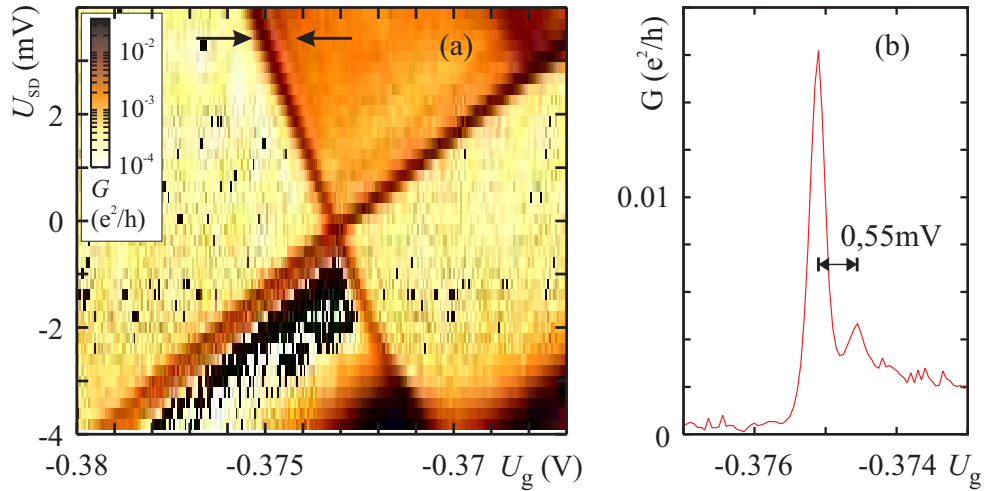




**Abbildung 10.4:** Absolutbetrag des Stroms durch den von Gatter  $g$  gebildeten Quantenpunkt in logarithmischer Farbskala, als Funktion von  $U_{SD}$  und  $U_g$ . Aus [Rössler 2004].

Größe haben, um ein Minimum des elektrostatischen Potentials im zweidimensionalen Elektronengas verursachen zu können. Eine Betrachtung des Gatters im Rasterkraftmikroskop nach der Messung lieferte hierzu jedoch keine Anhaltspunkte. Weitere Vermutungen bezüglich der Ursache des beobachteten Potentialtopfs beruhen auf Bereichen konvexer und konkaver Krümmung der Gatterelektrode und deren Einfluß auf die elektrische Feldverteilung. Auch können insbesondere mechanische Spannungen unterhalb der Gatterelektrode bei Abkühlen der Probe über den piezoelektrischen Effekt für Potentialverformungen verantwortlich sein.

Die Abwesenheit der beim Einsatz mehrerer Gatter drastischen Fluktuationen ist ein weiteres auffallendes Charakteristikum der Messung aus Abbildung 10.4. Verschiedene Gründe hierfür sind möglich. Die vermutete Lage des Quantenpunkts vollständig unterhalb einer negativ geladenen Gatterelektrode kann dazu führen, daß Oberflächenzustände in seiner Nähe aufgrund der Metallisierung kurzgeschlossen sind. Fluktuationen können durch die Elektronen in den metallischen Gatterelektroden abgeschirmt werden. Weiterhin ist denkbar, daß durch das Potential der Gatterelektrode eventuell benachbarte Tunnelsysteme aus dem Gleichgewicht verschoben werden und deshalb nicht mehr als Fluktuatoren auftreten.

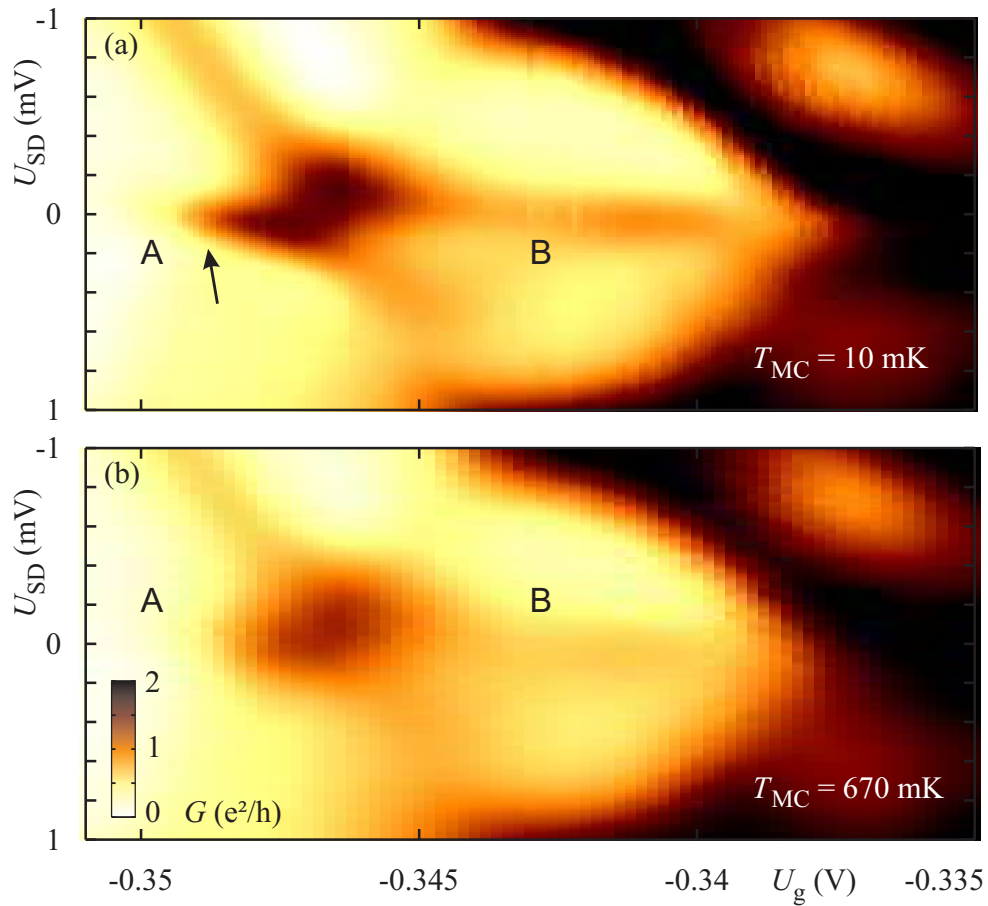


**Abbildung 10.5:** (a) Differenzieller Leitwert des Quantenpunkts  $G$  bei  $B_{\parallel} = 11$  T in Abhängigkeit von Gatterspannung  $U_g$  und *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$ . (b) Spur durch (a) für  $U_{SD} = 3,8$  mV.

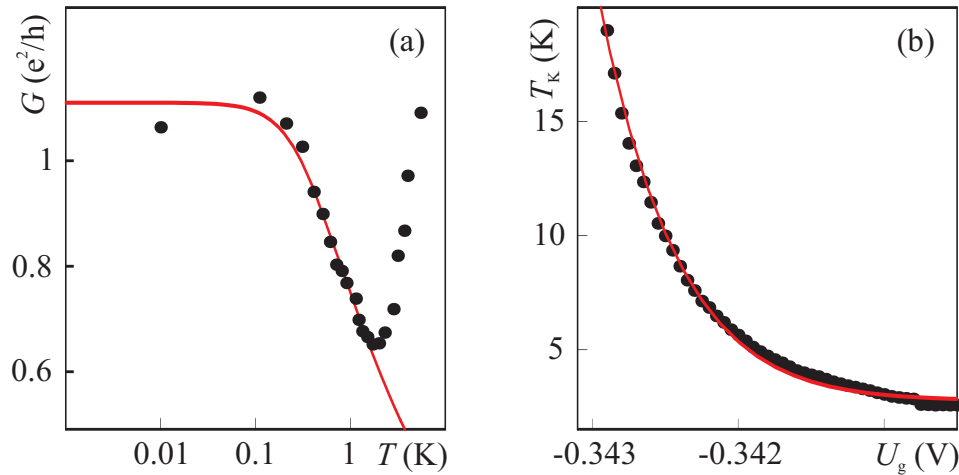
Abbildung 10.5(a) zeigt eine Messung des nichtlinearen Transports durch den Quantenpunkt bei einem hohen Magnetfeld  $B_{\parallel} = 11$  T parallel zum zweidimensionalen Elektronengas. Das Magnetfeld führt, wie in der Abbildung durch Pfeile verdeutlicht, zur Bildung eines Nebenmaximums der Linien erhöhten differentiellen Leitwerts. Bei einem Konversionsfaktor von  $\alpha_g \simeq 0,45$  entspricht es einem angeregten Zustand mit Anregungsenergie  $\Delta\epsilon^* = \alpha_g \Delta U_g = 0,25 \pm 0,02$  meV. Ein wahrscheinlicher Grund für eine derartige Aufspaltung des Quantenpunkt-Grundzustands ist die Zeeman-Wechselwirkung der Elektronenspins. Abweichungen der Ausrichtung des Probenchips, die zu einer Magnetfeldkomponente senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas und damit zu orbitalen Effekten führen, können aufgrund der Länge und mechanischen Instabilität der Probenbühne des Mischkühlers allerdings nicht vollständig ausgeschlossen werden. Unter der Annahme, daß das Magnetfeld ideal parallel zum zweidimensionalen Elektronengas verläuft, entspricht obige Aufspaltung einem Landé-Faktor von  $|g| \simeq 0,39$ . Dies stimmt mit dem in der Literatur für  $B_{\parallel} = 11$  T zu findenden Wert  $g = -0,345 \pm 0,06$  überein [Hanson u. a. 2003].

### 10.3 Beobachtung des Kondo-Effekts

Abbildung 10.6(a) zeigt eine Messung des differentiellen Leitwerts des zweiten in den Messungen dieses Kapitels verwendeten Probenchips aus der gleichen Heterostruktur und mit identischer Gattergeometrie als Funktion der Gatterspannung  $U_g$  und der



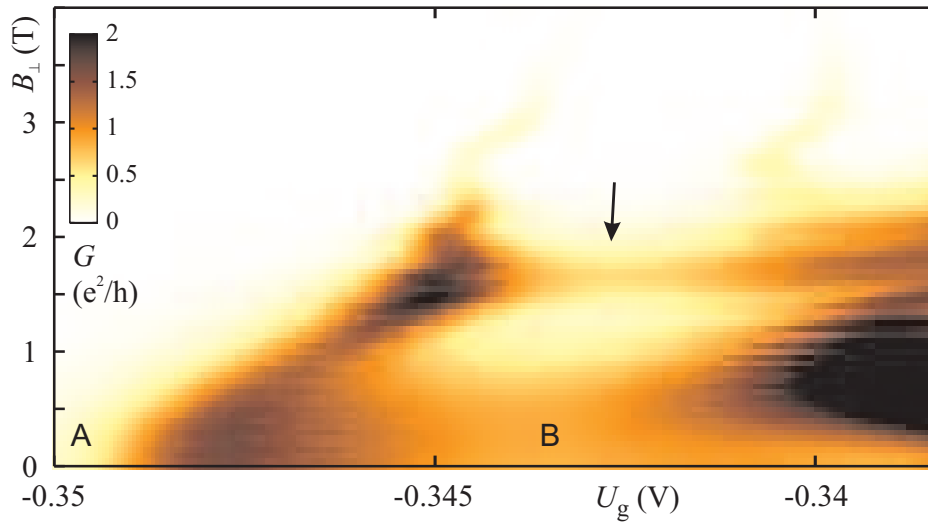
**Abbildung 10.6:** Differenzieller Leitwert des Quantenpunkts als Funktion von Gatterspannung  $U_g$  und *source-drain*-Spannung  $U_{SD}$  bei (a)  $T_{MC} = 10$  mK bzw. (b)  $T_{MC} = 670$  mK. Aus [Rössler 2004].



**Abbildung 10.7:** (a) Temperaturabhängigkeit des differentiellen Leitwerts bei  $U_g = -0,3405$  V und  $U_{SD} = 0$ , d.h. im Bereich des Kondo-Effekts. Die durchgezogene Linie resultiert aus einer Kurvenanpassung nach Gleichung 3.44. Für die Kondo-Temperatur ergibt sich hierbei  $T_K = 2,57$  K. (b) Abhängigkeit der jeweils aus Kurvenanpassungen wie in (a) resultierenden Kondo-Temperatur von der Gatterspannung  $U_g$ . Aus [Rössler 2004].

*source-drain*-Spannung  $U_{SD}$ . Wiederum wurde ein Quantenpunkt unter dem Bügelgatter  $g$  entsprechend der Skizze in Abbildung 10.1 definiert. Im in der Abbildung mit B markierten Coulomb-Blockade-Bereich ist für  $T_{MC} = 10$  mK (Abbildung 10.6(a)) und  $U_{SD} = 0$  eine deutliche Kondo-Resonanz erhöhten differentiellen Leitwerts erkennbar. Abbildung 10.6(b) zeigt eine analoge Messung bei  $T_{MC} = 670$  mK. Hier kann wie von der Theorie für eine Kondo-Temperatur in der Größenordnung von  $T_K \sim 1$  K vorhergesagt ein deutlicher Rückgang des Kondo-Leitwerts beobachtet werden.

Das Ergebnis einer beispielhaften Auswertung einer temperaturabhängigen Messung ist in Abbildung 10.7(a) für  $U_g = -0,3405$  V und  $U_{SD} = 0$  gezeigt. Hier ist der differentielle Leitwert als Funktion der Mischkammertemperatur  $T_{MC}$  aufgetragen. Die durchgezogene Linie entspricht einer Modellkurve nach Gleichung 3.44, wobei zur Kurvenanpassung alle Datenpunkte mit Temperatur  $T_{MC} \leq T_{MC}(G \text{ minimal})$  verwendet wurden. Als Fitparameter erhält man  $T_K = 2,57$  K sowie  $s = 0,167$ . Durch wiederholtes Durchführen derartiger Kurvenanpassung für verschiedene Gatterspannungswerte  $U_g$  kann die Abhängigkeit der Kondo-Temperatur von der Gatterspannung und damit vom chemischen Potential im Quantenpunkt bestimmt werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 10.7(b) für den in Abbildung 10.6 mit B bezeichneten Gatterspannungsbereich gezeigt. Die durchgezogene Linie ist eine Exponentialfunktion. Man erhält im betrachteten Bereich eine gute qualitative Übereinstimmung mit der in Gleichung 3.43 vorhergesagten Abhängigkeit.



**Abbildung 10.8:** Differenzieller Leitwert des Quantenpunkts  $G$  in Abhängigkeit von Magnetfeld  $B_{\perp}$  senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas und Gatterspannung  $U_g$  für  $U_{SD} \simeq 0$ . Aus [Rössler 2004].

Am rechten Rand des Coulomb-Blockade Bereichs A in Abbildung 10.6(a) kann bei tiefen Temperaturen ebenfalls über einen kleinen Gatterspannungsbereich eine Kondo-Anomalie des Leitwerts beobachtet werden (siehe Pfeil in Abbildung 10.6(a)). Dies ist insofern interessant, als Kondo-Effekt nur für endlichen Grundzustandsspin beobachtet werden kann. Es weist auf das mögliche Vorliegen eines Zustands mit Gesamtspin  $S \geq 1$  in einem der Coulomb-Blockade-Bereiche hin.

Bei Vorliegen eines Magnetfelds wird die Spinentartung der Energieniveaus einer Kondo-Störstelle durch die Zeeman-Wechselwirkung aufgehoben. Damit erwartet man in diesem Fall eine Aufspaltung der Kondo-Resonanz in  $U_{SD}$ -Richtung und einen Rückgang des durch den Kondo-Effekt verursachten differentiellen Leitwerts bei  $U_{SD} = 0$  [Cronenwett u. a. 1998]. Zusätzlich verursacht ein Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas eine Einschränkung der elektronischen Zustände, womit eine schwächere Kopplung an die Zuleitungen und ebenfalls eine Abschwächung des Kondo-Effekts einhergeht.

Abbildung 10.8 zeigt den differentiellen Leitwert des Quantenpunkts in linearer Antwort abhängig von Gatterspannung  $U_g$  und Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas  $B_{\perp}$ . Der Buchstabe B markiert hierbei wieder den Coulomb-Blockade-Bereich, in dem in Abbildung 10.6 für  $B_{\perp} = 0$  stark durch Kondo-Effekt erhöhter Leitwert beobachtet wird. Im betrachteten Magnetfeldbereich  $B_{\perp} < 4\text{T}$  ist die Zeeman-Aufspaltung der elektronischen Zustände kleiner als die in Abbildung 10.6 bestimmte Halbwertsbreite in  $U_{SD}$  des Kondo-Leitwertmaximums, so daß eine

Aufspaltung des Maximums nicht aufgelöst werden konnte.

Wie in Abbildung 10.8 sichtbar, geht der Leitwert im Coulomb-Blockade-Bereich  $B$  für  $0\text{T} \leq B_{\perp} \lesssim 1,5\text{T}$  mit wachsendem Magnetfeld zurück, erreicht dann aber für  $B_{\perp} \simeq 1,65\text{T}$  wieder ein lokales Maximum. Mehrere Ursachen sind hierfür möglich. Zustände hohen Spins führen im allgemeinen zu niedrigen Kondo-Temperaturen. Daher kann ein Grundzustandsübergang des Quantenpunkts hin zu geringerer Spinpolarisation, wie z.B. ein Übergang von Spin  $3/2$  zu Spin  $1/2$ , eine Zunahme der Kondo-Temperatur mit wachsendem Magnetfeld verursachen [van der Wiel u. a. 2000]. Weiterhin kann jedoch auch eine bei einem bestimmten Magnetfeld vorliegende Entartung von Singlet- und Triplet-Zuständen eines Quantenpunkts zu einer deutlichen Verstärkung des Kondo-Effekts führen [Sasaki u. a. 2000]. Ein regelmäßiges Muster erhöhten Leitwerts wie in Kapitel 7 beschrieben wurde hier nicht beobachtet.

---

# Kapitel 11

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Dissertation werden Quantenpunkte mittels Gatterelektroden bei tiefen Temperaturen elektrostatisch im zweidimensionalen Elektronengas einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur definiert. Quantenpunkte sind elektrisch leitende Inseln in einem ansonsten nichtleitenden Halbleiter. In ihnen sind Elektronen in einem Potential gefangen, so daß man auch von „künstlichen Atomen“ spricht. Das Einschränkungspotential der hier definierten Quantenpunkte innerhalb der Ebene des zweidimensionalen Elektronengases wird durch Anlegen von Spannungen an Gatterelektroden auf der Kristalloberfläche erzeugt. Die Herstellung der Gatterelektroden mit charakteristischen Abmessungen von  $\sim 100\text{nm}$  und ihrer Zuleitungen mittels optischer und Elektronenstrahlolithographie ist in Kapitel 2 beschrieben.

Aufgrund der elektrostatischen Abstoßung tritt bei der Messung von Tunnelströmen durch diese Quantenpunkte das Phänomen der Coulomb-Blockade auf. Die für Ladungstransport notwendige Änderung der Elektronenzahl auf einem Quantenpunkt ist nur bei bestimmten Werten des elektrostatischen Potentials am Ort des Quantenpunkts möglich, ansonsten ist Einzelelektronentunneln unterdrückt. Zusätzlich findet eine Quantisierung der elektronischen Zustände im durch die Gatterelektroden erzeugten Einschränkungspotential statt. Die Eigenenergien dieser Zustände können durch Transportspektroskopie, also die Untersuchung der Tunnelströme in Abhängigkeit von u.A. angelegten Spannungen und Magnetfeldern untersucht werden. Zusätzlich ist es möglich, Quantenpunkte kohärent zu Doppelquantenpunkten zu koppeln. Bei Vorliegen starker Tunnelkopplung treten delokalisierte, „molekulare“ elektronische Zustände auf. Die entsprechende Theorie hierzu ist in Kapiteln 3 und 4 entwickelt. Zusätzlich kann ein im zweidimensionalen Elektronengas gebildeter Quantenpunktkontakt, also eine eindimensionale Verengung des Elektronengases, wie in Kapitel 5 beschrieben als Ladungsdetektor eingesetzt werden.

Die erfolgreiche Definition eines Quantenpunkts, der nachweislich vollständig von Leitungsbandelektronen entleert werden konnte, wird in Kapitel 7 präsentiert. Dies ermöglicht den Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit der beobachteten Quantisierungsenergien mit dem Fock-Darwin-Modell eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators. Trotz der Abweichung der Potentialform bei Anwesenheit von Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen und der Wechselwirkungen zwischen den Elektronen, die im Modell nicht berücksichtigt sind, kann für  $N \leq 6$  Elektronen eine Ähnlichkeit nachgewiesen werden. Für weiter geöffnete Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen wird weiterhin bei endlichem Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas ein regelmäßiges Auftreten des sogenannten Kondo-Effekts als Funktion von Elektronenzahl und Magnetfeld beobachtet. Dieser Hybridisierungseffekt tritt in der Regel nur deutlich bei Vorliegen eines Spin-1/2-Zustands auf. Hier führt das Magnetfeld zu einer Separation der elektronischen Zustände analog zu Landau-Niveaus in einen Kern- und einen Ringzustand. Der Spin des Ringzustands erweist sich als maßgeblich für ein Vorliegen des Kondoeffekts, so daß dieser durch Umverteilung von Elektronen zwischen Kern und Ring bei Variation des Magnetfelds ebenfalls beeinflusst wird. Schließlich wird bei hohem Magnetfeld eine Aufspaltung der Coulomb-Blockade-Oszillationen des Leitwerts beobachtet. Sie ist von der Potentialgeometrie abhängig, die genaue Ursache konnte jedoch noch nicht geklärt werden.

Durch Verformung des Einschränkungspotentials kann der Quantenpunkt bei ständiger Überwachung der Elektronenzahl zu einem stark tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkt verformt werden, wie in Kapitel 8 dargelegt ist. Das Transportspektrum dieses Doppelquantenpunkts wird für  $0 \leq N \leq 2$  Elektronen detailliert betrachtet. Messungen bei endlicher über den Doppelquantenpunkt angelegter *source-drain*-Spannung ermöglichen dabei für  $0 \leq N \leq 1$  eine eindeutige Identifikation des im Transport sichtbaren symmetrischen molekularen Grundzustands sowie des antisymmetrischen molekularen angeregten Zustands eines Elektrons im Doppelmuldenpotential. Diese neuartige Methode erlaubt zusätzlich eine Bestimmung der Tunnelaufspaltung im Fall starker Tunnelkopplung. Viele bisher publizierte Methoden sind in diesem Grenzfall nicht anwendbar [Hayashi u. a. 2003, DiCarlo u. a. 2004]. Die Tunnelaufspaltung kann so als Funktion von Gatterspannungen und Magnetfeld senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas untersucht werden. Bei endlichem Magnetfeld und endlicher Potentialasymmetrie kann zudem auch eine Hybridisierung zwischen dem Grundzustand einer Potentialmulde und einem angeregten Zustand der zweiten Potentialmulde, die zu einer Niveauabstoßung führt, beobachtet werden. Das Transportspektrum am Übergang  $1 \leq N \leq 2$  wird mit dem Fall höchstens eines Elektrons im Doppelquantenpunkt verglichen. Hier treten zusätzliche Kotunnelprozesse auf, die zu einem höheren Strom bzw. differentiellen Leitwert führen. Ein Vergleich mit theoretischen Vorhersagen für das Zustandsspektrum bei  $N = 2$  Elektronen wird durchgeführt, diese lassen jedoch eine Spin-Austauschkopplung erwarten, die energetisch unterhalb der Linienbreite liegt



---

und deshalb nicht direkt beobachtet werden kann.

Ein Speichereffekt auf einer Zeitskala von  $\sim 10$  min kann in der Messung von Kapitel 9 im Strom durch einen Quantenpunkt mittlerer Elektronenzahl ( $N \lesssim 60$ ) beobachtet werden. Bei Einstrahlung eines Mikrowellensignals treten Gleichrichtungseffekte auf. Diese führen bei einer bestimmten vorliegenden Elektronenzahl zu einer charakteristischen Kennlinie des dc-Stroms als Funktion einer Gatterspannung. Diese Kennlinie verändert sich stark bei Anlegen eines Magnetfelds senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas. Wird das Magnetfeld wieder auf Null reduziert, so verbleibt eine Veränderung. Sie relaxiert mit einer Zeitkonstante des exponentiellen Zerfalls von  $\tau_A = 5 \dots 12$  min in eine zeitunabhängige Form. Die Abhängigkeit der Relaxation von verschiedenen Parametern wird untersucht. Die Zeitskala legt eine lokale, dynamisch induzierte Kernspinpolarisation als Ursache nahe. Ein dementsprechendes Modell wird aufgestellt, und weitere Indizien, die einen derartigen Effekt unterstützen, werden präsentiert. Kapitel 10 schließlich faßt Messungen zusammen, in denen in einer oberflächennahen Heterostruktur reproduzierbar bei zwei Probenchips ein sehr stabiler Quantenpunkt unter einer einzelnen speziell geformten Gatterelektrode gebildet wurde. Hier konnte ein sehr deutlicher Kondo-Effekt beobachtet werden. Weiterhin ermöglicht eine Messung bei hohem Magnetfeld parallel zum zweidimensionalen Elektronengas eine Beobachtung der Zeeman-Aufspaltung.

Die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Untersuchungen haben zusammenfassend als Ziel die Charakterisierung der Quantenzustände eines Quantenpunkts oder Doppelquantenpunkts und seiner Kopplungen an die Umgebung. Dies ist insbesondere auch durch die Vorschläge motiviert, in Quantenpunkten vorliegende Zweizustandssysteme als Qubits, also Bausteine des hypothetischen Quantencomputers, einzusetzen. Damit liegen die durchgeführten Messungen in vieler Hinsicht im aktuellen Trend der Forschung an elektrostatisch definierten Quantenpunkten. Transportspektroskopie von lateralen Einzelquantenpunkten im Grenzfall minimaler Elektronenzahl wurde erstmals 2000 erfolgreich durchgeführt [Ciorga u. a. 2000]. Nur eine sehr kleine Zahl von Arbeitsgruppen weltweit konnte dies bereits an einem Doppelquantenpunkt nachvollziehen [Elzerman u. a. 2003, Petta u. a. 2004, Hüttel u. a. 2004a, Pioro-Ladrière u. a. 2005]. In der verwendeten Gattergeometrie, der Methode der Verzerrung eines Einzelquantenpunkts und der speziellen Betrachtung des Grenzfalls starker Tunnelkopplung sticht die vorliegende Arbeit hierbei hervor. Ein Ziel zukünftiger Messungen kann es z.B. sein, aufbauend auf den Messungen aus Kapitel 8 das Zustandsspektrum eines stark tunnelgekoppelten Doppelquantenpunkts, der über mehr Parameter steuerbar ist, systematisch zu vermessen und mit theoretischen Vorhersagen zu vergleichen [Golovach und Loss 2004].

Eine weitere Möglichkeit zur Erweiterung der vorliegenden Resultate liegt in der Beobachtung zeitabhängiger Phänomene und der Kontrolle von Spin und Ladung innerhalb der Kohärenzzeit. Fernziel kann hierbei die Verwendung komplexer Pulsfolgen

für Gatterspannungen und Hochfrequenzsignale wie im Fall der Kernspinresonanz-Qubits sein [Vandersypen u. a. 2001]. Die hierzu prinzipiell notwendige Technologie, von thermisch angekoppelten Hochfrequenzleitungen in den Kryostaten bis hin zu Tieftemperaturverstärkern, wird derzeit an dem in Kapiteln 7 und 8 verwendeten Meßplatz aufgebaut. Während auf der Zeitskala der Elektronenspins weltweit bereits bemerkenswerte Fortschritte erzielt wurden, besteht bei der Kontrolle von Ladungszuständen in einem Doppelquantenpunkt innerhalb ihrer Kohärenzzeit  $t_2 \lesssim 1$  ns eine beachtliche technische Herausforderung. Erste zeitaufgelöste Beobachtungen des kohärenten Tunnelns eines Elektrons wurden bereits veröffentlicht [Hayashi u. a. 2003]. Die bisherigen Untersuchungen behandeln jedoch den Fall hoher Elektronenzahl  $N$ . Die kohärente Kopplung zweier derartiger „Ladungs-Qubits“, d.h. zweier Elektronen, die in separaten Doppelquantenpunkten gefangen sind, allein über die elektrostatische Wechselwirkung konnte bisher noch nicht nachgewiesen werden. Durch Einsatz eines Zweikanal-Pulsgenerators im sub-ns-Bereich besteht hier die Möglichkeit, den Grenzfall  $N = 1$  und möglicherweise sogar die Kopplung zweier Doppelquantenpunkte anzugehen. Längere Kohärenzzeiten als in [Hayashi u. a. 2003] können zudem, wie in Silizium-Doppelquantenpunkten hoher Elektronenzahl beobachtet [Gorman u. a. 2005], in isolierten Systemen ohne Zuleitung erwartet werden.

In etwa zeitgleich mit den in dieser Arbeit in Kapitel 9 präsentierten Messungen eines Langzeit-Speichereffekts wurden Beobachtungen durchgeführt, in denen eine Transportblockade in vertikalen Doppelquantenpunkten zu lokaler dynamischer Kernspinpolarisation führt [Ono u. a. 2002, Ono und Tarucha 2004]. Dies äußert sich in Hystereseeffekten und Oszillationen des Tunnelstroms mit einer Periode von mehreren Minuten. Aktuelle Arbeiten an lateralen Doppelquantenpunkten im Bereich schwacher Kopplung zeigen ähnliche Effekte auf, sowohl in Gleichstrom-Messungen [Folk 2005] als auch in der Ladungsdetektion bei gepulsten Gatterspannungen [Petta 2005]. Hier ergeben sich Fragestellungen, inwieweit lokale Kernspineffekte die Verwendung von Quantenpunkten als Spin-Qubits behindern oder inwieweit sie sogar ausgenützt werden können [Khaetskii u. a. 2003, Pershin 2004]. Die Messungen dieser Arbeit legen nahe, daß auch in einem Einzelquantenpunkt eine lokale Kernspinpolarisation erzeugt werden kann. Die Suche nach derartigen Effekten, insbesondere zur weiteren Klärung der vorliegenden Mechanismen, sollte damit in jedem Falle fortgesetzt werden.

Ein weiteres Gebiet aktueller Forschung ist der Kondo-Effekt. Im Anschluß an die Messungen dieser Arbeit wurden weitergehende Untersuchungen an dem Doppelquantenpunkt aus Kapitel 8 durchgeführt. Hierbei wurden schwerpunktmäßig die bei den Elektronenzahlen  $N = 1$  und  $N = 2$  beobachteten Kondo-Phänomene untersucht [Schröer 2005]. Das Wechselspiel des Kondo-Effekts mit anderen elektronischen Kopplungen bietet ein weites Feld für zukünftige Forschungsarbeit.

Schließlich sollte der Blick auch über GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen hinausgehen. Aktuelle Arbeiten z.B. an GaN-Heterostrukturen [Chou u. a. 2005] oder zwei-

---

dimensionalen Lochgasen in GaAs [Yau u. a. 2002] bieten die Möglichkeit des Vergleichs der verschiedenen Materialsysteme. Insbesondere können auch aufgrund der unterschiedlichen Bandstrukturen Parameterbereiche untersucht werden, die in AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen mit zweidimensionalen Elektronengasen nur schwer erreichbar sind. Ein vielversprechendes System im Hinblick auf die kohärente Kontrolle von Quantenzuständen sind ebenfalls Kohlenstoff-Nanoröhrchen. Das mit 98,9% in der Natur vorherrschende Isotop  $^{12}\text{C}$  hat keinen Kernspin, so daß die Hyperfeinwechselwirkung als wesentliche Quelle für Dekohärenz elektronischer Zustände nahezu ausscheidet. Isotopenreine Materialien sind zudem theoretisch möglich.

Insgesamt bieten Halbleiter-Quantenpunkte ein faszinierendes Feld für Experimente sowohl im Bereich der Grundlagenforschung als auch im Hinblick auf zukünftige Technologien. Speziell Quantenpunkte und Doppelquantenpunkte mit wenigen Elektronen erscheinen bisweilen als quantenmechanisches System „direkt wie aus dem Lehrbuch“ — so daß fundamentale Zusammenhänge kontrollierbar und direkt sichtbar gemacht werden können.



---

# Anhang A

## Verwendete Heterostrukturen

Im folgenden sind die technischen Informationen der verwendeten Heterostrukturen aus [Eberl 1998] und [Wegscheider 2002] zusammengefaßt.

### A.1 Heterostruktur #81059, K. Eberl

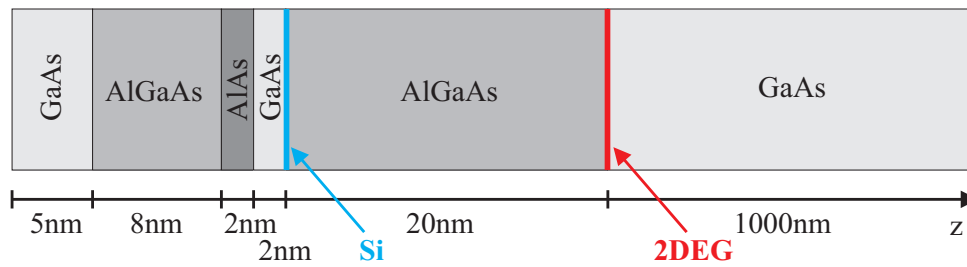
- Messungen in Kapiteln 7, 8 und 9
- Herstellung durch K. Eberl, Max-Planck-Institut für Festkörperphysik, Stuttgart
- Bezeichnung #81059, Herstellungsdatum 22. November 1998
- Schichtenfolge: siehe Abbildung 2.1(a), Seite 6
- 2DEG 120 nm unter der Oberfläche
- *spacer*-Dicke 40 nm
- Beweglichkeit im 2DEG bei 4,2 K (dunkel):  $\tilde{\mu} = 75,31 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$
- Elektronenflächendichte im 2DEG bei 4,2 K (dunkel):  $n_s = 1,75 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2}$

### A.2 Heterostruktur C021223A, W. Wegscheider

- Messungen in Kapitel 10
- Hergestellt durch W. Wegscheider, Universität Regensburg

## A. Verwendete Heterostrukturen

---



**Abbildung A.1:** Schichtenfolge in Heterostruktur C021223A, W. Wegscheider

- Bezeichnung C021223A
- Schichtenfolge: siehe Abbildung A.1, Seite 156
- 2DEG 37 nm unter der Oberfläche
- *spacer*-Dicke 20 nm
- Beweglichkeit im 2DEG bei 4,2 K (dunkel):  $\tilde{\mu} = 37,5 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$
- Elektronenflächendichte im 2DEG bei 4,2 K (dunkel):  $n_s = 3,75 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2}$

---

# Anhang B

## Parameter der Probenpräparation

Die hier angegebenen Parameter beziehen sich sofern nicht weiter spezifiziert auf den Probenchip von Kapiteln 7 und 8. Die Details zur Herstellung der Calixaren-Isolationsschicht sind unten angegeben. Ansonsten weichen die prinzipiellen Präparationsschritte der anderen betrachteten Probenchips nicht wesentlich hiervon ab. Für die genauen Details sei auf [[Weber 2002](#)] und [[Rössler 2004](#)] verwiesen.

### Reinigen der Proben

Die folgenden Schritte wurden bis zum Erreichen einer sauberen Oberfläche wiederholt:

- Kochen in Azeton (5-20min)
- Baden in Isopropanol
- Abblasen im Stickstoffstrahl
- vorsichtiges Behandeln mit Ultraschall (Gerät Bandelin Sonorex Super Digital, Leistung-Einstellung 10%, 2 – 15 sec)
- vorsichtiges Abwischen der Probenoberfläche mit einem azetongetränkten Linsenputztuch

### Definition der Mesa

- Photolack: Shipley MicroPosit S1805, aufgeschleudert 3 sec bei 800rpm und 30 sec bei 5600rpm

## B. Parameter der Probenpräparation

---

- Backen: 35 min bei 90°C
- Belichtung (siehe Abbildung 2.4(b)) mit Maskaligner vom Typ Karl Suss MJB3, Belichtungsdauer 11 sec
- Entwicklung durch 30sec Schwenken in Shipley MicroPosit Developer (verdünnt 1 : 1 mit destilliertem Wasser)
- Ätzen: H<sub>2</sub>O : H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> : H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> im Volumenverhältnis 100 : 3 : 1, Temperatur ~ 10° C, Dauer 230sec (an einem anderen Heterostruktur-Chip gemessene Ätzrate 0,7 nm/sec)
- Reinigen mit destilliertem Wasser und Azeton

### Ohm'sche Kontakte

- Photolack: Shipley MicroPosit S1818, aufgeschleudert 3sec bei 800rpm und 30sec bei 5000rpm
- Backen: 30 min bei 90°C
- Belichtung (siehe Abbildung 2.4(b)) am gleichen Maskaligner, 17sec
- Entwicklung 45sec
- Aufgedampfte Metallschichten: 60nm AuGe (88 : 12), 10nm Ni, 60nm AuGe (88 : 12) (Raten < 0,15 nm/sec für AuGe, < 0,05 nm/sec für Ni)
- *lift-off* in kochendem Azeton
- Eindiffundieren in Argon-Wasserstoff-Atmosphäre: 5 min bei 110° C, 2 min bei 360° C, 30sec bei 420° C
- Reinigen in Azeton

### Gatterzuleitungen

- Photolack: Shipley MicroPosit S1813, aufgeschleudert 3sec bei 800rpm und 30sec bei 5500rpm
- Backen: 30 min bei 90° C
- Belichtung am gleichen Maskaligner (siehe Abb. 2.4(b)), 11 sec
- Entwicklung 30sec



- 
- Aufgedampfte Schichten: 5,2nm NiCr (1:1), dann wegen Fehlfunktion der Aufdampfanlage belüftet und neu abgepumpt, dann 150nm Au (Raten < 0,04nm/sec für NiCr, < 0,1 nm/sec für Au)
  - *lift-off* in kochendem Azeton: die Gold-Leiterbahnen haften nicht auf dem NiCr, sondern lösen sich ab.
  - Säubern in Aceton und Isopropanol
  - Neue Photolack-Schicht Shipley MicroPosit S1813, aufgeschleudert 3 sec bei 800rpm und 30 sec bei 5500 rpm
  - Backen: 30 min bei 90° C
  - Belichtung am gleichen Maskaligner (siehe Abb. 2.4(b)) mit Ausrichten auf die bereits vorhandene NiCr-Schicht, 11 sec
  - Entwicklung 30 sec
  - Zusätzlich aufgedampfte Schichten: 5 nm NiCr (1:1), dann 150nm Au (Raten < 0,04nm/sec für NiCr, < 0,1 nm/sec für Au)
  - *lift-off* in heissem Azeton unter Zuhilfenahme von Ultraschall (Gerät Bandelin Sonorex Super Digital, Leistungs-Einstellung 20%, 1 min)

### **Strukturerzeugung mit dem REM**

- Säubern in Azeton und Isopropanol, Abblasen mit Stickstoff
- Erste Lackschicht: Polymethylmethacrylat mit einem Molekulargewicht von ca.  $1,5 \cdot 10^5$  u, aufgeschleudert 1 s mit 800rpm und 30 s mit 6000rpm
- Backen: 30 min bei 120° C
- Zweite Lackschicht: Polymethylmethacrylat mit einem Molekulargewicht von ca.  $5 \cdot 10^5$  u, aufgeschleudert 1 s mit 800rpm und 30 s mit 6000 rpm
- Backen  $\sim$  36h bei 120° C
- Elektronenstrahlolithographie mit dem LEO FEREM 982; Beschleunigungsspannung 5 kV, Emissionsstrom 9,0 pA, Betrugungsdosis  $52 \mu\text{As}/\text{cm}^2$
- Entwickeln in einer Mischung Methylisobutylketon und Isopropanol im Volumenverhältnis 1 : 3, Dauer 50 sec

## B. Parameter der Probenpräparation

---

- Aufgedampfte Schichten: 3 nm Ti (Rate  $< 0,04$  nm/s), 32 nm Au (Rate  $\lesssim 0,07$  nm/s)
- Liftoff in kochendem Azeton

### **Calixaren-Schicht**

Folgende Parameter wurden bei der Definition der Calixaren-Isolationsschicht der Schleifenantenne in Kapitel 10 verwendet (aus [Rössler 2004]):

- Reinigen mit Aceton und Isopropanol
- Belacken: 1 g Calixaren gelöst in 39 ml Chlorbenzol, aufgeschleudert 1 s bei 800rpm, dann 30s bei 3000rpm
- Backen: 30 min bei 170° C
- Belichten: Beschleunigungsspannung 5kV, Blende 10 $\mu$ m, Bestrahlungsdosis 15 mAs/cm<sup>2</sup>
- Entwickeln: 30 s in Xylol
- Stop-Bad: 30 s in Isopropanol
- Resultierende Schichtdicke  $\sim 40$  nm

# Literaturverzeichnis

- [Abrams und Lloyd 1999] ABRAMS, Daniel S. ; LLOYD, Seth: Quantum Algorithm Providing Exponential Speed Increase for Finding Eigenvalues and Eigenvectors. In: *Physical Review Letters* 83 (1999), Nr. 24, S. 5162. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v83/p5162>
- [Alivisatos 1996] ALIVISATOS, A. P.: Semiconductor Clusters, Nanocrystals, and Quantum Dots. In: *Science* 271 (1996), Nr. 5251, S. 933. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/271/5251/933>
- [Anderson 1961] ANDERSON, P. W.: Localized Magnetic States in Metals. In: *Physical Review* 124 (1961), S. 41. – URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v124/p41>
- [Anderson 1984] ANDERSON, P. W.: *Basic notions of condensed matter physics*. Addison-Wesley, 1984
- [Ashcroft und Mermin 1976] ASHCROFT, N. W. ; MERMIN, N. D.: *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, 1976
- [Ashoori 1996] ASHOORI, R. C.: Electrons in artificial atoms. In: *Nature* 379 (1996), S. 413. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/379413a0>
- [Averin und Likharev 1986] AVERIN, D. V. ; LIKHAREV, K. K.: Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions. In: *Journal of Low Temperature Physics* 62 (1986), Nr. 3, S. 345. – URL <http://link.aip.org/link/?JLT/62/345/1>
- [Barenco u. a. 1995] BARENCO, Adriano ; DEUTSCH, David ; EKERT, Artur ; JOZSA, Richard: Conditional Quantum Dynamics and Logic Gates. In: *Physical Review Letters* 74 (1995), Nr. 20, S. 4083. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v74/p4083>

- [Beenakker 1991] BEENAKKER, C. W. J.: Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 44 (1991), Nr. 4, S. 1646. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v44/p1646>
- [Blick u.a. 1996] BLICK, R. H. ; HAUG, R. J. ; WEIS, J. ; PFANNKUCHE, D. ; VON KLITZING, K. ; EBERL, K.: Single-electron tunneling through a double quantum dot: The artificial molecule. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 53 (1996), Nr. 12, S. 7899. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v53/p7899>
- [Blick u.a. 1998] BLICK, R. H. ; PFANNKUCHE, D. ; HAUG, R. J. ; VON KLITZING, K. ; EBERL, K.: Formation of a Coherent Mode in a Double Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 80 (1998), Nr. 18, S. 4032. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v80/p4032>
- [Braslau 1981] BRASLAU, N.: Alloyed ohmic contacts to GaAs. In: *Journal of Vacuum Science and Technology* 19 (1981), Nr. 3, S. 803–807. – URL <http://link.aip.org/link/?JVS/19/803/1>
- [Burkard 2001] BURKARD, Guido: *Quantum Computation and Communication using Electron Spins in Quantum Dots and Wires*, Universität Basel, Dissertation, 2001
- [Burkard u.a. 1999] BURKARD, Guido ; LOSS, Daniel ; DIVINCENZO, David P.: Coupled quantum dots as quantum gates. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 59 (1999), Nr. 3, S. 2070. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v59/p2070>
- [Bylander u.a. 2005] BYLANDER, Jonas ; DUTY, Tim ; DELSING, Per: Current measurement by real-time counting of single electrons. In: *Nature* 434 (2005), S. 361. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature03375>
- [Büttiker u.a. 1984] BÜTTIKER, M. ; IMRY, Y. ; LANDAUER, R. ; PINHAS, S.: Generalized many-channel conductance formula with application to small rings. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 31 (1984), Nr. 10, S. 6207. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v31/p6207>
- [Chou u.a. 2005] CHOU, H. T. ; LÜSCHER, S. ; GOLDHABER-GORDON, D. ; MANFRA, M. J. ; SERGENT, A. M. ; WEST, K. W. ; MOLNAR, R. J.: High-quality quantum point contacts in GaN/AlGaN heterostructures. In: *Applied Physics Letters* 86 (2005), Nr. 7, S. 073108. – URL <http://link.aip.org/link/?APL/86/073108/1>

- [Ciorga u. a. 2000] CIORGA, M. ; SACHRAJDA, A. S. ; HAWRYLAK, P. ; GOULD, C. ; ZAWADZKI, P. ; JULLIAN, S. ; FENG, Y. ; WASILEWSKI, Z.: Addition spectrum of a lateral dot from Coulomb and spin-blockade spectroscopy. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 61 (2000), Nr. 24, S. 16315. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v61/p16315>
- [Ciorga u. a. 2004] CIORGA, M. ; PIORO-LADRIERE, M. ; ZAWADZKI, P. ; LA-POINTE, J. ; WASILEWSKI, Z. ; SACHRAJDA, A. S.: Coulomb and spin blockade of two few-electron quantum dots in series in the cotunneling regime. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 70 (2004), Nr. 23, S. 235306. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v70/e235306>
- [Cronenwett u. a. 1998] CRONENWETT, Sara M. ; OOSTERKAMP, Tjerk H. ; KOUWENHOVEN, Leo P.: A Tunable Kondo Effect in Quantum Dots. In: *Science* 281 (1998), Nr. 5376, S. 540. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/281/5376/540>
- [Darwin 1930] DARWIN, C. G.: The diamagnetism of the free electron. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 27 (1930), S. 86
- [Datta 1995] DATTA, Supriyo: *Electronic transport in mesoscopic systems*. Cambridge University Press, 1995
- [De Franceschi u. a. 2001] DE FRANCESCHI, S. ; SASAKI, S. ; ELZERMAN, J. M. ; VAN DER WIEL, W. G. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Electron Cotunneling in a Semiconductor Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 86 (2001), Nr. 5, S. 878. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v86/p878>
- [Deutsch 1985] DEUTSCH, David: Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. In: *Proceedings of the Royal Society of London A* 400 (1985), S. 97. – URL <http://www.qubit.org/oldsite/research/Publications/deutsch85.pdf>
- [DiCarlo u. a. 2004] DICARLO, L. ; LYNCH, H. J. ; JOHNSON, A. C. ; CHILDRESS, L. I. ; CROCKETT, K. ; MARCUS, C. M. ; HANSON, M. P. ; GOSSARD, A. C.: Differential Charge Sensing and Charge Delocalization in a Tunable Double Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 92 (2004), Nr. 22, S. 226801. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v92/e226801>
- [Dixon u. a. 1996] DIXON, D. ; KOUWENHOVEN, L. P. ; MCEUEN, P. L. ; NAGAMUNE, Y. ; MOTOHISA, J. ; SAKAKI, H.: Influence of level alignment on tunneling between coupled quantum dots. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 53 (1996), Nr. 19, S. 12625. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v53/p12625>

- [Dobers u. a. 1988] DOBERS, M. ; KLITZING, K. v. ; SCHNEIDER, J. ; WEINMANN, G. ; PLOOG, K.: Electrical Detection of Nuclear Magnetic Resonance in GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostructures. In: *Physical Review Letters* 61 (1988), Nr. 14, S. 1650. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v61/p1650>
- [Eberl 1998] EBERL, K.: 1998. – Dokumentation zu Wafer #81059 / K. Eberl
- [Elzerman u. a. 2003] ELZERMAN, J. M. ; HANSON, R. ; GREIDANUS, J. S. ; BEVEREN, L. H. W. van ; FRANCESCHI, S. D. ; VANDERSYPEN, L. M. K. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Few-electron quantum dot circuit with integrated charge read out. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 67 (2003), Nr. 16, S. 161308. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v67/e161308>
- [Elzerman u. a. 2004] ELZERMAN, J. M. ; HANSON, R. ; WILLEMS VAN BEVEREN, L. H. ; WITKAMP, B. ; VANDERSYPEN, L. M. K. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot. In: *Nature* 430 (2004), S. 431. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02693>
- [Engel und Loss 2002] ENGEL, Hans-Andreas ; LOSS, Daniel: Single-spin dynamics and decoherence in a quantum dot via charge transport. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 65 (2002), Nr. 19, S. 195321. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v65/e195321>
- [Erlingsson u. a. 2001] ERLINGSSON, Sigurdur I. ; NAZAROV, Yuli V. ; FAL'KO, Vladimir I.: Nucleus-mediated spin-flip transitions in GaAs quantum dots. In: *Physical Review B* 64 (2001), Nr. 19, S. 195306. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v64/e195306>
- [Feynman 1985] FEYNMAN, Richard: Quantum mechanical computers. In: *Optics News* 11 (1985), S. 11
- [Field u. a. 1993] FIELD, M. ; SMITH, C. G. ; PEPPER, M. ; RITCHIE, D. A. ; FROST, J. E. F. ; JONES, G. A. C. ; HASKO, D. G.: Measurements of Coulomb Blockade with a Noninvasive Voltage Probe. In: *Physical Review Letters* 70 (1993), Nr. 9, S. 1311. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v70/p1311>
- [Flood u. a. 2004] FLOOD, Amar H. ; STODDART, J. F. ; STEUERMAN, David W. ; HEATH, James R.: CHEMISTRY: Enhanced: Whence Molecular Electronics? In: *Science* 306 (2004), Nr. 5704, S. 2055. – URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1106195>
- [Fock 1928] FOCK, V.: Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld. In: *Zeitschrift für Physik* 47 (1928), S. 446

- [Folk 2005] FOLK, Joshua: *Hyperfine Interaction and the Two-electron Spin States of a Double Quantum Dot*. Mai 2005. – Vortrag im Seminar des Sonderforschungsbereichs 631
- [Fowler u. a. 1966] FOWLER, A. B. ; FANG, F. F. ; HOWARD, W. E. ; STILES, P. J.: Magneto-Oscillatory Conductance in Silicon Surfaces. In: *Physical Review Letters* 16 (1966), S. 901. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v16/p901>
- [Fujii u. a. 1996] FUJII, K. ; GÖDEL, W. ; WHARAM, D. A. ; MANUS, S. ; KOTTHAUS, J. P. ; BÖHM, G. ; KLEIN, W. ; TRÄNKLE, G. ; WEIMANN, G.: Microwave modulation of Coulomb-blockade oscillations in a quantum dot. In: *Physica B: Condensed Matter* 227 (1996), September, S. 98. – URL [http://dx.doi.org/10.1016/0921-4526\(96\)00365-1](http://dx.doi.org/10.1016/0921-4526(96)00365-1)
- [Fujisawa u. a. 1998] FUJISAWA, Toshimasa ; OOSTERKAMP, Tjerk H. ; WIEL, Wilfred G. van der ; BROER, Benno W. ; AGUADO, Ramón ; TARUCHA, Seigo ; KOUWENHOVEN, Leo P.: Spontaneous Emission Spectrum in Double Quantum Dot Devices. In: *Science* 282 (1998), Nr. 5390, S. 932. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/282/5390/932>
- [Fujita u. a. 1996] FUJITA, J. ; OHNISHI, Y. ; OCHIAI, Y. ; MATSUI, S.: Ultrahigh resolution of calixarene negative resist in electron beam lithography. In: *Applied Physics Letters* 68 (1996), Nr. 9, S. 1297. – URL <http://link.aip.org/link/?APL/68/1297/1>
- [Geerligs u. a. 1990] GEERLIGS, L. J. ; AVERIN, D. V. ; MOOIJ, J. E.: Observation of macroscopic quantum tunneling through the Coulomb energy barrier. In: *Physical Review Letters* 65 (1990), Nr. 24, S. 3037. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v65/p3037>
- [Glazman und Raikh 1988] GLAZMAN, L. I. ; RAIKH, M. E.: Resonant Kondo transparency of a barrier with quasilocal impurity states. In: *JETP Letters* 47 (1988), Nr. 8, S. 452. – URL <http://link.aip.org/link/?JTP/47/452/1>
- [Glazman und Shekhter 1989] GLAZMAN, L. I. ; SHEKHTER, R. I.: Coulomb oscillations of the conductance in a laterally confined heterostructure. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 1 (1989), S. 5811. – URL <http://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/1/33/027>
- [Goldhaber-Gordon u. a. 1998a] GOLDBABER-GORDON, D. ; GÖRES, J. ; KASTNER, M. A. ; SHTRIKMAN, Hadas ; MAHALU, D. ; MEIRAV, U.: From the Kondo Regime to the Mixed-Valence Regime in a Single-Electron Transistor. In: *Physical Review Letters* 81 (1998), S. 5225. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v81/p5225>

- [Goldhaber-Gordon u. a. 1998b] GOLDHABER-GORDON, D. ; SHTRIKMAN, Hadass ; MAHALU, D. ; ABUSCH-MAGDER, David ; MEIRAV, U. ; KASTNER, M. A.: Kondo effect in a single-electron transistor. In: *Nature* 391 (1998), S. 156. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/34373>
- [Golovach und Loss 2003] GOLOVACH, Vitaly N. ; LOSS, Daniel: Kondo effect and singlet–triplet splitting in coupled quantum dots in a magnetic field. In: *Europhysics Letters* 62 (2003), S. 83. – URL <http://dx.doi.org/10.1209/epl/i2003-00365-x>
- [Golovach und Loss 2004] GOLOVACH, Vitaly N. ; LOSS, Daniel: Transport through a double quantum dot in the sequential tunneling and cotunneling regimes. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 69 (2004), Nr. 24, S. 245327. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v69/e245327>
- [Gorman u. a. 2005] GORMAN, J. ; HASKO, D. G. ; WILLIAMS, D. A.: *Charge-qubit operation of an isolated double quantum dot*. 2005. – URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0504451>. – cond-mat/0504451, version 2
- [Grabert und Devoret 1992] GRABERT, H. (Hrsg.) ; DEVORET, M. H. (Hrsg.): *Single charge tunneling: Coulomb blockade phenomena in nanostructures*. NATO Advanced Study Institute, Plenum, New York, 1992 (series B: physics 294)
- [Grover 1996] GROVER, Lov K.: A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9605043>, Mai 1996, S. 212. – quant-ph/9605043
- [Haken und Wolf 1998] HAKEN, Hermann ; WOLF, Hans C.: *Molekülphysik und Quantenchemie*. 3. Auflage. Springer-Verlag, 1998
- [Haldane 1978] HALDANE, F. D. M.: Scaling Theory of the Asymmetric Anderson Model. In: *Physical Review Letters* 40 (1978), S. 416. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v40/p416>
- [Hanson u. a. 2003] HANSON, R. ; WITKAMP, B. ; VANDERSYPEN, L. M. K. ; WILLEMS VAN BEVEREN, L. H. ; ELZERMAN, J. M. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Zeeman Energy and Spin Relaxation in a One-Electron Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 19, S. 196802. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v91/e196802>
- [Hanson u. a. 2004] HANSON, R. ; VANDERSYPEN, L. M. K. ; BEVEREN, L. H. W. van ; ELZERMAN, J. M. ; VINK, I. T. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Semiconductor few-electron quantum dot operated as a bipolar spin filter. In: *Physical Review B*



- (*Condensed Matter and Materials Physics*) 70 (2004), Nr. 24, S. 241304. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v70/e241304>
- [Hartmann 2002] HARTMANN, Udo: *Theory for quantum dot charge qubits — Decoherence due to cotunneling*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Diplomarbeit, 2002
- [Hatano u. a. 2004] HATANO, T. ; STOPA, M. ; YAMAGUCHI, T. ; OTA, T. ; YAMADA, K. ; TARUCHA, S.: Electron-Spin and Electron-Orbital Dependence of the Tunnel Coupling in Laterally Coupled Double Vertical Dots. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 6, S. 066806. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v93/e066806>
- [Hayashi u. a. 2003] HAYASHI, T. ; FUJISAWA, T. ; CHEONG, H. D. ; JEONG, Y. H. ; HIRAYAMA, Y.: Coherent Manipulation of Electronic States in a Double Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 22, S. 226804. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v91/e226804>
- [Hofmann 1994] HOFMANN, Frank: *Transportuntersuchungen an einzelnen und gekoppelten Quantendotstrukturen*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplomarbeit, 1994
- [Hofmann u. a. 1995] HOFMANN, F. ; HEINZEL, T. ; WHARAM, D. A. ; KOTTHAUS, J. P. ; BÖHM, G. ; KLEIN, W. ; TRÄNKLE, G. ; WEIMANN, G.: Single electron switching in a parallel quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 51 (1995), Nr. 19, S. 13872. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v51/p13872>
- [Holleitner 2002] HOLLEITNER, Alexander W.: *Kohärente Zustände in lateral definierten Quantenpunkten*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Dissertation, 2002
- [Holleitner u. a. 2002] HOLLEITNER, Alexander W. ; BLICK, Robert H. ; HÜTTEL, Andreas K. ; EBERL, Karl ; KOTTHAUS, Jörg P.: Probing and Controlling the Bonds of an Artificial Molecule. In: *Science* 297 (2002), Nr. 5578, S. 70. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/297/5578/70>
- [Hu und Das Sarma 2000] HU, Xuedong ; DAS SARMA, S.: Hilbert-space structure of a solid-state quantum computer: Two-electron states of a double-quantum-dot artificial molecule. In: *Physical Review A* 61 (2000), S. 062301. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRA/v61/e062301>
- [Högele u. a. 2004] HÖGELE, Alexander ; SEIDL, Stefan ; KRONER, Martin ; KARRAI, Khaled ; WARBURTON, Richard J. ; GERARDOT, Brian D. ;

- PETROFF, Pierre M.: Voltage-Controlled Optics of a Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 21, S. 217401. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v93/e217401>
- [Hüttel 2001] HÜTTEL, Andreas K.: *Tunnelgekoppelte Quantenpunktsysteme und ihre kapazitive Wechselwirkung*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplomarbeit, 2001
- [Hüttel u. a. 2003] HÜTTEL, A. K. ; QIN, H. ; HOLLEITNER, A. W. ; BLICK, R. H. ; WEINMANN, D. ; EBERL, K. ; KOTTHAUS, J. P.: Spin blockade in ground-state resonance of a quantum dot. In: *Europhysics Letters* 62 (2003), Nr. 5, S. 712. – URL <http://dx.doi.org/10.1209/epl/i2003-00431-5>
- [Hüttel u. a. 2004a] HÜTTEL, A. K. ; LUDWIG, S. ; EBERL, K. ; KOTTHAUS, J. P.: *Direct control of the tunnel splitting in a one-electron double quantum dot*. 2004. – URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501012>. – cond-mat/0501012
- [Hüttel u. a. 2004b] HÜTTEL, A. K. ; WEBER, J. ; HOLLEITNER, A. W. ; WEINMANN, D. ; EBERL, K. ; BLICK, R. H.: Nuclear spin relaxation probed by a single quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 69 (2004), Nr. 7, S. 073302. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v69/e073302>
- [Ilani u. a. 2004] ILANI, S. ; MARTIN, J. ; TEITELBAUM, E. ; SMET, J. H. ; MAHALU, D. ; UMANSKY, V. ; YACOBY, A.: The microscopic nature of localization in the quantum Hall effect. In: *Nature* 427 (2004), S. 328. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02230>
- [Imry 1997] IMRY, Yoseph: *Introduction to Mesoscopic Physics*. Oxford University Press, 1997
- [Jacak u. a. 1998] JACAK, Lucjan ; HAWRYLAK, Pawel ; WÓJS, Arkadiusz: *Quantum Dots*. Springer-Verlag, 1998
- [Johnson u. a. 2004] JOHNSON, A. C. ; PETTA, J. R. ; MARCUS, C. M. ; HANSON, M. P. ; GOSSARD, A. C.: *Singlet-triplet spin blockade and charge sensing in a few-electron double quantum dot*. 2004. – URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0410679>. – cond-mat/0410679
- [Johnson u. a. 2005] JOHNSON, A. C. ; MARCUS, C. M. ; HANSON, M. P. ; GOSSARD, A. C.: Charge sensing of excited states in an isolated double quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 71 (2005), Nr. 11, S. 115333. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v71/e115333>

- [Kawabata 1989] KAWABATA, Arisato: Theory of Ballistic Transport through a Constriction-Quantization of Conductance. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 58 (1989), Nr. 2, S. 372. – URL <http://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/58/372/>
- [Kawabata 1998] KAWABATA, A.: Coulomb Blockade. In: ANDO, T. (Hrsg.) ; ARAKAWA, Y. (Hrsg.) ; FURUYA, K. (Hrsg.) ; KOMIYAMA, S. (Hrsg.) ; NAKASHIMA, H. (Hrsg.): *Mesoscopic Physics and Electronics*. Springer-Verlag, 1998, Kap. 1, S. 31–44
- [Keller u. a. 2001] KELLER, M. ; WILHELM, U. ; SCHMID, J. ; WEIS, J. ; KLITZING, K. v. ; EBERL, K.: Quantum dot in high magnetic fields: Correlated tunneling of electrons probes the spin configuration at the edge of the dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 64 (2001), S. 033302. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v64/e033302>
- [Khaetskii u. a. 2002] KHAETSKII, Alexander V. ; LOSS, Daniel ; GLAZMAN, Leonid: Electron Spin Decoherence in Quantum Dots due to Interaction with Nuclei. In: *Physical Review Letters* 88 (2002), Nr. 18, S. 186802. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v88/e186802>
- [Khaetskii u. a. 2003] KHAETSKII, Alexander ; LOSS, Daniel ; GLAZMAN, Leonid: Electron spin evolution induced by interaction with nuclei in a quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 67 (2003), Nr. 19, S. 195329. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v67/e195329>
- [Kikkawa und Awschalom 1998] KIKKAWA, J. M. ; AWSCHALOM, D. D.: Resonant Spin Amplification in n-Type GaAs. In: *Physical Review Letters* 80 (1998), Nr. 19, S. 4313. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v80/p4313>
- [Kittel 1996] KITTEL, Charles: *Einführung in die Festkörperphysik*. R. Oldenbourg Verlag, 1996
- [Kondo 1964] KONDO, Jun: Resistance Minimum in Dilute Magnetic Alloys. In: *Progress of Theoretical Physics (Kyoto)* 32 (1964), Nr. 1, S. 37
- [Kouwenhoven u. a. 1997] KOUWENHOVEN, L. P. ; OOSTERKAMP, T. H. ; DANOESASTRO, M. W. S. ; ETO, M. ; AUSTING, D. G. ; HONDA, T. ; TARUCHA, S.: Excitation Spectra of Circular, Few-Electron Quantum Dots. In: *Science* 278 (1997), S. 1788. – URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.278.5344.1788>
- [Kouwenhoven u. a. 2001] KOUWENHOVEN, L. P. ; AUSTING, D. G. ; TARUCHA, S.: Few-electron quantum dots. In: *Reports on Progress in Physics* 64 (2001), S. 701. – URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/64/701>

- [Kouwenhoven und Glazman 2001] KOUWENHOVEN, Leo ; GLAZMAN, Leonid: Revival of the Kondo effect. In: *Physics World* (2001), Januar
- [Kronmüller u. a. 1999] KRONMÜLLER, S. ; DIETSCHKE, W. ; KLITZING, K. v. ; DENNINGER, G. ; WEGSCHEIDER, W. ; BICHLER, M.: New Type of Electron Nuclear-Spin Interaction from Resistively Detected NMR in the Fractional Quantum Hall Effect Regime. In: *Physical Review Letters* 82 (1999), S. 4070. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v82/p4070>
- [Kroustvar u. a. 2004] KROUTVAR, Miro ; DUCOMMUN, Yann ; HEISS, Dominik ; BICHLER, Max ; SCHUH, Dieter ; ABSTREITER, Gerhard ; FINLEY, Jonathan J.: Optically programmable electron spin memory using semiconductor quantum dots. In: *Nature* 432 (2004), S. 81. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature03008>
- [Kulik und Shekhter 1975] KULIK, I. O. ; SHEKHTER, R. I.: Kinetic phenomena and charge discreteness effects in granulated media. In: *Soviet Physics - JETP* 41 (1975), Nr. 2, S. 308. – URL <http://link.aip.org/link/?SPJ/41/308/1>
- [Kyriakidis u. a. 2002] KYRIAKIDIS, Jordan ; PIORO-LADRIERE, M. ; CIORGA, M. ; SACHRAJDA, A. S. ; HAWRYLAK, P.: Voltage-tunable singlet-triplet transition in lateral quantum dots. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 66 (2002), Nr. 3, S. 035320. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v66/e035320>
- [Landau und Lifshitz 1979] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik III: Quantenmechanik*. 9. Auflage. Akademie-Verlag Berlin, 1979
- [Livermore u. a. 1996] LIVERMORE, C. ; CROUCH, C. H. ; WESTERVELT, R. M. ; CAMPMAN, K. L. ; GOSSARD, A. C.: The Coulomb Blockade in Coupled Quantum Dots. In: *Science* 274 (1996), Nr. 5291, S. 1332. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/274/5291/1332>
- [Loss und DiVincenzo 1998] LOSS, Daniel ; DIVINCENZO, David P.: Quantum computation with quantum dots. In: *Physical Review A* 57 (1998), Nr. 1, S. 120. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRA/v57/p120>
- [Ludwig und Osheroff 2003] LUDWIG, S. ; OSHEROFF, D. D.: Field-Induced Structural Aging in Glasses at Ultralow Temperatures. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 10, S. 105501. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v91/e105501>
- [Lyanda-Geller u. a. 2002] LYANDA-GELLER, Y. B. ; ALEINER, I. L. ; ALTSHULER, B. L.: Coulomb „Blockade“ of Nuclear Spin Relaxation in Quantum Dots.

- In: *Physical Review Letters* 89 (2002), Nr. 10, S. 107602. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v89/e107602>
- [McEuen u. a. 1991] MCEUEN, P. L. ; FOXMAN, E. B. ; MEIRAV, U. ; KASTNER, M. A. ; MEIR, Yigal ; WINGREEN, Ned S.: Transport spectroscopy of a Coulomb island in the quantum hall regime. In: *Physical Review Letters* 66 (1991), Nr. 14, S. 1926. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v66/p1926>
- [Meir u. a. 1993] MEIR, Yigal ; WINGREEN, Ned W. ; LEE, Patrick A.: Low-Temperature Transport Through a Quantum Dot: The Anderson Model Out of Equilibrium. In: *Physical Review Letters* 70 (1993), Nr. 17, S. 2601. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v70/p2601>
- [Moore 1965] MOORE, Gordon E.: Cramming More Components Onto Integrated Circuits. In: *Electronics Magazine* 38 (1965), Nr. 8, S. 114. – URL <http://www.intel.com/research/silicon/mooreslaw.htm>
- [Moore 2005] MOORE, Gordon E.: *Gordon Moore speaks out — The inventor of what became Moore's Law gives his views on the 40th anniversary of that Law.* Internet-Magazin „Techworld — the UK's infrastructure and network knowledge centre“. April 2005. – URL <http://www.techworld.com/opsys/features/index.cfm?FeatureID=1353>. – Mitschrift eines Interviews mit Gordon E. Moore
- [Müller u. a. 2004] MÜLLER, J. ; LUPTON, J. M. ; ROGACH, A. L. ; FELDMANN, J. ; TALAPIN, D. V. ; WELLER, H.: Monitoring Surface Charge Movement in Single Elongated Semiconductor Nanocrystals. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 16, S. 167402. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v93/e167402>
- [Ng und Lee 1988] NG, Tai K. ; LEE, Patrick A.: On-Site Coulomb Repulsion and Resonant Tunneling. In: *Physical Review Letters* 61 (1988), S. 1768. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v61/p1768>
- [Ono u. a. 2002] ONO, K. ; AUSTING, D. G. ; TOKURA, Y. ; TARUCHA, S.: Current Rectification by Pauli Exclusion in a Weakly Coupled Double Quantum Dot System. In: *Science* 297 (2002), Nr. 5585, S. 1313. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/297/5585/1313>
- [Ono und Tarucha 2004] ONO, Keiji ; TARUCHA, Seigo: Nuclear-Spin-Induced Oscillatory Current in Spin-Blockaded Quantum Dots. In: *Physical Review Letters* 92 (2004), Nr. 25, S. 256803. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v92/e256803>

- [Oosterkamp u. a. 1997] OOSTERKAMP, T. H. ; KOUWENHOVEN, L. P. ; KOOLEN, A. E. A. ; VAN DER VAART, N. C. ; HARMANS, C. J. P. M.: Photon Sidebands of the Ground State and First Excited State of a Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 78 (1997), S. 1536. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v78/p1536>
- [Oosterkamp u. a. 1999] OOSTERKAMP, T. H. ; JANSSEN, J. W. ; KOUWENHOVEN, L. P. ; AUSTING, D. G. ; HONDA, T. ; TARUCHA, S.: Maximum-Density Droplet and Charge Redistributions in Quantum Dots at High Magnetic Fields. In: *Physical Review Letters* (1999). – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v82/p2931>
- [Oxford Instruments 2001] OXFORD INSTRUMENTS: *Kelvinox 100 Dokumentation*, 2001
- [Pershin 2004] PERSHIN, Yu. V.: Electronic structure of nuclear-spin-polarization-induced quantum dots. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 69 (2004), Nr. 8, S. 085314. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v69/e085314>
- [Petta 2005] PETTA, Jason: *On-chip singlet separation and dephasing*. April 2005. – Vortrag im Seminar des Sonderforschungsbereichs 631
- [Petta u. a. 2004] PETTA, J. R. ; JOHNSON, A. C. ; MARCUS, C. M. ; HANSON, M. P. ; GOSSARD, A. C.: Manipulation of a Single Charge in a Double Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 18, S. 186802. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v93/e186802>
- [Pioro-Ladrière u. a. 2005] PIORO-LADRIÈRE, Michel ; ABOLFATH, R. ; ZAWADZKI, P. ; LAPOINTE, J. ; STUDENIKIN, S. A. ; SACHRAJDA, A. S. ; HAWRYLAK, P.: *Charge Sensing of an Artificial H<sub>2</sub><sup>+</sup> Molecule*. 2005. – URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0504009>. – cond-mat/0504009
- [Pobell 1992] POBELL, Frank: *Matter and Methods at Low Temperatures*. Springer-Verlag, 1992
- [Qin 2001] QIN, Hua: *On the dynamics of single-electron-tunneling in semiconductor quantum dots under microwave radiation*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Dissertation, 2001
- [Qin u. a. 2001] QIN, H. ; SIMMEL, F. ; BLICK, R. H. ; KOTTHAUS, J. P. ; WEGSCHEIDER, W. ; BICHLER, M.: Determination of the complex microwave photoconductance of a single quantum dot. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 63 (2001), Nr. 3, S. 035320. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v63/e035320>

- [Reed u. a. 1986] REED, M. A. ; BATE, R. T. ; BRADSHAW, K. ; DUNCAN, W. M. ; FRENSLEY, W. R. ; LEE, J. W. ; SHIH, H. D.: Spatial quantization in GaAs–AlGaAs multiple quantum dots. In: *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures* 4 (1986), Nr. 1, S. 358–360. – URL <http://link.aip.org/link/?JVb/4/358/1>
- [Rössler 2004] RÖSSLER, Clemens: *Kohärente Spin–Phänomene in elektrostatisch definierten Quantenpunkten*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplomarbeit, 2004
- [Sakurai 1995] SAKURAI, J. J.: *Modern Quantum Mechanics*. Revised Edition. Addison-Wesley, 1995
- [Sasaki u. a. 2000] SASAKI, S. ; DE FRANCESCHI, S. ; ELZERMAN, J. M. ; VAN DER WIEL, W. G. ; ETO, M. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Kondo effect in an integer-spin quantum dot. In: *Nature* 405 (2000), S. 764. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/35015509>
- [Schliemann u. a. 2001] SCHLIEMANN, John ; LOSS, Daniel ; MACDONALD, A. H.: Double-occupancy errors, adiabaticity, and entanglement of spin qubits in quantum dots. In: *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 63 (2001), Nr. 8, S. 085311. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v63/e085311>
- [Schmid u. a. 2000] SCHMID, J. ; WEIS, J. ; EBERL, K. ; KLITZING, K. v.: Absence of Odd-Even Parity Behavior for Kondo Resonances in Quantum Dots. In: *Physical Review Letters* 84 (2000), S. 5824. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v84/p5824>
- [Schmidt u. a. 1996] SCHMIDT, T. ; HAUG, R. J. ; FAL’KO, V. I. ; KLITZING, K. v. ; FÖRSTER, A. ; LÜTH, H.: Spectroscopy of local density of states fluctuations in a disordered conductor. In: *Europhysics Letters* 36 (1996), S. 61. – URL <http://dx.doi.org/10.1209/epl/i1996-00187-x>
- [Schmidt u. a. 1997] SCHMIDT, T. ; HAUG, R. J. ; KLITZING, K. v. ; FÖRSTER, A. ; LÜTH, H.: Spectroscopy of the Single-Particle States of a Quantum-Dot Molecule. In: *Physical Review Letters* 78 (1997), S. 1544. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v78/p1544>
- [Schrieffer und Wolff 1966] SCHRIEFFER, J. R. ; WOLFF, P. A.: Relation between the Anderson and Kondo hamiltonians. In: *Physical Review* 149 (1966), S. 491. – URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v149/p491>
- [Schröer 2005] SCHRÖER, D.: 2005. – in Vorbereitung

- [Sharma 2005] SHARMA, Prashant: How to Create a Spin Current. In: *Science* 307 (2005), Nr. 5709, S. 531. – URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1099388>
- [Shor 1994] SHOR, P. W.: Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In: *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1994, S. 124
- [Slichter 1996] SLICHTER, Charles P.: *Principles of Magnetic Resonance*. Springer Verlag, 1996
- [Smet u. a. 2002] SMET, J. H. ; DEUTSCHMANN, R. A. ; ERTL, F. ; WEGSCHEIDER, W. ; ABSTREITER, G. ; KLITZING, K. v.: Gate-voltage control of spin interactions between electrons and nuclei in a semiconductor. In: *Nature* 415 (2002), S. 281. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/415281a>
- [Sprinzak u. a. 2002] SPRINZAK, D. ; JI, Yang ; HEIBLUM, M. ; MAHALU, D. ; SHTRIKMAN, Hadas: Charge Distribution in a Kondo-Correlated Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 88 (2002), Nr. 17, S. 176805. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v88/e176805>
- [Stopa u. a. 2003] STOPA, M. ; VAN DER WIEL, W. G. ; DE FRANCESCHI, S. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Magnetically Induced Chessboard Pattern in the Conductance of a Kondo Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 4, S. 046601. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v91/e046601>
- [Sze 1981] SZE, S. M.: *Physics of Semiconductor Devices*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, 1981
- [Sze 1985] SZE, S. M.: *Semiconductor Devices - Physics and Technology*. John Wiley & Sons, 1985
- [Tans u. a. 1998] TANS, Sander J. ; DEVORET, Michel H. ; GROENEVELD, Remco J. A. ; DEKKER, Cees: Electron-electron correlations in carbon nanotubes. In: *Nature* 394 (1998), S. 761. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/29494>
- [Tarucha u. a. 1996] TARUCHA, S. ; AUSTING, D. G. ; HONDA, T. ; VAN DER HAAGE, R. J. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Shell filling and spin effects in a few electron quantum dot. In: *Physical Review Letters* 77 (1996), Nr. 17, S. 3613. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v77/p3613>
- [Tarucha u. a. 2000] TARUCHA, S. ; AUSTING, D. G. ; SASAKI, S. ; TOKURA, Y. ; VAN DER WIEL, W. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Effects of Coulomb interactions on spin states in vertical semiconductor quantum dots. In: *Applied Physics A* 71 (2000), S. 367. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/s003390000550>



- [Treutlein u.a. 2004] TREUTLEIN, P. ; HOMMELHOFF, P. ; STEINMETZ, T. ; HÄNSCH, T. W. ; REICHEL, J.: Coherence in Microchip Traps. In: *Physical Review Letters* 92 (2004), S. 203005. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v92/e203005>
- [van der Wiel u. a. 2000] VAN DER WIEL, W. G. ; DE FRANCESCHI, S. ; FUJISAWA, T. ; ELZERMAN, J. M. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: The Kondo Effect in the Unitary Limit. In: *Science* 289 (2000), Nr. 5487, S. 2105. – URL <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/289/5487/2105>
- [van der Wiel u. a. 2001] VAN DER WIEL, W. G. ; FUJISAWA, T. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: A Double Quantum Dot as an Artificial Two-Level System. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 40 (2001), S. 2100. – URL <http://dx.doi.org/10.1143/JJAP.40.2100>
- [van der Wiel u. a. 2003] VAN DER WIEL, W. G. ; FRANCESCHI, S. D. ; ELZERMAN, J. M. ; FUJISAWA, T. ; TARUCHA, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: Electron transport through double quantum dots. In: *Reviews of Modern Physics* 75 (2003), Nr. 1, S. 1. – URL <http://link.aps.org/abstract/RMP/v75/p1>
- [van Wees u. a. 1998] VAN WEES, B. J. ; VAN HOUTEN, H. ; BEENAKKER, C. W. J. ; WILLIAMSON, J. G. ; KOUWENHOVEN, L. P. ; VAN DER MAREL, D. ; FOXON, C. T.: Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. In: *Physical Review Letters* 60 (1998), Nr. 9, S. 848. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v60/p848>
- [Vandersypen u. a. 2001] VANDERSYPEN, Lieven M. K. ; STEFFEN, Matthias ; BREYTA, Gregory ; YANNONI, Costantino S. ; SHERWOOD, Mark H. ; CHUANG, Isaac L.: Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. In: *Nature* 414 (2001), S. 883. – URL <http://dx.doi.org/10.1038/414883a>
- [Vandersypen u. a. 2002] VANDERSYPEN, L. M. K. ; HANSON, R. ; WILLEMS VAN BEVEREN, L. H. ; ELZERMAN, J. M. ; GREIDANUS, J. S. ; DE FRANCESCHI, S. ; KOUWENHOVEN, L. P.: *Quantum Computing with Electron Spins in Quantum Dots*. 2002. – URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0207059>. – Kapitel in „Quantum Computing and Quantum Bits in Mesoscopic Systems“, Kluwer Academic Plenum Publishers; quant-ph/0207059
- [Vogel 1997] VOGEL, Markus: *AC und DC Transporteigenschaften von Quantenpunktkontakten*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplomarbeit, 1997
- [Wald u. a. 1994] WALD, Keith R. ; KOUWENHOVEN, Leo P. ; MCEUEN, Paul L. ; VAN DER VAART, Nijs C. ; FOXON, C. T.: Local Dynamic Nuclear Polarization

- Using Quantum Point Contacts. In: *Physical Review Letters* 73 (1994), S. 1011. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v73/p1011>
- [Weber 2002] WEBER, Jan: *Tunneldynamik von Quantenpunkten in externen Feldern*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2002
- [Wegscheider 2002] WEGSCHEIDER, W.: 2002. – Dokumentation zu Wafer C021223A / W. Wegscheider
- [Weig 2004] WEIG, Eva M.: *Elektron-Phonon-Kavitäten: Transportuntersuchungen an freitragenden Quantenpunkten*, Ludwig-Maximilians-Universität München, Dissertation, 2004
- [Weig u. a. 2004] WEIG, E. M. ; BLICK, R. H. ; BRANDES, T. ; KIRSCHBAUM, J. ; WEGSCHEIDER, W. ; BICHLER, M. ; KOTTHAUS, J. P.: Single-Electron-Phonon Interaction in a Suspended Quantum Dot Phonon Cavity. In: *Physical Review Letters* 92 (2004), Nr. 4, S. 046804. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v92/e046804>
- [Weinmann 2002] WEINMANN, Dietmar: 2002. – private Mitteilung
- [Weinmann u. a. 1995] WEINMANN, Dietmar ; HÄUSLER, Wolfgang ; JAUREGUI, Kristian ; KRAMER, Bernhard: Spin Blockades in the transport properties of quantum dots. In: CERDEIRA, H. A. (Hrsg.) ; KRAMER, B. (Hrsg.) ; SCHÖN, G. (Hrsg.): *Quantum Dynamics of Submicron Structures* Bd. 291. NATO ASI Series E, 1995, S. 297–310
- [Weinmann u. a. 1996] WEINMANN, Dietmar ; HÄUSLER, Wolfgang ; KRAMER, Bernhard: Transport properties of quantum dots. In: *Annalen der Physik* 5 (1996), S. 652
- [Weis u. a. 1993] WEIS, J. ; HAUG, R. J. ; VON KLITZING, K. ; PLOOG, K.: Competing Channels in Single-Electron-Tunneling through a Quantum Dot. In: *Physical Review Letters* 71 (1993), Nr. 24, S. 4019. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v71/p4019>
- [Weis u. a. 1995] WEIS, J. ; HAUG, R. J. ; VON KLITZING, K. ; PLOOG, K.: Single-electron tunnelling transistor as a current rectifier with potential-controlled current polarity. In: *Semiconductor Science and Technology* 10 (1995), Nr. 6, S. 877. – URL <http://stacks.iop.org/0268-1242/10/877>
- [Wharam u. a. 1988] WHARAM, D. A. ; THORNTON, T. J. ; NEWBURY, R. ; PEPPER, M. ; AHMED, H. ; FROST, J. E. F. ; HASKO, D. G. ; PEACOCK, D. C. ; RITCHIE, D. A. ; JONES, G. A. C.: One-dimensional transport and the quantisation of

- the ballistic resistance. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 21 (1988), Nr. 8, S. L209–L214. – URL <http://stacks.iop.org/0022-3719/21/L209>
- [Wootters 1997] WOOTTERS, William K.: Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. In: *Physical Review Letters* 80 (1997), Nr. 10, S. 2245. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v80/p2245>
- [Yau u. a. 2002] YAU, Jeng-Bang ; POORTERE, E. P. D. ; SHAYEGAN, M.: Aharonov-Bohm Oscillations with Spin: Evidence for Berry's Phase. In: *Physical Review Letters* 88 (2002), Nr. 14, S. 146801. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v88/e146801>
- [Zozoulenko u. a. 1999] ZOZOULENKO, I. V. ; SACHRAJDA, A. S. ; GOULD, C. ; BERGGREN, K.-F. ; ZAWADZKI, P. ; FENG, Y. ; WASILEWSKI, Z.: Few-Electron Open Dots: Single Level Transport. In: *Physical Review Letters* 83 (1999), S. 1838. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v83/p1838>
- [Zumbühl u. a. 2002] ZUMBÜHL, D. M. ; MILLER, J. B. ; MARCUS, C. M. ; CAMP-  
MAN, K. ; GOSSARD, A. C.: Spin-Orbit Coupling, Antilocalization, and Parallel  
Magnetic Fields in Quantum Dots. In: *Physical Review Letters* 89 (2002), Nr. 27,  
S. 276803. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v89/e276803>

## LITERATURVERZEICHNIS

---

## Publikationsliste

- *Probing and controlling the bonds of an artificial molecule*, A. W. Holleitner, R. H. Blick, A. K. Hüttel, K. Eberl, und J. P. Kotthaus, *Science* **297**, 70 (2002).
- *Phase coherent transport in two coupled quantum dots*, R. H. Blick, A. K. Hüttel, A. W. Holleitner, E. M. Höhberger, H. Qin, J. Kirschbaum, J. Weber, W. Wegscheider, M. Bichler, K. Eberl, und J. P. Kotthaus, *Physica E* **16**, 76 (2003).
- *Spin blockade in ground state resonance of a quantum dot*, A. K. Hüttel, H. Qin, A. W. Holleitner, R. H. Blick, K. Neumaier, D. Weinmann, K. Eberl, und J. P. Kotthaus, *Europhysics Letters* **62**, 712 (2003).
- *Nuclear spin relaxation probed by a single quantum dot*, A. K. Hüttel, J. Weber, A. W. Holleitner, D. Weinmann, K. Eberl, und R. H. Blick, *Physical Review B* **69**, 073302 (2004).
- *Probing coherent electronic states in double quantum dots*, H. Qin, A. W. Holleitner, A. K. Hüttel, R. H. Blick, W. Wegscheider, M. Bichler, K. Eberl, und J. P. Kotthaus, *physica status solidi (c)* **1**, 2094 (2004).
- *Direct control of the tunnel splitting in a one-electron double quantum dot*, A. K. Hüttel, S. Ludwig, H. Lorenz, K. Eberl, und J. P. Kotthaus, zur Veröffentlichung eingereicht, cond-mat/0501012.



# Dank

Eine Forschungsarbeit wie die vorliegende ist nicht möglich ohne die moralische und tatkräftige Unterstützung vieler. Bei allen, die mir in den vergangenen Jahren mit Rat und Tat beigestanden haben, möchte ich mich hiermit bedanken. Insbesondere gilt mein Dank

- Herrn Prof. Dr. Jörg P. Kotthaus, meinem Doktorvater — für die Möglichkeit, spannende Experimente in Labors mit hervorragender technischer Ausstattung durchzuführen, und das in einer Gruppe, deren Arbeitsklima man gar nicht genug loben kann. Danke, Jörg, für die Unterstützung und das Vertrauen!
- Herrn Prof. Dr. Robert H. Blick — der mich mit Elan für die Quantenpunkte angeworben und begeistert hat. Robert, hoffentlich findest Du auch in USA noch den perfekten Espresso!
- Herrn Dr. Stefan Ludwig — für die tolle Zusammenarbeit, das rettende Kryo-Know-How und die Bereitschaft, alles mal ganz genau durchzudenken! Viel Erfolg mit Deiner Gruppe und viele spannende Nano-Papers!
- meinen Diplomanden Jan Weber und Clemens Rössler, deren Engagement mit in diese Arbeit eingegangen ist. Clemens, viel Erfolg mit den freistehenden Strukturen!
- Herrn Prof. Dr. R. Groß und Herrn Dr. K. Neumaier für die Möglichkeit, am Walther-Meissner-Institut Messungen durchzuführen, und die technische Unterstützung.
- Herrn Prof. Dr. J. von Delft, Herrn Dr. F. Wilhelm und ihren Mitarbeitern Udo Hartmann, Dr. L. Borda und Dr. M. Sindel — für viele spannende Diskussionen.
- meinen Zimmergenossen Dominik, Constanze und Andy, mit denen jeder Tag im Büro immer wieder ein Erlebnis war (und die mich geduldig ertragen haben). Ja, die Sternschanze ist wirklich schon lang her...

- den Leuten, die den Lehrstuhl am Laufen halten (und hielten) — Bert, Martina Jüttner, Stephan, Stefan, Alex, Armin, Klaus, Wolfgang und Pit. Was täten wir ohne euch...
- meinen „alten“ und „neuen“ Kollegen und Ko-Admins — Alex, Eva, Florian, Florian, Daniel, Hua, Markus und Vadim. Hua, MeasureWin funktioniert immernoch hervorragend!
- den zwei Lehrstuhlservern „coke“ und „pepsi“ dafür, daß sie bis zum heutigen Tage durchgehalten haben
- der Studienstiftung des deutschen Volkes für das Promotionsstipendium, und insbesondere Herrn Prof. Dr. H. Schwichtenberg für das viele Engagement im Rahmen seiner Stipendiatengruppe
- der Stiftung Maximilianeum für ein „sorgenfreies Studium“ und für die Möglichkeit, (als zahlender Gast) nach dem Diplom noch ein bißchen bleiben zu können
- allen meinen Freunden, für die ich in Zukunft hoffentlich wieder etwas mehr Zeit haben werde
- meinem ehemaligen *supervisor* aus Oxford, Prof. Dr. Artur Ekert, dafür, daß er meine Begeisterung für das Gebiet des *quantum computing* geweckt hat. Ich bin zwar nicht mehr bei den Theoretikern, aber trotzdem irgendwie daran hängen geblieben.
- meinen Eltern für ihre Liebe und Unterstützung, die mir sehr viel bedeutet.
- und meiner geliebten Freundin Daniela Taubert — Danke für Deine Geduld und Deine Unterstützung, und ganz einfach auch dafür, daß Du da bist!



# Lebenslauf

Andreas Klaus Hüttel, geboren am 13. Mai 1975 in Ludwigshafen am Rhein, ledig

- 1981–1985** Alfred-Delp-Grundschule Ludwigshafen am Rhein
- 1985–1994** Theodor-Heuss-Gymnasium Ludwigshafen am Rhein
- 1994** Abitur
- 1994–2001** Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München  
Stipendien der Stiftung Maximilianeum und der Studienstiftung des deutschen Volkes
- 1996** Vordiplom
- 1997–1998** Studium der Physik an der University of Oxford,  
Lady Margaret Hall und Center for Quantum Computation
- 2000–2001** Diplomarbeit am Lehrstuhl für experimentelle Festkörperphysik,  
Prof. Dr. J. P. Kotthaus, der Ludwig-Maximilians-Universität München  
„Tunnelgekoppelte Quantenpunktsysteme und ihre kapazitive Wechselwirkung“
- 2001** Diplom mit Auszeichnung
- seit 2001** Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für experimentelle Festkörperphysik,  
Prof. Dr. J. P. Kotthaus, der Ludwig-Maximilians-Universität München  
Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes