Canad. Math. Bull. Vol. **40** (1), 1997 pp. 3–9

LA FORMULE DE CAUCHY SUR LA LONGUEUR D'UNE COURBE

S. AYARI AND S. DUBUC

RÉSUMÉ. Pour toute courbe rectifiable du plan, nous démontrons la formule de Cauchy relative à sa longueur. La formule est donnée sous deux formes: comme intégrale de la variation totale des projections de la courbe dans les diverses directions et comme intégrale double du nombre de rencontres de la courbe avec une droite quelconque du plan.

ABSTRACT. We give a general proof of the Cauchy formula about the length of a plane curve. The formula is given in two ways: as the integral of the variation of orthogonal projections of the curve, and as a double integral of the number of intersections of the curve with an arbitrary line of the plane.

1. **Introduction.** Cauchy a présenté une formule pour calculer la longueur d'une courbe. Il a utilisé dans cette formule le concept de projection absolue. Soit la droite D issue de l'origine et formant un angle θ avec l'axe des x, la projection absolue d'une courbe C sur D est la quantité

$$A(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} N(r,\theta)\,dr$$

où $N(r,\theta)$ est le nombre de points de la courbe C dont la projection orthogonale est le point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ de D. Voici la formule:

$$L(C) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} A(\theta)\,d\theta.$$

Cauchy a donné cette formule dans un mémoire lithographié en 1832, puis il a énoncé de nouveau cette formule en 1841 [5]. Il a esquissé la démonstration par cinq lignes en 1850 [6]. Ce qui semble implicite à son argumentation est que la courbe est à tangentes continues. À divers endroits de la littérature mathématique, cette formule de Cauchy est citée et utilisée, (par exemple par Santaló [15], do Carmo [9] ou Valentine [18]), mais dans la littérature, on retrouve très rarement une démonstration convaincante de celle-ci en dehors du cas d'une ligne polygonale ou d'une courbe convexe. À notre connaissance, les seuls endroits qui donnent satisfaction sont les suivants: le volume de géométrie intégrale de Blaschke [3], un article de Sherman de 1942 [16] et le volume récent de Tricot [17]. Notre objectif est de démontrer la formule de Cauchy sous l'hypothèse la plus générale possible, que la courbe soit de longueur finie. Nous voulons un exposé simple et complet.

Reçu par les éditeurs le 29 septembre 1995; revised 5 juillet 1996.
Classification (AMS) par sujet : 28A75, 28A45.
Mots clés: longueur, variation bornée, géométrie intégrale.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-001-5 Published online by Cambridge University Press

2**. Longueur d'une courbe et variation d'une fonction.** Dans cette section, nous reprenons les définitions de Jordan sur la longueur d'une courbe et la variation d'une fonction, puis nous mettons en évidence deux théorèmes, l'un de Jordan et l'autre de Lebesgue. Nous aurons besoin de ces résultats par la suite.

Soit C une courbe paramétrique continue dont les équations sont

$$x = f(t), \; y = g(t), \quad a \leq t \leq b,$$

où f et g sont continues. Soit $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ une partition de $[a, b]$, avec $t_0 = a$, $t_m = b$ et $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \ldots, m$. Considérons la ligne polygonale inscrite dans la courbe C définie par les m sommets $\bigl(f(t_i), g(t_i)\bigr)$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

La *longueur de la ligne polygonale* est le nombre

$$L(C, P) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\bigl(f(t_i) - f(t_{i-1})\bigr)^2 + \bigl(g(t_i) - g(t_{i-1})\bigr)^2}.$$

À la suite de Jordan, la *longueur* L de la courbe C se définit comme

$$L = L(C) = \sup_P L(C, P)$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions P de $[a, b]$.

On dit que C est *rectifiable* si $L < \infty$.

Soient f une fonction quelconque définie sur $[a, b]$. À chaque partition de $[a, b]$, $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, on associe la somme

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

La *variation totale* de la fonction f sur $[a, b]$ est définie par

$$V(f) = \sup_P V(f, P).$$

Si $V(f) < \infty$, on dira que la fonction f est à variation bornée sur $[a, b]$.

REMARQUE. La notion de variation est intimement liée à la notion de longueur. En effet si f est définie sur $[a, b]$, si C est la courbe suivante, confinée à l'axe des x,

$$x = f(t), \; y = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

alors pour toute partition P, on a que $V(f, P) = L(C, P)$ et la variation de f se confond avec la longueur de cette courbe C.

On définit le *diamètre d'une partition* P comme le nombre

$$|P| = \max_i (t_i - t_{i-1}).$$

THÉORÈME 1 (JORDAN [11], P. 100). *Soit C une courbe continue rectifiable de longueur L. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si P est une partition quelconque de diamètre $|P| < \delta$, alors*

$$L(C) - \epsilon < L(C, P) \leq L(C).$$

DÉMONSTRATION. On suppose que la courbe C a pour équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Soit un nombre $\epsilon > 0$. Choisissons d'abord une partition $Q = \{u_0 = a, u_1, \ldots, u_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que

$$L(C) - \epsilon/2 < L(C, Q). \tag{1}$$

Maintenant nous choisissons δ. Vu la continuité uniforme de f et de g, il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall s, t \in [a, b]$ le segment d'extrémités $\big(f(s), g(s)\big)$ et $\big(f(t), g(t)\big)$ a une longueur $< \epsilon/(4n)$ dès que $|s - t| < \delta$.

Soit $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_m = b\}$, une partition de diamètre $|P| < \delta$. Considérons maintenant la partition $P \cup Q$ formée de deux listes de points u_i et t_j que l'on fusionne et que l'on réordonne par ordre croissant. On sait que lorsque l'on raffine une ligne polygonale, on ne diminue pas sa longueur:

$$L(C, Q) \leq L(C, P \cup Q). \tag{2}$$

Nous majorons maintenant $L(C, P \cup Q)$ en fonction de $L(P)$ à la suite de trois remarques.

- Tous les côtés de la ligne polygonale de $\big\{\big(f(t), g(t)\big) : t \in P \cup Q\big\}$ ont une longueur $< \epsilon/(4n)$.
- Le nombre de côtés de cette ligne polygonale qui ont pour extrémités un des points $\big\{\big(f(u), g(u)\big) : u \in Q\big\}$ ne dépasse par $2n$.
- Tous les autres côtés sont des côtés de la ligne polygonale $\big\{\big(f(t), g(t)\big) : t \in P\big\}$.

De ceci, vient l'inégalité

$$L(C, P \cup Q) < L(C, P) + \epsilon/2. \tag{3}$$

En reliant les inégalités (1), (2) et (3), on obtient l'inégalité cherchée:

$$L(C) - \epsilon < L(C, P). \qquad \blacksquare$$

Une démonstration différente du théorème 1 est donnée par Tricot [17], pp. 56–57. Le théorème de Jordan admet le corollaire suivant.

THÉORÈME 2 (LEBESGUE, PP. 57–58 DE [12]). *Si f est une fonction continue à variation bornée sur $[a, b]$ dont la variation est $V(f)$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour toute partition P dont le diamètre est inférieur à δ on a*

$$V(f) - \epsilon < V(f, P) \leq V(f).$$

REMARQUES. On retrouve le théorème 2 à la p. 259 du volume 1 des Oeuvres scientifiques de Lebesgue [12]. La démonstration de ce théorème de Lebesgue est demandée comme problème dans le volume de Rudin [14] (problème 21, p. 191). Comme Lebesgue le remarque (p. 68 [13]), l'hypothèse de continuité pour la fonction f du théorème est capitale.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-001-5 Published online by Cambridge University Press

3. **Longueur d'une courbe et variation de ses projections.** Soit C une courbe d'équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Nous supposons que f et g sont à variation bornée. Posons $f_\theta(t) = \cos\theta f(t) + \sin\theta g(t)$ comme une fonction de la variable t dans $[a, b]$ de paramètre $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous présentons une première façon d'exprimer la formule de Cauchy en reliant la longueur de C à la variation de ses projections f_θ.

THÉORÈME 3. *Soient C une courbe d'équations $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$ et $f_\theta(t) = \cos\theta f(t) + \sin\theta g(t)$. Alors*

$$L(C) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} V(f_\theta)\,d\theta. \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. On traite d'abord du cas où la courbe C est une ligne polygonale de n segments $\big\{\big(f(t_k), g(t_k)\big) : 0 \leq k \leq n\big\}$. Considérons la suite des n vecteurs du plan $\big(f(t_k) - f(t_{k-1}), g(t_k) - g(t_{k-1})\big)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ces vecteurs admettent la forme polaire $(\rho_k \cos\theta_k, \rho_k \sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ρ_k est la longueur du $k$ème segment de C. Après calcul, on obtient que

$$V(f\cos\theta + g\sin\theta) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta - \theta_k)|.$$

Si l'on intègre par rapport à θ cette identité, on obtient la formule cherchée:

$$L(C) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} V(f\cos\theta + g\sin\theta)\,d\theta.$$

Traitons maintenant du cas où C est une courbe rectifiable quelconque. Prenons une suite P_n de partitions de $[a, b]$ dont les diamètres tendent vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on montre que $V(f\cos\theta + g\sin\theta, P_n) \leq L(C, P_n)$. La suite de fonctions en θ, $V(f_\theta, P_n)$, est uniformément bornée par la longueur de C. Par le théorème de convergence bornée de Lebesgue et par le théorème 2, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} V(f_\theta, P_n)\,d\theta = \int_0^{2\pi} V(f_\theta)\,d\theta.$$

D'autre part, nous avons vu dans la première partie de la démonstration que

$$L(C, P_n) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} V(f_\theta, P_n)\,d\theta.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} L(C, P_n) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} V(f_\theta)\,d\theta.$$

Le théorème 1 permet de dégager la conclusion. ∎

4. **Formule de Banach sur la variation totale d'une fonction.** Banach a trouvé une expression intégrale remarquable pour la variation totale d'une fonction. Nous présentons cette formule.

THÉORÈME 4 (BANACH [1]). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, on désigne par $N(y)$ le nombre de racines à l'équation $f(x) = y$. Alors la fonction N est mesurable. De plus*

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} N(y)\,dy.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-001-5 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. Soit la partition $P_m = \{x_i = a + i(b-a)/2^m : i = 0, 1, \ldots, 2^m\}$, et soit f_m la fonction linéaire par morceaux qui correspond à la ligne polygonale $\{(x_i, f(x_i)) : i = 0, 1, \ldots, 2^m\}$, on désigne par $N_m(y)$ le nombre de racines à l'équation $f_m(x) = y$. Il est relativement aisé de vérifier que

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(y)\,dy = V(f, P_m). \tag{5}$$

Pour y arriver, on peut procéder comme suit. On pose $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 2^m$, et on introduit 2^r fonctions $L_1(y), \ldots, L_{2^r}(y)$.

$$L_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (y_{i-1}, y_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que si y n'est pas un des nombres y_i,

$$N_m(y) = \sum_{i=1}^{2^r} L_i(y).$$

Cette identité permet de justifier l'équation 5.

La suite $N_m(y)$ est une suite monotone qui converge vers $N(y)$. En faisant tendre m vers l'infini, en faisant appel au théorème de Beppo-Levi sur l'intégration d'une suite monotone de fonctions ainsi qu'au théorème 2, on établit la validité de la formule de Banach:

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} N(y)\,dy. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE. La démonstration du théorème de Banach est demandée comme problème dans le volume de Rudin [14] (problème 22, p. 191). La démonstration de Banach a été reprise par Cesari [7].

5. **Formule de Cauchy sur la longueur d'une courbe.** On soupçonne aisément ce que le théorème de Banach peut apporter au théorème 3. On obtient alors ce que l'on appelle la formule de Cauchy ou à la suite de l'article de Crofton [8], la formule de Cauchy-Crofton.

THÉORÈME 5. *Soit C une courbe paramétrique rectifiable, si $N(r,\theta)$ est le nombre de rencontres de C avec la droite $x\cos\theta + y\sin\theta = r$ alors la longueur de C se calcule par des intégrales itérées bien définies:*

$$L(C) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(r,\theta)\,dr\,d\theta. \tag{6}$$

DÉMONSTRATION. C est une courbe d'équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$ où f et g sont continues et à variation bornée. Il est entendu que $N(r,\theta)$ est la cardinalité de $\{t \in [a,b] : f(t)\cos\theta + g(t)\sin\theta = r\}$. D'après la formule de Banach, $V(f_\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} N(r,\theta)\,dr$. Le théorème 3 permet donc d'exprimer la longueur de C sous forme d'une intégrale double

$$L(C) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(r,\theta)\,dr\,d\theta. \qquad \blacksquare$$

6**. Applications de la formule de Cauchy.** Quelques applications de la formule de Cauchy méritent d'être mieux connues.

- *Si à l'intérieur d'un cercle de rayon R, on trace une ou plusieurs courbes fermées et si le système de ces courbes ne peut être traversé par une même droite en plus de 2m points, la somme des périmètres de ces courbes ne dépassera pas* $2\pi Rm$*.* Cette application été proposée par Cauchy même [6].
- *La longueur de l'enveloppe convexe d'une courbe ne dépasse jamais la longueur de cette courbe même.*
  Ce résultat est souvent considéré comme une évidence. Mais ceci réclame une justification. Bonnesen (p. 55 de [4]) a indiqué que la formule de Cauchy permet cette justification.
- (Formule de Barbier [2]) *Soit C une courbe convexe fermée, si* $B(\theta)$ *est la longueur de la projection de C sur une droite qui fait un angle* θ *avec l'axe des x, alors*

$$L(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} B(\theta)\, d\theta.$$

  Bonnesen [4] justifie la formule de Barbier par la formule de Cauchy. D'autres démonstrations sont fournies par Yaglom-Boltjansky [19] (p. 249) et par Valentine [18] (p. 159).
- *Soit* Ω *un ensemble ouvert, convexe et borné du plan et* $\partial\Omega$ *la frontière de* Ω*. Si C est une courbe fermée qui entoure n fois* Ω*, alors*

$$L(C) \geq nL(\partial\Omega).$$

  Ce résultat provient de Desaulniers-Dubuc-Soumis [10].

7**. Conclusion.** On ne pouvait pas s'attendre à ce que Cauchy énonce et démontre une formule qui aille plus loin que les définitions de son temps sur la longueur d'une courbe. Mais depuis les définitions de Jordan, on est en raison d'être plus exigeant sur cet énoncé. C'est à cette exigence que nous avons voulu répondre.

REMERCIEMENTS. Nous remercions Louis-Philippe Giroux, étudiant à l'Université de Montréal, d'avoir porté à notre attention l'excellente note de Cesari [7] sur la variation totale d'une fonction. Nos remerciements vont aussi à Benoît Dubuc, étudiant à l'Université McGill, pour nous avoir transmis de précieuses références sur la formule de Cauchy-Crofton. Nous remercions enfin le Ministère des Sciences du Canada (CRSNG, OGPIN 016) et le Ministère de l'Éducation du Québec (FCAR, 93-ER-0287) pour leur soutien financier.

REFERENCES

1. S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, Fund. Math. **7**(1925), 225–237
2. E. Barbier, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, J. Math. Pures Appl. (2) **5**(1860), 273–286
3. W. Blaschke, *Vorlesungen Über Integralgeometrie*, Chelsea, New York, 1949.
4. T. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

5. A. Cauchy, *Notes sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et à la quadrature des surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris **13**(1841), 1060–1063; Oeuvres complètes **6**, Gauthier-Villars, Paris, 1888, 369–375.
6. ______, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, Mém. Acad. Sci. Paris **22**(1850), 3 et suiv; Oeuvres complètes **2**, Gauthier-Villars, Paris, 1908, 167–177.
7. L. Cesari, *Variation, multiplicity, and semicontinuity*, Amer. Math. Monthly **65**(1958), 317–332.
8. M. W. Crofton, *On the theory of local probability, applied to straight lines at random in a plane*, Philos. Trans. Roy. Soc. **158**(1868), 181–199.
9. M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
10. G. Desaulniers, S. Dubuc et F. Soumis, *Comparaisons de longueurs de courbes et d'aires de surfaces*, Ann. Sci. Math. Québec **17**(1993), 39–51.
11. C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 3ème éd., Gauthier-Villars, Paris (1909).
12. H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire (Thèse de doctorat)*, Ann. Mat. Pura Appl. **7**(1902), 1–129; Oeuvres scientifiques **2**, L'Enseignement mathématique, Genève, 1972, 201–331.
13. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904; Oeuvres scientifiques **2**, L'Enseignement mathématique, Genève, 1972, 11–154.
14. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.
15. L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, (ed. G. C. Rota), Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts, 1976.
16. S. Sherman, *A comparison of linear measures in the plane*, Duke Math. J. **9**(1942) 1–9.
17. C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, Springer-Verlag, Paris, 1993.
18. F. A. Valentine, *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.
19. I. M. Yaglom et V. G. Boltjansky, *Convex Figures*, Holt Rinehart, et Winston, Inc., New York, 1961.

Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succursale Centre-ville
Montréal, Québec
H3C 3J7