# COPIRELEM

48e COLLOQUE INTERNATIONAL
**sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles**

# Actes du colloque

TOULOUSE

INSPÉ Toulouse Occitanie-Pyrénées
Site Croix de Pierre

**14, 15 & 16 juin 2022**

## Représenter et modéliser en mathématiques :
de l'activité des élèves à la formation
des professeurs des écoles

www.copirelem.fr >>

Université de Toulouse – Université Toulouse Jean Jaurès – INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées – SFR AEF – EFTS – Institut de Mathématiques de Toulouse – IRES Toulouse – ARPEME – mgen – casden – Texas Instruments

COPIRELEM

48e

COLLOQUE INTERNATIONAL

sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles

# Actes du colloque

TOULOUSE

INSPÉ Toulouse Occitanie-Pyrénées

Site Croix de Pierre

14, 15 & 16 juin 2022

## Représenter et modéliser en mathématiques :

de l'activité des élèves à la formation

des professeurs des écoles

www.copirelem.fr >>

# Sommaire

# Présentation du thème du colloque et bilan scientifique

**Représenter et modéliser dans la classe de mathématiques à l'école**

Depuis les programmes entrés en vigueur en septembre 2015, l'enseignement des mathématiques doit contribuer au « *développement de six compétences majeures : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer* ». La compétence *modéliser* fait, entre autres, référence à la résolution de « *problèmes concrets* » (cycle 2) ou de « *problèmes issus de situations de la vie quotidienne* » (cycle 3).

Une récente note de service (Ministère Education Nationale, 2018) explicite les difficultés des élèves à modéliser : « *l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues.* » Et préconise « *d'introduire des représentations, sous forme de schémas bien adaptés, permettant la modélisation des problèmes proposés.* » C'est ainsi qu'au cycle 2, la compétence *représenter* fait état de « *différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.)* » alors qu'au cycle 3 il s'agit d'« *utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc.* »

L'intérêt pour l'activité de modélisation dans la classe de mathématiques n'est pas nouveau en didactique des mathématiques (Chevallard, 1989 ; Blum et *al.*, 2007) et les colloques de la COPIRELEM en 2006 à Dourdan et en 2007 à Troyes portaient sur la question de l'expérimentation et de la modélisation dans l'enseignement scientifique. Cependant, un certain attrait pour le « modèle en barres » utilisé dans la « méthode de Singapour » et présenté en exemple dans la note de service de 2018, incite à s'intéresser à l'articulation modéliser-représenter.

Pour Colette Laborde (1992) :

*« Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d'une partie du domaine de réalité...A chaque modèle est donc attaché un domaine de fonctionnement dans le domaine de réalité dépendant des objets et relations retenus par la modélisation. ...Un modèle fournit aussi une représentation du système d'objets et de relations retenus pour la modélisation ou encore, pour prendre une image plus parlante, une incarnation de ce système dans un support d'expression...Mais toute interprétation issue du support ne donne pas une information nécessairement valide sur le domaine de réalité. On peut ainsi délimiter un domaine d'interprétation à l'intérieur du support du modèle. »*

Les chercheurs qui s'intéressent à l'enseignement des problèmes reposant sur une modélisation d'un domaine extramathématique utilisent diverses schématisations pour rendre compte de la façon dont les modèles sont construits et utilisés (Perrenet et Zwaneveld, 2012). La schématisation du cycle de modélisation de Blum et Borroméo Ferri (2009), par exemple, est une version développée de celle utilisée par les concepteurs des évaluations PISA (2006).

Cependant, si un modèle mathématique est un ensemble de relations qui représentent une situation (un système) et facilitent son étude grâce aux outils et aux techniques mathématiques, alors toute activité conduisant à la conception d'un modèle, est une activité de modélisation et la modélisation mathématique ne se limite pas à la résolution de problèmes dont le contexte est non mathématique. Elle comprend un ensemble de savoirs mathématiques à connaître pour résoudre certains types de problèmes et une démarche où les étapes à suivre sont aussi importantes que le résultat final.

L'importance accordée à la résolution de problèmes et à la modélisation n'est pas spécifique à la France. Elle s'inscrit dans un mouvement de changement curriculaire international (Barquero et *al.*, 2018) sous l'influence des évaluations internationales telles que TIMSS ou PISA et l'impulsion de recommandations européennes (Rocard et *al.*, 2007). Il semble qu'un changement de paradigme scolaire (Wozniak, 2019) soit à l'œuvre qui fasse de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement.

C'est dans ce contexte que le 48e colloque de la COPIRELEM s'est intéressé aux compétences *Représenter et modéliser dans la classe de mathématiques à l'école* en abordant les nouvelles questions qui se posent aux enseignants et aux formateurs : Comment enseigner le processus de modélisation ? quels sont les savoirs à enseigner ? Comment former les enseignants au processus de modélisation ? Comment s'articulent les compétences modéliser et représenter ? Comment enseigner la diversité des représentations des objets mathématiques comme les nombres, les figures ou les solides ? Quelle place pour la représentation et l'organisation des données ?

**Le 48e colloque de la COPIRELEM**

Les 170 participants venaient principalement de France mais aussi des pays limitrophes, Suisse, Belgique et Espagne. Le colloque a été un lieu de rencontres et d'échanges entre différents acteurs et actrices de la formation des enseignants du premier degré : chercheurs en didactique des mathématiques, formateurs en INSPE, membres des IREM, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, maîtres formateurs ou encore référents mathématiques.

Ces actes témoignent de la richesse scientifique de ce 48e colloque de la COPIRELEM structuré autour de trois conférences plénières.

***Berta Barquero***, professeure à l'université de Barcelone, a inauguré le colloque en présentant la formation des futurs enseignants du primaire dans son université. L'explicitation des fondements scientifiques du dispositif des parcours d'étude et de recherche pour la formation (PER-FE) en lien avec l'enseignement de la modélisation a permis d'interroger leur pertinence et leurs effets sur les pratiques.

***Annick Fagnant***, professeure à l'université de Liège, a dressé un état de la littérature de recherche internationale sur la question des représentations et de la schématisation en résolution de problèmes. Elle a ainsi rendu compte de la diversité des schématisations, permettant une mise en perspective des documents d'accompagnement des programmes récemment publiés en France.

***Thomas de Vittori***, maître de conférences à l'INSPE de l'académie de Lille Hauts de France, a proposé de faire un pas de côté, en abordant d'un point de vue épistémologique la dialectique représenter/modéliser en géométrie. L'exploration de certaines positions philosophiques a ainsi permis d'aborder la question : « La figure est-elle une représentation d'un modèle ou le modèle de représentations ? »

À l'issue des trois jours d'échanges, ***Richard Cabassut*** a analysé la façon dont un chercheur prend en compte les contraintes des systèmes didactiques pour répondre à une commande institutionnelle. Pour cela, il s'est appuyé sur son expérience du dispositif national de formation des référents de mathématiques sur la représentation et la modélisation en résolution de problèmes arithmétiques.

Les **treize ateliers** et **quinze communications** organisés dans des sessions en parallèle ont porté sur l'articulation des compétences *modéliser* et *représenter* en lien avec la résolution de problèmes ou plus spécifiquement sur l'une de ces compétences. C'est ainsi, qu'a été abordée la question de la diversité des représentations des nombres ou des objets géométriques (figures ou solides) en considérant les savoirs en jeu, les apprentissages des élèves ou le point de vue des pratiques des enseignants.

**Bibliographie**


Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C., Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. ICMI Studies 24. *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities.* University of Tsukuba, Japan. (pp. 189-197).

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1(1), 45-58.

Blum, W., Galbraight, P., Henn, H-W, Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study.* Springer.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Laborde, C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, conférence plénière au 7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7, Québec, Canada, août 1992.

Ministère Education Nationale (2018). La résolution de problèmes à l'école élémentaire. *Bulletin officiel spécial n°3 du 26 avril 2018.*

Perrenet, J., Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.

PISA (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA*. OECD.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. &Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés européennes.

Wozniak, F. (2019). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. Didactiques en pratique, 5, 27-36.

# Comité scientifique

Floriane Wozniak, PU, INSPE Toulouse Occitanie Pyrénées, UMR - Éducation, Formation, Travail, Savoirs (UMR-EFTS) – présidente du comité scientifique

Anne Bilgot, PRAG, INSPE de Paris, Sorbonne Université, COPIRELEM

Jean-Pierre Bourgade, MCF, INSPE Toulouse Occitanie Pyrénées, UMR - Éducation, Formation, Travail, Savoirs (UMR-EFTS)

Valentina Celi, MCF, INSPE Académie de Bordeaux, Laboratoire Cultures, Education, Sociétés (LACES), Université de Bordeaux, COPIRELEM

Hamid Chaachoua, PU, INSPE Académie de Grenoble, Laboratoire d'Informatique de Grenoble, (LIG)

Pierre Eysseric, PRAG, INSPE Aix-Marseille Université, COPIRELEM

Éric Laguerre, MCF, INSPE Toulouse Occitanie Pyrénées, UMR - Éducation, Formation, Travail, Savoirs (UMR-EFTS)

Anne-Marie Rinaldi, MCF, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation (LIRDEF), Université Paul Valéry, Montpellier

Frédérick Tempier, MCF, INSPE de l'Académie de Versailles, Laboratoire de didactique André Revuz, (LDAR), COPIRELEM

Sonia Yvain-Prébiski, MCF, INSPE de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz, (LDAR)

Claire Winder, MCF, INSPE Aix-Marseille Université, Laboratoire Apprentissage, Didactique, Évaluation, Formation (ADEF)

# Comité d'organisation

Floriane Wozniak (sites de Toulouse), présidente du comité d'organisation

Jean-François Bergeaut (site de Foix)

Christophe Billy (site d'Albi)

Marc Cailhol (site de Rodez)

Philippe Clément (site de Montauban)

Pierre Danos (site de Auch)

Karine Daubin (sites de Toulouse)

Isabelle Laurençot Sorgius (sites de Toulouse)

Nicolas Ros (sites de Toulouse)

Natalie Lagarde (Responsable administrative et financière, site de Croix de Pierre)

# Remerciements

Le comité d'organisation tient à remercier ses différents partenaires pour leur soutien financier ou logistique, sans qui rien n'aurait été possible : Université Toulouse Jean Jaurès ; INSPE Toulouse-Occitanie-Pyrénées ; Institut de Mathématiques de Toulouse ; UMR Education, Formation, Travail, Savoirs ; SFR Apprentissage – Enseignement – Formation ; ADIREM ; IRES de Toulouse ; CASDEN ; MGEN ; Texas Instruments.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de représenter nos partenaires lors de la cérémonie d'ouverture en dépit d'emplois du temps très chargés :

- Nadine Jessel, directrice INSPE TOP ;

- Xavier Buff, représentant de Franck Barthe, directeur de l'IMT ;

- Cécile Gardies, directrice de l'unité mixte de recherche EFTS ;

- Karine Duvignau, directrice de la SFR AEF ;

- Anne Cortella, représentante de Marie-Line Chabanol, directrice de l'ADIREM ;

- Guillaume Loizelet, représentant de Bénédicte Garreau de Bonneval, directrice de l'IRES de Toulouse.

Nous tenons en particulier à remercier Marie Saint-Michel, IPR de lettres, qui par son soutien, a permis la prise en charge de la participation de quelques collègues référents de mathématiques de l'académie de Toulouse via l'Ecole Académique de la Formation Continue.

Enfin, nous remercions les membres de la COPIRELEM de nous avoir fait confiance pour organiser ce 48[e] colloque qui après une annulation et une édition en distanciel pour cause de pandémie, a été un moment intense sur le plan scientifique et humain.

# LES CONFERENCES

# LES ATELIERS

# LES COMMUNICATIONS

# CONFERENCES

# QUESTIONNER LA MODELISATION MATHEMATIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE : LES PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

**Barquero BERTA**
Faculté d'Éducation
Sect. Didactiques des Mathématiques
Universitat de Barcelona
bbarquero@ub.edu

Dans ce texte, nous réfléchissons à ce que signifie concevoir la formation des enseignants dans le paradigme du « questionnement sur le monde ». Nous présentons les *parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE), un format de formation des enseignants élaboré dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique (TAD) où de futurs enseignants étudient collectivement et sous la direction de leurs formateurs des problèmes de la profession. En particulier, nous analysons des études de cas portant sur la mise en œuvre des PER-FE avec des enseignants de l'école primaire en formation initiale. Ceux-ci sont invités à aborder un problème de modélisation mathématique, « La boîte de la pâtissière », avant de l'analyser et de travailler sur son adaptation à l'école primaire. Ceci nous permet d'évaluer la stratégie de formation proposée, et de mettre en évidence les besoins praxéologiques des professeurs pour enseigner la modélisation.

## I - DOMAINE DE RECHERCHE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE

Ces dernières décennies, le champ de recherche « Applications et modélisation » a pris de l'ampleur dans la communauté internationale des didacticiens des mathématiques du fait de différentes réformes curriculaires. Les études sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique se sont ainsi développées, souvent en référence avec la justification et la motivation à enseigner et apprendre des mathématiques (Blum et Niss, 1991 ; Blum, 2002 ; García et al., 2006).

Si les origines de ce domaine de recherche sur la modélisation mathématique peuvent se situer dans les travaux de Freudenthal (1968) et Pollack (1968), son développement a ensuite été facilité par la constitution des conférences ICTMA (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) depuis 1983, ainsi que par la création de groupes de travail dans les conférences de didactique des mathématiques. Différents travaux décrivent l'origine et l'évolution de ce domaine de recherche, ainsi que son impact dans différentes directions (par exemple : Kaiser et Sriraman, 2006 ; Blum, 2015).

En premier lieu, on doit signaler l'évolution concomitante des programmes d'enseignement pour de nombreux pays. Dans le langage des compétences – actuellement dominant dans de nombreuses réformes curriculaires en Europe –, les compétences en matière de modélisation jouent un rôle décisif et sont inscrites parmi les compétences associées à la discipline mathématique. Ceci témoigne de l'importance de la modélisation mathématique au niveau international.

Certains outils construits dans le cadre de la recherche ont été intégrés dans l'approche par compétences. Par exemple, une version du « cycle de modélisation » (Figure 1) est considérée comme la base conceptuelle du programme PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) pour la « culture mathématique » à promouvoir :

*La culture mathématique est la capacité d'un individu à raisonner mathématiquement et à formuler, employer et interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans une variété de contextes du monde réel. […] Le cycle de modélisation (formuler, utiliser, interpréter et évaluer) est un aspect central de la conception PISA de la culture mathématique des élèves ; cependant, il n'est pas souvent nécessaire de s'engager dans chaque étape du cycle de modélisation, en particulier dans le contexte d'une évaluation (Blum, Galbraith et Niss, 2007, pp. 3-32). (OECD, 2018, pp. 75-76, notre traduction[1] )*

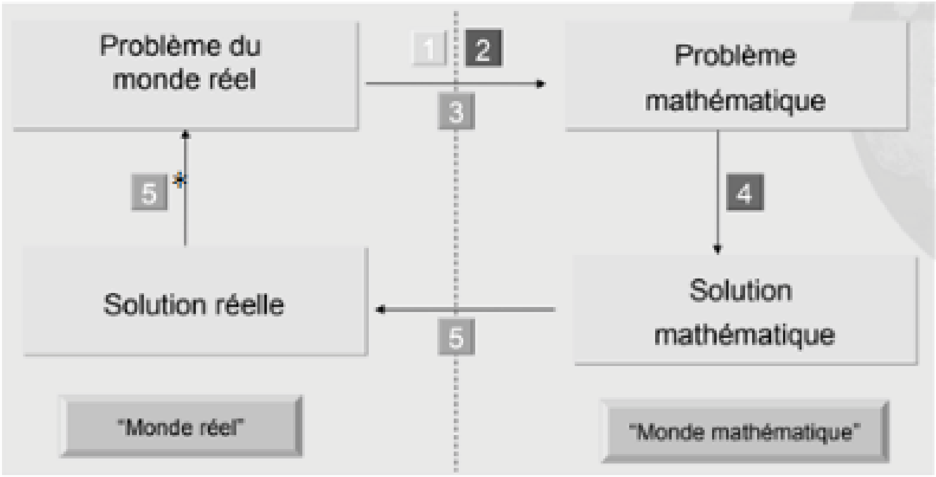



*Figure 1. Cycle de modélisation décrit dans OECD (2013, p. 26).*

Dans les reformes curriculaires en France, dès 2015, un document détaillant les « compétences mathématiques » est diffusé aux enseignants. La compétence « modéliser » est reconnue comme une des « six compétences majeures », avec chercher, représenter, calculer, raisonner et communiquer. Selon le document Éduscol du cycle 4 (Éduscol, 2016), le terme « modéliser » est pris dans son acception la plus large et renvoie à l'utilisation d'un ensemble de concepts, méthodes, et théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques. Les Guides fondamentaux pour l'enseigner au cycle moyen (Éduscol, 2022), décrivent la modélisation comme un « *processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique* ». Dans le cadre de la résolution des problèmes verbaux à données numériques à l'école élémentaire, la phase « modéliser » aboutit à déterminer, en s'appuyant sur d'éventuelles représentations (dessins, schémas, tableaux, arbres, etc.), quelles opérations devront être effectuées dans la phase suivante pour répondre à la question posée (Op. cit., p. 48, voir Figure 2).

[1] "Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. [..] The modelling cycle (formulate, employ, interpret, and evaluate) is a central aspect of the PISA conception of mathematically literate students; however, it is often not necessary to engage in every stage of the modelling cycle, especially in the context of an assessment (Blum, Galbraith and Niss, 2007, pp. 3-32)" (OECD, 2018, pp. 75-76).

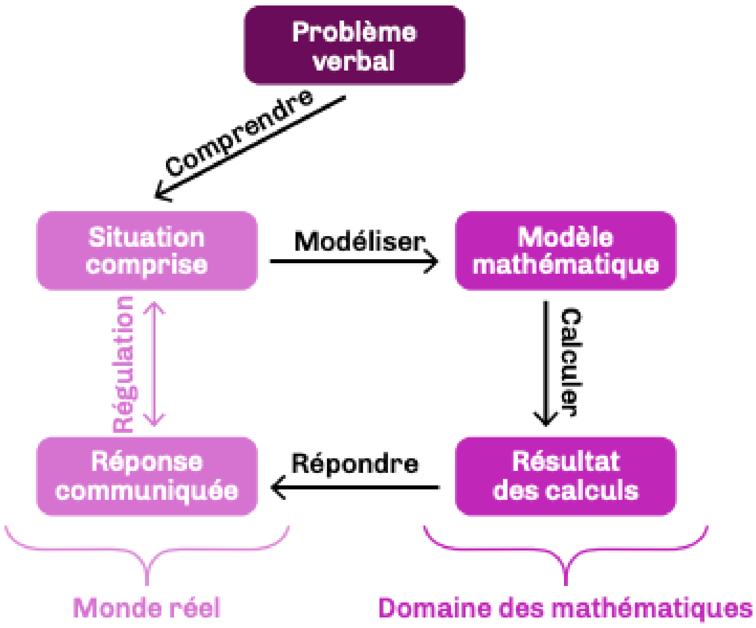



*Figure 2. Modèle en quatre phases retenu pour la résolution de problèmes (Éduscol, 2022, p. 44).*

Dans le cas de l'Espagne, depuis les reformes curriculaires de 2009, la modélisation est associée à l'axe « résolution de problèmes », qui est un des cinq axes structurant le curriculum (résolution de problèmes, raisonnement et preuve, connexions, communication et représentation, compétences socio-émotionnelles). Chaque axe a plusieurs compétences assignées. Trois compétences font particulièrement référence à la modélisation mathématique : « Compétence 1. Traduire un problème en langage mathématique ou en une représentation mathématique […] » ; « Compétence 3. Explorer, formuler et tester des hypothèses simples, en reconnaissant la valeur du raisonnement et de l'argumentation […] » et « Compétence 5. Reconnaître et utiliser les connexions entre les différents outils [modèles] mathématiques, ainsi qu'identifier les mathématiques impliquées dans d'autres domaines ou dans la vie quotidienne […]. »

Outre les efforts pour faire de la modélisation une activité bien établie dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, les recherches sur l'enseignement de la modélisation se sont centrées dans un premier temps sur la description et l'analyse de l'activité de modélisation (en termes de « compétences » et/ou à travers le « cycle de modélisation » et ses nombreuses variantes) ou encore sur la conception de situations d'enseignement. De nombreuses recherches mettent en évidence l'existence de fortes contraintes institutionnelles sur la diffusion généralisée des mathématiques comme outil de modélisation dans les systèmes d'enseignement actuels. Dans cette direction de recherches, nous pouvons souligner le travail de Blum (1991) qui se réfère à la nature des arguments développés par l'élève ou l'enseignant. Le travail de Kaiser (2006) qui définit différents profils d'enseignants. Blomhøj et Kjeldsen (2006) vont un peu plus loin en considérant les « dilemmes » interdépendants[2] qui doivent être dépassés dans l'enseignement de la modélisation mathématique. À un niveau plus générique en termes d'analyse des contraintes, Burkhardt (2006) souligne l'existence de deux réalités : d'une part, les progrès et les résultats encourageants de la recherche en matière de modélisation et d'applications pédagogiques ; d'autre part, les difficultés de sa diffusion à grande échelle dans les classes. Plus spécifiquement, Burkhardt met en évidence l'existence de certaines « barrières » qui empêchent l'introduction de la

[2] "(1) The understanding of mathematical modelling competency from a holistic point of view or as a set of sub-competencies. […] (2) Seeing mathematical modelling as an educational goal in its own right or as a mean for motivating and supporting the students' learning of mathematics. […] (3) The dilemma of teaching directed autonomy" (op. cit., pp. 175-176).

modélisation mathématique dans les curricula, telles que l'inertie du système d'enseignement, la prise en charge des éléments constitutifs du monde réel à modéliser quand nombre d'enseignants ont choisi les mathématiques pour son pouvoir d'abstraction, le développement professionnel limité des enseignants, le rôle et la nature de la recherche sur les pratiques en classe.

Pour que l'activité de modélisation puisse vivre normalement dans nos systèmes d'enseignement, il est indispensable d'étudier en profondeur les conditions qui peuvent faciliter son intégration et les contraintes qui entravent son développement dans les institutions d'enseignement actuelles. Dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique (TAD), ce questionnement « écologique », c'est-à-dire l'étude des conditions et des contraintes qui délimitent le rôle de la modélisation mathématique, s'inscrit dans une problématique plus vaste du changement de paradigme scolaire que Chevallard (2015) a décrit en termes de changement de paradigmes : du paradigme de la « visite des œuvres » au paradigme du « questionnement du monde ». Dans le paradigme du questionnement du monde, les savoirs à enseigner sont associés à l'étude de questions pertinentes, où les mathématiques apparaissent comme outils de modélisation des systèmes d'où émergent ces questions.

Considérant le problème général de l'évolution vers le « paradigme du questionnement du monde » (Chevallard, 2015) dans les systèmes éducatifs actuels, et le rôle remarquable de la modélisation mathématique, nous abordons à présent la question fondamentale de la formation des enseignants comme condition favorable à ce changement. Pour cela, nous commençons par caractériser l'activité de modélisation depuis la TAD.

## II - LA MODELISATION MATHEMATIQUE EN TAD

Depuis ses premiers développements, la théorie anthropologique de la didactique lie modélisation et activité mathématique en considérant que l'activité mathématique consiste principalement à produire, transformer, interpréter et développer des modèles mathématiques (Chevallard, 1989 ; Chevallard, Bosch et Gascón, 1997).

> *Un aspect essentiel de l'activité mathématique porte sur la construction d'un modèle (mathématique) de la réalité que nous voulons étudier, sur le travail avec ce modèle et sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce travail pour répondre aux questions posées initialement. Une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier, par conséquent, avec une activité de modélisation mathématique. (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, p. 51, notre traduction)*[3]

Les deux principaux éléments dans l'activité de modélisation sont les notions de « système » et de « modèle » qui représentent davantage une fonction qu'une entité. Un système mathématiquement modélisable est un domaine de la réalité, sans aucune limitation, qui peut être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut ainsi les systèmes extra mathématiques ou (intra) mathématiques.

Du côté des modèles, Chevallard (1989) distingue « travailler le modèle » et « travailler sur le modèle ». D'après l'auteur, « *"travailler le modèle" consiste à produire des connaissances relatives au système étudié. L'intérêt ou la fécondité d'un modèle réside dans sa capacité à produire des connaissances sur le système modélisé qu'une autre voie ne permettrait pas aussi facilement. "Travailler sur le modèle" peut s'interpréter comme la construction de*

[3] «Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática». (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, p. 51).

*modèles successifs, mieux adaptés à l'étude* » (Ibid, p. 57). Nous faisons l'hypothèse que la problématique de l'adaptation du modèle au système est une tâche qui doit être au cœur du processus de modélisation.

La relation entre la modélisation mathématique et la construction des connaissances mathématiques ou extra mathématiques est abordée à travers la notion de *praxéologie* ($\wp$), qui est le principal outil proposé par la TAD pour décrire les connaissances et les activités dans les contextes institutionnels (Chevallard, 1999, 2002). Une praxéologie est une entité formée par la combinaison de la *praxis* – le savoir-faire ou les manières de faire – et du *logos* – un discours organisé sur la *praxis* –. Le bloc *praxis* contient des *types de tâches* et des ensembles de *techniques* pour réaliser ces tâches, tandis que le bloc *logos* comprend une *technologie* (un discours sur les techniques) et une *théorie* pour justifier la technologie. Ce quatuor $\wp = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$ offre une vision unitaire des activités humaines sans dissocier le « faire » du « penser et dire sur le faire ».

La notion de praxéologie lie ainsi l'aspect conceptuel et procédural des activités humaines, en incluant l'activité de *modélisation mathématique*. Modéliser une situation donnée pour construire de nouvelles connaissances à son sujet peut être décrit en termes de praxéologies. Nous partons d'une question ou une tâche, qui émerge du système initial qui sous-tend la tâche, et que nous voulons résoudre. Nous utilisons des techniques pour produire un modèle de la situation. Nous soutenons cette *praxis* de modélisation par des notions, des outils et des justifications (qui font partie du *logos*). Une fois qu'un système donné a été modélisé, une nouvelle praxéologie peut être développée en intégrant le modèle produit dans de nouvelles techniques pour résoudre de nouvelles tâches au sein d'un *logos* plus développé.

En utilisant la notion de *praxéologies de modélisation*, Wozniak (2012) étudie comment les enseignants de l'école primaire en France (sans formation spécifique sur la modélisation) ont tendance à « enseigner des solutions ou des modèles » plutôt que de développer des praxéologies de modélisation complètes. Ces travaux concluent que les praxéologies de modélisation utilisées correspondent à des praxéologies « muettes » ou faibles (Wozniak, 2012) avec un processus de modélisation rarement remis en question. Les possibles *logos* associés aux praxéologies de modélisation restent dans l'ombre et répondent difficilement à des questions comme : *« Quelles sont les hypothèses ? », « Pourquoi utiliser ces modèles ? », « Quel est le domaine de validité des modèles utilisés ? »*

Le problème que des élèves de CM2 (10-11 ans) devaient résoudre était présenté à partir d'une photo prise dans un parc en Angleterre. La question de départ de l'activité de modélisation était : « *Quelle est à peu près la taille de ce géant ?* » Dans les classes observées, les chercheurs ont constaté une certaine *praxis* relevant du processus de modélisation mais très peu de *logos* associé : un modèle est utilisé et fonctionne sans discuter sa légitimité ou son domaine de validité. L'enjeu de savoir dans l'étude de ce problème n'est pas la démarche de modélisation mais l'obtention de la réponse par application de modèles préconstruits par l'enseignant, principalement des modèles de proportionnalité. Il semble que l'objectif d'enseignement n'est pas l'approche de la modélisation mais la consolidation d'objets de connaissances mathématiques déjà institutionnalisés qui doivent être appliqués à certains contextes. Enfin, l'analyse de cette expérience montre que les enseignants manquent de mots, de termes, de symboles et de concepts pour que le processus de modélisation soit mis en œuvre dans la classe.

D'un point de vue théorique, ces observations ont conduit à une catégorisation des praxéologies mathématiques en fonction de leur *logos*. Dans le cas de la modélisation, nous distinguons des praxéologies *muettes* lorsque les hypothèses sur le système initial ne sont pas explicitement énoncées, que le modèle utilisé est préconstruit et que le travail au sein du modèle donne des résultats qui ne sont guère validés par rapport au système. Pour obtenir des praxéologies *fortes* (ou *sonores*), toutes les étapes du processus de modélisation doivent être présentes à travers un discours qui explique, justifie et valide l'ensemble du processus. Wozniak (2012) et Barquero, Bosch et Wozniak (2019) ont utilisé cette distinction entre praxéologies de modélisation muettes et fortes pour analyser l'activité de modélisation développée par des enseignants du primaire lorsqu'ils abordent certaines tâches de modélisation particulières.

À ce stade, dans le cadre de la TAD et de l'approche qu'elle donne à l'activité de modélisation, nous pouvons présenter les questions principales qui sont en jeu dans les termes suivants : « *Quel équipement praxéologique peut aider les enseignants à transformer les praxéologies muettes en praxéologies fortes, concernant l'activité de modélisation ? Quelles activités de formation des enseignants peuvent nourrir le développement de praxéologies de modélisation ?* »

## III - LA FORMATION DES ENSEIGNANTS A LA MODELISATION MATHEMATIQUE FACE AUX CONTRAINTES

Dans le cadre de la TAD, lorsqu'on réfléchit à la formation des enseignants dans le « paradigme de questionnement du monde », divers objectifs et hypothèses se posent sur son contenu et sa mise en œuvre.

Des recherches précédentes (Cirade, 2006 ; Bosch et Gascón, 2009) ont recommandé d'inclure au cœur des programmes de formation, des *questions de la profession* qui affectent le développement des pratiques des enseignants. Ces questions sont de différents niveaux de généralité, depuis les plus spécifiques concernant un thème mathématique particulier jusqu'à ceux concernant l'organisation scolaire et pédagogique de l'école ou les décisions de la société sur les systèmes éducatifs. Dans le cas de la modélisation mathématique qui nous intéresse ici, des exemples de questions de la profession peuvent être : « *Quel type d'activités de modélisation peut être développé à l'école primaire ?* », « *Comment décrire et parler de cette activité de modélisation, quels nouveaux termes sont nécessaires ?* », « *Comment interroger avec des élèves ou des étudiants les modèles proposés et discuter leur domaine de validité ?* » Beaucoup de ces questions ont une composante mathématique essentielle qui doit être prise en compte dans la formation des enseignants.

Un autre objectif de la formation des enseignants est de faciliter la diffusion et l'appropriation des outils de la recherche en didactique des mathématiques. Ces outils sont utilisés pour analyser des contenus curriculaires et leurs formes d'enseignement ou traiter des questions de la profession (au moins pour commencer à les aborder), plutôt que présentés comme un ensemble de connaissances dogmatiques.

Ces objectifs se sont concrétisés dans la proposition de *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE), initialement expérimentée par Sierra (2006) dans le cas de la formation des enseignants de l'école maternelle et primaire et développée par Ruiz-Olarría (2015) pour la formation initiale des enseignants de mathématiques du secondaire. Ce texte présente l'étude d'un PER-FE avec des enseignants du primaire en formation initiale mis en œuvre à l'Université de Barcelone (Espagne) dont le point de départ est la question professionnelle : comment analyser, adapter et intégrer un processus d'apprentissage lié à la modélisation mathématique à l'école primaire ?

La figure 3 présente les cinq modules qui organisent la structure générique d'un PER-FE (telle que décrite dans Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero, Bosch et Romo, 2018). Chaque étude nécessite quelques adaptations (en ne développant pas tous les modules ou en partageant certains d'entre eux), en fonction des conditions du contexte de formation.

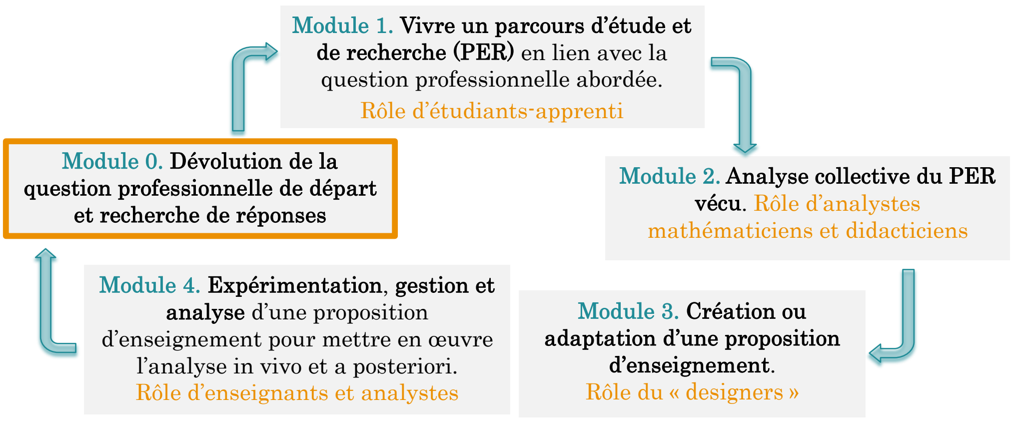



*Figure 3. Structure générale d'un PER-FE, adapté des modules proposés par Ruiz-Olarría (2015).*

Le *Module 0* commence par introduire une question de la profession (par exemple, « *Comment enseigner la proportionnalité, l'algèbre, les nombres entiers ou la régression linéaire ?* », « *Comment intégrer la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques ?* ») pour laquelle les étudiants-enseignants cherchent les réponses disponibles parmi les différents médias accessibles (manuels, curriculum, documents d'accompagnement des programmes, guides pour les enseignants, etc.).

Le *Module* 1 consiste à proposer aux étudiants-enseignants de « vivre » une activité – habituellement, basée sur la conception d'un parcours d'étude et de recherche (PER) (Chevallard, 2006, Bosch, 2018) – qui pourrait, dans une certaine mesure, exister dans une salle de classe. Les enseignants en formation sont invités à jouer le rôle d' « étudiants-apprenti » sous le guide des formateurs.

Le *Module* 2 conduit à l'analyse collective du PER qui vient d'être expérimenté et à réaliser un travail collectif de conception d'une possible adaptation. Les enseignants en formation peuvent concevoir une version adaptée de l'activité mathématique expérimentée précédemment pour un groupe spécifique d'élèves (le leur, si possible). Cette conception prend la forme d'un plan de cours (une « fiche de préparation ») aussi proche que possible de la pratique des enseignants, incluant une analyse *a priori* de l'activité.

Le *Module* 3 comprend la mise en œuvre et l'analyse *in vivo* du plan de cours. Les enseignants doivent mettre en œuvre leur proposition d'enseignement, en s'appuyant sur leur analyse *a priori* comme outil pour gérer la réalisation de l'activité et développer son analyse *in vivo* pendant son exécution.

Le *Module 4* consiste à l'analyse *a posteriori* des séances mises en œuvre. Ce dernier module est consacré au partage d'expériences et à la réflexion sur les *conditions* créées et les *contraintes* rencontrées au cours des mises en œuvre. Les futurs enseignants sont invités à partager et à comparer les contraintes institutionnelles identifiées et le niveau auquel elles se manifestent. Ils peuvent enfin présenter une nouvelle adaptation de l'activité et une analyse détaillée de ce qui s'est passé au cours de leur expérimentation.

Les activités spécifiques proposées dans chaque module dépendent des questions de la profession pris en charge et du contexte de formation des enseignants dans lequel les PER-FE sont élaborés. La recherche développée en TAD a expérimenté différents types de PER-FE, certains passant par tous les modules, d'autres ne se concentrant que sur certains d'entre eux. Barquero, Florensa et Ruiz-Olarría (2019) présentent un panorama des différents PER-FE mis en œuvre selon différentes modalités de développement en formation d'enseignants de l'école primaire, secondaire ou de l'université.

Le Tableau 1 présente les PER-FE mis en œuvre jusqu'à présent par notre équipe de recherche, en soulignant certaines de leurs caractéristiques : le niveau scolaire auquel les enseignants sont formés ; si les participants sont des enseignants en poste ou en formation initiale ; les questions génératrices à l'origine des PER-FE ; les modules développés ; si le PER-FE s'appuie sur un PER déjà expérimenté précédemment ; et la durée totale dans la formation des enseignants.

| | *Niveau scolaire* | *Formation initiale ou continue* | *Question génératrice $Q_0$* | *Modules* <br> *0-4* | *PER déjà expérimenté* | *Durée* <br> *(Heures)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maternelle | Initiale | Qu'est-ce que la connaissance logique et comment la caractériser ? Quels types d'activités peuvent donner du sens aux savoirs logiques en maternelle et en primaire ? | 0, 1, 2 | Oui <br> La salle d'objets trouvés (Lerma et al., 2021) | 24 |
| 2 | Primaire | Initiale | Comment introduire la raison d'être et la fonctionnalité du système numérique décimal de position ? | 0, 1, 2 | Oui <br> Sierra (2006) | 30 |
| 3 | Primaire | Initiale | Comment enseigner la modélisation mathématique à l'école primaire ? | 0, 1, 2 | Oui <br> La boîte de la pâtissière <br> Chappaz et Michon (2003) | 18 |
| 4 | Primaire | Initiale | Comment introduire l'aléatoire et l'inférence statistique à l'école primaire ? | Tous | Oui <br> Les boules à l'intérieur de la bouteille <br> Brousseau, Brousseau, et Warfield (2001) | 30 |
| 5 | Secondaire | Initiale | Comment organiser l'enseignement de la modélisation fonctionnelle élémentaire dans l'enseignement secondaire ? | 0, 1, 2 | Oui <br> Plans d'épargne <br> García et al. (2006) | 12 |
| 6 | Secondaire | Continue | Comment enseigner la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire ? | Tous | Oui <br> Prévision des ventes de Desigual <br> Serrano, Bosch et Gascón (2010, 2013) | 80 |
| 7 | Secondaire | Continue | Comment enseigner la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire ? | Tous | Oui <br> Prévision des utilisateurs de Facebook <br> Barquero et al. (2018) | 80 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | Secondaire | Initiale | Comment introduire la raison d'être des nombres réels dans l'enseignement secondaire ? | Tous | Non<br><br>Licera (2017) | 30 |
| 9 | Secondaire | Initiale | Comment introduire la raison d'être des nombres négatifs dans l'enseignement secondaire ? | 0, 1, 2 | Oui<br><br>Cid (2016) | 12 |
| 10 | Secondaire | Initiale | Comment enseigner les coniques ? | Tous | Oui<br><br>Comment construire un four solaire ?<br><br>(Benito, 2019) | 12 |
| 11 | Université | Continue | Évolution d'une épidémie | Tous | Oui<br><br>Évolution du virus de la Dengue<br><br>Lucas (2015) | 12 |

*Tableau 1. PER-FE mis en œuvre (d'après le tableau proposé par Barquero et al., 2022).*

Ce texte présente un PER-FE mis en œuvre depuis l'année académique 2011-2012 en formation initiale d'enseignants d'école primaire à l'Université de Barcelone (Espagne) que nous appellerons « La boite de la pâtissière » (adaptation de celle proposée par Chappaz et Michon (2003) et Ruiz-Higueras (2008)). Il est intégré à un cours obligatoire appelé « Didactique des mathématiques II » avec des étudiants de 4e année (dernière année de formation initiale à l'université), qui vise à introduire des outils de la didactique des mathématiques pour aborder les tâches professionnelles d'analyse, conception et évaluation des pratiques mathématiques à l'école primaire. Il s'est déroulé durant sept séances de 2 heures avec des groupes d'une cinquantaine d'enseignants en formation initiale. La conception de ce PER-FE suit les trois premiers modules (modules 0, 1 et 2) de la figure 3. À l'issue de ces trois modules, les enseignants en formation initiale ont été invités à concevoir et mettre en œuvre un projet d'enseignement à partir d'un des PER vécus sur l'ensemble de la formation. Le travail correspondant aux modules 3 et 4 a été développé en groupes et supervisé par la formatrice. Cependant, certains groupes n'ont pas eu la possibilité d'expérimenter leur projet car le cours n'a pas d'heures consacrées à l'immersion scolaire. C'est ainsi que nous présentons ici le travail développé dans les premiers modules qui est commun à tous les participants au PER-FE.

## IV - UN PER-FE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE POUR LES ENSEIGNANTS DE L'ECOLE PRIMAIRE

### 1. Module 1 : Gérer la dialectique système-modèle dans la situation de la boîte de la pâtissière

Lors de la mise en œuvre de l'activité la « boîte de la pâtissière », les enseignants en formation ont réussi à endosser le rôle des élèves et à réaliser l'activité de modélisation proposée. Cette activité, qui est une adaptation de celle proposé par Chappaz et Michon (2003), commence par la présentation de la situation : une pâtissière a besoin d'aide pour emballer ses gâteaux et souhaite utiliser un type de boîtes particulier (Figure 4).

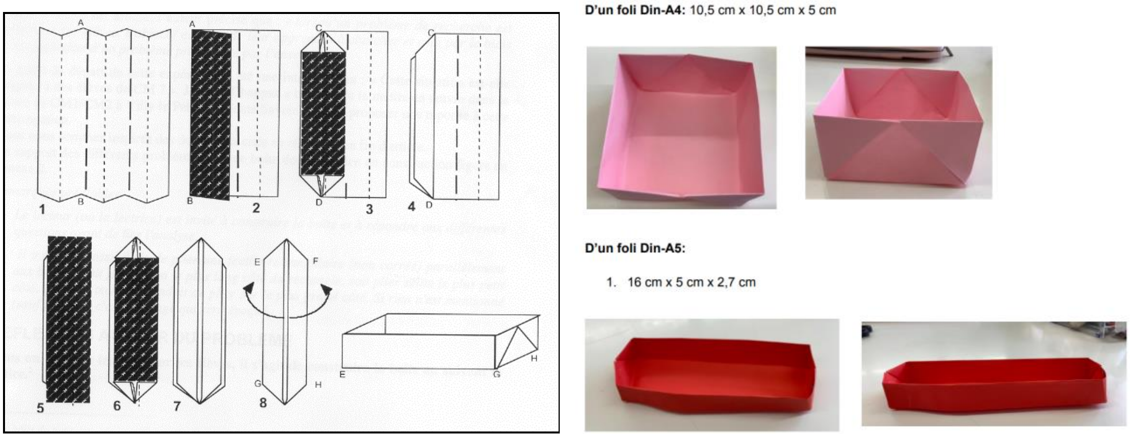



*Figure 4. Processus de construction d'une boîte (côté gauche, Chappaz et Michon (2003), p. 32) et boîtes obtenues (côté droit) par pliage sur la largeur ou la longueur d'une même feuille.*

La question $Q_0$ qui est le point de départ de l'activité est alors : « *Comment pouvons-nous construire des boîtes pour aider la pâtissière à emballer la variété de gâteaux qu'elle propose ?* », « *Quelle relation existe-t-il entre les dimensions du matériau initial (papier ou carton) et les dimensions de la boîte obtenue ?* »

A partir de cette question initiale $Q_0$, l'activité est structurée en trois phases selon ce qui, parmi les variables didactiques, est donné ou reste inconnu : (1) dimensions des feuilles (papier ou carton) ; (2) dimensions des boîtes ; (3) dimensions des gâteaux à emballer.

Nous résumons à présent le travail de modélisation réalisé en explicitant le système étudié, des exemples de questions proposées par la formatrice ou par les enseignants en formation qui ont nourri l'activité de modélisation et la typologie des modèles mathématiques élaborés. Une description plus détaillée des systèmes et modèles qui ont émergé ainsi que leur évolution peut être lue dans le travail de (Wozniak, Barquero, Bosch et Kaspary, à paraître).

**Première phase** : On considère que les dimensions des feuilles de papier (largeur et longueur) sont données. Cette première étape se focalise sur la question $Q_1$ : « *Quelles sont les dimensions des boîtes obtenues à partir de feuilles de papier dont les dimensions sont fixées ?* » Les étudiants commencent par considérer quelques cas et étudient des questions telles que :

> $Q_{1.1}$ : « *Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue à partir d'une feuille DIN-A4 ? Si on prend une feuille DIN-A5 (demi A4), obtient-on une boîte dont les mesures sont la moitié de la boîte précédente ?* »

> $Q_{1.2}$ : « *Quelles dimensions de boîte obtenons-nous à partir d'une feuille carrée ? Obtenons-nous une boîte à base carrée ? Et pour obtenir une boîte à base rectangulaire ?* […] »

Dans cette phase, les étudiants construisent des boîtes de différentes dimensions de feuilles et effectuent leurs mesures à l'aide de différents instruments (grille en papier, règle, etc.). La construction de boîtes à partir de différentes feuilles permet de découvrir qu'on peut fabriquer deux boîtes différentes (voir Figure 4) selon qu'on plie la feuille dans le sens de sa longueur ou de sa largeur. Certaines questions, plus avancées, abordent la comparaison numérique des dimensions des feuilles et de celles des boîtes obtenues : les étudiants formulent de premières hypothèses sur de possibles relations entre les différentes variables. À la fin de cette première phase, certaines des questions soulevées par les étudiants portaient sur une éventuelle relation de proportionnalité entre les dimensions des feuilles et celles des boîtes. L'étude de la question $Q_1$ conduit à enrichir le système initial feuille/boîte et à proposer de nouvelles questions que le modèle empirique-mesure ne permet pas d'aborder.

| | | Com canvia la mida de la caixa segons l'orientació del full | |
|---|---|---|---|
| | | Horitzontal | Vertical |
| Com canvia la mida de la caixa segons el full utilitzat | Caixa Din-A4 | 11 cm x 10 cm x 5 cm | 22 cm x 7'5 cm x 3'5 cm |
| | Caixa ½ Din-A4 | 8 cm x 7 cm x 3'5 cm | 15'5 cm x 5'25 cm x 2'5 cm |
| | Caixa ¼ Dina-A4 | 5,5 cm x 5 cm x 2'5 cm | 11 cm x 3'5 cm x 2 cm |
| | Cartolina | 27'6 cm x 22'5 cm x 10'8 cm | |
| | Targeta | 5 cm x 5 cm x 2 cm | 10'4 cm x 3'5 cm x 1'5 cm |

*Figure 5. Collecte des données à partir de la mesure des dimensions des boîtes construites, en distinguant l'orientation du pliage[4].*

**Deuxième phase :** Nous supposons à présent qu'on cherche des boîtes de dimensions données. La deuxième question $Q_2$ étudiée est alors : « *Quelles sont les dimensions initiales de la feuille pour construire une boîte aux dimensions s spécifiques demandées ?* » D'habitude, les étudiants proposent des questions dérivées à partir de dimensions de boîtes particulières comme, par exemple :

> $Q_{2.1}$ : « *De quelles dimensions de papier avons-nous besoin pour obtenir une boîte dont la base est de dimensions 6 cm × 13 cm ?* », « *Comment obtenir des boîtes à base carrée (de dimensions 5 cm × 5 cm ou d'aire 16 cm$^2$, etc.) ?* », « *Comment modifier le papier pour obtenir des boîtes ayant la même base mais des hauteurs différentes ?* »
>
> $Q_{2.2}$ : « *Le raisonnement proportionnel peut-il être utilisé pour trouver des liens entre les mesures du papier et de la boîte ?* […] »

La plupart des groupes propose d'utiliser des modèles construits à partir du dépliage de la boîte. L'analyse géométrique des plis sur la feuille (une fois la boîte dépliée) permet de décrire et formaliser des relations entre les différentes longueurs. Ces analyses reposent sur la connaissance de propriétés géométriques, notamment celles du carré (égalité de longueur des côtés, les diagonales sont des axes de symétrie), et permettent de déduire la hauteur de la boîte en relation avec les plis ou avec les dimensions de la base de la boîte. Il y a toujours des groupes qui proposent d'utiliser des modèles de proportionnalité pour déduire les dimensions du papier en utilisant une « règle de trois » (voir Figure 6, partie gauche). Les types de modèles proposés dans cette deuxième phase sont comparés entre groupes d'étudiants et les relations entre variables supposées sont analysées et justifiées à partir du dépliage de la boîte. Cette deuxième phase se termine lorsque les étudiants peuvent prédire les dimensions du papier/de la boîte, sans manipuler le papier/la boîte.

[4] Traduction de la structure du tableau présenté dans la figure 5 : « Comment les dimensions de la boîte varient en fonction des tailles des feuilles utilisées » (lignes) et « Comment les dimensions de la boîte varient en fonction de l'orientation de la feuille : horizontale ou verticale » (colonnes).

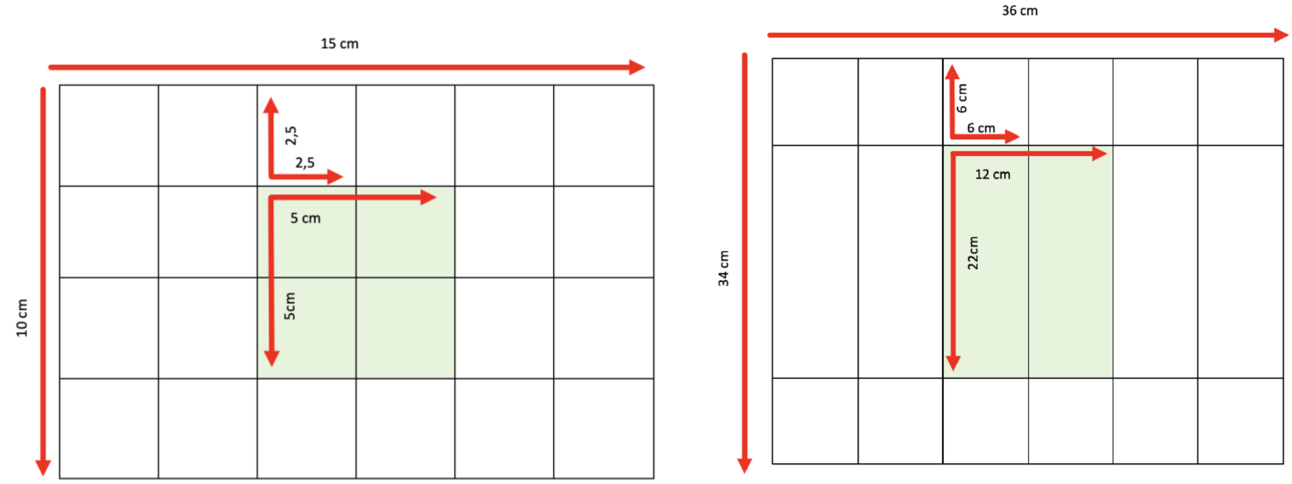



*Figure 6. Extrait du rapport d'un groupe : modèle basé sur le dépliage de la boîte.*

**Troisième phase :** Cette phase vise à élaborer la réponse à la demande de la pâtissière, qui a donné la liste des dimensions des gâteaux qu'elle veut emballer. En outre, il est demandé aux étudiants d'ajouter un couvercle sur chaque boîte afin d'emballer correctement les gâteaux. La construction du couvercle doit suivre le même modèle de construction et couvrir la boîte de base dans laquelle se trouve le gâteau. Dans cette phase, en fait, il n'y a pas une grande évolution des modèles utilisés, l'essentiel est de stabiliser, valider et bien justifier l'usage des modèles construits dans l'étape précédente. Les questions habituellement posées sont :

> $Q_{3.1}$ : « *Combien de centimètres devons-nous laisser entre la boîte de base et le couvercle ?* »
>
> $Q_{3.2}$ : « *Où ajouter ces différences de longueurs, sur la feuille ou sur la base de la boîte ? Est-ce que c'est équivalent ?* […] »

La Figure 7 montre un exemple de réponse proposée par un groupe où les étudiants utilisent des modèles géométrico-numériques pour la boîte et pour le couvercle.

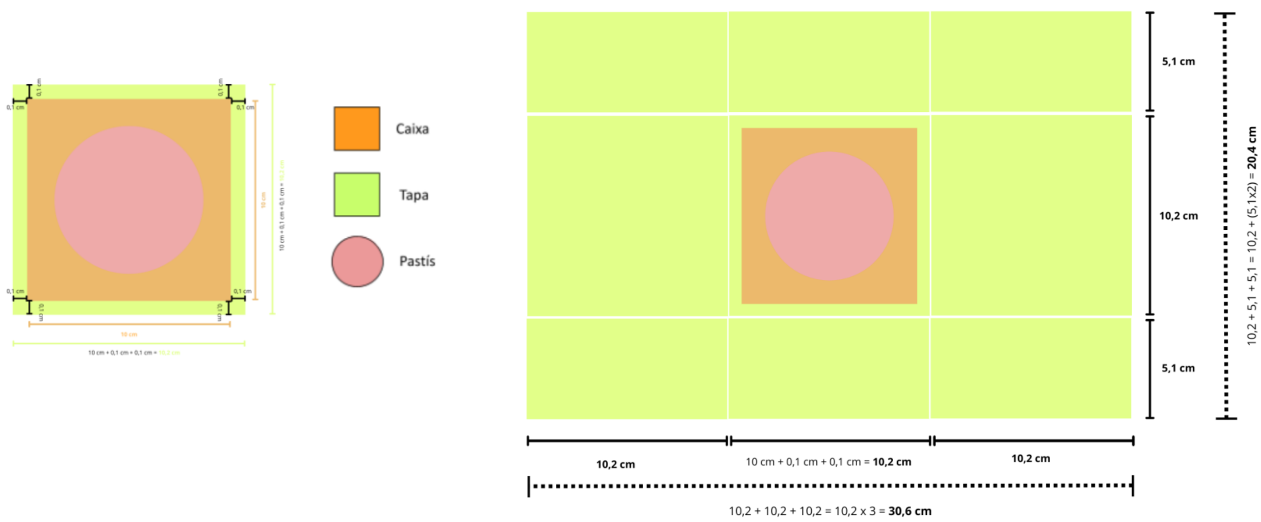
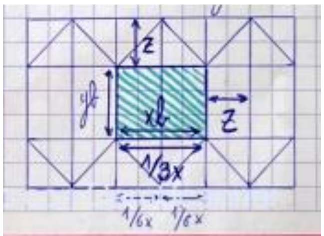


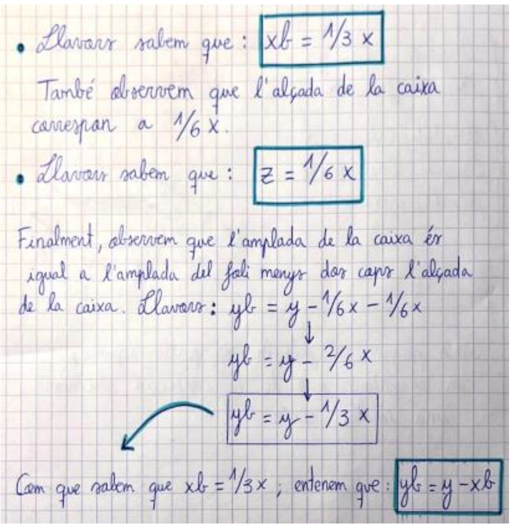

*Figure 7. Extrait du rapport d'un groupe : modèle géométrico-numérique pour déduire les dimensions des feuilles pour la boîte de base et son couvercle pour des gâteaux de 8 cm de diamètre.*

À cette phase, les participants ont utilisé des modèles géométrico-numériques comme dans la Figure 7 ou des modèles pré-algébriques voire algébriques qui généralisent les relations entre les variables pour trouver des solutions. Par exemple, le groupe dont la figure 7 reprend un extrait de rapport, propose une explication des relations détectées :

> *Il faut considérer que la longueur de la feuille pour construire le couvercle doit-être : longueur de base de la boîte + 0,2) × 3, puisqu'il y a 3 plis → ce qui correspond à la longueur de la feuille pour obtenir la boîte base + (0,2 cm × 3 = 0,6 cm). D'un autre côté, la largeur de la feuille pour le couvercle doit être (largeur de la base de la boîte + 0,2) × 2 → qui correspond à la largeur de la feuille pour obtenir la boîte base + (0,2 cm × 2 = 0,4 cm).*

Un autre groupe utilise un modèle algébrique dans cette 3e phase de l'activité, en donnant les formules qui permettent de déduire les dimensions des boîtes ou des feuilles (figure 8).



• Llavors sabem que: $\boxed{xb = 1/3\,x}$

També observem que l'alçada de la caixa correspon a 1/6 x.

• Llavors sabem que: $\boxed{z = 1/6\,x}$

Finalment, observem que l'amplada de la caixa és igual a l'amplada del foli menys dos cops l'alçada de la caixa. Llavors: $yb = y - 1/6x - 1/6x$

$yb = y - 2/6\,x$

$\boxed{yb = y - 1/3\,x}$

Com que sabem que $xb = 1/3x$, entenem que: $\boxed{yb = y - xb}$

*Donc nous savons que :* $xb = \frac{1}{3}\,x$.

*On note également que la hauteur de la boîte correspond à* $\frac{1}{6}\,x$.

*Nous en déduisons que :* $z = \frac{1}{6}x$

*Enfin, on note que la largeur de la base de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux fois la hauteur de la boîte. Ensuite :* $yb = y - \frac{1}{6}\,x - \frac{1}{6}\,x$

$$yb = y - \frac{2}{6}\,x$$

$$yb = y - \frac{1}{3}\,x$$

*Comme nous savons que* $xb = \frac{1}{3}\,x$ *; nous concluons que* $yb = y - xb$.

*Figure 8. Traduction de l'extrait du rapport du groupe utilisant un modèle algébrique.*

## 2. Module 2 : Analyser la modélisation mathématique

Dans le module 2, les enseignants en formation sont invités à analyser l'activité de modélisation qu'ils ont vécue. Il leur est demandé d'adopter le rôle d'« analyste mathématicien-didacticien ». L'ensemble des rapports remis par chaque groupe, les discussions en groupe-classe, les forums partagés et les présentations de la formatrice constituent un milieu très riche pour recueillir des traces et des preuves empiriques de l'activité vécue.

Pour ne pas réduire une telle analyse à une liste des contenus abordés ou à la simple correction des réponses, la formatrice souligne l'importance d'analyser la dynamique établie par les questions abordées, les systèmes considérés, les modèles construits et ceux qui peuvent « cohabiter ». Les réponses apportées sont ainsi discutées collectivement. Cela conduit la formatrice à proposer l'utilisation des *cartes questions-*

*réponses* (Winsløw, Matheron, et Mercier, 2013 ; Florensa, Bosch et Gascón, 2021) comme outil principal d'analyse.

La formatrice demande aux étudiants d'élaborer cette carte de questions-réponses, dans un premier temps à partir de leurs rapports, puis d'étendre ou d'inclure d'autres questions, réponses, modèles construits par les autres groupes. Ce travail est rendu possible grâce au partage des rapports des différents groupes et des présentations communes de la formatrice.

La figure 9 illustre un exemple de carte de questions-réponses (Q-R) élaborée par un des groupes de travail. Dans l'Annexe 2 on peut lire la traduction des questions et des modèles possibles considérés.

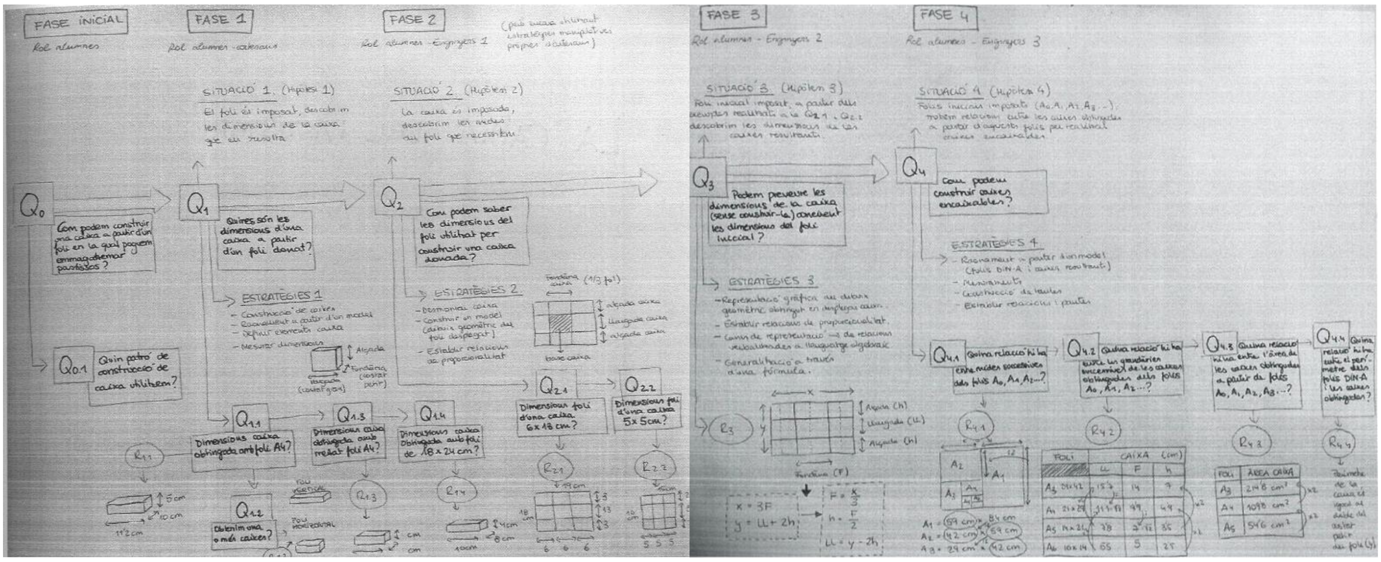


*Figure 9. Exemple d'une carte de questions-réponses (texte en catalan), dans l'Annexe 2 on peut lire la traduction des principaux éléments inclus : des questions, réponses et modèles considérés.*

Cette manière de décrire le processus de modélisation fournit aux participants une nouvelle façon de parler et analyser la modélisation. La carte des questions-réponses est également apparue comme une manière alternative de parler et d'analyser ce qu'est « faire des mathématiques », en rupture avec la manière habituelle, plus « statique », axée sur les concepts, les notions, et techniques au détriment des questions, modèles et réponses provisoires.

Une fois la carte des questions-réponses complétée, elle est utilisée comme outil d'analyse de la « trajectoire de modélisation » d'un autre groupe (voir Barquero, Bosch et Florensa, 2022) ou d'extraits d'autres expérimentations de cette même activité. Ces analyses permettent aux étudiants d'enrichir leurs propres cartes en incluant de nouvelles questions, réponses et modèles qui n'étaient pas inclus dans un premier temps et qui leur paraissent, *in fine*, importantes à considérer.

Enfin, ces cartes de questions-réponses ont été utilisées lorsque les participants ont conçu des propositions d'enseignement. Et, dans le cas où c'était possible pour l'analyse *in vivo* et *a posteriori* de leurs mises en œuvre.

## V - POUR CONCLURE

Dans cette contribution, nous décrivons un cours pour la formation des enseignants basé sur la proposition de parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants (PER-FE).
Nous avons présenté, ici, le PER-FE sur la « boîte de la pâtissière » mis en œuvre à l'Université de Barcelone (Espagne). Ce PER-FE a pour objectif de travailler collectivement des questions épistémologiques (« *Qu'est-ce que c'est la modélisation mathématique ?* », « *Comment décrire et analyser la modélisation ?* »), didactiques (« *Comment enseigner la modélisation ?* », « *À partir de quelles activités à l'école primaire ?* ») et écologiques (« *Quelles conditions peuvent faciliter et quelles contraintes entravent l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation ?* ») liées à l'enseignement de la modélisation mathématique à l'école primaire.

Les participants étaient des enseignants du primaire en formation initiale dans leur 4e (et dernière) année de formation. Le cours intitulé « Didactique des Mathématiques II » (6 ECTS, 1er semestre) est composé de différents PER-FE avec différents points de départ et aborde différentes questions de la profession. Il est composé des PER-FE 2 et 3 du Tableau 1 plus une activité sur « La course à 20 » pour introduire des éléments d'analyse des situations didactiques. Le PER-FE que nous avons présenté dans cette conférence part de la question professionnelle : comment analyser, adapter et intégrer la modélisation mathématique à l'école primaire ? L'effort initial a porté sur l'analyse du rôle actuel de la modélisation à l'école primaire et l'analyse des conditions et des contraintes qui existent pour l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation à l'école primaire (à partir du module 0, figure 3). L'expérience en tant qu'étudiants d'une activité de modélisation sur la situation de la « boîte de la pâtissière » (à partir du module 1), et l'introduction de nouveaux outils pour l'analyse épistémologique et didactique de la modélisation (à partir du module 2), a ensuite servi de base pour le travail de conception de situations d'enseignement pour l'école primaire. Nous voulons terminer cet exposé en soulignant quelques atouts importants de cette formation et les réactions des étudiants.

La stratégie du PER-FE présentée ici était basée sur le fait de demander aux participants d'assumer différents rôles tout au long du processus de formation, en commençant par le rôle d'« étudiants-apprenti », puis en devenant « analystes mathématiciens-didacticiens » et enfin « concepteur » de situations d'enseignement en vue d'une possible mise en œuvre en classe. Ce jeu de rôles s'est avéré être une stratégie efficace pour amener les participants à se placer dans différentes positions institutionnelles et à progresser dans leur questionnement. Il a également permis de rendre visibles certaines contraintes qui conduisent à l'introduction de nouveaux outils pour l'analyse épistémologique et didactique. Enfin, il a ouvert une discussion plus générale sur le « paradigme de la visite des œuvres » et permis une prise de conscience collective de ses effets.

Le succès de ce jeu de rôles ne peut pas s'expliquer sans un deuxième élément important du cours : l'élaboration d'un *milieu* assez riche au sens de la Théorie des Situations Didactiques. Notre option a consisté à élaborer, avec les étudiants, une réalité mathématique et didactique partagée, à utiliser comme dispositif de confrontation les propositions d'enseignement des étudiants et les outils théoriques introduits dans le cours.

L'expérience sous le rôle d'« étudiant-apprenti » de l'activité de modélisation de la « boîte de la pâtissière » est essentielle pour avoir une activité mathématique empirique commune à laquelle se référer dans les activités (et modules du PER-FE) suivantes. Les objets mathématiques dégagés (mesures ; modèles numériques, géométriques, pré-algébriques et/ou algébriques ; hypothèses ; prédictions ; validations etc.) ont été utilisés comme élément du *milieu* pour les étapes suivantes. Notamment, quand les participants ont réalisé l'analyse mathématique et didactique des connaissances en jeu.

Dans le module 2, les participants utilisent les cartes de questions-réponses (cartes Q-R) comme principal outil épistémologique pour analyser les connaissances développées pendant le PER. Cet outil est devenu un outil important du *milieu* des enseignants lorsqu'on leur demande d'analyser d'autres expériences avec la même activité (d'autres groupes de travail dans la classe, ou d'autres expériences avec la même activité à l'école primaire). À ce moment-là, les enseignants utilisent les cartes de questions-réponses comme un outil épistémologique pour l'analyse *a posteriori* des expérimentations de cette activité. Mais ils les utilisent aussi lors de l'analyse *a priori* – au moment de la conception des situations d'enseignement pour anticiper et évaluer les possibles trajectoires des élèves - et lors de l'analyse *in vivo* – comme outil pour institutionnaliser les connaissances.

Toutefois, une faiblesse importante de ce PER-FE est qu'il n'y a pas eu, de manière systématique, la possibilité de développer les derniers modules avec la mise en œuvre et l'analyse des données empiriques à partir de l'expérimentation en classe. L'impossibilité de mettre en œuvre les situations d'enseignement conçues dans des conditions réelles de classe entrave la discussion sur les conditions et les contraintes vécues dans différents contextes. Barquero, Bosch et Romo (2018) présentent différentes expériences de PER-FE sur l'enseignement de la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire où tous les modules sont entièrement développés, et où ce type de discussions peut avoir lieu. Cette recherche montre également que les modules initiaux sont cruciaux pour créer le milieu approprié afin d'enseigner les outils didactiques aux enseignants pour analyser et discuter collectivement la conception et la mise en œuvre des projets d'enseignement permettant une transition entre paradigmes où les mathématiques (en interaction avec d'autres disciplines) sont des outils d'étude, de recherche et de modélisation de systèmes où se posent des questions « vives ».

# VI - BIBLIOGRAPHIE

Barquero, B., Bosch, M., et Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1-2), 31-43.

Barquero, B., Florensa, I., et Ruiz-Olarría, A. (2019). The education of school and university teachers within the paradigm of questioning the world. Dans M. Bosch et al. (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (Chapter 12). Routledge.

Barquero, B., Bosch, M., et Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408705

Barquero, B., Bosch, M., et Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, *21*, 87–106.

Benito, R. N. (2019). *Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas* (Thèse doctoral). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Blomhøj, M., et Kjeldsen, T.H. (2006) Teaching mathematical modelling through project work Experiences from an inservice course for upper secondary teachers. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 163-177.

Blum, W. (1991). Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects. Dans M. Niss, W. Blum, et I. Huntley (Éds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). New York : Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 149–171.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73–96). Dordrecht: Springer.

Blum, W., et Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Blum, W., Galbraith, P., et Niss, M. (2007). “Introduction”. Dans Blum, W. et al. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer US.

Bosch, M., et Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. Dans M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (pp. 4001–4022). Rio de Janeiro, Vol. 3.

Brousseau, G., Brousseau, N., et Warfield, V. (2001). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 363–441. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 178–195.

Chappaz, J., et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19,* 45–75. https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR89002/IGR89002.pdf

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21–30). Barcelona, Spain: Fundemi IQS.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Dans S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on math- ematical education* (pp. 173–187). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Chevallard, Y., Bosch, M., et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, Espagne: Horsori.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Thèse doctorale. Universidad de Zaragoza.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM*. Thèse doctorale. Université de Provence, France.

Éduscol (2016). Modéliser, cycle 4. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Mars 2016. https://eduscol.education.fr/document/17218

Éduscol (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Les guides fondamentaux pour enseigner. Janvier 2022. https://eduscol.education.fr/document/32206

Florensa, I., Bosch, M. & Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 203–225.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1/2), 3–8.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L., et Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 226–246.

Kaiser, G. (2006) The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling. In Novotná J., et al. (Eds.), *Proceedings of PME 30th* (pp. 393-400). Prague : Charles University.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38*, 302–310.

Lerma, A.M., Barquero, B., García, F.J., Hidalgo-herrero, M., Ruiz-Olarría, A., et Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. Dans P.D. Diago et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXIV (pp. 385-392). Valencia: SEIEM.

Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la enseñanza secundaria y la formación del profesorado.* Thèse doctoral. Universidad Pontificia de Valparaíso, Chile.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Thèse doctoral. Universidad de Vigo, Spain.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD (2018). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*. OECD Publishing.

Pollack, H.O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 24–30.

Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización Matemática en la Escuela Primaria. La reconquista escolar de dominios de realidad. In M.M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87–119). Madrid: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.* Thèse doctorale. Universidad Autónoma de Madrid, Espagne.

Serrano, L., Bosch, M., et Gascón, J. (2010). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), 6th Conference of the European Research on Mathematics Education (pp. 2186–2195). Lyon : Institut National de Recherche Pédagogique.

Serrano, L., Bosch, M., et Gascón, J. (2013). Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*, *62*, 39-48.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Thèse doctorale. Universidad Complutense de Madrid, Espagne.

Winsløw, C., Matheron, Y., et Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267–284.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *32*(1), 7-55.

Wozniak, F., Barquero, B., Bosch, M., et Kaspary, D. (à paraître, 2023). Dépasser les praxéologies muettes de modélisation : Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes EEDM 21 : 21e école d'été de didactique des mathématiques.*

# VII - ANNEXE 1 : QUESTIONS PRESENTES DANS LA CARTE Q-R

Q0 : Comment construire des boîtes dans lesquelles on peut ranger des gâteaux à partir d'une feuille de papier ou de carton ?

Q0.1 : Quel modèle de construction de boîtes utilisons-nous ? Comment ce modèle détermine-t-il la typologie et les dimensions des boîtes que nous pouvons construire ?

Q1 : Quelles sont les dimensions d'une boîte à partir d'une feuille de papier donnée ?

Q1.1 : Quelles sont les dimensions de la boîte que l'on obtient à partir d'une feuille A4 donnée ?

Q1.1.1 : Peut-on obtenir plus d'une boîte à partir d'une même feuille de papier ?

Q1.2 : Quelles sont les dimensions de la boîte contenant la moitié de la moitié d'une feuille A4 ?

Q1.3 : Quelles sont les dimensions de la boîte que l'on obtient à partir d'une feuille de papier de 18 cm × 24 cm ?

*Stratégies et modèles possibles :* Construction des boîtes ; définition des éléments qui déterminent les « dimensions » de la boîte et de la feuille de papier ; et mesure des dimensions.

Q2 : Comment peut-on connaître les dimensions de la feuille de papier dont on a besoin pour construire une boîte donnée ?

Q2.1 : Quelles dimensions doit avoir la feuille pour construire une boîte dont la base est de 6 × 18 ?

Q2.1 : Quelles dimensions doit avoir la feuille pour construire une boîte dont la base est de 5 × 5 ?

*Stratégies et modèles possibles :* Ouvrir la boîte ; déduire le modèle à partir de la boîte ouverte ; et décrire la relation entre les dimensions de la feuille et de la boîte.

Q3 : Peut-on prévoir les dimensions de la boîte (sans avoir à la construire) en connaissant les dimensions de la feuille initiale ?

*Stratégies et modèles possibles :* représentation graphique de la boîte ouverte (modèles géométriques) et description des relations entre les différentes dimensions ; établissement de relations de proportionnalité (ne fonctionne pas toujours) ; changement de représentation, de la description orale des relations au langage algébrique ; généralisation des relations par des formules.

Q4 : Comment pouvons-nous construire des boîtes emboitables ?

Q4.1 : Quelle est la relation entre les dimensions des feuilles successives A0, A1, A2, A3... ?

Q4.2 : Quel est le rapport entre les mesures des boîtes résultant des feuilles A0, A1, A2, A3... ?

Q4.3 : Quel est le rapport entre les aires des bases des boîtes résultant des feuilles A0, A1, A2, A3... ?

Q4.4 : Quelle est la relation entre les périmètres et le volume des boîtes résultant de la famille de feuilles DIN-A ?

*Stratégies et modèles possibles :* Les mêmes que déjà construites pendant l'étape précédente.

# RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ET SCHÉMATISATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE : OUI, MAIS COMMENT ?

**Annick FAGNANT**
Professeure, Université de Liège (Belgique)
Unité de recherche EQUALE
afagnant@uliege.be

**Résumé**
Résoudre un problème nécessite de construire une représentation, un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé. Pour aider les élèves dans cette étape difficile, le recours à des schématisations externalisées sur papier est souvent privilégié. La littérature de recherche internationale permet en effet de mettre en avant une diversité de schématisations qui semblent porteuses pour aider les élèves à affronter une diversité de problèmes. Mais quels sont les types de schématisations les plus efficaces et comment les enseigner ?
Après avoir introduit quelques enjeux relatifs à la résolution de problèmes, le texte aborde les résultats issus des recherches portant sur les données probantes, puis discute tour à tour des schématisations propres aux différentes catégories de problèmes (Powell & Fuchs, 2018) d'abord, puis des schématisations en barres telles que privilégiées dans la méthode de Singapour (Kaur, 2019) et proches des schématisations « range-tout » proposées par des auteurs canadiens (Polotskaia, Gervais & Savard, 2019).
Vouloir trancher définitivement la question de savoir quelles sont les schématisations à privilégier pour tous les types de problèmes, dans tous les contextes et avec tous les élèves, … semble constituer une entreprise assez vaine. Il semblerait en effet préférable de proposer aux élèves des problèmes variés et de leur apprendre à utiliser des schématisations diversifiées qu'ils pourront utiliser de manière flexible, tout en gardant un regard critique sur les problèmes proposés et sur leur démarche de résolution.

## I - INTRODUCTION

La résolution de problèmes pose souvent d'importantes difficultés aux élèves ; difficultés liées à la construction d'une représentation appropriée de la situation (Thevenot et al., 2015), à la mobilisation et à l'intégration de procédures par ailleurs maîtrisées (Crahay & Detheux, 2005) ou encore au développement de stratégies superficielles et au manque de recours à des connaissances réalistes (Verschaffel & De Corte, 2008). Pour aider les élèves à appréhender les problèmes, plusieurs travaux de recherche proposent d'enseigner aux élèves des stratégies visant à les inviter à construire une représentation de la situation ou encore à vérifier leur démarche et la plausibilité de la réponse obtenue (Fagnant & Demonty, 2005 ; Hannin & Van Nieuvenhoven, 2016). C'est essentiellement à l'étape de construction d'une représentation du problème ou de la situation que nous allons nous intéresser[1].

### 1 Quelques précisions terminologiques

Résoudre un problème nécessite de construire un modèle de situation (van Doeren et al., 2015), c'est-à-dire une représentation de la situation décrite dans l'énoncé. Cette représentation peut être mentale, mais elle peut aussi être externalisée sur papier de façon à constituer un soutien au processus de résolution de problème (Fagnant & Vlassis, 2013). Pour être efficaces, les représentations doivent mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Fagnant, 2019). Ces représentations

[1] Dans la suite du texte, nous considérerons comme synonymes les termes « représenter la situation » (au sens de « représenter la situation décrite dans l'énoncé du problème ») et « représenter le problème ».

sont alors qualifiées de « schématiques » par opposition aux représentations « picturales » qui illustrent la situation décrite dans l'énoncé de manière décorative (Hegarty & Kozhenikov, 1999). Ainsi définies, les représentations schématiques peuvent prendre la forme d'un dessin libre initié par l'élève (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012) ou de schématisations variées (Kaur, 2019 ; Polotskaia et al., 2019 ; Powell & Fuchs, 2018) comme celles que nous analyserons ici. Quelle que soit leur forme, ces représentations schématiques ont pour but de soutenir l'étape de modélisation du problème et sa résolution mathématique (van Doeren et al., 2015). Les documents officiels produits par le Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports (MENJS, 2022) vont tout à fait dans le même sens lorsqu'ils précisent ce qui suit :

> *La compétence 'représenter' peut soutenir l'activité de modélisation de l'élève. Elle permet de faire le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. En effet, un schéma permet de rendre visibles les relations entre les grandeurs présentes dans l'énoncé et leur relation avec ce qui est cherché » (MEN, 2022, p.48).*
>
> *« La modélisation est le 'processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique' » (MENJS, 2022, p. 48).*

De nombreux élèves ont tendance à court-circuiter ces étapes essentielles pour proposer directement un calcul sur la base d'une analyse très sommaire de l'énoncé, par exemple, en repérant un mot-clé induisant une opération (ex. puisqu'il y a le mot « perdre », je fais une soustraction) ou en supposant qu'il faut appliquer la dernière opération vue en classe (ex. la semaine passée, on a appris les divisions posées, je fais donc une division). Dans la littérature de recherche, on qualifie généralement ce type de démarche de « stratégies superficielles » (De Corte & Verschaffel, 2008 ; Fagnant, 2019). Apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques efficaces constitue dès lors une approche potentiellement porteuse pour soutenir le processus de résolution de problèmes (Fagnant, 2018 ; Fagnant &Vlassis, 2013).

## 2 Préambule

Une étude réalisée en Belgique francophone dans le cadre des évaluations externes non certificatives permet d'appréhender les stratégies de résolution de problèmes que des enseignants de 3e (CE2) et de 5e années de l'enseignement primaire (CM2) proposent ou enseignent à leurs élèves (FW-B, 2014-2015)[2]. Inspirée d'une étude préalablement menée au Luxembourg (Fagnant & Burton, 2009), l'enquête menée en Belgique demandait aux enseignants de positionner leurs pratiques de classe face à 12 stratégies telles que « estimer la solution avant de résoudre », « faire un dessin, un schéma ou tableau pour représenter le problème », « procéder par essais-erreurs » ou encore « vérifier l'ensemble de la démarche ». Parmi ces stratégies qui peuvent être enseignées efficacement aux élèves (Fagnant & Demonty, 2005 ; Hannin & Van Nieuvenhoven, 2016 ; van Doeren et al., 2015), certains items correspondant aux stratégies superficielles développées par les élèves (Verschaffel & De Corte, 2008) avaient été introduits dans la liste proposée. Les résultats de l'enquête révèlent qu'une proportion non négligeable d'enseignants de 3e primaire (CE2) déclarent « inviter les élèves » (30 à 40 %) ou « apprendre aux élèves » (plus de 50 %) à utiliser des stratégies superficielles telles que « repérer les données chiffrées et les souligner » ou encore « repérer les mots-clés qui indiquent l'opération à effectuer » (les tendances sont similaires en 5e primaire, CM2). Ce type de stratégies n'aide pas réellement les élèves à se représenter la situation et risque au contraire de les conduire à des erreurs. Dans le premier exemple ci-dessous, souligner les données chiffrées ne permet pas de comprendre qu'il faut comptabiliser deux fois les 5 km du « raccourci » au retour et qu'il convient d'éviter ce détour à l'aller ; souligner « 20 km » n'aide pas non plus à savoir ce que l'on peut faire de cette

[2] Les évaluations externes non certificatives sont proposées chaque année à un échantillon représentatif d'élèves de 3e et de 5e années primaire notamment. Les épreuves portent alternativement sur les mathématiques, le français et l'éveil scientifique. En 2014, tous les enseignants de l'échantillon représentatif ont été invités à répondre à un questionnaire sur leurs pratiques d'enseignement en résolution de problèmes. Les résultats de cette enquête sont présentés dans le document « pistes didactiques » et accessibles sur le site www.enseignement.be .

donnée pour calculer la distance parcourue par l'automobiliste. Dans les deux exemples suivants, associer « perdre » à une soustraction et « partager » à une division va conduire à des erreurs.

> Un automobiliste part de Liège et se rend à Spa pour aller voir les Francofolies. Au retour, à 20 km de Spa, il veut prendre un raccourci mais il doit faire demi-tour au bout de 5 km en raison de travaux. Sachant que la distance entre Liège et Spa est de 40 km, quelle est la distance parcourue par l'automobiliste durant la journée ? (inspiré de Julo, 1995).
>
> Monique a joué deux fois aux billes. A la première partie, elle a perdu 24 billes. A la seconde partie, elle a perdu 8 billes. Combien de billes a-t-elle perdues aujourd'hui ? (inspiré de Demonty et al., 2004)
>
> Sally a 18 billes qu'elle souhaite partager de façon équitable avec ses amis. Après avoir réalisé le partage, il lui reste 3 billes. Combien de billes Sally a-t-elle partagées ? (inspiré de Powell & Fuchs, 2018).

Parmi les autres stratégies proposées, la stratégie « analyser les nombres pour choisir l'opération » a quant à elle été moins plébiscitée par les enseignants des deux niveaux scolaires ciblés (environ 10 % déclarent l'enseigner aux élèves et environ 30 % disent les inviter à l'utiliser). S'il ne convient pas d'enseigner cette stratégie superficielle aux élèves, l'enseignant doit toutefois être attentif aux nombres qu'il propose dans l'énoncé pour permettre aux erreurs de se manifester[3]. Dans les deux derniers exemples repris ci-dessus, présenter le grand nombre avant le petit favorise l'apparition de la soustraction et de la division, tout comme le fait de proposer des nombres dont le résultat de la division « tombe juste » dans le dernier cas.

Les élèves ont tendance à développer des stratégies superficielles : ils court-circuitent la phase de construction d'une représentation appropriée de la situation, ne font pas appel à leurs connaissances de la vie réelle et cherchent des indices dans l'énoncé pour décider du calcul à effectuer. Selon Verschaffel et al. (2000, voir aussi Depaepe et al., 2015), la nature stéréotypée des problèmes rencontrés traditionnellement dans les classes et la culture de classe donnant une vision particulière de la résolution de problèmes seraient en grande partie responsables du développement de ces démarches, ainsi que du développement de croyances erronées telles que penser que, « pour résoudre un problème, il faut utiliser tous les nombres de l'énoncé pour faire une opération, généralement dictée par les mots-clés, en vue d'aboutir à une réponse numérique et précise ».

Un autre résultat de l'enquête susmentionnée (FW-B, 2014-2015, voir aussi Fagnant & Burton, 2009) montrait que, tout en trouvant intéressante une variété de problèmes impliquant des données inutiles ou manquantes et pouvant conduire à des solutions multiples, les enseignants semblaient privilégier en classe les problèmes assez classiques impliquant d'utiliser tous les nombres pour aboutir à une solution unique. Si l'on combine ces résultats à leurs déclarations relatives à l'enseignement de stratégies superficielles, on comprend à quel point ces deux éléments se renforcent. En effet, pour envisager la résolution de problèmes comme un « processus complexe de modélisation mathématique » (Van Dooren et al., 2015 ; Verschaffel & De Corte, 2008 ; Verschaffel et al., 2000), il convient de proposer aux élèves des problèmes variés et non-routiniers qui vont mettre en déroute les démarches superficielles et réellement nécessiter la construction d'une représentation appropriée de la situation (Fagnant & Vlassis, 2013). Et sur ce dernier point, les enseignants sont quasi unanimes à déclarer inviter (plus de 30 %) ou apprendre aux élèves (plus de 60 %, tant en 3e qu'en 5e primaire) à « faire un dessin, un schéma ou un tableau pour représenter le problème ».

La construction d'une représentation est une étape essentielle d'une démarche efficace de résolution de problèmes (Julo, 1995 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Thevenot et al., 2015) et il s'agit bien d'amener les élèves à « construire » cette représentation et non de réaliser cette étape à leur place, par exemple en leur proposant une illustration qui accompagne l'énoncé (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). Toutefois, quand

[3] D'un point de vue pédagogique, il est en effet important de comprendre la façon dont les élèves raisonnent. Par exemple, si un problème peut être résolu correctement en s'appuyant sur les mots-clés, l'enseignant ne peut pas savoir si l'élève a analysé le problème pour choisir l'opération ou s'il a mis en œuvre une stratégie superficielle. Par contre, si l'enseignant propose un problème où s'appuyer sur le mot-clé conduit à une erreur, il pourra distinguer les élèves qui ont analysé correctement la situation de ceux qui ont développé une stratégie superficielle. La même logique peut être transférée au choix des nombres proposés dans les énoncés : s'ils induisent l'opération correcte (ou « empêchent » l'erreur), la résolution correcte du problème est difficilement interprétable.

on dit à l'élève de « faire un dessin » (ou un schéma) pour s'aider à résoudre le problème, ce dernier est souvent désarmé et ne sait justement pas quoi « faire » (Polotskaia et al., 2019). Il convient dès lors d'apprendre aux élèves à construire des représentations efficaces, mais celles-ci peuvent prendre différentes formes allant des dessins libres à différents types de représentations schématiques plus abstraites (voir Fagnant, 2019 pour une synthèse).

C'est à ces représentations schématiques diverses que le présent écrit s'intéresse, en cherchant à voir ce que disent les recherches internationales quant à l'efficacité d'approches d'enseignement qui s'appuient sur différents types de schématisations. Ainsi, après avoir envisagé les résultats de recherches portant sur les données probantes en résolution de problèmes, le texte aborde tour à tour les schématisations propres aux différentes catégories de problèmes (Powell & Fuchs, 2018) et les schématisations en barres telles que privilégiées dans la méthode de Singapour (Kaur, 2019) et proches des schématisations « range-tout » proposées par des auteurs canadiens (Polotskaia et al., 2019). Enfin, pour ancrer ce débat international dans le contexte français qui a accueilli la conférence dont est issu ce texte, quelques références aux documents produits par le Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports (MENJS, 2021, 2022) illustreront nos propos.

## II - QUE DISENT LES RECHERCHES BASÉES SUR LES DONNÉES PROBANTES ?

Avant de cibler les recherches s'appuyant spécifiquement sur les schématisations, observons d'abord ce que disent les recherches basées sur les données probantes en résolution de problèmes.

### 1 Quelques caractéristiques des approches efficaces en résolution de problèmes

En 2012, *What Works Clearinghouse* propose un guide pratique dédié aux approches propices à soutenir les compétences des élèves en résolution de problèmes[4] (Woodward et al., 2012). S'appuyant sur les recherches probantes menées dans ce domaine, les auteurs synthétisent cinq recommandations : (1) planifier régulièrement des leçons de problèmes ; (2) aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes ; (3) enseigner aux élèves comment utiliser des supports visuels ; (4) exposer les élèves à des démarches variées de résolution et (5) aider les élèves à reconnaître et à articuler les concepts et les notations mathématiques.

Les trois premières recommandations font écho à des éléments sur lesquels nous reviendrons par la suite. « Planifier régulièrement des leçons de problèmes » nécessite notamment de varier les problèmes que l'on propose aux élèves, ce qui implique de proposer une alternance entre problèmes « routiniers » (qui vont notamment permettre de donner du sens aux opérations et d'utiliser des schématisations prédéfinies, comme nous le verrons par la suite) mais aussi des problèmes « non-routiniers » (qui vont permettre que les élèves soient continuellement en recherche et qui vont nécessiter de faire appel à des schématisations diversifiées, Diezman, 2002 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Pantziara et al., 2009 ; Reuter et al., 2015). Woodward et al. (2012) définissent les problèmes « routiniers » comme des « problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des méthodes familières aux élèves, en répliquant pas-à-pas des méthodes préalables apprises » (p. 11) et les problèmes « non-routiniers » comme des « problèmes pour lesquels il n'y a pas d'approche ou de cheminement prévisible et bien rodé, explicitement suggéré par la tâche, les consignes de celles-ci ou des exemples préalables élaborés » (p. 11). Les problèmes « non-routiniers » sont généralement considérés comme plus complexes que les problèmes « routiniers » (Pantziara et al., 2009) ;

[4] Le guide s'adresse particulièrement aux grades 4-8, c'est-à-dire du milieu de l'enseignement primaire (grade 4, CM1) au début de l'enseignement secondaire (grade 8, collège). Les auteurs considèrent qu'il s'agit là d'une période cruciale pour développer des compétences en résolution de problèmes parce que ce sont les tranches d'âge où les concepts mathématiques enseignés deviennent plus complexes et que c'est aussi à ce moment que les formes d'évaluation se diversifient, notamment parce qu'apparaissent des évaluations externes nationales et internationales (comme TIMSS par ex.) qui impliquent des activités de résolution de problèmes.

ils nécessitent le déploiement d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel et al., 2000) et ne peuvent généralement pas être résolus par des démarches superficielles. Les deux problèmes suivants sont des exemples de problèmes « non-routiniers » :

> Un serpent se trouve au fond d'un trou de 18 m de profondeur lorsqu'il décide de ramper jusqu'à la surface. Chaque jour, il rampe le long de la paroi et grimpe de 6 m. Malheureusement, la nuit dans son sommeil, il glisse de 3 m vers le fond. Combien de jours mettra-t-il pour sortir du trou ? (inspiré de Reuter et al., 2015).
>
> Jonas, Marie, Léonie et Alexandre partent en vacances. Chaque enfant dit au revoir à chaque autre enfant en lui serrant la main. Combien de poignées de mains seront échangées ? (inspiré de Reuter et al., 2015).

La deuxième recommandation (« aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes », Woodward et al., 2012) fait appel à la métacognition : il s'agit d'amener les élèves à se poser des questions avant de « foncer tête baissée » dans la résolution (ex. « de quoi parle le problème ? », « qu'est-ce qu'on doit trouver ? », « est-ce que j'ai déjà résolu un problème semblable ? », …). Il s'agit aussi d'amener les élèves à interroger la plausibilité de la solution trouvée (« est-ce que ma solution est plausible ? comment puis-je la vérifier ? ») et de prendre du recul sur la démarche mise en œuvre (« pourquoi ma démarche a-t-elle fonctionné ? », « qu'est-ce que je ferai différemment la prochaine fois ? », …) (voir Mevarech & Kramarski, 2014 pour une synthèse sur les approches métacognitives en mathématiques).

Enfin, la troisième recommandation (« enseigner aux élèves comment utiliser les supports visuels », Woodward et al., 2012) est synthétisée ci-dessous en s'appuyant sur les propos des auteurs.

> *Une tâche principale pour tout étudiant engagé dans la résolution de problèmes est de traduire les informations quantitatives d'un problème en une équation symbolique (…) adéquate pour résoudre le problème. Les représentations visuelles aident les élèves à résoudre les problèmes en mettant en lien les relations entre les quantités évoquées dans le problème et l'opération mathématique nécessaire pour résoudre le problème. Les élèves qui apprennent à représenter visuellement les informations contenues dans les problèmes avant d'écrire une équation sont plus performants en résolution de problèmes. Les représentations visuelles comprennent des tableaux, des graphes, des lignes numériques, des « strip diagrams », …*[5] *(p. 23, traduction libre).*

D'emblée, on note que les auteurs ne privilégient pas un type de schématisation, mais que plusieurs sont proposées, parmi lesquelles figurent les « schémas en barres » (*strip diagrams)* sur lesquels nous reviendrons. Pour mettre en œuvre cette recommandation, ils préconisent d'utiliser la technique de la « pensée à voix haute » de façon à ce que l'enseignant explicite clairement comment il raisonne, tant pour analyser le problème et choisir une représentation visuelle appropriée que pour dégager une équation sur la base de ce modèle et pour la résoudre. Ces éléments font référence à l'étape de « modelage » de l'enseignement explicite (Gauthier et al., 2013). Enseigner explicitement l'usage de supports visuels constitue un élément que l'on retrouve également dans les synthèses qui se sont centrées sur les approches efficaces pour les élèves en difficultés en mathématiques (Lacombe et al., 2021 ; Gersten et al., 2009a, b).

## 2 Focus sur les schématisations

Les éléments mentionnés au point 1 proposent des recommandations générales relatives à la résolution de problèmes. D'autres chercheurs se sont intéressés spécifiquement à la construction d'une représentation ou à l'usage de schématisations. A ce niveau, il est intéressant de noter que les méta-analyses que nous avons pu trouver (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018) font essentiellement référence aux travaux menés par deux équipes de recherche américaines : l'équipe de Fuchs et ses

[5] *"A major task for any student engaged in problem solving is to translate the quantitative information in a problem into a symbolic equation (…) necessary for solving the problem. Visual representations help students solve problems by linking the relationships between quantities in the problem with the mathematical operations needed to solve the problem. Students who learn to visually represent the mathematical information in problems prior to writing an equation are more effective at problem solving. Visual representations include tables, graphs, number lines, and diagrams such as strip diagrams, …"* (Woodward et al., 2012, p.23).

collègues d'une part, et celle de Jitendra et ses collègues d'autre part[6]. La figure 1 illustre les types de schématisations proposées par ces deux équipes pour représenter les problèmes additifs.

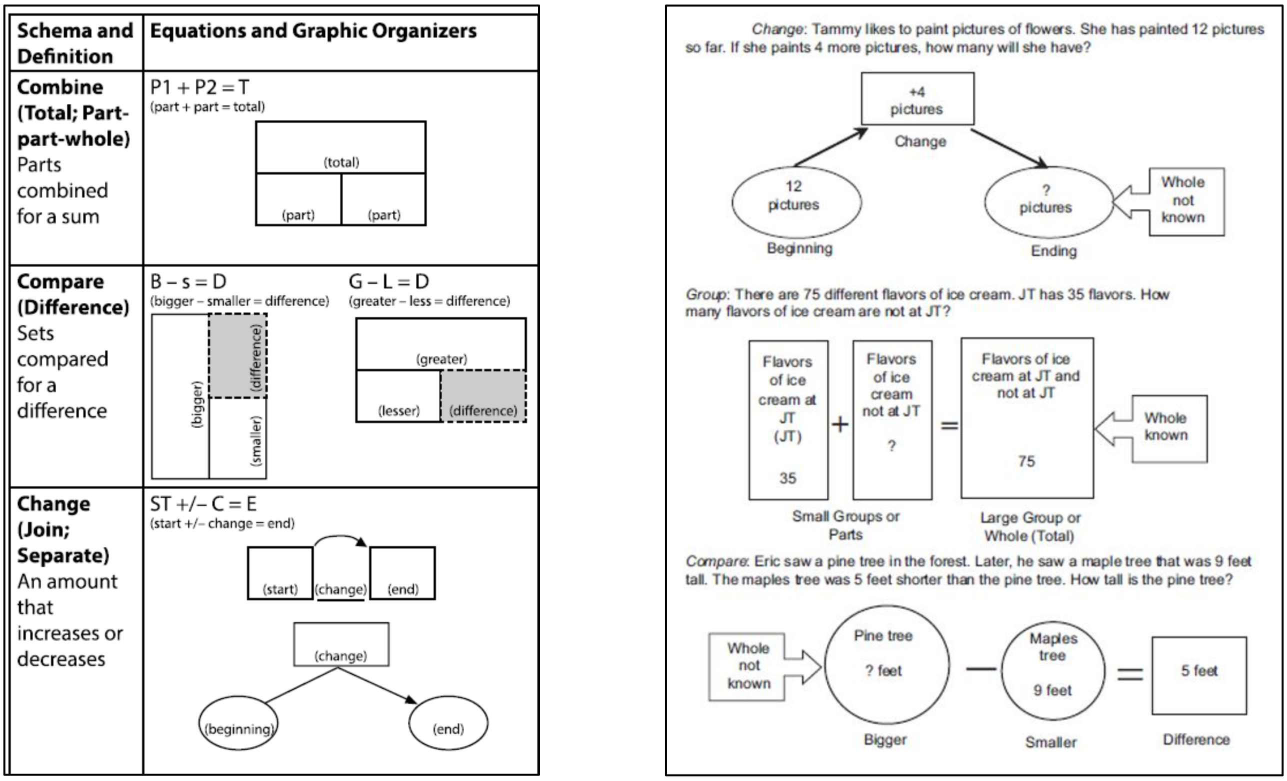



*Figure 1. Illustration des schématisations proposées par l'équipe de Fuchs, à gauche (extrait de Powell & Fuchs, 2018, p. 34) et par celle de Jitendra, à droite (extrait de Jitendra et al., 2013, p. 27) pour les problèmes additifs.*

Les approches d'enseignement qui s'appuient sur ces schématisations ont fait l'objet de recherches quasi-expérimentales assez rigoureuses et semblent se montrer efficaces pour soutenir le raisonnement des élèves (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018), à tout le moins face à des problèmes relevant des catégories qu'ils représentent (changement, combinaison et comparaison pour les problèmes additifs) et qui semblent demeurer au premier abord assez classiques et potentiellement « routiniers ». L'enseignement de ces deux types de schématisations semble particulièrement adapté pour les élèves souffrant de difficultés d'apprentissage en mathématique (Jitendra et al., 2015, 2016 ; Powell, 2011).

Le dernier constat que nous tirerons de ces travaux est qu'aucune des méta-analyses ou articles de synthèse susmentionnés (Peltier & Vannest, 2017; Powell, 2011 ; Sokolowski, 2018) ne mentionne d'études portant sur les schématisations en barres telles que proposées dans la méthode de Singapour. Notons évidemment que les schémas en barres (*strip diagrams*) ne sont qu'un élément parmi d'autres qui caractérisent cette méthode et que c'est peut-être la raison qui explique pourquoi on ne trouve pas d'études y faisant référence dans les travaux susmentionnés. Mais alors, la méthode Singapour elle-même a-t-elle fait les preuves de son efficacité ?

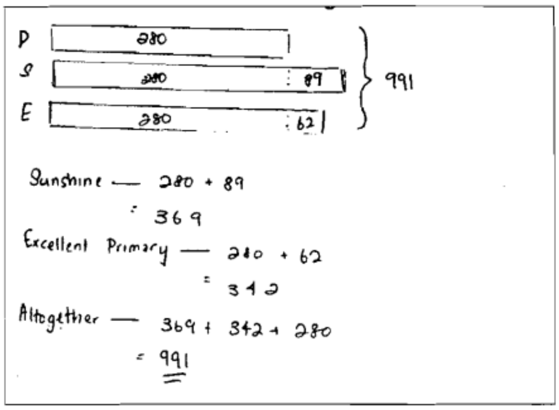
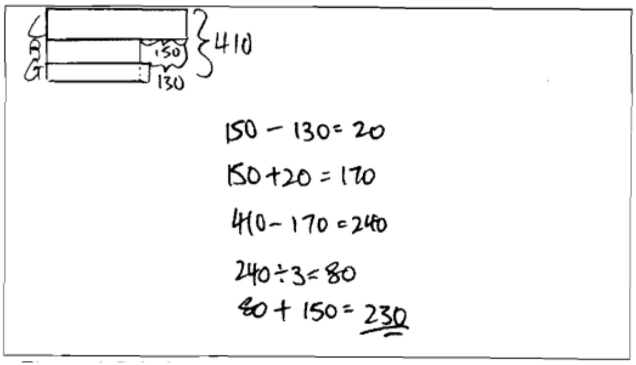
La méthode de Singapour (*Singapore Math*) n'est pas reprise dans la synthèse de Slavin et Lake (2008) se focalisant sur des approches améliorant les mathématiques dans l'enseignement primaire. Sur le site de *What Works Clearinghouse*[7], le rapport établi par les chercheurs en 2015 conclut à l'impossibilité de conclure quant à l'efficacité de la méthode car aucune étude ne respecte les différents standards de qualité qu'ils ont imposés pour permettre d'identifier les méthodes qui ont fait leur preuve.

[6] Les deux méta-analyses mentionnent aussi les travaux de l'équipe de Xin (par ex. Xin et al., 2011) qui utilisent le même type de schémas que ceux proposées par Fuchs et al. pour les problèmes multiplicatifs (voir figure 3).

[7] https://ies.ed.gov/ncee/wwc/EvidenceSnapshot/464

Dans un article intitulé « *The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems* », Kaur (2019) retrace les origines de la méthode de Singapour. Ce serait apparemment en 1975, suite aux faibles résultats des élèves dans les évaluations internationales et nationales, que le Ministère de l'Education singapourien aurait lancé un projet pour réformer les mathématiques dans l'enseignement primaire. Ce projet aurait conduit au développement d'un nouveau curriculum et, en parallèle, au développement de programmes de formation d'enseignants ancrés dans cette nouvelle approche. L'auteur précise que le curriculum produit ne mentionne aucune recherche qui aurait guidé le travail, hormis quelques références aux travaux de Bruner (relatifs aux modes enactif – iconique – symbolique, voir Barth, 1985) et aux travaux d'un psychologue russe (Vassili Davydov) qui défend l'introduction d'une pensée algébrique en primaire[8]. La méthode de Singapour semble alors avoir été introduite dans la communauté internationale par un certain Kho, fin des années 1980, qui plaidait déjà à l'époque pour des recherches visant à en évaluer l'efficacité dans les classes.

En 2019, Kaur déplore toujours une pénurie de recherches à ce niveau. Il mentionne quelques études menées à Singapour ou ailleurs (Pakistan, USA, et Grèce) mais aucun des écrits répertoriés n'est repris dans les méta-analyses récentes (Peltier & Vannest, 2017; Pellegrini et al., 2021 ; Sokolowski, 2018). Kaur (2019) souligne que la méthode « semble efficace ». Toutefois, la plupart des recherches mentionnées ne semblent pas présenter de design quasi-expérimental comparant les gains engendrés par cette méthode avec ceux obtenus par un groupe contrôle. Par exemple, l'étude de Ng et Lee (2005) observe comment des élèves de 5e primaire (CM2 en France) utilisent les schémas en barres pour résoudre cinq problèmes de difficultés croissantes. Ils concluent que l'utilisation des schémas en barres s'avère efficace face aux problèmes algébriques (de type partages inégaux) mais qu'ils n'apportent pas de plus-value face aux problèmes arithmétiques pour lesquels les élèves peuvent procéder pas-à-pas pour trouver la solution (voir figure 2 pour une illustration)[9].

<table>
<tr>
<td>L'école primaire Dunearn comporte 280 élèves. L'école Sunshine a 89 élèves de plus que l'école Dunearn. L'école Excellent a 62 élèves de plus que l'école Dunearn. Combien d'élèves y a-t-il dans l'ensemble de ces trois écoles ?</td>
<td>Une vache (cow) pèse 150 kg de plus qu'un chien (dog). Une chèvre (goat) pèse 130 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les trois animaux pèsent 410 kg. Combien pèse la vache ?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

[8] Les travaux de Polotskaia et ses collègues s'appuient également sur les écrits de Davydov. Les schématisations « range-tout » qu'ils proposent visent aussi à soutenir le développement d'une pensée algébrique dès le début du parcours scolaire (Polotskaia, Savard & Freiman, 2017).

[9] Oserait-on dire que ce constat est assez « amusant » parce que le type de schématisation proposée ici est justement assez classique pour enseigner les problèmes de partages inégaux, en Belgique tout au moins (Demonty & Vlassis, 2018).

*Figure 2. Exemples de problèmes arithmétiques vs algébriques et schématisations en barres liées (extraits de Ng & Lee, 2005, pp. 63, 67 et 69, traduction libre).*

Notons par ailleurs que la méthode de Singapour est reprise sous sa forme américaine (*Math in focus*) dans la meta-analyse récente de Pellegrini et al. (2021) et est également retenue sur le site *Evidence for ESSA*[10] qui répertorie trois études correspondant à leurs standards de qualité et concluent à une ampleur de l'effet moyenne de +0.18. L'article et le site internet mentionnent notamment l'étude de Jaciw et al. (2012) qui ont implémenté *Math in focus* pendant un an dans des écoles américaines. Les résultats de cette étude montrent que les élèves qui ont suivi cette méthode ont fait plus de progrès que les élèves du groupe contrôle, mais les différences restent modérées. Plus récemment, des collègues de l'Université de Liège (Baye et al., 2022) ont réalisé un recensement d'études implémentant la méthode de Singapour et ont retenu six articles rencontrant les critères méthodologiques d'une recherche de qualité. Ils obtiennent une ampleur de l'effet moyenne de +0.23 ce qui est un peu plus élevé que celle annoncée sur le site *Evidence for ESSA*. En conclusion, il commence à y avoir quelques éléments de preuves d'efficacité de la méthode de Singapour (au moins dans sa version américaine), mais il ne faut pas perdre de vue que l'utilisation des schématisations en barres ne constitue qu'un des éléments de cette méthode qui se caractérise notamment par une place importante accordée à la résolution de problèmes et par un alignement des programmes, des manuels et des formations d'enseignants (Leinwand & Ginsburg, 2007 ; Kaur, 2019). Pour le dire autrement, il serait hasardeux de conclure que les preuves d'efficacité de la méthode de Singapour constituent des preuves d'efficacité de l'utilisation du modèle en barres (*strip diagram*).

Puisque c'est l'enseignement de schématisations correspondant aux différentes catégories de problèmes (cf. travaux de Fuchs et de son équipe notamment) qui semble avoir démontré clairement son efficacité (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018), nous allons consacrer le point suivant à décrire davantage cette approche. Etant donné l'engouement actuel, en France notamment, pour les schématisations en barres, nous y consacrerons également un point spécifique. Nous verrons que ces schématisations sont très proches de celles proposées par Polotskaia et al. (2019) au Canada sous le nom de « diagrammes range-tout ».

## III - ENSEIGNER DES SCHÉMATISATIONS CORRESPONDANT AUX DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE PROBLÈMES

En 2018, Powell et Fuchs éditent un petit guide intitulé « *Effective word-problem instruction. Using schemas to facilitate mathematical reasoning* ». Après avoir rappelé l'inefficacité des approches d'enseignement consistant à inviter les élèves à s'appuyer sur les mots-clés qui induisent l'opération à effectuer (cf. préambule), les auteurs précisent que deux types d'approches ont au contraire démontré de réelles preuves d'efficacité : les **stratégies d'attaque**, d'une part et **l'enseignement de schématisations,** d'autre part. Ces deux approches gagnent à être combinées, de façon à inviter constamment les élèves à garder un regard critique sur leur processus de résolution[11].

Powell et Fuchs (2018) définissent les **stratégies d'attaque** comme suit :

> *Une stratégie d'attaque est un ensemble d'étapes qui sont faciles à mémoriser et que les élèves peuvent utiliser pour guider leur approche de résolution de problèmes. Une stratégique d'attaque efficace peut s'employer quels que soient les schémas utilisés et les niveaux scolaires considérés*[12] *(p. 32, traduction libre).*

---

[10] https://www.evidenceforessa.org/programs/math/math-focus

[11] On retrouve ces deux éléments parmi les cinq principes issus de la synthèse publiée par *What Works Clearinghouse* (Woodward et al., 2012) : (principe 2) aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes ; (principe 3) enseigner aux élèves comment utiliser les supports visuels.

[12] "*An attack strategy is an easy-to remember series of steps students use to guide their approach to solving word problems. A helpful attack strategy spans across schemas and grade levels*" (Powell & Fuchs, 2018, p. 32).

Certaines stratégies de ce type concernent uniquement la compréhension du problème et d'autres portent sur l'ensemble de la démarche. Développer des stratégies portant sur la compréhension du problème (lire le problème, identifier la question, analyser les données et les relations, identifier le type de problème et le schéma correspondant) est important parce que beaucoup d'élèves sautent cette étape pour sélectionner directement les nombres et les mots-clés présents dans l'énoncé en vue de choisir l'opération à utiliser. Même si ces stratégies ne garantissent pas la résolution correcte du problème, habituer les élèves à se questionner avant de « foncer tête baissée » dans les calculs constitue déjà en soi un élément essentiel pour lutter contre les stratégies superficielles.

Powell et Fuchs (2018) donnent plusieurs exemples de stratégies d'attaque correspondant à leurs propres travaux (*Read the problem, Underline the question, Name the problem*, p. 33), à ceux de l'équipe de Jitendra (*Find the problem ; Organize information using a diagram, Plan to solve the problem, Solve the problem,* p. 33) ou encore à ceux de l'équipe de Montague s'inscrivant dans le programme *Solve it*.

Le programme *Solve it*, considéré comme *evidence-based* par ses concepteurs, semble particulièrement efficace pour les élèves éprouvant des difficultés ou des troubles d'apprentissage[13]. L'approche *Solve it*, décrite notamment dans l'article de Montague et al. (2014), combine l'enseignement de stratégies cognitives (les stratégies correspondant au *"to do"*) et métacognitives (les stratégies invitant à s'interroger sur *"what am I doing"* et *"what have I done"*, p. 470). Les stratégies cognitives concernent la compréhension (lire l'énoncé et le paraphraser), la représentation (construire un modèle visuel), la planification de la démarche, l'estimation de la solution, la résolution proprement (les calculs) et la vérification. Les stratégies métacognitives sont définies comme faisant appel à trois processus (*self-instruction*, *self-questioning*, et *self-monitoring*, p. 470) qui se traduisent, dans le modèle *Solve it*, pour chacune des stratégies cognitives par « se dire » (quoi faire) ; « se demander » (si ce qu'on a fait convient) et « vérifier » (que ce que l'on a fait est bien réalisé). A titre illustratif, la figure 3 reprend un extrait de la procédure *Solve it* pour les stratégies de représentation, de résolution et de vérification.

**REPRÉSENTER / VISUALISER** (faire un dessin ou un schéma)

| | |
|---|---|
| **Se dire :** | Faire un dessin ou un schéma. Montrer les relations entre les différents éléments du problème. |
| **Se demander :** | Est-ce que le dessin (ou schéma) colle bien au problème ? Est-ce que je vois bien les relations entre les données ? |
| **Vérifier :** | Confronter le dessin (ou schéma) avec les informations reprises dans l'énoncé. |

(…)

**RÉSOUDRE / CALCULER** (faire les calculs)

| | |
|---|---|
| **Se dire** : | Faire les opérations (les calculs) dans le bon ordre. |
| **Se demander :** | Que me dit la comparaison entre la réponse obtenue et celle que j'avais estimée ? Les décimales ou les unités sont-elles à la bonne place ? Ma réponse est-elle correcte ? |
| **Vérifier :** | Vérifier que toutes les opérations sont réalisées dans le bon ordre. |

**VERIFIER** (s'assurer que tout est correct)

| | |
|---|---|
| **Se dire :** | Vérifier le plan de la démarche pour s'assurer qu'il est correct. Vérifier tous les calculs. |
| **Se demander :** | Ai-je bien vérifié toutes les étapes ? Ai-je vérifié les calculs ? Ma réponse est-elle correcte ? |
| **Vérifier :** | Vérifier que tout est correct. Si ce n'est pas le cas, retourner en arrière (revoir les étapes précédentes). Si besoin, demander de l'aide. |

[13] Plusieurs manuels ont été conçus pour aider les enseignants à implémenter le programme *Solve it* en classe ; des manuels spécifiques sont par ailleurs dédiés aux classes inclusives – voir https://www.exinn.net/solve-it/

*Figure 3. Illustration de questionnements métacognitifs correspondant à trois stratégies cognitives du programme « Solve it » (extrait de Montague et al., 2014, p. 471, traduction libre).*

Pour enseigner les schématisations, Powell et Fuchs (2018) proposent tout d'abord de s'appuyer sur des typologies de problèmes et d'utiliser des schémas correspondant aux différents types de problèmes additifs (voir figure 1) ou multiplicatifs (voir figure 4). Ils précisent que ces schémas peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes de la maternelle au collège (du *kindergaten – 5 ans* – au grade 8 – *14 ans*).

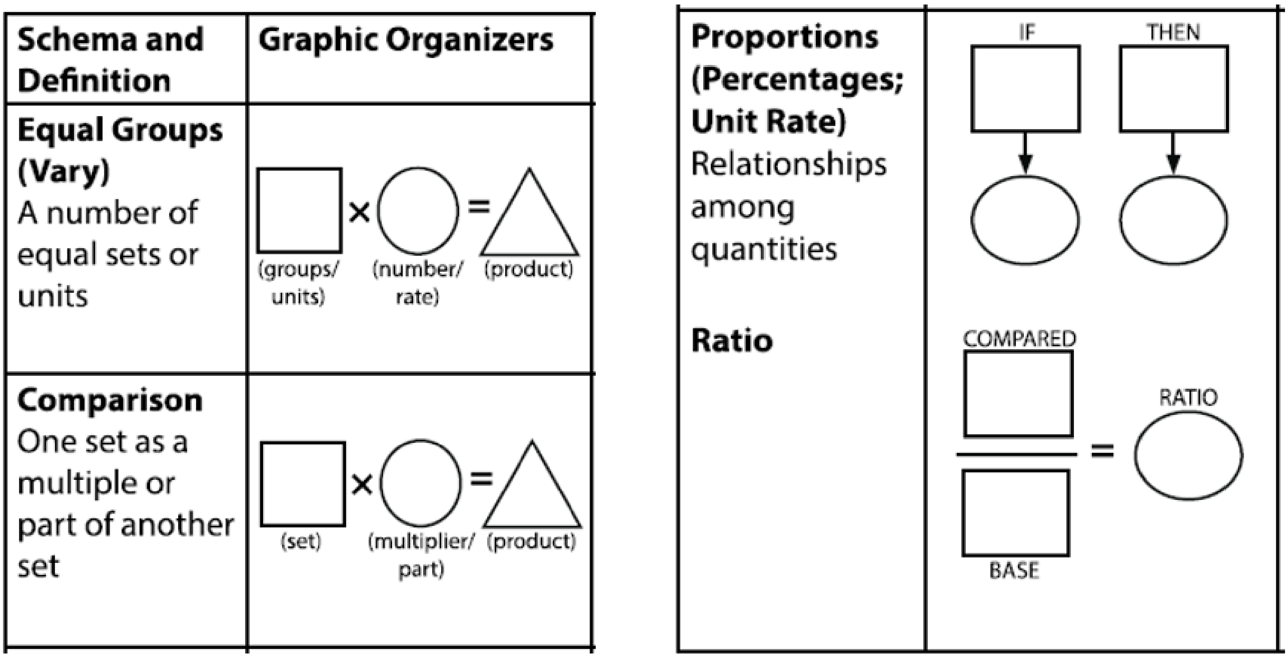



*Figure 4. Illustration des schématisations proposées par l'équipe de Fuchs pour les problèmes multiplicatifs (extrait de Powell & Fuchs, 2018, p. 36).*

L'approche d'enseignement consiste à **enseigner explicitement l'utilisation des schémas** : comme dans la phase de modelage de l'enseignement explicite (Gauthier et al., 2013) et comme préconisé dans la synthèse de *What Works Clearinghouse* (Woodward et al., 2012), l'enseignant met un haut-parleur sur sa pensée pour rendre accessible son raisonnement aux élèves. Il est important qu'il procède de la sorte pour mettre en œuvre la « stratégie d'attaque » qui l'aidera à choisir le schéma adéquat. Il continue ensuite à exprimer son raisonnement à voix haute pour montrer comment il complète le schéma, comment il en déduit les opérations (les calculs ou les équations à réaliser) et comment il les résout. Les schématisations sont introduites selon un ordre progressif et les élèves ont l'occasion de s'entraîner à les utiliser. Par exemple, pour les problèmes additifs, les auteurs conseillent de commencer par les problèmes de type « combinaison » (car il n'y a que deux possibilités : chercher le tout ou une partie), puis de poursuivre par les problèmes de comparaison (même si ce sont les plus complexes, car leurs schématisations sont assez proches de celles des problèmes de combinaison) et de terminer par ceux de type « changement » (ce sont ceux qui correspondent le mieux aux idées intuitives des élèves de l'addition/augmentation et de la soustraction/diminution). Pour chaque type de problèmes, l'enseignant varie la position de l'inconnue, ce qui conduit d'emblée les élèves à percevoir les relations entre les opérations additives et soustractives. Une fois les schématisations introduites, les trois types de problèmes sont, bien entendu, mélangés pour que les élèves analysent l'énoncé pour repérer le type auquel il est fait référence. Des problèmes plus complexes, qui nécessitent plusieurs étapes de résolution et mobilisent plusieurs schémas, sont également introduits progressivement en adaptant la complexité à l'âge des élèves.

Si ce type d'approche, très explicite et progressive, semble particulièrement efficace pour les élèves présentant des difficultés d'apprentissage (Powell & Fuchs, 2018), on peut néanmoins questionner le risque que les élèves développent une stratégie superficielle consistant à chercher des indices pour repérer le bon schéma (Thevenot et al., 2015). Par ailleurs, on peut aussi convenir que ce type de schéma risque de s'avérer peu fonctionnel face à des problèmes « non-routiniers » qui nécessiteront d'autres types de schématisations (Fagnant & Vlassis, 2013 ; Reuter et al., 2015), comme nous y reviendrons au point V.

## IV - APPRENDRE AUX ÉLÈVES À UTILISER DES SCHÉMAS EN BARRES

Les schémas en barres (*strip diagrammes*) sont notamment ceux qui sont utilisés dans la méthode de Singapour. Alors que les schématisations développées au point précédent diffèrent en fonction des catégories de problèmes, les schématisations en barres invitent d'emblée à une re-conceptualisation des problèmes sous la forme d'une relation « partie-tout ». Le manuel de la *Librairie des écoles* pour le niveau CP insiste d'ailleurs largement sur cet aspect, en proposant « une unité préliminaire aux notions d'addition et de soustraction, de multiplication et de division (...) [qui] introduit les notions de « tout » et de « partie » à l'aide d'un schéma de lien entre les nombres » (p. 8). Ils considèrent dès lors que « les quatre opérations ne sont que les différentes facettes de deux problèmes fondamentaux : (1) Comment connaître le tout ? Ou (2) Comment connaître une partie ? » (p.8). Plus précisément, ils distinguent les cinq cas de figure suivants :

1a. *Comment connaître le tout* quand on connaît les parties ? (Addition)

1b. *Comment connaître le tout* quand on connaît une partie et le nombre de parties égales ? (Multiplication)

2a. *Comment connaître une partie* quand on connaît le tout et l'autre partie ? (Soustraction)

2b1. *Comment connaître une partie* quand on connaît le tout et le nombre de parties égales ? (Division)

2b2. *Comment connaître le nombre de parties égales* quand on connaît le tout et une partie ? (Division) (Extrait de la Librairie des écoles, 2016, CP, p. 8).

Les problèmes de « combinaison » sont statiques et correspondent à une conceptualisation « partie-tout », mais cela demande une abstraction plus grande pour se représenter ainsi les problèmes de type changements qui sont dynamiques et traduisent des augmentations/diminutions. La figure 5 illustre les schématisations correspondant aux problèmes de type combinaison (problème 1) et changement (problèmes 2 à 4) telles qu'elles sont présentées dans les documents produits par le MENJS (2021) pour le CP.

**1.** *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

**2.** *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

**3.** *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

**4.** *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

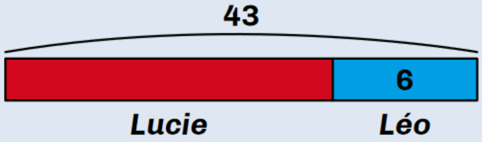



***Figure 32.*** Problème 1.

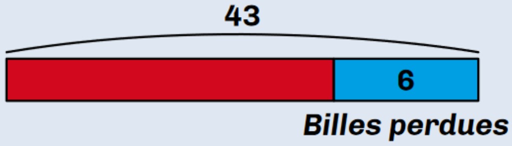



***Figure 33.*** Problème 2.

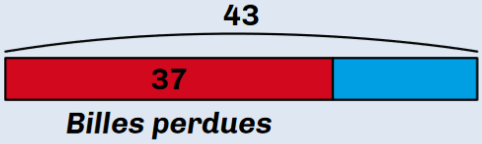



***Figure 34.*** Problème 3.

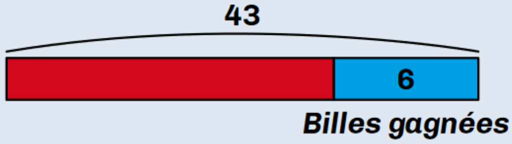



***Figure 35.*** Problème 4.

*Figure 5. Illustration des schématisations correspondant aux problèmes de type combinaison et changement (extrait du document du MENJS pour le CP, 2021, p. 93).*

Pour les problèmes de type comparaison, la schématisation est légèrement différente puisqu'elle met en relation les deux ensembles de données à comparer (voir figure 6). Les problèmes de comparaison sont statiques et l'adaptation à réaliser pour se les représenter sous une forme proche des problèmes de combinaison semble *a priori* demander moins d'abstraction (cf. Powell & Fuchs, 2018 au point précédent) que pour les problèmes de type changement.

**Exemple :** *« Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ? »*

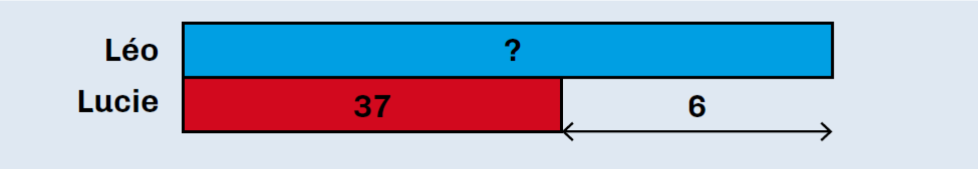



*Figure 6. Illustration des schématisations correspondant aux problèmes de type comparaison (extrait du document du MENJS pour le CP, 2021, p. 93).*

Ces schématisations en barres sont très proches de ce que Polotskaia et son équipe (Polotskaia, 2010 ; Polotskaia et al., 2019) qualifient de « diagrammes range-tout », qui sont illustrés dans la figure 7.

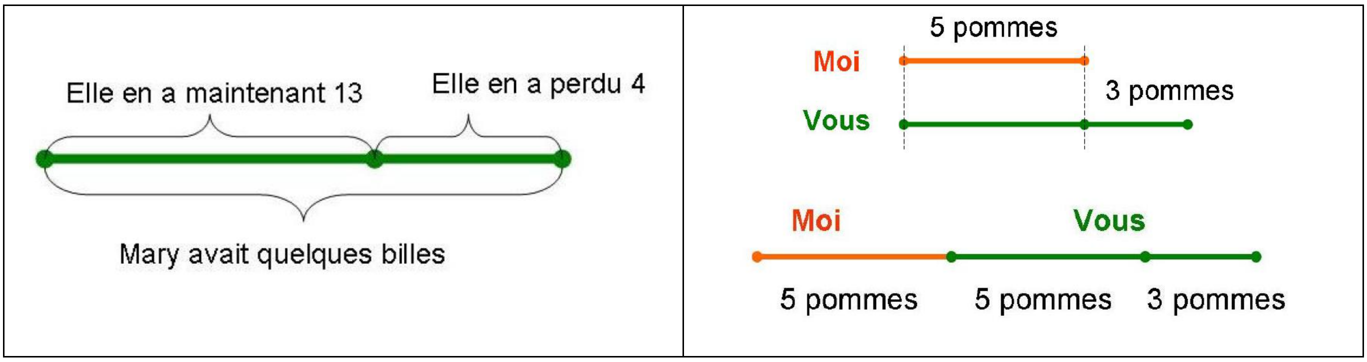



*Figure 7. Illustration des schémas « range-tout » pour un problème de type changement (à gauche) et pour un problème composant des relations de comparaison et de combinaison (à droite) (extraits de Polotskaia, 2010, pp. 19 et 17).*

Pour introduire ces schématisations, Polotskaia et ses collègues proposent la mise en place d'un jeu de communication appelé le « jeu du capitaine ». Durant ce jeu, les élèves sont répartis en équipes et doivent construire des messages-dessins respectant un ensemble de règles : 1) le message doit représenter le problème ; 2) le message ne doit comporter aucune lettre ; 3) le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique (+ ÷ – ×) et 4) le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. Chaque équipe remet ses messages au capitaine qui doit pouvoir trouver la solution du problème sans avoir eu accès à l'énoncé du problème d'origine. L'exploitation des messages-dessins produits par les élèves permet d'introduire les « diagrammes range-tout », qui sont présentés comme une façon simplifiée de représenter le problème. Par la suite, ces schématisations deviennent des outils dont peuvent s'emparer les élèves pour soutenir leur propre processus de résolution de problèmes.

Si le caractère abstrait de ces schématisations présente l'avantage de pouvoir s'adapter à tout type de situations (les segments peuvent représenter aussi bien des données discrètes, comme des pommes ou des billes, que continues, comme des kg ou des km ; ils peuvent représenter des données connues ou inconnues), ils nécessitent aussi d'être appris par les élèves, notamment parce qu'il n'est au départ pas naturel pour eux de représenter une quantité discrète par un segment de taille approximative (Polotskaia, 2010). Il convient donc d'introduire ces schémas progressivement, mais ceci semblerait faisable dès le début primaire (Savard et Polotskaia, 2014).

# V - GARDER UN REGARD CRITIQUE ET DÉVELOPPER UNE FLEXIBILITÉ DANS L'UTILISATION DES SCHÉMATISATIONS

Quelles que soient les représentations schématiques privilégiées, un des enjeux est d'éviter un usage mécanique et stéréotypé qui conduirait à développer des stratégies tout aussi superficielles que la stratégie des mots-clés évoquée en introduction.

Sans regard réflexif, les schémas permettent de résoudre des problèmes absurdes (Baruk, 1985), comme l'illustre la figure 8.

Sur un bateau, il y a 22 chèvres et 15 moutons. Quel est l'âge du capitaine ?

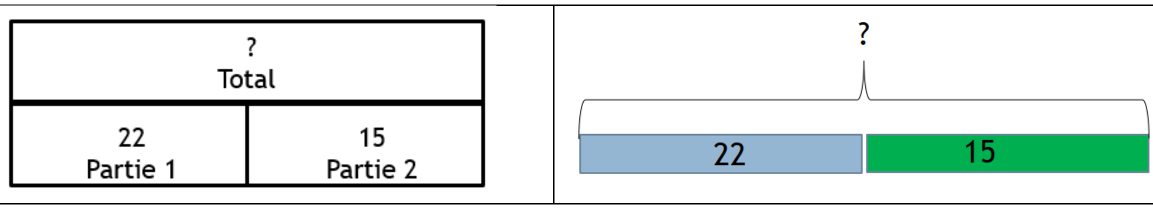



*Figure 8. Schématisation « mécanique » du problème de l'âge du capitaine.*

La même question se pose pour les problèmes « problématiques », qui se définissent par opposition aux problèmes standard (Verschaffel & De Corte, 2008). Un « problème standard » peut être résolu d'une manière indiscutable en appliquant des opérations arithmétiques évidentes avec les nombres fournis. Par opposition, dans un « problème problématique », le modèle mathématique approprié est moins évident et plus discutable, du moins si on prend sérieusement en compte la réalité du contexte évoqué dans le problème.

Un exemple connu (Verschaffel et al., 2000) est celui du coureur qui réalise un sprint sur 100 m en 15 secondes et pour lequel on demande le temps qu'il prendra pour parcourir 10 km. La prise en compte du contexte réel doit permettre à l'élève de conscientiser que le modèle proportionnel n'est pas approprié.

Dans l'exemple des maisons de Bruce et Alice (la figure 9), l'utilisation d'un schéma en barres (partie gauche) risque de conduire à la mise en œuvre d'un modèle mathématique amenant à simplement additionner les données de l'énoncé. Cette démarche revient à considérer que les maisons sont situées de part et d'autre de l'école, sans prendre en compte l'ensemble des possibilités qu'offre la situation réelle. Un tel problème gagnerait à être représenté par un autre type de schématisation, comme illustré dans la partie droite de la figure 9, de façon à comprendre que toutes les distances comprises entre 9 km (si les maisons sont situées du même côté de l'école sur une ligne droite) et 25 km (si les maisons sont situées de part et d'autre de l'école, toujours sur une ligne droite) constituent des solutions possibles.

Bruce et Alice vont à la même école. Bruce habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. Quelle est la distance entre la maison de Bruce et la maison d'Alice ?

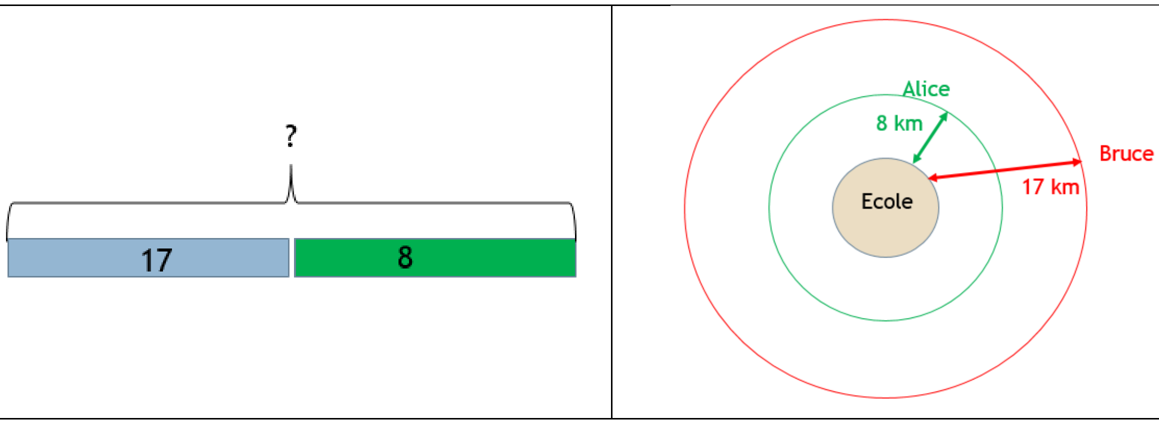



*Figure 9. Schématisations du problème problématique des maisons de Bruce et Alice (Verschaffel et al., 2008).*
*A gauche schématisation « mécanique » à l'aide du modèle en barres ;*
*à droite schématisation réaliste à l'aide d'une schématisation adaptée à la situation décrite.*

Dans le même ordre d'idées, ni les schémas correspondant aux différentes typologies de problèmes (Powell & Fuchs, 2018), ni les schémas en barres (Kaur, 2019 ; Polotskaia, 2010) ne sont très adaptés aux problèmes non-routiniers, qui gagnent eux aussi à être représentés par d'autres types de schématisations, comme celles utilisées par Diezmann (2002) notamment (voir figures 10 et 11).

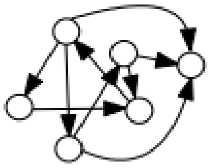
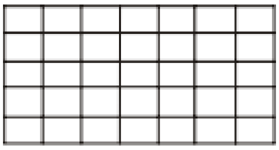
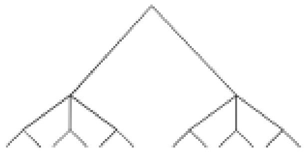
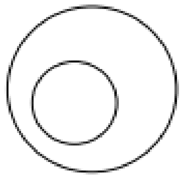
| A Network or System of Paths | A Matrix with Rows and Columns | A Hierarchy or Branching Structure | A Part-Whole Diagram |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

*Figure 10. Schématisations adaptables aux problèmes non routiniers (extrait de Diezmann, 2002, p. 1, d'après Novick, Hurley & Francis, 1999, p. 190).*

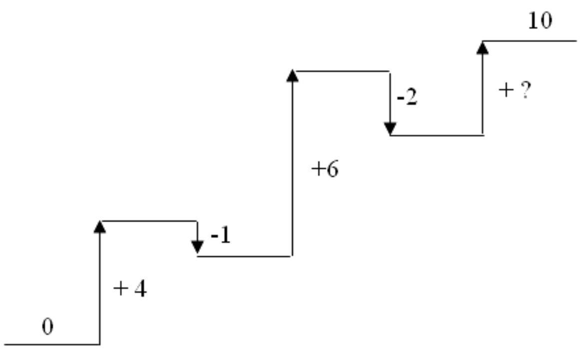
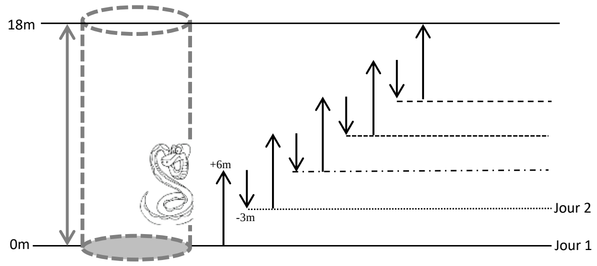
<table>
<tr>
<td>Un escargot essaie d'escalader un mur de briques. Il grimpe tout d'abord le long des quatre premières briques, puis il s'arrête, épuisé, et il s'endort. A son réveil, il grimpe cette fois six briques, puis il s'endort à nouveau, glisse et redescend de deux briques. Lors de sa dernière tentative, il atteint la dixième brique et arrive au sommet du mur. Combien de briques l'escargot a-t-il grimpées lors de sa dernière tentative ?</td>
<td>Un serpent se trouve au fond d'un trou de 18 m de profondeur lorsqu'il décide de ramper jusqu'à la surface. Chaque jour, il rampe le long de la paroi et grimpe 6 m. Malheureusement, la nuit, dans son sommeil, il glisse de 3 m vers le fond. Combien de jours mettra-t-il pour sortir du trou ?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

*Figure 11. Schématisations de problèmes non-routiniers à l'aide d'une adaptation de la schématisation « network » (à gauche, traduit de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165 ; à droite adapté de Reuter et al., 2015, p. 1390).*

Ces schémas peuvent s'adapter à une variété de problèmes et ne sont pas figés à un type particulier. Ainsi, un même schéma permet de résoudre des types de problèmes différents et deux schémas différents peuvent être utilisés pour représenter un même problème, comme illustré à la figure 12.

Le marchand de glaces de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?

| | Fraise | Vanille | Chocolat | Pistache |
|---|---|---|---|---|
| Petits cornets | | | | |
| Grands cornets | | | | |

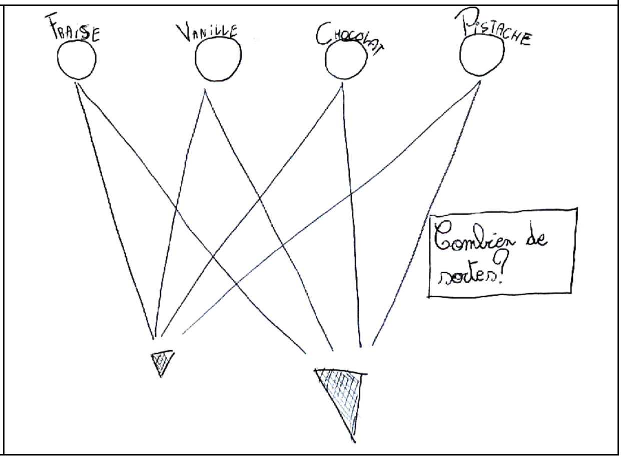



*Figure 12. Schématisations d'un problème non-routiers à l'aide d'un tableau (à gauche) et d'un schématisation hiérarchique (à droite) (traduit de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165).*

Tout en défendant l'intérêt d'un usage des schématisations en barres, les documents produits par le Ministère de l'éducation en France (MENJS, 2022) invitent aussi les enseignants à faire usage d'autres types de schématisations (notamment les tableaux et les arbres, voir figure 13) pour résoudre des problèmes qu'ils qualifient d'atypiques.

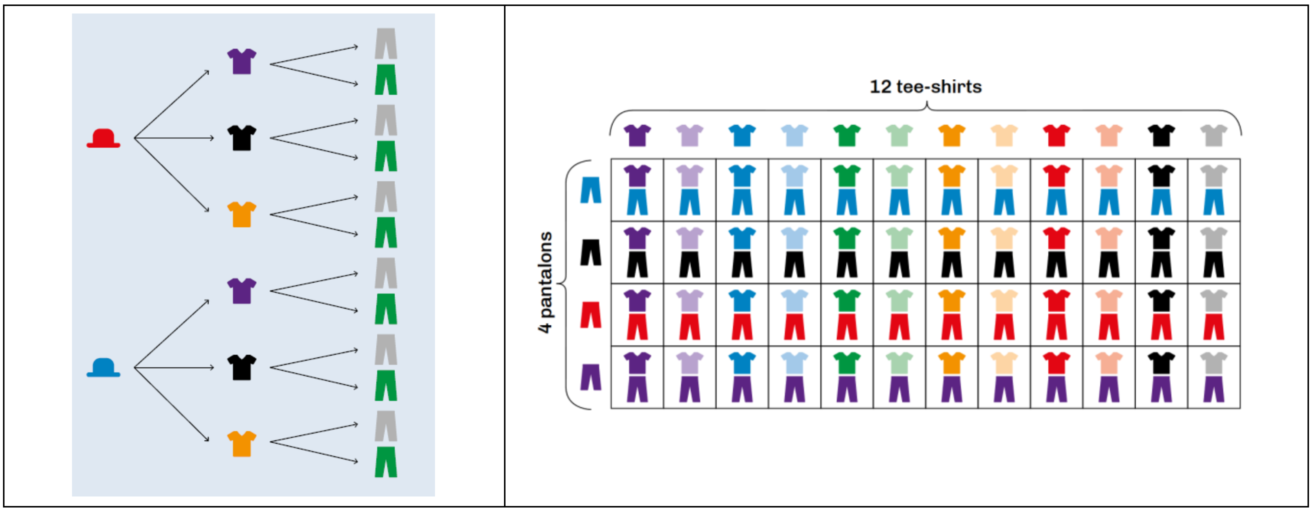



*Figure 13. Schématisation du type « tableau » et « arbre » (extrait du document du MENJS pour le CM, 2022, pp. 35 et 123).*

Finalement, on peut conclure qu'il est essentiel de proposer régulièrement des problèmes variés (y compris des problèmes non-routiniers, Woodward et al., 2012) et d'insister sur l'importance d'analyser le problème avant de se lancer dans la résolution (cf. les stratégies d'attaques mentionnées par Powell & Fuchs, 2018). Il convient aussi d'apprendre aux élèves à construire des représentations visuelles (Woodward et al., 2012) qui soutiennent leur activité de modélisation (MENJS, 2022)[14]. Enseigner explicitement l'usage des schématisations spécifiques semble efficace, surtout pour les élèves en difficulté (Powell, 2011 ; Jitendra et al., 2015, 2016). Toutefois, il semble aussi important de permettre aux élèves de rencontrer des schématisations diversifiées, qu'ils devront apprendre à utiliser de manière flexible, tout en gardant un regard critique sur les problèmes proposés et sur leur démarche de résolution.

[14] « *La compétence « représenter » peut soutenir l'activité de modélisation de l'élève. Elle permet de faire le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. En effet, un schéma permet de rendre visibles les relations entre les grandeurs présentes dans l'énoncé et leur relation avec ce qui est cherché* » (MEN, 2022, p.48).

# VI - BIBLIOGRAPHIE


Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Seuil.

Barth B-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication et langages, 66*(4), 46-58.

Baye, A., Dachet, D. et Pressia, F. (2022). *Les réformes et dispositifs innovants en FWB : à quel aune les évaluer ?* Accessible en ligne sur https://hdl.handle.net/2268/292635

Crahay, M. et Detheux, M. (2005). L'évaluation des compétences, une entreprise impossible ? Résolution de problèmes complexes et maîtrise de procédures mathématiques. *Mesure et Evaluation en Education, 28*(1), 57-78.

Csíkos, C., Szitányi, J. et Kelemen, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational studies in mathematics, 81*(1), 47-65.

Demonty, I., Fagnant, A. et Lejong, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problème*. *Guide méthodologique à l'usage des enseignants (8-10 ans)*. De Boeck.

Demonty, I. et Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire.* De Boeck.

Depaepe, F., De Corte, E. et Verschaffel, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin et B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*. Springer: Advance in mathematics education.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

Elia, I., Gagatsis, A. et Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

Fagnant, A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? In C. Vendeira-Maréchal et J. Pilet (Eds.). *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp. 94-113).

Fagnant, A. et Burton, R. (2009). Développement de compétences et résolution de problèmes en mathématiques à l'école primaire : pratiques déclarées des enseignants et pratiques projetées des futurs enseignants. *Scientia paedagogica experimentalis, XLVI*(2), 293-318.

Fagnant, A. et Demonty, I. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème*. *Guide méthodologique à l'usage des enseignants (10-12 ans)*. De Boeck.

Fagnant, A. et Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational studies in mathematics, 84*,149-168.

Fédération Wallonie-Bruxelles (FW-B) (2014-2015). *Evaluations externes non certificatives en mathématiques. Pistes didactiques.* Accessible en ligne sur http://www.enseignement.be

Gauthier, C., Richard, M. et Bissonnette, S. (2013). *Enseignement explicite et réussite des élèves. La gestion des apprentissages.* De Boeck.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J.R. et Witzel, B. (2009a). Assisting students struggling with mathematics : *Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools. IES Pratice Guide.* What Works Clearinghouse. Accessible sur https://ies.ed.gov/ncee/wwc/

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., et Flojo, J. (2009b). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, *79(3),* 1202-1242.

Hanin, V. et Van Nieuwenhoven, C. (2016). Evaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation, 2(*1), 53-88.

Hegarty, M. et Kozhenikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology, 91*(4), 684-689.

Jaciw, A.P., Hegseth, W., Ma, B., et Lai, G. (2012, November). Assessing impacts of Math in focus, a 'Singapore Math' program for american schools: Findings from a randomized control trial. Palo Alto, CA: Empirical Education Inc.

Jitendra, A.K., Nelson, G., Pulles, S. M., Kiss, A. et Houseworth, J. (2016). Is Mathematical representation of problems an evidence-based Strategy for students with mathematics difficulties? *Exceptional children, 83*(1), 8-25.

Jitendra, A,K,, Petersen-Brown, S, Lein, A.E.,… et Egan, A.M. (2015). Teaching mathematical word problem solving: The quality of evidence for strategy instruction priming the problem structure. *Journal of Learning Disabilities, 48*(1), 51-72.

Jitendra, A. K., Rodriguez, M., Kanive, R., Huang, J. P., Church, C., Corroy, K. A., et Zaslofsky, A. (20 1 3). Impact of small-group tutoring interventions on the mathematical problem solving and achievement of third-grade students with mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly, 36*, 21-35.

Julo, J. (1995). *Représentation* des *problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive* à *l'enseignement*. Seuil.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM, 51*, 151–168.

Lacombe, N., de Chambrier, A.-F. et Dias, T. (2021). Des données probantes au service de l'enseignement différencié des mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) (ex- Math-Ecole), 236*, 13-26.

Leinwand, S. et Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore math. *Educational leadership: Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development*, *65*(3), 32-36.

Librairie des écoles. (2016). *Méthode de Singapour. Manuel pour le CP*.

Mevarech, Z. et Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD publishing.

Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sport (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*.

Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sport (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*.

Montague, M., Krawec, J., Enders, C. et Dietz, S. (2014). The effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle-school students of varying ability. *Journal of Educational Psychology, 106*(2), 469–481.

Ng, S. F. et Lee, K. (2005). How primary five pupils use the model method to solve word problems. *The Mathematics Educator, 9(*1),60–83.

Novick, L.R., Hurley, S.M., et Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27*(2), 288-308.

Pantziara, M., Gagatsis, A. et Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational studies in mathematics, 72*, 39-60.

Pellegrini, M., Lake, C., Neitzel, A., et Slavin, R. E. (2021). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Meta-Analysis. *AERA Open, 7*(1), 1-29.

Peltier, C. et Vannest, K. (2017). A Meta-Analysis of Schema Instruction on the Problem-Solving Performance of Elementary School Students. *Review of Educational Research, 87*(5), 899-920.

Polotskaia, E. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, L*(1), 12-28.

Polotskaia, E., Savard, A. et Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique : macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 79–105.

Polotskaia, Gervais et Savard (2019). *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits d'addition et de soustraction*. Montréal, QC: JFD.

Powell, S.R. (2011), Solving word problems using schemas: A review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*, 94-108.

Powell, S. R., et Fuchs, L. S. (2018). Effective word-problem instruction: Using schemas to facilitate mathematical reasoning. *Teaching exceptional children, 51*, 31– 42.

Reuter, T., Schnotz, W. et Rasch, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American journal of educational research, 3*( 11), 1387-1397.

Savard, A. et Polotskaia, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie, XLII*(2), 138-157.

Slavin, R. E., et Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427–515.

Sokolowski, A. (2018). The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research. *IAFOR Journal of Education*, 6(3), 129-152.

Thevenot, C., Barrouillet, P. et Fayol, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay et M. Dutrevis (Eds) (2e edition). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). De Boeck.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., De Bock, D. et Crahay, M. (2015). La modélisation et la résolution de problèmes d'application. In M. Crahay et M. Dutrevis (Eds) (2e edition). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 167-187). Bruxelles: De Boeck.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (Eds). (2e édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). De Boeck.

Verschaffel, L., Greer, B. et De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande: Swets & Zeitlinger.

Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., ... et Ogbuehi, P. (2012). *Improving Mathematical Problem Solving in Grades 4 through 8. IES Practice Guide.* What Works Clearinghouse. Accessible en ligne sur https://ies.ed.gov/ncee/wwc/PracticeGuide/16

Xin, Y. P., Zhang, D., Park, J. Y., Tom, K., Whipple, A., et Si, L. (2011). A comparison of two mathematics problem-solving strategies: Facilitate algebra-readiness. *Journal of Educational Research, 104,* 381-395.

# REPRESENTER UNE FIGURE GEOMETRIQUE EST-CE LA FAIRE EXISTER ?

**Thomas DE VITTORI**
Maître de conférences, Université de Lille – INSPE
Univ. Artois, UR 2462, Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML), F-62300, France
thomas.devittori@univ-lille.fr

Résumé
Définir les mathématiques n'est pas une chose aisée et quand bien même on s'accorderait sur une définition, ce dont parle cette discipline, ses objets, restent difficiles à saisir. D'apparence plus accessibles que d'autres notions, les figures géométriques posent pourtant elles aussi des questions quant à leur existence, leur rôle, la manière dont on les utilise, dont on les comprend, etc. La figure est-elle une représentation d'un modèle ou le modèle de représentations ?
Dans cet exposé, je m'attache à explorer quelques positions philosophiques contemporaines afin d'éclairer, je l'espère, les usages scolaires des figures géométriques. Plus particulièrement, après une première lecture d'Alain Badiou pour approcher une définition du concept de modèle, je m'attarde sur la notion d'objets quasi-concrets chez Charles Parsons.
Enfin, à l'appui de quelques travaux philosophiques récents qui ont re-questionné la géométrie et les représentations, j'évoque quelques enjeux de la figure comme mode d'accès à une connaissance mathématique.

## I - INTRODUCTION

### 1 Représenter-modéliser en géométrie

Parmi les six compétences qui structurent de nos jours l'enseignement des mathématiques, représenter et modéliser, dans le cas de la géométrie, sont plus qu'une simple thématique. En effet, lorsqu'on évoque les figures géométriques, la question de leur représentation vient immédiatement avec celle de leur statut. Les figures géométriques sont-elles des modèles ? Avant même de chercher à répondre à cette question délicate, une première chose à noter est que l'idée de modèle interroge la distinction entre ce qui est concret et ce qui est abstrait ; ce qui n'est pas simple philosophiquement. En effet, au-delà des aspects purement scolaires sur lesquels je reviendrai à la fin de cette contribution, le couple représenter-modéliser en géométrie renvoie également à des questionnements sur les mathématiques et leur objet qui remontent sans doute aussi loin que les mathématiques elles-mêmes. Pourtant, volontairement, dans ce qui va suivre, je ne vais pas revenir sur ces débats anciens et sur les apports de philosophes comme Aristote, Platon, Pascal, Descartes, etc. Pour ces réflexions, le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreux ouvrages et articles (Barbin & Caveing, 1996 ; Nicolle, 2004 ; Cohen, 2019) qui en rendent compte bien mieux que je ne le ferais. Pour ma part, je vais m'efforcer d'être au plus près des réflexions contemporaines en me concentrant uniquement sur le 20e siècle. J'y puiserai alors quelques idées parmi les discussions sur la question du modèle en géométrie. Plus particulièrement, je vais m'intéresser à deux philosophes, Alain Badiou (1937-) et Charles Parsons (1933-) dont j'essayerai de rendre compte des thèses principales et d'en montrer, *in fine*, la portée dans une réflexion personnelle sur les apprentissages scolaires. À la fin de cet article, à l'appui des travaux menés par David Waszek, je reviendrai rapidement sur le rôle des diagrammes (Waszek, 2018) et le lien avec les figures géométriques. Mais avant d'entrer dans les contributions de ces différents auteurs, j'invite le lecteur à une petite expérience de pensée. Il convient de signaler que cette expérience de pensée est une entrée en matière que j'ai pu utiliser à plusieurs reprises dans le cadre de temps de formation en épistémologie et histoire des mathématiques auprès de futurs professeurs de collèges et lycées. Je la propose ici dans une version très simplifiée.

## 2 Une expérience de pensée[1]

Afin de mieux percevoir les enjeux d'une réflexion philosophique sur les objets mathématiques, et plus particulièrement, ceux de la géométrie, je propose de partir d'une situation très simple. On va supposer que chacun.e a tracé sur une feuille un carré de 5 cm de côté. À partir de là, on peut se poser une première question : « Où se trouve la figure ? ». Plus ou moins indépendamment du temps laissé aux personnes pour réfléchir, parmi les réponses les plus fréquemment données, se trouvent généralement les quatre suivantes « Sur ma feuille ; Ailleurs ; Nulle part ; et Je ne sais pas » que l'on peut, par ailleurs, soumettre directement sous la forme d'un sondage. Au travers des réponses[2] à cette première question, on constate très vite une opposition entre deux réactions. La première considère la figure comme étant simplement sur la feuille, mettant en avant la dimension pleinement concrète de la situation. Cette posture empirique vient se placer en contradiction avec ceux qui vont, *a contrario*, proposer de voir dans la figure autre chose que son tracé sur la feuille. Proche du réalisme platonicien, cette dernière approche considère la figure plutôt comme une abstraction. Afin d'accentuer la tension entre ces deux courants qui, soulignons-le, ont structuré quasiment toute l'histoire de la philosophie sur cette question, on peut ajouter deux questions. Si plusieurs personnes ont effectivement tracé le carré, la première consistera à savoir « Est-ce la même figure que mon voisin / ma voisine ? » et la seconde à savoir si « Sur sa figure, les diagonales se coupent en leur milieu. Sans les tracer, est-ce que je peux dire que sur ma figure c'est aussi le cas ? ». Dans la majorité des cas, les participant.es[3] à l'expérience de pensée répondent positivement aux deux questions. L'objet de ces deux nouvelles réflexions est de mettre en évidence, d'un côté, le problème philosophique de l'unicité d'une figure et, de l'autre, celui de l'accès à une connaissance à son sujet. En effet, si chacun.e a une figure sur sa feuille, comment peut-on dire qu'il s'agit de la même figure ? Il y a une contradiction[4] entre la présence de plusieurs figures (une sur chaque feuille) et l'unicité perçue ou revendiquée de la figure. Parallèlement à l'unicité, se pose aussi la question de l'existence de la figure car si elle n'est pas sur la feuille, où est-elle ? C'est une véritable question ontologique. Notons pour finir que la deuxième question est quant à elle de nature épistémologique car elle interroge les propriétés mathématiques de la figure. On perçoit intuitivement qu'une propriété du carré ne doit pas dépendre du lieu où la figure a été tracée, mais cela pose, là aussi, des problèmes philosophiques quant au statut d'une connaissance mathématique. Pour le dire vite, peut-on accéder à une vérité mathématique en utilisant des figures géométriques tracées sur une feuille ?

Cette petite expérience de pensée mérite d'être complétée par des éclairages de philosophes ayant abordé ce sujet mais, même sous cette forme ludique, elle permet de mettre l'accent sur la difficulté intrinsèque qu'il y a à penser les figures géométriques. Ces dernières ont un double statut d'objet et de modèle qu'il n'est pas si facile de clarifier. Pour tenter d'enrichir un peu la réflexion, j'en viens donc maintenant à la présentation des travaux des auteurs cités en introduction en commençant par les thèses d'Alain Badiou sur la notion de modèle.

[1] Cette expérience de pensée a été réalisée en temps réel avec les personnes ayant assisté à la conférence. Il y a eu 103 répondants lors de cette session.

[2] Pour cette première question, l'expérience menée lors de la conférence a donné les scores suivants : « Sur ma feuille » (59), « Ailleurs » (16), « Nulle part » (25) et « Je ne sais pas » (3).

[3] Lors de la conférence, les participant.es devaient simplement exprimer leur accord au non *via* une échelle de Likert à cinq niveaux entre les deux questions formulées ainsi : « C'est la même figure que mon voisin / ma voisine » et « Sur sa figure, les diagonales se coupent en leur milieu. Sans les tracer, je peux dire que sur ma figure c'est aussi le cas. ». Les accords moyens exprimés ont été respectivement de 3,8 sur 5 et de 4,6 sur 5.

[4] En didactique des mathématiques, comme on peut le lire dans les travaux de Parzysz (1988) ou Gobert (2001), on fait généralement une distinction entre le dessin (concret) et la figure (abstraite) permettant ainsi de mieux identifier les contenus mathématiques enseignés.

# II - LE MODELE SELON ALAIN BADIOU

## 1 Un mot sur le contexte

Un rapide survol de la biographie d'Alain Badiou, nous montre qu'il est philosophe mais aussi romancier et dramaturge. Après des études au lycée Louis Legrand puis à l'École Normale Supérieure, il enseigne un peu dans le secondaire avant d'obtenir rapidement un poste à l'université de Reims. Il est nommé par la suite sur un poste à l'université de Vincennes et il finit sa carrière comme professeur à l'École Normale Supérieure. L'écrit de Badiou qui va nous intéresser s'intitule tout simplement le *Concept de modèle* dont j'utiliserai l'édition de 2007 qui comprend une longue préface permettant de clarifier certaines positions de l'auteur. Publié dans sa première édition en 1969, le *Concept de modèle* n'est pas à proprement parler un traité de philosophie. Il s'agit en fait d'un cours issu d'une série proposée à l'initiative de Louis Althusser entre 1967 et 1968 à l'École Normale Supérieure. Ces cours étaient spécifiquement conçus comme des apports philosophiques à destination d'étudiant.es scientifiques ; un projet en rupture avec les usages de l'époque. Parmi les intervenants, se trouvaient alors Pierre Macherey, Etienne Balibar, François Regnaut, Michel Fécheux, et Michel Fichant. Voici les intitulés tels qu'ils se présentaient dans l'annonce initiale :

1. La philosophie et les sciences (Louis Althusser)
2. L'objet de la science (Macherey)
3. Pratique sociale et histoire de sciences (Pécheux)
4. Épistémologie et histoire des sciences (Fichant)
5. Y a-t-il des précurseurs dans les sciences ? (Regnault)
6. La méthode expérimentale (Balibar)
7. Qu'est-ce qu'un modèle ? (Badiou)

Dès le départ, ces exposés oraux devaient être suivis d'une publication dans le cadre d'une série d'ouvrages qui, malheureusement, n'aboutira que partiellement du fait, entre-autre, des événements sociaux de mai 1968. Finalement seuls trois ouvrages paraitront : *Sur l'histoire des sciences* co-signé de Fichant et Pécheux, *Le concept de modèle* de Badiou, et bien sûr le texte de la séance introductive renommé en *Philosophie et philosophie spontanée des savants* d'Althusser. Badiou se place dès le départ en philosophe[5]. Il rappelle ainsi « qu'au regard du paradigme mathématique, la philosophie se propose de montrer qu'il existe des formes de l'existence qui sont cohérentes et justifiées, et d'autres qui ne le sont pas. » (Badiou, 2007, p. 21)

## 2 Les différentes manières de concevoir le modèle

En prenant appui sur la structure des mathématiques et leur solide cohérence interne, Badiou veut tracer des lignes de pensée qui permettent de mieux comprendre l'idée de modèle. Il commence donc par distinguer deux grands courants qu'il va ensuite expliciter.

> *L'intervention concernant le concept de modèle doit être située dans ce contexte. En effet, ce concept est susceptible d'une interprétation empiriste (le modèle est un artéfact bricolé qui est comme une image abstraite, ou un diagramme, du donné empirique), mais aussi une interprétation idéaliste relevant d'un platonisme vulgaire (le modèle est l'Idée pure dont le donné empirique est une réalisation ou une copie). (Badiou, 2007, p. 25)*

Avec une première distinction fondamentale entre une définition empiriste et une définition idéaliste du modèle, Badiou se place dans la tradition philosophique de réflexion sur les mathématiques et leur objet. Mise à part l'évocation de Platon et de ses Idées pures, l'auteur ne précise pas les références auxquelles il renvoie. On peut toutefois supposer que l'approche empiriste qu'il évoque est celle qu'on trouve chez John Stuart Mill par exemple (Cadiou, 1949 ; Audard, 2015). L'intérêt de la première dichotomie proposée

[5] On notera qu'à sa publication, l'ouvrage était loin de faire consensus (Varenne, 2008). En parallèle des traditionnels simples résumés de l'ouvrage (Lévy, 1969), certains comptes rendus se sont montrés très critiques (Gauthier, 1972), les auteurs reprochant à Badiou un manque de rigueur dans la définition et la manipulation des concepts.

par Badiou est de poser la question du sens dans lequel intervient le modèle. Il s'agit en effet de se demander si le modèle va du réel à l'abstrait ou si, au contraire, il va de l'abstrait au concret. Pour Badiou (2007, p. 53), la réponse penche clairement du côté de l'abstraction. Pour lui, « le modèle n'est pas une transformation pratique du réel […] il appartient au registre de l'invention pure, il est doté d'une irréalité formelle. » On peut résumer la proposition de Badiou par le schéma suivant (figure 1) :

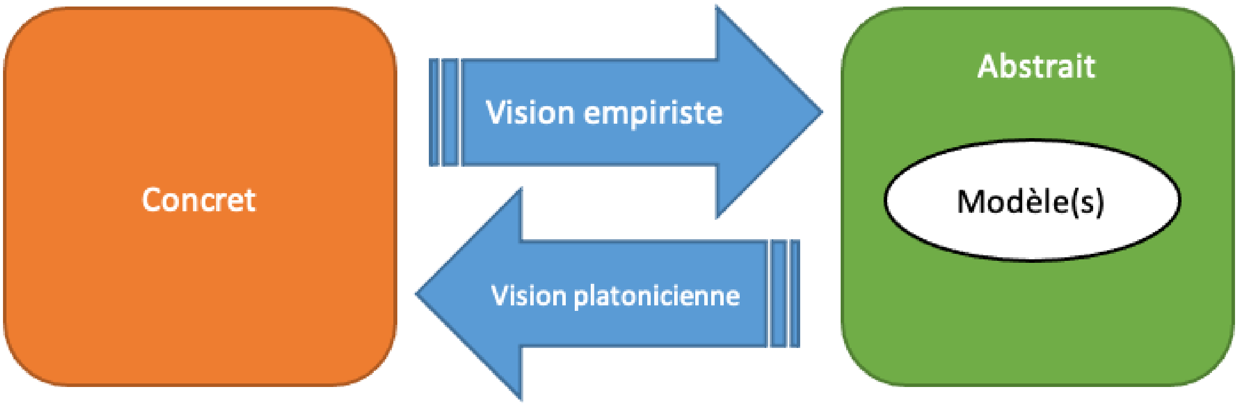



*Figure 1. La situation du modèle pour Badiou.*

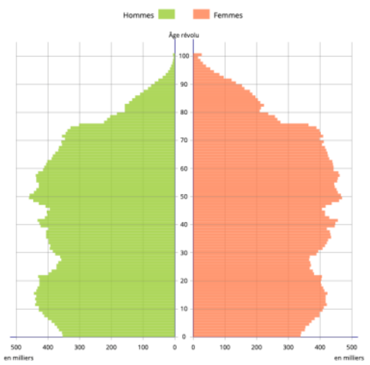
D'un côté, la vision empiriste extrait le modèle de la réalité sensible et de l'autre côté, la vision platonicienne plaque le modèle sur le monde concret. On remarque dès lors que, quel que soit son point d'ancrage, le modèle comporte une part d'abstrait. Cette part est éventuellement variable selon la définition qu'on choisit, mais le modèle se situe, par nature, du côté de l'abstraction. Il ne s'agit pas ici de rejeter l'approche empiriste, mais simplement de pointer le rôle structurant de l'abstraction. Badiou distingue alors deux groupes avec les modèles abstraits d'une part et les montages matériels d'autre part. Comme il l'explique ensuite, le premier groupe renvoie pleinement aux mathématiques.

> *Le premier groupe comporte ce qu'on peut appeler des objets scripturaux, c'est-à-dire les modèles proprement théoriques, ou mathématiques. Il s'agit en fait d'un faisceau d'hypothèses, supposé complet relativement au domaine étudié, et dont la cohérence, puis le développement déductif, sont garantis par un codage généralement mathématique. (Badiou, 2007, p. 53)*

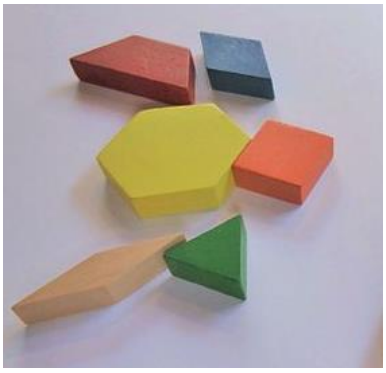
C'est évidemment le modèle purement abstrait auquel s'intéresse le plus le philosophe. Utilisant pleinement des réflexions et des résultats issus de la logique mathématique, Badiou voit dans ces « objets scripturaux » l'essence même du modèle. Ce sera finalement le cœur de l'ouvrage que de montrer comment la logique mathématique fonde les modèles et les mathématiques elles-mêmes. Ces développements sont avant tout techniques et ils ne sont pas nécessaires pour saisir l'idée générale qui vient d'être rapidement présentée. Concernant le deuxième groupe, les montages matériels, Badiou détaille quelques exemples qu'il peut être intéressant d'évoquer.

> *Dans le deuxième groupe, on trouve des montages matériels, dont la destination est triple :*
> *1) Présenter dans l'espace, de façon synthétique, des processus non-spatiaux : graphes, diagrammes, etc. [...]*
> *2) Toujours dans le deuxième groupe, d'autres modèles tendent à réaliser des structures formelles, c'est-à-dire à transférer la matérialité scripturale dans une autre région d'inscription expérimentale. [...]*
> *3) Enfin, une dernière classe de modèles visent à imiter des comportements : c'est le vaste domaine des automates. (Badiou, 2007, p. 55)*

Il n'est pas très difficile d'illustrer les trois sous-catégories qui sont proposées (voir figure 2). Une pyramide des âges (1), par exemple, est une forme de représentation graphique, un modèle, du processus de vieillissement d'une population qui n'est pas intrinsèquement spatial. Pour ce qui concerne le transfert d'un modèle dans une matérialité, les formes en bois (2) utilisées par les enfants en sont un exemple. Enfin, le robot de la photographie (3) n'est rien de moins qu'une version moderne et ultra-technologique des automates qui reproduisent un mouvement ou un comportement.




(1) Pyramide des âges, France 2022 (source : INSEE)



(2) Formes en bois (source : wikimedia)

(3) Robot Spot 2 de Boston Dynamics (source : wikimedia)

*Figure 2. Exemples illustrant les types de montages matériels selon Badiou.*

Il convient de souligner que, soit sous sa forme idéale, soit sous sa forme technique, lorsqu'on regarde le progrès des sciences, le modèle n'est qu'un artifice qui n'est pas destiné à perdurer indéfiniment. Le modèle est avant tout un outil de pensée auquel il ne faut pas hésiter à renoncer pour mieux accéder à une connaissance. Comme l'écrit Badiou (2007, p. 58), « tout arrêt sur le modèle fait obstacle épistémologique », ce qui constitue un point de vue intéressant pour l'enseignement des sciences expérimentales, mais aussi pour celui des mathématiques.

### 3 Premières conclusions

Pour Badiou, le modèle est donc fortement lié aux mathématiques et ce quelle que soit la (sous)-définition choisie. Parmi les principaux points clés, on notera que, dans le modèle, on ne met ou on ne garde que les éléments qui intéressent la réflexion sur un objet de connaissance donné. La question est alors de savoir comment s'articulent les modèles et les connaissances. À l'interface du concret et de l'abstrait, la place du modèle comme objet de connaissances ou comme moteur de connaissances reste à explorer. Pour cela, il convient de creuser un peu la question de la nature des objets mathématiques ; ce que je propose de faire en parcourant les travaux de Charles Parsons.

## III - LES OBJETS MATHEMATIQUES SELON CHARLES PARSONS

Charles Parsons[6] est un philosophe américain. Il fait ses études à Harvard et après des premiers postes dans les universités d'Harvard, de Cornell puis de Columbia, il revient à Harvard où il finit sa carrière comme professeur. Ses travaux portent presque exclusivement sur la philosophie des mathématiques avec des analyses de la pensée de plusieurs grands auteurs comme Kant ou Husserl mais aussi une réflexion sur l'idéalisme et la nature des objets mathématiques, en particulier les ensembles et les nombres. Dans ce qui va suivre, je vais m'efforcer de rendre compte des propositions faites par Parsons dans l'ouvrage *Mathematical thought and its object* (2008). Ce livre est une compilation d'articles, dont certains ont été publiés dès les années 1980, qui donne à lire des réflexions sur plusieurs thèmes fondamentaux de la philosophie des mathématiques. L'ouvrage propose ainsi neuf chapitres qui questionnent, comme

[6] Ne pas confondre le philosophe Charles Dacre Parsons (1933- ) et Charles Algernon Parsons (1854-1931), un ingénieur britannique.

l'indique le titre, à la fois les objets et les raisonnements mathématiques. Pour une idée plus précise des thématiques abordées, on peut se rapporter simplement au plan de l'ouvrage :

1. Objects and logic
2. Structuralism and nominalism
3. Modality and structuralism
4. A problem about sets
5. Intuition
6. Numbers as objects
7. Intuitive arithmetic and its limits
8. Mathematical induction
9. Reason

La réflexion sur les figures géométriques et leur représentation à laquelle on s'intéresse ne fait pas l'objet d'un chapitre dédié. Elle court au travers de plusieurs articles et je vais tenter d'en synthétiser les idées fortes.

## 1 Définition des mathématiques

Dans les premières pages de l'ouvrage, Parsons commence par définir son objet d'étude. Pour lui, les mathématiques parlent d'objets[7] et traitent d'objets de caractère proprement mathématique, c'est-à-dire reconnus comme tels dans une certaine communauté (comme les nombres, les fonctions, les ensembles, les figures géométriques, etc.). De ce constat un peu trivial, Parsons précise que ces objets se distinguent par leur caractère abstrait dans le sens où, un objet est abstrait s'il n'est pas situé dans l'espace et le temps et s'il n'entretient pas de relations causales. Parsons ne cherche pas à produire une classification exhaustive entre abstrait et concret, il rappelle simplement que, si un objet est perçu par les sens, il entretient une relation causale avec notre organisme et donc il est concret. Réciproquement, la principale caractéristique des objets abstraits est qu'ils ne peuvent, justement, pas être perçus par les sens. La question que pose alors Parsons (2008, p. 2) est de savoir pourquoi une vision du monde devrait donner une place à des objets qui n'y sont pas (non spatio-temporels) et n'interagissent pas avec lui ? Le philosophe se demande ainsi si l'existence d'objets mathématiques ne serait pas une hypothèse superflue. Après quelques développement, Parsons s'appuie sur la logique pour rappeler que dès qu'on nomme une chose, cela devient un objet. C'est en ce sens, qui mériterait à lui seul tout un développement, que les mathématiques traitent d'objets. Mais l'existence de ces objets mathématiques étant posée, il reste à savoir comment précisément on y accède.

## 2 L'intuitabilité des objets mathématiques

Afin de prolonger sa réflexion sur les objets mathématiques, Parsons revient sur certaines propositions de Kant. Pour Kant, un concept est vide s'il ne correspond pas à une intuition car l'intuition est nécessaire pour établir la réalité objective d'un concept. Comme le rappelle Parsons, les objets mathématiques sur lesquels Kant est le plus explicite sont les figures géométriques, qu'il appelle des formes d'objets empiriques. Dans les raisonnements mathématiques, les figures sont construites intuitivement, Parsons dira donc qu'elles peuvent être intuitionnées, ce qui l'amène à une première définition de la notion d'intuitabilité.

[7] Affirmer que les mathématiques traitent d'objets est une posture philosophique précise, certains auteurs refusant cette première idée en faisant, par exemple, des mathématiques uniquement un langage sans objet universel extérieur dans une approche dite nominaliste. Parsons (2008) traite de ce courant dans son chapitre 2. On peut citer, par exemple, Willard Van Orman Quine (1908-2000), l'un des acteurs majeurs du nominalisme contemporain, dont Parsons (2014, pp. 199-219) propose une analyse. La version la plus extrême de ce courant se trouve sans doute chez Hartry Field (1946-) dans le mouvement dit fictionnaliste (Parsons, 2018, pp. 10-12) qui n'accorde aucune vérité aux affirmations mathématiques, faisaient de ces dernières uniquement des fictions utiles mais sans contenu propre.

> *Nous parlerons, de manière générale et un peu vague, de l'intuitabilité comme d'une condition générale des objets. L'emploi du terme intuition plutôt que, par exemple, perception, a pour but de préserver la généralité de la notion de Kant, qui, en particulier, ne vise pas à exclure l'abstrait. Kant entend par intuition une représentation immédiate d'un objet individuel.* (Parsons, 2008, p. 8, notre traduction[8])

Kant propose un lien entre le concept et la représentation au travers de la notion d'intuition. Cette notion de représentation intuitive tend à faire une première relation entre le monde abstrait (du modèle) et le monde concret (perçu par nos sens). Comme l'écrit Parsons, l'intuitabilité est plus générale que la notion de perception qui se limiterait à nos seuls sens. La notion d'intuitabilité induit une dimension dynamique, un processus, qui permet de penser l'objet pour ensuite produire une connaissance. Un objet est intuitable s'il peut être représenté dans l'intuition. Il ne s'agit pourtant pas ici d'exclure complètement le monde sensible. En effet, pour Parsons, la représentation d'objets abstraits par des objets concrets est un phénomène omniprésent et important pour la compréhension des objets abstraits. C'est en particulier à partir de cette idée qu'il développe un statut des objets mathématiques (au moins pour certains) entre concret et abstrait. Cette dernière proposition me parait tout à fait pertinente pour penser les mathématiques scolaires. Voyons ce que propose Parsons.

## 3 Les objets mathématiques quasi-concrets

L'expérience de pensée présentée en ouverture de cette contribution nous a permis de rappeler que l'une des questions philosophiques structurantes pour les mathématiques est celle de l'unicité des objets. Pour Parsons (2008, p. 11), il ne peut y avoir d'objets que si on peut appliquer de manière significative le prédicat d'identité. Pour lui, tout objet peut être représenté de différentes manières, selon différentes perspectives, mais cette affirmation n'a de sens que si c'est bien le même objet qui est représenté. Pour n'en prendre qu'un exemple simple, dans la figure 3 ci-dessous, doit-on voir des objets distincts ou une seule et même figure, en l'occurrence le carré ?

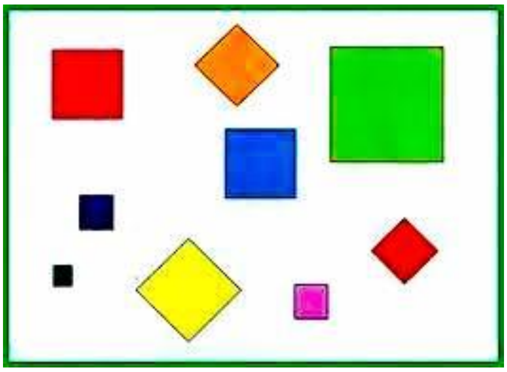


*Figure 3. Des carrés ou le carré ?*

Pour résoudre ce problème, Parsons va introduire une notion fondamentale qui va permettre de penser la relation de certains objets mathématiques, par nature abstraits, avec le concret. Voici ce qu'écrit Parsons :

> *Nous terminerons ce chapitre en faisant, provisoirement, une distinction entre les objets abstraits qui est très importante pour la philosophie des mathématiques. Certains objets abstraits se distinguent par le fait qu'ils ont une relation intrinsèque avec le concret ; ils sont déterminés par leurs incarnations concrètes. Je*

[8] We will speak, generally and somewhat vaguely, of intuitability as a general condition on objects. The use of the term "intuition" rather than, say, "perception" is meant to preserve the generality of Kant's notion, which, in particular, is not meant to exclude the abstract. Kant means by "intuition" an immediate representation of an individual object.

*qualifierai ces objets de quasi-concrets. (2008, pp. 33-34, notre traduction[9])*

Au lieu d'expurger complétement le concret des mathématiques, Parsons propose au contraire de l'accepter comme structurant. Il définit ainsi ce qu'il nomme des objets quasi-concrets. Comme il l'écrit, ces objets entretiennent une relation particulière avec le concret. Non seulement, ils peuvent avoir des représentations concrètes, mais ce sont explicitement ces représentations, ou incarnations, qui permettent de définir l'objet. De manière plus concise, on peut poser la définition suivante :

*Un objet est quasi-concret s'il a une relation intrinsèque avec le concret, c'est-à-dire qu'il est déterminé par ses incarnations concrètes.*

Comme l'explique Parsons, l'intérêt de cette définition est de permettre de distinguer différents objets d'un même type au travers de représentations différentes. Dans le cas de notre expérience de pensée sur le carré, on peut donc définir le carré non comme un objet purement abstrait, mais comme un objet quasi-concret (figure 4). Dans cette nouvelle définition, le concept de carré contient à la fois une dimension abstraite (qui le rend mathématique) et une dimension concrète (qui permet de le penser et de l'intuiter).

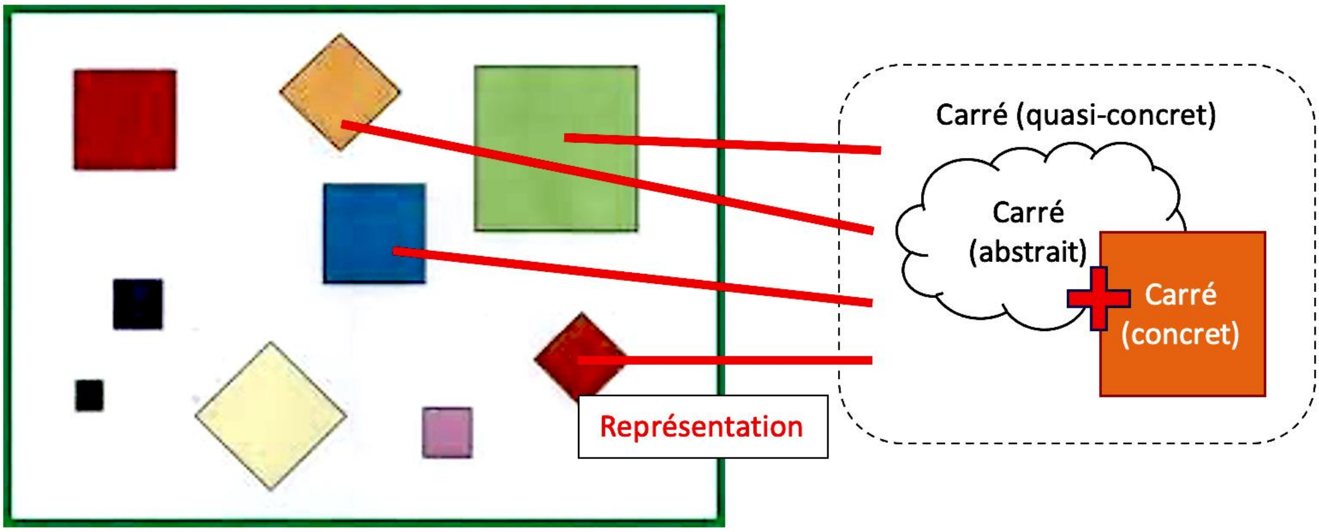



*Figure 4. Le carré comme objet mathématique quasi-concret.*

On comprend alors que les différentes représentations (figure 4) du carré non seulement ne génèrent pas une multiplicité d'objets, mais au contraire, permettent de définir le concept même de carré. Il convient de souligner que cette construction est spécifique à certains objets mathématiques, dont les figures géométriques qui en constituent chez Parsons une sorte d'archétype. Comme l'auteur le précise ensuite, il y a bien des objets mathématiques purs[10], c'est-à-dire purement abstraits, mais ils ne sont pas seuls et les objets quasi-concrets ont un rôle clé dans la construction de l'édifice mathématique, au sens ici du structuralisme.

*Les objets mathématiques purs sont à opposer non seulement aux objets concrets mais aussi aux objets quasi-concrets au sens du §7, tels que les figures géométriques, [...] Parce qu'ils ont la prétention d'être les objets mathématiques les plus élémentaires, et aussi pour d'autres raisons, les objets quasi-concrets sont importants*

[9] We will close this chapter by making, provisionally, a distinction among abstract objects which is quite important for the philosophy of mathematics. Some abstract objects are distinguished by the fact that they have an intrinsic relation to the concrete; they are determined by their concrete embodiments. I shall call such objects quasi-concrete.

[10] Par exemple, les groupes, une suite de fonctions, tout ce qui se passe dimension supérieure à 3, etc. ne seront pas, chez Parsons, quasi-concrets. Les mathématiques « professionnelles » sont surtout peuplées d'objets abstraits (purs).

*dans les fondements des mathématiques. (Parsons, 2008, p. 43, notre traduction[11])*

Le rôle que fait jouer Parsons aux objets quasi-concrets est fortement lié à l'idée d'intuition en mathématiques. Pour lui, les objets quasi-concrets ont l'avantage d'être plus simples et plus proches de la perception. Le philosophe pousse même la critique en affirmant que « la discussion de l'intuition mathématique a souffert de viser trop haut (par exemple, la théorie des ensembles) et de ne pas regarder de près les cas simples » (Parsons, 2008, p. 155, notre traduction[12]).

## IV - PREMIERES REFLEXIONS SUR QUELQUES ENJEUX SCOLAIRES

À la lumière de ces réflexions philosophiques, que peut-on dire des mathématiques scolaires et des apprentissages ? Une première remarque est qu'à l'école, les figures géométriques, en particulier usuelles, sont quasi-concrètes car elles ne peuvent se passer d'une représentation accessible à nos sens (vue ou toucher par exemple). Ainsi, dans les manuels scolaires, les figures géométriques sont (presque) toujours présentées selon cette définition d'objets quasi-concrets, c'est-à-dire avec une représentation qui devient partie intégrante de la définition, voire de l'usage de la figure géométrique. Dans les exemples ci-dessous issus de manuels de CP (figures 5 et 6), l'activité elle-même consiste en la reconnaissance d'instanciations du carré ; le carré étant, par ailleurs, conçu comme la figure en question. En l'absence de formalisme ou de propriétés, le carré est ce qu'on reconnait (qu'on « intuite ») comme étant un carré à travers plusieurs de ses représentations.

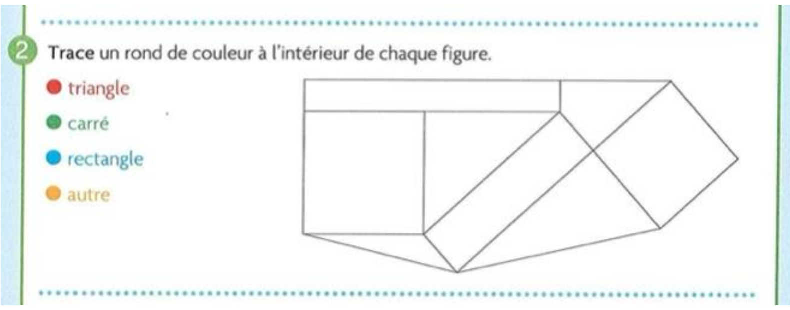



*Figure 5. Charnay (dir.), Cap Maths CP, Hatier, 2019, p. 21.*


*Figure 6. Gros (coord.), Outils pour les maths CP, Magnard, 2022, p. 120.*

Il y a un côté fondamental dans les objets quasi-concrets qui correspond assez bien à l'organisation de nos apprentissages. On pourrait définir le carré en partant de ses propriétés, en commençant par apprendre d'abord ce qu'est un point, un segment, une distance, un angle, et poser le carré comme la figure ayant les propriétés idoines. Mais ce n'est pas ce qu'on fait. On commence au cycle 1 par « montrer » des carrés, ou plus exactement des représentations de carrés et donc du carré. Les pratiques scolaires des mathématiques sont finalement très fréquemment de cette forme, faisant de l'école une sorte de temple des objets quasi-concrets. Ces objets quasi-concrets, qui peuvent aussi être vus au travers du prisme du matériel didactisé

[11] Pure mathematical objects are to be contrasted not only with concrete but also with quasi-concrete objects in the sense of §7, such as geometric figures […] Because they have a claim to be the most elementary mathematical objects, and also for other reasons, quasi-concrete objects are important in the foundations of mathematics. Their role leads, as we will see in §18, to the important qualification on the structuralist view alluded to above.

[12] For working out a positive conception of intuition, the case of quasi-concrete objects (§7) has the advantage of being simpler and closer to perception. Discussion of mathematical intuition has suffered from aiming too high (e.g., at set theory) and not looking closely at simple cases.

(Cf. Badiou et les modèles matériels) aide l'intuition car cette dernière peut alors s'appuyer de manière plus naturelle sur la perception, ce qui m'amène à ma deuxième remarque sur les enjeux scolaires.

La deuxième chose qu'il est intéressant de noter est que les propos de Parsons nous rappellent incontestablement l'importance des sens et de la perception dans l'activité mathématique. C'est cette perception qui est le support, voire le moteur, de notre intuition d'un résultat mais aussi des objets eux-mêmes. Dans le cas des figures géométriques, si on leur accorde bien le statut d'objets quasi-concrets, il convient de proposer une part suffisamment importante à leur manipulation par les sens car le concret est alors constitutif de la connaissance mathématique elle-même.

Pour finir, si on effectue un petit retour sur le titre de cette communication. Est-ce que représenter une figure, c'est la faire exister ? Dans la perspective philosophique proposée par Parsons, oui, incontestablement.

# V - CONCLUSION : REFLEXION SUR LES DIAGRAMMES

## 1 L'ambiguïté intrinsèque de toute représentation

Pour terminer notre voyage philosophique, je vais revenir une dernière fois sur l'idée de représentation des objets mathématiques. Pour cela, je m'appuierai sur la thèse récente de David Waszek (2018) intitulée tout simplement *Les représentations en mathématiques*. Les travaux de Waszek portent sur les enjeux de la représentation de certains concepts mathématiques, en particulier ceux de la logique mathématique. Je ne vais pas tenter de résumer l'ensemble de cette thèse car la plupart des notions qui y sont évoquées sont très éloignées des mathématiques scolaires. Pour la thématique qui nous concerne, je me contenterai de reprendre quelques idées philosophiques rappelées et analysées par Waszek dans la quatrième et dernière partie de sa thèse dont le titre est « Faut-il parler de représentations ? ». En guise d'entrée en manière, voici ce qu'il propose :

> *Les parties précédentes [de la thèse] sont fondées sur un double postulat. Tout d'abord, les nombreux éléments non discursifs rencontrés en mathématiques (formules, figures, etc.) doivent être vus comme des représentations qui, en un sens à clarifier, portent de l'information. D'autre part, c'est à partir de leur contenu informationnel qu'il faut comprendre l'usage qu'on en fait. Cette dernière partie, un peu hétéroclite, examine différents arguments contre cette idée.* (Waszek, 2018, p. 275)

Pour Waszek, la lecture des mathématiciens et philosophes montre que les mathématiques font un grand usage de représentations. Ces représentations ne sont pas là uniquement à titre d'illustration d'un concept ou d'un raisonnement, mais elles sont porteuses de tout ou partie dudit concept ou raisonnement. Les représentations ont un rôle fondamental car elles portent de l'information ; elles disent quelque chose sur le problème mathématique étudié. Pour illustrer son propos, Waszek (2018, p. 278) reprend une série de digrammes logiques étudiés par Euler, dont voici un exemple en figure 7.

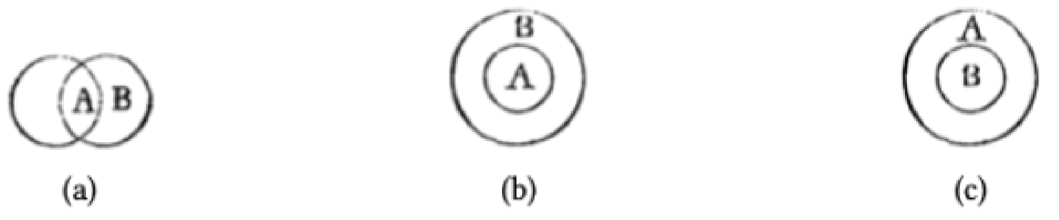


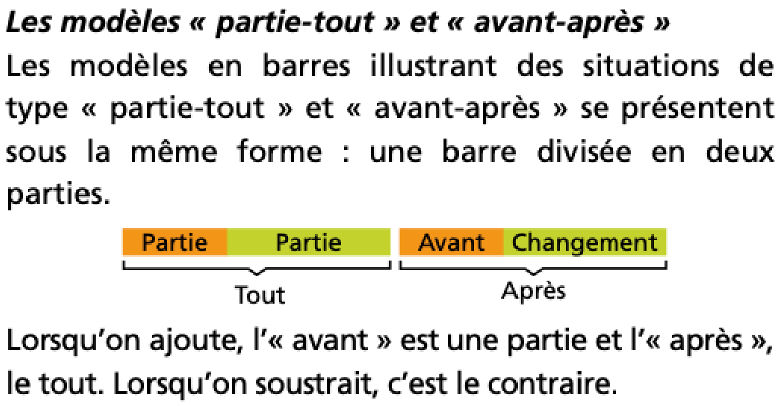

FIGURE 11.1 – Trois diagrammes compatibles avec « Quelque A est B »

*Figure 7. Exemple d'une étude de diagrammes chez Euler.*

Dans cet exemple, Euler montre qu'une simple relation logique telle que « certains éléments d'un ensemble A sont aussi dans l'ensemble B » peut faire l'objet de plusieurs diagrammes différents. Sans même entrer dans un raisonnement logique élaboré, notre simple intuition visuelle nous suggère que ce que dit le diagramme (a) n'est pas tout à fait la même chose que ce qui est dit dans le diagramme (b), ni dans le diagramme (c). Dès lors, Waszek (2018, p. 277) rappelle que pour tout diagramme, il y a nécessairement une interprétation qui dépend des prémisses auquel il est associé. Dans le cas de la géométrie, reprenant une idée chère à Netz (1999), Waszek précise que ce qu'on utilise « ce n'est pas la figure telle qu'elle est dessinée mais la figure perçue d'une certaine manière, soumise aux hypothèses que l'on a faites sur elle. » En d'autres termes, comme pour les diagrammes, la figure géométrique doit être accompagnée d'un texte (écrit ou oral) qui lui donne son sens. Pour les mathématiques scolaires, nous avons déjà rencontré un exemple qui illustre parfaitement cette idée dans la figure 6 précédente. En effet, dans ce petit exercice extrait d'un manuel de CP, l'énoncé demande de colorier des « cercles », des « triangles », des « carrés » et des « rectangles » ce qui permet d'informer le lecteur sur le fait que cette figure comprend bien des cercles, des triangles, etc. qu'il suffit d'identifier. Le texte vient ici *sécuriser* la figure. Cette situation est très courante dans un contexte scolaire aux cycles 2 et 3, mais peut-être plus encore au cycle 4.

## 2 Des objets abstraits à l'école ?

Dans les parties précédentes, nous avons vu que les figures géométriques, mais aussi bon nombre des notions mathématiques scolaires, peuvent être pensées comme des objets quasi-concrets dont les représentations sont consubstantielles à leur bonne compréhension. Dans cette perspective nourrie des travaux de Parsons, on peut néanmoins se demander s'il existe des objets abstraits purs à l'école. Parsons ne s'intéresse pas aux mathématiques scolaires donc ce qui suit est juste une réflexion personnelle inspirée par l'ensemble des travaux qui viennent d'être évoqués. En parcourant les programmes scolaires, on peut se dire que de bonnes candidates pour être considérées comme objets abstraits purs pourraient être les opérations arithmétiques. En effet, mathématiquement parlant, une opération est une loi de composition interne (pour un groupe additif par exemple) vérifiant certaines propriétés, c'est donc un objet abstrait (pur) par excellence. Mais est-ce vraiment cela à l'école ? Lorsqu'on lit les manuels, mais aussi les programmes et leurs documents d'accompagnement, il est intéressant de remarquer une quête de représentations concrètes pour ces notions. Que ce soit au travers des typologies de Vergnaud, des diagrammes de Venn ou des diagrammes en barres (voir figure 8), cette recherche d'une visualisation pour chacune des opérations tend finalement à les rendre, elles aussi, quasi-concrètes.


***Les modèles « partie-tout » et « avant-après »***

Les modèles en barres illustrant des situations de type « partie-tout » et « avant-après » se présentent sous la même forme : une barre divisée en deux parties.



Lorsqu'on ajoute, l'« avant » est une partie et l'« après », le tout. Lorsqu'on soustrait, c'est le contraire.

*Figure 8. Un exemple de diagramme pour représenter une opération. Neagoy, M., (dir.), Méthode de Singapour CE1 - Guide pédagogique, Librairie des écoles, 2017, p. 183.*

Au travers de ces pratiques scolaires réelles ou prescrites, il me semble qu'on arrive à une forme de clôture épistémologique dans le système de pensée des objets mathématiques scolaires en y plaçant uniquement des objets quasi-concrets. Dès lors, aucune représentation ne pouvant se satisfaire à elle-même sans l'accompagnement des prémisses qui lui donnent son sens mathématique, l'école aurait alors pour mission de fournir ce regard particulier sur ces objets quasi-concrets afin de les rendre intuitifs (au sens de Kant) pour les élèves. Pour clore notre périple philosophique, il est important de rappeler que tout ceci n'entache en rien la rigueur de l'édifice mathématique. Bien plus, comme l'écrit Parsons à qui je laisserai le mot de la fin :

> *Les domaines plus concrets, souvent d'objets quasi-concrets, jouent encore un rôle inéliminable dans l'explication et la motivation des concepts et des théories mathématiques. (Parsons, 2008, p. 151, notre traduction[13])*

[13] The more concrete domains, often of quasi-concrete objects, still play an ineliminable role in the explanation and motivation of mathematical concepts and theories.

# VI - BIBLIOGRAPHIE


Audard, C. (2015). John Stuart Mill (1806-1873). *Revue internationale de philosophie*, 272, 153-156.

Badiou, A. (2007). *Le concept de modèle*. Fayard.

Barbin, E., & Caveing, M. (1996). *Les philosophes et les mathématiques*. Ellipse.

Cadiou, R. (1949). La philosophie de John Stuart Mill. *Revue Philosophique de La France et de l'Étranger*, 139, 423–440.

Charnay, R. (dir.) (2019). *Cap Maths CP*. Hatier.

Cohen, G. (dir.) (2019). *Mathématiques & philosophie. En quête de vérités.* (2e ed). Bibliothèque Tangente, Hors-Série, 38. Edition Pole.

Gauthier, Y. (1972). Le Concept de modèle. Par Alain Badiou. Cours de philosophie pour scientifiques, fascicule iv. François Maspéro, Paris, 1970. 94 pages. *Dialogue*, 11(3), 460-464.

Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Gros, P. (coord.) (2022). *Outils pour les maths CP*. Magnard.

Lévy, C. (1969). Badiou A., Le concept de modèle. Introduction à une épistémologie matérialiste des mathématiques. *Revue française de sociologie*, 10(3), 393.

Neagoy, M. (dir.) (2017). *Méthode de Singapour CE1 - Guide pédagogique*. Librairie des écoles.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge University Press.

Nicolle, J.-M. (2004). Ce que les philosophes ont appris des mathématiques ou comment s'y prendre ? Dossier en trois parties. *Bulletin de l'APMEP*, 452, 453 et 456.

Parsons, C. (2008). *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press.

Parsons, C. (2014). *Philosophy of mathematics in the twentieth century. Selected essays.* Harvard University Press.

Parzysz, B. (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP*, 364.

Varenne, F. (2008). Alain Badiou : un philosophe face au concept de modèle. *Natures Sciences Sociétés*, 16, 252-257.

Waszek, D. (2018). *Les représentations en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.

# CONTRAINTES DES SYSTÈMES DIDACTIQUES DANS UNE FORMATION INSTITUTIONNELLE : EXEMPLES DE LA REPRÉSENTATION ET DE LA MODÉLISATION

**Richard CABASSUT**
Maître de Conférences, Université de Strasbourg
LISEC UR2310
richard.cabassut@gmail.com

**Résumé**
Quelle prise en compte des conditions des systèmes didactiques pour répondre à une commande institutionnelle ? Nous allons tenter de répondre à cette question à partir de l'exemple d'une formation continue en mathématiques à destination de formateurs de professeurs des écoles. Nous nous centrons essentiellement sur la représentation et la modélisation pour la résolution de problèmes arithmétiques, bien que la formation ait une étendue plus large. Nous proposons une analyse écologique qui explique les justifications de cette formation, ses conditions et leurs prises en compte dans le déroulement de la formation.

Nous préciserons d'abord les termes de cette réflexion concernant les formations sur laquelle elle prend appui. Nous décrirons les conditions extérieures au système scolaire français. Nous préciserons ensuite les croyances[1] (*beliefs*) des professeurs et des formateurs. Nous exposerons enfin les conditions internes au système scolaire français. Nous développerons la prise en compte des éléments précédents dans le déroulement de la formation et nous conclurons sur les enjeux et perspectives des réponses aux commandes institutionnelles.

## I - ANALYSE ÉCOLOGIQUE D'UNE FORMATION

Le comité scientifique du colloque cadre notre exposé : l'auteur « évoquera à travers son expérience, la prise en compte des contraintes des systèmes didactiques pour répondre à une commande institutionnelle à partir de l'exemple de la représentation et de la modélisation en résolution de problèmes arithmétiques ». Précisons d'abord les termes de ce cadrage.

L'expérience de l'auteur en matière de formation continue à la modélisation s'inscrit d'abord dans sa participation au projet européen LEMA de 2005 à 2009. Son but était de construire une formation continue, sur l'apprentissage et l'enseignement de et par la modélisation et les applications, à destination des professeurs du primaire et du secondaire (Cabassut 2009). Une expérience plus récente, organisée par la DGESCO[2], est la participation de l'auteur de 2019 à 2022 au groupe national de formateurs experts concernant la résolution de problèmes à l'école primaire.

Un système didactique est constitué des interrelations entre des apprenants (des élèves dans une classe, respectivement des professeurs des écoles en formation, des formateurs RMC[3] en formation, …), un ou des enseignants (un professeur des écoles, respectivement un formateur RMC, un formateur de formateurs expert, …), une certaine question relative à des savoirs et à laquelle des réponses sont

[1] Nous conservons le terme *croyance* que certains pourront remplacer par *représentation*, mais dans ce texte le terme *représentation* désigne la compétence étudiée avec la compétence *modélisation*.

[2] Au ministère de l'éducation nationale française, la direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) élabore la politique éducative et pédagogique et assure la mise en œuvre des programmes d'enseignement des écoles, des collèges, des lycées et des lycées professionnels.

[3] RMC : référents mathématiques de circonscription. Personnes référentes pour l'enseignement des mathématiques dans une zone géographique, la circonscription, regroupant plusieurs écoles primaires voisines.

attendues dans le système (« Comment modéliser un problème arithmétique ? », respectivement « Comment enseigner la modélisation de problèmes arithmétiques ? », « Comment former à la modélisation de problèmes arithmétiques ? »,...).

Chevallard (2002, p.52) distingue les niveaux suivants de conditions des systèmes didactiques, que nous développerons dans la suite de l'exposé : la société, l'école, la pédagogie, la discipline, le domaine, le secteur, le thème, le sujet. Parmi ces conditions, les contraintes sont celles que l'enseignant ne peut pas modifier.

L'analyse écologique d'un système didactique consiste à s'interroger sur l'origine et la raison d'être de la question posée dans le système didactique analysé et sur les conditions qui pèsent sur les réponses que le système produit :

> *D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ?[…] s'interroger non seulement sur ce qui est [...] mais encore se demander pourquoi ce qui n'est pas, n'est pas. (Chevallard, 1994, p.142) .*

Par exemple dans notre exposé nous essaierons de répondre à certaines questions : dans le programme français de l'école primaire, comment les compétences « représenter » et « modéliser » sont-elles arrivées ? Comment les représentations en barre sont-elles arrivées ? Et pourquoi ?

Commençons donc par étudier quelques conditions du niveau de la société.

## II - CONDITIONS EXTÉRIEURES AU SYSTÈME SCOLAIRE FRANÇAIS

Le Ministère français de l'éducation (MEN 2006) précise explicitement deux références concernant le socle commun de connaissances et de compétences [4] :

> *La définition du socle commun prend également appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie ». Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie.*

### 1 Recommandations du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne

D'une part, le Parlement européen définit des recommandations pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie, ce qui concerne les programmes scolaires français et les programmes de formations initiales et continues des enseignants. La compétence mathématique y est définie en ces termes[5] :

> *La compétence mathématique est l'aptitude à développer et appliquer **un raisonnement mathématique en vue de résoudre divers problèmes de la vie quotidienne.** En s'appuyant sur une maîtrise solide du calcul, l'accent est mis sur le raisonnement et l'activité ainsi que sur le savoir. La compétence mathématique implique, à des degrés différents, la capacité et la volonté d'utiliser des modes mathématiques de pensée (réflexion logique et dans l'espace) et de **représentation** (formules, modèles, constructions, graphiques/diagrammes) (Parlement 2006, p.15).*

Nous voyons une référence à la modélisation dans le « raisonnement mathématique en vue de résoudre divers problèmes de la vie quotidienne », même si le terme « modélisation » n'est pas explicitement cité, et une référence explicite à la représentation. Ces recommandations sont confirmées en 2018 avec deux éléments nouveaux introduits avec force.

D'une part, il est pointé l'importance de l'évaluation de l'acquisition des compétences avec notamment une référence explicite à PISA :

---

[4] C'est la première fois que l'auteur a observé une influence de PISA et des Parlement et Conseil européens déclarée dans un texte officiel sur l'éducation nationale. Il est intéressé par de tels témoignages d'observations antérieures à 2006.

[5] Les mises en gras ne sont pas d'origine dans les citations de cet article.

> *Dans le même temps, des études internationales telles que les enquêtes menées par l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) dans le cadre de son Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) ou de son Programme pour l'évaluation internationale des compétences des adultes (PIAAC) font état d'un taux constamment persistant d'adolescents et d'adultes ayant des compétences de base insuffisantes. En 2015, un élève sur cinq éprouvait de sérieuses difficultés à développer des compétences suffisantes en lecture, en mathématiques ou en sciences (Conseil 2018, p.2)*

Le Conseil recommande « un soutien et un développement plus poussé de l'évaluation et de la validation des compétences clés acquises dans différents contextes conformément aux règles et procédures des États membres » (Ibid. p.5).
D'autre part, le conseil européen recommande d'exposer :

> *des bonnes pratiques qui pourraient répondre aux besoins du personnel éducatif, lequel comprend les enseignants, les formateurs des enseignants, les responsables d'établissements d'enseignement et de formation, le personnel chargé de la formation de collègues, les chercheurs et les professeurs d'université (Ibid. p.4).*

Nous évoquerons plus loin les pratiques du Danemark et de Singapour. Des questions se posent que nous soumettons à la réflexion du lecteur : Qui décide des bonnes pratiques ? Y a-t-il des bonnes pratiques ? « Existe-t-il vraiment des pédagogies efficaces ? » (Bloch 2018, p.96). Rappelons que la « bonne » pratique des mathématiques modernes dans l'enseignement a été dénoncée dès le début, notamment par Freudhental (Adda 1993, pp.16-17) et abandonnée quelques années plus tard.

Nous avons donc vu la référence à l'OCDE et à PISA, par le Parlement et du Conseil européen, et par le Socle commun français. Nous allons donc étudier cette référence, d'autant que les compétences de modélisation et de représentations y sont décrites avec une grande précision.

## 2 Préconisations de PISA

Rappelons que l'OCDE[6] a créé en 1997 un programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA). En 1999, une équipe d'experts a élaboré un cadre conceptuel (OCDE 1999) pour mesurer les connaissances et les compétences des élèves. En mathématiques, l'équipe des huit experts, dont aucun français, est présidée par Jan de Lange (De Lange & al. 1993) de l'université d'Utrecht, au Pays-Bas. Cette université est à l'origine du courant « mathématiques et réalité » dans l'enseignement (RME, realistic mathematic education), lancé par le mathématicien Hans Freudenthal en réaction aux mathématiques modernes dans l'enseignement. Un autre de ces experts est le danois Mogens Niss, de l'université de Roskilde, à l'origine de l'introduction des compétences dans l'enseignement des mathématiques au Danemark (Niss, Højgaard 2011). Ces deux mathématiciens sont parmi les fondateurs de la communauté internationale des enseignants de la modélisation et des applications mathématiques (ICTMA[7]). De notre point de vue ceci explique l'importance de la modélisation et des compétences dans les parties mathématiques des études PISA, comme nous allons le voir.

Le cadre théorique de PISA indique que « les compétences mathématiques sont les compétences et savoir-faire généraux tels que la résolution de problèmes, l'utilisation du langage mathématique et les savoir-faire ayant trait à la modélisation mathématique » (OCDE 1999, p.50) et distingue modélisation et représentation :

> ***Capacité de modélisation** mathématique. Savoir structurer le domaine ou la situation qui doit être modélisé ; « mathématiser » (c'est-à-dire opérer une traduction de la « réalité » vers la structure mathématique) et « démathématiser » (c'est-à-dire interpréter des modèles mathématiques en termes de « réalité ») ; travailler avec un modèle mathématique ; savoir valider le modèle ; réfléchir, analyser et se montrer critique à l'égard des modèles et de leurs résultats ; savoir communiquer à propos du modèle et de ses résultats (y compris au sujet des limites de ces derniers) ; savoir maîtriser le suivi et le contrôle du processus de modélisation […] **Capacité de représentation.** Savoir décoder, interpréter et distinguer différentes formes de représentation d'objets et*

---

[6] OCDE : Organisation de Coopération et de Développement économiques.

[7] http://www.ictma.net/

*de situations mathématiques ainsi que les relations entre les diverses représentations ; savoir choisir entre différentes formes de représentations et passer de l'une à l'autre en fonction de la situation et du but recherché. (Ibidem, p.51)*

Il est intéressant de noter le cycle de mathématisation (qui est le terme retenu dans PISA pour la modélisation mathématique) proposé par PISA : Partir d'un problème du monde réel, le modéliser en problème mathématique, résoudre mathématiquement ce problème en produisant une solution mathématique, interpréter cette solution en solution du problème réel et valider ou non cette solution par retour au problème réel initial.

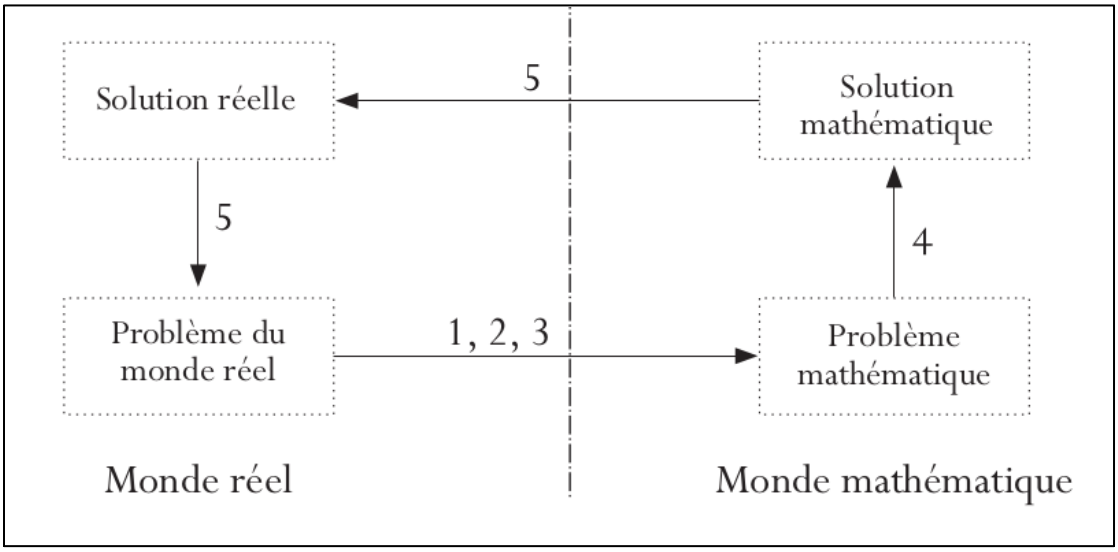



*Figure 1. Cycle de mathématisation de PISA (OCDE 2003, p.42).*

Après avoir évoqué l'influence de PISA et du parlement européen, examinons quelques ressources qui visent à exposer quelques pratiques évoquées précédemment.

## 3 Influence de pratiques de modélisation et de représentation

Le rapport Villani-Torossian (2018, p.18) s'interroge sur le lien entre pratiques d'enseignement et performance des élèves :

*L'analyse des évaluations internationales montre que certains pays ont de meilleurs résultats en mathématiques et que, pour certains d'entre eux, ces résultats peuvent être corrélés à des stratégies politiques, programmatiques et pédagogiques d'envergure. Trois exemples concrets : les stratégies systémiques de la Finlande dans les années 70, de Singapour dans les années 80, et de l'Allemagne dans les années 2000, après son choc Pisa. Peut-on dire que ces résultats sont liés à des outils ou à des méthodes ?*

Examinons deux exemples de pratiques, au Danemark et à Singapour.

### 3.1 Au Danemark

L'exemple danois sur les compétences dans l'enseignement des mathématiques est évoqué dans PISA dès 2000, sans doute en lien avec la présence de Niss dans l'équipe d'experts : « le programme OCDE/PISA a décidé d'utiliser une classification en huit catégories, s'appuyant, dans sa forme actuelle, sur les travaux de Niss (1999) et de ses collègues danois » (OCDE 2003, p.44) :

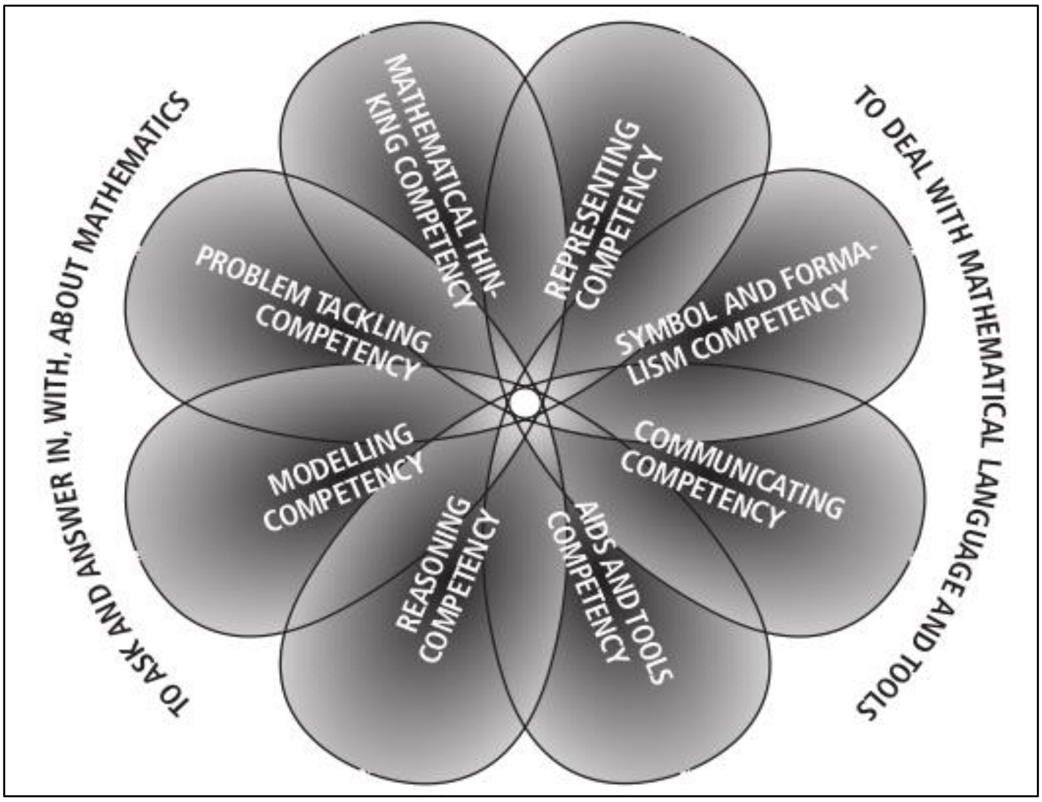



*Figure 2. Les huit compétences mathématiques au Danemark (Niss & Højgaard 2011, p.51).*

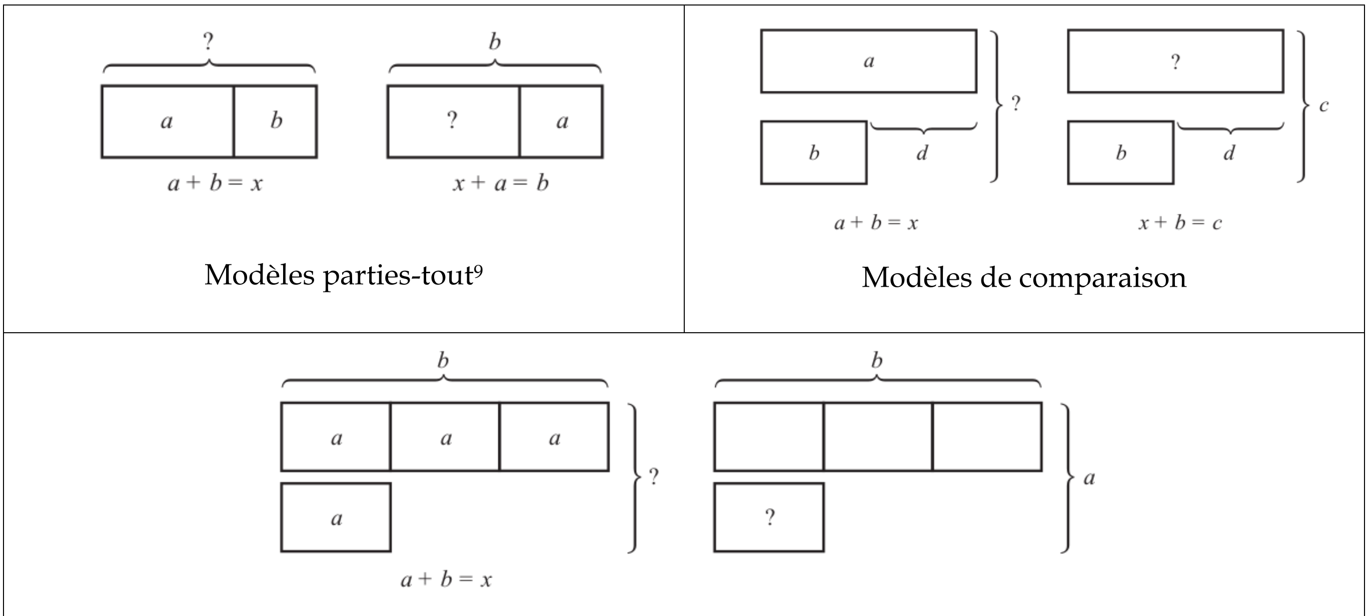
Niss (2003, pp. 115-124, traduction R.C.) précise ainsi les compétences modéliser et représenter :

> ***Modéliser*** *mathématiquement (c'est-à-dire analyser et construire des modèles) tel que :*
>
> - *analyser les fondements et les propriétés des modèles existants, y compris évaluer leur portée et leur validité,*
> - *décoder les modèles existants, c'est-à-dire traduire et interpréter les éléments du modèle en termes de « réalité » modélisée,*
> - *effectuer une modélisation active dans un contexte donné :*
>   - *structurer le domaine,*
>   - *mathématiser,*
>   - *travailler avec (dans) le modèle, y compris résoudre les problèmes qu'il suscite,*
>   - *valider le modèle, en interne et en externe,*
>   - *analyser et critiquer le modèle, en lui-même et vis-à-vis des possibles alternatives,*
>   - *communiquer sur le modèle et ses résultats,*
>   - *suivre et contrôler l'ensemble du processus de modélisation [...]*
>
> ***Représenter*** *des entités mathématiques (objets et situations) tel que*
>
> - *comprendre et utiliser (décoder, interpréter, distinguer) différentes sortes de représentations d'objets, de phénomènes et de situations mathématiques ;*
> - *comprendre et utiliser les relations entre différentes représentations d'une même entité, y compris connaître leurs forces et limites relatives ;*
> - *choisir et basculer entre les représentations[8].*

[8] Citation originale en anglais : *Modelling mathematically (i.e. analysing and building models) such as analysing foundations and properties of existing models, including assessing their range and validity ; decoding existing models, i.e. translating and interpreting model elements in terms of the 'reality' modelled ; performing active modelling in a given context - structuring the field, – mathematising, - working with(in) the model, including solving the problems it gives rise to, - validating the model,*

### 3.2 A Singapour

Un rapport (OCDE 2016, p.3, 14, 18) relève de « bonnes pratiques » de la cité-état de Singapour bien classée dans plusieurs évaluations de PISA. Plus récemment l'exemple de Singapour a été évoqué dans le rapport Villani-Torossian (2018, p. 3, 14, 18-21, 22, 44, 80, 86 87, 92). Or il est intéressant d'observer que Singapour a mis en place dans l'enseignement des mathématiques (Kaur 2019) une méthode qui relève à la fois de la représentation (utilisation de barres pour représenter des quantités) et de la modélisation (interprétation de ces représentations pour modéliser les problèmes arithmétiques). Cette méthode est d'ailleurs désignée par « The model method » (la méthode de modélisation). Citons en figure 3 les représentations de base de cette méthode pour modéliser les problèmes arithmétiques proposées par (Ng, Lee 2009).




Modèles parties-tout[9] | Modèles de comparaison

Modèles de multiplication et de division

*Figure 3. Modélisation par des représentations en barres (Ng, Lee 2009, p. 286, 287, 290).*

On pourra trouver une analyse plus détaillée de cette méthode dans (Cabassut 2020).

### 3.3 Des ressources sur les pratiques

Des moyens importants ont été accordés par des fonds européens ou nationaux pour encourager les pratiques développant la modélisation dans l'enseignement des mathématiques en produisant des ressources pour l'enseignement ou la formation d'enseignants, et en exposant des exemples de pratiques. Citons le rapport Rocard (2007) de la commission européenne qui encourage la démarche d'investigation, en prenant exemple sur le programme SINUS-Transfer, mis en place dès 2003 en Allemagne, pour développer les compétences mathématiques par dissémination des pratiques, en réaction aux mauvais résultats de l'Allemagne à PISA. C'est d'autant plus remarquable que dans ce pays l'enseignement primaire et secondaire est de la responsabilité des régions (Länder) par rapport à la France où l'organisation est nationale. Les programmes européens se sont accumulés (Cabassut 2013) : P0LLEN de 2006 à 2009, S-TEAM de 2009 à 2012, COMPASS de 2010 à 2013, PRIMAS de 2010 à 2013 …

*internally and externally, - analysing and criticising the model, in itself and vis-à-vis possible alternatives, - communicating about the model and its results, - monitoring and controlling the entire modelling process […]*
*Representing mathematical entities (objects and situations) such as understanding and utilising (decoding, interpreting, distinguishing between) different sorts of representations of mathematical objects, phenomena and situations; understanding and utilising the relations between different representations of the same entity, including knowing about their relative strengths and limitations; choosing and switching between representations.*

[9] La légende des trois types de modèles a été traduite de l'anglais.

Concentrons-nous sur le programme LEMA[10], qui s'est déroulé de 2005 à 2009, et dont la figure 4 présente la structuration d'une formation.

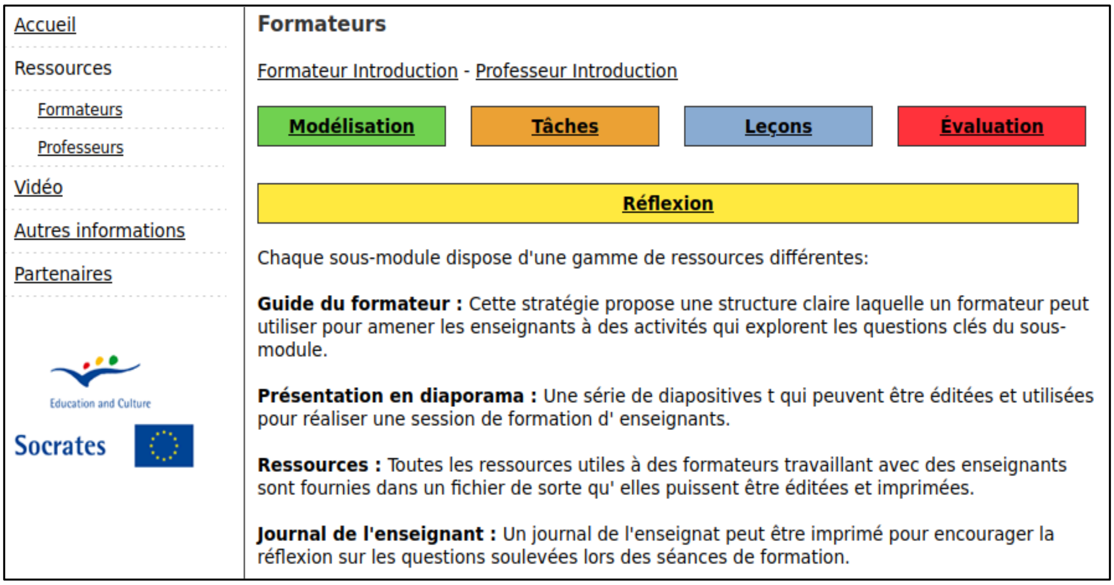



*Figure 4. Structure de la formation continue de LEMA.*

LEMA - Apprentissage et Enseignement de et par la Modélisation et les Applications - est un projet Comenius Européen qui a développé des ressources et proposé un cours de formation continue des enseignants de mathématiques des écoles primaires ou secondaires. La formation continue a été mise en œuvre en France (dans le Bas-Rhin), Allemagne, Espagne, Angleterre, Hongrie et Chypre. Un compte-rendu de la mise en œuvre en France à l'école primaire a été publié (Cabassut 2009) et plusieurs communications et ateliers en lien avec ce projet ont été produits à différents colloques de la COPIRELEM. Ce programme a généré plusieurs recherches : par exemple la *Tâche du géant* à l'école primaire a été analysée dans plusieurs travaux (Cabassut 2009 ; Wozniak 2012 ; Adjiage et Rauscher 2013). Ce projet est cité comme ressource dans le document du Ministère sur la compétence modéliser (MEN 2016). On voit donc sur l'exemple de LEMA comment ces ressources peuvent être disséminées pour encourager certaines pratiques. Mentionnons le cycle de modélisation de LEMA directement inspiré de celui de PISA, mais faisant apparaitre explicitement des compétences.

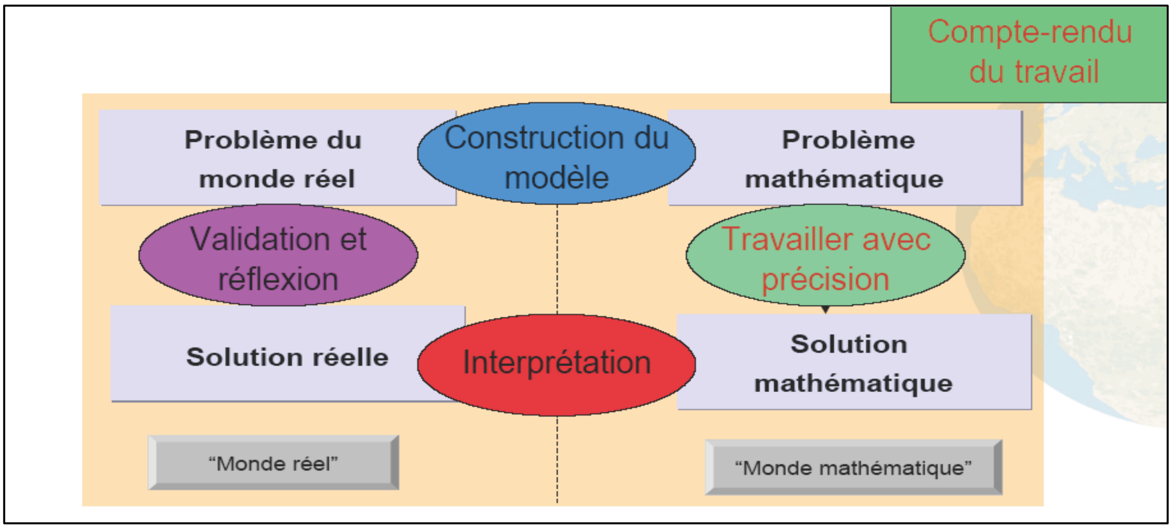



*Figure 5. Cycle de modélisation de LEMA.*

[10] Le site actuel au 25/08/22 où les ressources (vidéos, diaporama, documents…) de LEMA peuvent être téléchargées gratuitement est : http://espe-formation.unistra.fr/lema/french/homepage.html

Signalons enfin deux organisations internationales produisant des savoirs savants sur l'enseignement de la modélisation mathématique, influentes dans le domaine de la recherche sur l'enseignement mathématique, et toutes deux affiliées à l'union mathématique internationale :

- la commission internationale sur l'enseignement des mathématique (ICMI[11]) qui a publié un état de l'art sur l'enseignement des applications et de la modélisation en mathématiques (Blum & al. 2007). On retrouve parmi les éditeurs le danois Niss évoqué précédemment et l'allemand Blum qui a notamment été expert mathématique dans le projet PISA ;
- la communauté internationale des enseignants de la modélisation et des applications mathématiques (ICTMA[12]) qui organise régulièrement des conférences pour lesquelles Blum apparaît régulièrement parmi les éditeurs des actes.

Nous allons maintenant évoquer les croyances des enseignants et des formateurs concernant la modélisation.

## III - CROYANCES DES ENSEIGNANTS ET DES FORMATEURS

Concernant les croyances des enseignants nous adoptons la terminologie de Philipp (2007, p.259) :

> *Connaissances - croyances détenues avec certitude ou croyance justifiée vraie [...].*
> *Conception - une notion générale ou une structure mentale englobant les croyances, les significations, les concepts, les propositions, les règles, les images mentales et les préférences (traduction R.Cabassut)*[13].

Plusieurs recherches[14] ont étudié les croyances déclarées concernant la modélisation, et plus généralement la résolution de problèmes.

### 1 Croyances pour enseigner la modélisation

Dans une recherche auprès de 79 professeurs ayant suivi la formation à la modélisation du projet LEMA, Cabassut et Villette (2012, p.675) notaient chez ces enseignants une conception de l'enseignement des mathématiques assez théorique, peu orientée vers les applications dans la vie citoyenne et en société, qui n'est pas associée à un manque de confiance pour enseigner la modélisation, et une conception ouverte vers l'enseignement de la modélisation compatible avec un manque de confiance pour l'enseigner.

Cabassut et Ferrando (2015) dans une recherche auprès de 235 enseignants ou formateurs ont montré que plus de la moitié des répondants approuvaient les affirmations suivantes :

- il est difficile d'estimer la durée pour résoudre une tâche de modélisation ;
- ça prend trop de temps pour préparer une tâche de modélisation pour l'enseignement ;
- le travail en classe sur les tâches de modélisation prend beaucoup de temps ;
- la plupart des élèves ne savent pas quoi faire avec des tâches de modélisation ;
- les tâches de modélisation requièrent beaucoup de ressources supplémentaires au prix de beaucoup d'énergie ;
- je n'ai pas assez de ressources pour l'enseignement de la modélisation.

### 2 Croyances pour enseigner la résolution de problèmes

Plus récemment une enquête auprès de 1317 professeurs des écoles de CM2 sur la résolution de problèmes observait l'hétérogénéité des pratiques :

> *Concernant la résolution de problèmes, les pratiques sont davantage différenciées puisque la moitié environ propose souvent des problèmes pour découvrir une notion (49 %), pour apprendre à chercher (50 %) ou pour se confronter à la complexité (problèmes à étapes sans question intermédiaire, 46 %) (Allard & al. 2019).*

---

[11] https://www.mathunion.org/icmi

[12] https://www.mathunion.org/icmi/organizationaffiliated-organizations/ictma

[13] Texte original : « *Knowledge - beliefs held with certainty or justified true belief [...]. Conception - a general notion or mental structure encompassing beliefs, meanings, concepts, propositions, rules, mental images, and preferences* ».

[14] Voir les références des recherches dans (Cabassut, Ferrando 2015 ; Cabassut, Simard 2021).

Cabassut et Simard (2021) retrouvaient cette hétérogénéité[15] des croyances sur la résolution de problèmes à l'école élémentaire dans une recherche plus récente auprès de 124 formateurs français en formation continue à l'école primaire.

| **Vos représentations de la résolution de problèmes** | D'accord | Neutre | Pas d'accord |
|---|---|---|---|
| Les 3 premières années de l'école élémentaire, pour résoudre un problème il est nécessaire de s'appuyer sur un schéma ou un tableau. | 54 | 14 | 32 |
| On peut dès le début des 3 premières années de l'école élémentaire, proposer des problèmes à plusieurs étapes. | 81 | 10 | 9 |
| Les problèmes modélisés par une soustraction sont plus difficiles que les problèmes modélisés par une addition. | 32 | 21 | 47 |
| La soustraction doit être assimilée à une situation de retrait. | 15 | 19 | 66 |
| Des exemples types de résolution de problèmes doivent servir de référence systématique lors de la résolution de problèmes. | 56 | 26 | 19 |
| En utilisant une représentation schématique similaire dans différents problèmes leur compréhension est facilitée. | 71 | 18 | 11 |
| Il est important de proposer des problèmes à plusieurs étapes dès les 3 premières années de l'école élémentaire. | 77 | 18 | 6 |
| Dans la résolution de problèmes il faut d'abord accorder un temps de résolution individuel avant un temps en groupe. | 75 | 12 | 13 |
| Si les élèves améliorent leur performance en calcul, ils trouveront plus facilement le lien entre le problème posé et les opérations dont il relève. | 52 | 13 | 36 |
| Si aucun élève ne trouve la méthode attendue pour résoudre un problème, l'enseignant peut alors proposer la méthode attendue. | 57 | 19 | 24 |
| Pour apprendre à résoudre un problème, l'élève doit apprendre à émettre des hypothèses. | 81 | 12 | 7 |
| **Vos représentations de la formation d'enseignants** | D'accord | Neutre | Pas d'accord |
| L'évaluation d'une formation sur la résolution de problèmes est facile. | 7 | 37 | 56 |
| Préparer une formation prend trop de temps. | 62 | 30 | 8 |
| Je me sens capable de développer des critères d'évaluation d'une formation. | 38 | 35 | **27** |
| Je me sens capable d'utiliser les erreurs des formés pour faciliter leur formation. | 65 | 23 | **11** |
| Je me sens capable de concevoir des tâches de formation sur la résolution de problèmes. | 56 | 26 | **19** |
| L'hétérogénéité des formés est une difficulté en formation. | 53 | 11 | 36 |
| Je n'ai pas assez de ressources de formation sur la résolution de problèmes. | 43 | 33 | 24 |
| En formation la confiance est difficile à cause des liens hiérarchiques. | 28 | 32 | 40 |
| Chez les enseignants la notion de problème n'est pas claire. | 67 | 23 | 10 |
| Bien former à la résolution de problèmes c'est indiquer les bonnes méthodes pour résoudre un problème. | 16 | 27 | 57 |

[15] Une part significative de formateurs peut reconnaître des difficultés comme formateur, ce que nous repérons en écrivant en gras le pourcentage de réponses représentant ces difficultés.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux non publiés concernant le degré de maîtrise en résolution de problèmes déclaré par les participants au Plan National de Formation (PNF) des Référents Mathématiques de Circonscription (RMC[16]) en début d'année 2020-21 rassemblant près de 1400 participants présents :

- Je maîtrise : 27 % des répondants ;
- Je souhaiterais approfondir : 30 % ;
- Je peux former mes pairs : 38 %.

On voit donc que les formations doivent prendre en compte les conditions que reflètent les croyances des enseignants et des formateurs quant aux difficultés et aux besoins qu'ils déclarent à propos de la modélisation et plus généralement de la résolution de problèmes. Examinons maintenant les conditions internes au système éducatif français.

## IV - CONDITIONS INTERNES AU SYSTÈME SCOLAIRE FRANÇAIS

Nous allons évoquer seulement les conditions liées aux formations du plan national mathématique. Pour ceux qui veulent approfondir les spécificités sur la modélisation du système français en comparaison à d'autres systèmes nous renvoyons à d'autres recherches : Chypre (Cabassut, Mousoulides 2009), Allemagne (Cabassut, Wagner 2011), Espagne (Cabassut, Ferrando 2014, 2015).

### 1 Les conditions françaises du système scolaire

#### *1.1 Le rapport Villani-Torossian et le plan national mathématique*

En France le rapport Villani-Torossian (2018) promeut les « bonnes pratiques » et notamment la « pédagogie explicite et systématique - l'élève est guidé de manière explicite mais non dirigiste dans son apprentissage » (Ibid. p.10) - et

> *[…] recommande une évaluation sur le cycle 2, sur un échantillon de 200 écoles (environ 1 000 classes), des méthodes dites explicites et intuitives. La « méthode de Singapour » appartient à cette catégorie mais n'est pas la seule.[…] Un tel enseignement a été aussi mis en œuvre, par exemple par le GRIP17 de manière expérimentale de 2005 à aujourd'hui dans les classes SLECC (Savoir Lire Écrire Compter Calculer)18 (Ibid. p.21).*

L'édition scolaire s'empare de cette méthode : la Librairie des Écoles[19], Larousse[20], Hachette[21], Bordas[22],… Le rapport questionne l'efficacité de la pédagogie (Ibid. p.84) et insiste sur l'« urgence à expérimenter pour l'écosystème français, avec une évaluation des diverses expérimentations » (Ibid. p. 68).
A la suite de ce rapport est mis en place un vaste plan de formation en mathématiques des professeurs des écoles et de leurs formateurs, notamment les référents mathématiques de circonscription. Un premier bilan de ce plan précise (Desbuissons & al. 2022, p.6) :

> *L'unité de base de la formation des professeurs des écoles est la « constellation ». Il s'agit d'un groupe de six à huit professeurs, constitué spécifiquement pour échanger entre pairs, en confiance, et s'appuyer sur le collectif pour explorer de nouvelles pratiques pédagogiques. Ce groupe bénéficie de l'appui d'un référent dont le rôle est d'apporter une expertise, d'accompagner, d'aider, pas de prescrire.*

[16] RMC : référents mathématiques de circonscription. Personnes référentes pour l'enseignement des mathématiques dans une zone géographique, la circonscription, regroupant plusieurs écoles primaires voisines.

[17] Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes

[18] http://slecc.fr/GRIP/GRIP_page-documents/2004-slecc.pdf

[19] https://www.methodedesingapour.com/

[20] Collection *Réussir en maths avec la pédagogie de Singapour* de Delphine Urvoy, de la maternelle au CM2

[21] (Jamet 2019)

[22] https://www.editions-bordas.fr/methode-de-singapour-maths-avec-leonie.html

### 1.2 L'importance accordée à l'évaluation

« Les résultats nationaux et internationaux successifs mettent en évidence une fraction croissante des élèves se situant aux niveaux les plus faibles des échelles de performance » (Ibid. p.6 ). Cette pression de l'évaluation est rappelée dans un guide du Ministère (MEN 2022, p.8) : « les enquêtes nationales et internationales mettent régulièrement en lumière que la situation est inquiétante pour les élèves de France ».
Concernant le plan de formation continue en mathématiques des professeurs des écoles les préconisations insistent sur l'évaluation :

> *les académies doivent s'outiller pour piloter le plan sur la durée : – en s'appuyant sur quelques indicateurs robustes, sur le plan quantitatif (notamment les évaluations nationales de CP, CE1 et sixième) mais aussi qualitatif […] Pour atteindre les premiers effets pour TIMSS 2023 et permettre un plein effet pour TIMSS 2027, conjuguer le travail de fond du Plan mathématique avec un effort sur l'entrée en cycle 3 […] grâce à la création d'une évaluation nationale exhaustive de début de cycle 3, bien reliée aux programmes et aux difficultés repérées au travers des évaluations TIMSS. […] Faire des évaluations de 6e un élément de suivi des effets du Plan mathématique, en particulier autour de la résolution de problèmes, en renforçant l'articulation de l'évaluation avec les objectifs du plan, à l'occasion, notamment, de renouvellements annuels de certains items.[…] Former les enseignants à la pratique d'une évaluation structurée dont les résultats, combinés avec les observations de classe, fournissent des points d'appui aux élèves et aux équipes pour améliorer les apprentissages. (Desbuissons & al. 2022, p.2) .*

Il est intéressant de noter que la prochaine conférence de consensus du CNESCO[23] portera sur l'évaluation en classe, au service de l'apprentissage des élèves. Cependant Blum, ancien expert mathématique de PISA et promoteur du développement de l'enseignement de la modélisation comme évoqué précédemment, remarque : « Il y a un risque que la leçon dégénère en une activité de préparation de test par souci de respecter la norme (« Teaching to the Test) »[24] (Blum & al. 2006, p.18).

Enfin le guide du CM (MEN 2022, p.8) note l'importance de facteurs extra-mathématiques expliquant les difficultés de certains élèves et on pourra conjecturer certains de ces facteurs dans l'extrait des résultats de l'évaluation de 2021 à l'entrée en 6e (annexe 1) sur des items qui peuvent être reliés aux compétences de modélisation ou de représentation :

> *Comme de nombreux travaux de recherche, l'enquête Pisa, pilotée par l'OCDE, a permis de confirmer que les difficultés des élèves ne peuvent s'expliquer par le seul niveau des connaissances et compétences mathématiques pour résoudre un problème, en effet, « de nombreux autres facteurs interviennent comme la connaissance en jeu, la familiarité avec le contexte du problème, la lisibilité de l'énoncé, etc. »*

## 2 Les conditions mathématiques

### 2.1 Les programmes mathématiques officiels

Les programmes de mathématiques de 2018 du cycle 3 (MEN 2018 p.28) de l'école primaire précisent ainsi les compétences « modéliser » et « représenter » :

***Modéliser*** :
- *utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;*
- *reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité ;*
- *reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie) ;*
- *utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets. […]*

---

[23] Centre National d'Etude des Systèmes Scolaires https://www.cnesco.fr/events/event/levaluation-en-classe-au-service-de-lapprentissage-des-eleves-prochaine-conference-du-cnesco/

[24] Traduction de R.C. : « So besteht die Gefahr, dass der Unterricht aus Sorge um Standarderfüllung zu einer Testvorbereitungsunternehmung degeniert (« Teaching to the Test ») »

***Représenter*** *:*

- *utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc. ;*
- *produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux ;*
- *analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points) ;*
- *reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide ;*
- *utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.*

### 2.2 Les ressources mathématiques officielles

Desbuissons & al. (2022, p.6) rappellent

> *la production par la DGESCO, en collaboration avec l'IGEN puis l'IGÉSR, de ressources à destination des enseignants et des formateurs sous la forme d'« attendus de fin d'année », de « repères de progression » en mathématiques pour chaque niveau des cycles 2, 3 et 4, et de guides » pour l'enseignement.*

La distinction « modélisation »[25] et « représentation »[26] est bien précisée par les documents ressources spécifiques à chacune de ces compétences : on observe que « modéliser » concerne la modélisation extra-mathématique du monde réel vers le monde mathématique alors que « représenter » concerne plutôt la modélisation intra-mathématique.
Les guides de CP et de CM sur la résolution de problèmes reviennent amplement sur l'enseignement de la modélisation et sur les représentations en barres. Ils insistent sur les représentations (MEN 2022, p.108) :

> *Si faire des schémas peut s'avérer particulièrement efficace, l'aptitude à choisir un schéma pertinent et à réaliser ce schéma requiert un apprentissage. La compétence « représenter » doit, par conséquent, faire l'objet d'un enseignement explicite ; le professeur doit donner à voir aux élèves un type de schéma efficace pour résoudre un problème donné. L'enseignement des schémas doit être cohérent tout au long de l'année scolaire, mais devrait l'être aussi tout au long de la scolarité pour être d'autant plus efficace.*
> *Ce paragraphe propose de développer l'enseignement de quatre types de schémas devant être connus des élèves de cours moyen. Les élèves doivent savoir les produire, mais aussi, et surtout, savoir quand il est pertinent de les utiliser :*
> - *les schémas en barres ;*
> - *les schémas proposant un déplacement sur une droite numérique ou une ligne du temps ;*
> - *les tableaux ;*
> - *les arbres.*
>
> *L'enseignement de ces schémas à l'école élémentaire est important pour la suite de la scolarité, car ils seront réinvestis et utilisés au collège puis au lycée.*

Sur la modélisation, ce guide (MEN, 2022) propose deux cycles de modélisation, le premier inspiré de (Verschaffel et De Corte 2008), le second simplifiant le premier, tous les deux insistant, par rapport aux cycles de PISA et LEMA, sur l'étape de compréhension du problème :

[25] Eduscol. (2016). Compétences travaillées en mathématiques :
Modéliser. https://eduscol.education.fr/document/17218/download.
[26] Eduscol. (2016). Compétences travaillées en mathématiques :
Représenter. https://eduscol.education.fr/document/17221/download

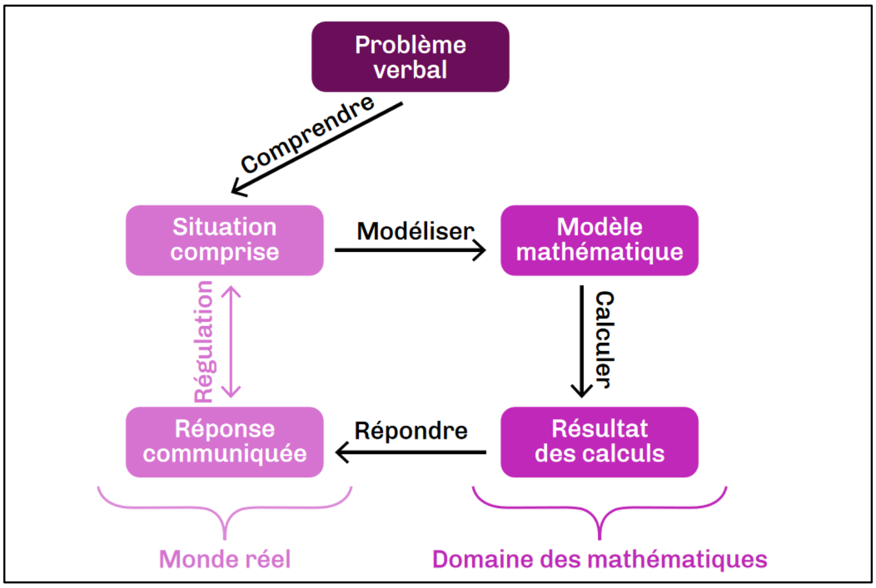



*Figure 6. Cycle de modélisation du guide du CM (MEN 2022, p 44).*

Concernant les schémas en barres, le guide CM (Ibid. p.4) répond à la question :

> *À quel moment doit-on introduire les schémas en barres ?*
> *Les schémas en barres sont traditionnellement introduits progressivement à partir du CE1. Ce qui est particulièrement important pour les schémas en barres comme pour les autres outils de représentation, c'est de conserver une certaine cohérence d'utilisation d'année en année, tout au long de la scolarité obligatoire, afin de permettre aux élèves de garder les mêmes repères et de devenir de plus en plus efficaces en résolution de problèmes.*

Il est surprenant d'évoquer une tradition sur ces représentations, puisque leur apparition dans les textes officiels est récente et qu'aucune mention à des travaux de recherche ou des enquêtes sur leur utilisation dans l'enseignement n'est proposée. Il serait intéressant d'étudier l'impact normatif ou prescriptif de ces ressources au niveau des formateurs, des constellations et des enseignants.

## V - PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS

Nous allons maintenant expliquer comment l'auteur a pris en compte les conditions précédentes dans ses formations, et comment il justifie ses choix personnels.

### 1 Le cahier des charges

Le cadrage de la DGESCO adressé à l'auteur contacté pour devenir formateur expert indiquait en mai 2019 :

> *[…] la constitution d'un pool de formateurs experts concernant la résolution de problèmes, groupe de travail dont nous vous proposons de faire partie. Plus précisément, il s'agit de la résolution de problèmes et stratégie de résolution de problèmes mais avec une orientation précise sur les aspects multiplicatifs ou à plusieurs crans, notamment ceux impliquant des décimaux et des fractions, et surtout avec un focus important sur la modélisation des problèmes, en particulier le recours à l'utilisation de schémas en barre. L'orientation est clairement autour du cycle 3, mais on n'exclut pas du tout une orientation cycle 2 avec un focus plus additif.*

On peut observer les références à la modélisation et aux schémas en barres. Il est à noter, qu'au moment où il a été contacté, probablement pour ses recherches autour de la modélisation, l'auteur n'était pas expert sur les schémas en barres qu'il n'avait jamais pratiqués en formation ou en recherche.

## 2 La synthèse d'un formateur sur représentation et modélisation

Nous indiquons ici la synthèse personnelle de l'auteur de l'article, prenant en compte les conditions exposées précédemment.

### 2.1 Variétés des représentations

Rappelons d'abord que *représenter* occupe une place reconnue dans la didactique française des mathématiques, place bien souvent promue par des auteurs qui à l'origine sont des psychologues plutôt que des mathématiciens. Citons Vergnaud et ses représentations de problèmes arithmétiques (Vergnaud 1989), Julo et sa théorie de la multireprésentation (Nguala 1995), Duval (2006) et sa théorie des registres de représentation sémiotique, et plus récemment Sander (2018) et ses travaux sur les représentations mentales et les processus interprétatifs en particulier dans le champ scolaire.

Illustrons quelques représentations des problèmes arithmétiques à l'école élémentaire présents dans la littérature. Cabassut (2021) compare les avantages et les inconvénients des représentations de Vergnaud et des représentations en barres. Par exemple le choix entre différentes représentations de Vergnaud (composition d'états, transformation, comparaison) oblige à une réflexion heuristique explicite, ce qui est plus implicite dans les représentations en barres parties-tout. Par contre les représentations en barres seront plus opérationnelles pour la conversion dans une écriture pré-algébrique ou algébrique. Illustrons cette variété en figure 6, extraite du diaporama d'une formation de l'auteur de l'article.

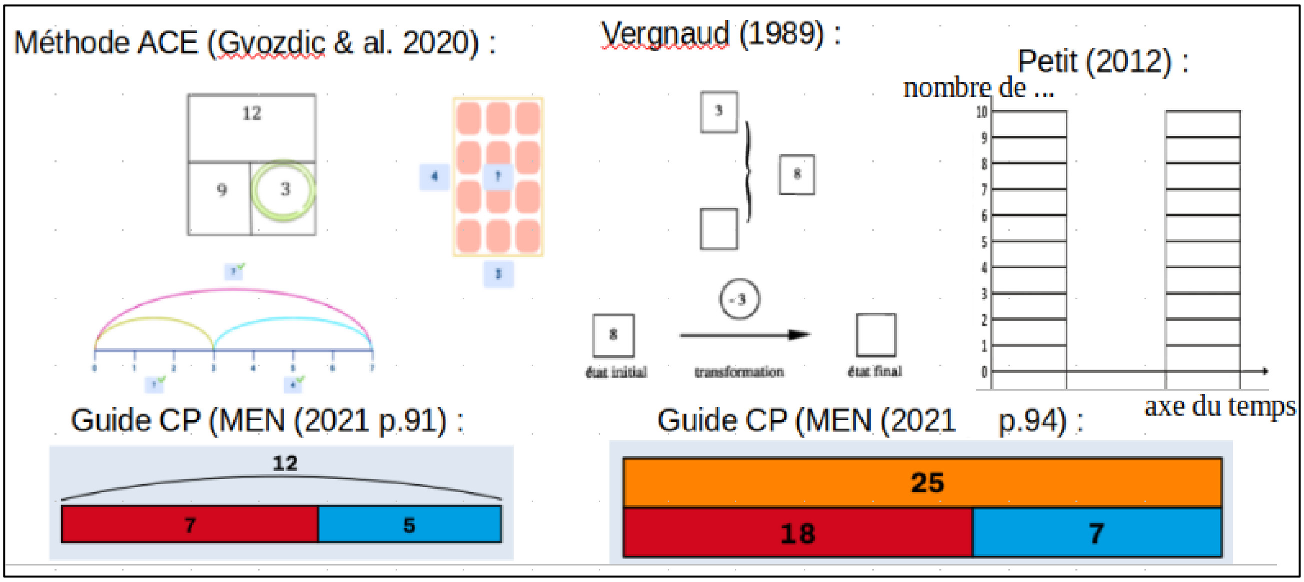



*Figure 7. Représentations présentes dans les problèmes arithmétiques.*

### 2.2 Variété des modélisations

Concernant la modélisation mathématique (ou mathématisation), Freudenthal a distingué la mathématisation horizontale (qui passe d'une représentation d'un problème extra-mathématique à une représentation mathématique dont on espère qu'elle permettra de résoudre le problème initial) et la mathématisation verticale (qui passe d'une représentation intra-mathématique d'un problème mathématique à une autre représentation intra-mathématique dont on espère qu'elle permettra de résoudre le problème initial) (Goffree 1993, p.30). Régine Douady (1986) a également développé ce dernier point de vue avec sa théorie des jeux de cadres en mathématique.

Dans les définitions de PISA et de Niss, il semblerait qu'on limite la représentation à celle d'objets mathématiques et qu'on limite la modélisation à celle d'objets extra-mathématiques qui vont être modélisés par des objets mathématiques. On pourra à ce sujet faire deux remarques. D'une part, de manière plus générale, on peut représenter des objets extra-mathématiques. Et cette représentation n'a pas toujours pour fonction de mathématiser ces objets : elle peut avoir pour fonction de décrire un objet, de le comprendre, de l'utiliser, de communiquer sur lui … sans pour autant faire intervenir des connaissances mathématiques, comme illustré dans l'exemple suivant de la figure 7

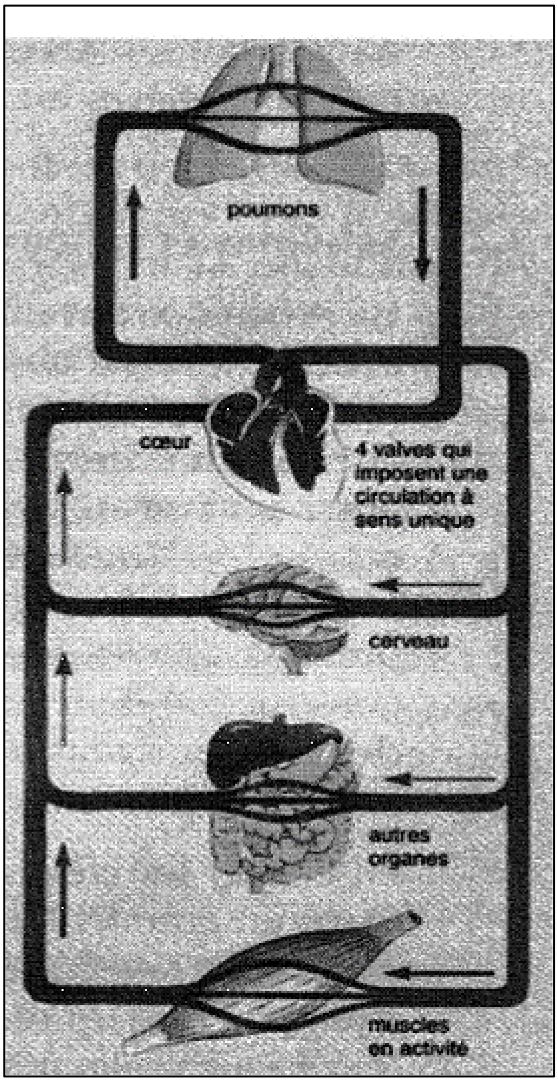



*Figure 8. Modélisation de la circulation du sang en biologie (Evrard & Amory 2015).*

On peut donc modéliser avec des modèles non mathématiques (Evrard & Amory 2015). On devrait d'ailleurs utiliser dans l'enseignement le terme *mathématiser* pour une modélisation extra-mathématique et par exemple, *modéliser géométriquement* pour une modélisation intra-mathématique d'un problème algébrique en problème géométrique. Pour une modélisation autre que mathématique, on pourrait préciser l'univers des modèles, par exemple *modéliser en chimie* ou *modéliser en biologie*. Ceci éviterait une conception dominatrice des mathématiques à propos de la modélisation, notamment chez des professeurs polyvalents comme les professeurs des écoles ou de lycées professionnels, qui peuvent être amenés à modéliser sans utiliser les mathématiques.

### 2.3 Distinction entre représentation et modélisation

Le terme modélisation (comme le terme démonstration) est ambigu : il désigne le produit (la modélisation trouvée) ou le processus (le parcours non linéaire du cycle de modélisation). Nous nous intéressons ici à la distinction entre les produits : la représentation produite et la modélisation produite.

Dans cette distinction entre modélisation et représentation on peut faire une analogie avec la distinction que fait Parzysz (1988) en géométrie entre dessin et figure. Une figure est un dessin que l'on regarde avec des connaissances mathématiques pour y voir des objets mathématiques et leurs relations mathématiques. De même une modélisation (mathématique) est une représentation appréhendée avec des connaissances mathématiques qui relient entre elles les éléments de la représentation. La modélisation est à la représentation ce qu'en géométrie la figure est au dessin. C'est cette distinction entre modélisation et représentation que le formateur a adoptée, tout en diffusant les autres conceptions au cours des formations qu'il a animées. Une même représentation, par exemple en barres ou avec une collection de billes, ne sera pas une modélisation si la représentation n'a pas été conçue pour mettre en évidence les relations mathématiques qui conduisent à la résolution du problème représenté. Parfois un élève peut modéliser un problème sans représenter de manière explicite les relations mathématiques, par exemple dans le cas de deux droites parallèles. Il faudra alors compléter par un interrogatoire de l'enseignant qui fera expliciter ces relations mathématiques, ou par un commentaire écrit de l'élève qui explicitera ces relations mathématiques. Illustrons notre propos par des extraits du Magistère, cours de formation continue en ligne du Ministère de l'Education nationale, sur les représentations en barres (MEN 2019) .

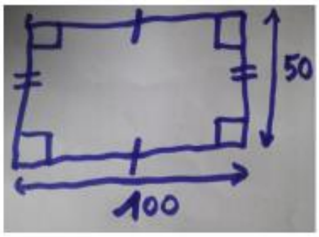
| | **Représenter :** Rendre perceptible à la vue et à l'esprit. | **Modéliser :** représenter en utilisant des math. |
|---|---|---|
| J'ai 12 billes et 4 boîtes . Chaque boîte doit contenir le même nombre de billes. Combien de billes dans chaque boîte ? |  | **version icônes et barres**<br>oooooooooooo<br>? \| ? \| ? \| ?<br>**version symboles et barres**<br>12<br>? \| ? \| ? \| ? |
| Le terrain de football est un rectangle de longueur de 100 m de long et de 50 m de large. Pour acheter des graines de gazon je dois connaître son aire. |  | <br> |

*Figure 9. Modéliser et représenter (MEN, 2019).*

Pour le premier problème la première représentation (les ronds pour les billes et les carrés pour les boites) n'est pas une modélisation du problème car il n'est pas précisé que chaque boîte contient le même nombre de billes. Considérons la représentation suivante.

*Figure 10. Modéliser (MEN, 2019).*

Il y est indiqué clairement la répartition équitable des billes dans les boites. Cette représentation constitue une modélisation car elle contient toutes les relations mathématiques permettant la résolution du problème : il apparaît clairement la solution du problème « trois billes par boite ». Les autres représentations en barres (iconiques ou symboliques) constituent des modélisations.

Dans le second problème il faut déterminer l'aire du terrain. La première représentation, bien que précise en dessinant les surfaces de réparation ou le rond central, n'indique pas clairement que le terrain est rectangulaire et ses dimensions. Donc les relations mathématiques ne sont pas complètement décrites par la représentation. Un interrogatoire de l'élève peut montrer que l'élève est conscient de ces relations mathématiques et il peut alors compléter sa représentation par les codages de la figure de droite (angles droits, égalité de longueurs, dimensions du rectangle) qui explicitent les relations mathématiques qui étaient implicites dans la première représentation.

Une représentation peut donc ne pas être une modélisation si elle se limite à un aspect figuratif sans préciser les relations mathématiques entre les éléments. Une représentation peut aussi être une modélisation incomplète. Dans le premier problème, la première représentation est une modélisation incomplète : le nombre total de billes (12 petits ronds) et le nombre de boites (quatre carrés) sont représentés mais le schéma ne représente pas la répartition équitable entre les boites.

On peut bien entendu avoir des modélisations incorrectes où les relations mathématiques indiquées sont incorrectes, comme dans l'exemple suivant.

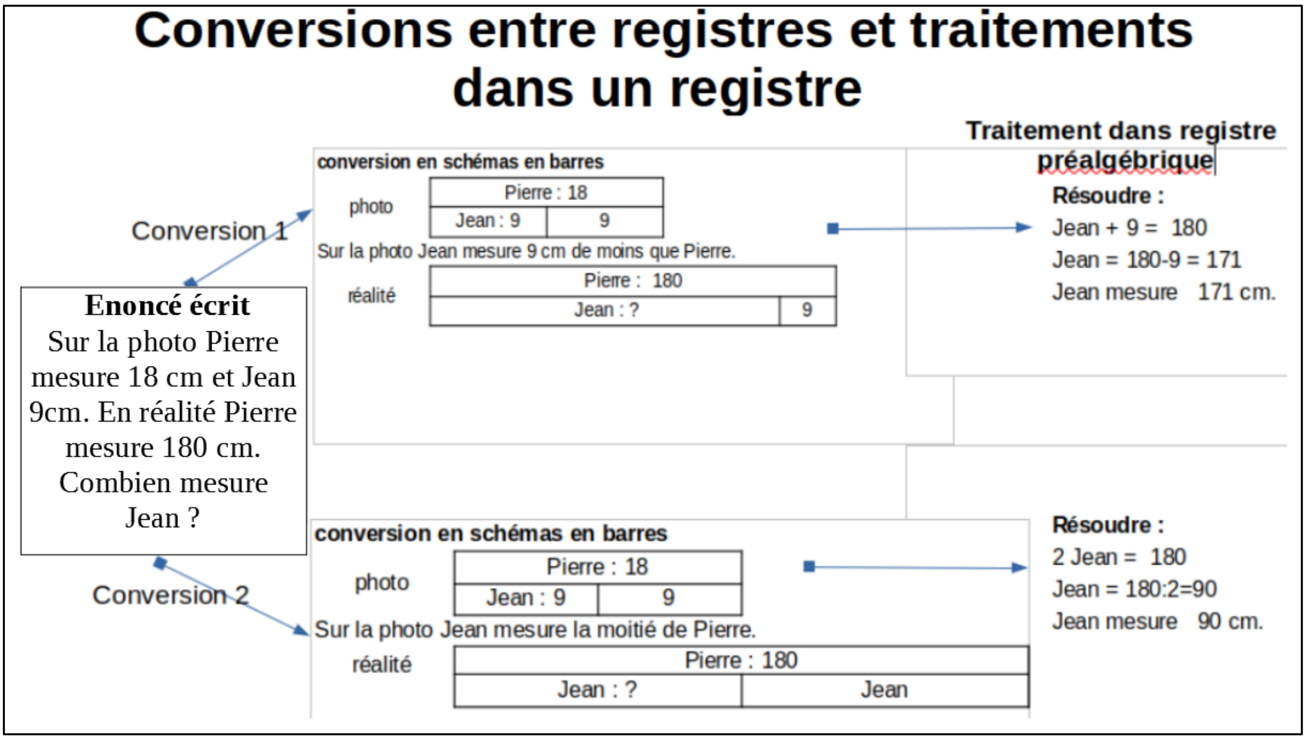



*Figure 11. Modélisations correcte et incorrecte (MEN, 2019).*

Pour corriger les modélisations incorrectes il est important de faire justifier les relations mathématiques proposées, par un commentaire écrit ou par un interrogatoire oral. Nous avons indiqué que les représentations de Vergnaud font apparaître clairement la distinction entre les trois modèles : problème de composition d'états, problèmes de transformation ou problème de comparaison. Dans les représentations en barre c'est dans la justification orale ou écrite que ces distinctions apparaîtront.

Bien entendu on peut parfois modéliser correctement un problème sans savoir le résoudre : c'est le cas quand on met correctement en équation un problème sans savoir pour autant résoudre l'équation. C'est la distinction dans le cycle de modélisation (figure 5) entre construire le modèle et traiter le modèle.

## 3 Rapports institutionnels et rapports personnels

Ce qui est frappant au terme de l'expérience de formation commanditée par la DGESCO, c'est l'entremêlement de rapports personnels et de rapports institutionnels (Chevallard 1992) à la formation de chaque acteur de cette formation. Ces acteurs ont des rattachements institutionnels très différents (Desbuissons & al. 2022, p.7) : certains ont une dépendance hiérarchique très forte dans leur institution. L'auteur de l'article a au contraire connu une liberté très grande de par son statut d'universitaire.

Il est difficile de connaître le rôle précis et la capacité d'intervention de certaines institutions. Quelles sont les influences du cabinet du Ministre, du Conseil Scientifique de l'Education Nationale (CSEN), de la Librairie des écoles (promotrice de la méthode de Singapour) ou du GRIP[27] sur le contenu de la formation

[27] Evoqué dans le paragraphe IV 1.1

et des ressources produites ? Il n'est pas possible de le savoir mais il a pu être observé des modifications de propositions de contenu et d'organisation de la formation ou de ressources après des arbitrages secrets. Quelle est la part de l'influence de personnalités présentes dans ces institutions et de leurs rapports personnels aux mathématiques ou à la formation ? Si dans le temps, la zone d'influence d'une personnalité évolue, quel impact est produit sur la formation ou les ressources ? Par exemple l'évolution de l'engagement politique de M. Villani a-t-il eu un impact ? Entre deux inspecteurs généraux de mathématiques influents, quel est l'impact de l'évolution de leur influence, qui peut être d'ailleurs perturbée par la maladie de l'un dans une période sanitaire tendue ? La position d'élu d'un formateur dans le conseil d'une institution peut-il avoir un impact sur l'organisation d'une formation dans une académie [28]?

Ainsi les formations ou les ressources sont le produit complexe d'un travail collectif du groupe d'experts, d'un travail personnel du formateur qui va assurer cette formation, et d'arbitrages non transparents. Ces formations et ces ressources ont été produites dans un temps marqué par deux conditions extra-mathématiques majeures : la crise sanitaire et la difficulté des ressources humaines. La crise sanitaire du COVID, avec les épisodes de confinements, la maladie pour certains formateurs experts ou certains responsables, a bousculé le calendrier et les modalités (passage en distanciel, remplacement au pied levé d'un formateur indisponible …). Le manque de ressources humaines se fait sentir aux deux extrémités du dispositif. Il y a la difficulté à recruter des formateurs experts : manque de disponibilité, refus de cautionner un point de vue (comme la valorisation des représentations en barres), manque d'experts ou de savoir savant sur le thème de formation (par exemple sur les représentations en barres). Il y a la difficulté à atteindre les formés (mobilisation prioritaire face à la situation sanitaire, absence de remplaçants pendant la formation (Ibidem, p.1), dispositif technologique à distance défaillant ...). Sous ces conditions, des solutions personnelles du formateur ont pu compléter la défaillance des solutions institutionnelles. Cabassut (2022) illustre la formation produite par un formateur où s'entremêlent les influences produites par le groupe d'experts et les influences liées au formateur (ses expériences de formation, de recherche, ses rapports personnels avec l'institution ou avec les membres du groupe d'experts).

# VI - CONCLUSION

## 1 Gérer des choix

La variété des représentations ou des modélisations permet de s'adapter aux spécificités de l'élève ou de la situation, de montrer les structures invariantes dans la diversité des représentations et d'aménager des phases transitoires dans le développement des apprentissages (par exemple dans la progression « concret, imagé, abstrait » de la méthode de Singapour). Chaque représentation présente des avantages et des inconvénients, notamment les représentations en barres (Cabassut, 2020, 2021), qu'il convient d'analyser pour justifier ses choix. La justification des choix permet d'éclairer la fonction de la représentation, y compris dans la phase heuristique.

## 2 L'importance des justifications

Nous avons illustré sur l'exemple des compétences *représenter* et *modéliser* la variété des niveaux de codétermination didactique de formation de formateurs en mathématiques. Beaucoup de ces niveaux se situent hors le système français ou hors les mathématiques, ce qui est un élément de difficulté pour le formateur, pour en avoir conscience et pour les prendre en compte. Le risque est de naturaliser ces conditions sans les questionner. L'intérêt du questionnement est de modifier éventuellement les conditions, et si les conditions ne sont pas modifiables et sont des contraintes d'en tenir compte, pour améliorer la formation. Il faut bien entendu préciser sur quels choix porte cette amélioration : Les résultats

[28] Jarraud, F. (2022) Peut-on critiquer le gouvernement et enseigner la résolution de problèmes mathématiques ? *Café Pédagogique. L'expresso.* 7 mars 2022.

https://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2022/03/07032022Article637822323568789854.aspx.html aux évaluations ? La diffusion des « bonnes » pratiques ? L'apprentissage des élèves ? Les aides aux élèves en difficulté ? ... Tous ces choix sont à discuter et à justifier. L'intention de la création des constellations est bien dans cette direction : discuter les choix de manière collaborative entre pairs.

Finalement un « modèle » d'élève, d'enseignant, de formateur, d'expert, de recteur, de ministre … c'est quelqu'un qui sait justifier ses choix et les mettre en discussion, et non pas quelqu'un qui applique sans retour réflexif. Former l'élève, l'enseignant, le formateur... à justifier et à discuter ses choix : voilà un « modèle » de formation.

## VII - BIBLIOGRAPHIE


Adda, J.(1993). Une lumière s'est éteinte H. Freudenthal: Homo Universalis. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, No. 1/2, *The Legacy of Hans Freudenthal*, 9-19.

Adjiage, R., & Rauscher, J.-C. (2013). Résolution d'un problème de modélisation et pratique écrite de l'écrit. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *33* (1), 9–43.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A. & Tempier, F. (2021). Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco, en classe de CM2 en 2019. *Note d'information 21.10*, DEPP.

Andreu S. & al.(2021). *Evaluations de début de sixième 2021. Premiers résultats.* Document de travail n°2021-E07, Série Etudes, Version du 15/11/21. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP).

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W., & Niss, M. (eds) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study.* New ICMI Study Series, Volume 10.

Cabassut, R. (2008). Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *In* Actes du colloque *« Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? »,* Université Paris 7, 235-244.

Cabassut, R.(2009). Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés. *In Actes du 35e Colloque de la Copirelem. Bombannes.* ARPEME, 106-122.

Cabassut, R. (2013). Reflections from European examples on the teaching of modelling. *Modelling in Science Education and Learning, Vol. 6(1),* No. 2,21-32.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : «ni cet excès d'honneur, ni cette indignité». *Au fil des maths, 537,* APMEP, 10-19.

Cabassut, R. (2021). Vergnaud versus Singapour. *Au fil des maths. Spécial premier degré.* Hors-série n°1, 136-141.

Cabassut, R (2022). Dispositifs d'enseignement et de formation utilisant les représentations en barres : pour quelle efficacité ? *In Actes du 47e Colloque de la Copirelem. Grenoble.* ARPEME, 146-161.

Cabassut R., Mousoulides N. (2009*).* Theoretical Considerations on Designing and Implementing a Teacher Training Course on Mathematical Modeling: Insights from a French-Cypriot Comparison. *In* Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., Vivier, L. *(*eds*)*. *Cyprus and France Research in Mathematics Education.* Cyprus: University of Cyprus, 141-153.

Cabassut, R., Wagner, A. (2011). Modelling at Primary School Through a French–German Comparison of Curricula and Textbooks. *In* Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, *vol 1.* Springer, Dordrecht, 559-568.

Cabassut, R., & Villette, J.-P. (2012). Un exemple d'analyse des croyances des enseignants envers l'enseignement de la modélisation. *In* J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle. Actes du colloque EMF 2012.* Université de Genève, 668–677.

Cabassut, R., Ferrando, (2014). Comparaison franco-espagnole de ressources sur l'enseignement de la modélisation. In *Actes du 40ème colloque COPIRELEM*. Editeur : IREM de Nantes. 1-17.

Cabassut, R., Ferrando, I. (2015) Difficultés pour enseigner à partir du monde réel comme ressource : comparaison franco-espagnole. In *Actes du 42ème colloque COPIRELEM*. Université de Franche-Comté. Besançon.

Cabassut, R., Simard, A. (2021) Exploration of French Trainers Beliefs On Problems and Computing. In *Actes du colloque CIFEM 2020.* ITM Web of Conferences.
https://www.itm-conferences.org/articles/itmconf/abs/2021/04/itmconf_cifem2020_01001/itmconf_cifem2020_01001.html

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J.-L., & Tiberghien, A. (1994). *La transposition didactique à l'épreuve*. Editions La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La pensée sauvage, 41-56.

Conseil de l'Union européenne. (2018). Recommandation du conseil du 22 mai 2018 relative aux compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie. *Journal officiel de l'Union européenne du 4/6/2018. Document C189,* 1-13.

De Lange, J. & al. (eds) (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*, Chichester: Ellis Horwood.

Desbuissons, G., Sidokpohou, O. (2022). *Suivi du Plan mathématiques.* Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *7*(2), 5–31.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics. 61:* 103–13.

Evrard, T., Amory, B. (2015). *Les modèles, des incontournables pour enseigner les sciences* ! De Boeck.

Goffree, F.(1993). HF: working on mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 25, No. 1/2, The Legacy of Hans Freudenthal, 21-49.

Gvozdic, K., Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: going beyond informal solving strategies. *ZDM Mathematics Education 52*, 111–123.

Jamet, J.-M. (2019). *Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2.* Hachette Education.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM Mathematics Education, 51*, 151-168.

MEN. (Ministère de l'Education Nationale). (2006). Socle commun de connaissances et de compétences. *BOEN n°29 du 20 juillet 2006.*

MEN. (Ministère de l'Education Nationale). (2016). *Compétences travaillées en mathématiques : modéliser.* Eduscol.education.fr/ressources-2016
https://eduscol.education.fr/document/17218/download

MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2018). Programmes d'enseignement. *C*ycle de consolidation (cycle 3). *BOEN n° 25 du 21 juin 2018.*

MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2019). Résolution de problèmes : éclairages sur la modélisation par le schéma en barres. *m@gistère DGESCO.*
https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=2197&section=1

MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2020). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.* DGESCO.

MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.* DGESCO.

Ng, S.F., Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40.3, 282-313.

Nguala, J.B. (1995). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N n° 76*, 45-63.

Niss, M. A., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst : i, om og med matematik og fysik No. 485.
http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education,* 115-124.

Niss, M. (1999). « Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse » (Competencies and subject description), Uddanneise,9.

OCDE. (1999). *Mesurer les connaissances et compétences des élèves: un nouveau cadre d'évaluation*. Paris: OCDE.

OCDE. (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003.* Paris: OCDE.

OCDE. (2016). *PISA 2015 Les défis du système éducatif français et les bonnes pratiques internationales.* Paris : OCDE.

Parlement européen. (2006). Recommandation du parlement européen et du conseil du 18 décembre 2006 sur les compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie. *Journal officiel de l'Union européenne du 30/12/2006.* Document L394, 10-15.

Parzysz, B. (1988). Voir et savoir-la représentation du « perçu » et du « su » ». *Bulletin Vert de l'APMEP* 364, 339-350.

Petit, S. (2012). Problèmes additifs à transformations et représentations graphiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP 500,* 389-400.

Philipp, R. P. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* Volume 1. U.S.A.: National Council of teachers. 257-317.

Rocard, M. (Chair) (2007). *Science education now: a renewed pedagogy for the future of Europe*. European Commission.

Sander, E. (2018). Une approche interprétative de la résolution de problèmes, In Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) *Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM.*

https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/91.pdf

Vergnaud, G. (1989). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques un exemple : les structures additives. *Petit x n°22,* 51- 69.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-22-petit-x/

Verschaffel, L., Lieven, De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace, *in* Crahay, M., Verschaffel, L., De Corte, E., Grégoire, J. (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* De Boeck, Bruxelles.

Villani C., Torossian C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Education Nationale. France.

# IX - ANNEXE 1 : EXTRAIT EVALUATION 2021 A L'ENTREE EN 6E

*Extrait de (Andreu & al. 2022, pp. 102-116). Les réponses grisées sont les réponses correctes.*

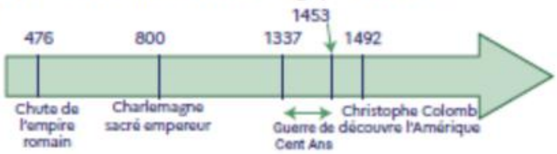
**1/** Sur une carte, 1 cm représente 4 km dans la réalité. Trouver la distance dans la réalité d'un segment de 10 cm sur le plan.

**Cocher la bonne réponse.**

☐ 0,4 km ☐ 400 km ■ 40 km ☐ 4 km

| 0,4 km | 400 km | 40 km | 4 km | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 5,9 | 7,6 | 77,3 | 5,6 | 3,6 |

**2/** Observer la frise chronologique suivante.




La guerre de Cent Ans a duré en réalité ■ 116 années.
☐ 861
☐ 324
☐ 977

| 116 | 324 | 861 | 977 | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 6,6 | 4,9 | 7,3 | 5,2 |

**3/** Pour réaliser une mousse au chocolat pour quatre personnes, il faut 200 g de chocolat noir.
Quelle est la quantité de chocolat pour sept personnes ?

**Cocher la bonne réponse.**

☐ 200 g
☐ 300 g
■ 350 g
☐ 400 g

| 250 g | 300 g | 350 g | 400 g | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 7,5 | 9,5 | 58,3 | 21,7 | 3 |

**5/** À la boulangerie, Kim a acheté 3 croissants à 1,20 € l'un et un pain aux raisins à 2 €. Elle donne 10 €.
Combien va-t-on lui rendre ?

**Cocher la bonne réponse.**

☐ 3,20 € ☐ 6,80 € ☐ 5,60 € ■ 4,40 €

| 3,20 € | 4,40 € | 5,60 € | 6,80 € | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 11,4 | 34,1 | 21,9 | 30,3 | 2,4 |

**4/** Un rectangle a un périmètre de 500 m.
Sa longueur mesure 150 m.
Combien mesure sa largeur ?

La largeur vaut ■ 100 m.
☐ 125
☐ 200
☐ 350

| 100 | 125 | 200 | 350 | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 31 | 11,4 | 14,6 | 37,1 | 5,9 |

**6/** Des élèves de CM2 étudient une situation que l'on admet être une situation de proportionnalité. Ils observent la distance parcourue par un cycliste en fonction du temps écoulé.
Un nombre manque dans le tableau suivant. Lequel ?

| Distance parcourue (en km) | Temps écoulé (en h) |
|---|---|
| 60 | 2 |
| 120 | 4 |
| | 8 |

**Cocher la bonne réponse.**
☐ 180 km ☐ 194 km ■ 240 km ☐ 480 km

| 180 | 194 | 240 | 480 | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 28,6 | 4,9 | 54,7 | 7,6 | 4,2 |

**7/** Une voiture roule à vitesse constante. Elle parcourt 80 km en une heure.
Quelle distance parcourt-elle en un quart d'heure ?

**Cocher la bonne réponse.**

■ 20 km
☐ 40 km
☐ 60 km
☐ 80 km

| 20 km | 40 km | 60 km | 80 km | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 54,4 | 16,2 | 12,4 | 12,2 | 4,8 |

**1/** Le cours de solfège de Mathis a commencé à 18 h 45 min et a duré 1 h 30 min.
Le cours de solfège s'est terminé à ☐ 19 h 15 min
☐ 20 h 05 min
☐ 19 h 75 min
■ 20 h 15 min

| 19 h 15 min | 19 h 75 min | 20 h 05 min | 20 h 15 min | Non réponse |
|---|---|---|---|---|
| 23,8 | 19,2 | 9,5 | 45,9 | 1,7 |

# TEXTES ATELIERS

# RESOLUTION DE PROBLEMES BASIQUES ET COMPLEXES ? QUE PEUT-ON INSTITUTIONNALISER ?

**Cécile ALLARD**
Maîtresse de Conférences, LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

**Chantal MOUSSY**
PRAG docteure/Formatrice, INSPE Créteil, UPEC
chantal.moussy@u-pec.fr

**Résumé**
L'institutionnalisation (Brousseau, 1984, Perrin-Glorian, 1993 Margolinas, 2014) a été définie comme un processus qui dépersonnalise et décontextualise les connaissances construites en situation. Allard (2015) montre, à propos de l'enseignement des fractions, que ce processus peine à aboutir même pour des enseignants-formateurs expérimentés. Houdement (2011) rappelle qu'épistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes et explique que l'hypothèse communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Résoudre des problèmes est un moyen pour construire et/ou adapter des connaissances mais ce n'est pas un domaine des mathématiques. Nous nous demandons alors comment et quelles connaissances sont institutionnalisables en relation avec l'activité de résolution de problèmes. L'institutionnalisation est-elle possible (Allard & Cavelier, 2020) ? Quelles connaissances sont nécessaires pour résoudre des problèmes ? Comment mettre en lien des connaissances construites en calcul et lors de la résolution de problèmes arithmétiques ? Peut-on institutionnaliser et privilégier certaines représentations graphiques ?

## I - INTRODUCTION

Résoudre des problèmes reste « un problème » pour les enseignants de l'école comme pour les élèves. Les enseignants déclarent en effet avoir des difficultés à motiver leurs élèves et à trouver une "bonne méthode" pour les aider dans cette activité. La note d'information de l'enquête PRAESCO (2021) montre que seul 20% d'entre eux (Allard, Tempier, Masselot, Peltier, Roditi 2021, 2022) trouvent facile d'enseigner la résolution de problèmes. Houdement (2013) rappelle qu'épistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes et explique que l'hypothèse communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Ces deux grands rôles de la résolution de problème sont différemment perçus, résoudre des problèmes à différents moments de l'apprentissage d'une notion a du mal à être compris malgré la formation et c'est ce que relève le dossier de l'enquête PRAESCO (Allard et al, 2022). Elle montre une place différenciée à la résolution de problèmes, c'est ainsi qu'environ la moitié des professeurs déclarent s'appuyer « souvent » ou « très souvent » sur des problèmes pour que les élèves découvrent des notions (48%), proposer des problèmes complexes, c'est-à-dire des étapes sans questions intermédiaires (46%) ou encore des problèmes pour apprendre à chercher (50%). Seul un tiers des enseignants proposent des problèmes lus oralement à résoudre mentalement (32%) et indiquent le faire souvent ou très souvent.

Les résultats de cette enquête entrent en écho avec ce que nous percevons lors des actions de formations initiale et continue.

Le rapport Villani-Torossian, en 2019, pointe également les difficultés des enseignants à enseigner les mathématiques et propose 21 mesures. A la suite de ce rapport, le ministère a mis en place un plan national de formation en mathématiques et en particulier sur la résolution de problèmes ; ces formations semblent avoir promu les représentations en barres.

En 2022, un guide « violet »[1] (MENJS, 2022) intitulé « la résolution de problèmes au cours moyen » édité par Eduscol explore de nombreuses questions que peuvent se poser des enseignants, et proposent des pistes pour organiser un enseignement basé sur la résolution de problèmes. Les questions posées dans le guide « violet » (MENJS, 2022) sont effectivement celles que nous (les membres des deux ateliers ont acquiescé) entendons lors de nos formations.

Les deux questions récurrentes que nous rencontrons lors de ces formations continues sont les suivantes « faut-il enseigner la schématisation en barre ? », « existe-t-il une méthode, un manuel pour aider les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes ? ». La question de l'institutionnalisation des savoirs (Allard, 2011, 2015, 2017), si l'on considère que savoir faire un schéma est un savoir relatif à la résolution de problème émerge très souvent ainsi que les questions sur l'identification d'une méthode infaillible pour résoudre des problèmes.

Aux questions « doit on apprendre aux élèves à faire des schémas ? » le guide « violet » (MENJS, 2022) répond par l'affirmative « oui, il faut l'enseigner » ; ainsi, les auteurs de ce guide identifient que savoir faire un schéma serait un savoir relatif à la résolution de problèmes. Le guide étaye, par ailleurs, sa réponse sur l'institutionnalisation ainsi :

« *L'institutionnalisation désigne l'acte du professeur pour expliciter, rendre visibles les apprentissages réalisés au cours d'une séance ou d'une séquence et leur donner ainsi un statut de connaissance ou de savoir-faire, et l'élaboration de traces écrites sous formes d'affichages ou d'un paragraphe au sein d'un cahier de leçons. Cette institutionnalisation doit permettre aux élèves de prendre du recul sur ce qui a été fait, de dépersonnaliser les procédures, de les expliciter et d'en montrer le caractère général* ». (MENJS, 2022, p. 100)

Dans ce cours paragraphe extrait d'un document dense de plus de 150 pages, se dessine des pistes quant à ce que pourrait être des séances en résolution de problèmes et à l'institutionnalisation. Cette dernière ne semble pas inscrite dans un processus mais peut être réduite à une trace écrite sous la forme d'un affichage ou d'un paragraphe au sein d'un cahier de leçons. Nous nous étions posé la question en 2011 de l'existence de ces cahiers et de leurs contenus (Allard, 2011, 2015, 2017). Nos recherches ont montré qu'il n'existait pas de « paragraphes » et que de tels cahiers n'étaient pas investis ; au mieux, les enseignants rédigeaient des exemples génériques ou bien des énoncés dits de méthodes (Butlen et Pezard, 2003). Brousseau 1984, Perrin-Glorian 1993, Margolinas 2014, Butlen & Pezard 2003, Allard, 2015 ont étudié le processus d'institutionnalisation lors de l'enseignement apprentissage d'une notion donnée comme les fractions, ou bien sur certains faits numériques. La résolution de problèmes n'étant pas un domaine des mathématiques, il est alors difficile d'annoncer qu'il existe des savoirs mathématiques qui permettent de construire la notion de résolution de problèmes. Résoudre des problèmes n'est pas un concept, c'est une activité qui est un moyen ou un but au service de l'activité mathématique, si bien que la question de l'institutionnalisation est assez complexe. Si on considère que les énoncés de méthodes sont aussi à institutionnaliser, et si on considère que les schémas sont un moyen de modéliser, nous pouvons alors penser qu'il est possible d'institutionnaliser des savoir-faire. La question suivante est alors : tous les problèmes sont-ils modélisables par des schémas en barre. La réponse est négative ; c'est pourquoi le guide violet (MENJS, 2022) annonce d'autres schémas possibles comme : les arbres, les tableaux. Toutefois tous

[1] https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

ces schémas correspondent à un type de problème (ce que le guide violet ne met pas en évidence). Ainsi il est plus judicieux de faire un arbre plutôt qu'un schéma en barres pour répondre au problème suivant « *trouvez tous les menus possibles sachant que vous avez au choix 3 entrées, 4 plats et 2 desserts* ». D'autres problèmes peuvent se modéliser soit par un tableau, soit par des schémas en barre comme « *trois amis comptent leurs nombres de cartes Pokémon. Pierre a 2 fois plus de cartes que Malik. Dounia a 4 fois plus de cartes que Malik. Malik, Dounia et Pierre ont ensemble 91 cartes. Combien de cartes ont Malik, Dounia et Pierre ?* ». Comment alors accompagner un élève qui produirait le brouillon ci-dessous (Fig. 1) vers une institutionnalisation mettant en valeur les schémas en barre. Ce brouillon montre un élève qui a eu un raisonnement pas « essai-ajustement » assez éloigné d'un raisonnement analytique (un raisonnement est dit analytique s'il considère les valeurs inconnues recherchées comme des objets de pensée en opérant sur ces dernières comme si elles étaient connues (Squalli et al (2020) et Adihou et al (2015)). Le raisonnement analytique est propre au raisonnement algébrique qui se « modélise » assez facilement par un schéma en barre (moyennant de savoir les faire).

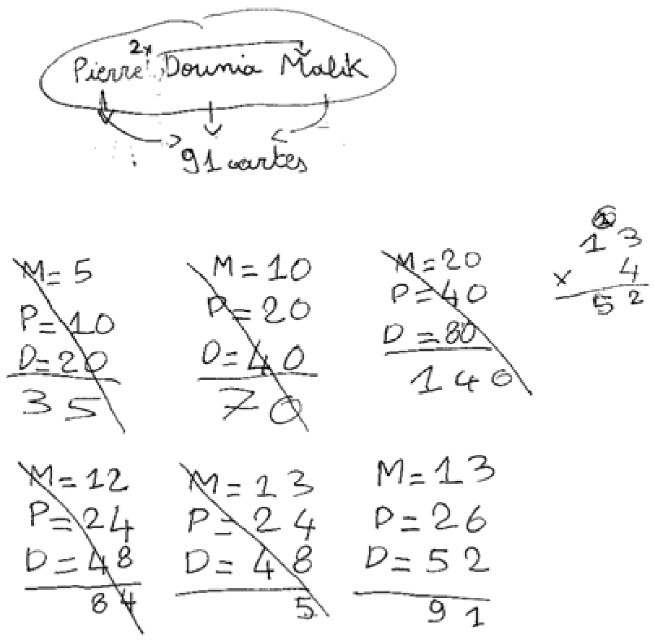



*Figure 1 exemple de recherche d'un élève de CM1 : organisation des données sous forme de tableau.*

Cet atelier a pour objectif de se questionner sur le sens donné à l'institutionnalisation en résolution de problèmes : que peut-on institutionnaliser, existe-t-il des savoirs ou seulement des savoirs faire, existe-t-il une méthode générale pour « savoir » résoudre des problèmes ? Nous avons conscience que nous n'apporterons pas de réponses à ces questions.

Le déroulé de l'atelier a été le suivant : les participants ont joué au jeu du capitaine afin de revenir sur les termes de modélisation et de représentation. Puis, nous avons échangé sur ce que les incitations à réaliser des schémas en barre a comme effet sur les pratiques des enseignants, et nous avons présenté des mises en œuvre d'institutionnalisation d'après des propositions d'enseignants. Avant de décrire ce qui s'est passé dans l'atelier, nous allons revenir rapidement sur ce que signifie « se représenter un problème au sens de Julo ».

# II - APPUIS THEORIQUES

## 1 Se construire une représentation du problème et l'usage de l'écrit

Se représenter le problème ne signifie pas seulement « comprendre l'énoncé » ni le traduire en un ensemble structuré de symboles (Julo, 1995). En effet, même si la connaissance des outils mathématiques est nécessaire à la résolution de problème, elle n'est pas à l'origine de la compréhension du problème.

Le processus représentationnel est un processus complexe que Julo (1995) analyse en trois processus qui interagissent, et pour lesquels l'investissement personnel est déterminant.

- *Le processus d'interprétation et de sélection d'informations*

Ce processus intervient dès la rencontre avec le problème et est fortement dépendant de nos connaissances du monde. Certaines informations non pertinentes peuvent être à ce moment-là prises en compte dans la représentation.

- *Le processus de structuration*

Il consiste en une organisation de ces interprétations en un tout cohérent et relativement stable. La mémoire que nous avons des problèmes déjà rencontrés a un rôle décisif dans la manière dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre, et participe ainsi à la construction et à la structuration de la représentation. Cependant certaines analogies entre les problèmes déjà rencontrés et celui à résoudre peuvent nous enfermer dans une représentation dont la stabilité sera alors un obstacle au changement de point de vue. Et pourtant il sera nécessaire pour les élèves de repenser le problème pour arriver à la solution. Cela nécessite chez les élèves d'avoir la capacité de mobiliser des connaissances et de les adapter au contexte du problème (Robert & al. 2012).

- *Le processus d'opérationnalisation,*

Il consiste à passer à l'action effective : calculer, tracer, écrire, raturer... ou à l'action mentale comme émettre des hypothèses ou faire des déductions. Il vise à mettre en œuvre une stratégie et mobilise entre autres des connaissances opératoires conditionnées par la représentation mentale construite. Lorsque l'écrit est mobilisé, ce processus d'opérationnalisation est la partie la plus visible de la construction d'une représentation sur laquelle peuvent s'appuyer les enseignants pour aider les élèves. Ce processus d'opérationnalisation peut ne pas être atteint selon la manière dont la représentation mentale s'est construite et selon la disponibilité chez les élèves des structures de base.

L'écrit en mathématique constitue une trace sur laquelle l'élève peut s'appuyer pour effectuer un retour réflexif sur sa démarche de résolution. Le brouillon, support de cet écrit, représente un outil incontournable pour produire un texte (Allard et Moussy, 2022). En mathématique, son utilisation est trop souvent réduite à l'effectuation de calculs, alors qu'il pourrait constituer une aide pour s'approprier et mettre en relation les données du problème afin de se construire une représentation du problème au sens de Julo (1996). En classe, les consignes du type « *explique comment tu as fait* », « *fais un dessin ou un schéma* », formulées par les enseignants pour solliciter leurs élèves à passer par l'écrit, amènent ces derniers à produire différents écrits regroupés en trois catégories (Allard & Cavelier, 2020 ; Allard et Moussy, 2022). La première catégorie est constituée des dessins figuratifs sans mise en relation des données. Ces dessins peuvent être utiles en début de scolarité parce qu'ils constituent un support pour soutenir la mémoire et raconter une histoire, mais, ils présentent peu d'intérêt dans la résolution d'un problème et ne sont plus attendus à partir de la fin de l'école primaire. Des élèves, souvent « faibles », continuent pourtant de les produire pour répondre à un contrat didactique ou pour montrer qu'ils sont en activité. La deuxième catégorie, que nous appelons des dessins MER, pour « dessin avec des Mises En Relation de données », sont des écrits qui utilisent des signes graphiques empruntés à différents registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). Le registre graphique, mobilisé par les élèves, est souvent peu conventionnel, ils entourent par exemple des nombres (nombres dans des bulles) ou mettent en relation des nombres grâce à des flèches au-dessus desquelles figurent parfois une relation (+5, x7, etc.). Toutefois, ces signes peuvent être interprétés par un élève ou une classe sans l'être par d'autres. Ces signes, qui ne sont pas le résultat d'un apprentissage spécifique, résultent d'une rencontre en dehors du système scolaire ou d'une utilisation fréquente par certains enseignants. Ils sont alors reconnus par certains élèves comme des outils pouvant être mobilisés dans des situations différentes de celles dans laquelle ils ont été rencontrés. La troisième catégorie est composée de dessins MER conventionnels, c'est-à-dire avec des règles d'usage, et partagés par une plus grande communauté que la classe, l'établissement, le système scolaire. Les schémas en barre en sont un bon exemple (Clivaz & Dindyal, 2021).

### 2. Aide potentielle des dessins MER conventionnels

Une question vive, au moins en France, est celle du rôle des schémas conventionnels comme moyen d'aide à la résolution de problèmes. Vergnaud (1990) a fourni une représentation schématique des problèmes relevant du champ additif en précisant que leur utilisation pouvait être une aide pour comprendre les structures sémantiques chez les élèves en difficulté mais que ces schémas n'avaient pas à être enseignés. D'après lui, leur statut devait d'être transitoire « *en tant que support pour les problèmes, ces diagrammes sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* » (ibid, p. 34). Récemment, Ducharme et Polotskaia, (2008, 2009, 2010) ont développé différents scénarios de mise en œuvre d'utilisation du schéma en barre. Même si ces schématisations ont l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures sémantiques différentes, elles nécessitent, d'après nous, un apprentissage et par conséquent un accompagnement des enseignants dans la construction des séances d'apprentissage relatives à cette représentation. L'utilisation de la schématisation requiert de savoir utiliser à bon escient les signes et symboles mobilisés tels que les segments, les accolades, les pointillés ou le point d'interrogation. Comme tout apprentissage, il est sûrement nécessaire d'automatiser chez les élèves de tels usages pour qu'ils les mobilisent et les adaptent à d'autres problèmes.

## III - LE JEU DU CAPITAINE : UN SCENARIO POUR LA FORMATION

### 1 Le jeu du capitaine

Nous avons repris une activité proposée et décrite ainsi dans Savard et Polotskaia (2014, p. 149) : « *Afin d'aider les enseignantes à bien distinguer entre le contexte socioculturel et la structure mathématique du problème, nous avons utilisé le jeu du capitaine créé par Polotskaia (2009) pour les élèves du primaire. Les participants doivent représenter le problème textuel donné de façon telle qu'une autre personne, qui n'a pas lu le texte, puisse ensuite calculer la réponse. Certaines règles doivent être respectées :*
- *Le problème doit être représenté par un dessin ou un diagramme.*
- *On ne doit pas utiliser de mots ni même de lettres.*
- *On peut utiliser seulement les nombres mentionnés dans le texte et le symbole « ? ».*
- *On ne peut pas utiliser les symboles d'opérations mathématiques, sauf « = ».* »

Compte tenu des choix des problèmes proposés aux formateurs en mathématiques nous avons autorisé l'usage de certains mots du problème. Nous avons alors transformé le jeu à la marge, ainsi :

1. Le dessin doit représenter le problème
2. Vous pouvez utiliser **les mots**, les nombres qui figurent dans l'énoncé du problème et le signe « ? »
3. Vous n'avez pas le droit d'utiliser les signes opératoires, vous pouvez utiliser = et ?
4. Le message ne comporte pas d'autres nombres que ceux de l'énoncé.

### 2 Les deux problèmes : justifications de nos choix

Nous avons bénéficié de deux sessions d'ateliers : les réactions et brouillons réalisés sont sensiblement les mêmes dans les deux groupes.

Nous avons proposé deux problèmes assez différents et nous avons séparé le groupe en deux. Le problème 1, « *les 3 agriculteurs* », est extrait d'une communication orale de Polostkaia lors d'une session de travail à l'OIPA (Observatoire International des Pratiques Algébriques). Le problème 2, « *la mouche* », est extrait de l'ouvrage de Julo (1995) : il était proposé pour travailler sur les processus représentationnels et sur les freins que pouvaient avoir parfois nos connaissances automatisées.

**Problème 1 (d'après une communication de Polostkaia[2])**

*Trois agriculteurs préparent la culture d'un grand champ.* ***Chantal*** *sème trois fois plus de* ***plants de maïs*** *que* ***Samue****l. Samuel sème 250 plants de moins que* ***Mathieu.*** *Les trois ensembles sèment* ***1 825 plants*** *de maïs. Combien Samuel, Chantal, Mathieu ont-ils semé chacun de plants ?*

Ce premier problème est assez « classique » et peut être traité avec les outils de l'algèbre que maitrisent a priori la totalité des participants. C'est un problème complexe, mixte car nécessite de reconnaitre à la fois des structures multiplicatives et additives. Le contexte de l'énoncé n'est pas très usuel mais nous pensons que les participants ont suffisamment décontextualisés leurs connaissances en algèbre pour que ce contexte ne soit pas un frein à la résolution du problème. (Semer des plants de maïs n'a pas beaucoup de sens mais cela n'a pas été relevé le jour des ateliers !)

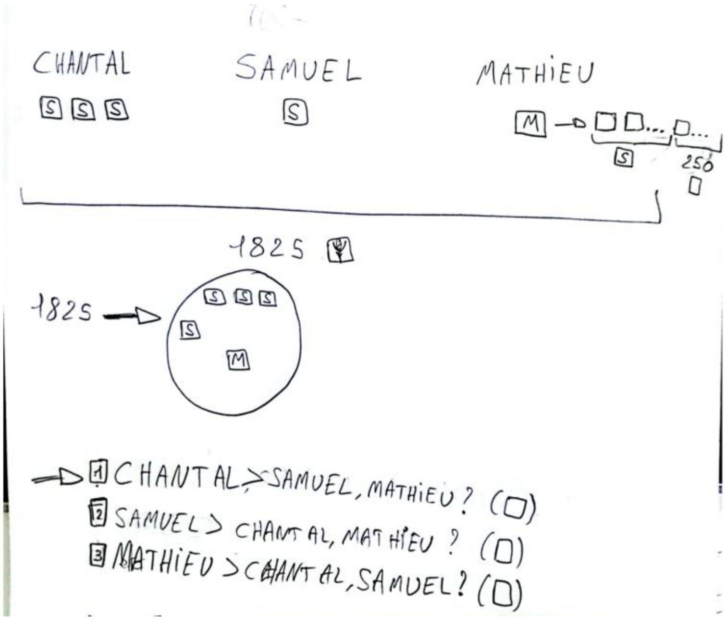



*Figure 2 : schéma réalisé par un étudiant en formation initiale*

Nous nous attendions à ce que les participants, contraints par les consignes du jeu du capitaine, réalisent des schémas voire des schémas en barre.

**Problème 2 (d'après Julo)**

*Une diligence va de* ***Coyote city*** *à* ***Fly city*** *distantes de* ***60 km*** *à l'allure de* ***12 km à l'heure****. Une mouche qui vole à* ***20 km*** *à l'heure part de Fly city et se dirige vers Coyote City. Quand elle rencontre la diligence, elle fait demi-tour et revient à Fly city ; elle repart aussitôt à la rencontre de la diligence et quand elle la rencontre de nouveau fait demi-tour…et ainsi de suite jusqu'à l'arrivée de la diligence à Fly City. Quelle distance la mouche a-t-elle parcourue* ***?***

---

[2] https://www.oipa.education/#h.eov7unyce3h3 **:** *"Trajectoire de nos recherches sur la pensée algébrique au préscolaire : enjeux, défis et perspectives"*

Julo (1995, p. 44) explique l'intérêt qu'il porte à ce problème « *Nous illustrerons un autre aspect du processus de structuration avec le piège que constitue ce petit problème. Pour le résoudre, nous sommes tous tentés de mettre en œuvre une procédure qui consiste à déterminer tous les points de rencontre entre la diligence et la mouche alors qu'il existe une procédure beaucoup plus simple : la diligence roule pendant 5 heures et la distance parcourue par la mouche pendant cette durée est donc de 100km (5×20km/h).*

*Pourquoi ce choix de la procédure la plus complexe ?* ***Parce qu'elle s'impose à nous*** *: nous pensons immédiatement à un certain type de problèmes[…] Ainsi, le problème est d'emblée, interprété et codé. L'observation montre d'ailleurs, qu'à partir du moment où cette procédure est mise en route, il est très peu probable que l'on pense à la solution plus simple car la représentation n'est plus mise en cause.* »

Nous avions proposé ce problème car nous faisions l'hypothèse que la procédure la plus complexe (point de rencontre) rendrait difficile l'émergence d'un schéma aidant à la résolution du problème, voire renforcerait la représentation de la procédure la plus complexe en dessinant les « rencontres » de la diligence et de la mouche.

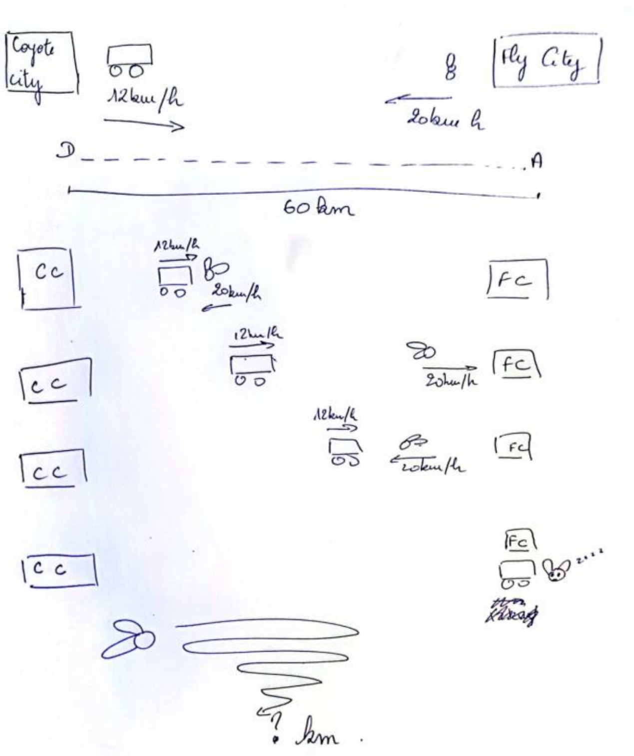



*Figure 3 : schéma réalisé par un étudiant en formation initiale*

Alors que le jeu du capitaine était proposé pour outiller les enseignants de primaire sur l'apprentissage des structures et favoriser ainsi l'introduction du schéma range tout, nos intentions étaient différentes.

Les participants sont pour la plupart des formateurs en mathématiques et le contexte des problèmes est pour eux assez rapidement traité ; certains formateurs faisaient des schémas en barres, d'autres des schémas bulles en précisant les relations (250 de moins que Mathieu). Ils ont tous réussi à produire un schéma qui permettait à l'équipe « adverse » de résoudre le problème à partir de l'écrit produit sans jamais avoir lu le texte.

Pour le problème des mouches, le traitement a été comme attendu bien différent. Les dessins ressemblant à ceux de la figure 2 étaient source de discussion (s'agit-il d'une abeille, d'une mouche, d'une voiture ???, ils se rencontrent et repartent…). Les quelques mots autorisés permettaient aux membres de l'équipe de communiquer pour produire un dessin reflétant l'énoncé. La plupart de ceux qui ont été confrontés à ce problème ont mis un temps certain avant de changer de point de vue sur ce problème ; il a suffi parfois que l'animatrice dise « il suffit de connaissances de fin d'école ou de collège pour le résoudre » pour que les participants abandonnent les calculs fastidieux et changent leur processus de structuration et d'opérationnalisation. Enfin, ceux qui ont reçu le message, ont eu également plus de difficulté à le résoudre que celui des plants de maïs.

Nous avons pu alors revenir sur le fait que « se représenter un problème », ce n'est pas seulement avoir la capacité de faire un schéma sans pour autant définir si le schéma est une aide ou juste l'expression d'une représentation mentale (en termes des trois processus) correcte.

## IV DISCUSSION

### 1. Discussion sur l'institutionnalisation des schémas en barres

Ce scénario de formation semble avoir rempli son rôle : échanger sur le sens de « se représenter un problème », sur la fonction de la conservation en mémoire des problèmes et sur les analogies de raisonnement qui, la plupart du temps aident à la résolution ou en détourne la représentation (la mouche). C'est ainsi que des discussions portent sur la nécessité d'automatiser les structures et en même temps de travailler sur la flexibilité cognitive nécessaire à cette activité complexe de résolution de problèmes. Afin d'entretenir les échanges, nous proposons de lire ensemble une transcription d'une séance de mathématiques (Annexe 1) en classe de CM1 (cycle 3, enfants de 9 ans) d'une enseignante débutante.

Cette dernière essaie alors d'appliquer ce qu'elle a compris des textes produits par l'institution et des formations reçues en constellation et nous explique qu'apprendre la schématisation selon les schémas de Vergnaud fait partie des axes du projet d'école. Notons que nous n'avons aucune trace des éléments donnés en formation.

Les élèves devaient résoudre le problème suivant : *Jean va faire des courses, il achète un poulet à 16 euros, une montre à 195 euros et un dictionnaire à 39 euros. Combien dépense-t-il ?*

Il s'agit d'un simple problème additif avec des nombres entiers. Les élèves passeront 45 minutes à le résoudre. L'enseignante questionne sur la méthodologie à suivre, ainsi les élèves ne sont plus conduits à trouver un résultat mais la somme des parties, le tout. L'ensemble des échanges est assez difficile à suivre et les élèves cherchent à donner une réponse qui convient à l'enseignante très éloignée de l'activité mathématiques « *on prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit* ».

***Mme RM*** *: Qu'est-ce qu'il faut faire ? Quelle est la première chose à faire ?*
*Chercher la question*
***Mme RM*** *Mais avant de chercher la question, faire les dessins et les calculs.*
*Qu'est-ce qu'on doit savoir faire ?*
*Il faut d'abord avoir compris le problème, se faire le film dans la tête. Quand on a compris, que fait-on ?*
***Elève*** *: On fait un schéma*
***Mme RM :*** *Oui on fait un schéma quand on a compris. Mme RM dessine ensuite les schémas de Vergnaud.*
*La somme du calcul*
*C'était quoi (en montrant les carrés) ? Comment ça s'appelle ?*
*Les carrés, ce sont la partie du problème, on a la partie du problème et on a le tout. Ça correspond à quoi le tout. Ce tout il correspond à quoi ?*
***Elève*** *: C'est quand les deux carreaux...non les deux parties…*
*Le tout c'est quoi ?*
***Mme RM :*** *C'est le résultat. C'est la somme des parties, ça c'est le tout.*
***Mme RM :*** *Quand le schéma n'est pas rempli, on fait quoi ?*
***Elève :*** *On prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit.*

*Figure 3 : extrait d'une transcription de classe de Cm1 (annexe 1)*

Cet exemple n'est pas isolé ; nous sommes confrontés à ce type de séance depuis la promotion des schémas en barre. Certains participants témoignent de cela tandis que d'autres pensent que la formation devrait réduire ce genre de séances sans sens. (Voir annexe 1 pour la transcription de la séance complète).
L'intention d'institutionnaliser des méthodes et une forme de représentation graphique est bien là, mais ni le choix du problème ni le choix de la mise en œuvre n'assurent une réelle activité mathématique. L'attention de cette jeune enseignante est tournée sur la méthode à acquérir et non sur le contenu mathématique. Cette dernière remarque rentre en écho avec les écrits de Houdement (1999) qui dénonçaient le manque d'efficacité des aides dites méthodologiques.
C'est pourquoi, après la mise en commun des affiches réalisées et la fin du jeu et les échanges sur l'extrait de séance de Mme RM, nous avons montré comment avec les enseignants du LéA 2 Tem (recherche collaborative en partenariat avec l'Ifé), nous avons trouvé des moyens de gérer ces tensions notamment en ce qui concerne le processus d'institutionnalisation.

Nous préconisons, comme pour le calcul réfléchi, une institutionnalisation souple prenant en compte des cycles de décontextualisation et recontextualisation. En effet, les structures de base doivent être automatisées (Houdement, 2013), pour autant cette automatisation passe-t-elle par l'apprentissage de schémas en barre ? Nous craignons que l'apprentissage de ce type de modèle prenne alors le pas sur la résolution effective du problème. En revanche, nous sommes convaincus de l'utilité de laisser une trace écrite, sans s'accorder sur la forme la plus efficace.

## 2 L'institutionnalisation des problèmes basiques : des réponses d'enseignantes

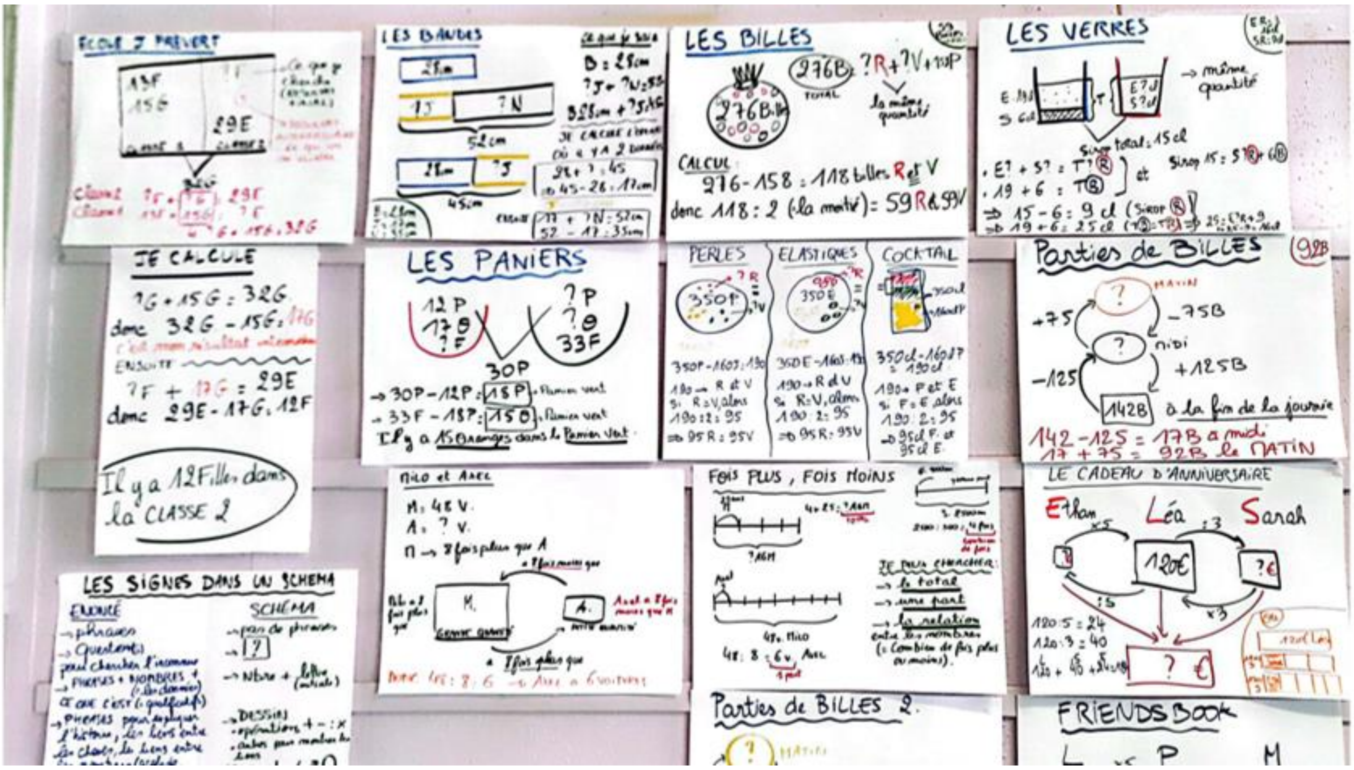
Les problèmes basiques ont été définis par Houdement (2011, 2013) comme des briques élémentaires de savoirs, des problèmes à deux données qui en produisent une troisième. Dans cette typologie, les problèmes relevant du champ conceptuel de Vergnaud sont inclus. Si l'on pense l'institutionnalisation de ces structures, nous envisageons a priori plusieurs points de vigilance à indiquer aux enseignants :

- Maitriser la typologie de Vergnaud et ce que signifient des champs conceptuels (comprendre qu'addition et soustraction relèvent du même champ par exemple, l'importance du langage et des signes…), savoir se positionner sur l'opportunité ou pas de présenter les schémas de Vergnaud aux élèves ;
- Discuter sur la pertinence ou non de l'apprentissage des schémas en barre (qu'est-ce qu'on gagne ; qu'est qu'on perd ?).

## 3 L'institutionnalisation des problèmes complexes : des réponses d'enseignantes.

Les problèmes complexes, d'après Houdement (2011, 2013) sont définis comme des agrégats de problèmes basiques à reconstruire et non comme des problèmes dont il faudrait déterminer, avant la résolution, les étapes. Il est alors beaucoup plus difficile de les catégoriser que les problèmes basiques. Les enseignantes du LéA n'envisageaient pas de faire d'institutionnalisation sur ce type de problèmes. Pour autant, nous avons cherché ce qu'il était possible de réaliser. L'idée des affiches s'est imposée même si certaines argumentaient sur le peu d'efficacité de ces affichages. Nous avons établi un cahier des charges reprenant certaines contraintes du Jeu du capitaine : ne pas écrire l'énoncé mais proposer un schéma ou un dessin MER pour se remémorer le problème, proposer des « écritures mathématiques en ligne avec identification de l'inconnue », et une phrase réponse. Nous avions bien conscience qu'il s'agissait plus de garder une trace de l'activité que de l'aboutissement d'une institutionnalisation des savoirs.

8 enseignantes sur 16 ont trouvé un intérêt à ces affiches en indiquant en premier lieu l'importance de garder une trace. Myriam, en Rep+ a couvert un pan de mur de sa classe de telles affiches rendant alors visibles les problèmes cherchés sur une période 6 mois. Sur ces affiches se juxtaposent des schémas bulles flèches, des schémas en barres et des dessins MER (les Verres, les bandes).




## IV - RESULTATS

### 1 Comparaison sur la réussite d'un même problème posé dans des classes du LéA et dans des classes hors LéA

Nous donnons à voir ici des résultats d'une étude en collaboration avec Julia Pilet, Doris Jeannotte qui a été exposée au colloque EMF au Bénin en 2022. Les actes de ce colloque décrivent davantage les résultats. Nous restons toujours dans notre volonté d'être prospectifs sur cet atelier, nous montrons alors les résultats obtenus à la suite de la passation d'un même problème auprès d'élèves de Cm1, Cm2, sixième et collège.

Le problème posé était le suivant (le mot « billes » à parfois était remplacé par « cartes Pokémon »)

*Trois amis comptent leurs billes. Theo a deux fois plus de billes que jean. Farid a 4 fois plus de billes que Farid. Théo, Jean et Farid ont ensemble 189 billes. Combien de billes ont Jean, Théo et Farid ?*

Notre échantillon est assez hétérogène et nous avons dépouillé plus de copies d'élèves du collège que de l'école.

| Enseignant | Établissement | Classe | Élèves (total 171) | Total de cartes Pokémon | Présentation et utilisation des schémas en barre avant le problème des Pokémon | Problèmes de partage fréquentés avant celui des Pokémon |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Primaire | CM1 | 19 | 91 | Oui et autres MER | Oui |
| An | Primaire | CM1 | 9 | 91 | Oui et autres MER | Oui |
| Ca | Primaire | CM2 | 8 | 189 | Oui et autres MER | Oui |
| D | Collège | 6e | 44 | 189 | Oui | Non |
| A | Collège | 6e | 36 | 189 | Oui | Non |
| D | Collège | 5e | 55 | 189 | Non | Non |

**Tableau 1** - *Présentation synthétique des données récoltées*

Les premiers résultats sont intéressants et montrent (avec toutes les limites et précaution à prendre compte tenu de la non-représentativité de notre échantillon) que les élèves de primaire qui ont travaillé souvent la résolution de problèmes à travers le carnet de problèmes et les affichages obtiennent une meilleure réussite au problème complexe ci-dessus. Le nombre de non-réponse des élèves de collège est assez inquiétant et laisse penser que le rapport aux maths construit à l'école ou à l'entrée du collège est très défavorable. Nous interprétons les résultats ainsi : les élèves de LéA confrontés à des écrits variés, ne relevant pas complètement d'institutionnalisation ont pu enrichir leurs connaissances sur le rôle et les fonctions de l'écrit, ont catégorisé grâce aux processus de décontextualisation/recontextualisation les problèmes basiques sans toutefois avoir appris les schémas de Vergnaud, et ont pris conscience de la nécessaire flexibilité à développer pour résoudre de tels problèmes. Aucun des élèves de CM n'a effectué de schémas en barres alors qu'un enseignement a été effectué. Ils ont pour la plupart réalisé des schémas bulles flèches.

| Validité | Primaire CM1-CM2 | Collège 6e | Collège 5e | Total |
|---|---|---|---|---|
| Correcte | 25 (70%) | 1 (1%) | 10 (18%) | **36 (21%)** |
| Incorrecte | 0 (0%) | 15 (19%) | 17 (31%) | **32 (19%)** |
| Non réponse | 11 (30%) | 64 (80%) | 28 (51%) | **103 (60%)** |
| Total | 36 (100%) | 80 (100%) | 55 (100%) | **171(100%)** |

***Tableau 2*** *- Validité de la réponse selon le niveau de classe*

## V - CONCLUSION

Cet atelier avait pour objectif principal d'amorcer une réflexion sur le sens à donner aux processus d'institutionnalisation en résolution de problèmes. Institutionnaliser des représentations graphiques est possible mais à la condition de pouvoir faire des liens entre le type d'écrit et le raisonnement. Nous craignons que dans les classes ne soient proposées seulement que des problèmes qui se résoudraient à l'aide d'une schématisation en barre, ce qui réduirait la richesse des différents raisonnements à rencontrer même à l'école. La focale très forte mise sur l'importance de résoudre des problèmes est nécessaire mais la transposition des apports de la formation, pas toujours convergents, agit comme un frein puissant à la mise en œuvre d'un réel enrichissement des pratiques enseignantes en RDP. Le cas du LéA est particulier, dans le sens où ce collectif est constitué d'enseignantes expérimentées, parfois formatrices et volontaires pour s'engager dans un travail de réflexion qui dure trois ans. Nous partageons leurs résistances à institutionnaliser les schémas en barres ; en revanche, elles ont constaté les effets sur leurs élèves de résoudre souvent des problèmes sans toutefois les enfermer dans un mode de représentation graphique. Certaines ont écarté également les affiches car selon elles trop modélisantes : les deux enseignantes qui n'adhérent pas sont celles qui ont une licence en mathématiques ; d'après elles, figer une représentation ce n'est pas tenir compte du cheminement cognitif personnel de l'élève. Nous avons fait une focale sur les problèmes basiques et complexes car ils apparaissent un peu comme les « oubliés » de la dernière décennie. Pour autant, les problèmes types « rallye mathématiques » ne sont pas à écarter pour entrainer des compétences nécessaires à l'activité mathématique comme la persévérance, l'argumentation voire la preuve.

L'enjeu, à notre sens, en formation est essentiellement orienté sur comment amener les élèves à chercher effectivement et fréquemment des problèmes variés plutôt qu'à mettre autant en avant une forme de schéma plutôt qu'une autre ce qui est réducteur de ce qu'est l'activité mathématique.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

ADIHOU, A., SQUALLI, H., SABOYA, M., TREMBLAY, M., ET LAPOINTE, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans *Actes du colloque EMF-2015 Pluralités* *culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 1-16).

ALLARD, C. (2011). Apprends ta leçon, oui mais quelle leçon ? *Actes du 38ème Colloque international de la Copirelem, Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité des élèves, Dijon, 2011.*

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Paris VII, p. 297.

ALLARD, C. (2017) *De* la ressource à la séance de classe : institutionnaliser : tâche impossible ? *L'enseignement des mathématiques et la formation des maitres aujourd'hui. Quelles orientations, quels enjeux ? Actes du 43ème Colloque International de la Copirelem, Le Puy en Velay, 2017.*

ALLARD, C. & CAVELIER, S. (2020). *Résoudre des problèmes en CM1/CM2,* Paris, France : Nathan.

ALLARD, C. MASSELOT, P. PELTIER-BARBIER, M.L. RODITI, E. SOLNON, A. TEMPIER, F**.** (2021) Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019 note d'information 21.10- Février 2021. Paris : DEPP-B4-Ministère de L'éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

ALLARD, C. MASSELOT, P. PELTIER-BARBIER, M.L. RODITI, E. SOLNON, A. TEMPIER, F. (2022) Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. Documents de travail-série études, n°22.E05, Paris : DEPP-B4-Ministère de L'éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

ALLARD, C. & MOUSSY, C. (2022). Travail collaboratif entre enseignants, formateurs et chercheurs sur la résolution de problèmes numériques en cycle 3. *Actes du 47ème Colloque Copirelem, Grenoble, 2021.*

BROUSSEAU, G. (1984). *Le rôle du maitre et l'institutionnalisation.* IIIème école d'été de didactique des mathématiques.

BUTLEN, D. & CHARLES-PEZARD, M. (2003). Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 23(1), 41-78.

CLIVAZ, S. & DINDYAL, J. (2021). Représentations graphiques et résolution de problèmes : le cas de Singapour. *Grand N, 108,* 5-25.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 1. *Envol, GRMS, 145*, 21-27.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 2. *Envol, GRMS, 146*, 33-38.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2010). Two Scenarios for Problem Solving and Pro-algebraic Reasoning Development in Primary School Children. *Petroleum-Gas University of Ploiesti Bulletin, Educational Sciences Series*, 62(1B), 170-184.

HOUDEMENT, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, IREM de Grenoble, 63, 59-76.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16***,** 67-96.

HOUDEMENT, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* (HDR, Université Paris Diderot, Paris). Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C.(2014). Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue Française de Pédagogie*. 188, 13-22.

MENJS (MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS), (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Eduscol.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (1993). Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques*, 13/1.2, 95-118.

ROBERT, A., PENNINCK, J., LUTTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté. DOI :10.4000/books.pufc.9978

SQUALLI, H., LARGUIER, M., BRONNER, A., ADIHOU, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. Éducation et francophonie, 42(2), 138–157. https://doi.org/10.7202/1027910ar

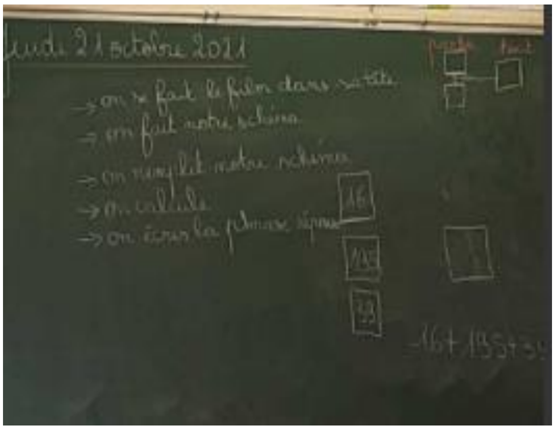
VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10 (2.3),* 133-170.

VILLANI C., TOROSSIAN C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Nationale. France.

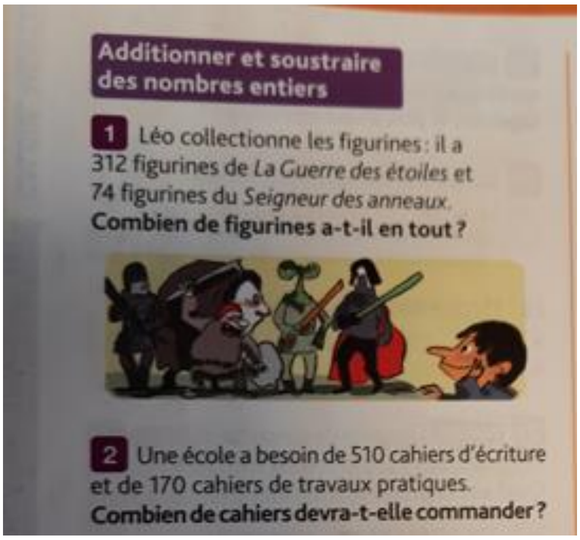
# VII - ANNEXE 1 : TRANSCRIPTION D'UNE CLASSE D'UNE ENSEIGNANTE STAGIAIRE

**Séance de 45 minutes en classe de Cm1**

**Mme RM** : « Que doit-on faire quand on a un problème pour résoudre ? »
**Elève :** Je cherche ce qu'il y a à trouver, la somme ou le reste
**Mme RM** : Qu'est-ce qu'il faut faire ? quelle est la première chose à faire ?
**Elève :** Chercher la question
**Mme RM** Mais avant de chercher la question
**Elève :** Faire les dessins et les calculs,
Qu'est-ce qu'on doit savoir faire ?
Il faut d'abord avoir compris le problème, se faire le film dans la tête Quand on a compris, que fait-on ?
**Elève :** On fait un schéma
**Mme RM** Oui on fait un schéma quand on a compris. Mme RM dessine ensuite les schémas de Vergnaud.
La somme du calcul
C'était quoi (en montrant les carrés), ? comment ça s'appelle ?
Les carrés se sont la partie du problème, on a la partie du problème et on a le tout. Ça correspond à quoi le tout. Ce tout il correspond à quoi ?
**Eleve** : C'est quand les deux carreaux…non les deux parties..
Le tout c'est quoi ?
**Mme RM** C'est le résultat. C'est la somme des parties, ça c'est le tout.
**Mme RM** Quand le schéma n'est pas rempli, on fait quoi ?
**Elève** : On prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit.
**Mme RM** Je vais le lire et nous allons le compléter ensemble. Prenez vos ardoises.
**Mme RM** lit le problème :
**Mme RM** : donnez-moi une information sur le problème ?
**Mme RM** écrit 16 au tableau *(pas de qualification, ni d'éléments de contexte*), 195, puis un dictionnaire 39 euros.
Qu'est-ce qu'on cherche ?
**Elève :** Le résultat ?



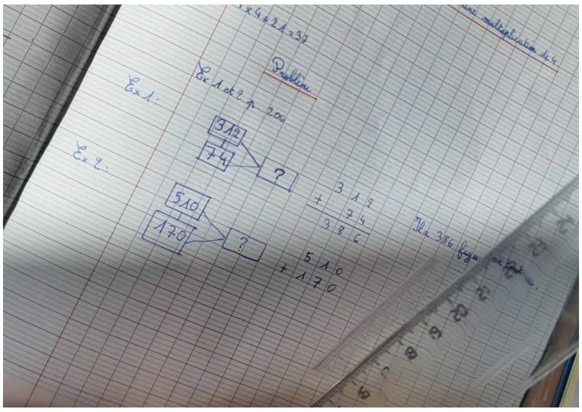
**Mme RM** : Non cela ne m'intéresse pas ! on cherche quoi ?
On Cherche quoi ?
**Elève** Le total ? Le prix de ce qu'elle a acheté ?
**Mme RM** : Donc on cherche quoi, on cherche quoi finalement
**Elève :** Le résultat ? On cherche le tout des parties ?
**Mme RM :** Oui c'est ça. Combien elle a dépensé ?
Donc maintenant faites le schéma ! Combien j'ai besoin de parties ?
**Elève :** Trois
**Mme RM :** Pourquoi trois parties ?
**Elève :** Parce qu'elle a acheté trois choses.
**Mme RM :** Oui et on remplit notre schéma ? Attention, on ne connait pas la partie ou le tout ?
Puis on complète ce qu'on connait. Donc on connait le montant du poulet, de la montre et du dictionnaire. Ça s'appelle comment (en montrant les carrés) ?
**Mme RM :** Des parties !
Quand on a des nombres avec des points d'interrogation, que fait-on ?
**Eleve :** On calcule
**Mme RM :** Donc quel est mon calcul ?
(Mme RM écrit 16+195+39), on calcule quoi ?
**Elève :** La somme de ce qu'on a acheté…
Puis **Mme RM** fait l'opération au tableau et trouve 250.
Que fait-on maintenant ?
**Elève :** La phrase réponse.
Vous sortez votre cahier du jour. Faire les problèmes proposés par « outils pour les maths » dans la rubrique « additionner et soustraire ».


**Additionner et soustraire des nombres entiers**

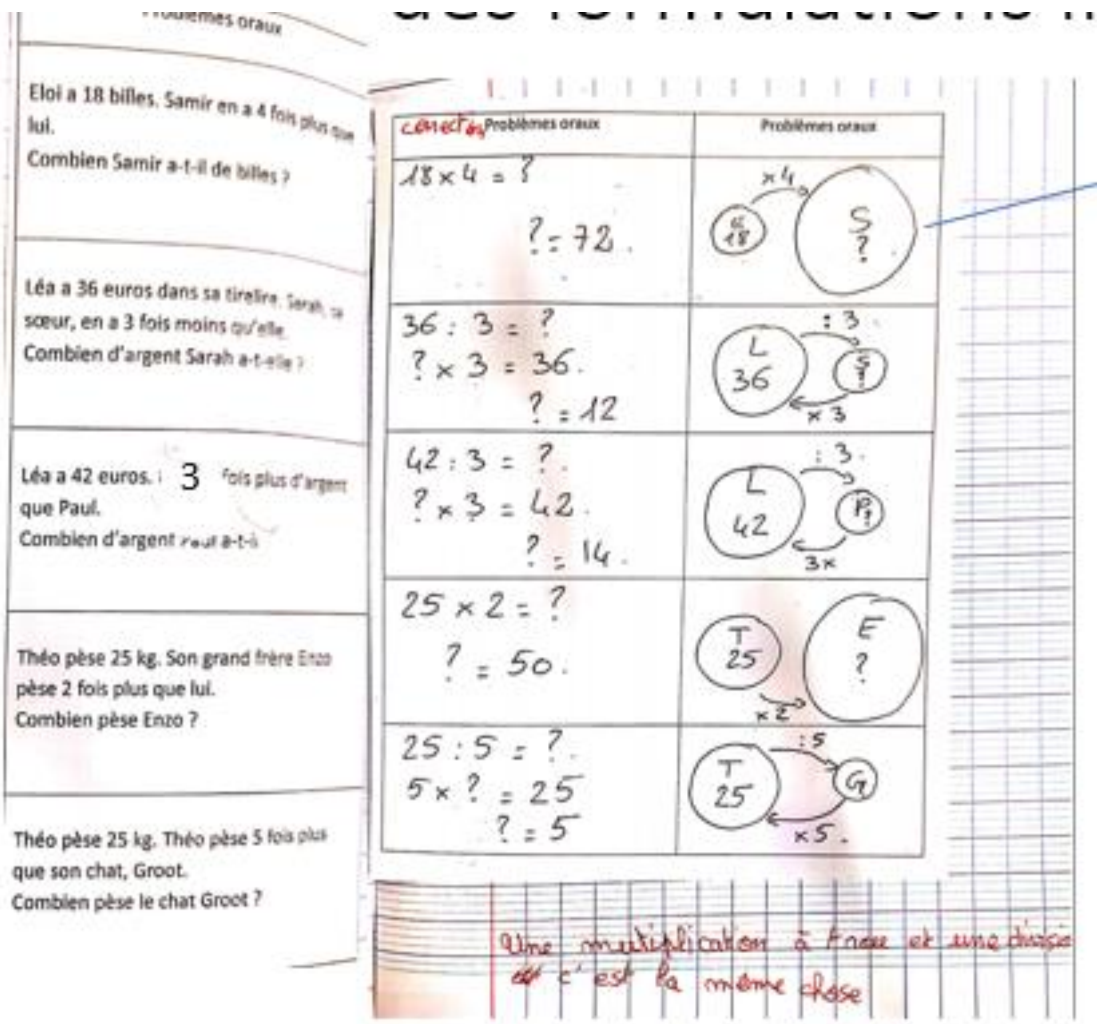
**1** Léo collectionne les figurines : il a 312 figurines de *La Guerre des étoiles* et 74 figurines du *Seigneur des anneaux*.
**Combien de figurines a-t-il en tout ?**

**2** Une école a besoin de 510 cahiers d'écriture et de 170 cahiers de travaux pratiques.
**Combien de cahiers devra-t-elle commander ?**

Les élèves font les deux ou les trois premiers problèmes de la page, et consacrent un temps certain à dessiner des parties( ?) et des « tout » ( ?)



## VIII - ANNEXE 2 : EXTRAIT DU CARNET DE PROBLEMES



Problèmes oraux

Eloi a 18 billes. Samir en a 4 fois plus que lui.
Combien Samir a-t-il de billes ?

Léa a 36 euros dans sa tirelire. Sarah, sa sœur, en a 3 fois moins qu'elle.
Combien d'argent Sarah a-t-elle ?

Léa a 42 euros. 3 fois plus d'argent que Paul.
Combien d'argent Paul a-t-il

Théo pèse 25 kg. Son grand frère Enzo pèse 2 fois plus que lui.
Combien pèse Enzo ?

Théo pèse 25 kg. Théo pèse 5 fois plus que son chat, Groot.
Combien pèse le chat Groot ?

| correction Problèmes oraux | Problèmes oraux |
|---|---|
| $18 \times 4 = ?$ <br> $? = 72$ | $\times 4$ E 18 S ? |
| $36 : 3 = ?$ <br> $? \times 3 = 36$ <br> $? = 12$ | $: 3$ L 36 S ? $\times 3$ |
| $42 : 3 = ?$ <br> $? \times 3 = 42$ <br> $? = 14$ | $: 3$ L 42 P ? $3\times$ |
| $25 \times 2 = ?$ <br> $? = 50$ | T 25 E ? $\times 2$ |
| $25 : 5 = ?$ <br> $5 \times ? = 25$ <br> $? = 5$ | $: 5$ T 25 G $\times 5$ |

Une multiplication à trou et une division c'est la même chose

# DES DISPOSITIFS DE RECHERCHES DE PROBLEMES EN CYCLE 3

**Stéphanie CROQUELOIS**
Professeur de Mathématiques, INSPE Université Lyon 1
stephanie.croquelois@univ-lyon1.fr

**Marie-Line GARDES**
Professeure HEP ordinaire
HEP Vaud, UER MS
marie-line.gardes@hepl.ch

Résumé
Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes (Perrin, 2007). Tout mathématicien serait d'accord avec cette maxime. Mais qu'en est-il dans nos classes ? Et qu'en est-il dans la formation des enseignants en particulier du premier degré (Aldon et al. 2017) ? La mise en œuvre de situations didactiques de recherche de problèmes est une façon différente d'envisager l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans le cours ordinaire de la classe. Dans cet atelier, nous montrons que ces situations permettent de mettre en pratique les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique (Gardes, 2018) sur l'acquisition de connaissances et compétences mathématiques. Nous mettons également en évidence qu'elles permettent aux élèves de proposer et d'interroger différents modèles et différentes représentations des objets mathématiques en jeu (Gardes & Yvain, 2015).

Cet atelier a proposé de présenter les travaux de l'équipe DREAM qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques par la recherche de problèmes. Notre objectif a été double, d'une part présenter des dispositifs de recherche de problèmes en classe en mettant en évidence leurs ressorts pour l'apprentissage des mathématiques, et d'autre part, présenter des dispositifs de formations d'enseignants à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes. Pour cela, dans une première partie de ce texte, nous détaillons les travaux de l'équipe DREAM, en particulier l'organisation d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes. Dans une seconde partie, nous développons les deux exemples de situations de recherche que nous avons fait vivre aux participant·e·s lors de l'atelier. Nous mettons en évidence à cette occasion les compétences et connaissances travaillées dans la situation « La somme des dix entiers consécutifs » et nous détaillons une mise en œuvre en classe pour la situation « Le problème qui déchire ». Dans une troisième partie, nous faisons un focus sur la manipulation et les modes de représentation des objets mathématiques. Enfin, dans une dernière partie, nous présentons succinctement plusieurs dispositifs de formation à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes proposés par le groupe DREAM.

## I - TRAVAUX DE L'EQUIPE DREAM

### 1 Contexte et présentation

L'équipe de recherche DREAM (Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) se situe dans la tradition de l'IREM de Lyon concernant le *problème ouvert* (Arsac & al., 1988, Tisseron & Mizony, 1985/2005, Arsac & Mante, 2007, Aldon et al., 2010). L'hypothèse qui fonde son travail consiste à affirmer que les mathématiques s'apprennent comme elles se créent, c'est-à-dire en résolvant des problèmes. C'est en approfondissant cette hypothèse que les travaux de l'équipe ont conduit à considérer la dialectique expérience-théorie dans la résolution de problème comme centrale dans l'apprentissage des élèves. L'équipe DREAM s'appuie aussi sur les travaux de recherche développés à l'IFÉ (ENS de Lyon), à l'INSPÉ et dans d'autres laboratoires universitaires partenaires (Gardes, 2013 ; Front, 2015 ; Aldon, 2021) qui ont permis en particulier d'introduire le concept de *situation didactique de recherche de problèmes* (Front, 2015 ; Gardes, 2018). Un axe du travail a notamment conduit à considérer les problèmes de recherche comme des jalons de l'enseignement à un niveau donné en donnant à chaque problème, ou plus exactement à chaque situation construite autour d'un problème de mathématiques, une place dans la progression annuelle de l'enseignement. Dans le paragraphe suivant, nous détaillons cette organisation d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes.

## 2 Enseignement fondé sur la recherche de problèmes

### *2.1 De quels problèmes parle-t-on ?*

Selon Perrin (2007), « faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes ». Ce point de vue est également partagé par l'Institution et mis en évidence dans les programmes de mathématiques : « la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement des mathématiques tout au long de la scolarité obligatoire » (MEN, 2018). De nombreux types de problèmes peuvent être utilisés au service de cet enseignement : les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances, les problèmes d'application et de réinvestissement pour utiliser des connaissances déjà étudiées, les problèmes de transfert pour permettre aux élèves d'étendre le champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée et les problèmes pour chercher destinés à développer des compétences mathématiques.

Nous nous intéressons spécifiquement aux problèmes pour chercher qui ont les caractéristiques suivantes[1] (Gardes, 2018) :

- l'énoncé est court ;
- l'énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution ;
- le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves ;
- le problème permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale[2] ;
- la recherche du problème met en jeu une dialectique entre la mobilisation, l'approfondissement de connaissances et le développement de compétences.

Si ces problèmes portent un fort potentiel didactique, ils ne permettent pas en eux-mêmes les apprentissages. C'est la mise en œuvre d'une situation didactique qui doit les assurer.

[1] Cette caractérisation des problèmes est proche de celle des problèmes ouverts (Arsac et al., 2007) mais elle s'en distingue en mettant davantage l'accent sur la dimension expérimentale d'une part et sur la prise en compte de la mobilisation et l'approfondissement des connaissances mathématiques notionnelles, en articulation avec le développement de compétences en résolution de problèmes d'autre part. Ils sont également proches des problèmes atypiques (Houdement, 2016) mais s'en distinguent dans la mesure où ils ne peuvent être résolus avec des connaissances déjà connues des élèves.

[2] La dimension expérimentale est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets (Durand-Guerrier, 2010).

### 2.2 Situation didactique de recherche de problème

Le cadre de référence que nous utilisons pour penser et produire des dispositifs permettant aux élèves d'apprendre est le cadre des *situations didactiques* (Brousseau, 1998). Ainsi les *situations didactiques de recherche de problèmes* (SDRP *par la suite*) sont des situations (Front, 2015) :

- didactiques, c'est-à-dire des situations où l'enseignant cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique ;
- d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fait fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale envisagée par l'élève doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève puisse modifier son système de connaissances pour répondre à la situation proposée ;
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux ;
- où la dimension expérimentale est fortement présente.

Ce qui est au cœur d'une situation didactique de recherche de problèmes, c'est donc le problème mathématique. Il définit le projet commun et donne le sens de l'action, sans garantir pour autant les apprentissages. C'est en effet la mise en œuvre de la situation didactique de recherche de problèmes qui doit les assurer. Nous avons élaboré, mis en œuvre en classe et analysé sept situations didactiques de recherche de problèmes sur des thématiques variées, du cycle 3 à l'université (Aldon et al., 2010). Ce travail se retrouve maintenant sur le site du groupe DREAM[3].

Suite à l'élaboration de ces situations, le groupe DREAM a souhaité approfondir ses recherches sur l'enseignement et l'apprentissage fondés sur la recherche de problèmes en interrogeant la possibilité de créer une organisation de l'enseignement plus globale permettant :

- de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe ;
- d'approfondir la recherche d'un problème en classe ;
- de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves ;
- de relier la progression d'un niveau donné à ces situations didactiques de recherche de problèmes.

Cette réflexion a mené à l'élaboration de progressions fondées sur la recherche de problèmes, déployées sur une année à différents niveaux.

### 2.3 Séquence fondée sur des SDRP

La proposition générale de construction d'une séquence sur une SDRP s'appuie sur une analyse *a priori* fine des potentialités de la situation. Dans chaque SDRP, les analyses tout d'abord mathématiques puis les observations montrent, de façon robuste, que des notions vont être convoquées dans la recherche de la solution. Les élèves confrontés à la SDRP investissent des concepts mathématiques, les réorganisent et les actualisent dans le but de résoudre le problème posé. L'enseignant doit alors attraper toutes les notions, connaissances, savoir-faire qui sont à l'œuvre dans la situation particulière de sa classe. C'est alors sur ces notions mises en œuvre effectivement (et seulement sur celles-là) que l'enseignant peut aménager la suite de son enseignement. À partir de ces observations, l'articulation des savoirs et des savoir-faire amène à la structuration de la leçon et des institutionnalisations qui pourront émerger de la SDRP. La progression est

[3] https://math.univ-lyon1.fr/dream/

alors construite sur les potentiels des SDRP et complétée par tous les apprentissages nécessaires pour la bonne maîtrise des concepts mathématiques du programme (Figure 1).


*Figure 1. Canevas d'une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problème*

La première phase est composée de la mise en œuvre d'un problème de recherche et de son bilan. La mise en œuvre d'un problème de recherche dure entre deux à trois heures, réparties sur une à deux séances. Le scénario est celui d'un problème ouvert (Arsac et Mante, 2007), avec une phase d'appropriation et de recherche individuelle, une phase de recherche en groupes, une phase de mise en commun et débat collectif. Cette recherche de problème donne ensuite lieu à un bilan de la recherche qui servira de base pour approfondir l'étude du problème et organiser la suite de la séquence. Le bilan de la recherche contient le plus souvent :

- les conjectures ou propriétés proposées par les élèves (en distinguant ce qui a été démontré ou pas),
- les raisonnements et méthodes utilisés,
- les savoirs mathématiques évoqués,
- les difficultés rencontrées.

La seconde phase est constituée des études. Ce sont les parties qui vont structurer la séquence et permettre d'approfondir le travail qui a été commencé en classe pour permettre aux élèves d'avancer dans la résolution du problème et de travailler les notions mathématiques ciblées. Elles s'articulent autour :

- des retours sur les différents points évoqués dans le bilan (justification, approfondissement…),
- de ce qu'il reste à investiguer,
- des connaissances mobilisées,

et comportent :

- des points de leçons bien identifiables,
- des exercices en lien direct avec la situation ou avec les connaissances mobilisées.

La troisième phase comporte la synthèse de l'étude du problème ainsi que les traces écrites. La synthèse consiste à faire un résumé de la séquence pour rappeler aux élèves le parcours effectué et les notions mathématiques abordées. Elle peut être présentée sous forme d'une carte mentale. Les traces écrites correspondent aux éléments de leçons à retenir pour les élèves. Elles sont organisées sous forme de fiches méthodes ou chapitres, pour que l'élève puisse avoir un support rigoureux des notions qui ont été abordées.

Une organisation de l'année peut ensuite être construite à partir de plusieurs séquences fondées sur des SDRP.

Dans la partie suivante, nous présentons les deux situations didactiques de recherche de problèmes que nous avons proposées aux participant·e·s de l'atelier. Pour la première situation « La somme des dix entiers consécutifs », nous avons demandé de chercher le problème puis de réfléchir aux potentialités de la situation pour les apprentissages : identifier les objectifs d'apprentissage et les mathématiques en jeu, selon le niveau de classe. Pour la seconde situation « Le problème qui déchire », nous avons également proposé de réfléchir aux mises en œuvre possibles en classe.

## II - EXEMPLE 1 - SOMME DES DIX ENTIERS CONSECUTIFS

Ce problème a permis aux participant·e·s de vivre une première situation de recherche d'un problème en plusieurs étapes au travers de différentes séries de nombres dont la consigne est d'en déterminer la somme le plus rapidement possible (Barallobres & Giroux, 2008).

**Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs**

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

*Figure 2. Somme de 10 entiers consécutifs - Séries 1, 2 et 3*

**La course entre les groupes…**

Série 4 : 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658

Série 5 : 84

*Figure 3. Somme de 10 entiers consécutifs - Séries 4 et 5 (pour laquelle, seul le premier terme est donné)*

Répartis en plusieurs groupes, les participant·e·s ont effectué la recherche des trois premières séries (Figure 2) individuellement puis ont dû choisir parmi les différentes procédures des membres du groupe, celle qui leur a paru être la plus rapide pour l'appliquer ensuite aux séries 4 et 5 (Figure 3).

De nombreuses méthodes de calcul sont possibles[4]. Les participant·e·s ont proposé les procédures suivantes :

- Poser l'addition en colonne. Cette procédure peut conduire vers une méthode rapide si on le fait plusieurs fois. Avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul montre que :
  - Le résultat se termine toujours par 5 ;
  - On a toujours une retenue de 4 ;
  - La somme des chiffres des dizaines est égale au premier nombre de la liste ;
  - Le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre.

  On obtient ainsi pour la Série 1, la somme 215.

- Groupements en utilisant les compléments à 10. En repérant que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série, on effectue les sommes des compléments à 10.

[4]Voir fiche descriptive sur le site Dreamaths : https://math.univ-lyon1.fr/dream/wp-content/uploads/2022/12/DREAM_SituationProbleme_Dix-Entiers-Consecutifs.pdf

Pour la Série 1 on obtient : (17 + 23) = 40 ; (18 + 22) = 40 ; (19 + 21) = 40 ; (24 + 26) = 50 ; il reste 20 et 25 ; 3 × 40 + 50 + (20 + 25) = 215.

- Décomposition des nombres à partir du premier terme. On appelle $n$ est le premier nombre de la liste et on décompose chacun des neuf nombres suivants en fonction de $n$. Ce qui donne $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) + (n + 7) + (n + 8) + (n + 9) = 10 \times n + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 10n + 45$.
  On obtient ainsi pour la Série 1, la somme suivante : $10 \times 17 + 45 = 215$.

- Utilisation de la valeur médiane. La valeur de la médiane de la série est égale à $\frac{n+(n+9)}{2}$. En décomposant chaque nombre de la liste en fonction de la valeur de la médiane, on obtient pour la somme $10 \times \frac{n+(n+9)}{2}$.
  On obtient ainsi pour la Série 1, la somme suivante : $10 \times \frac{17 + 26}{2} = 215$.

Deux connaissances mathématiques sont principalement mobilisées dans ces procédures (Durand-Guerrier, 2010) :

- Le système d'écriture des nombres : la numération décimale de position.
- La construction des entiers via la notion de successeur. L'addition est alors vue comme l'itération du successeur.

Cette situation met ainsi en lumière une distinction importante dans le travail numérique entre des résultats et des méthodes qui sont dépendantes d'un système de numération donnée (par exemple : les critères de divisibilité) et les résultats qui sont liés de manière intrinsèque aux nombres, indépendamment du système d'écriture (par exemple : être divisible par 3, être un nombre premier).

L'analyse de cette situation met également en évidence le rôle de plusieurs variables didactiques pour faire évoluer les procédures des élèves. La première variable didactique de ce problème est la valeur du premier nombre de la liste des dix nombres qui peut être un multiple de 10 ou non, un grand nombre ou non. Si la valeur est un multiple de 10 alors certaines procédures sont favorisées (par exemple, celle s'appuyant sur les compléments à 10 ou celle s'appuyant sur la décomposition à partir du premier terme). Si la valeur du premier nombre est inférieure à 50, les calculs ne sont pas nécessairement coûteux et les élèves peuvent s'y engager facilement. Au-delà, on peut faire l'hypothèse que les calculs peuvent freiner l'engagement dans une procédure (par exemple poser l'opération en colonne).

La deuxième variable didactique est le nombre de nombres consécutifs, il peut être une dizaine entière ou non. Dans le cas de dix nombres entiers consécutifs, points de vue « décomposition décimale » et « successeur » conduisent au même résultat car toutes les unités de 1 à 9 apparaissent. Mais ce n'est plus le cas avec huit nombres entiers consécutifs. La dernière série (Figure 4) proposée aux participants comportait huit entiers consécutifs et, dans ce cas, toutes les unités de 1 à 9 n'apparaissent plus. La méthode la plus rapide pour 10 nombres consécutifs (à savoir prendre le cinquième nombre et mettre 5 à droite) ne se généralise pas. Elle est liée de manière intrinsèque à la signification des chiffres dans l'écriture décimale. En revanche, la méthode utilisant la médiane se généralise ici en tenant compte de la parité. Elle mobilise le point de vue successeur.

**La course entre les groupes…**
**Mais attention sur huit nombres consécutifs**

Série 6 : 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

*Figure 4. Somme d'entiers consécutifs - Série 6*

Une troisième variable didactique est la présentation de la liste entière ou non. En effet, si toute la liste est écrite, cela favorise les procédures qui utilisent tous les nombres ou le dernier nombre de la liste (poser l'addition en colonne ou groupements de 10). En revanche, si seul le premier nombre de la liste est donné (Figure 3), les procédures qui mènent à la formule « dix fois le premier terme plus 45 » sont très efficaces.

Une quatrième variable didactique est l'utilisation ou pas d'une calculatrice (qui a peu été utilisée par les participant·e·s). Le recours systématique à la calculatrice pourrait empêcher de mettre en œuvre d'autres procédures et donc de ne pas repérer des régularités ou l'élaboration d'une formule. En revanche, son recours ponctuel peut servir d'aide à l'engagement dans le problème ou d'outil de validation.

A l'école primaire, plusieurs objectifs peuvent être visés avec cette situation : travailler le calcul mental et le calcul réfléchi ; travailler la numération décimale ; mettre les élèves en situation de recherche pour leur apprendre à dégager des règles générales à partir d'exemples. Voici quelques productions d'élèves de CM1-CM2 (Figures 5 et 6) et 6ème (Figure 7).

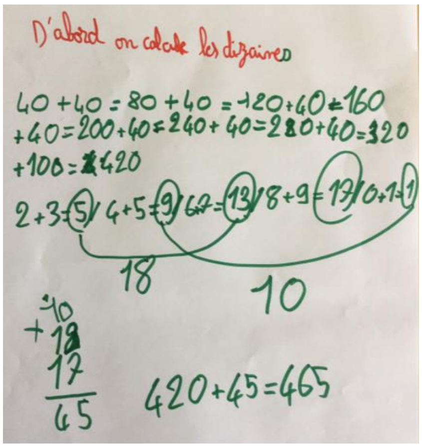



*Figure 5. Production en CM2, école du Rocher, groupements des dizaines*

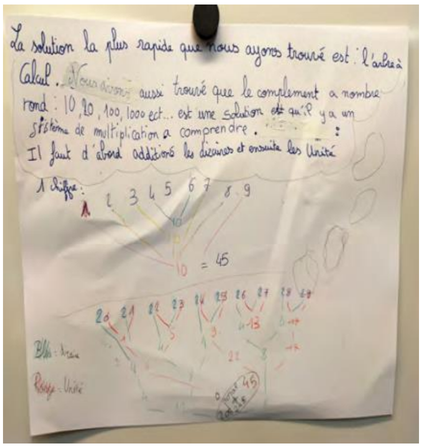



*Figure 6. Production en CM1/CM2, école du Mont-Blanc, groupements en utilisant les compléments à 10*


*Figure 7. Production en 6ème, collège Lagrange, opérations posées en colonne*

## III - EXEMPLE 2 - LE PROBLEME QUI DECHIRE

À travers ce deuxième problème, « Le problème qui déchire », outre la question de la mise en œuvre de situations de recherche de problème en classe, nous souhaitions aborder avec les participant·e·s la question du rôle et de l'apport de la manipulation dans la recherche de problème, sans pour autant utiliser de matériel didactique spécifique. Nous n'avions en effet que quelques feuilles de brouillons ! Voici l'énoncé du problème :

> *Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux. Je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir 19 morceaux*

*de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ? Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?*

Cet énoncé doit être « vivant » : il est important de montrer les premières actions afin de favoriser la phase d'appropriation du problème. D'autre part, commencer par le découpage en deux morceaux permet d'obtenir très vite un résultat et donc de participer à la dévolution du problème. Ainsi, les participants déduisent rapidement que l'on peut atteindre tous les nombres par ce découpage en « nombre – 1 » découpes.

Nous passons ensuite à un découpage en trois morceaux. Les questions sont identiques. Les participant·e·s ont réussi à démontrer que seuls les nombres impairs peuvent être atteints : $2k + 1$, $k$ représentant ainsi le nombre de découpages. Ainsi : $21 = 2 \times 10 + 1$. En découpant en trois morceaux, c'est à la dixième étape que nous obtiendrons 21 morceaux de papiers.

Pour clôturer l'exploration mathématique du problème, nous avons demandé les nombres de découpes possibles pour atteindre 2016 morceaux. Plusieurs participants ont exhibé la solution, à savoir que : 2016 sera atteint pour toute découpe $n$ si et seulement si $n - 1$ est un diviseur de son prédécesseur 2015. Les diviseurs de 2015 étant {1 ; 5 ; 13 ; 31 ; 65 ; 155 ; 403 ; 2015}, les valeurs de $n$ qui permettent d'atteindre 2016 sont donc : {2; 6; 14; 32 ; 66; 156; 404; 2016}.

Du point de vue des apprentissages en cycle 3, les objectifs de ce problème concernent en premier lieu le développement de compétences en résolution de problèmes (par exemple chercher) mais aussi de représenter le problème et d'utiliser une schématisation permettant de comprendre et de faire apparaître des propriétés des nombres. Les connaissances notionnelles visées peuvent être les notions de multiples et diviseurs, les critères de divisibilité, le sens des opérations (en particulier la division euclidienne) et le calcul.

Suite aux discussions avec les participant·e·s sur des mises en œuvre possibles en classe, nous en avons présenté une qui s'est déroulée dans le cadre d'un projet de liaison école-collège, en 2021-2022, avec trois classes (CM1-CM2 ; 6ème SEGPA et 6ème ordinaire). Les objectifs fixés par les enseignantes étaient de développer des stratégies de recherche, d'aborder la compréhension du sens de la division euclidienne et de mobiliser les compétences mathématiques : chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Les deux premières séances étaient consacrées à la mise en œuvre du problème selon les quatre phases explicitées dans la première partie : appropriation et recherche individuelle, recherche en groupe, mise en commun, débat et synthèse. Pour aider à l'appropriation du problème, le vocabulaire « action » et « morceau » a été mis en place avec la possibilité, pour les élèves, de s'aider d'un tableau pour organiser leurs recherches (Figure 8 et 9).

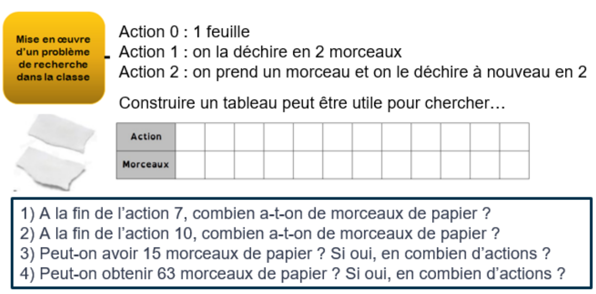



*Figure 8. Énoncé du problème - Séance 1*

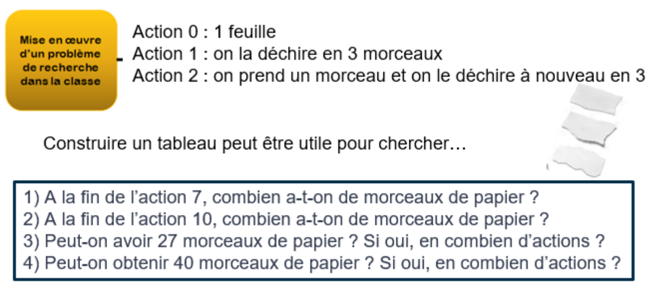



*Figure 9. Énoncé du problème - Séance 2*

Pour la mise en commun des recherches, le document remis aux élèves en début de séance est corrigé au tableau (Figure 12) en s'inspirant des traces écrites de recherche des élèves (Figure 10 et Figure 11).

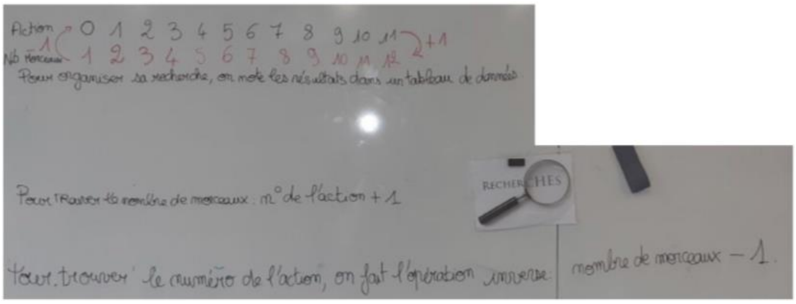



*Figure 10. Enoncé 1, traces écrites de la recherche du problème*

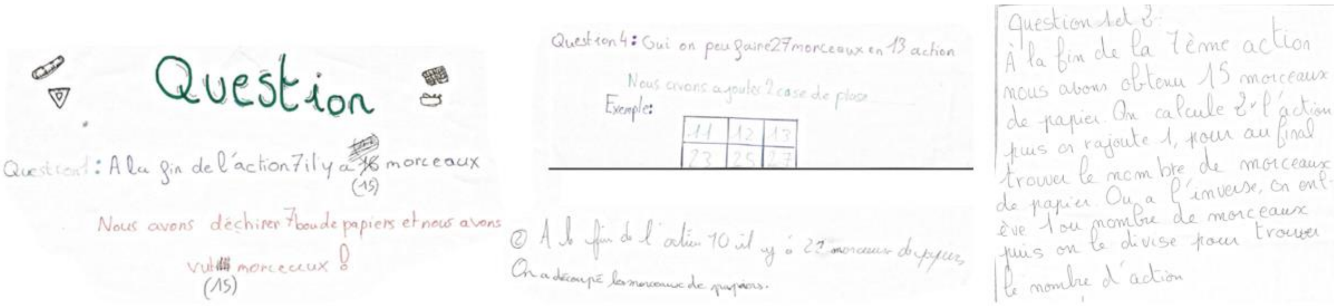



*Figure 11. Enoncé 2, extraits de traces écrites de la recherche du problème*

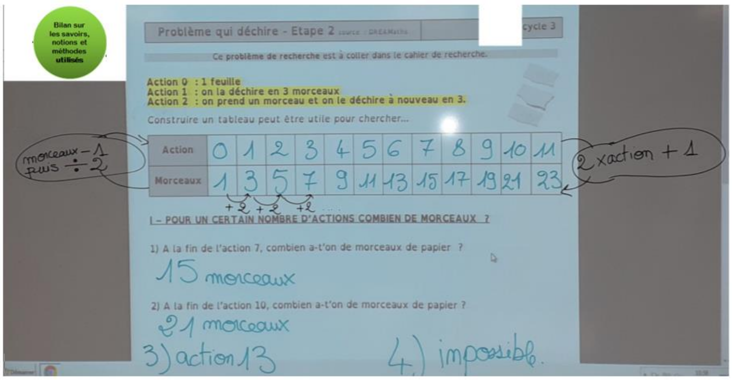



*Figure 12. Enoncé 2, correction au tableau*

Le bilan de la recherche est ensuite construit au fur et à mesure des présentations orales des élèves (Figure 13).

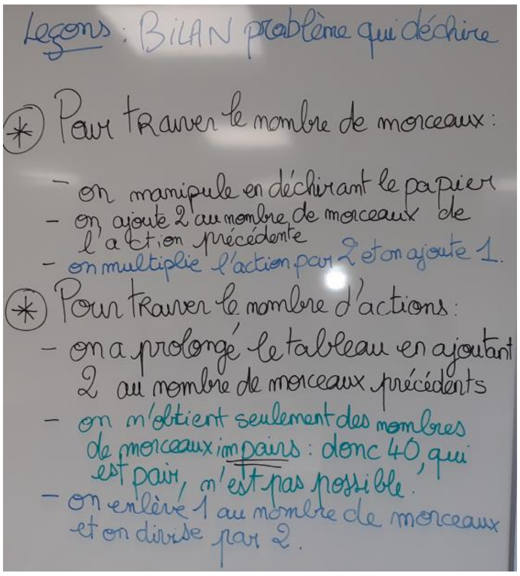



*Figure 13. Bilan de la recherche du problème*

En cohérence avec le canevas d'une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problème (Figure 1), commence alors la seconde phase de la séquence : les études. La notion de parité est alors travaillée dès la séance suivante, les définitions et propriétés sont élaborées par les élèves eux-mêmes (Figure 14). Ce travail est ensuite approfondi par des exercices en lien direct avec la notion mobilisée (Figure 15).

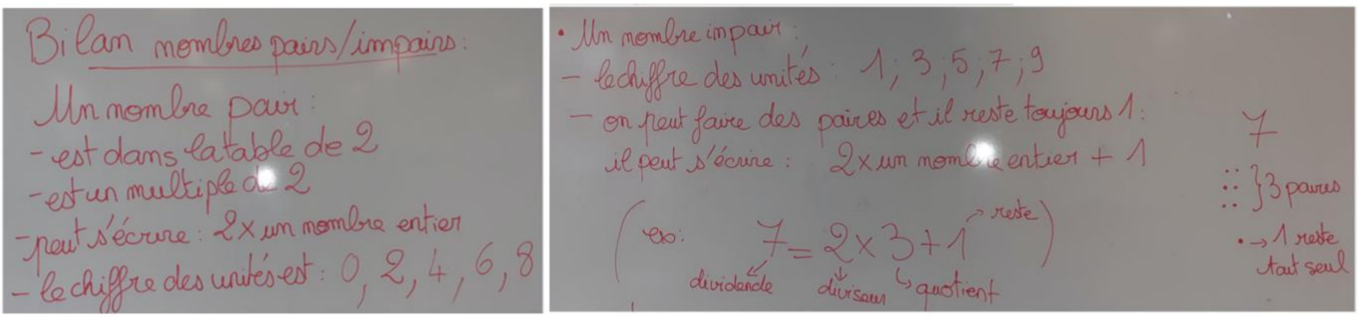



*Figure 14. Traces écrites de la notion de parité construites par les élèves*

➔ Application : 14 et 7 sont-ils des nombres pairs ? Justifier
Réponses attendues : Oui 14 est un nombre pair car il s'écrit 2 x 7 ;
Non 7 n'est pas un nombre pair, il est impair car il s'écrit 2 x 3 + 1.
➔ Créations d'énoncés par les élèves pour des mises en train
➔ Devoirs à la maison : 0 ; 17 ; 296 ; 555 ; 1 381 ; 24 888 ; 1 000 000 sont-ils des nombres pairs ? Justifier.

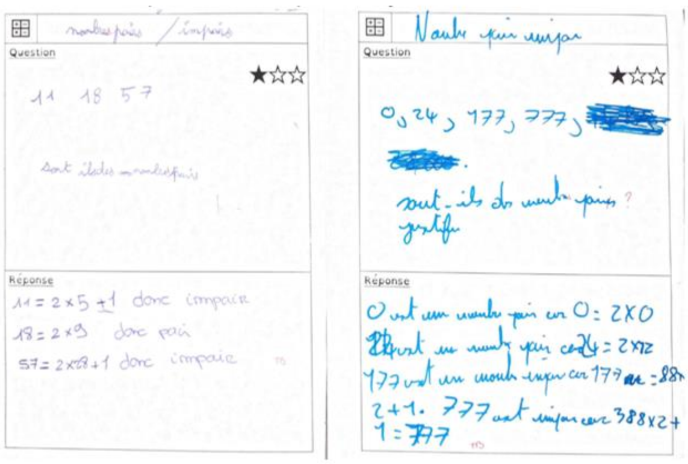



*Figure 15. A gauche, extrait de la fiche de préparation enseignante. À droite, créations par les élèves de cartes flash.*

La seconde étude sera décalée dans le temps. En effet, quand les élèves seront amenés à représenter une division euclidienne sous la forme : dividende = diviseur x quotient + reste, les enseignants pourront réinvestir le fait que « le problème qui déchire » les avait conduits à représenter les nombres impairs de morceaux par : 2 x nombre entier (ou numéro d'action) + 1, et que pour remonter au numéro de l'action à partir du nombre de morceaux, un groupe avait indiqué « enlever 1 » au nombre de morceaux, puis diviser le résultat obtenu par 2, en verbalisant eux-mêmes le fait qu'il s'agissait de l'« opération inverse » (Figure 11).

Lorsque toutes les études liées à la résolution du « problème qui déchire » seront réalisées, il restera une dernière phase de synthèse pour rappeler aux élèves le parcours effectué et les notions mathématiques abordées tout au long de la séquence. Elle peut être présentée sous forme d'une carte mentale comme le montre la Figure 16.

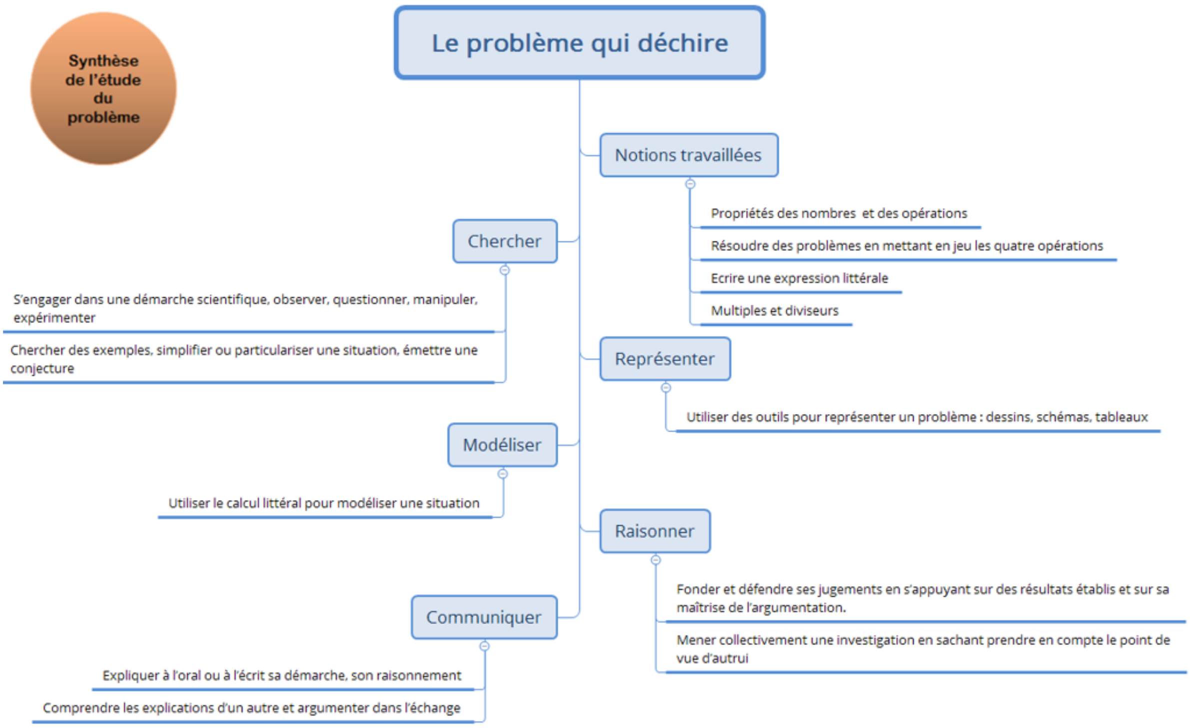



*Figure 16. Exemple de synthèse de l'étude du problème qui déchire – Classe de 5ème*

# IV - À PROPOS DE LA MANIPULATION ET DES MODES DE REPRESENTATION

## 1 Manipulation passive vs. manipulation active

La situation didactique de recherche de problème construite autour du « problème qui déchire » propose de réaliser concrètement les actions de déchirage d'une feuille de papier. Plusieurs types de manipulation sont alors possibles, comme le montre la Figure 17.

*Figure 17. À gauche (Figure 17a), de nombreux découpages, non organisés. Au centre (Figure 17b), des découpages organisés puis schématisés laissant traces des déchirures et du dénombrement des morceaux obtenus. À droite (Figure 17c), l'utilisation d'un tableau pour lier les nombres en jeu (nombre d'actions, nombres de déchirures et nombre de morceaux de papier obtenus).*

Les rétroactions issues de ces trois manipulations sont de nature différente et ont potentiellement des effets différents sur la résolution du problème. En effet, les nombreux morceaux de papier « en tas » issus de déchirures successives (Figure 17a) permettent difficilement de trouver une relation entre le nombre de déchirures et le nombre de morceaux de papier obtenus, autrement dit, de construire une solution au problème posé. L'organisation des morceaux de papier et leur schématisation (Figure 17b) permet en revanche de relier ces suites de nombres et peut constituer ainsi un appui pour trouver une relation et la généraliser. L'utilisation d'un tableau (Figure 17c) permet davantage de chercher des régularités entre les suites de nombres et généraliser.

Plusieurs auteurs (Eysseric, 2014 ; Briand, 2019 ; Croset & Gardes, 2022) ont cherché à caractériser la manipulation. Dans le cas où la manipulation ne semble pas être réalisée avec une intentionnalité vis-à-vis de la résolution de problème ou de l'apprentissage en jeu (ce qu'on pourrait supposer par exemple avec l'image de la Figure 17a), la manipulation est dite passive. En revanche, lorsque la manipulation est réalisée avec une anticipation sur ce que l'action va produire sur la résolution du problème, elle est dite active (Croset & Gardes, 2022). On peut donc manipuler sans anticiper, c'est-à-dire sans être actif cognitivement au vu d'un objectif visé. Cette manipulation passive s'avère être une étape importante pour certains élèves, pour s'engager dans le problème, pour intégrer les « règles du jeu » et observer la situation. Elle peut ainsi être une étape intermédiaire avant l'anticipation de la recherche d'une stratégie plus élaborée. Mais il est important, notamment pour l'enseignant, de distinguer la manipulation passive de la manipulation active, pour s'assurer de construire les apprentissages visés.

Le passage de la manipulation passive à la manipulation active est un premier niveau d'abstraction pour l'élève. En effet, il doit être capable de se détacher de ses actions sur le matériel pour anticiper l'impact de ses actions. Il s'enclenche alors un processus d'apprentissage reposant sur la manipulation active, la formulation d'hypothèses et la validation de ces hypothèses (Figure 18). Plusieurs recherches (Dias, 2008 ; Gardes, 2018) ont qualifié ce processus de démarche de type expérimental et le juge primordial pour construire les apprentissages mathématiques.

## 2 Modes de représentation des objets

En mathématiques, la représentation des objets est centrale. En effet, on n'accède aux objets mathématiques que par leurs représentations. Barth (2011), reprenant les travaux de Bruner (1973), décrit trois modes de représentations des objets :

- le mode énactif lorsqu'on agit sur les objets : on déchire une feuille de papier et on dénombre les morceaux obtenus (Figure 17a) ;

- le mode iconique lorsqu'on représente les objets : on représente les déchirures et les morceaux de papier obtenus, par un schéma (Figure 17b) ou par un tableau de nombres (Figure 17c) ;
- le mode symbolique lorsqu'on désigne ces objets par des symboles conventionnels : on utilise la division euclidienne pour trouver le nombre de morceaux de papier obtenus (Figure 14).

Ces trois modes interagissent ensemble et peuvent être mobilisés simultanément. Cependant, ils représentent chacun une montée en puissance dans le processus d'abstraction (Figure 18) (Croset & Gardes, 2022). Précisons que chacun de ces modes est insuffisant. En effet, le mode énactif ne suffit pas pour savoir si obtenir 2016 morceaux de papier est possible ou pas, et surtout pour quel nombre de déchirures ! Mais le mode symbolique est aussi insuffisant, notamment pour s'engager dans la résolution et pour trouver des régularités. De plus, il y a souvent un besoin de retourner au mode énactif pour valider empiriquement la solution trouvée, par exemple pour vérifier que l'on obtient bien 15 morceaux pour 7 déchirures lorsqu'on découpe en 3 (Figure 11). Chacun de ces modes est aussi nécessaire :

- le mode énactif permet une meilleure dévolution du problème, de faire des essais, de trouver des exemples ; par exemple, le fait de découper le papier va leur permettre de comprendre le problème et de voir qu'on fait +1 à chaque fois (pour des déchirures en 2 morceaux) ;
- le mode iconique permet la décentration du matériel : sans lui, le lien peut ne pas se faire entre le mode énactif et le mode symbolique; par exemple, le fait d'avoir l'image mentale ou la schématisation des découpages ou un tableau va permettre de formuler une régularité ;
- le mode symbolique est nécessaire car c'est lui qui permet la généralisation et la preuve ; pour 2016 morceaux de papier, c'est ce mode qui permet de trouver toutes les valeurs du nombre de déchirures pour l'atteindre, à savoir {2; 6; 14; 32 ; 66; 156; 404; 2016}.

Ces modes de représentation sont un outil intéressant pour analyser l'activité des élèves et en particulier leur avancée dans le processus d'abstraction d'une notion mathématique (Figure 18).

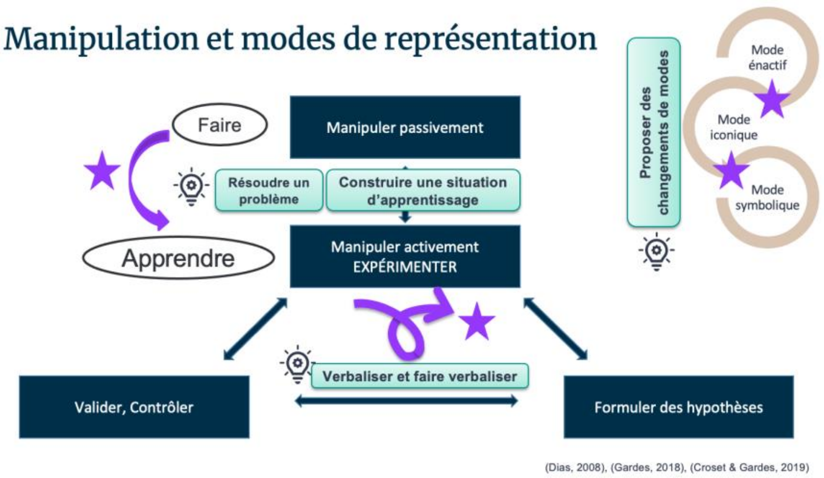



*Figure 18. Diapositive issue de la présentation. Cette diapositive met en évidence les deux manipulations (passive et active), la démarche de type expérimentale (Expérimenter, formuler, valider) et les modes de représentation des objets (énactif, iconique et symbolique). Les étoiles représentent des étapes dans le processus d'abstraction en mathématiques : passage de la manipulation passive à la manipulation active puis dialectique de formulation et de validation et enfin, une montée en puissance du mode énactif au mode symbolique. Des leviers pour l'enseignant sont également mentionnés par la petite ampoule : construire une situation d'apprentissage reposant sur la recherche d'un problème, verbaliser et faire verbaliser, proposer des changements de modes.*

## 3 Des leviers pour l'enseignant

Pour aider les élèves à passer de la manipulation passive à la manipulation active, un levier est la construction de la situation d'apprentissage, notamment le choix d'un problème pour motiver l'apprentissage visé. Pour aider les élèves à entrer dans un questionnement de type démarche expérimentale, le levier de l'échange verbal entre l'enseignant et l'élève est nécessaire. L'enseignant peut poser les questions suivantes pour guider l'élève et l'amener à verbaliser ses actions : comment sais-tu que tu peux obtenir 2016 morceaux avec des déchirures en 2 ? Et pour être sûr d'obtenir 15 morceaux en 7 déchirures avec des déchirures en 3, que peux-tu faire ? *etc.* Enfin, pour permettre une montée en puissance dans le processus d'abstraction, le changement de mode est un levier nécessaire. Dans le « problème qui déchire », il s'agit d'amener les élèves à schématiser, organiser leurs suites de nombres afin de trouver des régularités, voir une généralisation et d'utiliser la division euclidienne pour résoudre le problème dans le cas général.

En formation, ces situations didactiques de recherche de problèmes permettent donc, entre autres, de travailler avec les enseignants sur le rôle et l'apport de la manipulation et des modes de représentation des objets mathématiques pour les apprentissages. Nous présentons succinctement dans la partie suivante des dispositifs de formation, dans différents contextes.

# V - DISPOSITIFS DE FORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT FONDE SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Le groupe DREAM propose depuis plus de dix ans différents stages de formation sur l'enseignement par la résolution de problème. Cette expertise nous a permis d'identifier des points essentiels pour construire une formation à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes :

- mettre les participant·e·s en situation de recherche de problèmes (comme ce que nous avons proposé aux participant·e· de notre atelier) ;
- proposer aux participant·e·s de prendre une posture réflexive sur ce temps de pratique de résolution de problèmes (se questionner sur les connaissances et compétences mobilisées par exemple) ;
- expliciter les hypothèses fondamentales sur l'apprentissage des mathématiques qui sous-tendent cette pratique de la résolution de problèmes en classe (rôle des problèmes dans la construction des connaissances mathématiques) – épistémologie personnelle ;
- faire des apports théoriques, sur l'épistémologie et la didactique des mathématiques en lien avec la résolution de problèmes (par exemple sur la dimension expérimentale des mathématiques, sur la théorie des situations didactiques) ;
- questionner la place des problèmes dans le curriculum (par une analyse des documents institutionnels) ;
- proposer aux participants d'expérimenter une situation didactique de recherche de problème dans leurs classes. Pour cela, il est nécessaire de prévoir un temps de la formation pour amorcer la préparation et un temps de retour sur ces expérimentations.

Ci-dessous, nous décrivons en détails deux dispositifs de formation que nous avons élaborés : pour la formation initiale et pour la formation continue, et nous présentons succinctement un dispositif de formation de formateurs.

## 1 En formation initiale, à l'INSPE de Lyon

Ce module, en formation initiale (master MEEF 2ème année et DU), a été conçu progressivement, entre 2014 et 2016, et a été mis en place jusqu'en 2021. Avec les nouvelles maquettes (en 2022), il a été modifié. L'intitulé du module était « Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes. Autour de l'activité mathématique » et comportait deux cours magistraux et neuf TD (soit 20h au total). Nos objectifs de formation étaient les suivants :

- apporter des éléments théoriques sur l'activité mathématique : recherche et résolution de problèmes, raisonnement, preuves et démonstration, débat ;

- apporter des éléments théoriques et pratiques pour la mise en œuvre en classe d'une situation didactique de recherche de problème, d'un problème ouvert ou d'un problème de logique ;
- sensibiliser les étudiants-stagiaires à adopter une pratique réflexive.

Les objectifs pour les étudiants-stagiaires étaient déclinés de la manière suivante :

- mettre en œuvre en classe une situation didactique de recherche de problème, un problème ouvert ou un problème de logique, avec un débat ;
- analyser le travail des élèves dans ce type de situation ;
- analyser sa pratique professionnelle dans ce type de situation.

Le module proposait deux cours magistraux, le premier sur l'activité mathématique et la recherche de problèmes et le second sur raisonnement, preuve et démonstration. Six TD approfondissaient ces notions, trois spécifiques sur le raisonnement et la démonstration et trois spécifiques sur la logique. Enfin, trois TD étaient dédiés à la préparation de l'expérimentation en classe pour les étudiants-stagiaires et pour les retours de ces expérimentations. Le détail de ces séances est en annexe 1.

Pour les étudiants-stagiaires en master MEEF, ce module était évalué. L'évaluation portait sur la mise en œuvre d'une situation didactique de recherche de problème, un problème ouvert ou un problème de logique, avec un débat. Pour rendre compte de cette mise en œuvre, il était demandé deux documents : un document écrit personnel et un diaporama, support d'une présentation orale. Le document écrit personnel (environ 4 pages) devait mettre en évidence :

- la pertinence des objectifs pédagogiques et la cohérence de l'expérimentation avec ces objectifs ;
- la mise en œuvre de la séance : on doit comprendre comment la séance s'est passée, quel a été le rôle de l'enseignant et celui des élèves ;
- une analyse du travail des élèves en situation didactique de recherche de problème (d'un point de vue des notions mathématiques et des compétences méthodologiques) ;
- un bilan que vous avez effectué pour les élèves sur la situation proposée ;
- une analyse de votre pratique (3 points positifs, 3 points à améliorer du point de vue des compétences de l'enseignant pour mettre en œuvre une situation didactique de recherche de problème en classe).

Ensuite, lors d'une séance de TD, les enseignants-stagiaires étaient regroupés selon la situation expérimentée en classe et devaient produire un diaporama, support d'un exposé à l'oral de 20 minutes, permettant de répondre aux questions suivantes :

- Que diriez-vous à vos collègues pour les convaincre de mettre en œuvre ce problème en classe ?
    - intérêts du point de vue des apprentissages (notions, compétences mathématiques, compétences sociales, etc.)
    - intérêts du point de vue de l'enseignement (modalités de mise en œuvre, rôle de l'enseignant, etc.)

- Que vous a apporté, pour votre pratique professionnelle, la mise en œuvre d'une telle situation dans votre classe ? Et si vous aviez à le refaire, quelles évolutions apporteriez-vous ?

## 2 En formation continue à l'IREM de Lyon

Au programme du plan académique de formation, l'équipe DREAM a proposé un stage de trois jours, adressé à des enseignants ayant initié le développement de compétences dans la mise en œuvre d'activités de résolution de problèmes en mathématiques et souhaitant réfléchir à une organisation de leur enseignement en lien avec cette approche. Plusieurs objectifs sont visés :

- comprendre les fondements épistémologiques des problèmes dans la construction des mathématiques ;
- comprendre les fondements didactiques permettant de tirer profit des recherches de problèmes pour l'apprentissage des élèves ;
- comprendre les enjeux de l'évaluation formative dans la conduite de situations didactiques de recherche de problèmes ;
- mettre en œuvre les principes théoriques pour planifier des situations didactiques de recherche de problème dans la classe ;
- savoir gérer les situations didactiques de recherche de problème dans la classe.

Voici l'organisation de ce stage sur les trois jours. Les deux premiers jours sont consécutifs puis le troisième jour se déroule après une période de 4 à 6 semaines où les participant·e·s sont invité·e·s à expérimenter dans leurs classes.

<table>
<tr><td>Jour 1 matin</td><td>Vivre une situation de recherche de problèmes – Analyses didactiques<br><br>Les participant·e·s sont mis en situation de recherche de problème. La situation choisie est une situation didactique de recherche de problèmes (SDRP). Suite à la recherche du problème par les participant·e·s, il leur est demandé de faire une analyse didactique du point de vue des connaissances et compétences mathématiques en jeu dans la résolution du problème.<br>Un retour est ensuite fait sur les mathématiques travaillées, des productions d'élèves à différents niveaux sont présentées puis une définition de SDRP est donnée. Enfin, les différentes phases de la mise en œuvre de la situation sont présentées.</td></tr>
<tr><td>Jour 1 après-midi</td><td>Fonder une séquence autour d'une SDRP - Apports théoriques sur la dimension expérimentale<br><br>Nous présentons la mise en œuvre d'une séquence autour de la situation vécue le matin (Figure 1). Ensuite, des apports théoriques sur la dimension expérimentale des mathématiques (Gardes, 2018) sont proposés.</td></tr>
<tr><td>Jour 2 matin</td><td>Découvrir de nouveaux problèmes - Apports sur les typologies des problèmes<br><br>L'objectif de cette partie est de présenter de nombreux problèmes aux participant·e·s sous forme d'un « speed-dating ». Ensuite, des apports théoriques sur les typologies des problèmes et leurs potentiels (Georget, 2009) sont proposés puis mis à l'épreuve sur les problèmes découverts auparavant.</td></tr>
<tr><td>Jour 2 après-midi</td><td>Présentation d'une progression annuelle - Présentation du site - Préparation de l'expérimentation<br><br>Nous présentons une progression annuelle en cycle 4 fondée sur des situations didactiques de recherche de problèmes[5]. Le site Dreamaths est également présenté, puis un temps conséquent est consacré à la préparation de l'expérimentation par les participant·e·s.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Chaque participant expérimente une séance ou une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problèmes.</td></tr>
</table>

[5] Voir sur le site Dreamaths : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=69

| | |
|---|---|
| **Jour 3 matin** | **Présentation des expérimentations - Apports théoriques sur les savoirs**<br><br>Un temps conséquent est consacré aux retours des expérimentations par les participant·e·s. Ces retours sont structurés autour des questions suivantes :<br>- Le problème et sa mise en œuvre : Quel énoncé du problème avez-vous proposé ? Quelle organisation des temps de travail des élèves ?<br>- Le travail des élèves : Quelles ont été les procédures des élèves ? Leurs difficultés ?<br>- Le bilan du problème et les prolongements éventuels : quel bilan avez-vous proposé ? Quels prolongements avez-vous proposé ?<br>- Bilan de votre point de vue : que retenez-vous de cette expérimentation ? Du point de vue des apprentissages des élèves et du point de vue de votre enseignement ?<br>- Des questions en suspens ?<br>Ensuite, des apports théoriques sur la construction des savoirs en situation de recherche sont présentés. |
| **Jour 3 après-midi** | **Présentation du site (suite) - Apports théoriques sur l'évaluation**<br><br>Pour conclure la formation, nous présentons plus en détails le site Dreamaths puis nous consacrons un temps important à la question de l'évaluation des connaissances et des compétences en situation de recherche de problèmes, avec quelques apports théoriques (Allal et Mottier-Lopez, 2005) et un atelier de mise en situation. |

## 3 En formation de formateurs à l'IFé

Une formation de formateurs à l'Institut Français de l'éducation (IFé) a été proposée plusieurs années, sur 2 jours, adressée à des formateurs et cadres de l'éducation. L'objectif était d'aborder la question d'accompagnement à la mise en œuvre des problèmes dans la classe de mathématiques pour chercher, expérimenter et manipuler en cycle 3, 4 et au lycée. Voici l'organisation du stage sur deux jours :

| | |
|---|---|
| **Jour 1 matin** | Mise en situation de recherche de problèmes sur « Le problème qui déchire » et réflexions sur l'utilisation d'un problème pour enseigner les mathématiques. |
| **Jour 1 après-midi** | Synthèse mathématique, didactique et mise en œuvre en classe, illustré sur « Le problème qui déchire ».<br><br>Conférence : Place et rôle de la dimension expérimentale dans la construction des connaissances.<br><br>Présentation du site DREAM et exploration de quelques problèmes. |
| **Jour 2 matin** | Ateliers en trois thématiques :<br>- Typologie des problèmes<br>- Évaluation des élèves dans une situation de recherche de problèmes<br>- Attentes et obstacles des enseignants<br><br>Conférence : Fonder son enseignement sur les problèmes. |
| **Jour 2 après-midi** | Travail en groupe, suite des ateliers.<br><br>Quelques apports théoriques autour de l'évaluation.<br><br>Synthèse de la formation. |

# VI - CONCLUSION

Dans cet atelier, nous avons présenté à la fois une organisation de l'enseignement des mathématiques construite autour de la recherche de problèmes et des dispositifs de formation des enseignants à cette organisation. Ces travaux, conduits au sein de l'équipe DREAM, nous ont permis de pointer des conditions pour que ce type d'enseignement vive dans les classes. La première est de partager notre position épistémologique et didactique, c'est-à-dire que les enseignants doivent être convaincus de l'intérêt de la résolution de problèmes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La deuxième condition est de réaliser en amont des analyses mathématiques et didactiques du problème afin d'anticiper et de construire son enseignement à partir des productions des élèves. La troisième condition est la nécessité d'essayer (plusieurs fois) la mise en œuvre de situation didactique de recherche en classe, il faut oser se lancer et expérimenter. Ces réflexions nous ont amenés à penser une autre forme de formation, plus proche de l'accompagnement entre pairs (entre un enseignant novice et un enseignant expérimenté dans la mise en place de ce type d'enseignement). Nous développons actuellement ce type de dispositif de formation au sein du LéA DuAL (https://reseaulea.hypotheses.org/category/les-differents-lea/dual-lyon) à l'IFé, avec une dizaine d'enseignants, du cycle 3 au lycée.

# VII - BIBLIOGRAPHIE


Aldon, G., Cahuet, P., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. et Tardy, C. (2010). *EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole*. Cérédom INRP, IREM de Lyon.

Aldon, G., Front, M. et Gardes, M.L. (2017). Des intentions de l'auteur aux usages en classe, première réflexion sur la cohérence des usages d'une ressource. *Education & Didactique, 11 (3)*, 9-30.

Aldon, G. (2021). Quanto è importante risolvere e far risolvere problemi?. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula, (10)*, 9 - 28. https://doi.org/10.33683/ddm.21.10.1

Allal, L., Mottier-Lopez, L. (2005). *Formative assessment– improving learning in secondary classrooms* – OECD 92-64-00739-3.

Arsac, G., Germain, G., et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Arsac, G., Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. IREM de Lyon-CRDP de Lyon

Barallobres G. et Giroux, J. (2008). Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective. In *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

Barth, B.-M. (2011). L'apprentissage de l'abstraction. Retz.

Briand, J. (2019). Manipuler en mathématiques…oui mais. Consulté sur http://ddm.joel.briand.free.fr/publi2/La%20manipulation%20texte%20revu%20dec2020.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*. New York : Norton.

Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2022). Des leviers identifiés pour enseigner l'abstraction. *Tangente Education, 62*, 6-8.

Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard-Lyon I.*

Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Cédérom.

Eysseric, P. (2014). Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques, 517*, 48-50.

Front, M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.

Gardes, M.-L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.

Gardes, M.-L. (2018). DémarcheS d'investigation et problèmes de recherche. In *G. Aldon, Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux ! (pp.73-96)*. Canopé Editions.

Gardes, M.-L. & Yvain, S. (2015). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In *Aldon, G. (Ed.) Actes de la 66ème CIEAEM Mathématiques et réalités. Juillet 2014 Lyon (pp. 363-369).*

Georget, J.-P. (2009). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire: perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. *Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot-Paris VII*.

Houdement, C. (2016). Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes. In Actes du XLIIème colloque COPIRELEM, Besançon 2015. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO16025/IWO16025.pdf

MEN (2018). Bulletin official spécial n°3 du 5 avril 2018. https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809043N.htm

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 7*, 6-34.

Tisseron, C. et Mizony, M. (1985/2005). Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts, IREM de Lyon, consulté le 29/10/2022 sur : http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?page=album&id_article=969

## ANNEXE 1 : DETAILS DES SEANCES DE LA FORMATION INITIALE

Deux cours magistraux et neuf séances de TD (3TD Raisonnement et démonstration, 3TD Logique, 3TD Autour de l'expérimentation en classe).

**CM1 - Activité mathématique et recherche de problèmes**
Descriptif : définir et caractériser l'activité mathématique ; définir et caractériser une situation didactique de recherche de problème ; détailler la mise en œuvre d'une telle situation en classe.

**CM2 - Raisonnement, preuve et démonstration**
Descriptif : définir et articuler argumentation, explication, preuve, démonstration, raisonnement, résolution de problème ; proposer des pistes pour l'enseignement du raisonnement déductif et de la démonstration.

**TD 1 – Raisonnement et démonstration : Analyse d'un débat en mathématiques**

Descriptif : analyse mathématique du problème, analyse mathématique et didactique d'affiches produites par des élèves, analyse didactique des échanges d'élèves pendant un débat.

**TD2 – Raisonnement et démonstration : Gestion d'un débat en mathématiques**
Descriptif : analyse mathématique et didactique du problème, travail collectif sur l'organisation en amont d'un débat en classe, jeu de rôle sur l'animation du débat en classe, travail collectif sur l'écriture d'une synthèse à partir des productions des élèves

**TD 3 – Raisonnement et démonstration : Choisir un problème pour chercher**
Descriptif : (re)connaître différents types de problèmes, choisir un problème pour chercher à mettre en œuvre dans sa classe, débuter l'analyse a priori de ce problème.

**TD 1 – Logique : Implication**
Descriptif : apports mathématiques, apports didactiques et professionnels (quantification universelle implicite, table de vérité de l'implication, etc.).

**TD 2 – Logique : Condition nécessaire, condition suffisante, négation de l'implication**
Descriptif : apports mathématiques et didactiques (condition nécessaire, condition suffisante = condition suffisante minimale, différence avec la logique naturelle). Négation de l'implication : apports mathématiques et didactiques, analyse d'erreurs d'élèves.

**TD3 – Logique : Analyse de ressources pour la classe**
Descriptif : analyse de ressources pour la classe, manuels de seconde, ressources Internet, activité des cosmonautes, activité du circuit, analyse d'erreurs d'élèves.

**TD1 - Préparation de l'expérimentation en classe**
Descriptif : retour sur l'essentiel concernant les situations de recherche de problème, préparer l'expérimentation en classe en petits groupes selon le choix du problème.

**TD2 – Retour sur l'expérimentation 1**
Descriptif : au sein des petits groupes, présentation des expérimentations personnelles, discussions et échanges sur ces retours, réalisation d'un diaporama qui sera le support d'une présentation pour le TD suivant.

**TD3 – Retour sur l'expérimentation 2**
Descriptif : chaque petit groupe présente son diaporama aux autres, temps d'échange et de question avec la salle.

# LA MODÉLISATION MATHEMATIQUE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLEMES CONCRETS : UN DISPOSITIF DE FORMATION ADOSSÉ AU RALLYE MATHÉMATIQUE VIDÉO PROPOSÉ PAR UNE CIRCONSCRIPTION

**Sonia YVAIN-PREBISKI**
MCF, INSPE De Versailles
CY Cergy Paris Université, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil,
Univ. Lille, UNIROUEN
LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France
sonia.yvain@cyu.fr

**Jean DISCOURS**
Conseiller pédagogique, CIRCONSCRIPTION DE BAGNOLS SUR CEZE
jean.discours@ac-montpellier.fr

Résumé
Ce texte rend compte d'un atelier dont l'objectif est double. Le premier vise à faire découvrir un dispositif permettant de faire travailler les élèves de l'école élémentaire sur des problèmes concrets sur supports numériques, problèmes utilisés dans un dispositif de formation dans le cadre de la formation continue des enseignants et l'accompagnement de constellations sur le plan Mathématiques. Le second est d'analyser les potentialités d'une situation proposée dans ce dispositif au regard du travail de la compétence *Modéliser* en appui sur des productions d'élèves et des retours d'enseignants ayant expérimenté ce problème.

Nous proposons de présenter dans un premier temps un dispositif permettant de faire travailler les élèves de l'école élémentaire sur des problèmes concrets sur supports numériques, utilisés dans un dispositif de formation dans le cadre de la formation continue des enseignants et l'accompagnement de constellations pour le Plan Mathématiques. Puis nous exposerons les premiers jalons de notre projet de recherche qui questionne l'enseignement et la formation des enseignants du premier degré au regard de la modélisation. Ensuite nous présenterons le contenu de notre atelier en précisant nos objectifs et les tâches proposées aux participants ainsi que quelques éléments de compte-rendu. Pour conclure, nous donnerons les grandes lignes de notre projet à venir.

## I - LE DISPOSITIF RALLYE MATHS « EDUCABAGNOLS »

Dans cette partie nous présentons le Rallye Maths EDUCABAGNOLS et ses évolutions au regard de ses objectifs d'apprentissage (du côté des élèves) puis de ses objectifs de formation (du côté des enseignants formés).

### 1 Le rallye du côté des élèves

#### *1.1 Point de départ*

Tout commence en 2012 avec le lancement d'un rallye mathématique dans la circonscription de Bagnols sur Cèze qui se présente sous forme d'une liste d'énoncés écrits, de difficultés diverses, créés pour le rallye ou empruntés à des rallyes existants. Le rallye mathématique proposé par Jean Discours, conseiller pédagogique, se déroule en trois manches, après une phase d'entrainement libre à partir de problèmes proposés aux enseignants. Les problèmes des trois manches sont mis en ligne sur une plateforme pour les enseignants la veille de chaque manche. Trois niveaux sont proposés : GS-CP, CE1-CE2 et CM1-CM2.

Exemple d'un énoncé :

Rallye mathématiques CM1-CM2 2013

**Problème n° 2 : 14 points** Papèterie

Un livre et un cahier coûtent 9 euros.

Un livre et un agenda coûtent 7 euros.

Un agenda et un cahier coûtent 12 euros.

Quel est le prix du livre ? Du cahier ? De l'agenda ?

*Figure 1. Exemple d''un énoncé, niveau CM1-CM2, Rallye 2013*

Les objectifs initiaux des concepteurs sont indépendants des mathématiques : permettre le travail de groupe, apprendre aux élèves à s'organiser collectivement et à travailler en équipes et impliquer tous les élèves dans la recherche. Ainsi, pour une manche, quatre problèmes à résoudre sont proposés pour les GS-CP et six problèmes pour les CE ou CM. La liste de problèmes est proposée à la classe entière. Les élèves disposent d'un temps limité (1 heure), sans l'aide de l'enseignant, pour s'organiser, choisir et résoudre les problèmes, débattre des solutions et remplir un bulletin-réponse. Puis, la classe choisit obligatoirement deux problèmes pour les GS-CP et trois pour les autres niveaux, qu'elle pense avoir « justes » et pour lesquels elle rédige une réponse unique. Ainsi, sur le bulletin-réponse, unique pour toute la classe, doivent figurer les réponses à exactement deux ou trois problèmes de la liste selon le niveau.

En 2014, inspiré par une vidéo de Dan Meyer[1], le conseiller pédagogique de la circonscription de Bagnols sur Cèze, Jean Discours, va faire évoluer ce rallye.

### 1.2 Le virage

De cette vidéo datant de 2010, ce conseiller pédagogique retient que les manuels des étudiants américains au lycée présentent souvent des problèmes dont la question finale est décomposée en sous questions, ce qui les conduit à résoudre le problème posé en exécutant une série d'étapes imposées. Il retient l'idée de présenter des exercices de mathématiques qui obligent les élèves à réfléchir et à se poser des questions. Il oriente alors ses réflexions vers l'élaboration de problèmes pour la classe davantage ancrés dans un contexte réel et présentés sous forme de vidéo. Son objectif est de favoriser l'engagement des élèves dans une démarche de modélisation. A la lueur de la lecture de la vidéo de Dan Meyer, l'utilisation de la vidéo

[1] https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_class_needs_a_makeover?language=en#t-351203

permet de supprimer les questions intermédiaires et ainsi de donner la responsabilité aux élèves de rendre le problème proposé accessible par un traitement mathématique.

C'est également en 2014 que la ministre de l'éducation nationale de l'époque présente le dossier presse « Stratégie mathématiques »[2]. En particulier, la mesure 7 et certaines orientations décrites ci-dessous, retiennent plus particulièrement l'attention du conseiller pédagogique :

> *Mesure 7 : la promotion d'un environnement plus favorable à l'apprentissage.*
> *La dimension ludique des mathématiques et l'utilisation du numérique seront développées afin de motiver davantage les élèves et d'encourager leur autonomie. La place du jeu dans l'enseignement des mathématiques, notamment à l'école élémentaire, sera renforcée.* […]. *L'étude de « problèmes ouverts », « pour chercher », s'appuyant sur des ressources variées, permettra de rendre la pratique des mathématiques plus attractive, de mobiliser davantage de compétences transversales et de stimuler le plaisir de chercher, de choisir ou de construire une méthode, de persévérer et l'envie de trouver.* […] *Des questions qui font sens pour les élèves dans leur approche des mathématiques : le choix de problèmes ancrés dans le réel permet d'illustrer l'utilité des mathématiques dans des situations de la vie courante, de la vie de la classe, voire de la vie professionnelle, appuyées sur des documents authentiques. La perception du sens de l'objet d'apprentissage est essentielle pour les élèves. Il s'agit d'utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes authentiques qui font sens pour les élèves.*

Un premier problème vidéo est alors conçu par Jean Discours et proposé pour le rallye mathématique 2014-2015[3] . Les enseignants et les élèves apprécient l'idée et le conseiller pédagogique décide que le rallye de l'année suivante sera un rallye vidéo. Pierre Babay, directeur d'école et ancien conseiller pédagogique TICE, lui propose de mettre en place une plateforme numérique qui servira d'interface entre les classes et les organisateurs, mais aussi un espace de dépôt des problèmes, de sauvegarde des réponses etc.[4]

Le principe est simple : ancrer la forme des problèmes dans le réel, ne pas tout dire, ou tout au moins ne pas en dire trop, et ne pas toujours donner de question. Ce dernier point permet aux élèves d'interroger les données de la vidéo et de chercher ce qu'on peut mettre à l'étude.

### 1.3 Le rallye depuis 2014

Il s'agit de proposer aux élèves des problèmes *qui font sens et sont authentiques* à travers la mise en place d'un rallye mathématique vidéo dans l'objectif de les engager dans une démarche scientifique où la modélisation joue un rôle majeur. Aujourd'hui, le fonctionnement du rallye est le suivant :
- préparation du rallye en collaboration avec le groupe de travail de circonscription en mathématiques ;
- inscription des enseignants qui souhaitent participer au rallye à une animation pédagogique en début d'année[5] ;

- inscription des classes sur la plateforme du rallye (chaque année une cinquantaine d'enseignants font participer leurs classes) ;

[2] http://cache.media.education.gouv.fr/file/12_Decembre/30/2/DP-l-ecole-change-avec-vous-strategie-mathematiques_373302.pdf

[3] https://educabagnols.net/videomathspub/72/showVideo

[4] https://educabagnols.net/

[5] supprimée depuis 2019, en raison de l'adaptation départementale au cadrage national des animations pédagogiques encadrant les contenus de formations et reprogrammée pour l'année scolaire 2022-2023

- proposition de solution sous forme numérique (texte, photos, dessins, vidéos) après visionnage du problème vidéo autant de fois que nécessaire. Chaque classe est autonome et gère son calendrier de participation ; l'étape validée débloque l'accès à la suivante. Le rallye n'est pas une compétition et se termine après validation de la dernière étape ;

- validation et étayage éventuel par le conseiller pédagogique via la plateforme en ligne et nouvelle proposition de réponse si nécessaire.

Les élèves doivent repérer dans la vidéo le problème qu'ils doivent résoudre, soit en prélevant les indices qui seront nécessaires pour répondre à la question si elle est posée, soit en mettant en relation les éléments de la vidéo pour créer un problème à résoudre. C'est le groupe classe qui cherche, sous forme de petits groupes coordonnés par l'enseignant, pour envoyer une réponse unique. Les procédures et stratégies mises en œuvre sont diverses. Certaines classes répondent avec support vidéo. Avec ce type de problèmes, ce sont les élèves qui prennent en charge une partie importante de la régulation de l'activité.

Le travail sur des problèmes *authentiques* provoque un engouement et un engagement fort des élèves, un esprit d'entraide et de collaboration ; des interviews d'élèves nous laissent penser que la confiance en soi est renforcée. Un espace où les archives du rallye sont disponibles est créé pour accéder aux anciennes vidéos (VidéoMaths, base de données en ligne des archives du rallye[6]).

## 2 Le rallye du côté de la formation

Si le rallye est le point de départ du projet, l'utilisation des problèmes vidéo existants lors de séances de découverte ou de travail dans les classes est devenu un axe de travail essentiel pour le formateur. Un groupe de travail constitué d'enseignants participe depuis 2019 à la conception du rallye et expérimente dans les classes les problèmes élaborés. Pendant l'année 2021-2022, le projet est de faire travailler ces enseignants sur l'analyse des procédures et réponses des classes. Le rallye vidéo est, au-delà de l'idée de proposer des problèmes qui font sens aux élèves, un outil au service de la formation des enseignants.

Chaque année (sauf en 2019, 2020 et 2021), une animation pédagogique a été ajoutée au plan de formation continue des enseignants de la circonscription autour des contenus suivants : pratique de résolution de problèmes, présentation des outils du rallye, apports sur la démarche de résolution de problèmes. Si au commencement du rallye les objectifs de formation étaient principalement de faire entrer les mathématiques dans les classes sous un aspect plus ludique, depuis 2015 ces objectifs ont évolué.

### *2.1 Les enjeux de la formation*

Rapidement, quelques enseignants ont souhaité aller plus loin sur ce travail. Un groupe de circonscription a alors été créé avec une dizaine d'enseignants volontaires, à la suite d'un appel à candidatures lancé auprès des enseignants participant au rallye. En 2019 et 2020, quatre regroupements de deux heures et un stage annuel de deux jours ont permis au groupe de travailler sur le rallye, soit une vingtaine d'heures de formation par an. Apports sur la résolution de problèmes, échanges sur les problèmes proposés, conception de nouveaux problèmes, ont été les premiers thèmes de travail. Puis le groupe a construit les fiches de préparation des problèmes, à destination des enseignants des classes participant au rallye. Les phases apparaissant dans la fiche sont toujours les mêmes : chaque fiche est une adaptation au problème d'une fiche type. Ces fiches s'appuient aussi sur le dossier de presse ministériel : « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » (Villani et Torossian, 2018) et en particulier sur les extraits suivants :

> *Dès le plus jeune âge mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur :*
> *- la manipulation et l'expérimentation ;*

---

[6] https://educabagnols.net/videomathspub

*- la verbalisation ;*
*- l'abstraction.*

*Il n'y a pas de désamour pour les mathématiques chez les jeunes enfants. En effet, 38 % des 18-24 ans déclarent que les mathématiques étaient leur matière préférée à l'école primaire. Le problème n'est donc pas tant de motiver les élèves, que de ne pas les démotiver et de trouver les moyens de cultiver la curiosité, la créativité et le plaisir dans l'activité mathématique.*

*Un autre regard sur l'erreur*
*La confiance réciproque doit s'instaurer entre le professeur et l'élève, elle permet à ce dernier de prendre le risque de se tromper. Le temps est un facteur clé dans les apprentissages mathématiques : l'élève doit avoir le temps d'essayer, d'éventuellement se tromper, d'analyser son erreur, d'essayer à nouveau. Le professeur doit aider l'élève à identifier son erreur, à la comprendre afin qu'elle devienne constitutive de son apprentissage. Tel un mathématicien dans son travail de recherche, l'élève ne doit pas craindre l'erreur, la plus grande de toutes serait de le priver de cette expérience.*

*L'importance du plaisir*
*Le plaisir et le désir sont des moteurs fondamentaux des apprentissages. Mais, sans effort, il n'y a pas non plus de progrès. Il faut développer le sens de l'effort chez l'élève, éviter de sous-estimer son potentiel : lui proposer un contenu ambitieux et accessible, développant ainsi une difficulté désirable mais accessible et l'encourager.*

*Le plaisir par le jeu*
*Afin de ne pas laisser s'installer l'anxiété face à la tâche scolaire en mathématiques, inspirons-nous du Canada, de Singapour, des États-Unis ou encore du Nord de l'Europe, où les activités scolaires en mathématiques sont la plupart du temps associées à la notion de plaisir. Jeux, énigmes, concours, défis et histoires sont au rendez-vous.*

Même si les enseignants de la circonscription sont nombreux à participer au rallye avec leur classe, certains ont fait part de leur difficulté à mettre en œuvre les séances autour des problèmes vidéo. C'est pourquoi une fiche de préparation a été construite par le groupe avec pour objectif de proposer des pistes de réflexion et de mise en œuvre des séances.

### 2.2 Présentation de la fiche de préparation

Elle est articulée autour des phases suivantes :

*Phase d'orientation*

Consigne : « Voici le problème à résoudre aujourd'hui ».

Les enfants voient la vidéo plusieurs fois si nécessaire et ont accès à la vidéo pendant toute la séance. Rien n'est indiqué aux élèves au début de l'activité. La prise de notes sera indispensable pour ce problème mais laissée à l'initiative des élèves. Chaque enseignant met en œuvre la séance comme il le souhaite.

*Échanges avec le groupe classe : « Que faut-il faire, chercher ? »*

L'idée est de faire émerger une problématique ou question. Cette phase ne doit pas être trop longue. Le but n'est pas de "tuer le problème" (en laissant échapper la solution). Lorsque la classe s'est mise d'accord sur ce qu'il faut chercher, la vidéo est à nouveau projetée. Individuellement chaque élève commence à travailler sur la résolution du problème. Ce temps (5 minutes environ) est indispensable et permet à tous les élèves de rentrer dans l'activité.

*Planification du travail de groupe :*

L'objectif est ici d'optimiser le travail. Des groupes de quatre élèves seront à favoriser pour les mises en commun. Cependant il est possible aussi de laisser travailler les élèves en binômes afin de ne pas laisser les élèves chercher seuls. C'est le groupe classe qui doit résoudre le problème, les groupes ou binômes échangent pour s'entendre sur la proposition de solution. Ce dispositif est à mettre en place régulièrement pour qu'il devienne naturel pour les élèves.

*Phase d'exécution*

Les élèves commencent à chercher en groupe. La vidéo reste accessible et peut tourner en boucle. Ils vont élaborer une fiche réponse pour la mise en commun. Des mises en commun partielles sont proposées quand certains groupes sont bloqués, ont des questions ou font des découvertes qui peuvent aider les autres groupes.

Régulation : re-centration éventuelle sur la tâche... L'objectif n'est pas que l'enseignant fasse à la place des élèves mais qu'il les encourage à tester des procédures et des démarches. C'est une phase très importante sur le plan de la régulation (entre les élèves d'un groupe ou entre les groupes). La régulation a lieu dans le groupe ou par intervention d'un élève ou de l'adulte.

*Phase de contrôle*

Un élève est désigné rapporteur du groupe, au moment de la restitution, par l'enseignant. Ainsi chaque groupe doit veiller à la compréhension des procédures et de leur explicitation par chaque membre lors de la phase de recherche.

*Mise en commun au tableau.*

Chaque groupe doit présenter rapidement sa réponse et sa procédure. D'autres groupes peuvent compléter. Il s'agit de recenser toutes les procédures, de valider/invalider, de se référer au groupe qui présente, au groupe classe et donc d'argumenter. Lors de cette phase, l'enseignant ne valide ni invalide les procédures. Il relance les élèves. "*Il dresse un inventaire des procédures afin de mettre en évidence et de valoriser la multiplicité, voir l'originalité*" (Charnay & al., 2020 p. 29). C'est la phase de contrôle qui va permettre de confronter les travaux des élèves. La mise en commun pourra nécessiter une nouvelle phase de recherche si trop de groupes ne sont pas d'accord sur la solution et la procédure. L'enseignant pourra alors indiquer qu'on peut recommencer à chercher en éprouvant les solutions proposées.

*Élaboration d'une réponse commune.*

Choix des procédures les plus pertinentes (coût/efficacité) par les élèves. Mise en forme de la présentation de la réponse (choix des supports : audio/vidéo/papier). La réponse ne doit pas être validée par l'enseignant. Les élèves doivent envoyer leur réponse, un retour sera fait par l'équipe organisatrice. Si les réponses ne conviennent pas, les élèves pourront ainsi se remettre en phase de recherche et ainsi de suite jusqu'à validation de leur réponse.

### 2.3 Le rallye côté formation en lien avec le plan mathématique

Le groupe de circonscription a permis à une quinzaine d'enseignants de participer au projet et huit d'entre eux ont présenté ou présentent le CAFIPEMF. Certains choisissent de travailler autour des problèmes du rallye dans leur présentation de séance ou de mémoire. En 2019, Jean Discours devient aussi référent mathématique à la suite de la mise en place du plan mathématiques (RMC). Une continuité de ce travail sur la résolution de problème voit le jour, liant le travail du groupe de circonscription et des constellations. Le plan mathématique permet de travailler avec des constellations de six à huit enseignants sur une année. Le dispositif d'accompagnement des constellations ; mis en place par le conseiller pédagogique dans la circonscription, fait alterner des temps de regroupement des enseignants et un travail autour de séances en classe construites et partagées par l'enseignant et le formateur, comme décrit dans la figure ci-dessous :


Celui-ci prévoit, après un regroupement qui a pour objectif de fixer le cadre et le déroulement du dispositif, de commencer par un travail autour des situations de recherche ou résolution de problèmes qui introduisent souvent de nouveaux contenus mathématiques, permettant ainsi de croiser les regards des enseignants. Chaque enseignant travaille sur le contenu qu'il souhaite, *a priori* au plus près de la programmation prévue dans sa classe. L'intérêt est de partir de ce qu'il fait habituellement en class, et non d'apporter un contenu qui pourrait paraître déconnecté de la pratique journalière.

Chaque enseignant propose donc au référent une ébauche de préparation de séance autour du contenu de son choix mais avec la contrainte de mettre les élèves en situation de recherche. Le formateur fait des propositions de modifications, d'ajustements ou de compléments. La préparation de la séance est divisée en phases qui sont partagées par l'enseignant et le formateur lors de sa mise en œuvre. Chacun prendra en charge pendant la séance les phases choisies et l'autre observera.

Pendant la séance partagée, chacun prend des traces photographiques qui permettront les échanges pendant le temps de regroupement (ce qui nécessite de ne pas trop éloigner dans le temps la séance en classe et le regroupement). Ces traces doivent permettre les échanges lors du regroupement. L'enseignant les organise sous la forme de son choix afin de les présenter au groupe. Le choix du support des traces aurait pu être la vidéo mais le temps nécessaire à l'exploitation des données est long. Concrètement, pendant qu'un des deux acteurs est devant les élèves, l'autre prend des éléments qui serviront de traces.

Lors du regroupement, une première phase permet à chaque enseignant de présenter les traces des séances en classe. La séance est décrite et un questionnement peut s'engager, très souvent autour de questions de métier (par exemple comment gérer la mise en commun). Chaque enseignant dispose d'environ quinze minutes et des notes sont prises. Les autres enseignants présents participent, questionnent et partagent leur expérience. Les questions les plus fréquemment abordées sont principalement d'ordre pédagogique : temps accordé aux différentes phases, difficultés de la gestion de la phase de mise en commun… les questions autour de la didactique des mathématiques apparaissent peu.

Corinne15 élèves dont 6 cp
Présentation du problème : méthode pour comprendre les maths
Support recherche individuelle :manipulation travail individuel sur les ardoises
travail sur les opérations additions et soustractions avec schémas
Mise en commun : chacun présente puis sur le tbi
Institutionnalisation : affichage à prévoir travail sur la méthode et le sens des opérations
Remarques ou questions :séance en deux temps sinon trop longue
Pour les ce1les enfants sont par trois : situation sur tbi avec les ardoises recherche de schématisation: choix de l'opération avec des petits nombres, référence régulière à la méthode.Les réponses ont été variées.Certains élèves ont encore besoin du schéma .Les élèves travaillent ensuite des situations similaires sur le fichier avec des nombres plus grands.Séance qui prend du temps.Doit-on maintenir sur ce travail ceux qui n'ont plus besoin de ces étapes?Le schéma peut être un frein mais tous ont besoin de références.L'hétérogénéité pose problème dans toutes les situations.

*Figure 2. exemple de prises de notes*

Le formateur propose alors des apports sur les problèmes arithmétiques, la résolution de problèmes, sur les illustrations et la schématisation, principalement en appui sur des travaux et communications de Stella

Baruk[7] , Ollivier Hunault[8] et Annick Fagnant[9] . Le dernier temps du regroupement permet d'aborder la préparation de la séance suivante autour de la résolution de problèmes. Lors de ce temps est présenté le processus de modélisation (figure 2) de Verschaffel, Greer et De Corte interprété par Annick Fagnant (2019).

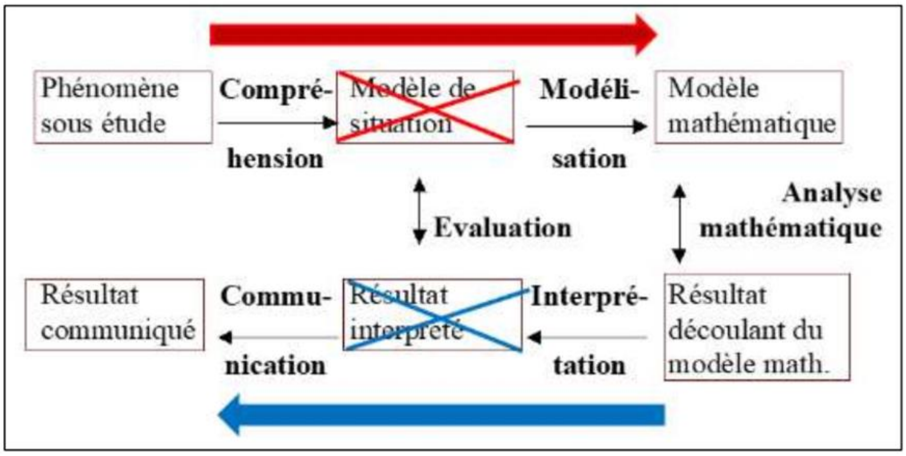



*Figure 3. Le processus complexe de modélisation mathématique et les démarches superficielles (d'après Verschaffel, Greer & De Corte, 2000) Fagnant (2019, p.95)*

Le formateur a choisi de présenter ce schéma car, de son point de vue, les étapes de la résolution sont clairement définies. A partir des traces prélevées en classes lors des séances partagées et des questionnements qu'elles soulèvent, les échanges autour de ce schéma permettent souvent de déconstruire, tout en s'appuyant dessus, une représentation de la résolution de problèmes encore très présente chez certains enseignants à savoir : « *Je lis le problème, je surligne les données importantes, je fais le calcul, j'écris la phrase réponse.* ». De nombreux enseignants observent que certains élèves prennent les nombres présents dans l'énoncé et les ajoutent. Le schéma du processus de modélisation (fig. 3) apporte un éclairage qui permet notamment de commencer un travail de formation sur la modélisation.

Pendant la deuxième séance en classe, il est proposé aux enseignants de concentrer leur prise de traces sur les démarches de modélisation du problème proposées par les élèves. Les enseignants rendent compte lors du regroupement suivant de ce qu'ils ont observé en classe, en mettant en parallèle leurs observations et le processus de modélisation. Le problème est choisi par l'enseignant soit à partir de ses pratiques habituelles, soit dans la banque de problèmes du rallye mathématique.

C'est en particulier pour la préparation de ce temps de formation que Jean Discours a contacté Sonia Yvain-Prébiski pour partager ses questionnements : quel contenu proposer pour ce temps de formation afin d'accompagner les enseignants dans la mise en œuvre d'activité de modélisation mathématique ? Comment les aider à analyser les démarches de modélisation de leurs élèves ? C'est ainsi qu'est née une

---

[7] *Les mathématiques en classe*.
https://www.reseau-canope.fr/mathematiques-stella-baruk/

[8] *L'enseignement de la résolution de problèmes à l'école élémentaire*
https://pedagogie-nord.ac-lille.fr/formations/plan-maths/cycle2/docs/problemes/c2-res-pb-conf-megard-hunault.mp4

[9] Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ?
https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/593e5bed-902b-441e-ae9b-3d7491e4e559

collaboration entre le formateur et la chercheuse en didactique des mathématiques aboutissant à l'émergence d'un projet de recherche encore en cours de construction que nous allons préciser.

# II - VERS UN PROJET RECHERCHE

Le questionnement du formateur a donné lieu à une première question de recherche : quels sont les enjeux de formation autour de l'enseignement et de l'apprentissage de la modélisation mathématique à l'école primaire ? Dans le contexte du Rallye EDUCABAGNOLS, les problèmes proposés relèvent d'un contexte réel. Or, partir de situations ancrées dans le réel nécessite dans un premier temps de rendre le problème accessible par un traitement mathématique.

> *"Il faut prendre en compte le fait qu'une question de vie quotidienne est rarement directement une question mathématique. Elle le devient à travers un processus de mathématisation ou modélisation mathématique qui simplifie et interprète la réalité. Il est important de rendre visible cette étape, les choix qui y sont faits et la façon dont ils conditionnent l'appréhension du réel, en y associant activement les élèves." (Préface d'Artigue dans Masselin (2020, p. 13)).*

Cette nécessité de mathématiser la situation nous amène à choisir le cadre théorique suivant.

## 1 Cadre théorique et questions de recherche

Nous empruntons à Treffers la terminologie de « mathématisation horizontale » pour désigner le processus qui permet de passer « du réel » à « un problème mathématique », la mathématisation verticale étant le travail réalisé au sein même du « monde des mathématiques ». Cette distinction a été reprise par Freudenthal dans le cadre de la Realistic Mathematics Education :

> *Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. (Freudenthal, 1991, p. 40)*

Dans ce cadre de la Realistic Mathematics Education et en appui sur les travaux d'Israël (1996), Yvain-Prébiski (2018) pose les définitions suivantes :

- un modèle mathématique est « *un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité », [...] non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents*. » (Israël, 1996, p. 11) ;
- la modélisation mathématique est une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier ;
- la mathématisation horizontale relève du choix d'un fragment de réalité, de l'identification et du choix de certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique, puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique.

En appui sur ces définitions et sur des éléments d'une première étude épistémologique des pratiques de modélisation des chercheurs Yvain (2017) a élaboré un cycle de modélisation mettant en évidence les rapports dialectiques entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation, en figure 3.

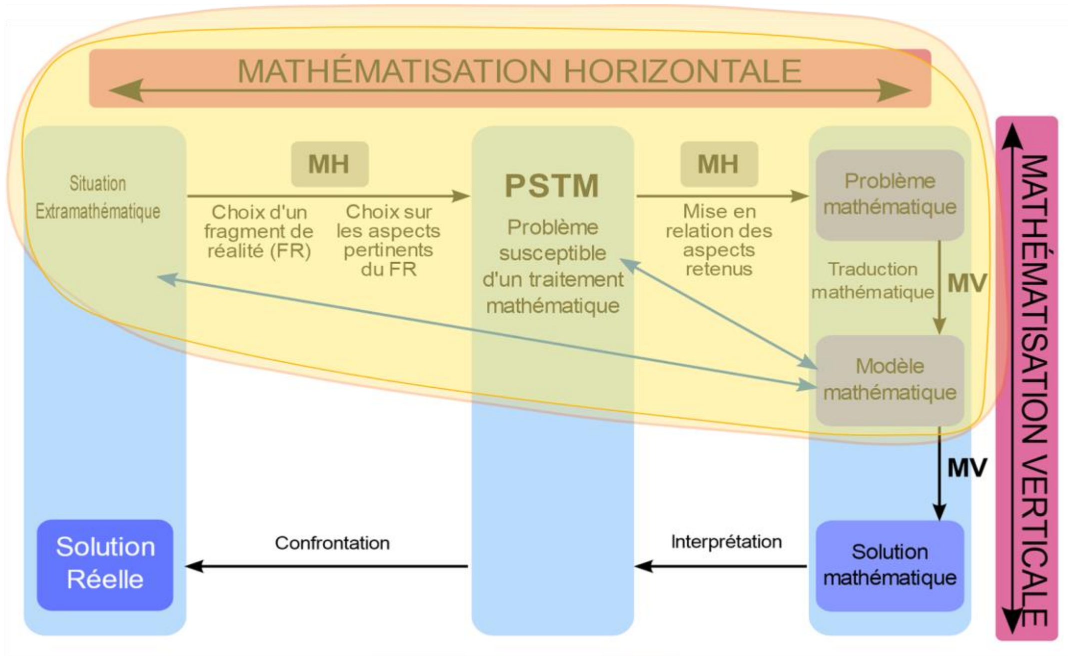



*Figure 4. Cycle de modélisation mathématique prenant en compte l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation (Yvain-Prébiski, 2018)*

Pour mettre en évidence l'interconnexion entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale dans une activité de modélisation mathématique, Yvain-Prébiski a ajouté des doubles flèches à partir de modèle mathématique vers « la situation réelle » et vers « le problème susceptible d'un traitement mathématique ». Ces flèches montrent que le choix du modèle de départ peut être un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus (Yvain-Prébiski 2018).

La mathématisation horizontale est constitutive de l'activité de modélisation à partir d'une situation extra-mathématique. Est-ce que cette mathématisation est prise en compte au niveau de la formation associée au Rallye « EDUCABAGNOLS » ? Quels sont les effets de la prise en compte (ou non prise en compte) par les différents acteurs impliqués dans ce rallye, de la nécessité d'associer activement les élèves au travail permettant de passer d'une situation ancrée dans le réel, à un problème mathématique ?

## 2 Pré-expérimentation

Dans une certaine mesure, la participation d'Yvain-Prébiski au temps de formation concernant l'analyse des démarches de modélisation par les enseignants constitue une pré-expérimentation dans le cadre du projet de recherche naissant.

Le formateur s'est appuyé sur les travaux antérieurs d'Yvain-Prébiski et a retenu l'importance de rendre les élèves conscients de la nécessité de faire des choix, des hypothèses simplificatrices afin de rendre accessible une situation extra-mathématique à un traitement mathématique. Sur ce temps de formation, par ses interventions, il a essayé de rendre les enseignants eux-mêmes conscients de cet enjeu. Les enregistrements audios de cette réunion sont encore en cours d'analyse. Nous pouvons d'ores et déjà souligner que les enseignants ont exprimé qu'ils n'avaient pas véritablement conscience de cet enjeu et que certaines difficultés rencontrées pouvaient en découler. Nous illustrons dans la suite quelques exemples de ces difficultés évoquées par certains enseignants :

- lorsqu'un élève « reste dans le monde réel » c'est-à-dire produit une réponse en appui sur des arguments ancrés dans le réel et par là même ne s'engage pas dans un travail mathématique :

*« Y a un élève qui fait le parallèle en fait entre cette situation-là qui est exposée dans le problème et son vécu puisqu'il dit à un moment donné, ben moi j'y suis allé sur cette grande roue. Et du coup à travers sa phrase, je me demandais dans quelle mesure, justement dans les situations où il y a véritablement un ancrage dans le réel, dans leur vécu, est-ce qu'à un moment donné ça ne va pas venir bloquer ou freiner en tous cas, la compréhension de la situation, ben du coup la résolution ? Puisqu'ils ne vont pas forcément réussir à s'en écarter ! »*

- lorsque plusieurs choix différents d'éléments de contexte ou de grandeurs sont proposés par les élèves engendrant plusieurs traitements mathématiques possibles :

*« Du coup au départ il y a plein de questions qui ont été posées sans qu'on apporte de réponse. Il y a eu des questions, des réponses. Et c'est au moment du travail de groupe où il y a des affiches où certains ont répondu à une question et d'autres à d'autres »*
*« Mais maintenant que tu poses la question je pense que c'est complexe car s'il y a des élèves qui posent différentes questions c'est à l'enseignant de préparer des pistes. Ça pose la question de bien préparer sa séance, de bien connaître le problème et d'imaginer les différentes procédures qu'il pourrait y avoir. »*

- lorsque les élèves ne s'autorisent pas à faire des choix :

*« Le fait de ne pas pouvoir déterminer précisément la cabine où se situe Carole, ça les a gênés vraiment et il y a plusieurs enfants qu'ils veulent savoir où elle est. Ce support de la vidéo il leur sert pour la compréhension et en même temps il leur manque un élément et à partir de là sachant qu'ils ne l'avaient pas ça paraissait compliqué pour eux. »*

A l'issue de ce temps de formation, une piste de travail pour les enseignants des constellations a été décidée : poursuivre le travail sur la résolution de problèmes avec les problèmes du Rallye mathématique vidéo de circonscription comme support, en se focalisant sur la démarche de modélisation mathématique. En particulier, une attention sera particulièrement portée sur les rapports dialectiques entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale dans les analyses *a priori* et *a posteriori* de cette démarche.

## 3 Vers une proposition d'un atelier au colloque de la COPIRELEM

En parallèle de la naissance de ce projet de recherche, nous avons décidé de proposer un atelier au colloque de la COPIRELEM d'une part pour faire connaitre le dispositif EDUCABAGNOLS et d'autre part pour avoir l'occasion de partager nos réflexions sur les enjeux de formation autour de l'enseignement et de l'apprentissage de la modélisation mathématique à l'école primaire.

Nous avons pensé cet atelier en trois temps, chacun ayant trois objectifs différents que nous résumons dans le tableau suivant :

| Phases | La résolution du problème de la grande roue[10] | Analyse de productions d'élèves ayant cherché le problème de la grande roue | Analyse d'une partie des verbatims des enseignants faisant un retour sur les difficultés rencontrées et les leviers proposés au regard de la nécessité de faire des choix avant de traiter |
|---|---|---|---|

[10] : https://educabagnols.net/storage/videos/2018-2019/niveau1_etape4.mp4

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | mathématiquement le problème |
| Objectif | Faire émerger par les participants leurs premières réflexions sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique à l'école primaire. | À partir des formes de la mathématisation horizontale (Yvain-Prébiski 2018), analyser la nature des choix des élèves pour rendre le problème accessible à un traitement mathématique. | Mettre en évidence que la mathématisation horizontale est constitutive de l'activité de modélisation mathématique et questionner l'impact de la prise en compte ou pas de cet enjeu. |

Dans la partie suivante nous allons décrire concrètement la mise en œuvre de ces trois phases.

# III - LE DEROULE DE L'ATELIER

## 1 Description des trois phases proposées

### 1.1 Phase 1 : La résolution du problème de « la grande roue »

*Figure 5. extrait de la vidéo « La grande roue » présentée lors de l'atelier*

A partir d'un support vidéo[10],la consigne suivante a été donnée aux participants de l'atelier : « Quel problème mathématique avez-vous identifié et comment l'avez-vous résolu ? Noter éventuellement les questions que vous vous posez pour le résoudre. »

L'objectif est de proposer un milieu propice aux réflexions sur la modélisation, de permettre aux participants de découvrir la situation de « la grande roue » donnée en cycle 3 lors du rallye en 2018-2019 et de la résoudre.

### 1.2 Phase 2 : Analyse de productions d'élèves

Pour cette phase, plusieurs productions d'élèves ont été mises à la disposition des participants (extrait de ces productions en annexe 1) ainsi que des extraits d'échanges entre l'enseignant et les élèves durant la séance de résolution du problème de la grande roue (extrait de ces échanges en annexe 2). La consigne suivante a été donnée aux participants : « Identifier les questions que les élèves se posent puis analyser leurs réponses en les classant : celles qui montrent des choix à partir de considérations ancrées dans le réel ($C_{choix\text{-}réel}$), des choix sans proposer d'argument ($C_{a\ priori}$) ou des choix à partir d'un travail mathématique ($C_{maths}$).

| | $C_{choix\text{-}réel}$ | $C_{a\ priori}$ | $C_{maths}$ |
|---|---|---|---|
| Question 1 | | | |
| Question 2 | | | |
| .............. | | | |

*Figure 6. Grille support pour l'analyse des questions des élèves*

L'objectif est de proposer aux participants d'analyser les démarches des élèves pour passer de la situation proposée à un problème mathématique. Les analyses proposées se font à partir des questionnements des élèves. Les participants sont invités à identifier les questions que les élèves se posent et les éléments de réponses qu'ils produisent eux-mêmes. Relativement au cadre théorique présenté en amont, le travail des élèves, lors de cette étape de questions-réponses, relève d'un processus de mathématisation horizontale dont la description ci-dessous (Yvain-Prébiski 2018) a été présentée aux participants :

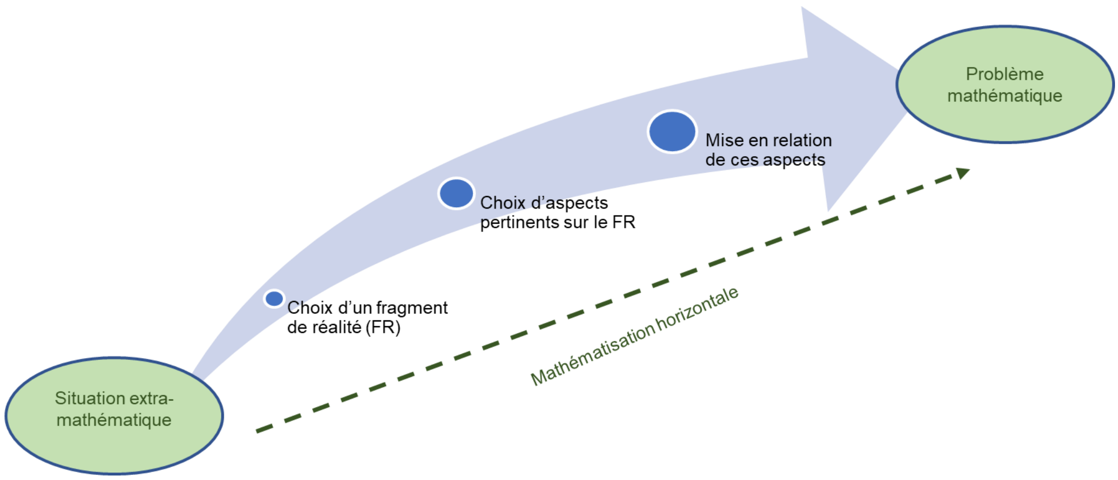



*Figure 7. Les formes de la mathématisation horizontale selon Yvain-Prébiski*

Les réponses des élèves au regard des questions qu'ils se posent pour traiter mathématiquement le problème montrent soit des choix à partir de considérations ancrées dans le réel, soit des choix sans argument explicite ou des choix à partir d'un travail mathématique.

### 1.3 Phase 3 : analyse de retours d'enseignants

Pour cette phase, nous avons mis à disposition des participants des extraits de verbatims d'échanges entre enseignants ayant mis en œuvre dans leurs classes le problème de la grande roue (extraits de ces verbatims en annexe 3). La consigne suivante a été donnée aux participants : « Comment l'enseignant prend-il en compte la nécessité de rendre la situation donnée accessible par un traitement mathématique, la nécessité de faire des choix ? Comment est-ce explicité ? Quelles difficultés ? Quels leviers ? »

L'objectif est ici d'amener les participants à analyser comment les enseignants prennent en compte les enjeux de la modélisation mathématique lors de la résolution d'une situation ancrée dans le réel. Ce travail d'analyse est proposé au regard des formes de la mathématisation horizontale (voir figure 7).

## 2 Analyse *a posteriori* des trois phases de l'atelier au regard de la modélisation mathématique

### 2.1 Concernant la phase 1

Le choix de calculer la durée d'un tour a été majoritaire. S'est alors posée (comme pour les élèves) la question de savoir dans quelle cabine se trouve Carole. Une prise de mesure instrumentée a été proposée, à savoir mesurer le temps que met une cabine pour parcourir un tour. Comme la vidéo proposée ne montre pas (volontairement) un tour complet, le choix de travailler à partir d'un demi-tour ou d'un quart de tour a été exploré. Toutefois, les choix sous-jacents à l'utilisation d'un modèle de proportionnalité (vitesse régulière de la grande roue, pas d'arrêt etc.) n'ont pas toujours été explicités.

De nombreuses questions ont émergé ainsi que des propositions de résolution, comme :

> *« On se demande combien de temps pour un tour.*
>
> *On voit à 0min 4s l'axe à l'horizontale et à 0min 25s on estime être en haut soit 21s pour 1/4 de tour, 1m25s soit 85s par tour.*

*Elle a déjà vu (ou est en train de voir ?) le sommet deux fois (soit un tour et demi).*

*Ils parlent de 5 tours en tout.*

*Il reste trois tours et demi, soit 300s = 5 min.*

*On a recommencé sur la vidéo de 0min 33s à 1min 11s soit 38s pour un demi-tour, soit 76s pour un tour, 266s pour trois tours et demi, un peu moins de 5 min. »*

### 2.2 Concernant la phase 2

Cette phase a permis aux participants de réaliser que tous les élèves ne traitent pas forcément cette situation mathématiquement en proposant par exemple « *d'aller à Lyon et de mesurer le temps que met la grande roue pour faire un tour* ». Et aussi, que dans une même classe, pour une même question, les élèves font des choix différents. Le tableau ci-dessous montre des exemples de productions lors de cette phase à partir des productions des élèves et des verbatims des échanges entre PE et élèves :

| | $C_{choix\text{-}réel}$ | $C_{a\ priori}$ | $C_{maths}$ |
|---|---|---|---|
| Combien fait un tour ? | faudrait aller à Lyon<br>César – maîtresse, moi, j'l'ai déjà fait cette grande roue à Lyon, du coup je sais qu'un tour c'était à peu près 1min30<br>moi je pense que la seule solution pour trouver des réponses c'est d'y aller et de nous dire quel temps elle fait le tour de la roue | 1 tour dure 5 minutes<br><br>1 égale peut-être 5 minutes | ½ tour met 40s<br><br>On sait que ½ tour ça fait 30 s donc 1 tour ça fait 1 minute.<br><br>A la fin on voit la roue qui tourne, je pense qu'elle fait un ¼. Il faut compter le temps qu'elle fait et ajouter des ¼.<br><br>Il faudrait prendre une cabine et regarder en comptant si elle fait tout le tour.<br><br>Il faudrait calculer 36s et 36s pour un tour.<br><br>Il faudrait mettre une montre à 0 et calculer parce que la montre ça dit bien les secondes. |
| Combien de temps pour faire 3 tours ? | J'ai compté les secondes dans ma tête pour ⅓. A chaque ⅓ il y a un arrêt. Entre les arrêts ça pourrait faire 1 minute, le temps que les gens viennent. | trois tours ça fait à peu près 5 minutes<br>La vitesse de la roue est de 10km/h | on a calculé le temps qu'elle prendrait pour redescendre de la roue<br>mais y faudrait la calculatrice parce que j'arrive pas à faire 5 divisé par 3 |

| | $C_{choix\text{-}réel}$ | $C_{a\ priori}$ | $C_{maths}$ |
|---|---|---|---|
| Dans quelle cabine elle est ? | | on savait presque qu'elle était vers là (gestes), mais on n'a pas vu bien où elle était ... et en plus je pense que ça nous servirait un peu à rien | faudrait qu'il nous montre dans quelle cabine elle est César – il pourrait faire une flèche rouge |
| La grande roue peut-elle s'arrêter ? | on sait pas s'il va y avoir un problème avec la roue, elle peut s'arrêter aussi ... on sait pas pourquoi ... parce qu'y a des problèmes ... et là ça prendrait plus de temps donc ça peut pas se calculer la durée du temps vraiment | | |
| Qui a raison entre Carole et Jean ? | | On pense que Jean a raison et qu'il lui reste 15 minutes. | |

*Figure 8. Exemples de réponses des participants lors de la phase 2*

### 2.3 Concernant la phase 3

Au regard des activités proposées lors des phases précédentes, les participants étaient enthousiastes à l'idée d'analyser les retours d'enseignants ayant expérimenté le problème de la grande roue. En effet, ayant pris conscience de cette nécessité d'amener les élèves à passer de la vidéo à un problème mathématique, les participants ont recherché dans les verbatims des enseignants à la fois les leviers et les difficultés face à cette nécessité (« *le fait de ne pas pouvoir déterminer précisément la cabine où se situe Carole, ça les a gênés vraiment et il y a plusieurs enfants qui veulent savoir où elle est.* »). Ils ont essayé de repérer si, pour les enseignants, la mathématisation horizontale est constitutive de l'activité de modélisation mathématique (à partir d'une situation ancrée dans le réel). Ce travail d'analyse leur a permis de s'approprier les formes de la mathématisation horizontale précédemment présentées. Il est principalement ressorti l'importance de ne pas réduire l'activité de modélisation à la traduction d'un énoncé en langage mathématique. En effet, les échanges ont porté sur la nécessité de préciser aux élèves à partir de quels choix (d'éléments de contexte, de grandeurs) on va traiter mathématiquement la situation et même de montrer que selon les choix faits la résolution peut être différente (par exemple si on acte que la roue n'a pas une vitesse régulière). On peut noter aussi que la prise instrumentée de mesures à partir de la situation donnée, comme celle d'utiliser un chronomètre, a ouvert des débats sur le fait que cela peut amener l'enseignant à gérer des difficultés inhérentes à un potentiel changement de contrat didactique. Les besoins de formation relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage de la modélisation à l'école élémentaire ont été évoqués par les participants afin d'accompagner les enseignants à mettre en œuvre dans les classes, des situations dites *de la vie quotidienne* dans les programmes.

## IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons focalisé notre atelier sur l'étape qui conduit à passer d'une situation extra-mathématique à un problème mathématique. Cette étape, qui relève de la mathématisation horizontale, est souvent négligée dans les classes. Cela a souvent comme conséquence une certaine incompréhension des élèves vis-à-vis de l'intérêt des mathématiques pour appréhender le réel. Cela peut également générer des difficultés pour l'enseignant pour proposer un étayage pertinent en particulier aux élèves qui « restent dans le réel de la situation proposée ». Le projet de recherche émergent, en lien avec la formation adossée au rallye EDUCABAGNOLS, vise à mettre à l'étude des questions portant d'une part sur l'étude des processus de mathématisation en jeu dans le processus de modélisation des situations proposées dans ce dispositif, et d'autre part sur l'analyse des effets de la prise en compte (ou non prise en compte) par les différents acteurs du dispositif de formation de la nécessité d'associer activement les élèves au travail permettant de passer d'une situation de la vie quotidienne à un problème mathématique. Ce même questionnement est également à l'étude, avec Derouet C., au sein d'un autre dispositif de formation continue d'enseignants de mathématiques du secondaire en France (Derouet et Yvain-Prébiski, 2022).

## V - BIBLIOGRAPHIE

Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., & Guillaume, J. C. (2020). *Ermel-Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Hatier.

Derouet, C., & Yvain-Prébiski, S. (2022). Premiers jalons d'une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation au sein d'un dispositif de formation continue français inspiré des Lesson Study. In *Actes du colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques (GDM-2021). Sherbrooke, Québec*, 84-96.

Fagnant, A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? In *Séminaire de Didactique des Mathématiques*. IREM de Paris–Université Paris Diderot, France.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education Dordrecht (Netherlands)*. Kluwer Academic

Israël, G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique.* Seuil Eds.

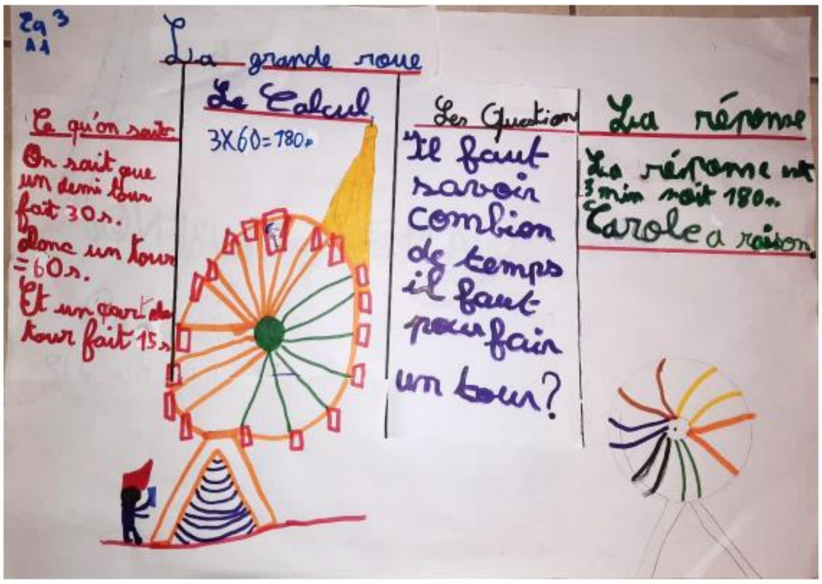
Masselin, B. (2020). *Ingénieries de formation en mathématiques de l'école au lycée. Des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Presses Universitaires de Rouen et du Havre.

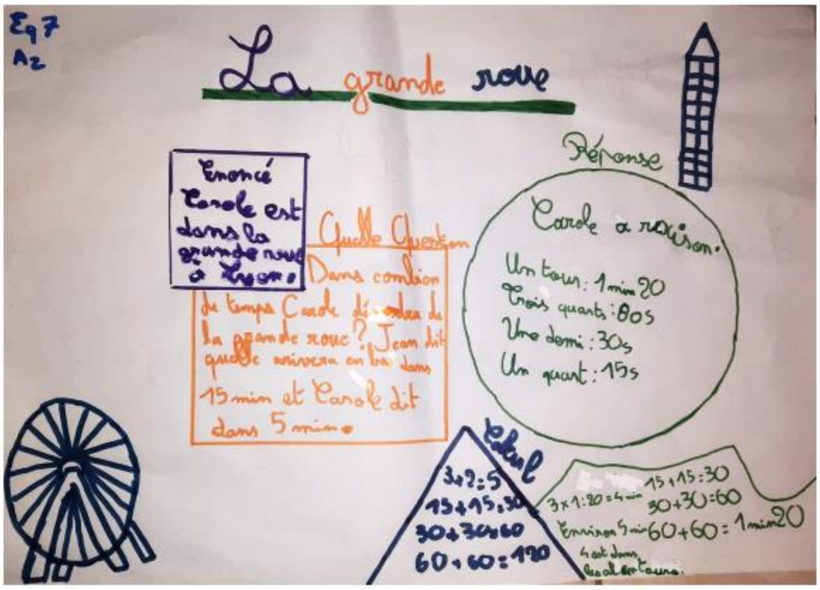
Villani, C., Torossian, C., & Dias, T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.*

Yvain, S. (2017). Étude de la transposition du processus mathématisation aux élèves. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et Didactique* (pp. 235-248). Presses universitaires de Franche-Comté.

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [thèse de doctorat inédite]. Université Montpellier. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1/document

## VI - ANNEXE 1 : EXTRAITS DE PRODUCTIONS D'ELEVES






## VII - ANNEXE 2 : EXTRAITS DES ÉCHANGES PE-ÉLEVES

Élève – « Mais c'est impossible de donner des réponses avec des informations à peu près ! »

M – « Comment tu penses qu'on devrait faire ? »

élève – « Ben justement je sais pas. »

M – « Qu'est-ce qu'il nous faudrait ? »

élève – « Des réponses précises. »

M – « Mais on a que cette vidéo. »

Elève – « Faudrait aller à Lyon. »

César – « Maîtresse, moi, j'l'ai déjà fait cette grande roue à Lyon, du coup je sais qu'un tour c'était à peu près… »

M – « Tu redis « à peu près »…

Timéo –« T'as compté César ? »

César – « Non, j'ai pas compté mais ... »

M – « Timéo2 ? »

Timéo2 – « C'est dur ... ( ? ) le résultat précis ... faudrait, comme elle a dit ( ? ) faudrait qu'elle nous donne une info précise pour qu'on sache mieux faire le calcul mais pas qu'elle nous dise 5 min à peu près ou sinon ... »

M – « Oui... Morgane ? »

Morgane – « Faudrait calculer combien de temps ça met pour faire un tour... euh ... sur la vidéo ... c'est quasiment impossible parce que ... »

César – « ... oui, on sait pas dans quelle cabine elle est ... »

Morgane – « Voilà ! »

César – « Faut juste regarder au début où elle est et après, faut que regarder cette cabine pendant tout le long et toi ... dès qu'elle est en haut ... »

M – « Alors, juste une petite question ... avez-vous besoin de savoir exactement où est Carole sur la grande roue ? »

Elève – « Nan ! »

César – « Oui... oui maîtresse... un petit peu ... »

Elève – « Non. »

César – « ... Si on veut calculer son tour ... si quand elle est en haut, on calcule le temps qu'elle prend ... parce que si on croit qu'elle est dans cette cabine mais peut-être qu'elle est dans celle-là ... »

M – « Morgane ? »

Morgane – « On n'est pas obligé parce que si on calcule le tour d'une autre cabine, ça fera le même temps qu'à la cabine de Carole. »

M – « Timéo ? »

Timéo – « En plus, maîtresse, on n'a pas bien vu où elle était ... on savait presque qu'elle était vers là (gestes), mais on n'a pas vu bien où elle était ... et en plus je pense que ça nous servirait un peu à rien. »

M – « Timéo2 ? »

Timéo2 – « Ou alors la semaine prochaine, on devrait revoir la vidéo pour bien analyser où elle est. »

M – « Donc vous voulez savoir exactement dans quelle cabine elle est pour savoir le temps qu'elle va mettre ?? » (intonation)

Morgane – « C'est quasiment impossible parce qu'on sait pas si va y avoir un problème avec la roue, elle peut s'arrêter aussi ... on sait pas pourquoi ... parce qu'y a des problèmes ... et là ça prendrait plus de temps donc ça peut pas se calculer la durée du temps vraiment ... »

## VIII - ANNEXE 3 : EXTRAITS DES ÉCHANGES ENTRE ENSEIGNANTS

[27'45] G : « En fait le passage du mode individuel au mode collectif, parce que suivant si l'on aborde collectivement le problème avec les enfants on va induire déjà une direction, ou si on les fait chercher d'abord individuellement le problème avant de les rassembler pour déterminer une réponse commune. Vous déterminez d'abord collectivement le sens du problème à résoudre vous ? Ce paramètre ça change pas mal de choses peut-être. Je me suis posé la question parce que moi aussi… »

GW : « En fait à l'issue des premières visualisations, il n'y en a pas qu'une seule en général il y en a trois, statistiquement on tourne autour de trois, on se pose la question « Qu'est-ce qu'il faut résoudre ? » et donc du coup les élèves font des propositions. En général, alors c'est toujours pareil, finalement les prises de parole, les élèves qui sont peu sûrs d'eux où qui n'ont pas vraiment compris la situation, ils ne vont pas forcément proposer une question, donc il y a une partie de la classe là-dessus qui est un petit peu passive. Et en fait ceux qui participent sont plutôt les élèves à l'aise ou les élèves moyennement à l'aise. Et en fait ils ont proposé deux questions « Dans combien de temps Carole descend de la roue ? » ou alors « Qui a raison de Jean ou de Carole ? ». Ce sont les deux questions qui ont émergé de cette phase-là. Les recherches étaient sur l'ardoise et les questions sur une feuille je les ai là si vous en avez besoin. […]. Après, c'est quelque chose qui est assez régulier, dans ma classe chaque groupe fait une affiche et va exposer au tableau sa solution. Ensuite les enfants discutent, même des fois on vote carrément pour savoir quel est le groupe qui proposera la solution qui sera retenue en vidéo. […] »

[31’10] S : « Je réfléchissais mais moi ils n’ont pas tranché sur la question. Ils ont résolu les deux. Du coup au départ il y a plein de questions qui ont été posées sans qu’on apporte de réponse. Il y a eu des questions, des réponses. Et c'est au moment du travail de groupe où il y a des affiches où certains ont répondu à une question et d'autres à d'autres et au final en mettant en commun ils ont entendu les deux questions en fait. […] »

[34’20] F : […] « La compréhension n’a pas été évidente je pense car je n’ai pas bien lancé le problème. Les élèves étaient dans le flou. Mais c’était un choix de ma part de les laisser se débrouiller, voilà, de réfléchir par eux-mêmes. »

G : « Donc de ne pas poser collectivement la question au début c’est ça ? »

F : « Je ne pose pas la question. En fait, je ne leur dis pas même qu’il n’y a pas de question. Donc ils découvrent ce problème vidéo sans préparation. Ce qui a amené à une discussion, une heure de discussion finale entre les élèves, très riche en langage parce que les groupes échangeaient, se posaient des questions. On est arrivé à une formulation d’une question au final par ces interrogations. Mais ils sont partis des informations, ils ont prélevé des informations dans le problème. En fonction des informations prélevées, quelle question je vais pouvoir poser et avoir. Donc on était je pense dans la modélisation déjà où ils ont résolu un problème et une fois qu’ils l’ont résolu et qu’ils se sont dit quelles informations j’utilise celles que je vais pouvoir trouver, alors je vais poser cette question. »

J : « Tu veux dire qu’ils sont allés chercher dans le problème des choses, c’est ça ? »

F : « Ils ont récupéré différentes informations, de ces informations ils ont discuté entre eux. Le mot « à peu près » les a vraiment interrogés parce que, que veut dire ce mot « à peu près » en mathématiques pour eux il n’y a pas de « à peu près », c’est une science exacte. »

D : « J’ai eu la même question. »

F : « Un calcul c’est toujours exact. Je me rends compte que je n’ai pas assez travaillé les ordres de grandeur. […] ce que j’en retire c’est le bienfait de la verbalisation et que c’est leur questionnement qui les amène à prélever des informations et à se demander comment on va faire aussi pour trouver […] A force de discuter, c’est les élèves qui signalent que peu importe où elle est on prend une nacelle au hasard. […] Ils avaient repéré dans la vidéo des informations qu’ils pouvaient prélever. Par exemple, vu qu’elle est à deux tours et demi car quand elle parlait elle était en haut. Ils avaient repéré que trois tours ça faisait à peu près 5 minutes. Du coup là il y avait une confusion, parce que la donnée des 5 minutes ne correspondait pas à ça mais au temps qu’il restait, donc il y a eu une mauvaise interprétation de cette donnée qui était dans l’énoncé. Aussi que la dame dans la vidéo il lui restait trois tours et qui lui restait à peu près 5 minutes. Ils sont partis sur le fait qu’il lui reste 5 minutes mais pas sur est-ce c’est possible qu’il lui reste 5 minutes, pour eux c’était admis. Je l’ai perçu comme ça. Y a un élève qui fait le parallèle en fait entre cette situation-là qui est exposée dans le problème et son vécu puisqu’il dit à un moment donné, ben moi j’y suis allé sur cette grande roue. Et du coup à travers sa phrase, je me demandais dans quelle mesure, justement dans les situations où il y a véritablement un ancrage dans le réel, dans leur vécu, est-ce qu’à un moment donné ça ne va pas venir bloquer ou freiner en tous cas, la compréhension de la situation, ben du coup la résolution ? Puisqu’ils ne vont pas forcément réussir à s’en écarter ! […] »

J : « En tous cas ça interroge ! »

F : « Déjà cette situation c’est une vidéo et une vidéo c’est familier aux élèves, et là leur demander de résoudre un problème à partir d’une vidéo, on les déstabilise dans une certaine mesure, car ils regardent différemment l’image. Comme le disait différemment S. peut-être que le fait de ne pas pouvoir déterminer précisément la cabine où se situe Carole, ça les a gênés vraiment et il y a plusieurs enfants qui veulent savoir où elle est. Ce support de la vidéo il leur sert pour la compréhension et en même temps il leur manque un élément et à partir de là sachant qu'ils ne l'avaient pas ça paraissait compliqué pour eux. […] »

[43'25] F : « L'enseignant intervient pour organiser le travail des élèves dans le sens organisation matérielle pour la présentation de la vidéo, la disposition aussi de la classe, le rythme donné à la succession des différentes phases de l'activité, c'est vraiment la place centrale de l'enseignant pour garder les enfants mobilisés dans l'activité et la recherche. La deuxième chose c'est l'intervention dans la régulation des échanges et du travail. L'enseignant permet à la parole de circuler entre les élèves, il n'est pas en retrait vraiment de l'activité, il y a un accompagnement des élèves sans réellement donner de pistes. »

J : « Et comment faire pour à la fois réguler l'activité et être à l'intérieur ? La faire avancer et en même temps sans, euh comment tu as fait ? »

F : « Au lancement ils ont regardé la vidéo une première fois, je les ai mis en groupe et j'ai eu de la chance oui, j'ai demandé c'est quoi le problème ? Et j'ai relancé tout le monde et c'est là le rôle de l'enseignant d'utiliser les questions que se posent les élèves pour les poser à tout le groupe et reformuler la question. »

J : « Et c'est facile à faire ? C'est quelque chose de naturel ou, toute cette phase ça a l'air complexe, tu dis j'ai eu de la chance. »

F : « Dans mon souvenir je n'ai pas eu de difficulté à relancer les échanges. Mais maintenant que tu poses la question je pense que c'est complexe car s'il y a des élèves qui posent différentes questions c'est à l'enseignant de préparer des pistes, ça pose la question de bien préparer sa séance, de bien connaître le problème et d'imaginer les différentes procédures qu'il pourrait y avoir. »

# REPRÉSENTER ET MODÉLISER AUTOUR DU CALCUL SOUS VINGT : QUELS ENJEUX POUR L'ENSEIGNEMENT ET POUR LA FORMATION ?

**Anne-Marie RINALDI**
MCF, Université Paul Valéry Montpellier
LIRDEF, groupe IRES Montpellier
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

**Sonia BAYLE**
RMC, groupe IRES Montpellier
sonia.bayle@ac-montpellier.fr

**Sophie GASTAL**
RMC, groupe IRES Montpellier
sonia.bayle@ac-montpellier.fr

Résumé
Nous partons d'un travail de recherche conduit dans un groupe IREM de Montpellier (2019-2021), autour du *calcul sous vingt,* pour analyser le rôle du matériel et de certaines tâches proposées à partir de manipulations effectives et suivies de séances de calcul (Rinaldi, 2022) en mettant une focale sur le rôle joué par la représentation des quantités et la modélisation des opérations sur les quantités (Cabassut, 2020). Nous montrons en quoi, un dispositif de formation (2021-2022), également conçu autour du *calcul sous vingt*, à l'aune de la mise en place du plan maths dans les circonscriptions (Torossian et Villani, 2018), peut amener à questionner les connaissances pour l'enseignement (Ball & al. 2008) et à s'interroger sur les besoins professionnels exprimés par les professeurs des écoles (Charlot, 1979).

## I - INTRODUCTION

La recherche engagée autour du *calcul sous vingt* a débuté dans un groupe IREM de Montpellier en janvier 2018, avec cinq maîtres formateurs, enseignants en maternelle et en élémentaire, et un chercheur en didactique des mathématiques. Une de nos premières interrogations s'est portée sur le choix du matériel à utiliser en grande section de maternelle et sur le début du cycle 2 (en première et seconde année d'école élémentaire) pour représenter les nombres dans le but de faciliter la construction du répertoire additif sous vingt. Dans la continuité, nous avons cherché quels types de manipulations effectives sur les représentations de nombres et de tâches de calcul faciliteraient, à terme, la maîtrise des faits numériques sous dix puis sous vingt. Ce travail collaboratif a donné lieu à la publication d'une ressource en ligne[1] destinée aux enseignants et aux formateurs du premier degré. À la suite de ce travail, avec le soutien de la DSDEN de l'académie de Montpellier et de la DSDEN de l'académie de Versailles, nous avons développé

[1] La brochure sur le calcul sous vingt est disponible en suivant ce lien : https://irem.edu.umontpellier.fr/files/2021/09/brochure-calcul-sous-vingt.pdf

durant l'année 2020-2021 des formations de formateurs, destinées principalement à des conseillers pédagogiques et des référents mathématiques de circonscription. Cette aventure s'est poursuivie en janvier 2022 dans le cadre du plan mathématiques national déployé en circonscription quand deux membres du groupe IRES ont construit une formation pour les enseignants de leurs constellations respectives autour d'un parcours en calcul.

C'est pourquoi, fortes de cette expérience de recherche et de formation, nous avons souhaité proposer un atelier au colloque de la Copirelem qui aborde trois questions essentielles :

- le rôle joué par la représentation des quantités et de la modélisation des opérations sur les quantités au sens de Cabassut (2020) dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul sous-vingt ;
- la nature des connaissances pour l'enseignement au sens de Ball & al. (2008) à mobiliser afin de s'approprier une ressource disponible en ligne à l'aune de la mise en place du plan mathématiques dans les circonscriptions (Torossian et Villani, 2018) ;
- l'évaluation des formations qui abordent comme contenu le parcours de l'élève en calcul de la maternelle à la fin du cycle 3.

Pour favoriser les échanges et débattre sur ces questions, le temps de l'atelier a été divisé en trois parties. Dans un premier temps nous avons présenté en collectif, les enjeux du calcul sous vingt et les grandes lignes du dispositif d'enseignement conçu et expérimenté. Puis, nous avons proposé aux participants un travail en groupe qui leur a permis de s'approprier un ensemble de tâches imbriquées de manipulation et de calcul proposées à des élèves de cours élémentaire. Après un temps de mise en commun et d'échange, nous avons poursuivi en exposant les besoins de la profession que la formation engagée en circonscription par deux animatrices de l'atelier autour du calcul sous vingt a révélés et nous avons débattu sur l'efficacité à plus ou moins long terme des formations de proximité.

Le texte de l'article reprend chronologiquement les éléments saillants qui sont ressortis des différents temps d'échanges. C'est ainsi, qu'en évoquant les enjeux du calcul sous vingt, nous essayons - en réponse aux nombreuses questions des participants lors des échanges en petit groupe- de justifier le matériel utilisé pour représenter les nombres inférieurs à vingt. Nous énonçons, un ensemble de résultats, en lien avec l'expérimentation conduite en classe de CE1, qui montre quels peuvent-être les effets sur l'apprentissage en calcul des élèves de l'implémentation de la technique en appui sur dix. Par la suite, pour aborder la question de la formation des enseignants, ici, autour du calcul sous vingt, dans le cadre du plan mathématiques, nous avons fait le choix d'inclure dans le texte, une partie des diapositives utilisées par les référentes mathématiques de circonscription avec les enseignants des constellations en janvier 2022 ; diapositives par ailleurs présentées dans l'atelier. Ce corpus donne, à notre sens, une idée assez précise des compétences professionnelles visées pour une formation de 24 heures destinée à un groupe de sept enseignants du premier degré. Nous exposons également les critères qui nous ont servis à évaluer cette formation avant de présenter les résultats en lien avec les besoins de la profession que cette étude exploratoire permet d'entrevoir.

## II - LES ENJEUX DU CALCUL SOUS VINGT

Après avoir défini les particularités du calcul sous vingt, nous explicitons, en appui sur des résultats de recherche en psychologie cognitive, en quoi l'apprentissage du calcul sous vingt occupe une place essentielle dans le parcours de l'élève. Par ailleurs, comme ce calcul s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix, et qu'il est relativement facile de représenter ces nombres, nous montrons comment, à partir de certaines représentations induites par un type de matériel, il est possible de repérer des décompositions additives et de modéliser les calculs au moyen d'écritures arithmétiques. Pour finir, nous consacrons un paragraphe à définir la technique en appui sur dix qui nous semble intéressante à implanter éventuellement en cours élémentaire première année.

## 1 L'apprentissage du calcul sous vingt dans le parcours de l'élève

De nombreuses études, dont celle de Gersten and al. (2005), révèlent que le fait de reconstruire ou récupérer directement un ensemble de résultats additifs et soustractifs sur des nombres inférieurs ou égaux à dix, est nécessaire au développement de compétences en arithmétique, à la fois sur le versant de la compréhension des nombres et des opérations. Pour les chercheurs, les élèves ayant des difficultés en mathématiques en deuxième année d'école élémentaire (CE2) se souviennent de beaucoup moins de faits numériques que les autres élèves et n'arrivent pas à utiliser certains faits numériques pour les combiner. Mais on sait aussi que beaucoup de jeunes enfants vont avoir du mal à abandonner l'usage du comptage à l'aide des doigts au profit d'autres stratégies de calcul et au profit de la récupération en mémoire de résultats. Cette approche est reprise par Baroody (2006) qui indique que généralement, en première année d'école élémentaire, pour trouver par exemple le résultat de six plus cinq, l'élève compte à partir de six en levant successivement les cinq doigts de sa main tout en récitant de façon synchrone la comptine numérique à partir de six : sept, huit, neuf, dix et onze. En CE1, pour le même calcul, il est probable que l'élève utilise par exemple le fait que cinq plus cinq égal dix et le fait que six égal cinq plus un pour trouver comme résultat onze alors qu'en CE2, on peut s'attendre à une réponse immédiate et fiable « six plus cinq font onze ». Baroody en déduit que les enfants progressent généralement dans la maîtrise des additions de petits nombres en suivant trois phases : la première est associée au comptage ; la seconde phase est basée sur la décomposition et recomposition des nombres en appui sur les faits numériques connus ; la troisième phase est directement liée à la récupération de faits numériques.

Par ailleurs, le calcul sous vingt trouve son sens et son utilité car il amène à résoudre les problèmes additifs, selon la classification de Vergnaud (1989), en opérant directement sur les nombres inférieurs ou égaux à dix au moyen de l'addition et la soustraction. Les résultats des calculs, peu à peu mémorisés, vont permettre ainsi de trouver, directement et mentalement, sans l'aide d'une manipulation effective d'objets, les résultats escomptés.

La figure 1 reprend l'idée du calcul sous-vingt englobant les nombres et la numération, les opérations et la résolution de problèmes. Elle montre, de surcroît que le calcul sous vingt a pour prolongements naturels : le calcul mental, le calcul en ligne et le calcul en colonne.

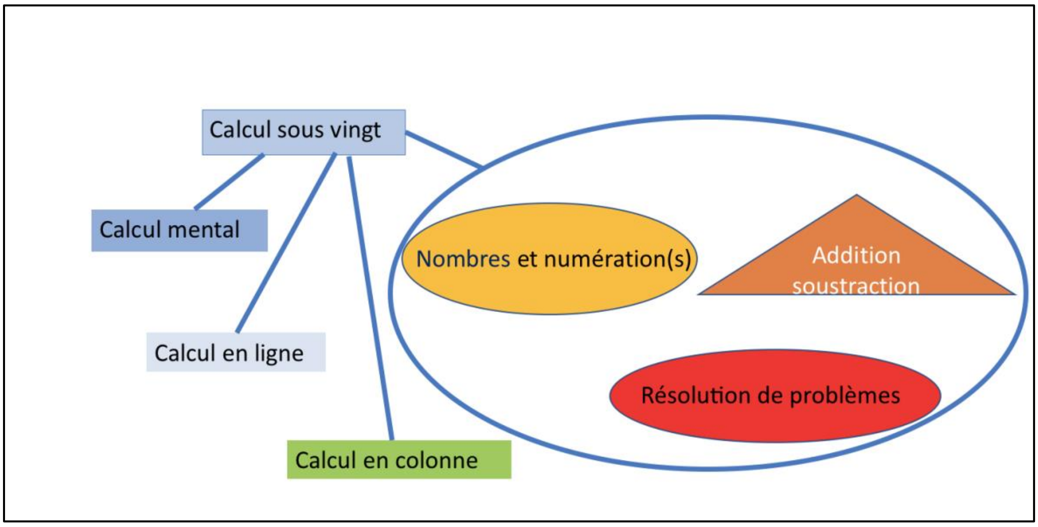



*Figure 1 : le calcul sous vingt et ses prolongements*

## 2 Représentation et modélisation autour du calcul sous vingt

Le calcul sous vingt s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix. Or, une des caractéristiques des nombres entiers inférieurs à dix, est qu'il est relativement facile de les représenter grâce à des configurations de doigts, des dessins, des schémas ; sur ces dessins, ces schémas, on peut voir plus ou moins facilement certaines « relations » entre deux nombres. C'est ainsi que par exemple, une constellation de dé, un rectangle de trois cases sur deux cases, amènent à visualiser le fait que six égal trois plus trois alors que le fait de lever une main et un doigt évoque plus directement le fait que six est égal à cinq plus un. De la même manière, certaines représentations que nous évoquerons précisément dans le paragraphe suivant contribuent à voir que onze égale dix plus un et que chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf.

En ce sens, en nous référant aux travaux de Cabassut (2020), nous pouvons dire que, dans le cas du calcul sous vingt, partir de certaines représentations pour dégager des relations mathématiques entre éléments représentés, va amener à modéliser mathématiquement au moyen de l'addition et de la soustraction, des relations entre les nombres, ces nombres étant inférieurs à dix.

Les relations qui nous intéressent vont alors se traduire dans le registre de la langue parlée par des mots nombres et des expressions spécifiques telles que somme, décomposition additive, complément et différence, expressions qui renvoient à des calculs additifs et soustractifs. Dans le registre des mathématiques, ces mêmes résultats s'expriment au moyen de nombres écrits dans le système de numération décimale et d'écritures arithmétiques de la forme $a + b = c$ ; $c = a + b$, $b - a = c$ et $c = b - a$ avec a, b et c entiers naturels. Dans les premières années de l'école élémentaire, il est difficile de lire indifféremment $a + b = c$, de droite à gauche et de gauche à droite. C'est pourquoi, dans un premier temps, il est peut-être souhaitable de disposer de deux écritures $a + b = c$ et $c = a + b$, la première indiquant que c est la somme de a et b, la seconde indiquant que a + b est une décomposition additive de c.

## 3 Matériel envisagé pour représenter les nombres sous vingt

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur certains éléments saillants de la compréhension du nombre chez le jeune enfant pour discuter du choix d'un type de représentation des nombres sous vingt dans le but de faciliter la modélisation de relations mathématiques entre des éléments représentés.

Une idée, notamment défendue et largement diffusée par Brissiaud[2] (2007, 2015), consiste à penser qu'il n'y a pas une mais deux façons de connaitre le nombre un, le nombre deux et le nombre trois : la première étant basée sur le comptage et la seconde sur la décomposition des nombres. Avec la seconde approche, pour dénombrer par exemple une collection de trois éléments, l'enfant peut dire un, un, et un ; deux et un ; un et deux ou directement trois. Les mots nombres prononcés désignent à chaque fois des quantités et ne sont pas prononcés après avoir effectué un comptage. En effet, selon Gelman (1983), certaines expériences conduites auprès de jeunes enfants amènent à penser que le subitizing donc la capacité à percevoir globalement, « d'emblée » est présente pour les petites collections.

Pour Mandler et Shebo (1982) le processus de reconnaissance serait lié aux arrangements spatiaux qui varient peu pour les petites quantités qui seraient donc facilement reconnaissables. La quantité un ne pourrait ainsi être représentée que par un point, deux points formeraient nécessairement une ligne, et le modèle de trois sous la forme d'un motif triangulaire serait aisément perceptible. Pour quatre et au-delà

[2] Cette idée est reprise dans les programmes du cycle 1 en vigueur à la rentrée 2020 (Bulletin officiel n°31 du 30-07-2020) et dans les annexes du programme d'enseignement de l'école maternelle (Bulletin officiel n°25 du 24-06-2021).

de quatre la variabilité des configurations augmentant, toute reconnaissance immédiate deviendrait plus difficile. Pour Brissiaud (2015) :

> « Le processus de compréhension des nombres au-delà de 5 ne se déroule pas à l'identique de celui des premiers nombres du fait que le nombre 5, celui des doigts d'une main, joue un rôle crucial dans la compréhension des nombres de 6 à 10. » (Brissiaud, 2015, p.1)

Le rôle crucial du nombre 5 est également exposé dans un article de Flexer (1986). Dans cet article, la chercheuse propose d'utiliser un « concrete models of numbers » inspiré d'un modèle utilisé au Japon par l'association of Mathematical Instruction (AMI) divulgué qui utilise des combinaisons de matrices carrées « simples » et de matrices rectangulaires 1 x 5 pour créer des représentations de nombres. Les nombres 6, 7, 8 et 9 sont reconnus par des combinaisons d'une matrice rectangulaire de 5 carreaux avec le nombre approprié de matrices carrés. Avec ce matériel, d'autres combinaisons sont envisagées afin d'étudier chaque nombre séparément et d'apprendre ses décompositions.

Les règlettes dites Cuisenaire du nom de leur concepteur Georges Cuisenaire (1891-1951) tout comme les matrices rectangulaires de Flexer (Flexer,1986) produisent également des « modèles » de nombres. En effet la « 1-réglette » mesure 1 centimètre sur 1 centimètre sur 1 centimètre. Elle est définie comme la réglette unité et correspond au nombre 1. La « n-réglette » mesure *n* centimètres sur 1 centimètre sur 1 centimètre et correspond au nombre n. Les couleurs spécifiques de chaque réglette ne sont là que pour aider à la mémorisation des nombres qui leur sont associées. Avec ces deux modèles de nombres, le fait de pouvoir mettre bout à bout, de mettre juste dessous deux ou plusieurs réglettes, respectivement plusieurs matrices va ainsi conduire à comparer directement des longueurs, à les additionner et à les soustraire.

Un des avantages de ces manipulations effectives par le geste et la vue est leur simplicité et le fait que tout résultat puisse être validé par une comparaison de « taille » sans avoir besoin de passer par le comptage ou le surcomptage. En revanche, le facteur « taille » est valide car les réglettes, tout comme les matrices carrées sont construites à partir du report d'une unité, dans le premier cas cette unité correspond à un cube de $1 \times 1 \times 1$ et dans le second cas, à un carré de $1 \times 1$.

Dans le prolongement, nous pensons que le processus de compréhension des nombres au-delà de dix ne se déroule pas de la même manière que pour les nombres sous dix, car le nombre dix joue un rôle majeur dans nos deux systèmes de numération, parlée et écrite. En effet ces deux systèmes sont basés sur le groupement par dix.

Par ailleurs, nous estimons qu'utiliser deux types de matériels pour représenter les nombres sous vingt est facilitateur pour établir ou invalider des relations quantitatives. Notre choix s'est porté sur l'introduction d'un matériel- *les bandes* - qui rend possible grâce à : deux bandes de longueur dix et neuf bandes de longueur allant de un à neuf la représentation de tous les nombres de un à vingt. Ce matériel se rapproche des matrices carrées de Flexer (1986) ,tout en étant différent, car chaque bande est un objet en papier à double face. Sur une des faces, on trouve x cases de même taille et, sur l'autre face, le nombre x est écrit en chiffre. L'autre matériel correspond aux *configurations de doigts*. Ce matériel, familier aux élèves, favorise également tout type de groupement et en particulier le groupement par dix. Il amène également à visualiser directement les résultats grâce à des configurations « stables » que l'enfant a souvent rencontrées et mémorisées. Par exemple six doigts correspondent à trois doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main ou à une main entière et un doigt sur l'autre main ou encore une main sans le pouce et deux autres doigts, dix correspond à deux mains levées. Ce matériel, en revanche ne donne pas la possibilité de valider des résultats. Dans le paragraphe suivant, nous exposons d'autres arguments, directement reliés au calcul, qui incitent à s'appuyer sur les décompositions de dix et les décompositions des nombres inférieurs à dix pour construire les décompositions et les recompositions sous vingt.

## 4 La technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix, tout comme la technique utilisant la décomposition et recomposition des nombres et la technique des presque-doubles, a comme caractéristiques de s'appuyer sur une bonne connaissance des nombres, de faire appel à des faits numériques connus et d'utiliser l'associativité de l'addition. Nous donnons un exemple de calculs effectués avec ces trois techniques avant d'expliciter des éléments de technologie au sens de Chevallard (2002) propre à la technique en appui sur dix.

Avec la technique utilisant la décomposition et recomposition des nombres, pour calculer par exemple onze plus cinq, il s'agit de décomposer onze en dix plus un, de calculer un plus cinq puis de recomposer dix plus six en seize soit : $11 + 5 = (10 + 1) + 5 = 10 + 6 = 16$. La technique des presque-doubles, suppose que, pour calculer par exemple huit plus sept, on ajoute un au double de sept, soit un à quatorze. En effet : $7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$. Avec la technique en appui sur dix, pour calculer $7 + 5$ on calcule $7 + 3 + 2$ ou $5 + 5 + 2$.

### 4.1 Domaine d'application de la technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix s'applique pour calculer $a + b$ avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9 et quand la somme $a + b$ est supérieure à 10 et inférieure à 20. Cette technique est donc spécifique au calcul sous vingt. Quand le domaine numérique est étendu au-delà de 20, la technique ne s'appuie plus sur dix mais sur un multiple de dix. C'est ainsi que pour calculer $27 + 8$, on calcule $27 + 3 + 5$. Le multiple de dix sur lequel on s'appuie est alors trente.

### 4.2 Principe et connaissances mathématiques relatives à la technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix consiste à décomposer un des termes du calcul en fonction de l'autre terme du calcul, afin de se ramener à un calcul de la forme dix plus « … », avec « … » entier naturel compris entre zéro et neuf. Elle suppose de savoir :
- décomposer additivement un nombre compris entre zéro et neuf ;
- mobiliser directement les faits numériques connus ou retrouver les résultats du répertoire additif sous dix ;
- recomposer un nombre de la forme dix plus « … », avec « … » entier naturel compris entre zéro et neuf ;
- utiliser l'associativité de l'addition et éventuellement la commutativité de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

### 4.3 Mode d'emploi de la technique

Si nous reprenons l'exemple du calcul $7 + 5$ et que nous cherchons à expliquer comment nous nous y prenons pour effectuer le calcul demandé en partant du nombre 7, nous pouvons avoir éventuellement le discours suivant[3] : « Pour effectuer $7 + 5$, j'ajoute à 7 le complément de 7 à 10 afin d'obtenir 10 puis le complément à 3 de 5. ». Ce discours met en avant la nécessité de convoquer deux faits numériques, $7 + 3 = 10$ et $3 + 2 = 5$ pour remplacer le calcul initial par un calcul équivalent : $7 + 5 = 7 + 3 + 2$.

Le schéma de la figure 1 construit à partir de bandes de longueurs respectives 7, 5, 7, 3, 2, 10, 2 et 12, permet d'expliquer les différentes étapes de la mise en œuvre de la technique en appui sur dix. En effet, la seconde ligne du schéma illustre le fait que la bande 5 soit échangée contre deux bandes 3 et 2 mises dans le prolongement l'une de l'autre et bout à bout. Les trois bandes ainsi obtenues 7, 3 et 2, ont pour

[3] Une autre manière d'expliquer la technique serait de dire : « Pour effectuer 7+5, je conserve 7 et je décompose le nombre 5 de façon à faire apparaitre le complément de 7 à 10. Avec des élèves plus âgés, un autre moyen serait d'utiliser la propriété de compensation de l'addition « Pour effectuer $7 + 5$, j'ajoute à 7, le complément de 7 à 10 et je compense, en soustrayant à 5, le complément à 5 de 7 ».

longueur, la longueur des deux bandes initiales 7 et 5 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre. Les expressions numériques $7 + 5$ et $7 + 3 + 2$ sont équivalentes. De la même manière, la seconde ligne et la troisième de la figure 2 illustrent le fait que les expressions $7 + 3 + 2$ et $10 + 2$ sont équivalentes. De ligne en ligne, on obtient donc une suite d'égalités : $7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12$.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 5 | |
| 7 | 3 | 2 |
| 10 | | 2 |
| 12 | | |

*Figure 2 : exemple de schéma associé à la mise en œuvre de la technique en appui sur dix*

Pour conclure, le discours qui vient d'être explicité, associé de surcroit à la manipulation effective de « bandes » (figure 2) permet à notre sens d'illustrer sur cet exemple pourquoi une expression numérique peut être remplacée par une autre expression numérique équivalente.

## 5 Les effets de l'implémentation de la technique en appui sur dix sur les apprentissages des élèves

Dans ce paragraphe, nous rappelons les grandes lignes du dispositif d'enseignement mis en place dans deux classes de CE1. Pour connaître précisément les modalités pédagogiques de chaque séance d'enseignement, les consignes données aux élèves, les analyses *a priori* et *a posteriori*, le matériel envisagé, de chaque séance d'enseignement, nous invitons le lecteur à se référer à la ressource mise en ligne sur le site de l'IREM de Montpellier[4]. Pour conclure, nous avançons quelques résultats généraux publiés par Rinaldi (2022).

### 5.1 Un ensemble de manipulations effectives suivies de séances de calcul en ligne

La première séquence permet à chaque élève de réaliser son propre jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf afin de représenter tous les nombres de un à vingt. C'est grâce à ce matériel que les élèves, en binômes puis seuls et en autonomie, vont calculer et valider le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix et rechercher des compléments. En prolongement, les mêmes calculs seront donnés à effectuer, sans les bandes, mais en appui sur des configurations de doigts. L'utilisation des configurations de doigts, donc d'éléments « discrets », ne suffit pas, à l'inverse de l'utilisation des bandes, pour valider l'ensemble des résultats trouvés mais facilite le groupement par cinq et par dix car une main correspond à cinq doigts et deux mains correspondent à dix doigts. Cette séquence, découpée en cinq séances, va amener l'élève à maîtriser l'ensemble des faits numériques sous dix et permettre le passage aux écritures arithmétiques. Dans la ressource, disponible en ligne et présentée lors de l'atelier, un jeu - le jeu des triples bandes - amène l'élève à s'auto-évaluer. Par ailleurs, des exemples de trace écrites élaborées par les enseignants montrent comment le travail de mémorisation de l'élève est soutenu grâce à des affichages qui donnent lieu à des situations de rappel.

La deuxième séquence doit amener chaque élève à récupérer directement en mémoire les décompositions et recompositions de dix. La troisième séquence vise à introduire et travailler la technique en appui sur dix à partir de la manipulation de configurations de doigts et de bandes de longueur donnée avant d'amener les élèves à opérer directement sur les nombres. La quatrième séquence doit permettre à l'élève d'utiliser la technique en appui sur dix pour calculer la somme de trois puis de quatre nombres inférieurs à dix. Des exemples de travaux d'élèves et des grilles d'évaluation de ces travaux sont disponibles dans la ressource.

### 5.2 Les effets du dispositif d'enseignement sur les apprentissages des élèves

Nous notons, en nous référant à Rinaldi (2022), les effets des représentations choisies pour les nombres inférieurs à vingt dans l'apprentissage du calcul sous vingt :

- l*es bandes* permettent de vérifier le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix « visuellement », sans avoir recours au comptage ou au surcomptage ;

- *les configurations de doigts* amènent à établir des groupements par cinq et par dix ;

- manipuler *les bandes* dans la mise en œuvre de la technique en appui sur dix ne suffit pas. Manipuler permet de mettre en évidence des équivalences de longueur. Mais c'est grâce à la récupération en mémoire des faits numériques que l'on peut anticiper et trouver directement comment remplacer (cf figure 2) une des deux bandes pour obtenir dix plus « … ».

De même, nous pensons que le fait d'associer à la manipulation une modélisation par une écriture arithmétique a contribué, surtout dans la mise en œuvre de la technique en appui sur dix, à faire évoluer la conception du signe égal chez les élèves. En effet, tout le travail engagé a consisté à remplacer par exemple 6 + 6 non pas par 12 mais par une expression numérique équivalente de la forme 10 + 2. En ce sens, les élèves ont été déstabilisés par la nouveauté de la tâche demandée. Certains élèves ont d'ailleurs éprouvé des difficultés - comme le montrent les résultats des évaluations disponibles dans la ressource en ligne- à effectuer les calculs de plusieurs termes en utilisant la technique en appui sur dix alors que peut-être l'utilisation de la technique des presque-doubles aurait permis à ces mêmes élèves de passer par des décompositions pour trouver le résultat d'un calcul. Il semble plus facile de remplacer 7 + 8 par 7 + 7 + 1 que par 7 + 3 + 5.

## III - PRÉSENTATION D'UNE FORMATION AUTOUR DU CALCUL (FC20)

Dans ce paragraphe nous précisons le contexte spécifique dans lequel s'est déroulée cette formation que nous désignons par FC20 autour du calcul**,** formation dans laquelle plusieurs ressources créées par des groupes IREM et disponibles en ligne ont été présentées. Nous explicitons ensuite, en lien avec les travaux de Ball et al (2008) les compétences et les connaissances professionnelles que la formation FC20 s'est proposée de cibler et d'évaluer.

### 1 Contexte, objectifs et canevas de la formation FC20 autour du calcul

La formation FC20 a été conçue par les deux référentes mathématiques qui coaniment l'atelier et qui ont participé à la recherche autour du calcul sous-vingt. Le projet de formation a été présenté en amont au chercheur en didactique des mathématiques qui s'en est saisi. De nombreuses concertations « à trois » ont été essentielles pour dégager un ensemble de connaissances et de compétences attendues par les participants à la fin de la formation, notamment autour du calcul sous vingt.

Chaque formatrice, en tant que référente mathématique de circonscription, a proposé la formation FC20 successivement à deux constellations. Cela représente un total de vingt-huit participants (4 constellations donc quatre groupes de 7 participants).

Pour lancer la formation FC20, une première diapositive (figure 3) annonce aux participants les objectifs généraux de la formation. Nous noterons, et c'est un choix « assumé », que l'axe choisi est « manipuler, verbaliser et abstraire ». Un autre parti-pris, également assumé, consiste à utiliser des ressources institutionnelles, issues de la recherche, en lien avec manipuler, verbaliser et abstraire pour co-construire entre pairs une séquence d'enseignement.

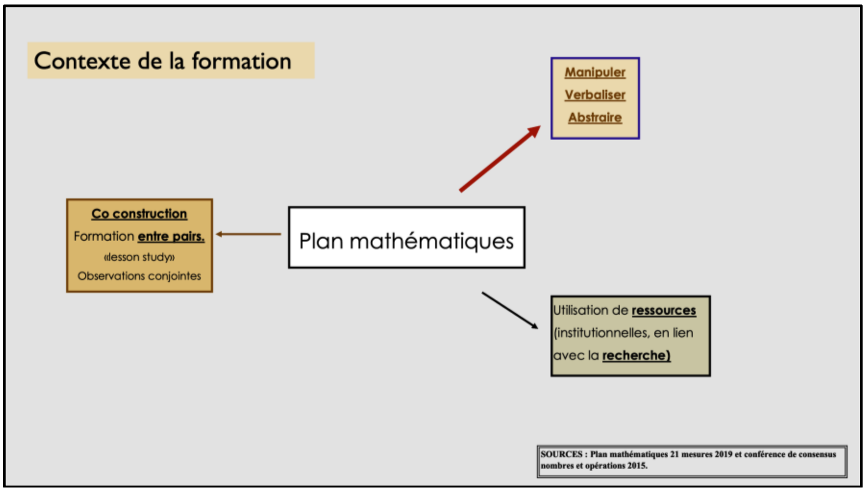



*Figure 3 : objectifs généraux de la formation FC20*

À la suite, le canevas de la formation FC20 est présenté aux participants. Un premier moment collectif est organisé autour de « manipuler, verbaliser et abstraire » afin de s'entendre sur la signification de ces termes et de parler librement de sa pratique de classe. Un second moment est consacré à la présentation de l'ensemble des ressources qui vont nourrir la réflexion sur le parcours de l'élève en calcul de la maternelle à la fin du cycle 3. D'autres moments, en petits groupes, sont programmés pour permettre à chacun des participants, à partir des éléments mis en ligne par les concepteurs (consignes, analyses, évaluation, matériel photocopiable, extraits vidéos, …), de se questionner et d'échanger entre pairs sur le contenu de la ressource de leur choix. Deux derniers moments de co-construction d'une séquence d'enseignement et d'échanges informels sont organisés.

## 2 Ressources présentées dans la formation FC20

La seconde diapositive (figure 4) met en avant les quatre ressources sélectionnées qui permettent de dérouler et d'illustrer quatre clefs de voute du parcours de l'élève en calcul de la grande section à la fin du CM2. Nous ne développons pas cette idée dans le cadre de cette contribution mais pour rappel, le nombre-mémoire de quantité est abordé grâce à *la situation des jetons voyageurs*, le *calcul sous vingt* a de nombreux prolongements naturels (cf. figure 1), le répertoire multiplicatif se construit éventuellement grâce *aux nombres rectangles* et *la course aux dixièmes* traite de la représentation des décimaux sur un axe gradué.

**Ressources présentées en formation**

| Le calcul dans le parcours de l'élève → | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| GS | CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 |
| Les jetons voyageurs (Malette Copirelem) | | | | | |
| | Calcul sous 20 (IREM de Montpellier) | | | | |
| | | Les nombres rectangles (ACE CE1 et Ermel CE2) | | | |
| | | | | La course aux dixièmes (IREM de Lille) | |

*Figure 4 : Ressources présentées en formation FC20*

## 3 Le choix des stagiaires dans la formation FC20

La troisième diapositive indique (figure 5) les ressources que les participants ont choisi de s'approprier.

| Niveau | GS | CP | CE1 | CE2 | CM1/CM2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de constellations concernées | 3 | 8 | | 2 | 1 |
| Nombre de groupes ayant co construit à partir d'une ressource présentée | 3 Jetons voyageurs | 5 Le calcul sous 20 | | 2 Les nombres rectangles | 1 La courses aux dixièmes |
| Autres choix | | - Travail sur une procédure de calcul.<br>- Elaboration d'un défi calcul | | | |

*Figure 5 : ressources présentées en formation FC20 : le choix des participants*

La quatrième diapositive (figure 6) montre que les cinq groupes qui ont choisi de travailler à partir de la ressource *Calcul sous vingt*, n'ont pas, en fonction du niveau de la classe dans lequel ils enseignent et de leur avancée dans le programme en cette période, poursuivi le même objectif spécifique.

| CP | CP-CE1 | CE1 |
|---|---|---|
| • Groupe 1<br>construire les décompositions des nombres<br>• Groupe 2<br>construire les décompositions des nombres, la notion des compléments et mémoriser le répertoire additif travaillé | • Groupe 3<br>utiliser les décompositions des nombres pour calculer<br>• Groupe 4<br>utiliser les triplets de nombres pour effectuer des calculs soustractifs | • Groupe 5<br>introduire la technique en appui sur dix |

*Figure 6 : objectifs des séquences de calcul coconstruites à partir de la ressource du calcul sous 20*

## 4 Éléments retenus pour évaluer la formation FC20 autour du *Calcul sous vingt*

Nous avons fait le choix de prendre des éléments autour du *calcul sous vingt*, qui interviennent dans différents domaines de connaissances, d'après les travaux de Ball, Thames and Phelps (2008). Nous avons privilégié :

- *The Specialized content knowledge (SCK)* c'est-à-dire les savoirs mathématiques spécifiques aux professeurs qui interviennent autour du *calcul sous vingt*. Pour nous, ces savoirs reposent sur les représentations des nombres sous vingt, la modélisation de l'addition et de la soustraction par des écritures arithmétiques, les techniques de calcul et particulièrement la technique en appui sur dix, qui est exposée dans la ressource disponible en ligne. Ces savoirs peuvent s'évaluer en partie à travers les discours des enseignants en lien avec l'utilisation des bandes et de la technique en appui sur dix.
- *The Knowledge of content and students (KCS)* sont des savoirs qui combinent la connaissance des mathématiques et celle des étudiants. Dans le cas du *calcul sous vingt*, la ressource mentionne les différentes procédures de calcul qui vont être utilisées par les élèves avant d'arriver à la maîtrise des faits numériques. Ces savoirs dans le cadre de la formation peuvent être évalués dans la prise en compte des connaissances et des compétences pour coconstruire une séquence d'enseignement, et pendant la mise en œuvre d'une séance et par la suite dans le bilan conduit avec les participants.
- *The Knowledge of content and curriculum* c'est-à-dire la connaissance des programmes en vigueur. Cette compétence est également évaluable au moment de la co-construction d'un scénario. En effet, dans la ressource le dispositif d'enseignement une séquence a été conçue et expérimentée pour la première année d'école élémentaire (période 1 : de septembre à octobre). Or la séquence co-construite prend nécessairement en compte le niveau de la classe, la période de l'année (ici période 3 : janvier à février) et la progression suivie par l'enseignant tout en respectant les attentes institutionnelles.
- *The Knowledge of content and teaching (KCT)* qui combine l'intérêt pour l'enseignement et les mathématiques. Dans le cas de la formation FC20, il est clair que cet intérêt doit être aiguisé par l'attention portée à l'ensemble des ressources issues de la recherche. Toutes s'accordent sur l'importance du triptyque : « manipuler, verbaliser et abstraire » et se déclinent à différents moments du parcours de l'élève en calcul.

La figure 7 reprend, à partir du schéma proposé par Ball, Thames and Phelps (2008), les éléments retenus pour évaluer la formation FC20.

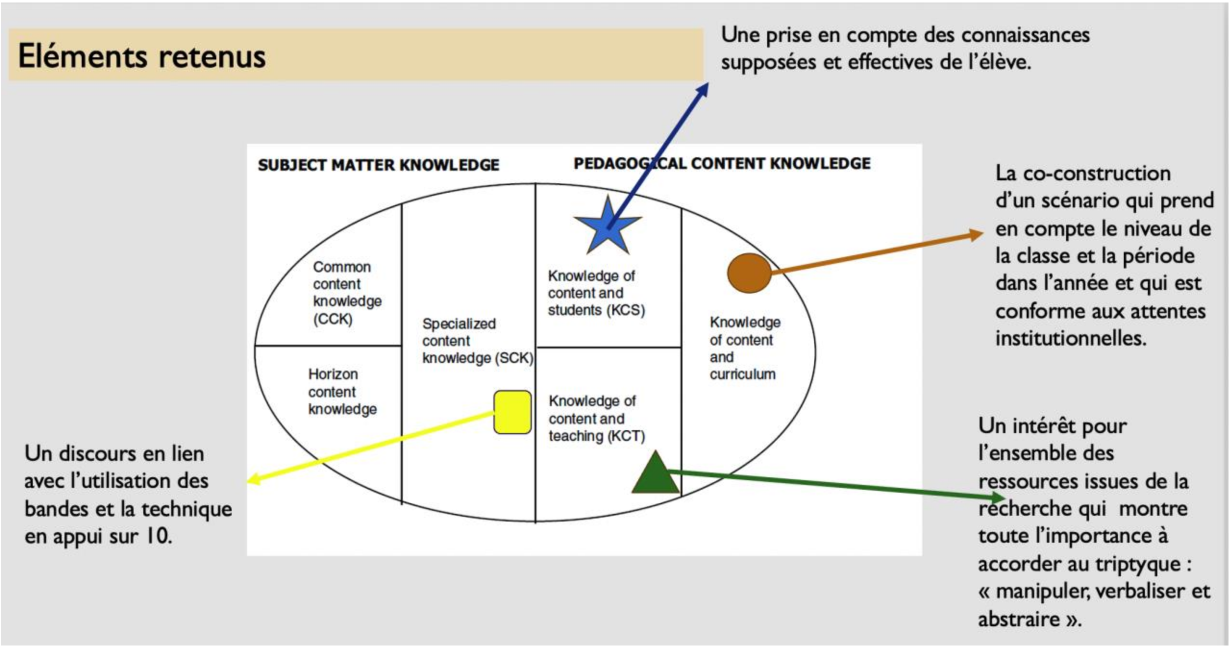



*Figure 7 : éléments d'évaluation de FC20 retenus d'après les travaux de Ball, Thames and Phelps (2008)*

# IV - VERS UN BILAN DE LA FORMATION FC20 AUTOUR DU CALCUL SOUS VINGT

Afin de dresser un premier bilan de la formation FC20 autour du calcul sous vingt, nous avons comme recueil de données :

- les fiches de préparation réalisées par chacun des cinq groupes à partir de la ressource *calcul sous vingt* ;
- 24 questionnaires renseignés (sur 38) par les enseignants de toutes les constellations qui ont suivi la formation FC20 ;
- des extraits de trois séances filmées dans trois classes différentes (2 CP et un CE1) ;
- des photographies de travaux d'élèves réalisées dans les trois classes ;
- des notes prises par les référentes lors du débriefing après chaque séance conduite en classe.

Nous faisons le choix, après avoir passé en revue cet ensemble de données, de nous intéresser dans cette contribution écrite[5] aux réponses spécifiques apportées à trois questions du questionnaire car celles-ci interrogent plus particulièrement les connaissances du domaine des *specialized content knowledge (SCK*) et les connaissances du domaine des *knowledge of content and teaching (KCT*) en se référant à la figure 7.

## 1 Verbalisation et écrit associé aux triples bandes *(SCK en référence à fig.7)*

24 participants sur 38 ont renseigné de façon anonyme le questionnaire[6] présenté en annexe 1. Nous ne savons donc pas quelles réponses ont été données par les enseignants qui ont choisi précisément de travailler autour du calcul sous vingt. Nous nous intéressons aux questions reproduites à la figure 8 :

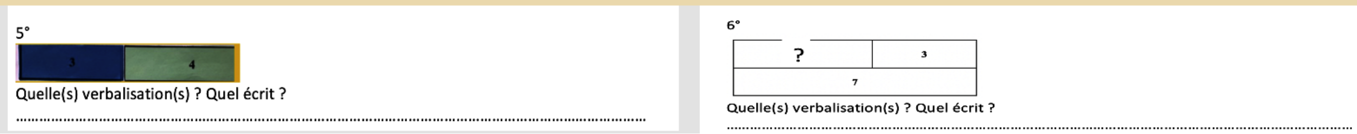



*Figure 8 : questions 5 et 6 extraites du questionnaire proposé dans la formation FC20*

Nous constatons après dépouillement et classement des réponses que certains professeurs des écoles privilégient :

- Un langage associé à la manipulation de bandes

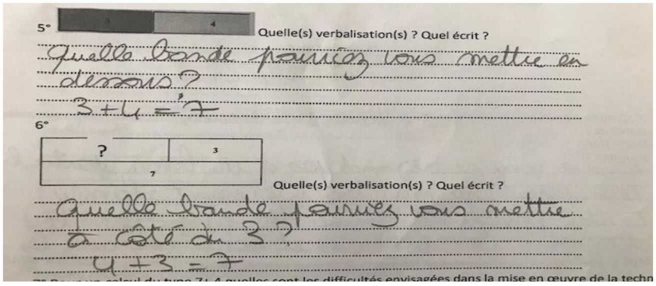



*Figure 9 : exemple de production*

Le langage reste approximatif et ne fait pas directement référence aux longueurs. La verbalisation n'indique pas que les deux bandes 3 et 4 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre mesurent 7. L'écrit proposé, même s'il est sous la forme d'une écriture arithmétique, ne met pas en avant la commutativité de l'addition. La verbalisation n'apporte rien à la manipulation, ce qui dessert le passage à l'abstraction.

- Un langage « mathématique »

[5] La lecture des cinq fiches de préparation et les extraits de film issus de trois séances projetées dans l'atelier montrent que les enseignants se sont emparés de la ressource et l'ont adaptée à leur niveau de classe. Ce point a été discuté lors de l'atelier.

[6] Ce questionnaire a été présenté après 12 heures de formation plan maths, juste avant d'assister à une séance menée par un pair.

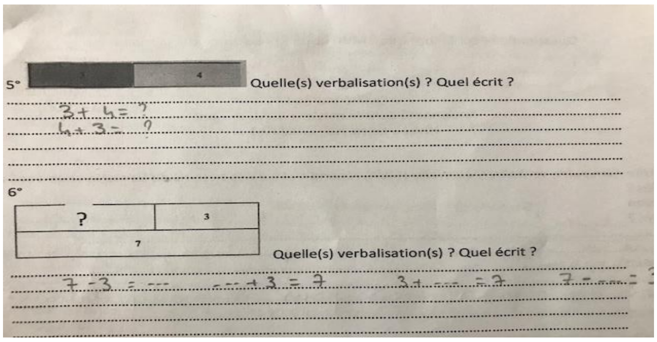



Figure 9 bis : exemple de production

Même si les écritures arithmétiques montrent que certaines propriétés de l'addition et de la soustraction sont mises en avant, l'absence de verbalisation dans la langue parlée questionne. C'est justement cette verbalisation associée à la manipulation qui est difficile à acquérir et qui fait partie des compétences spécifiques aux enseignants de l'école élémentaire que la formation FC20 souhaitait développer.

- Un langage parlé associé aux bandes et aux nombres :

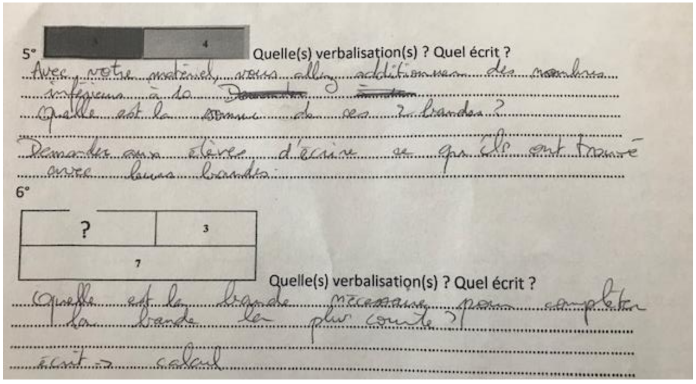



Figure 9 bis bis : exemple de production

L'utilisation du matériel- sous-entendu les bandes - est mis en avant. Les mots additionner, somme et complément sont des mots qui sous-entendent le fait qu'on opère sur des nombres. Or ici, ces mots se rapportent à des bandes. Il aurait fallu éventuellement préciser qu'on s'intéresse à déterminer la longueur de la bande somme et ensuite la longueur de la bande complément. Le fait de demander aux élèves d'écrire est intéressant mais d'écrire quoi ? Là non plus la formulation n'est pas précise.

Ces trois productions montrent qu'en formation continue, ici dans le cadre de FC20, tout un travail sur la verbalisation associée à la manipulation est intéressant à poursuivre. En effet, les savoirs mathématiques qui se cachent sous des expressions courantes gagnent toujours à être explicités entre pairs.

## 2 Discours associé à la technique en appui sur dix *(SCK en référence à fig.7)*

Nous proposons, pour analyser les savoirs en lien avec la technique en appui sur dix, de considérer trois discours en réponse à la question 7 du questionnaire reproduit à la figure 10 :

**7° Pour un calcul du type 7+ 4 quelles sont les difficultés envisagées dans la mise en œuvre de la technique en appui sur 10 ?**

*Figure 10 : question 7 extraite du questionnaire proposé dans la formation FC20*

| |
|---|
| *Réponse 1 : « Il faut savoir que 7 + 3 = 10 et que 4 = 3 + 1 . »* |
| *Réponse 2 : « La difficulté c'est de passer par le complément à 10 de 7 et donc la décomposition de 4 en 3 + 1. Cela nécessite une double tâche. »* |
| *Réponse 3 : « Savoir décomposer les nombres en fonction du calcul. Maîtriser toutes les décompositions. »* |

Les réponses 2 et 3, contrairement à la réponse 1, cherchent à expliquer les difficultés d'ordre général. Dans ces deux réponses, le calcul 7 + 3 est vu comme un exemple générique. De plus, le fait d'évoquer une double tâche est très intéressant, tout comme le fait d'évoquer que suivant le nombre choisi, la décomposition attendue est singulière. L'idée également, que pour appliquer la technique en appui sur dix, il faille maîtriser toutes les décompositions est pertinente. Le fait d'amener les enseignants en formation à produire eux-mêmes un discours qui les amène à évaluer une technique dans le but de l'enseigner est important et relève des connaissances propres au « *specialized content knowledge* » *(*SCK*)*.

### 3 Intérêt pour l'enseignement et les mathématiques *(KCT cf. fig.7)*

Afin d'essayer d'évaluer l'intérêt pour l'enseignement et les mathématiques à l'occasion de cette formation FC20, nous nous intéressons aux réponses apportées à la troisième question que nous reproduisons à la figure 11 :

3° Quel temps de la formation MVA a été le plus riche pour vous ?
1. Présentation de toutes les ressources
2. Appropriation d'une ressource
3. Temps de co-construction
4. Échanges informels

*Figure 11 : question 3 extraite du questionnaire proposé dans la formation FC20*

Sur les 24 réponses recueillies, nous constatons que :
- 5 enseignants ont sélectionné tous les temps ;
- 10 ont sélectionné 2 ou 3 temps ;
- 9 ont sélectionné 1 seul temps ;

Parmi les 9 réponses où 1 seul temps est sélectionné, 4 ont préféré le temps consacré à la présentation de toutes les ressources, 3 le temps d'appropriation d'une ressource et 2 le temps de co-construction.

Pour nous, ces chiffres manifestent l'intérêt que les enseignants éprouvent pour les travaux issus de la recherche (7 réponses sur 9), une curiosité manifeste pour ce qui s'enseigne à tous les niveaux ( 4 réponses sur 9) et la volonté d'échanger et produire entre pairs (2 réponses sur 9).

Cette interprétation tient toujours si nous analysons les résultats pésentés à la figure 12 :

| | 1°Présentation de toutes les ressources | 2°Appropriation d'une ressource | 3° Temps co-construction | 4°Échanges informels |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de fois entourés | 13/24 | 14/24 | 12/24 | 9/24 |

*Figure 12 : temps sélectionnés comme étant « riches » par les stagiaires de FC20*

Ces résultats nous confortent dans l'idée défendue lors de l'atelier, qu'une formation pour qu'elle soit constructive et formatrice doit rechercher un équilibre entre négociation et expression des besoins (Charlot, 1979).

## V - CONCLUSION

Lors de cet atelier, nous sommes partis d'un travail de recherche conduit dans un groupe IREM de Montpellier (2019-2021), pour interroger l'usage de certaines représentations des nombres inférieurs à dix afin de favoriser la construction du répertoire additif sous vingt. Dans le prolongement, nous en avons questionné les enjeux pour la formation, dans le cas précis du plan mathématiques, en proposant une double entrée : « manipuler, verbaliser et abstraire » et « calculer de la maternelle à la fin de l'école élémentaire ». À ce stade de notre recherche, il semblerait que le point saillant qui ressort de la formation mise en place, FC20, au près d'un petit groupe d'enseignants est l'utilité, d'engager un travail sur la verbalisation associée à la manipulation des représentations des nombres, en l'occurrence des bandes, afin d'arriver à des écritures arithmétiques. Fortes de ce constat, nous allons réfléchir à d'autres formes de dispositifs, qui permettraient d'optimiser le temps de formation, relativement court, pour que les enseignants définissent « par eux-mêmes » une problématique commune autour de « manipuler, verbaliser et calculer » et échangent davantage sur les dispositifs d'enseignement qu'ils mettent en place dans leurs classes respectives. L'objectif « principal » reste celui d'amener les élèves à se détacher progressivement du comptage au profit de techniques basées sur la décomposition des nombres.

## VI - BIBLIOGRAPHIE


Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389 – 407.

Baroody, A. (2006). Why Children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics,* August 2006, 22-31.
https://www.kentuckymathematics.org/docs/eerti-BaroodyTCM2006.pdf

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2015). Le nombre dans le nouveau programme maternel : Quatre concepts clés pour la pratique et la formation. *Le café pédagogique.*
http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/10/07102015Article635798003968263974.aspx

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». *Revue Au fil des maths*. N°537.
https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/les-representations-en-barres-ni-cet-exces-dhonneur-ni-cette-indignite/

Charlot, B. (1979), Le mythe de la négociation des besoins*, revue du GFEN dialogue N°33*.
https://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial33_mythe_negociation_besoins_charlot.pdf

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI*[e] *Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 3-33. Grenoble : La Pensée sauvage.

Flexer, R.- J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten, *The Arithmetic Teacher, 34*(3), 5-9.

Gersten, G., Jordan, N.-C. and Flojo, J.-R. (2005). Early identification and interventions Gersten,G., Jordan, N.-C. andFlojo, J.-R.(2005) for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 38* (4), 293-304.

https://www.researchgate.net/publication/7638795_Early_Identification_and_Interventions_for_Students_With_Mathematics_Difficulties

Mandler, G. & Shebo, B.-J. (1982). Subitizing: An Analysis of Its Component Processes, *Journal of Experimental Psychology: General, 111*(1).
https://escholarship.org/uc/item/9fn27772

Rinaldi, A.-M. (2022). Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire. *Repère IREM, N*°126, 21-40.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-126-reperes-irem/2-le-calcul-sous-vingt-une-possibilite-de-travailler-la-notion-d-equivalence-a-l-ecole-elementaire-1212087.kjsp?RH=60512697851782

Siegler, R.(1987).The Perils of Averaging Data Over Strategies: an example from children's addition. *Journal of experimental Psychology*, *116* (3), 250-264.

https://www.researchgate.net/publication/232554618_The_perils_of_averaging_data_over_strategies_An_example_from_children%27s_addition

Torossian, C & Villani, C. (2018). Rapport : *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.

## ANNEXE 1 : QUESTIONNAIRE DISTRIBUE AUX PROFESSEURS D'ECOLE PRESENTS LA FORMATION FC2

Civilité : M ou F
Ancienneté dans le métier : ……………….ans
Niveau de classe : …………………

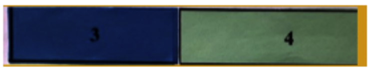
1° L'entrée *manipuler, verbaliser, abstraire* (MVA) répond-t-elle à des besoins de formation que vous aviez identifiés ?
**Oui - Non**
Pourquoi ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

2°De quelles ressources présentées en formation MVA vous souvenez-vous ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

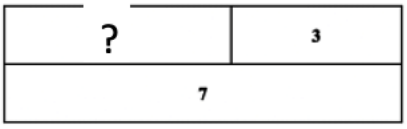
3°Quel temps de la formation MVA a été le plus riche pour vous ?

1. Présentation de toutes les ressources
2. Appropriation d'une ressource
3. Temps de co-construction
4. Échanges informels

4° Quel matériel spécifique est utilisé dans la ressource calcul sous vingt ?
……………………………………………………………………………
…………………………
……………………………………………………………………………
………………………

5° 

Quelle(s) verbalisation(s) ? Quel écrit ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

6° 

Quelle(s) verbalisation(s) ? Quel écrit ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

7° Pour un calcul du type 7+ 4 quelles sont les difficultés envisagées dans la mise en œuvre de la technique en appui sur 10 ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

8° Apprendre des faits numériques sans les construire!
Avantage(s) ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………
Inconvénient(s) ?
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………

9° Quelques mots sur les connaissances présentes dans la ressource calcul sous vingt
Connaissances mathématiques/Connaissances des élèves/ Connaissances en pédagogie :
……………………………………………………………………………

# L'ESCAPE GAME COMME OUTIL POUR TRAVAILLER LA MODÉLISATION CHEZ LES ÉLÈVES DE PRIMAIRE

**Charlotte BERTIN**
Maîtresse d'enseignement, HEP Fribourg (Suisse)
Doctorante à l'Université Claude Bernard Lyon 1 en partenariat avec la HEP Fribourg
S2HEP (Lyon) et UR EADS (Fribourg)
Charlotte.bertin@edufr.ch

Résumé
Notre projet de doctorat porte sur l'étude des connaissances professionnelles des enseignants du primaire autour de la modélisation mathématique lors d'une formation. Pour débuter, une analyse rapide des curricula a été réalisée afin de mettre en évidence le besoin de ressources pour aborder la modélisation en classe. Cette analyse nous a conduit à mettre en place un dispositif de formation où des enseignantes de primaire ont co-créé un *escape game* avec la chercheuse, pour leurs élèves de 7H-8H (10-12 ans) et qui mobilise la modélisation mathématique. Les *escape games* ont été créés en 2007 au Japon et consistent à résoudre des énigmes afin de réussir une mission en un temps limité. Ces nouveaux jeux s'introduisent peu à peu au sein du milieu scolaire et des ressources sont mises à disposition pour guider les enseignants dans l'utilisation et la création de ce nouvel outil. L'objectif principal de l'*escape game* peut être représenté comme un grand problème qui est résolu par un ensemble de sous-problèmes (les énigmes). L'idée est alors de proposer un problème de modélisation au cœur même de l'*escape game* et de s'appuyer sur la structure du jeu pour aider les élèves à le résoudre. Si ce projet s'intéresse à l'évolution des connaissances professionnelles des enseignants, l'atelier permet de questionner la pertinence d'utiliser l'*escape game* pour enseigner le processus de modélisation aux élèves.

## I - INTRODUCTION

Les *escape games*, ou jeux d'évasion, apparaissent en Europe dans les années 2012-2013 (Nicholson, 2015) et ont rapidement suscité un vif engouement dans le monde scolaire. Des entreprises ont alors élaboré du matériel destiné exclusivement à ces jeux d'évasion et de nombreux sites et ressources sont apparus pour soutenir les enseignants dans la mise en œuvre de ce dispositif (Guigon, Humeau et Vermeulen, 2018 ; Fenaert, Nadam et Petit, 2019). L'atelier présenté dans ce texte, est issu d'un travail de doctorat qui porte sur l'étude des connaissances professionnelles des enseignants du primaire autour de la modélisation mathématique lors d'une formation.

Dans le cadre de la thèse, nous avons mis en place un dispositif où des enseignantes de fin de primaire du canton de Fribourg (Suisse) ont suivi une formation afin de pouvoir créer un *escape game* mobilisant le processus de modélisation mathématique. Cette recherche reprend en partie les codes d'une recherche collaborative (Desgagné, 1998) avec les trois étapes clés : la cosituation, afin de trouver des intérêts communs entre les praticiennes et la chercheuse, la coopération et la coproduction. De plus, la formation est également associée à une « ingénierie didactique coopérative » (Joffredo-Le Brun, Morellato, Sensevy, et Quilio, 2018) tout en reprenant la méthode de *Design Based Research* (Anderson et Shattuck, 2012). Le jeu ainsi créé a été mis en place dans les classes de chaque enseignante avec des élèves de 7H-8H (10-12 ans). Nous faisons alors l'hypothèse que la création d'un *escape game* mettant en jeu la modélisation est un moyen de développer des connaissances professionnelles autour de cette compétence.

Lors de l'atelier, les participants ont été amenés à porter un regard uniquement sur l'outil et non sur la formation. Pour cela, une vingtaine de personnes ont ainsi pu vivre le jeu tout comme les élèves. L'*escape game* qui a été joué correspond à la deuxième version du jeu qui a été adapté après un premier passage dans les classes, notamment pour mettre plus en avant certains détails qui nous semblaient importants pour travailler la modélisation. Par la suite, nous avons proposé une réflexion pour identifier les éléments

de la modélisation présents au sein du jeu. Nous avons terminé par une phase de conception où il était demandé d'apporter des idées afin de créer un *escape game* mobilisant la modélisation. Il s'agissait alors de questionner la pertinence d'utiliser les jeux d'évasion pour enseigner ce processus aux élèves et notamment le potentiel et les faiblesses de ce type d'activité.
Si la modélisation constitue un processus clé dans l'apprentissage des mathématiques, son enseignement se heurte à plusieurs obstacles que nous identifierons dans une première partie à l'aide de l'étude des curricula. La description du jeu est développée dans une deuxième partie. Pour finir, le retour et l'analyse sont détaillés dans une troisième partie.

## II - LA MODELISATION, UNE TRANSPOSITION DIDACTIQUE DIFFICILE

La modélisation peut être définie de plusieurs manières différentes. Dans ce travail, nous faisons le choix de nous appuyer sur la définition de Blum et Leiss (2007) identifiant la modélisation mathématique à un processus comportant plusieurs phases qui sont représentées sous la forme d'un cycle (figure 1). Ces chercheurs distinguent deux mondes : celui des mathématiques et le « reste » qui peut être assimilé au monde « réel ». La répétition du cycle permet d'affiner le modèle mathématique créé lors de la phase de mathématisation (phase 3).

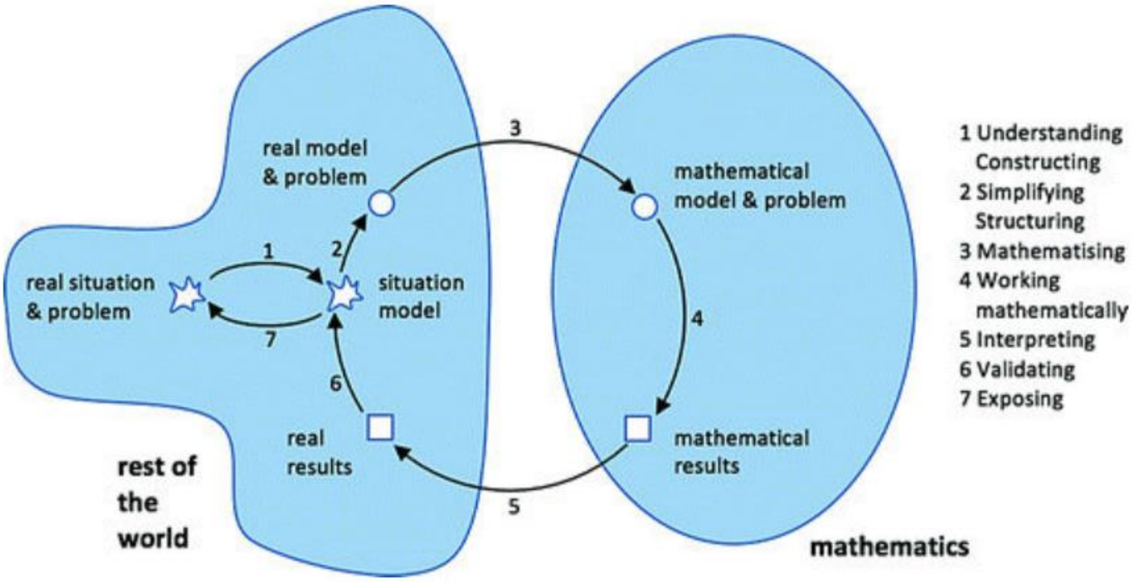



*Figure 1. Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007)*

Dans notre recherche, nous proposons d'assimiler le monde « réel » à celui du jeu. Concernant la définition d'un modèle, nous reprendrons celle proposée par Israel : « un modèle mathématique est un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité » (Israel, 1996, p. 11). Nous proposons dans ce qui suit d'étudier un peu plus en détail, comment la modélisation est abordée dans les programmes officiels suisses.

### 1 La modélisation dans les programmes suisses

Le Plan d'Études Romands (PER) présente les instructions officielles pour l'enseignement des disciplines de l'école obligatoire. Les enseignants ont également à disposition les Moyens d'Enseignement Romand (MER) qui constitue un manuel unique pour toute la suisse romande avec des activités, des commentaires sur la gestion de celles-ci et des documents didactiques pour avoir une vision plus générale de l'apprentissage d'une notion ou d'un concept.

Le PER de mathématiques est réparti en 5 thématiques : espace, nombres, opérations, grandeurs et mesures, et modélisation. Cette dernière est décrite comme visée prioritaire et est le seul axe qui est commun aux mathématiques et aux sciences de la nature.

Les objectifs MSN (Mathématiques et Sciences de la Nature) sont répartis en trois cycles. Pour la modélisation, la notation MSN 15 correspond à des élèves de 4 à 8 ans, MSN 25, à des élèves de 9 à 12 ans qui clôturent le passage au primaire et MSN 35, au cycle d'orientation de 13 à 16 ans. Même si l'axe principal se nomme modélisation dans le PER, le thème du MSN 15 est la représentation, avec « représenter des phénomènes naturels techniques ou des situations mathématiques ». Le MSN 25 qui est mentionné ci-dessus comme intégré dans l'axe modélisation a pourtant une description similaire au MSN 15 avec « représenter des phénomènes naturels techniques, sociaux ou des situations mathématiques ». C'est dans le MSN 35 qu'apparait enfin le terme modélisation (cf. annexe 2). Dans le PER, nous retrouvons des caractéristiques de la modélisation[1] pour aider à définir les objectifs dans l'enseignement (cf. annexe 2).

Dans le MSN 15, nous retrouvons la mobilisation de la mesure et des outils mathématiques, avec la faculté d'imaginer et d'utiliser divers outils de représentation. Nous avons également le fait de mener des observations répétées, se référer à diverses sources, trier et organiser des données. Enfin, nous notons une dimension de communication : en confrontant et en communiquant ses observations, ses résultats, ses constats, ses interprétations mais aussi en se posant des questions et en exprimant ses conceptions.

Au cycle 2, on ajoutera l'identification des invariants d'une situation, le fait de se poser des questions pour définir un plan d'études et les représentations visuelles sont plus précises (codes, schémas, graphiques, tableaux...).

Dans les anciens guides didactiques[2], il existe un chapitre sur la résolution de problèmes où sont décrits les différents types de problèmes (situation-problème, problème ouvert et le jeu) mais rien n'est écrit à propos de la modélisation. Sur la plateforme ESPER[3] (nouveaux moyens), un lexique est proposé avec la définition suivante : « Modéliser : recouvre **l'idée** d'associer à une situation complexe un **modèle** qui la rend intelligible en la réduisant à ses éléments essentiels. ». Dans un des documents didactiques pour l'aide à la résolution de problème, il est précisé :

> *Les modèles peuvent être des schémas, diagrammes ou des outils mathématiques, etc. Ainsi, comme le précise BURGERMEISTER P. F. et DORIER J. L., la modélisation met en présence deux systèmes. Dans l'enseignement, le système qui est donné au départ aux élèves renvoie généralement à une situation concrète (système 1) et l'autre aux mathématiques (système 2).* [4]

Ainsi que : « La plupart des activités d'introduction du cycle 1 sont des problèmes concrets qui nécessitent de mobiliser (en réalité construire) des outils mathématiques. Ce sont donc des problèmes de modélisation ». Donc la modélisation permet de construire des outils mathématiques, mais ceux-ci sont

---

[1] *Mathématiques - plandetudes.ch*

[2] *© COROME. 1997. No ISBN 2-88451-013-3. Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés de 1 à 4 de l'école primaire. Alain Gagnebin, Ninon Guignard et François Jacquet.*

[3] *© CIIP, Mathématiques, plateforme ESPER, https://www.ciip-esper.ch*

[4] *ESPER - Espace Numérique PER-MER (ciip-esper.ch) – Aide à la résolution de problème 5H-6H*

créés en réponse à un problème donné, ce qui n'est pas mentionné. La conception n'est pas la même suivant les données de départ et peut être adaptée suivant les résultats mais des informations semblent manquantes ou non explicitées.

### 2 Bilan et questionnement

Dans les programmes officiels de mathématiques de Suisse, exercer la modélisation est un élément clé dans l'apprentissage des mathématiques. Dans le PER, la modélisation ne correspond pas uniquement à la phase de mathématisation, c'est-à-dire la création du modèle lors du passage entre le monde réel et le monde des mathématiques. Avec les caractéristiques proposées par le PER, on peut voir les différentes étapes du cycle mais dans les moyens d'enseignement, on prend aussi en compte une autre vision, celle de Burgermeister et Dorier, qui proposent la définition suivante : « Modéliser signifie construire, discuter et étudier une correspondance entre deux (au moins) systèmes incluant des objets, des relations entre ces objets et des questions. » (Burgermeister et Dorier, 2013). Nous remarquons que la définition des MER se limite à la réduction d'un des systèmes.

De manière générale, la modélisation est souvent présentée à la fois comme un processus et comme une étape de ce même processus. La représentation de Blum et Leiss (2005) est bien souvent raccourcie, certaines étapes étant associées au processus de résolution de problèmes ou quelque peu négligées voire oubliées dans certains textes.

## III - LA CREATION D'UN ESCAPE GAME

Dans cette partie, nous allons détailler l'*escape game* que les participants ont pu vivre lors de l'atelier. Ce jeu a été co-construit pendant la formation avec les enseignantes et la chercheuse. La structure est proposée en annexe afin de visualiser l'ensemble du jeu (annexe 3).

### 1 Le scénario et l'accroche

Les participants de l'atelier sont répartis en petits groupes dans plusieurs espaces de la salle. Pour débuter le jeu, un enregistrement audio est diffusé dans lequel un assistant paniqué explique que son professeur responsable s'est subitement évanoui et ne se réveille plus. La perte de connaissance est survenue quelques instants après que le professeur a retiré une bague d'un socle au sein d'une pyramide en Egypte. L'assistant demande donc aux joueurs de l'aider pour se repérer dans la pyramide afin de remettre la bague à sa place. Dans leur espace, chaque groupe doit trouver plusieurs éléments dont le journal de bord du chercheur, un cryptex (objet cylindrique avec un compartiment caché qui n'est accessible qu'en indiquant la bonne combinaison), un coffre et deux faces « rigides » qui représentent une partie de la pyramide (figure 4).

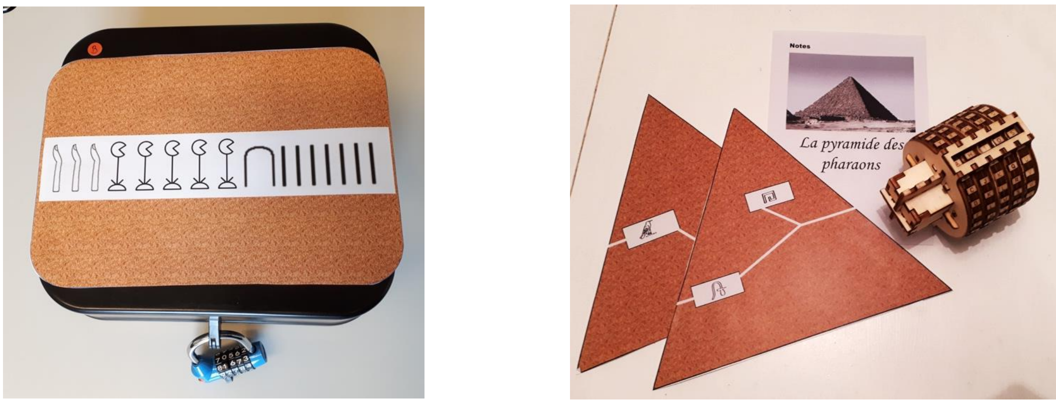



*Figure 4. Grand coffre à gauche, deux faces « rigides » de la pyramide, le journal de bord et le cryptex à droite*

Le journal de bord contient de multiples informations qui permettent d'avoir plus de détails sur la bague maudite, un QR code, des indices pour ouvrir le grand coffre, des photos de quelques salles et le fonctionnement d'un cryptex. Une tablette est également disponible ainsi qu'un ordinateur pour dialoguer avec l'assistant qui peut aider les joueurs en cas de besoin. En scannant le QR code avec la tablette, les joueurs découvrent une pyramide avec des hiéroglyphes pour identifier les différentes salles (figure 5).


*Figure 5. Ecran d'accueil après scan du QR code du journal de bord*

Les salles peuvent être accessibles « directement » ou sous la condition de résoudre une énigme (figure 6).

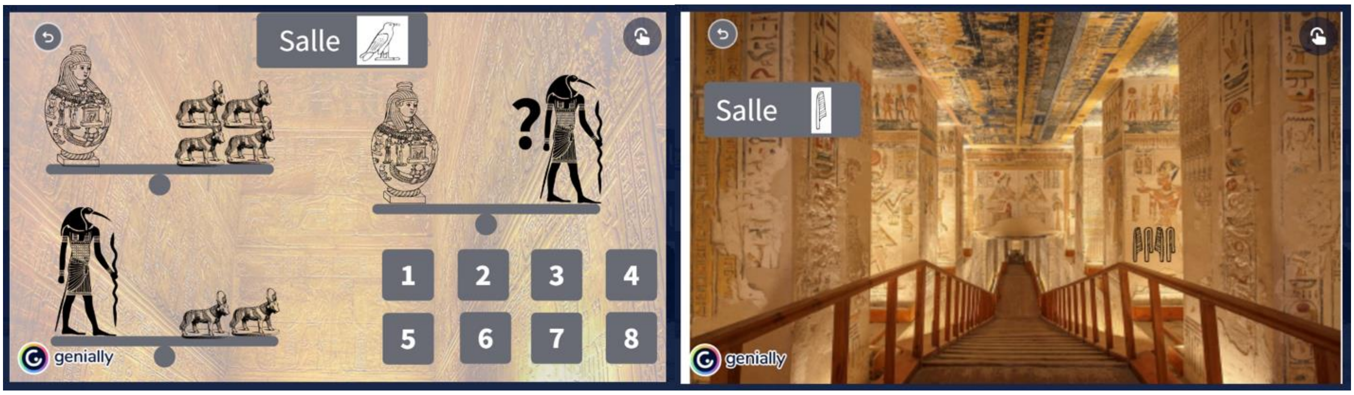



*Figure 6. Exemple d'une salle avec une énigme à gauche, et exemple d'une salle avec accès direct à droite*

Les différentes salles sont aussi représentées sur les faces « rigides » de la pyramide, ainsi les joueurs peuvent faire le lien entre ce qu'ils voient à l'écran, et l'organisation des salles sur un plan en trois dimensions. Les joueurs doivent garder en tête qu'ils doivent trouver le lieu où déposer la bague pour espérer réveiller le professeur.

## 2 Les étapes

Avec l'aide du journal de bord, les joueurs peuvent ouvrir le coffre et trouvent à l'intérieur deux nouvelles faces « rigides » de la pyramide dont une possède un QR code inachevé, un autre coffre plus petit avec un cadenas où sont mélangés lettres et flèches de direction (figure 7), ainsi qu'une pyramide miniature. Cette petite pyramide permet de visualiser la forme de la pyramide à base carré pour pouvoir éventuellement en construire une à l'aide des faces « rigides ». Le cadenas du petit coffre est volontairement plus difficile à ouvrir pour « contrôler » l'avancement des participants. Pour réussir, il faut observer minutieusement une des salles qui contient une étagère avec différents vases où il est possible d'observer plusieurs scarabées. L'orientation de ces insectes permet de donner la combinaison du coffre (figure 7).

*Figure 7. Photo du petit coffre et de son cadenas à gauche et armoire avec les scarabées pour obtenir la combinaison à droite*

À l'intérieur de ce petit coffre, on trouve trois faces réalisées avec du papier calque où une cinquième salle est dessinée ainsi qu'un morceau de QR code (figure 8).

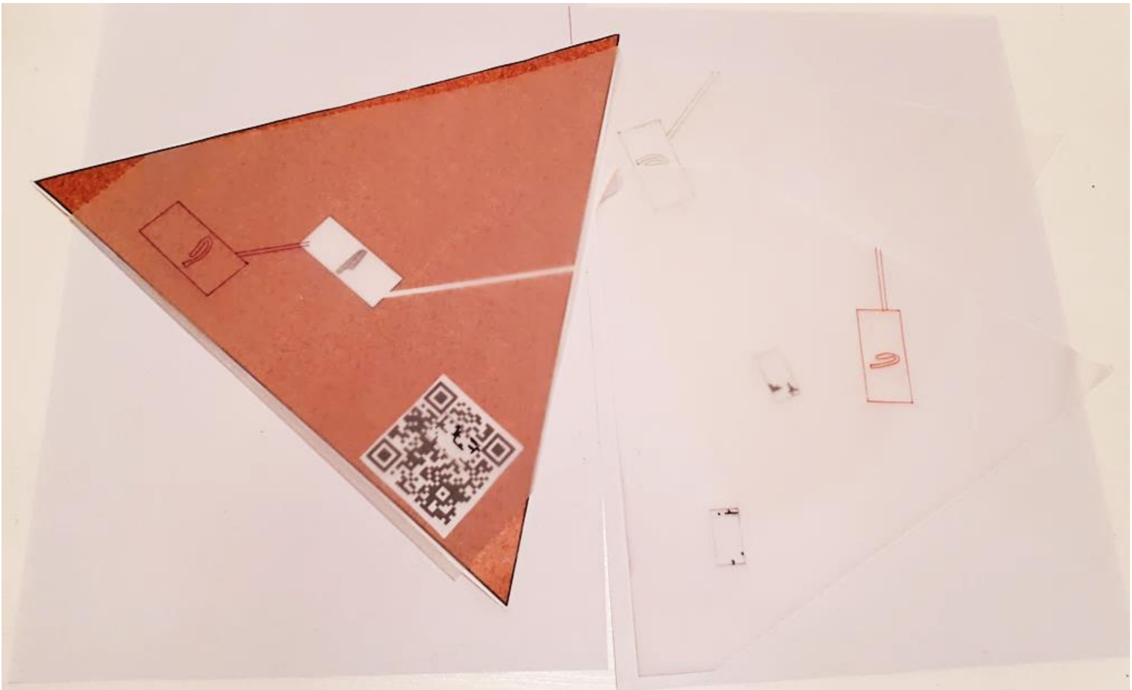


*Figure 8. Faces à un choix avec papier calque pour découvrir la 5e salle*

Une fois le bon papier calque positionné sur la bonne face, les joueurs ont accès à un nouveau plan de la pyramide où une cinquième salle apparaît en bas de l'écran (figure 9). A l'intérieur, on trouve un tableau de correspondance pour « traduire » les hiéroglyphes qui composent les noms des salles (figures 9).

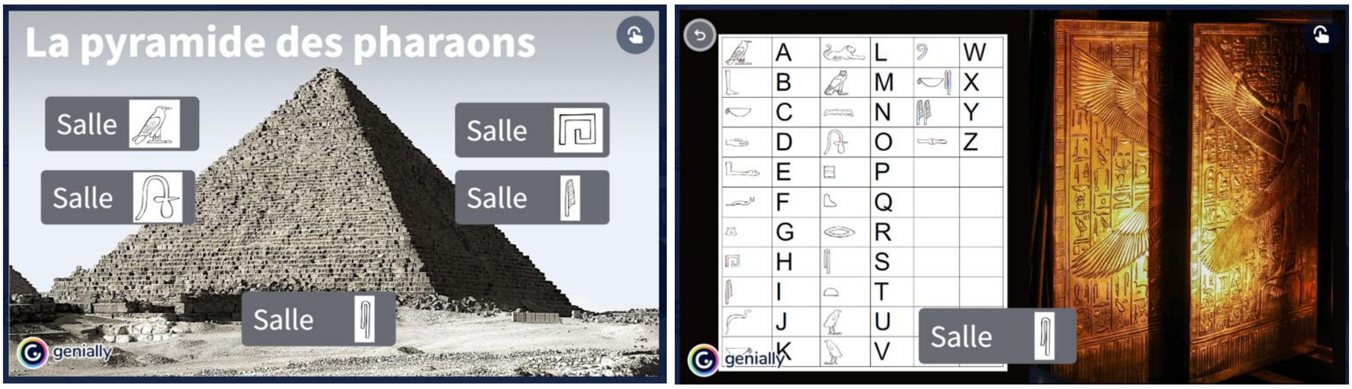



*Figure 9. Nouveau plan de la pyramide à droite et ouverture de la 5e salle à gauche avec le tableau*

Il ne reste alors plus que le cryptex à ouvrir. Dans le journal de bord, il est écrit : « Une bonne connaissance des divinités égyptiennes peut aider, personnellement je les connais de A à Z ». Les noms des salles étant des noms de divinités égyptiennes, il suffit de noter les premières lettres de chaque salle dans l'ordre alphabétique sur le cryptex. Dans celui-ci, chaque groupe a une phrase qui ressemble à : « Aller sur les deux plumes et l'oiseau qui regarde à droite ». Le message seul n'a pas de sens, il faut que tous les groupes se réunissent pour entrer dans la phase finale.

Cette dernière étape du jeu réunit donc tous les joueurs et les amène dans un environnement un peu différent. Ils découvrent alors, un « tapis » virtuel où il faut trouver le chemin adéquat permettant de déposer la bague sur son socle (figure 10). Chaque cryptex donne accès à un indice pour se déplacer en toute sécurité sur ce tapis et ainsi reposer la bague sur la main située en haut du tableau. Une fois terminée, une vidéo est projetée sur laquelle on voit le professeur rassurer les participants sur sa santé et les remercier chaleureusement. C'est ainsi que se clôture le jeu.

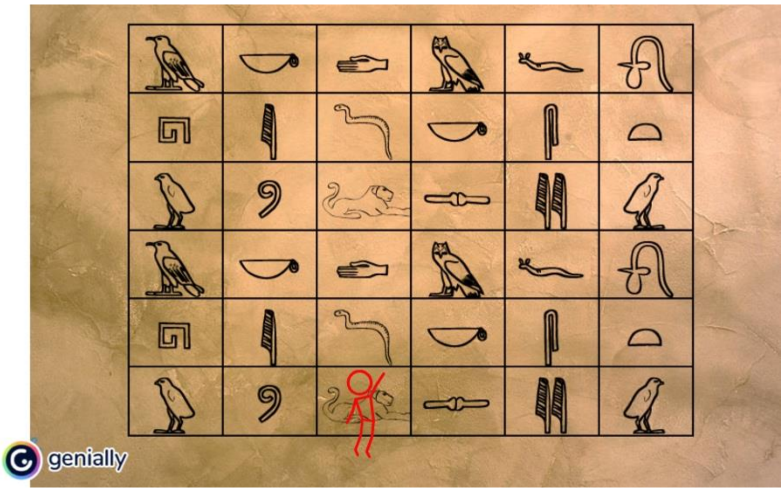



*Figure 10. Tapis final*

## IV - REFLEXION AUTOUR DU JEU

Cette partie met en avant la justification de certains choix lors de la conception du jeu, ainsi que les retours et analyses des participants.

### 1 Retour sur les choix qui ont guidé la conception du jeu

Pour construire l'*escape game*, nous avons commencé par choisir la thématique. Nous nous sommes très vite dirigé vers l'Egypte et notamment les pyramides. Pour créer une structure, nous avons trouvé un

« grand » problème de modélisation qui constitue le cœur du jeu. La mission est de retrouver le lieu où la bague doit être déposée afin de sauver le professeur, nous avons donc songé à faire voyager les futurs joueurs au sein d'une pyramide à la fois virtuelle (à l'aide de la tablette) mais aussi à l'aide d'une représentation « physique » (avec les faces plus rigides). Les différentes représentations peuvent constituer des modèles afin de naviguer entre les salles. La représentation à l'aide des quatre faces rigides permet de reconstituer une version simplifiée de la pyramide et de visualiser le lieu où se situent l'assistant et le professeur. Néanmoins, les élèves – comme les participants – n'ont pas tous construit la pyramide. Pour les inciter à le faire, nous avons mis en place quelques mois après le colloque, une nouvelle version du jeu en ajoutant des languettes et du matériel à disposition. Cette fois, tous les élèves ont construit la pyramide.

La mise à disposition des faces rigides et transparentes permet d'affiner le plan afin de découvrir une cinquième salle. La transparence des faces permet en effet de voir en profondeur dans la pyramide et donc de détailler plus précisément le plan initial. En ce sens, cette progression est perçue comme l'affinement du modèle et permet d'avancer jusqu'à la phase finale avec le tapis (Figure 10).

Les choix qui ont été réalisés pendant la construction du jeu questionnent finalement sur le sens que nous donnons au terme « modélisation » et sur la manière de l'enseigner. Il est mentionné par Blum et Leiss (2005) que toutes les étapes du cycle ne sont pas à travailler au même moment et qu'il est possible de ne se focaliser que sur certaines. Néanmoins, le processus de modélisation ou plus particulièrement l'évolution du modèle qui était voulu au départ, se rapproche finalement d'une proposition de plusieurs représentations (numérique et matérielle) de la pyramide et ne donne pas nécessairement du sens au sein du jeu. Les énigmes intermédiaires constituent des étapes et peuvent aussi être assimilées à de courts problèmes de modélisation. Par exemple, le grand coffre avec la notation égyptienne est fermé à l'aide d'un cadenas qui s'ouvre à l'aide d'un code à cinq chiffres. Les joueurs sont amenés à trouver les indications qui sont nécessaires pour traduire les différents symboles en chiffres, puis penser à utiliser l'addition pour enfin trouver la combinaison. Ces étapes n'ont pas toujours été évidentes pour les élèves. Notamment, la faculté à trier des informations s'est révélée complexe. En effet, les enseignantes ont proposé des affiches, des livres et d'autres « distractions » dans les salles, ce qui a mis en difficulté certains élèves qui souhaitaient utiliser tous les éléments mis à disposition.

## 2 Le retour des participants de la COPIRELEM

Après la phase de jeu, l'atelier s'est poursuivi sur un retour de l'expérience vécue par les participants ce qui a permis de faire apparaître plusieurs questionnements.

Nous avons discuté de ce qu'apportait la construction de la pyramide. Si elle peut permettre de mieux représenter la situation et placer spatialement les salles, la fabrication de l'édifice n'apporte pas vraiment d'éléments pour résoudre les énigmes. Il a été souligné que l'assemblage en trois dimensions n'était finalement pas un moment clé du jeu. Les participants ont mis en avant la possibilité de se concentrer uniquement sur le volume de la pyramide ou encore de proposer des photos des salles, sur lesquelles la manière dont la lumière traverse la pièce définit où nous sommes. Il a également été mentionné que la conception de la pyramide pourrait clôturer le jeu. Par exemple, chaque groupe n'aurait à disposition qu'une partie de la pyramide, ainsi la réunion de tous les groupes permettrait de la construire entièrement et d'apporter des réponses à la mission principale. La distance entre le réel et la représentation, ainsi que le lien avec la modélisation sont restés en suspens. D'autres idées en relation avec la thématique sont aussi apparues. Les participants ont proposé de partir d'un événement ou d'un fait historique. Il serait possible de demander le nombre de pierres nécessaires à la construction d'une pyramide, le nombre de personnes à engager pour la réaliser, ou la manière d'agencer les pierres en se mettant à la place d'un architecte de l'époque… Ces différentes tâches ont cependant l'inconvénient d'être chronophages suivant la manière dont elles sont présentées.

De manière générale, la gestion du jeu a aussi été mentionnée par les participants de l'atelier. Le format *escape game*, c'est-à-dire la résolution d'énigmes en un temps limité pour réussir une mission, favorise l'autonomie des participants, l'entrainement au triage de données, la capacité à comprendre ce qu'on cherche et comment l'obtenir. La possibilité de contrôler le moment où les informations sont données a aussi été mis en avant. Par exemple, il est envisageable que les joueurs ouvrent le cryptex rapidement par « chance » (alors que c'est la dernière étape) : c'est d'ailleurs ce qui s'est passé avec des élèves. Lors de l'atelier, nous avons pensé qu'il était possible que chaque énigme amène à débloquer un niveau de l'*escape game* mais cela restreint la partie jeu libre et ne garantit pas l'implication de tous les participants. Nous avons réfléchi pendant un temps sur la manière de pouvoir accorder une place à chaque joueur en attribuant des rôles mais nous n'avons pas trouvé de solution optimale. L'intérêt d'accorder un temps de débriefing pour revenir sur les différentes étapes et réfléchir à comment réinvestir cette phase de jeu lors d'autres travaux semble alors capital.

### 3 Quelques idées supplémentaires

Dans la dernière partie de l'atelier, les participants se sont mis dans la peau de concepteurs de jeux d'évasion et ont été amenés à proposer des idées d'énigmes et de scénarios qui pourraient convenir aux élèves de primaire pour travailler la modélisation mathématique avec un format d'*escape game*.

Les participants ont mentionné plusieurs concepts mathématiques qui peuvent être utilisés pour travailler la modélisation à l'école primaire. Le repérage dans le plan a été plusieurs fois cité. Les élèves pourraient compléter des plans à l'aide de différents outils (en trouvant un décamètre dans la salle par exemple) et s'interroger sur l'intérêt d'avoir plusieurs plans différents pour une même salle. L'utilisation du codage a aussi été mis en avant pour coder le déplacement sur quadrillage, avec le programme d'une *Bee-bot* ou l'utilisation de *Scratch*.

Un scénario quasi complet a été élaboré par l'une des équipes avec pour sujet l'astronaute Thomas Pesquet. Les participants ont imaginé de nombreux problèmes possibles sur la station spatiale internationale. Par exemple, des problèmes de communication, de nourriture, d'oxygène ou encore de carburants, en relation avec la taille de la fusée en imaginant qu'il y ait une fuite depuis deux jours et en posant la question : doit-il rentrer immédiatement ou peut-il terminer sa mission ? Il est alors possible de travailler la modélisation en résolvant des problèmes concrets qui mettent en péril la survie de l'astronaute. Une description détaillée n'a pas été donnée dans le temps limité de l'atelier.

## V - CONCLUSION

Cet atelier a pu mettre en lumière certains aspects de l'*escape game*. Nous retiendrons que ce type de jeu a des avantages certains pour travailler l'autonomie des joueurs, le tri des données, la mise en relation des éléments du jeu, la capacité à se poser des questions et à trouver un moyen de répondre qui sont des compétences essentielles pour pouvoir entrer dans une tâche de modélisation.

Les jeux d'évasion ont néanmoins leurs limites et leurs inconvénients à prendre en considération. Notamment, la durée limitée est très contraignante, en particulier pour réaliser le processus entier de modélisation qui est souvent travaillé pendant un temps plus long où le modèle est discuté et ajusté alors qu'ici les réponses aux énigmes sont uniques. Le débriefing et la continuité après la phase de jeu sont d'autant plus essentiels pour, tout d'abord, avoir une vision d'ensemble de l'escape game, ce qui n'est pas toujours facile quand on est en train de jouer, mais aussi pour percevoir les mathématiques, les enjeux et ce qui peut être utile pour la suite des apprentissages. On peut s'interroger sur les raisons qui ont conduit à ne pas avoir utilisé certaines informations ou à mettre en œuvre une opération (l'addition). Une réflexion autour des outils mathématiques peut alors être menée.

Nous retiendrons aussi que le format implique qu'on ne puisse pas toujours contrôler l'arrivée des informations. Par exemple, au départ il était possible d'accéder à la cinquième salle en navigant dans la pyramide sur la tablette, permettant à certains élèves d'ouvrir le cryptex très rapidement. Le groupe concerné a continué la phase de jeu mais aurait très bien pu s'arrêter. Nous avons alors apporté quelques modifications pour que ça ne se reproduise pas (d'où le QR code qui apparait en positionnant le papier calque sur la dernière face). Nous avons aussi cherché à inciter les élèves à davantage communiquer avec l'assistant afin de mieux visualiser la position de chaque groupe. Nous avons essayé de trouver des solutions pour que la construction de la pyramide devienne un vrai moment de modélisation où le modèle évolue au fil du jeu, mais la présence de la version virtuelle a finalement réduit considérablement notre souhait de départ ainsi que l'absence de lien direct avec la résolution des énigmes.

De nombreuses questions restent en suspens mais quelques pistes pour optimiser l'*escape game* sur l'apprentissage de la modélisation ont conduit à des discussions intéressantes qui n'amènent pour l'instant pas encore de réponse claire.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research. *Educational Researcher*, *41*, 16-25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems ? The Example "Sugarloaf". Présenté à ICTMA 12, Chichester. Chichester : Ellis Horwood.

Burgermeister, P.-F., & Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. Petit x, 91, 5-24.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : Illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, (18), 77-105.

Fenaert, M., Nadam, P., & Petit, A. (2019). S'capade pédagogique avec les jeux d'évasion - Apprendre grâce aux escape games (Ellipses).

Guigon, G., Humeau, J., & Vermeulen, M. (2018). A Model to Design Learning Escape Games : SEGAM: *Proceedings of the 10th International Conference on Computer Supported Education*, 191-197. Funchal, Madeira, Portugal: SCITEPRESS - Science and Technology Publications. https://doi.org/10.5220/0006665501910197

Israel, G. (1996). *La Mathématisation du réel*. Seuil.

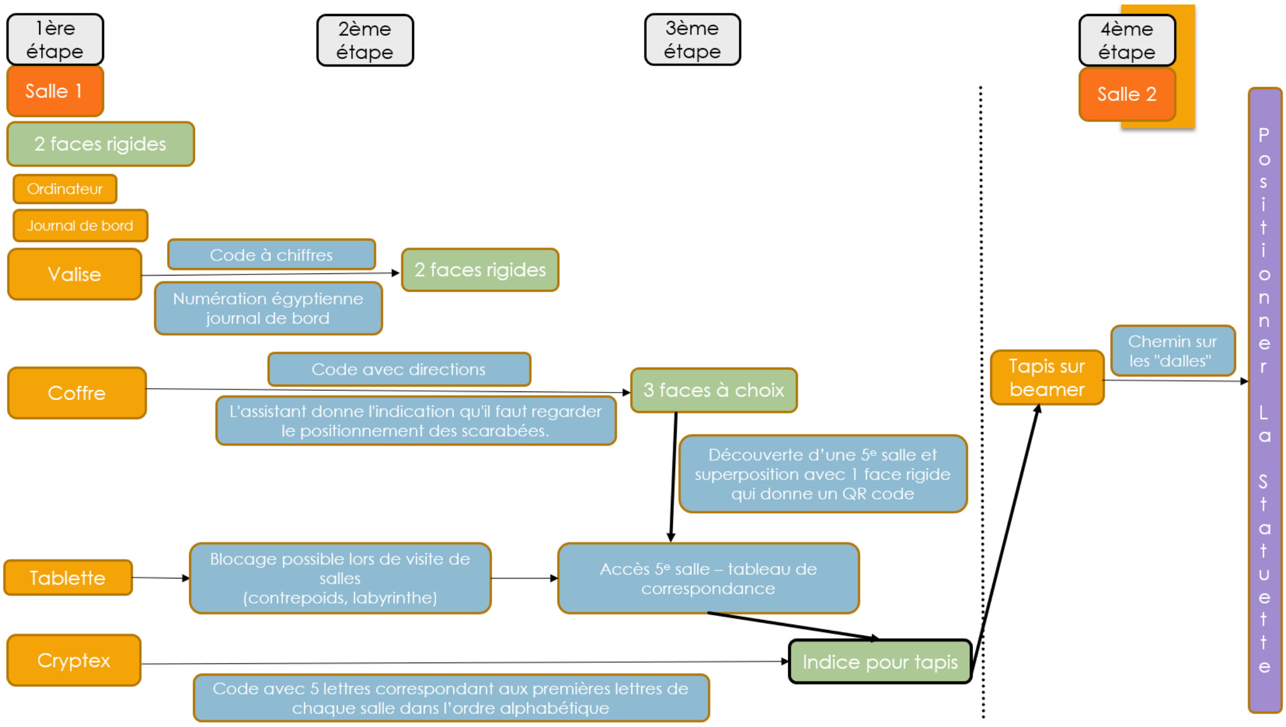
Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G., & Quilio, S. (2018). Cooperative engineering as a joint action. European *Educational Research Journal*, *17*(1), 187-208. https://doi.org/10.1177/1474904117690006

Nicholson, S. (2015). *Peeking behind the locked door : A survey of escape room facilities*. Consulté à l'adresse http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

## VII - ANNEXE 2 : CARACTERISTIQUES DE LA MODELISATION - PROGRAMME SUISSE

| Objectif d'apprentissage | MSN 15 : Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques | MSN 25 : Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques | MSN 35 : Modéliser des phénomène naturels, technique, sociaux ou des situations mathématiques |
|---|---|---|---|
| Composantes | A …en imaginant et en utilisant divers outils de représentation<br>B …en menant des observation répétées<br>C …en se référant à diverses sources<br>D …en triant et organisant des données<br>E …en confrontant et en communiquant ses observations, ses résultats, ses constats, ses interprétations<br>F …en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques<br>G …en se posant des questions et en exprimant ses conceptions | A …en imaginant et en utilisant des représentations **visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux…)**<br>B …**en identifiant des invariants d'une situation**<br>C …en triant et organisant des données<br>D …en communiquant ses résultats et ses interprétations<br>E …en explorant des situations aléatoires et en se confrontant au concept de probable<br>F …en se posant des questions et en **définissant un cadre d'étude**<br>G …**en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques** | A …en **mobilisant** des représentations **graphiques** (codes, schémas, tableaux, graphiques…)<br>B …**en associant aux grandeurs observables des paramètres**<br>C …en triant et organisant **et interprétant** des données<br>D …en communiquant ses résultats et **en présentant des modélisations**<br>E …en **traitant** des situations aléatoires **à l'aide de notions de probabilités**<br>F …**en dégageant une problématique et/ou en formulant des hypothèses**<br>G …**en recourant à des modèles existants**<br>H …en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques (**fonctions, statistiques, algèbre, …)** |
| Remarques | | (C disparait ; D plus court ; le G devient le F avec le cadre d'étude en plus) | (G devient H) |

# VIII - ANNEXE 3 : STRUCTURE ESCAPE GAME



# UN JEU DE ROLES SUR LA STRUCTURATION DE L'ESPACE EN FORMATION D'ENSEIGNANTS

**Claire GUILLE-BIEL WINDER**[1]
MCF, INSPE-AMU
ADEF, COPIRELEM
claire.winder@univ-amu.fr

**Ismaïl MILI**
Haute Ecole Pédagogique du Valais
ismail.mili@hepvs.ch

Résumé
Au milieu des années quatre-vingt-dix, une approche par Jeu de Rôles a été développée à l'Université du Québec à Montréal par une équipe de didacticiens des mathématiques intervenant en formation initiale des maitres du primaire. Depuis quelques années cette modalité de formation se développe en Europe et fait l'objet de nouveaux travaux de recherche. Cet atelier vise à questionner les potentialités en formation d'un Jeu de Rôles élaboré à partir d'une activité de structuration de l'espace (premiers degrés de la scolarité), issus des Moyens d'Enseignement de Suisse romande (MER). En prenant appui sur le cas de l'analyse *a priori*, il soulève la question de la transposition des savoirs didactiques en formation des enseignants.

Depuis le début des années 2000, un nombre croissant de recherches a porté sur le développement professionnel des enseignants (Masselot, 2004 ; Robert, 2005 ; Charles-Pézard, Butlen et Masselot, 2011, 2018 ; Butlen, Mangiante et Masselot, 2017). Ainsi Masselot (2004), en analysant les pratiques de trois professeurs des écoles débutants, a mis en évidence que l'influence de la formation sur les pratiques de ces enseignants dépendait de la compatibilité de la formation avec la logique sous-jacente à ces pratiques. De son côté, Robert (2005), en travaillant sur les enseignants du second degré, a élaboré un certain nombre d'hypothèses pouvant favoriser la pertinence de la formation dans le développement professionnel : partir des pratiques et s'appuyer sur les pratiques ; aborder effectivement la complexité du travail enseignant ; prendre en compte les contraintes ainsi que les adaptations individuelles ; augmenter les marges de manœuvre. De ces travaux se dégage une idée forte : il est nécessaire, en formation, d'imbriquer le plus possible le travail sur la préparation (qui doit tenir compte des mathématiques à enseigner mais aussi des déroulements passés et à venir), avec la gestion de la classe. C'est dans cette perspective que nous nous sommes intéressés aux Jeux de Rôles, dispositif de formation qui place les formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue), dans un contexte proche de l'exercice de la classe. Ce dispositif a été développé au milieu des années quatre-vingt-dix à l'Université du Québec à Montréal (UQAM) par une équipe de didacticiens des mathématiques intervenant en formation initiale des maitres du primaire (GREFEM, 2012 ; Lajoie et Palascio, 2001 ; Lajoie, 2010 ; Marchand, Adihou, Lajoie, Maheux et Bisson, 2012). Il se développe en Europe depuis quelques années et fait l'objet de nouveaux travaux de recherche (Guille-Biel Winder, Lajoie, Mangiante, Masselot et Tempier, 2020, 2022 ; Lajoie, 2018, 2020 ; Lajoie, Mangiante, Masselot, Tempier et Winder Guille-Biel, 2019). Cet atelier s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Il vise à questionner les potentialités en formation d'un Jeu de Rôles élaboré à partir d'une

[1] Les auteurs sont cités dans l'ordre alphabétique mais cet article est un travail collectif sans auteur principal.

activité de structuration de l'espace (premiers degrés de la scolarité) issue des Moyens d'Enseignement de Suisse romande (MER).

Après une présentation générale des Jeux de Rôles, les participants de l'atelier ont d'abord été invités à expérimenter le dispositif tel qu'il est mené par l'un des animateurs de l'atelier dans son institut de formation des maîtres, la Haute Ecole Pédagogique (HEP) du Valais, puis à analyser les modalités de mise en œuvre et à identifier les potentialités du dispositif. L'atelier s'est poursuivi par un questionnement sur les implications d'une telle modalité dans les parcours de formation des enseignants et sur la particularité des savoirs en jeu. Pour une meilleure lisibilité, le plan de ce compte-rendu diffère de celui de l'atelier. La première partie est consacrée à la présentation du dispositif de formation Jeu de Rôles. Dans une deuxième partie, nous explicitons certaines spécificités concernant le domaine de la structuration de l'espace – côté enseignement mais également formation. Nous sommes alors en mesure de présenter, dans une troisième partie, le déroulement du Jeu de Rôles élaboré à partir d'une activité proposée dans les Moyens d'Enseignement Romands (MER) et intitulée « Une chaise pour deux ». La quatrième partie présente l'analyse de cette situation de formation. Dans la cinquième partie nous restituons la mise en œuvre du Jeu de Rôles ainsi que son analyse par les participants de l'atelier.

## I - PRESENTATION DU DISPOSITIF « JEU DE ROLES »

Un Jeu de Rôles correspond à une mise en scène d'une situation problématique impliquant des personnages ayant un rôle donné. Des personnes doivent alors se glisser dans la peau de personnages plongés dans une situation donnée et agir exactement comme ils croient que ces personnages pourraient agir. Le Jeu de Rôles peut être utilisé à des fins thérapeutique, de formation personnelle, ou comme approche pédagogique en formation professionnelle (Mucchiellli, 1983, p. 3). Suivant l'approche développée à l'UQAM, chaque Jeu de Rôles est structuré de la même manière et se déroule en plusieurs temps (Lajoie et al., 2019) (figure 1).

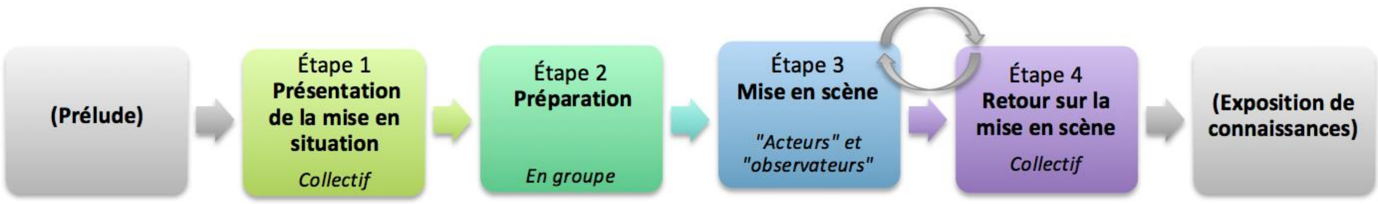



*Figure 1. Déroulement général d'un Jeu de Rôles*

***Étape 1 – Présentation de la mise en situation.*** Une mise en situation professionnelle problématique est présentée au groupe. Elle implique un ou des « élèves » (selon le Jeu de Rôles) et un « enseignant » et appelle une solution qui convoque des gestes professionnels. Par exemple il s'agit d'aider un élève en difficulté sur une tâche donnée, ou bien d'assurer une exposition de connaissances à l'issue d'une mise en commun…

***Étape 2 – Préparation.*** Une fois la mise en situation posée, les formés sont placés en équipes et l'étape de préparation à la mise en scène débute. Les équipes ne savent pas à l'avance si un de ses membres devra jouer un rôle devant tout le groupe. Au cours de cette étape, les équipes examinent les savoirs mathématiques en jeu dans la situation, peuvent faire ressortir les raisonnements possibles, imaginer des moyens d'intervenir en tant qu'enseignant, réaliser une analyse préalable (Margolinas, 2004) de la situation, anticiper les réactions des élèves… Pour les soutenir dans cette préparation, ils reçoivent généralement des consignes supplémentaires, à l'oral ou à l'écrit.

***Étape 3 – Mise en scène.*** Pour la mise en scène, le formateur choisit les équipes qui devront envoyer une personne à l'avant de la classe pour jouer le rôle de l' « enseignant » ou d'un/des « élève(s) ». Les acteurs proviennent d'équipes différentes, de manière à éviter qu'ils s'entendent préalablement sur le déroulement. Le jeu a lieu et les observateurs, tout comme le formateur, ont l'occasion d'observer l' « enseignant » et son/ses « élève(s) » en action.

***Étape 4 - Retour sur la mise en scène.*** Un retour collectif est organisé par le formateur qui peut (ou non) participer aux échanges. Le retour peut porter sur tout aspect pertinent ayant retenu l'attention des observateurs ou des acteurs (notamment l'identification de moments clés dans l'intervention, une clarification sur les concepts mathématiques impliqués…). Le retour peut être l'occasion de discuter de ce qui aurait pu être fait et de ce qui pourrait (ou devrait) être fait dans l'avenir, que ce soit dans le contexte d'une nouvelle mise en scène ou dans celui d'une « vraie » classe. Il permet d'attirer l'attention sur les pratiques et connaissances qui ont émergé grâce au Jeu de Rôles de manière à pouvoir les faire éventuellement évoluer, le cas échéant.

Le jeu de Rôles peut se terminer par une ***exposition de connaissances*** conduite par le formateur. Par ailleurs, selon les contextes et les notions en jeu, il est parfois nécessaire, pour soutenir les formés dans la préparation et la mise en œuvre du Jeu de Rôles, de proposer, en complément du scénario initial, une ***activité préalable*** qui peut prendre différentes formes (appropriation d'une activité de classe, présentation d'un matériel, analyse de productions d'élèves, lecture portant sur les concepts mathématiques en jeu, sur des conceptions d'élèves, sur des erreurs fréquentes, …). Notons enfin que le formateur peut éventuellement proposer plusieurs cycles « mise en scène – retour » sur une même tâche, ou bien amener les formés à préparer deux ou trois jeux successifs sur deux ou trois tâches différentes.

## II - LA STRUCTURATION DE L'ESPACE EN QUESTION

La structuration de l'espace est un thème difficile à appréhender aussi bien en classe qu'en formation. On peut notamment relever que différents registres sont à considérer : le langage oral, le registre corporel comme dans l'activité « Une chaise pour deux » (qui sera l'objet de notre atelier et dont l'énoncé est fourni en annexe), mais aussi le registre de la langue écrite, ou le registre écrit symbolique dans d'autres activités. Ainsi, dans le compte-rendu d'atelier d'un précédent colloque COPIRELEM présentant un autre dispositif de formation Masselot et Zin (2008) identifient un ensemble d'éléments à prendre en compte dans l'enseignement du domaine de la structuration de l'espace. Nous les présentons dans ce qui suit.

Masselot et Zin (2008) soulignent tout d'abord la pluralité des difficultés des élèves à reproduire une configuration donnée. Ces difficultés peuvent être d'ordre psychomoteur (notamment en lien avec la décentration) ou langagières (en particulier dans les situations de communication, mais également au niveau du vocabulaire à employer ou à comprendre). Elles peuvent être spécifiques au type d'espace (micro, méso ou macro-espace), les procédures mises en œuvre dépendant étroitement à la fois de la taille de l'espace et du degré de conceptualisation nécessaire (Brousseau, 2001). Elles peuvent se rencontrer au niveau de la prise d'indices : il faut à la fois repérer la place des « objets » les uns par rapport aux autres (à gauche de…, sur …) et leur position (de face, debout, …). Les types de repères jouent également un rôle dans cette prise d'indices : par rapport à soi, ou à l'autre, ou par rapport à un repère fixe de la salle (les murs, la porte …). Il existe alors une diversité de démarches qu'il est possible de mettre en œuvre dans ces activités. Elles dépendent notamment des prises d'indice choisies par l'élève qui va réaliser la reproduction : extérieures à lui-même ou pas ; repères fixes de la salle (comme le tableau ou une fenêtre) …. Dans les situations de communication, elles dépendent également des modalités retenues : auto-communication ; communication orale/écrite/gestuelle. Des difficultés sont en outre dues au fait que certains objets ou repères sont orientés ou non (par exemple un élève est orienté, mais une poubelle cylindrique ne l'est pas …).

Différentes variables didactiques, sur lesquelles l'enseignant doit jouer, découlent de la mise au jour de ces difficultés. Or l'identification des variables didactiques à prendre en compte, mais aussi leur choix peuvent être sources de difficulté pour l'enseignant. Dans le compte-rendu de leur atelier, Bettinelli et al. (2016) proposent d'ailleurs une carte heuristique de critères à prendre en compte dans la préparation des activités proposées aux élèves (figure 2). L'enseignant doit également être attentif à la rigueur du langage qu'il emploie et à lever certaines ambiguïtés et/ou implicites dans le vocabulaire employé, ce qui peut s'avérer difficile. Notons par exemple que « à la gauche de la chaise » ou « à gauche de la chaise » peuvent désigner deux positions différentes qu'il est difficile de comprendre (même pour un adulte !) et qui réfèrent à une prise de repère différente (la chaise ou moi). Pourtant il est à noter que le vocabulaire employé par l'élève est la seule chose qui peut renseigner l'enseignant sur la procédure de celui-ci !

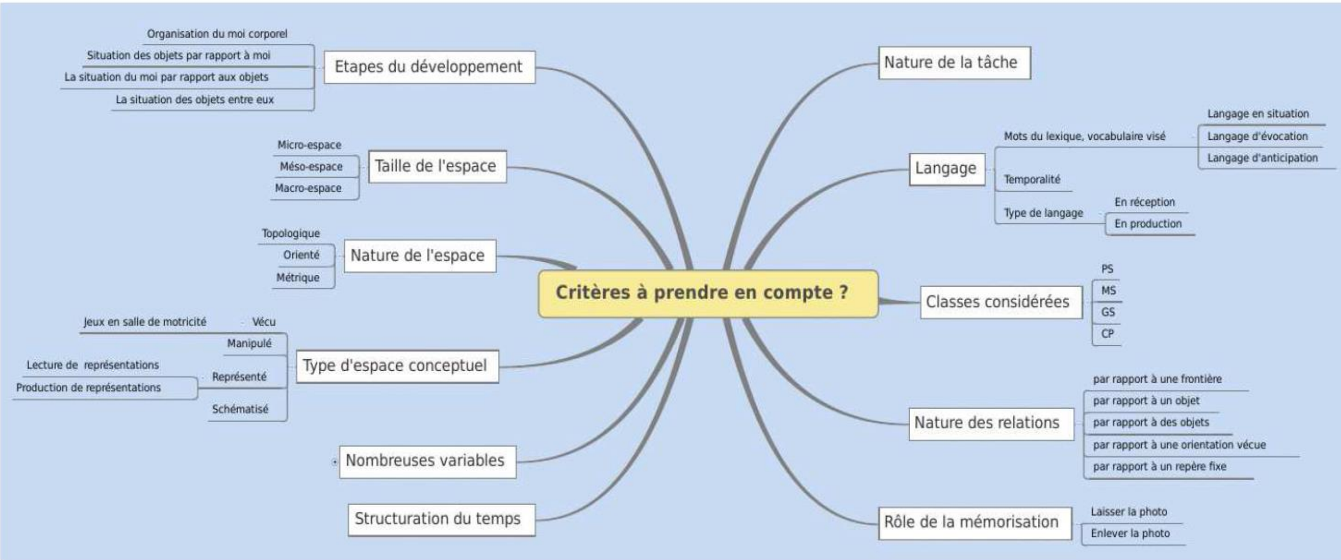



*Figure 2. Carte heuristique de critères à prendre en compte dans la préparation des activités (Bettinelli et al., 2016, p.8)*

Enfin les points aveugles constatés par Masselot et Zin (2008) dans les programmes français à l'époque de leur travail, perdurent. En France, les documents officiels actuels pour la maternelle[2] ne prennent pas en compte certains aspects comme les indices strictement liés au corps, pas nécessairement verbalisés et pourtant essentiels à la compréhension et à l'apprentissage de ces notions. Ils soulignent seulement que « l'enseignant favorise (…) l'organisation de repères que chacun élabore, par l'action et par le langage, à partir de son propre corps afin d'en construire progressivement une image orientée. ». En Suisse romande (francophone), le Plan d'Études Romand (CIIP, 2010) invite simplement à une « Découverte, exploration de l'espace et orientation en variant les points de référence (son propre corps, d'autres personnes, d'autres objets, …) » ou à la « Détermination de sa position ou de celle d'un objet (devant, derrière, à côté, sur, sous, entre, à l'intérieur, à l'extérieur, …) selon différents points de repères ». Par ailleurs, aucun de ces documents n'évoque le difficile travail d'explicitation, les malentendus ou les implicites liés au vocabulaire, pourtant évoqués dans un document d'accompagnement français en 2002 (MEN, 2002). La prise en considération de ces différents aspects reste donc à la charge des enseignants eux-mêmes ou de leurs formateurs le cas échéant.

[2] Bulletin officiel n°25 du 24 juin 2021

# III - LE JEU DE RÔLES « UNE CHAISE POUR DEUX »

Le Jeu de Rôles que les participants de l'atelier ont été amenés à vivre prend appui sur une activité d'introduction à la structuration de l'espace intitulée « Une chaise pour deux » (sa présentation, fournie aux participants, figure en annexe 1).

Dans un premier temps, nous présentons cette activité de classe et en réalisons une analyse rapide mettant en évidence les raisons de son choix pour la situation de formation. Le Jeu de Rôles proposé dans le cadre de l'atelier est détaillé dans un deuxième temps.

## 1 Présentation de l'activité de classe « Une chaise pour deux »

L'activité de classe « Une chaise pour deux » est extraite des Moyens d'Enseignement Romands (MER). Elle est destinée à des élèves des deux premières années de la scolarité en Suisse Romande (1-2H, MS/GS, élèves de 4 à 6 ans). Constituée de deux temps (seul le second sera abordé avec les participants de l'atelier), elle a pour objectif annoncé de « Déterminer sa position ou celle d'un objet selon différents points de repères ». Lors du premier temps – intitulé *Imitation en temps réel* – les élèves, regroupés par deux, chacun en possession d'une chaise, orientent leur chaise dans la même direction (ils la disposent de façon à ce qu'ils puissent tourner autour sans toucher les autres chaises). À tour de rôle, un élève du binôme invente une « statue » en utilisant la chaise, puis son camarade imite la « statue ». Le premier élève valide ou corrige. Lors du deuxième temps de l'activité – *Sculpture sur indications* – les élèves sont regroupés en trinômes. Trois rôles sont proposés : le modèle, le sculpteur et la sculpture. Le modèle invente une « statue » en utilisant la chaise et le sculpteur est chargé d'indiquer à la sculpture ce qu'elle doit faire pour reproduire le modèle. Un paravent sépare le modèle de la sculpture, empêchant ces deux élèves de se voir. En revanche le sculpteur a vue à la fois sur le modèle et la sculpture.

Située en début de séquence didactique, cette situation est présentée comme « introduction » et, à ce titre, avec l'intention d' « aider l'élève à découvrir (construire) le savoir enseigné ». Sa place en début de séquence et l'intention annoncée par les auteurs justifieraient que l'enseignant effectue, lors du pilotage, quelques ajustements au niveau des variables didactiques. Une rapide analyse préalable de cette situation d'enseignement conduit, en effet, à en repérer plusieurs parmi lesquelles : le type de communication (auto-communication, communication orale, gestuelle, verbale) ; l'orientation de la chaise dans la classe et la position du modèle par rapport à celle-ci ; l'orientation du modèle dans la classe ; la présence/l'absence d'un paravent ; la position du sculpteur par rapport au modèle et à la sculpture et le fait qu'il les voie ou pas simultanément ; la présentation et la permanence du modèle (grandeur nature ou à partir d'une photographie). Ainsi le choix de cette activité dans le cadre du Jeu de Rôles est notamment motivé par le fait que, en complément de son énoncé, celles-ci ne sont pas recensées de manière exhaustive dans la ressource. En effet, seuls les types d'indications fournies et le nombre de consultations autorisées sont mentionnées en tant que variables didactiques dans les commentaires :

> *L'activité peut être conduite sans verbalisation mais sous forme de modelage ou de sculpture. Le sculpteur doit reproduire le modèle proposé en manipulant la sculpture. Il est possible de limiter le nombre de consultations du modèle. La validation se fait en mettant en présence le modèle et la sculpture. Dans ce cas, ce n'est qu'à ce moment qu'une verbalisation s'impose. (MER, s.d., commentaires de l'activité)*

Le milieu didactique ainsi construit, c'est-à-dire « tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit » (Brousseau, 2010, p. 3), est présenté dans la ressource comme suffisamment antagoniste[3] pour pouvoir

[3] Dans un système antagoniste, la construction d'une nouvelle connaissance se fait « contre » le milieu, qui sanctionne les choix inadaptés de l'élève (Brousseau, 2010).

proposer à l'élève sculpteur une rétroaction forte sur sa production. Cet implicite peut conduire, dans la préparation de l'activité par l'enseignant, à occulter une réflexion sur la nature de ses interventions et son rôle. L'analyse met également en lumière une ambigüité qui peut apparaître pour les élèves sculpteurs concernant la reproduction du modèle : il est en effet envisageable que ceux-ci réalisent une symétrie, le paravent pouvant être interprété comme jouant un rôle de « miroir », plutôt qu'une translation. Pourtant l'identification de cette difficulté n'est ni explicitée, ni prise en compte dans la ressource. Par ailleurs, comme dans toute situation de ce type, les démarches envisageables dans « Une chaise pour deux » dépendent des prises d'indices choisies par l'élève sculpteur – et accessibles uniquement par le biais du discours de l'élève comme nous l'avons remarqué dans la partie précédente. Mais d'autres facteurs entrent en ligne de compte : par exemple le sculpteur peut lui-même reproduire la position du modèle, puis aller le placer à côté de la sculpture pour lui indiquer ce qu'il faut faire, avec des gestes ou bien en se plaçant de la même manière que l'élève modèle ou encore en donnant des instructions verbales.

De plus, les connaissances spatiales mobilisées diffèrent suivant l'orientation des chaises par rapport au paravent, ou des différents protagonistes par rapport aux chaises : tout en satisfaisant la consigne, les chaises peuvent, par exemple, être disposées dans le prolongement l'une de l'autre (respectant ainsi la contrainte de « même orientation ») et favoriser des éléments inhérents à la translation, alors que si elles sont orientées comme dans la figure 3 par rapport au paravent, elles renforcent le recours à la symétrie.

*Figure 3. La situation problématique : le modèle (tee-shirt blanc), la sculptrice (pull rose) et la sculpture (tee-shirt bleu)*

Ainsi plusieurs procédures de résolution qui peuvent faire appel à différents types de repérage y sont mobilisables : recours à une latéralité corporelle, à un repérage interne et/ou externe à la situation, aux points cardinaux, etc. La variété des procédures peut dès lors générer chez l'enseignant des questionnements quant aux savoirs hébergés (Mili, à paraître). Or ni la variété de ces différents savoirs, ni celle des procédures, non plus que les difficultés, ne sont explicitées par la ressource : tous ces éléments restent donc à la charge de l'enseignant. Le Jeu de Rôles vise alors à mettre en lumière leur importance. Nous détaillons son déroulement dans ce qui suit.

Ceci implique, en formation, une réflexion sur l'évaluation de l'activité de l'élève sculpteur ainsi que, plus généralement, sur les savoirs à exposer. Ainsi durant la préparation de cette activité, les difficultés des élèves ainsi que les savoirs mobilisés et attendus (et donc à institutionnaliser), devront être identifiés par l'enseignant, afin que celui-ci puisse moduler les variables didactiques, anticiper son accompagnement et prévoir à terme l'évaluation des élèves.

## 2 Présentation du Jeu de Rôles

Le Jeu de Rôles proposé dans l'atelier correspond à celui mis en œuvre en formation initiale. Il suit la structure précédemment présentée moyennant quelques adaptations. Nous avons tout d'abord fait le choix de ne pas proposer de prélude dans l'objectif de confronter les participants aux spécificités et aux difficultés du domaine de la structuration de l'espace. Le Jeu de Rôles s'est alors déroulé selon les quatre étapes suivantes.

***Étape 1 – Introduction.*** Après une présentation de la structure du Jeu de Rôles « Une chaise pour deux », quatre groupes de trois ou quatre participants sont constitués (nous les désignons par la suite par les lettres A, B, C et D). Puis le descriptif de l'activité de classe (annexe 1) est dévoilé et il est annoncé que la mise en scène portera sur le deuxième temps de l'activité (*Sculpture sur indications*), faisant intervenir le paravent. A noter que, contrairement à l'approche proposée à l'UQAM, la situation problématique n'est pas immédiatement présentée : les participants savent seulement qu'ils vont devoir « venir en aide à un élève mis en difficulté » dans le cadre d'une situation particulière et que celle-ci leur sera dévoilée juste avant le début de l'intervention. Ce choix est motivé par le souhait d'être au plus proche d'une situation de classe où l'enseignant doit composer dans l'instant avec la situation.

***Étape 2 – Préparation.*** Par groupe, les participants se préparent à intervenir, à la fois en tant qu'enseignant, sans autre indication que le fait que « l'élève répondra au mieux de ses connaissances », et en tant qu'élève. Les groupes sont invités à ne pas communiquer pas entre eux de manière à ce que, lors de l'étape suivante, « l'enseignant » ne sache pas ce que les « élèves » ont en tête (et réciproquement).

***Étape 3 – Mise en scène.*** Un protagoniste est ensuite sélectionné dans chacun des groupes. Dès lors, les différents protagonistes découvrent la situation problématique sous forme d'une photographie prise au cours d'une situation réelle de classe (figure 3), l' « enseignant » ayant pour mission de venir en aide à la sculptrice (en pull rose sur la photographie). Le modèle (tee-shirt blanc) se trouve à gauche. Les règles qui régissent l'intervention sont alors explicitées, à savoir :

- Aucune contrainte sur la durée de l'intervention n'est imposée : ce qui constitue la fin de l'intervention est laissé à l'appréciation de l' « enseignant ».
- L' « enseignant » a droit à un « assistant » qui peut lui apporter le matériel souhaité, ceci afin de ne pas casser le rythme de l'intervention mais aussi de légitimer un éventuel changement de direction par rapport au scénario d'enseignement initial.
- L' « enseignant » peut figer la situation – et ainsi réfléchir à ce qu'il compte faire.
- L' « enseignant » peut revenir en arrière et reprendre son intervention là où il le désire, notamment s'il se sent dans une impasse.
- Les « élèves » sont invités à répondre au mieux de leurs connaissances (d'élèves).
- Les observateurs sont invités à noter les questions qu'ils souhaitent poser à l' « enseignant » et/ou aux « élèves » à la fin de l'intervention ainsi que les éléments qu'ils souhaitent évoquer lors du débat qui suivra celle-ci.

***Étape 4 – Retour collectif.*** Un débat entre les participants est ensuite proposé, ceci afin que la situation vécue puisse être analysée, aussi bien du point de vue de l'« enseignant » (ce qui a semblé pertinent ou intéressant dans l'intervention ; ce qui s'est révélé utile – ou pas – dans la préparation ; ce qui aurait aidé…), que des « élèves » (ce qu'ils ont appris ; ce qu'ils ont ressenti comme aidant ou au contraire comme perturbant…) ou encore que des observateurs (les questions qu'ils aimeraient poser à l'enseignant ou aux élèves ; ce qui les a interpelés dans cette situation …). De manière à ne pas orienter les échanges et afin de faciliter l'émergence de concepts didactiques, le formateur opte pour une posture détachée, se contentant de distribuer les tours de paroles.

## IV - ANALYSE DU DISPOSITIF DE FORMATION

Cette partie est consacrée à la mise au jour des caractéristiques du dispositif de formation présenté dans l'atelier. Il s'agit ici de clarifier les enjeux possibles des différentes phases de la mise en œuvre, enjeux qui concernent l'appropriation de savoirs mathématiques, didactiques et/ou pédagogiques, et de rendre compte de la manière dont s'articulent ces différents types de savoirs « utiles pour enseigner » (Houdement, 2013). Nous utilisons pour cela un cadre d'analyse (Guille-Biel Winder et al., 2015 ;

Mangiante-Orsola et al., 2019), permettant de caractériser les activités de formation en fonction de leur nature, du positionnement du formé et des connaissances convoquées. Nous présentons rapidement ce cadre avant de réaliser l'analyse du jeu de Rôles « Une chaise pour deux ».

## 1 Présentation rapide du cadre d'analyse d'une situation de formation

Dans ce cadre, une situation de formation est formée d'une succession de tâches, qui elles-mêmes induisent une activité (Rogalski, 2003) de la part du formé. Cinq types d'activité sont distingués :

- l'*activité mathématique* consiste à faire des mathématiques dans la résolution d'une tâche mathématique ;
- l'*activité d'analyse mathématique* correspond à l'analyse des mathématiques en jeu dans la résolution d'une tâche mathématique ;
- on parle *d'activité didactique et/ou pédagogique* lorsqu'il s'agit de mettre en lumière les choix didactiques et/ou pédagogiques liés à la tâche mathématique (par exemple l'identification de différentes étapes dans la mise en œuvre en classe), et *d'activité d'analyse didactique et/ou pédagogique* lorsqu'on réalise une analyse de ces choix didactiques et/ou pédagogiques ;
- enfin *l'activité de problématisation* comprend l'identification et l'investigation d'une question professionnelle par la mobilisation de concepts mathématiques, didactiques et pédagogiques.

Le choix de ces cinq types d'activités découle de la prise en compte de trois indicateurs : le type de connaissances convoquées (mathématiques, didactiques, pédagogiques), leur degré de décontextualisation (mobilisées en contexte, explicitées en contexte ou décontextualisées), ainsi que la posture du formé attendue par le formateur (élève, élève-enseignant[4], enseignant, praticien-chercheur). Le cadre d'analyse se présente alors sous forme de cinq paliers emboîtés : le passage d'un palier $n$ à un palier $n+1$ s'accompagne, soit d'un changement de posture du formé, soit d'une mise à distance dans une posture donnée en lien avec le degré de décontextualisation des connaissances. La figure 4 présente une synthèse des cinq paliers.

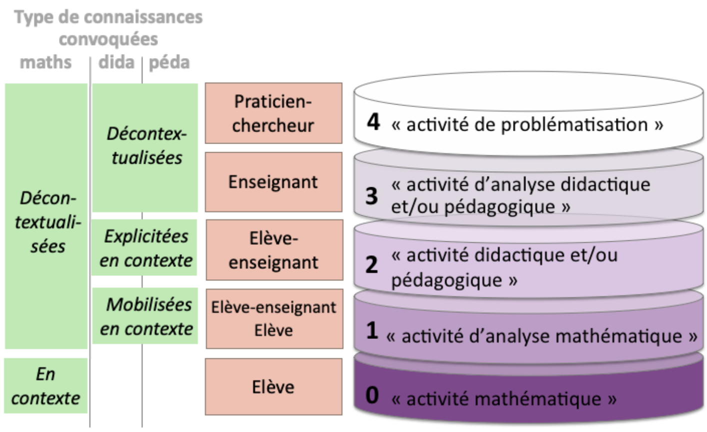



*Figure 4. Cadre d'analyse d'une situation de formation (Mangiante et al., 2019)*

[4] Au sens de « élève ingénieur », qui « étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, ou (…) analyse les conditions de mise en œuvre en classe [d'une] tâche mathématique considérée » (Mangiante et al., 2019, p.136)

## 2 Analyse préalable du Jeu de Rôles sur « Une chaise pour deux »

L'analyse préalable de la situation de formation, récapitulée figure 5, s'appuie sur le cadre d'analyse.

***Étape 1 – Introduction.*** Le point de départ du Jeu de Rôles est une situation professionnelle avec un problème d'enseignement à résoudre qui s'appuie sur une mise en œuvre effective de ce qui est proposé en annexe 1 (même si la situation problématique n'est pas encore donnée) : il s'agira d'aider un élève dans une tâche de reproduction de position dans le méso-espace[5]. Les formés sont dans une posture d'enseignants. L'entrée dans la situation de formation s'effectue ainsi au palier 3 (flèche jaune *Introduction*, figure 5).

***Étape 2 – Préparation à la mise en scène***. Pendant la préparation, les formés sont dans une posture d'élève lorsqu'ils cherchent à résoudre des problèmes de reproduction de position (auto-communication puis communication) avec le matériel indiqué par la ressource : dans ce cas les connaissances mathématiques en jeu sont contextualisées (palier 0). Les formés sont également dans une posture d'élève-enseignant lorsqu'ils analysent ces types de problème du point de vue mathématique pour dégager les connaissances en jeu ; les connaissances mathématiques sont décontextualisées et des connaissances didactiques sont implicitement utilisées en contexte (palier 1). Lorsque les formés anticipent des procédures d'élèves dans la réalisation de la tâche ou des difficultés possibles, ils sont placés en posture d'élève-enseignant et utilisent en contexte des connaissances pédagogiques et didactiques (palier 2). Enfin, lorsqu'ils réalisent une analyse préalable de la situation d'enseignement proposée, notamment s'ils identifient des variables didactiques et envisagent des pistes pour aider les élèves, ils se placent en posture d'enseignant (palier 3). Juste avant la mise en scène, la présence de la photographie (figure 3) conduit à identifier (au moins) une procédure pour résoudre le problème, des erreurs commises et des difficultés rencontrées : les connaissances pédagogiques et didactiques sont utilisées en contexte (palier 1). L'analyse de la réalisation du trio d'élèves et l'identification de la nature des difficultés –langagières, spatiales – place enfin les formés en posture d'élève-enseignant (palier 2). Ces passages de palier sont représentés par la flèche jaune *Préparation* (figure 5).

***Étape 3 – Mise en scène.*** Lors de la mise en scène, il est nécessaire de distinguer les différents statuts. Le formé jouant le rôle de l'enseignant (et donc mis dans une posture d'enseignant, palier 3) doit s'essayer à des formulations orales et/ou écrites des connaissances en lien avec les objectifs d'apprentissage identifiés, à partir des productions de l'élève. Pour ce faire, il revient sur les mathématiques en jeu pour comprendre ce que dit l'élève et y réagir. De nombreux va-et-vient entre les différents paliers 0, 1, 2 et 3 sont alors réalisés (flèche verte, figure 5). Le formé jouant le rôle de l'élève (et donc mis dans une posture d'élève, palier 0), agit et réagit conformément aux difficultés ou facilités d'un élève de 1-2H (MS/GS) analysées lors de la préparation du jeu (alternance entre les paliers 0 et 1) (flèche orange). Les autres formés, par leur activité d'observation, sont amenés à se positionner au palier 2 (flèche rouge).

***Étape 4 – Retour collectif.*** Les questions posées lors du retour collectif amènent les formés à se positionner au palier 2 pour analyser la (ou les) aide(s) proposée(s). Il peut alors être nécessaire de se situer aux paliers inférieurs pour discuter des procédures, des difficultés, des erreurs et de leur exploitation dans la mise en commun. Des éléments plus généraux sur la gestion de l'aide à un élève, sur les difficultés spécifiques au domaine de la structuration de l'espace, relevant du palier 3, peuvent également apparaître dans la discussion. Celle-ci débouche sur la prise de conscience de l'importance l'analyse préalable pour pouvoir réagir « à chaud » (palier 3). Par rapport à l'objectif annoncé du jeu de rôles, le formateur institutionnalise des savoirs didactiques relatifs à l'organisation d'une aide dans une activité relevant du méso-espace : sur

[5] Le problème posé aux formés n'est pas formulé de manière aussi générique.

la formulation dans de telles activités (rigueur langagière, prise en compte des implicites ou ambiguïtés), sur la nécessité de se détacher du langage courant pour proposer un discours portant sur les positions spatiales, sur les tâches de l'enseignant en amont, pendant et après l'aide réalisée (palier 3). Le formateur revient également sur la nécessité de réaliser une analyse préalable de toute situation d'enseignement pour pouvoir s'adapter aux propositions des élèves, s'en saisir et aider ces derniers au regard des enjeux d'apprentissage préalablement identifiés (palier 3). Le formateur peut aussi être amené à corriger d'éventuelles formulations erronées apparues chez les formés (palier 0) ou à expliciter différentes procédures correctes de résolution du problème (palier 1). La discussion peut également déboucher sur une réflexion concernant la formulation des savoirs (palier 2), et le formateur peut plus généralement revenir sur les spécificités de la structuration de l'espace (voir partie suivante) – les différents types d'espace, les variables didactiques, les différents repères spatiaux… (palier 3). Ces différents allers retours entre paliers sont représentés par la flèche jaune *Retour* figure 5.

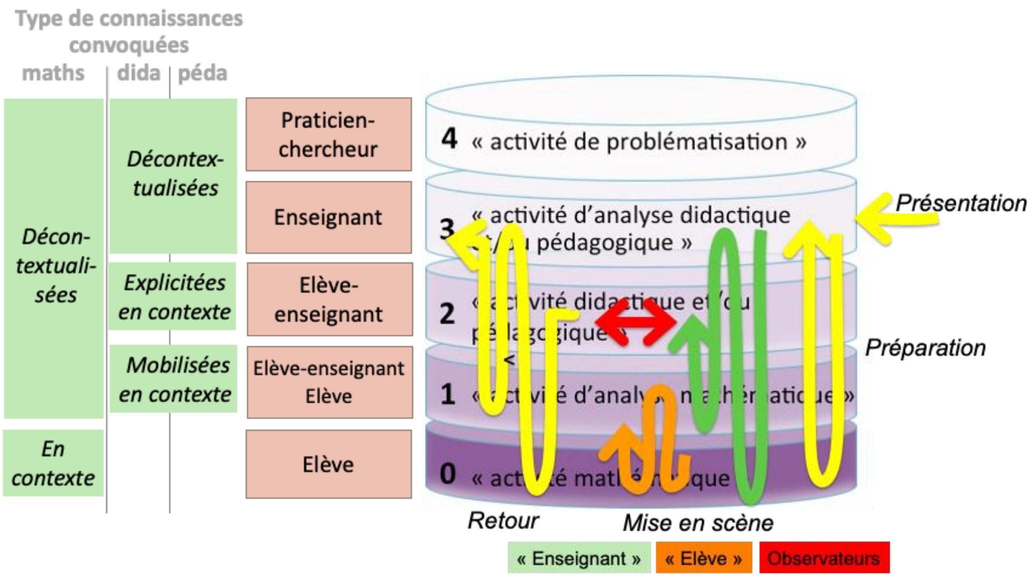



*Figure 5. Analyse de la situation de formation Jeu de Rôles « Une chaise pour deux »*

La partie suivante présente ce qu'il s'est effectivement passé durant les différentes étapes du Jeu de Rôles mis en œuvre dans l'atelier.

## V - RESTITUTION DE LA MISE EN ŒUVRE DU JEU DE ROLES ET DE SON ANALYSE DURANT L'ATELIER

Pour nous permettre un compte-rendu au plus près de ce qu'il est passé, nous avons réalisé un enregistrement audio complet du déroulé de l'atelier. Après avoir synthétisé les travaux menés en groupe lors de la préparation (étape 2), nous explicitons le déroulement de la mise en scène (étape 3) puis revenons sur les discussions qui ont eu lieu à l'issue de celle-ci (étape 4). Nous complétons ce travail par la présentation des analyses réalisées par les participants à l'issue du Jeu de Rôles.

### 1 Synthèse des travaux de préparation (étape 2)

Après avoir pris connaissance de l'activité, les quatre groupes en ont réalisé une analyse préalable (plus ou moins approfondie), puis ont terminé par une synthèse des discussions dans le but de préparer leur éventuelle intervention lors de la mise en scène. L'analyse qualitative des enregistrements des différents groupes met en lumière plusieurs éléments qui ressortent des échanges. Nous les présentons dans ce qui suit.

Tous les groupes relèvent tout d'abord – et de manière systématique – l'ambivalence dans l'énoncé entre « symétrie » et « translation » et l'implication générée par cette ambigüité en ce qui concerne les critères d'évaluation. Ils identifient des variables didactiques relativement similaires : l'orientation des chaises l'une par rapport à l'autre et par rapport au paravent ; l'orientation et les positions des protagonistes ; le recours à un appareil photo ; le caractère visible ou non entre le sculpteur et sa statue ; le nombre d'essais (ou de corrections) autorisé(e)s pour le sculpteur (groupe D uniquement). Ils anticipent également des procédures possibles. Trois groupes (A, B et D) proposent ensuite des pistes d'intervention reliées aux variables précédemment identifiées. Le quatrième (groupe C) envisage le recours à une photographie. Cependant, seul le groupe B rend explicite le recours aux variables didactiques comme d'éventuelles pistes d'intervention, le lien étant implicite pour les trois autres groupes.

Les discussions des groupes B et C portent également sur le repérage, en particulier la mobilisation simultanée des différents types de repérages. Le groupe A (celui au sein duquel figurera l' « enseignant » lors de la mise en scène), mentionne la notion de référentiel comme objet à institutionnaliser, mais n'aborde pas explicitement les objectifs d'apprentissage de l'activité.

Seuls deux groupes (B et C) ont une discussion sur les savoirs à institutionnaliser : concernant le vocabulaire spatial, ils insistent notamment sur la distinction entre droite *versus* gauche ou devant *versus* derrière. La préparation de l'activité incite les membres de ces groupes à ne pas faire figurer la distinction droite *versus* gauche dans les savoirs à institutionnaliser. En revanche la distinction devant *versus* derrière leur semble plus appropriée car, dans le cadre de cette activité, ce type de vocabulaire relève d'un référentiel qui n'est pas autocentré (« devant la chaise » plutôt que « la main droite »). Nous notons une certaine progression des objectifs au fil de la préparation.

Les discussions portent par ailleurs sur la validation de l'activité (incombe-t-elle à l'enseignant, à l'élève modèle, ou aux autres élèves de la classe ? Comment se réalise-t-elle ? À quel moment ? …), questionnant par là-même la posture de l'enseignant. Tous les groupes mettent en doute le caractère suffisamment antagoniste du milieu. Ils s'interrogent sur l'appréciation pareil *versus* pas pareil pourtant évoquée dans les moyens d'enseignement et relèvent le besoin, pour l'enseignant, de clarifier, entre « symétrie » et « translation », les éléments acceptables dans l'activité. Ils relient par ailleurs ce choix à la variable didactique correspondant à l'orientation respective des chaises.

Le groupe D est le seul à questionner la nature des « traces » à évaluer, à s'interroger sur le dispositif permettant de récolter les éléments de vocabulaire mobilisés par les élèves. Enfin les groupes interrogent la différence entre les deux temps en termes de dispositif et de rôle de l'élève (l'auto-validation requise dans le temps 1, lorsqu'elle est possible, ne peut s'appliquer au temps 2).

## 2 Les grandes lignes de la mise en scène (étape 3)

La mise en scène est réalisée par quatre participants, appartenant chacun à un groupe différent : Alain[6] (groupe A) est l' « enseignant » ; Béatrice (groupe B) joue l'« élève modèle » ; Cathy (groupe C) est l'« élève sculpture » ; Daisie (groupe D) a le rôle de l'« élève sculpteur ». Les autres participants, rassemblés autour de la scène, sont observateurs (figure 6).

[6] Tous les prénoms des participants ont été changés.

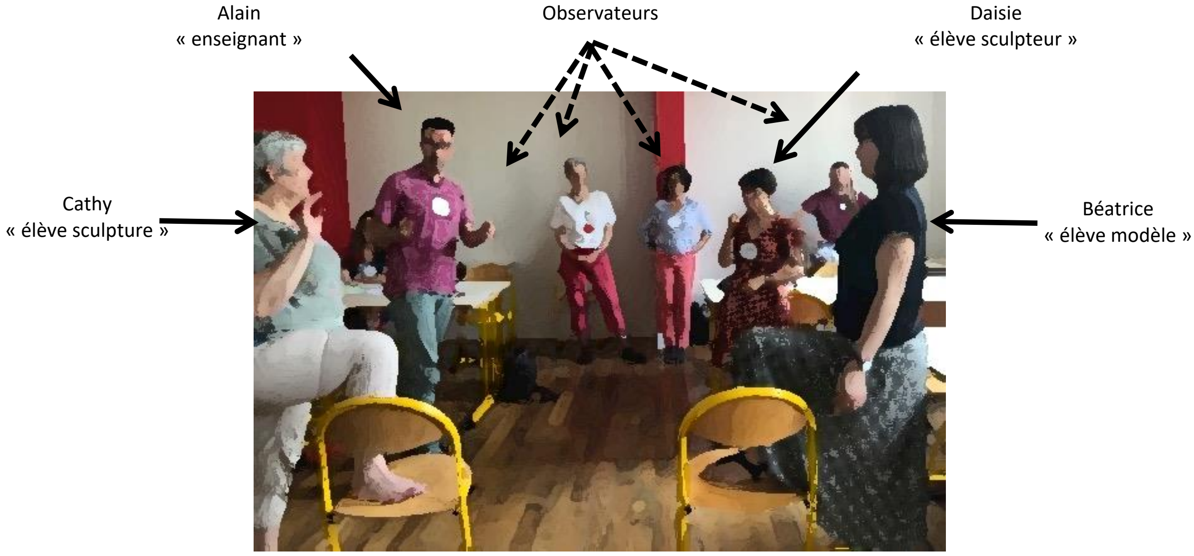



*Figure 6. Organisation de la mise en scène (étape 3)*

L'étape 3 dure 14 minutes : la mise en scène – d'une durée d'environ 8 minutes – est entrecoupée par des « arrêts sur images » (discussions entre l' « enseignant » et l'ensemble des participants de l'atelier sur ce qu'il est envisageable de faire) – d'une durée totale d'environ 6 minutes. En figure 7 nous présentons le synopsis du déroulement de cette étape, en distinguant les moments de jeu des « arrêts sur image » (sur fond grisé).

On peut voir que, dans cette mise en scène, Alain met en œuvre un certain nombre de gestes professionnels : il fait verbaliser l'élève en partant de sa production ; il favorise les discussions entre élèves à propos de la validité de la production proposée (appui sur le collectif) ; il vise à inclure tous les élèves dans les discussions collectives en les interrogeant ; il valide les propos à la fin de la discussion ; il cherche à inscrire l'activité dans un continuum en prenant appui sur ce qu'il s'est dit lors de la phase 1 de l'activité. Cependant il éprouve des difficultés à réagir « à chaud », sollicitant alors l'aide des autres participants. Il attribue – à juste titre – ce problème, à un manque d'analyse préalable et l'explicite clairement. Voyons maintenant ce qui a émergé lors de l'étape 4.

| *Descriptif de chaque épisode* | *Durée* |
|---|---|
| ***Épisode 1.*** Questionnement de l'« enseignant » (Alain) sur ce que l'« élève sculpteur » (Daisie) a dit à l'« élève sculpture » (Cathy). Daisie ne sait d'abord pas quoi répondre, puis finalement indique une position incorrecte d'un bras de Cathy : « Mais ici, le bras, il est tout droit. » (Daisie, 1 min 40 s). | 2 min 52 s |
| ***Épisode 2.*** Alain demande un premier « arrêt sur image » pour demander à quel moment il peut enlever le paravent. Il s'ensuit une discussion mettant en évidence une différence d'interprétation concernant la visibilité que possède l'« élève sculpteur » – vision du modèle et de la sculpture, ou bien seulement du modèle. Alain choisit de ne pas enlever le paravent. | 1 min 33 s |
| ***Épisode 3.*** Alain débute alors un questionnement sur ce que les trois « élèves » voient, qui débouche sur la nécessité de définir ce que signifie « pareil » : « Ah, c'est bien ! Est-ce que tu pourrais m'expliquer 'pareil' ? » (Alain, 4 min 30 s). | 1 min 05 s |
| ***Épisode 4.*** Alain « retire » le paravent et une discussion s'engage sur la validité de la production. Alain fait participer non seulement Daisie, Cathy et Béatrice, mais également d'autres « élèves » parmi les participants observateurs. Il conclut après la discussion : « Toi, tu penses que oui et tes camarades pensent aussi que oui. Effectivement, vous avez fait le geste, comme on a appris, c'est bien le bras droit qui est levé. Bon, ça c'est vrai. » (Alain, 7 min 38 s).<br>Cependant Alain se retrouve dans une impasse lorsqu'il prend conscience de l'ambigüité qui peut s'installer (symétrie ou translation ?) : « Tu as trouvé une autre anomalie. Tout à l'heure on a dit, parfois c'est pareil, parfois c'est pas pareil. D'accord ? Et là, c'est pas pareil parce qu'elles se regardent.//Euh/ il faut que je réfléchisse un petit peu (Alain, 7 min 53 s). | 2 min 23 s |
| ***Épisode 5.*** Alain effectue alors un deuxième « arrêt sur image » afin d'obtenir de l'aide des autres participants. Il fait en outre le constat que son analyse préalable est insuffisante pour lui permettre de valider la tâche : « Mais mon analyse mathématique était insuffisante, parce que je n'ai pas réfléchi aux différentes possibilités de/on a pensé 'validation', mais on n'a pas pensé 'analyse de tâches', quoi ! » (Alain, 7 min 56 s).<br>Une participante suggère de demander « au modèle ce qu'il regarde pour que la sculpture 'fasse pareil' » (participante 3, 8 min 20 s). Un autre envisage même de revenir en arrière sur la phase 1 (Participant 4, 8 min 23 s). Ces propositions amènent Alain à s'interroger sur ce qu'il fallait faire en phase 1 avec les élèves. | 3 min 17 s |
| ***Épisode 6.*** Les participants de l'atelier décident de réaliser effectivement la phase 1 en gardant la même disposition des « élèves » modèle et sculpture. Un participant mène la discussion entre les deux « élèves » afin de déterminer, pour tous, ce que signifient « pareil » et « pas pareil » :<br>Participant [à Daisie et Béatrice] : Vous vous remettez comme vous étiez, sauf qu'on est en phase 1, donc c'est vous deux qui parlez. Toi tu laisses la main comme sur la photo, toi tu lèves l'autre. Et en gros c'est vous qui parlez pour savoir est-ce que là vous êtes pareil ou pas ? (…)<br>Béatrice : Alors non, c'est pas pareil, lève l'autre main, et baisse la. Voilà !<br>Participant 4 : Alors là c'est pareil ?<br>Béatrice : Ben, on l'a dit tout à l'heure, c'est pareil.<br>Participant 4 : Donc on est d'accord, pour nous c'est pareil (…) En phase 1, c'est ce qu'on a décidé. A partir de maintenant, la phase 2… | 1 min 28 s |
| ***Épisode 7.*** Alain reprend alors le travail sur la validité de la production de Daisie. Voyant qu'elle a du mal avec le vocabulaire spatial, il lui pose la question suivante : « Alors qu'est-ce que tu ferais pour changer pour que ça soit pareil ? » (Alain, 13 min 38 s). Daisie s'exécute et l'« enseignant » se tourne vers le groupe pour validation. | 1 min 22 s |
| ***Épisode 8.*** Lors de ce dernier « arrêt sur image », Alain explique : « J'arrête la séance parce qu'en gros je me suis aperçu qu'on n'avait pas bien construit la phase 1, et on revient à la fin sur la phase 1, quoi » | 0 min 05 s |

*Figure 7. Synopsis de la mise en scène (étape 3)*

## 3 Synthèse du retour collectif (étape 4)

Suite à la (longue) mise en scène, le retour collectif est relativement rapide. Lors de cet échange, les participants effectuent des commentaires et relèvent des éléments faisant généralement référence à des points abordés durant leurs préparations respectives, sans que des liens clairs avec la situation vécue ne soient tissés de manière explicite. En particulier les participants ne relèvent pas les gestes professionnels mis en œuvre par l' « enseignant », pas plus que la cohérence entre ceux-ci et l'objectif visé (par « l'enseignant »), ou la pertinence du système de validation au regard du pilotage et de l'aménagement de la situation. Les questions inhérentes au savoir à mobiliser sont abordées par les participants, mais s'avèrent souvent décontextualisées et rarement réinvesties à des fins de remédiation des difficultés rencontrées par l' « enseignant » ou d'analyse de la mise en scène. A noter que, peut-être par gêne ou à cause d'un biais inhérent au contexte de l'atelier (qui ne comptait que des formateurs), aucun participant ne revient sur la préparation de l'intervention par l' « enseignant » – dont pourtant celui-ci a souligné les manques lors de la mise en scène. Cette absence de mise en lien entre l'analyse préalable et le pilotage ne permet pas de pointer les différentes étapes ou contenus qu'il aurait été pertinent d'ajuster ou de développer au regard des écueils relevés.

## 4 Analyse du Jeu de rôles réalisée par les participants de l'atelier

Afin d'identifier les savoirs mobilisables en formation dans le cadre du Jeu de Rôles, mais également d'évaluer le potentiel de ce dispositif dans les diverses institutions des participants, une dernière consigne leur a été présentée : « A partir de ce que vous avez vécu, sur quoi feriez-vous porter la synthèse en formation ? Quels prolongements proposeriez-vous ? La synthèse de vos discussions est à présenter sur une affiche ». Les affiches proposées par les participants sont reproduites en figure 8.

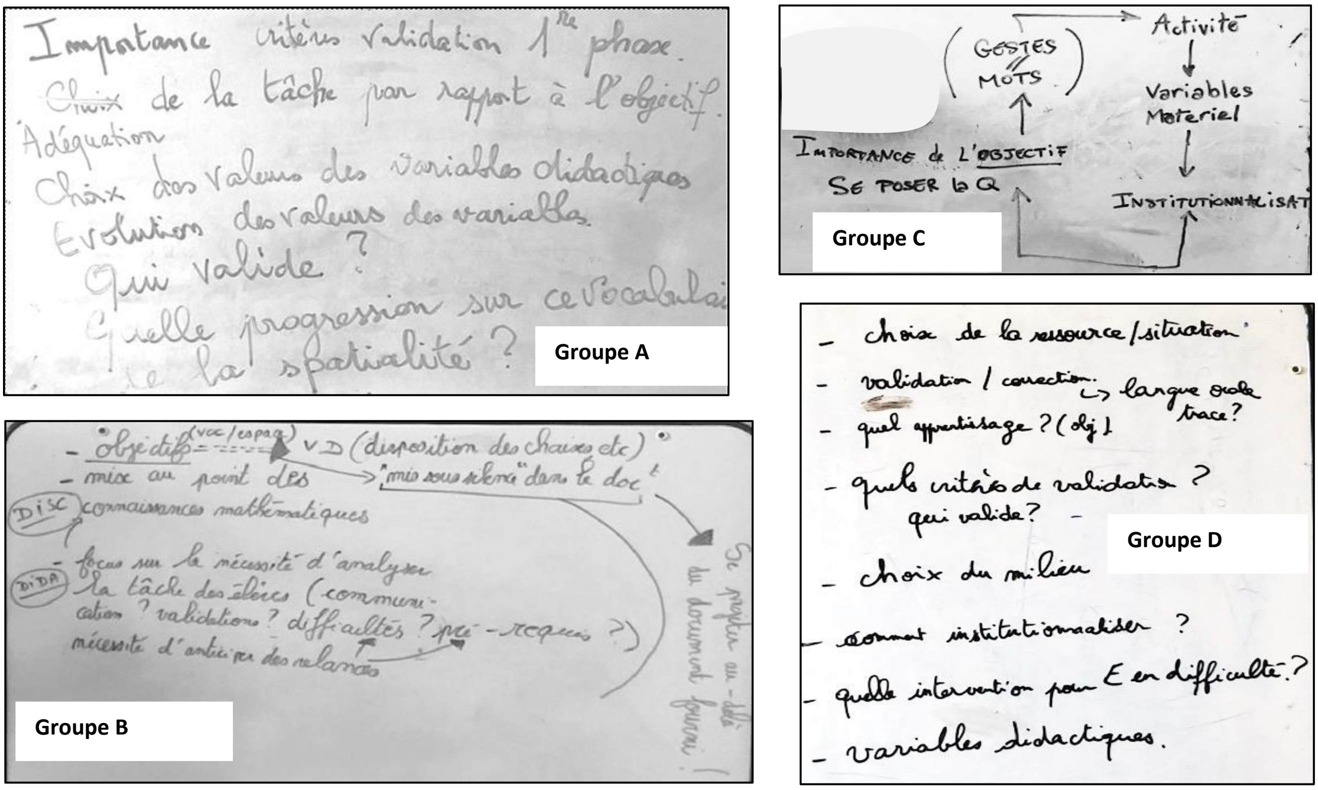



*Figure 8. Affiches des quatre groupes à l'issue de l'analyse*

On y retrouve plusieurs éléments communs : certains sont en lien avec le travail de préparation de la situation (notamment la notion de variable didactique), d'autres avec sa mise en œuvre (institutionnalisation, objectif, différenciation, validation), ou son évaluation. Ces éléments font écho aux discussions durant la préparation au Jeu de Rôles (étape 2). Mais si certains groupes mentionnent la « nécessité d'analyser la tâche des élèves » et « d'anticiper des relances » (comme le groupe B), aucun ne revient sur les éléments contextualisés à la situation et relevant du pôle du savoir disciplinaire (comme les éléments à institutionnaliser de l'ordre du repérage) ou didactique. C'est particulièrement le cas du groupe d'Alain (groupe A), qui, malgré sa prise de conscience d'une analyse préalable lacunaire, ne revient pas sur les valeurs des variables didactiques à prendre en compte dans la situation.

## VI - CONCLUSION

En formation d'enseignants il s'avère pourtant important de rendre visibles les éléments à prendre en compte dans toute activité portant sur la structuration de l'espace, que ce soit par un Jeu de Rôles ou par d'autres activités. C'est le cas par exemple des situations de reproductions de scènes telles que proposées par Masselot et Zin (2008) et reprises par Bettinelli et al. (2016), ou bien dans une analyse des procédures des élèves et de leur évolution, illustrées dans la brochure IREM de Toulouse (2011). Dans le *Document-cadre pour la formation des professeurs des écoles à l'enseignement des mathématiques* (Eysseric et al., 2022), la COPIRELEM présente ainsi les enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs liés à la structuration de l'espace (figure 9). Les préparations des participants (étape 2) ont montré que l'énoncé « Une chaise pour deux » permettait de faire émerger certain de ces enjeux (ils sont écrits en noir figure 9), notamment en « prenant en compte les différents types de repérage pour organiser une progression » et en « concevant des situations d'apprentissage relatives à l'espace ».

- Concevoir et mettre en œuvre différents types de problèmes relatifs au repérage ou au déplacement dans l'espace (décrire, représenter, communiquer des positions ou des déplacements ; reproduire une organisation spatiale ou un déplacement ; réaliser un déplacement ou une organisation spatiale à partir d'une description ou d'une représentation), en s'appuyant sur des moyens de communication appropriés (instruction orale, écrite - texte, schéma, codage…).
- Prendre en compte la relation temps-espace : la succession d'actions lors d'un déplacement est indissociable de la temporalité.
- Connaître les différents types d'espace* (micro-espace, méso-espace, macro-espace) et leurs caractéristiques* et prendre compte leur articulation pour concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage relatives à l'espace.
- Être conscient de l'importance de l'articulation entre action, langage et représentation et la prendre en compte pour concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage relatives à l'espace.
- Prendre en compte le fait que l'apprentissage de l'espace passe à la fois par des situations vécues, des situations transposées (maquette, figurines, …) et des situations représentées (par le langage, des photos, des images, des plans…) ainsi que par le passage de l'une à l'autre.
- Prendre en compte les différents types de repérage pour organiser une progression.
- Concevoir des situations d'apprentissage relatives à l'espace :
  - repérages relatifs avec repères subjectifs (par rapport à soi) ;
  - repérages relatifs avec repères objectifs (par rapport à un objet orienté ou non) ;
  - repérages absolus (indépendamment du sujet et des objets)

*Figure 9. Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs liés à la structuration de l'espace (Eysseric et al., 2022, pp.44-45)*

Toutefois, nous avons pu pointer, grâce au groupe de l' « enseignant » (groupe A), qu'aborder le repérage sous le seul angle d'un « objet à institutionnaliser » n'est pas suffisant pour assurer un pilotage de la classe « au plus près des apprentissages visés ». En effet, les manques relatifs aux savoirs mathématiques dans l'analyse réalisée-en amont (étape 2), ont été relevés lors de la mise en scène (étape 4) car ils ont engendré des difficultés pour l' « enseignant » dans sa gestion de l'intervention.

Le débat consécutif à l'intervention nous laisse penser que les différents savoirs didactiques évoqués dans les préparations des groupes ne sont pas vraiment mobilisés dans le cadre d'une analyse d'intervention. Ainsi le groupe A envisage, lors de l'étape 2, les variables de manière « dynamique » (ses membres évoquent une « évolution des valeurs des variables » au gré de l'évolution de la situation). Pourtant Alain recourt peu au jeu sur les variables lors de la mise en scène (par exemple tourner les chaises pour insister sur la translation, ou positionner le sculpteur derrière la sculpture pour qu'ils partagent la même latéralité…). De plus, alors que l'analyse préalable s'est révélée lacunaire et génératrice d'un déséquilibre à ce moment-là (étape 3), les éléments inhérents aux savoirs disciplinaires et didactiques de la situation ne sont pas précisés lors de l'analyse du déroulement du Jeu de Rôles. Il est manifeste que l'ensemble des participants à l'atelier satisfont les critères d'atteinte du palier 3 (tous réalisent notamment une première analyse de la situation d'enseignement lors de l'étape 2 et identifient des variables didactiques). Cependant l'absence de mobilisation de ces concepts didactiques dans la pratique professionnelle et dans l'analyse de situations, laisse présager l'existence d'une nuance à apporter à ce palier qui se distinguerait par le fait que les concepts devraient être « mobilisés » dans la pratique professionnelle. Il s'agirait alors de distinguer les concepts mobilisés « à des fins d'analyse » de ceux mobilisés « à des fins d'intervention ». Nous relevons en particulier que les savoirs (didactiques) pointés par les participants concernent la planification de l'activité de classe (analyse préalable). Par ailleurs, lors du débat, les participants ne reviennent pas sur la préparation de l' « enseignant », un peu comme si tout le monde s'entendait sur la structure, les contenus et les finalités de l'analyse préalablement réalisée. Or les échanges tenus dans la phase de préparation et durant la phase de débat révèlent que, si des balises sont partagées, les finalités de cette analyse préalable peuvent différer entre les groupes. Ainsi l'analyse préalablement réalisée n'a pas, pour nous, une acception identique à celle d' « analyse *a priori* » : elle s'en distingue en termes d'usage dans la pratique professionnelle. Cela nous questionne alors sur les (types de) savoirs qu'un dispositif comme le Jeu de Rôles permet de mobiliser, mais surtout sur la transposition de ces derniers en formation des enseignants.

Nous remarquons enfin que le Jeu de Rôles est sous tendu, comme toute situation, par des « variables » qui, une fois modulées, font émerger différents savoirs. Parmi les variables de la situation de formation, nous identifions notamment le « moment où la situation problématique est présentée aux formés ». Dans le scénario initial (Lajoie et al., 2019), les formés connaissent la situation problématique dès l'étape 1 (pendant la préparation), alors que dans notre atelier, celle-ci est découverte « sur le vif », juste avant l'étape 3 (la mise scène). Nous avons pu constater dans l'atelier que cette découverte tardive avait déclenché, chez l' « enseignant » – sans intervention de l'animateur –, une prise de conscience de manques dans l'analyse préalable réalisée par son groupe, et que ces manques avaient des répercussions sur son exercice de la vigilance didactique (Charles-Pézard, 2010) : « Ah mais je me rends compte que mon analyse conceptuelle préalable est très lacunaire et m'empêche d'intervenir de manière pertinente ! » (Alain). C'est cette prise de conscience obtenue sans intervention du formateur ainsi que l'étude de l'impact de la modulation des variables de la situation de formation sur les savoirs didactiques (et professionnels) à aborder en formation que nous chercherons à thématiser dans des travaux ultérieurs.

## VII - BIBLIOGRAPHIE


Bettinelli, B., Chambon, L., Dornier, J.-M., Le Borgne, P., Simard, A. et Tufel, E. (2016). La structuration de l'espace aux cycles 1 et 2 de l'école primaire : étude en GS et CP. S'approprier, critiquer et développer une ressource. *Actes du 42e colloque de la COPIRELEM*. France : ARPEME. Repéré à http://arpeme.fr/documents/6612948FF515A56DADF3.pdf

Brousseau, G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Université de Crète, 2000, Réthymnon, Grèce*. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/PDF/Les_proprietes_didactiques_de_la_geometrie_elementaire.pdf

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématique (1998)*. Repéré à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Butlen, D., Mangiante, C. et Masselot, P. (2017). Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des professeurs des écoles en mathématiques. *Recherches en Didactiques, 24*, 25–40.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(2), 197-261.

Charles-Pézard, M., Butlen, D. et Masselot, P. (2011). *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble, France : La pensée Sauvage.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique (2010). Progression des apprentissages - MSN 11 (cycle 1). *Plan d'études romand*. Neuchâtel : CIIP. Repéré à https://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_11/

Eysseric, P., Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2022). *Document-cadre pour la formation des professeurs des écoles à l'enseignement des mathématiques. France :* ARPEME.

GREFEM (2012). Formation didactique articulée à la pratique enseignante : illustrations et conceptualisation. *Actes du colloque international EMF 2015 Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, 348-361.

Guille-Biel Winder C., Lajoie C., Mangiante C., Masselot P., Tempier F. (2020). Former les formateurs à mettre en place un jeu de rôles en formation initiale. *Actes du 46ème colloque COPIRELEM*. 106-120. France : ARPEME.

Guille-Biel Winder C., Lajoie C., Mangiante C., Masselot P., Tempier F. (2022). Priorités et stratégies d'un formateur lors de la mise en œuvre d'un jeu de rôles. *Annales de didactique et de sciences cognitives, volume thématique 1 « Les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques. Une approche par la recherche en didactique », 1*, 55-89.

Guille-Biel Winder, C., Petitfour, E., Girmens, Y. et Masselot, P. (2015). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. *Actes du colloque international EMF 2015 Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* 153-172.

Houdement C. (2013) *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note d'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

IREM de Toulouse (2011). *Autour du repérage des compétences dans les domaines mathématiques en cycles 1 et 2* (vol. 2, géométrie). Toulouse, France : IREM de Toulouse, UTM, IUFM Midi-Pyrénées.

Lajoie, C. (2010). Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM. Dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles* (p.101-113). Sherbrooke, Québec : Éditions du CRP.

Lajoie, C. (2018). Learning to act in-the-moment: Prospective Elementary Teachers' roleplaying on numbers. Dans K. Hino et G. J. Stylianides (dir.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers: An International Perspective* (p.231-244). ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Lajoie, C. (2020). Le jeu de rôles pour former à enseigner les mathématiques : potentialités et limites selon différents points de vue. *Revue de mathématiques pour l'école, 233*, 16-27.

Lajoie, C., Mangiante, C., Masselot, P., Tempier, F. et Winder Guille-Biel, C. (2019). Former à aider un élève en mathématiques. Une étude des potentialités d'un scénario de formation basé sur un jeu de rôles. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *19*, 168–188.

Lajoie, C. et Pallascio, R. (2001). Le jeu de rôles : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement des compétences professionnelles. Dans J. Portugais (dir.), *Actes du colloque GDM 2001*. Montréal : Université de Montréal.

Mangiante, C., Masselot, M., Petitfour, É., Simard, A., Tempier, F. et Winder, C. (2019). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. Dans I. Verscheure , M. Ducrey Monnier, M. Pelissier (dir.). *Enseignement et formation : éclairages de la didactique comparée* (p. 131-142). Toulouse, France : Presses Universitaires du Midi.

Marchand, P., Adihou, A., Lajoie, C., Maheux, J.-F. & Bisson, C. (2012). Les jeux de rôles en formation initiale : Mettre les compétences professionnelles en action dans la formation didactique. *Actes du 27e Congrès de l'Association internationale de pédagogie universitaire*. Repéré à https://oraprdnt.uqtr.uquebec.ca/pls/public/docs/GSC2220/F1162132480_Programme_et_actes_Symposiums_et_Ateliers_Version_finale.pdf

Margolinas, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la Théorie des Situations Didactiques. Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Provence.

Masselot, P. (2004). Une analyse des pratiques quotidiennes en mathématiques d'un enseignant dans sa première classe. Dans M.L. Peltier (dir.) *Dur dur d'enseigner en ZEP* (p.157-179). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Masselot, P. et Zin, I. (2008). Exemple d'une situation de formation pour aborder la structuration de l'espace aux cycles 1 et 2. *Actes du 34e colloque COPIRELEM)*. France : IREM de Champagne-Ardennes. Repéré à http://arpeme.fr/documents/589C3D622D7F9FD0616D.pdf

MER (s.d.). *Moyens d'Enseignement Romands*. Repéré à http://www.ciip-esper.ch/#/discipline/5/1,2/

MEN (2002). *Vers les mathématiques : quel travail en maternelle ?* Scéren-CRDP. Repéré à https://www.arpeme.fr/documents/43AF66FB307D218B4415.pdf

Mili, I. (2022). Quel usage de l'analyse a priori par des enseignants en formation dans le cadre d'activités de structuration de l'espace ? Dans C. Guille-Biel Winder et T Assude. (coord.) *Articulations espace sensible, espace graphique, espace géométrique. Ressources, pratiques et formation*. Londres : Iste Science Publishing.

Mucchielli, A. (1983) *Les jeux de rôles*. Paris : Presses Universitaires de France, Que sais-je ?

Robert, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 209–249.

Rogalski J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(3), 2003, 343-388.

# ANNEXE 1 : L'ACTIVITE « UNE CHAISE POUR DEUX »

## Une chaise pour deux

Activité d'**Introduction**

**Année(s) concernée(s) : 1re-2e**

**Apprentissage visé**

Déterminer sa position ou celle d'un objet selon différents points de repères.

**Enjeu**

Utiliser un vocabulaire spécifique.

**Nombre d'élèves**

Toute la classe partagée en groupes de 2 puis de 3 élèves (en classe ou en salle de sport).

**Durée de l'activité / Fréquence**

Plusieurs séances sont à prévoir.

**Matériel**

- Des chaises à quatre pieds. Il est préférable de ne pas utiliser des chaises à pied central qui empêcherait de se glisser dessous. Il est aussi possible d'utiliser un autre matériel pour remplacer la chaise. En prenant en compte le fait que la chaise par son dossier donne une orientation, ce qui ne serait pas le cas d'un tabouret, ou d'un élément de caisson par exemple;
- un paravent.

**Remise du matériel**

**1er temps** (imitation en temps réel)
Une chaise par élève.

**2e temps** (sculpture sur indications)
Deux chaises pour 3 élèves et un paravent.

**Consigne (ou règle)**

**1er temps** (imitation en temps réel) :

En entrant dans la salle, les élèves, par deux, orientent leur chaise dans la même direction et de façon à ce qu'ils puissent tourner autour sans toucher les autres chaises. *«A tour de rôle vous inventez une statue en utilisant la chaise. L'autre imite la statue et le premier valide ou corrige.»*

**2e temps** (sculpture sur indications)

Trois rôles sont proposés: le modèle, le sculpteur et la sculpture. Au modèle: *«Invente une statue en utilisant la chaise.»*
Au sculpteur: *«Indique à la sculpture ce qu'elle doit faire pour reproduire le modèle.»*
A la sculpture: *«Fais ce que t'indique le sculpteur.»*

**Gestion de l'activité**

**1er temps** (imitation en temps réel)

- Pour des questions d'organisation, il est possible de diviser la classe en deux; le premier groupe réalise l'activité, les élèves du deuxième groupe valident puis les rôles sont inversés. Chaque élève peut de cette façon tester des postures déjà réalisées ou en inventer de nouvelles.

**2e temps** (sculpture sur indications)

- L'organisation de la classe doit permettre de rendre visible le modèle seulement au sculpteur et pas à la sculpture. Un paravent ou un caisson de gymnastique peuvent servir à séparer les deux.
- La validation se fait en enlevant la séparation. Cette mise en place nécessite un peu plus de matériel. Il est possible de modifier la tâche. Par exemple: un seul modèle est caché et invente une statue. Un sculpteur donne des indications au reste des élèves qui réalisent la sculpture individuellement.
- La mise en commun peut porter sur des divergences de point de vue, au sujet de la compréhension d'un terme de vocabulaire spatial. Par exemple, il peut arriver qu'une même consigne puisse être comprise de différentes manières par les élèves.
- De plus, la verbalisation par les élèves est fondamentale pour l'apprentissage du vocabulaire spatial. Il doit être riche et complexe. Il peut s'agir des termes: loin ou près, à côté, autour, en haut, en bas, devant, derrière, sur ou sous, etc. Les termes: entre, au milieu de, au centre, autour,… constituent un vocabulaire plus complexe à utiliser plutôt avec les 2e année.
- Les termes gauche ou droite donnent lieu à des discussions et des découvertes intéressantes, surtout lorsque les élèves se trouvent face à face. Toutefois, il n'est pas attendu en fin de 2e que les élèves connaissent la droite et la gauche.
- Lors des séances suivantes, l'enseignant peut modifier la posture du modèle de façon à introduire des mots nouveaux pour enrichir le vocabulaire spatial. Il peut également proposer de coordonner deux éléments positionnels, par exemple:
  - placer une certaine partie du corps dans une position par rapport à la chaise: *«Posez une main contre le dossier de la chaise et un pied sur la chaise.»*
  - placer un sac de graines ou un foulard par rapport à leur corps ou à la chaise: *«Tournez autour de la chaise avec le sac de graines sur la tête.»*

**Institutionnalisation**

Les termes devant, derrière, entre, sur, sous, en haut, en bas, à côté de, loin, près peuvent être institutionnalisés.

# « L'AIRE DE BAIGNADE », LA MODÉLISATION AU CŒUR D'UNE LESSON STUDY ADAPTÉE

**Sylvain DUTHIL**
Référent Rep[1] Plus, Académie Normandie,

IREM de Rouen

sylvain.duthil@ac-normandie.fr

**Blandine MASSELIN**
Référente Mathématique Académique Normandie

IREM de Rouen

LDAR

blandine-lucie.masselin@ac-normandie.fr

**Résumé**
Une Lesson Study (LS) permet l'observation collective d'une séance conçue par un collectif d'enseignants et menée par l'un d'entre eux (Lewis & Hurd, 2011). La Lesson Study adaptée (Masselin, 2020), notée LSa ensuite, est une variante des LS japonaises adaptée au contexte français de formation (Masselin & Derouet, 2019). Les acteurs d'une LSa sont un collectif composé d'enseignants, de deux formateurs et d'un chercheur. Une des principales adaptations des LS japonaises est l'apport d'une situation par les formateurs, appelés facilitateurs (Masselin & al., 2022). Celle-ci permet alors une seconde adaptation, la possibilité de montrer des vidéos de classe à analyser. Après avoir résolu le problème proposé, l'aire de baignade, les participants de l'atelier construiront collectivement une feuille de route (énoncé, scénario, grille d'intervention de l'enseignant). Des vidéos de classe sur des blocages du travail des élèves alimenteront l'analyse *a priori* en lien avec la modélisation. Comment l'enseignant gère-t-il la pluralité des modèles lors d'un temps d'institutionnalisation ? Quelles interventions de l'enseignant et quelle part de modélisation laisser à la charge des élèves ? D'autres questions pourront émerger selon le souhait des participants de l'atelier en lien avec leur scénario et celui du collectif d'enseignants normands ayant mené une LSa sur la même situation.

[1] Rep : réseau d'éducation prioritaire

# I - INTRODUCTION

L'enseignement de la modélisation est une problématique questionnée par le groupe « Activités » de l'IREM [2] de Rouen. Les participants de l'atelier ont travaillé à partir d'une ressource, *l'aire de baignade*, mise à l'épreuve sur plusieurs LSa dans l'académie de Normandie (Masselin & Derouet, 2019, Hartmann & Masselin, 2020).

Des éléments (extraits de scénario, productions d'élèves, extraits de vidéos de classe, etc…) d'une LSa de liaison Cycle 3 de l'académie de Normandie ont servi d'appui à cette réflexion menée dans l'atelier.

En ouverture d'atelier, nous avons décrit de façon assez générale le principe (fig.1) des LSa (Masselin, 2020 ; Masselin & al., 2022), nous focalisant sur la boucle correspondant à celle vécue par des enseignants. Nous avons également décrit le contexte de développement actuel des LSa en Normandie, liées en particulier à un parcours Lesson Study spécifique ouvert aux Référents Mathématiques de Circonscription du premier degré et inscrit dans le plan mathématique normand depuis 2020.

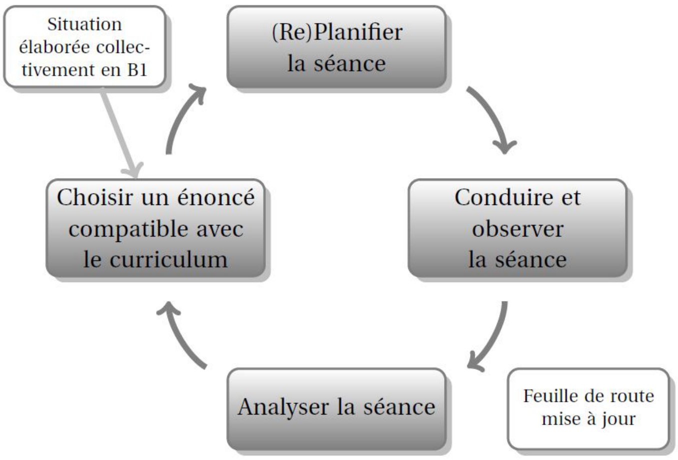



*Figure 1. Boucle 2 du dispositif de Lesson Study adaptée (inspiré de Masselin, 2020 ; Masselin & al., 2022)*

Dans la partie I, nous revenons sur l'objectif de cet atelier, à savoir l'ébauche collective d'un scénario de classe mettant l'accent sur la modélisation autour de la résolution du problème de l'*aire de baignade.* Dans la partir II, nous discutons d'éléments d'un scénario élaboré par un collectif d'enseignants de l'académie de Normandie composé de quatre professeurs des écoles et deux enseignants de mathématiques de collège lors d'une liaison Cycle 3. En partie III, nous revenons sur les potentialités de l'*aire de baignade* sur le plan de la modélisation. Nous exposerons les potentialités repérées par les collectifs normand et de l'atelier avant de présenter d'autres perspectives avant de conclure en partie IV.

[2] IREM : Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques. Le groupe "Activités" à l'initiative du dispositif LSa se réorganise en 2022 en créant un nouveau groupe "Activités - Lesson Study " à l'IREM de Rouen.

## II - L'AIRE DE BAIGNADE

Dans cette section, nous présenterons la situation étudiée lors de l'atelier.

### 1 La situation Aire de baignade

L'énoncé de la situation de l'*aire de baignade* (fig.2) est la version soumise aux enseignants en LSa le premier jour de leur formation. Ces mêmes enseignants, comme il a été précisé lors de l'atelier, doivent s'approprier l'énoncé et ont donc le loisir de le modifier à souhait.

> Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25 m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m$^2$.
> Pourront-ils respecter la loi ?

*Figure 2 : énoncé « Aire de baignade »*

Pour rendre la lecture plus fluide, nous avons fait le choix de présenter dans un tableau des questions et remarques qui ont pu émerger lors de l'atelier et des réponses et commentaires que nous avons faits ou souhaitons faire.

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| L'un des membres a remarqué que rien n'était mentionné quant au nombre de moniteurs encadrant la colonie d'enfants. | Nous avons relié cette première remarque avec un travail qui peut s'approcher d'un travail de modélisation puisque l'élève sera amené à effectuer des premières hypothèses. |
| Un autre membre a immédiatement reconnu l'*aire de baignade* comme une situation qu'il a mené en classe de lycée en tant que problème classique d'optimisation, évoquant alors l'optimisation de l'aire d'un rectangle. | Nous avons indiqué qu'une des richesses de cette ressource était justement de présenter la situation sans orientation préalable vers une forme géométrique particulière de zone de baignade. En ce sens, la situation plus ouverte que dans les manuels scolaires offre un réel travail sur la modélisation. |

### 2 Éléments de résolution du problème par le collectif de l'atelier

Les participants de l'atelier ont eu un temps pour résoudre le problème. La figure 3 synthétise les diverses pistes de résolution de l'*aire de baignade* proposées lors de l'atelier. Cette étape de résolution individuelle est obligatoire pour ensuite pouvoir se lancer dans une véritable analyse *a priori*.

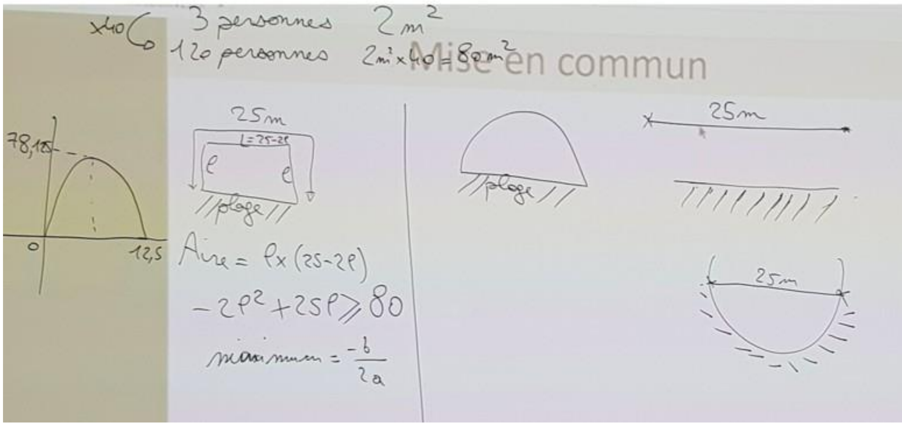



*Figure 3 : Éléments de résolution partagés dans l'atelier*

Plusieurs zones de baignade ont été envisagées, dont des rectangles, des demi-disques ou encore une zone non fermée avec la ligne d'eau située « parallèlement à la plage » (faisant référence à la ligne d'eau comme à la piscine).

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| Un débat a porté sur l'obtention des 80 $m^2$ comme aire minimale à atteindre pour respecter la loi. La proportionnalité doit être considérée ici comme un choix de modèle non explicite auquel fait référence la loi indiquée dans l'énoncé | Le statut du 40 (voir fig.3) a été pointé à cette occasion. Que représente ce nombre ? A-t-il une unité ou est-ce un nombre sans unité ? |
| Un participant a ensuite questionné la forme de la plage : doit-on la considérer comme rectiligne ou pas ? | C'est une hypothèse de modélisation. Si nous ne faisons pas cette hypothèse, nous aurons des difficultés à produire des calculs. A moins que la plage ne soit considérée comme circulaire, avec un rayon fixé, par exemple. D'autres hypothèses seront faites : les formes envisagées seront suffisamment simples, les moniteurs ne seront pas comptés parmi les baigneurs, etc. |
| Le collectif a pointé également que l'absence de dimensions du lac dans l'énoncé pouvait faire obstacle à la modélisation. | Ce potentiel blocage a été relevé en LS lors d'une liaison collège-lycée. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers une vidéo[3] qui a été montrée lors du 1er Séminaire LS en mai 2020. |

Après ces premières considérations liées à la modélisation, le collectif s'est arrêté sur le traitement de la situation en considérant initialement un premier modèle mathématique. La figure 3 (partie de gauche)

[3] La vidéo est consultable sur le site de l''IREM de Rouen à l'adresse suivante : https://irem.univ-rouen.fr/le-seminaire-en-videos#atelier14

expose un modèle fonctionnel choisi pour traiter le cas d'une aire rectangulaire. Sur proposition d'un participant de l'atelier de poser l la largeur du rectangle, l'aire s'exprime comme A(l) = l x (25 – 2l) pour l compris entre 0 et 12,5. La fonction est alors représentée par une parabole (fig. 3) coupant l'axe des abscisses en 0 et 12,5. La représentation graphique admet comme axe de symétrie la droite d'équation l = 6,25. La fonction admet un maximum pour l = 6,25 car la parabole a ses branches « tournées vers le bas » puisque le coefficient de degré deux, ici -2, est négatif. Ce maximum vaut alors 78,125 qui est inférieur à 80. Donc, avec un rectangle, la loi ne peut être respectée si tous veulent se baigner simultanément.

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| Le collectif a envisagé également un demi-disque (partie droite fig. 3) d'une première façon : avec une plage qui est rectiligne et dans ce cas, le rayon R se trouve en résolvant l'équation pi*R=25 | Nous avons évoqué la possibilité d'une plage supposée semi-circulaire et dans ce cas le rayon vaut 12,5 m. Nous précisons que dans le premier cas, l'aire est supérieure à 80 m² (environ 99 m²) et la loi est respectée. |
| Un disque a été évoqué rapidement comme zone de baignade avec l'idée qu'il faudrait atteindre cette zone de baignade au milieu du lac. Des questions de sécurité ont été alors soulevées pour des enfants ne sachant pas nager. | Les aspects de la modélisation sont multiples : l'interprétation de la loi, la forme du lac, la zone de baignade, et également la présence dans l'énoncé du 2 m² (dont diverses représentations sont possibles). |

## 3 Grille d'amorce d'analyse *a priori* : ébauche

Après avoir explicité le rôle de la grille d'amorce d'analyse *a priori*, nous avons exposé ses divers champs (connaissances mathématiques en jeu, dimension vie quotidienne ou modélisation, place(s) dans la(les) progression(s), dimension TICE ou matérielle, démarches possibles des élèves, et difficultés et erreurs possibles). Nous avons précisé lors de l'atelier que la grille d'amorce d'analyse *a priori* permet :

- de creuser l'analyse sur les aspects didactiques et mathématiques de la situation avec les enseignants ;
- d'initier une analyse avec les enseignants selon différents axes.

Le collectif a ensuite proposé une ébauche de grille dont un extrait est présenté en figure 4.

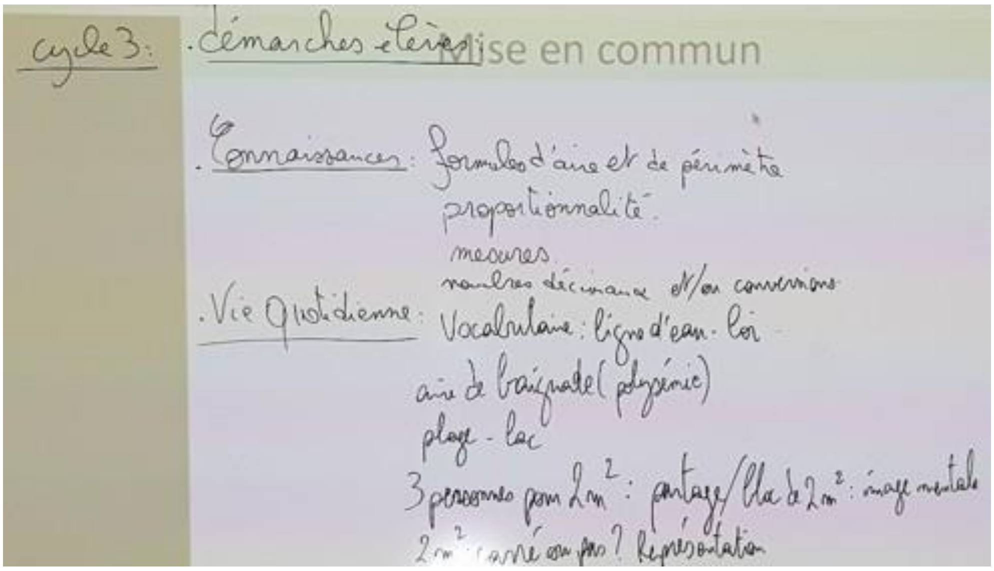



*Figure 4: tableau de mise en commun d'éléments de la grille d'amorce d'analyse a priori*

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
| --- | --- |
| Selon une participante, commencer par envisager de trouver des démarches possibles d'élèves faciliterait ensuite le repérage des connaissances mathématiques en jeu, ce qui peut s'entendre. | Il y a bien entendu des allers-retours entre les items de la grille. Des éléments constitutifs de l'un des items entraînant par effet de rebond d'autres éléments dans d'autres items. |
| Une participante a discuté du fait de ne pouvoir envisager un retour à l'unité dans l'interprétation de la condition 3 personnes pour 2 $m^2$. | Nous avons partagé des retours d'expériences de classes : certains élèves engagent une procédure de type « 1,5 personnes pour 1 $m^2$ » et se retrouvent bloqués ensuite dans leur tentative de représentation de la situation. Cette question soulève des difficultés dans la représentation des nombres mais aussi dans leur utilisation. |

Pour enrichir la grille d'amorce d'analyse *a priori*, la vidéothèque[4] est un outil spécifique de LSa qui vise à améliorer l'analyse didactique de la situation par le collectif d'enseignants. Un extrait-vidéo (décrit dans le tableau 1) de cette vidéothèque[5] est visionné à titre d'exemple.

[4] La vidéothèque rassemble plusieurs extraits vidéos réalisés par les facilitateurs en amont de la LSa. Ces extraits sont codés et classés dans une grille d'intervention du facilitateur. Cette grille permettra de montrer "à la volée" des extraits vidéos afin de faire réagir les enseignants du collectif.

[5]

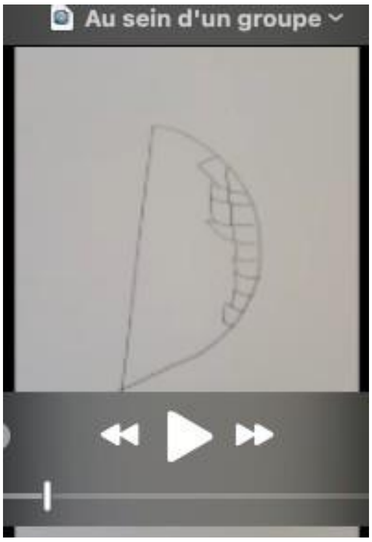
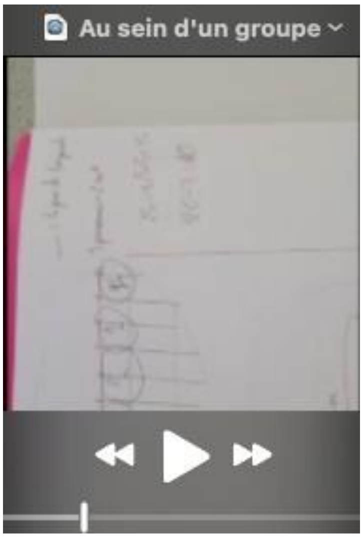
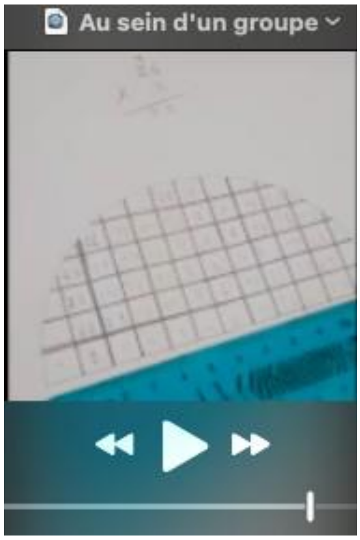
| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Production d'une première élève : elle représente à main levée un demi-disque et débute son remplissage en zones. | Production d'une seconde élève : elle a identifié la nécessité de 40 zones de 2 m² et déclare qu'il faut faire des carrés de 2 m sur 2 m au groupe. | Production d'un troisième élève : il trace un demi-disque de rayon quelconque et le remplit avec des carrés tracés à la règle qu'il dénombre ensuite oralement. |

*Tableau 1 : Extraits de la vidéo AuSeinDunGroupe.mp4 décrite dans le tableau 2*

Le visionnage de cet extrait a fait réagir les participants de l'atelier.

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| Les participants de l'atelier ont soulevé la question des supports de travail pour les élèves : Quel type de papier ? Quadrillé ou non ? Si oui, quel type de quadrillage ?<br><br>La question de l'échelle (1 cm pour 1 m ou une autre échelle) a émergé également à l'issue du visionnage de la vidéo de classe. | Les intervenants ont alors partagé un point de vigilance lié à la rubrique « Matériel » qui doit être pensée pas seulement dans sa nature mais aussi dans son exploitation ou plutôt dans ses multiples exploitations. L'exemple d'un quadrillage réalisé avec de la laine, matériel déformable (voir annexe 3) a réinterrogé des choix qui avaient été faits lors des LSa dans l'académie de Normandie. Plus largement, le matériel est à préciser dans son type et son temps d'usage, au profit de quelle phase et de son(ses) détenteur(s). Est-ce l'enseignant qui manipule sur une courte période du matériel pour montrer des zones de baignades variées ou l'élève qui manipule lui-même et pour quelle finalité ? |

Le travail de cette phase de l'atelier s'est achevé par le partage d'un scénario vécu où l'enseignant-expérimentateur, lors d'une phase de bilan intermédiaire, exposait aux élèves différentes zones de baignade avec la grande règle du tableau et une corde. Cela permettait d'illustrer cette question prégnante du matériel.

## III - FEUILLE DE ROUTE : ÉBAUCHE ET COMPARAISON

### 1 Ébauche d'une feuille de route dans l'atelier

Notre discussion s'est amorcée sur les objectifs de la séance, sans envisager précisément, faute de temps, les phases du scénario comme c'est le cas en LSa. Nous avons mentionné le fait que prévoir la structuration du tableau dans le dispositif est essentiel et permet de recentrer le collectif sur des objectifs de séance.

Pour la partie *modus operandi* (voir annexe 1), en LSa, nous avons indiqué que le scénario comprendra obligatoirement l'intégration d'une phase de travail en groupe de 3 ou 4 élèves afin de faciliter l'observation du travail des élèves ensuite par les enseignants observateurs. Puisqu'une LSa est une formation d'enseignants, cela permet aussi de travailler la gestion du travail en groupe en résolution de problème. Nous insistons sur un point de vigilance : ne pas perdre trop de temps à discuter des types de groupes (hétérogènes ou pas). La focale privilégiée est ici celle des analyses didactique et mathématique de la leçon.

Dans l'atelier, nous avons évoqué les variables didactiques telles que la longueur de la ligne d'eau ou le nombre d'enfants ou encore les éléments de la loi. Toutes ces variables sont, rappelons-le, susceptibles d'être modifiées par le collectif d'enseignants.

Le collectif de l'atelier a décidé de situer leur préparation de séance au niveau CM1. Il a fixé comme objectifs de séance de travailler les notions de périmètre et d'aire et la proportionnalité. Il a imaginé une intervention de l'enseignant et discuté de ce qu'est un déclencheur d'intervention à partir des deux exemples suivants :

| **Déclencheur d'intervention** | **Descriptif de vidéo** | **Effet attendu** |
|---|---|---|
| Le collectif n'imagine pas une zone de baignade semi-circulaire | AuSeinDunGroupe.mp4<br>4 élèves ont choisi une zone de baignade semi-circulaire. Une première élève fait un dessin à main levée, y ajoute des zones carrées.<br>Une seconde élève dit qu'il faut 40 carrés de 2 m sur 2 m.<br>Un troisième fait une figure aux instruments avec un quadrillage, mais sans échelle. | Prendre conscience de l'intérêt d'un support quadrillé proposé par l'enseignant.<br>Prendre conscience que les élèves pour représenter 2 m$^2$ vont tenter de réaliser des carrés de 2 m de côté.<br>Prendre conscience qu'une échelle n'est pas innée. |
| Le collectif pense que le m$^2$ est acquis, il n'envisage pas de créer une image mentale d'1 m$^2$. | Tissu.mp4<br>Un élève a calculé 25 m x 40=1000m ; il positionne les enfants le long de sa ligne d'eau. Il demande au professeur si 1000 m vaut 1 m$^2$.<br>Le professeur manipule un tissu (1 m$^2$, puis 2 m$^2$, puis 4 m$^2$). L'élève | Interroger sur l'impact de l'intervention de l'enseignant.<br>Faire anticiper le blocage et imaginer une alternative. |

| | | |
|---|---|---|
| | représente alors la scène mais l'intervention du professeur n'a pas l'effet attendu. | |

*Tableau 2 : Extrait grille d'intervention du formateur, LSa « Aire de baignade », IREM de Rouen*

Ce temps de l'atelier a permis un partage d'outils de facilitateurs spécifiques aux LSa : la vidéothèque et une grille d'intervention du formateur. D'autres extraits de la vidéothèque n'ont pas été présentés, faute de temps, mais peuvent permettre d'interroger la dialectique aire-longueur autour de la situation.

## 2 Partage d'éléments d'une LSa réalisée dans l'académie de Normandie

Nous avons précisé aux participants le contexte des données partagées. Il s'agit de données issues d'une LSa de liaison Cycle 3 avec comme problématique initiale des difficultés liées à l'enseignement des grandeurs. Six professeurs des écoles et deux enseignantes de collège ont participé à cette LSa cette année en mars, avril et juin.

### *2.1 Éléments partagés de la feuille de route*

L'énoncé retenu par le collectif est identique à celui qui leur a été proposé (fig. 1). Les objectifs du collectif pour la séance de classe étaient « chercher un problème avec des grandeurs variées, chercher avec une notion de périmètre, chercher avec une notion d'aire et la proportionnalité. »

Concernant le matériel, le collectif avait prévu pour chaque table du papier blanc et quadrillé (petits carreaux et grands carreaux), une bobine de fil ou de la laine et des ciseaux. En réalité, le jour de la leçon, une enseignante a apporté uniquement des pelotes de laine (deux posées sur chaque table de groupe). La photo de l'annexe 3 partagée dans l'atelier montre un usage de la laine en séance qui a surpris le collectif d'enseignants. Ces derniers imaginaient que la laine pourrait aider à matérialiser la ligne d'eau mais ne s'attendaient pas à ce qu'un élève s'en empare pour matérialiser la zone de baignade.

Le scénario préparé contenait quatre phases (voir annexe 1), il a été partagé dans l'atelier avec des éléments en lien avec la modélisation mis en évidence. Dans la phase 3, est mentionnée : « définition d'une ligne d'eau, prise en charge de la modélisation de la plage (bord de l'eau) et en phase 5 de bilan :

- montrer différents rectangles avec les 25 m et des aires différentes ;
- écrire la définition d'un m², de deux m² . Faire dessiner une surface d'aire un cm² et deux surfaces différentes de deux cm²

Nous avons ensuite partagé des photos du tableau en fin de phase 3 qui correspond au bilan intermédiaire. Nous soulignons que le lac est représenté par un disque, la plage a été précisée par trois points sur le cercle, l'enseignante indiquant l'endroit de la plage. Puis l'enseignante a représenté (à droite du tableau) une aire de baignade rectangulaire en pointant (avec trois croix, fig. 5 à droite) l'endroit de la plage (rendue cette fois rectiligne).

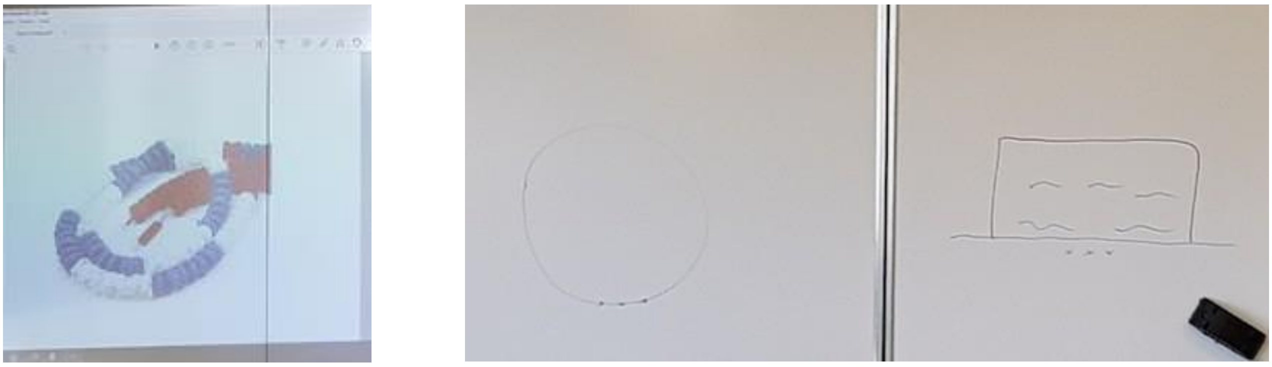


*Figure 5 : photo de ligne d'eau projetée et état du tableau en fin de phase 3 du scénario*

Les photos en fig.6 illustrent la fin du second bilan (phase 5). Celle de gauche montre la trace finale au tableau et celle de droite témoigne de la présentation finale d'un morceau de tissu de deux carrés de 1 m de côté accolés à toute la classe.

*Figure 6 : photo du tableau et manipulation du tissus de $2m^2$ en fin de phase 5*

### 2.2 Réflexions sur les choix faits dans l'académie de Normandie

La dernière journée de formation avec les enseignants ayant participé à cette LSa nous permet de revenir sur les choix faits par le collectif normand. Dans cet atelier, nous avons pu les évoquer.

Le vocabulaire « ligne d'eau » est une difficulté du fait de son double sens : objet et zone. Le collège des élèves de la LS est situé à proximité d'une piscine. Pour un certain nombre de ces élèves, la ligne d'eau correspond au couloir de baignade. Cette réflexion a amené le collectif d'enseignants à faire les deux choix suivants : projeter une image de la ligne avec des flotteurs enroulés et faire verbaliser que la ligne d'eau sert à délimiter la zone de baignade. Le collectif a également choisi de déposer de la laine sur chaque table afin d'aider à matérialiser cette ligne d'eau. Cependant les élèves n'y ont pas spécialement prêté attention ou ne l'ont pas utilisé tel qu'imaginé par les enseignants.

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| Une idée partagée est que les élèves doivent être guidé dans les manipulations et que s'ils se voient suggérer du matériel, il est judicieux de prévoir en amont de les accompagner dans son utilisation. | La question du guidage est délicate, mais la laine a réservé des surprises au collectif d'enseignants. Le manque de rigidité d'un bout de laine a rendu sa manipulation difficile. Selon la tension exercée sur un bout de laine, sa longueur peut varier. En conséquence, on peut le penser, aucun élève n'a cherché à couper des morceaux de 25 cm de long. |

### *2.3 Extraits d'apports autour de la modélisation par les facilitateurs*

Nous avons ensuite exposé des éléments de recherche sur la modélisation apportée par les facilitateurs lors de la troisième journée de formation. Le principal apport est le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007). Pour une première appropriation de ce cycle (fig.7) il est demandé aux enseignants de mettre en relation une étape du cycle avec des productions d'élèves.

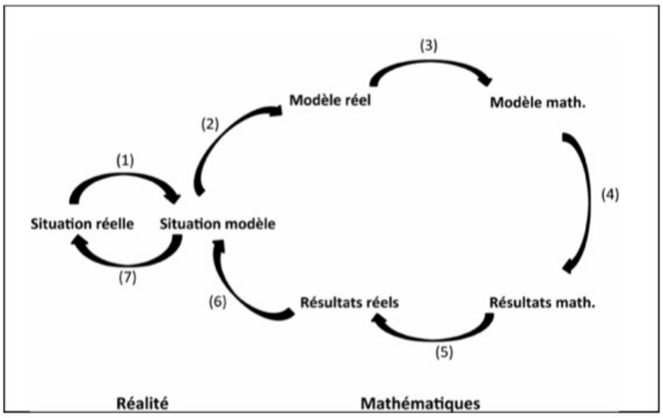
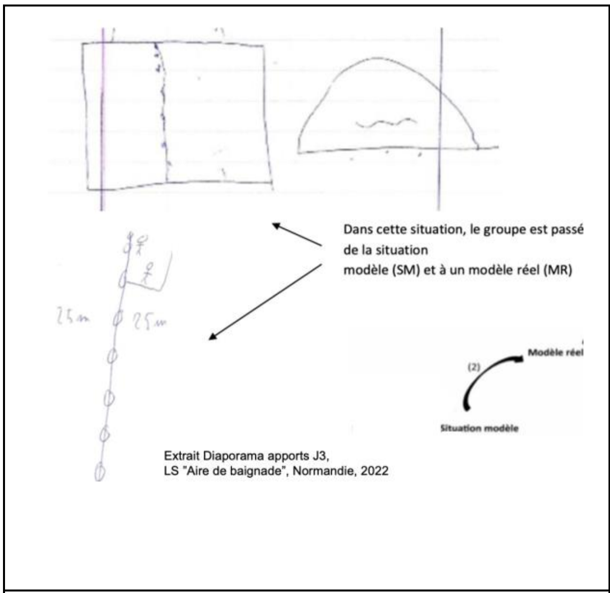
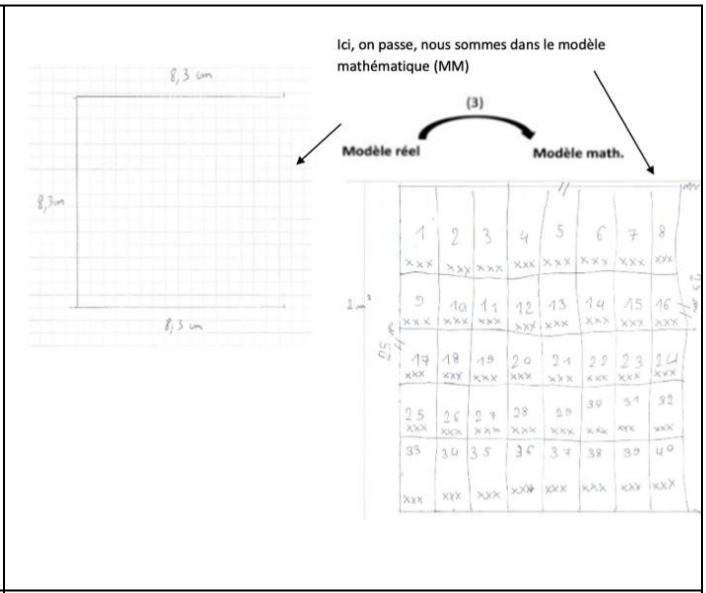
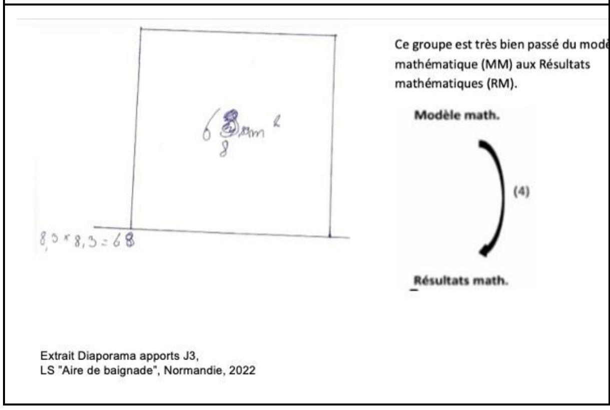



*Figure 7 : Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) étapes traduites par Derouet.*

Le tableau 3 présente un échantillon de ces apports didactiques insérés en LSa après avoir présenté le cycle de modélisation aux enseignants normands.



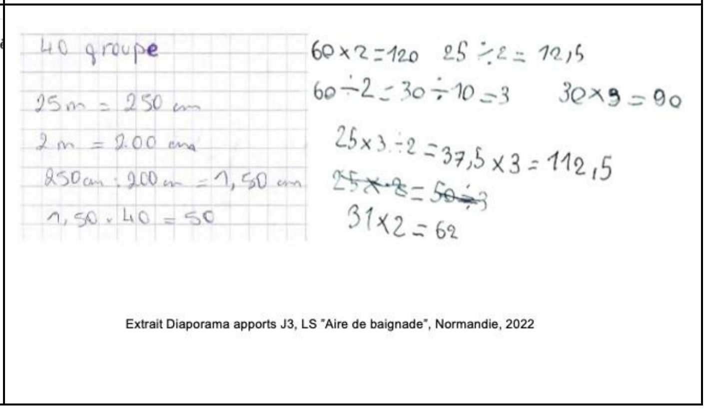




*Tableau 3 : Extrait diaporama d'apports didactiques en lien avec la modélisation*

Les trois premières images ont été support d'identification par les enseignants d'étapes du cycle de modélisation, les aidant à mieux appréhender les enjeux de la modélisation.

La quatrième image montre qu'il faut prêter attention à des démarches qui mettent en avant le calcul sans que ceux-ci n'aient de sens concret. C'est un point important soulevé en LSa qui permet de réinterroger la pratique enseignante sur les attentes concernant la résolution de problème (pas seulement faire un calcul et une phrase réponse, mais une explication de procédure).

## IV - POTENTIALITES DE L'*AIRE DE BAIGNADE* SUR LE PLAN DE LA MODELISATION.

### 1 Questions autour de la modélisation

Nous sommes revenus sur deux questions initiales proposées dans l'atelier. La première était la suivante : *Comment l'enseignant gère-t-il la pluralité des modèles lors du temps d'institutionnalisation ?*

Sur cette question, l'atelier a collectivement réfléchi à ce que serait un scénario mettant l'accent sur la modélisation, relevant au passage que le scénario imaginé dans l'académie de Normandie s'était concentré sur le cas de zones de baignades rectangulaires. Les participants de l'atelier ont imaginé une première séance s'achevant sur l'exposition d'une variété de modèles géométriques possibles. Ensuite une autre séance pourrait se concentrer sur un travail autour de zones de baignade rectangulaires par exemple. Si la contrainte de temps ne le permet pas, une alternative consisterait à traiter du demi-disque sur une séance ultérieure avec une estimation d'aire sans nécessité de formule connue.

La seconde question était : *Quelles interventions de l'enseignant et quelle part de modélisation laissée à la charge des élèves ?* Les participants de l'atelier complètent une grille d'intervention de l'enseignant de la façon suivante :

| Phase | Déclencheur d'intervention | Interventions | Effets attendus, buts |
|---|---|---|---|
| 2-3 | Un ou des élèves ont construit un seul rectangle, et n'ont pas 80 m$^2$. Ils concluent que ça ne marche pas. | Tu ne peux en faire un deuxième pour être sûr ?<br>Pourquoi tu as tracé ça ?<br>On montre un autre rectangle préparé par l'enseignant ou d'un autre élève | |

Les participants ont ensuite pris connaissance de certaines des interventions anticipées par le collectif des enseignants de l'académie de Normandie (tableau 3).

| Phase | Déclencheur d'intervention | Intervention | Effets attendus, buts |
|---|---|---|---|
| 2-3 | Qu'est-ce qu'une ligne d'eau ? | Photo papier à montrer au groupe<br>Projeter une photo de ligne d'eau | |
| 2-3 | Qu'est-ce que le m avec un 2 dessus ? | | |
| 2 | L'élève réalise une figure fermée | Pas d'intervention, on laisse poursuivre,<br>Puis on utilise la ficelle pour montrer la ligne d'eau sur la table | Faire reconsidérer la zone fermée |
| 2 | Le groupe demande "Qu'est-ce qu'une aire de baignade ?" | | |
| 2 | L'élève reste sur la notion de périmètre sans considérer l'aire : 3 enfants pour 2 m | Présenter un tissu de 2 m sur 1m qu'on peut plier en deux | Rendre visible ce qu'est 1 m$^2$ afin de passer de la longueur à l'aire |

*Tableau 3 : Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant, LS « Aire de baignade », Normandie, 2022*

| *Questions / remarques de l'atelier* | *Réponses /commentaires* |
|---|---|
| Certains membres ont questionné les cases vides de cette grille d'interventions | Nous avons précisé que cette grille était celle réalisée en amont de la séance de classe, et qu'elle avait été complétée grâce à l'analyse collective *a* |

| | |
|---|---|
| | *posteriori*. En cela, des difficultés d'élèves ont été mieux appréhendées au fil du dispositif. |

## 2 Perspectives autour de la modélisation

Pour aller plus loin, nous partageons une réflexion du groupe « Activités - Lesson Study » qui, développe des LSa et avait initialement pour problématique l'enseignement de la modélisation dès sa participation à la co-écriture du document Ressource *Mathématiques et Quotidien* (MEN-DGESCO, 2016). Nous proposons des situations de modélisation et partageons des temps de rencontre avec des chercheurs en didactique, ce qui permet de partager des avancées de la recherche sur la modélisation. Ayant eu connaissance des concepts de mathématisation horizontale et verticale, de « fragments de réalité » de Yvain-Prébiski (2018), nous avons porté un nouveau regard sur l'enseignement des situations de modélisation en LSa. L'intérêt partagé est qu'une telle analyse didactique, par exemple de « l'aire de baignade », *a*vec la double focale des mathématisations horizontale et verticale, semble permettre de mieux saisir les enjeux de la modélisation par les enseignants.

Une perspective de poursuite de l'atelier serait de s'intéresser à ces fragments de réalité décrits par le cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2018) présenté en fig. 8 et de regarder l'*aire de baignade* sous la double focale de la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale qui sont distinctes.

Pour la mathématisation horizontale, il s'agit d'identifier ou de décrire les mathématiques spécifiques dans un contexte général, de schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes façons, de découvrir des relations, des régularités, ou encore de transférer un problème du monde réel à un problème mathématique. La mathématisation verticale comprend la formation d'un modèle mathématique (ou de plusieurs combinés entre eux) sa généralisation, son ajustement.

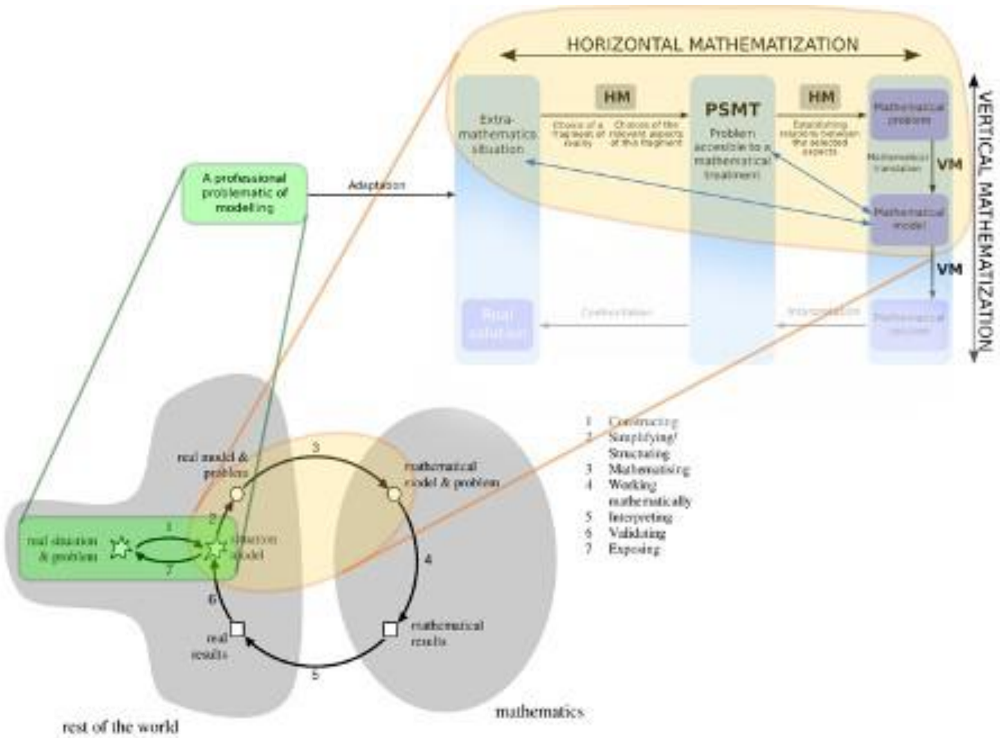


*Figure 8 : Cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2018)*

Derouet et Yvain-Prébiski (accepté) ont dégagé des fragments de réalité de cette situation à considérer comme la ligne d'eau, la forme du lac... Nous avons resitué le cycle de Blum et Leiss (fig.6) présenté précédemment dans celui augmenté (fig. 8) d'Yvain-Prébiski (2018) en détaillant les éléments de la mathématisation horizontale (fig.9).

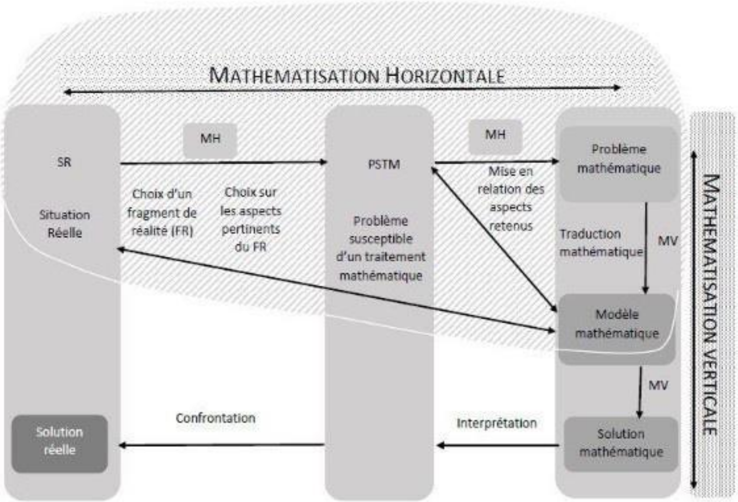



*Figure 9 : Détail de la mathématisation horizontale, cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2021)*

Un projet de recherche LDAR-IREM de Rouen sur les « LSa et dynamiques de développement professionnel » s'intéresse en particulier à la place de la modélisation dans la formation des facilitateurs. Deux communications récentes à ETM7 (Derouet &Yvain-Prébiski, à paraître) et à ICTMA20 (Yvain-Prébiski & Masselin, accepté) s'appuient sur la situation *aire de baignade*. Nous renvoyons le lecteur aux premiers résultats de recherche dans les actes à paraître car ils permettent de creuser l'analyse présentée.

## V - CONCLUSION SUR LES QUESTIONS

À travers le travail de l'atelier, les participants ont découvert (ou redécouvert pour certains) la situation de l'*aire de baignade.* Ils ont identifié collectivement des potentialités en termes de modélisation et de formation autour de la modélisation. L'ébauche d'élaboration collective d'une feuille de route puis sa confrontation à celle issue d'un collectif normand ont permis de questionner les choix réalisés. En particulier, la question du scénario et de modèles possibles et la nature d'interventions de l'enseignant quant à une pluralité de modèles ont été soulevées.

L'atelier a également permis aux participants de découvrir le dispositif LSa et quelques-uns de ses outils spécifiques et différents rôles de facilitateurs en LSa (Masselin & al., 2022). Nous avons par exemple partagé des rôles identifiés dans la première boucle :

- celui d'analyste didactique-mathématique qui consiste à analyser le déroulement du travail des élèves / de l'enseignant-expérimentateur à partir des données recueillies en classe.
- celui de passeur de connaissances didactiques.

Le problème de l'*aire de baignade* a été repéré comme un problème atypique selon la classification des problèmes par Houdement (2017).

Un participant de l'atelier a également posé la question suivante : « *Qu'institutionnalise-t-on en LSa par exemple sur l'aire de baignade ?* ».

Nous avons répondu à deux niveaux.

S'agissant du collectif des enseignants de l'académie de Normandie dont nous avons partagé des éléments dans l'atelier, le troisième jour, des apports ont eu lieu sur la dialectique entre grandeurs (aire-longueur), mais également sur des emprunts issus des deux guides fondamentaux (MENJS, 2022) pour enseigner « La résolution de problèmes mathématiques au collège » et « La résolution de problèmes au cours moyen ». Le collectif a rapproché le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) du modèle en quatre phases présent dans le guide du cours moyen (fig.10).

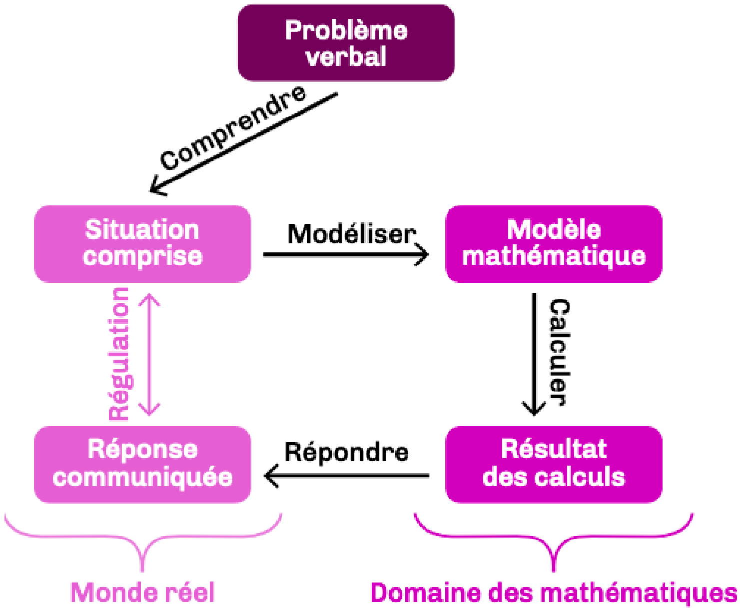



*Figure 10 : Extrait du guide sur la résolution des problèmes au cours moyen (fig 4, p.44)*

Nous avons mentionné que les enseignants de Cycle 3 ont plus largement partagé collectivement d'autres ressources qu'ils utilisent dans leurs propres classes ($CM_1$, $CM_2$ et $6^e$). Ils ont également questionné leur propre progression sur les aires ou périmètres lors du troisième jour de la formation. Ils ont croisé, mutualisé des situations à insérer sur ces concepts avant de faire résoudre l'*aire de baignade*.

Concernant une LSa sur l'*aire de baignade* réalisée cette fois avec des Référents Mathématiques de Circonscription, ces derniers ont pris en charge la construction d'apports didactiques post-leçon de recherche pour des futures LSa en constellations. Ces apports seront partagés dans un cahier de LS co-écrit sur l'*aire de baignade* dont la parution est prévue à l'automne 2022.

L'atelier s'est achevé sur des échanges autour de deux ressources en lien avec les LSa :

- l'ouvrage « Ingénierie de formation de mathématiques de l'école au lycée » (Masselin, 2020) qui contient un vadémécum avec des outils spécifiques (vidéothèque, diaporama d'apports mathématiques et didactiques) ainsi que quatre premiers cahiers de LS ;
- le site de l'IREM de Rouen précise une bibliographie, des vidéos du premier séminaire LS[6] du 21 mai 2021 et les cahiers de LS[7] sur d'autres situations en lien avec la modélisation.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

Blum, W & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? The example « Sugarloaf » and the DISUM project, In *C. Haines, P.L. Galbraith, W. Blum S. Khan (Dir.), Mathematical modelling (ICTMA12)-Education, engineering and economics* (pp..222-231), Horwood.

Derouet, C. & Yvain-Prébiski, S., (à paraitre). Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse. *In Pré-actes du 7e Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique, Strasbourg, juin 2022.*

Hartmann, F., & Masselin, B. (2020). Quand un collectif d'enseignants s'empare d'une situation issue du quotidien, retour sur une lesson study adaptée, au cycle 3 sur la situation de la caisse, In COPIRELEM (Ed.), *Actes du 45e colloque international des formateurs de professeurs des écoles, 2019, Lausanne (pp.121-128).* http://www.arpeme.fr/documents/Actes-Lausanne-e.pdf

Houdement, C. (2017), Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100,* 59-78.

Lewis, C. & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*, Porthmouth, Heinemann.

Masselin, B. (2020). *Ingénierie de formation en Mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies*, Ed. Presses Universitaires de Rouen et du Havre, Rouen. http://purh.univ-rouen.fr/node/1309

Masselin, B., & Derouet, C. (2019). Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième, In M. Abboud (Ed.), *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines. Actes du Colloque EMF 2018* (pp. 198-207). Paris : Éditions de l'IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf

Masselin B., Hartmann, F., & Artigue, M., (2022). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de Lesson Study adapté, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Volume thématique numéro 1, 2022.*

MEN-DGESCO, (2016). « Mathématiques et quotidien », *Document Ressources Transversales.* https://eduscol.education.fr/document/17206

MENJS, (2022). La résolution de problèmes mathématiques au collège. Les guides fondamentaux pour enseigner. Eduscol https://eduscol.education.fr/document/13132

[6] Lien IREM de Rouen https://irem.univ-rouen.fr/presentationactivites

[7] Ensemble des cahiers de LS disponibles et à paraître, site de IREM de Rouen https://irem.univ-rouen.fr/cahiers-de-ls

MENJS, (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Les guides fondamentaux pour enseigner. Eduscol. https://eduscol.education.fr/document/32206

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1

Yvain-Prébiski, S., & Masselin, B. (accepté). Modeling from an extra-mathematical situation: from teacher training to implementation at the transition from primary school to secondary school, within lesson study adapted in French context. *ICTMA20, University of Wuerzburg, Germany, October 2022.*

## VII - ANNEXE 1 : FEUILLE DE ROUTE NORMANDE « AIRE DE BAIGNADE », EXTRAITS

### Objectifs

Chercher un problème avec des grandeurs variées. Chercher avec une notion de périmètre, chercher avec la notion d'aire. Proportionnalité.

### Modus Operandi

Travail en groupe de 3-4. Six groupes hétérogènes avec un moteur par groupe.
Prévoir du matériel sur chaque table : papier blanc, quadrillé
Petits et grands carreaux, une bobine de fil ou de la laine et des ciseaux.
On ne retient pas l'idée d'une table buffet pour éviter les déplacements.

### Scénario

**Phase 1 (2 minutes)** : **introduction de la séance**
Présentation globale de la séance.
Distribution de l'énoncé. P : « Lire l'énoncé silencieusement-individuellement puis vous pourrez rechercher en groupe une réponse à cet exercice avec ou sans le matériel sur la table. La calculatrice est autorisée. Chaque groupe se mettra d'accord et devra rendre une feuille avec vos traces de recherche même si vous pensez ne pas avoir trouvé la solution. »
**Phase 2 (10 minutes) : travail de groupe**
Recherche avec le matériel mis à disposition
**Phase 3 (...minutes) : bilan collectif**
Répondre aux questions récoltées lors de la phase 2 de manière collective.
Définition d'une ligne d'eau, prise en charge de la modélisation de la plage (bord de l'eau)
Si la réponse sur la proportionnalité est trouvée, on la partage à la classe afin de les lancer sur la recherche de la forme.
**Phase 4 (30 minutes) : retour en travail de groupe**
A la fin on récupère le produit de groupe ( à rappeler régulièrement dans la séance)
**Pause : 15 min de récréation**
**Phase 5 (...minutes) : bilan**
Montrer différents rectangles avec les 25 m et des aires différentes
Écrire la définition de ce qu'est un mètre carré, deux mètres carrés, Faire dessiner un centimètre carré et deux surfaces différentes de 2 $cm^2$.
À périmètre égal, aires différentes

## VIII - ANNEXE 2 : REALISATION D'UN ELEVE DANS UN GROUPE

Dans un groupe observé en LSa en Normandie, un élève a découpé de la laine rose en plusieurs morceaux, ce qui n'était pas attendu par le collectif d'enseignants. Ce collectif avait projeté qu'un bout de laine matérialiserait la ligne d'eau de 25 m et non pas l'aire de baignade.

L'élève a réalisé un « quadrillage en laine » de 5 sur 8 zones supposées être carrées, afin d'obtenir 40 carrés dans lesquels il a ensuite placé trois minuscules morceaux de papier pour matérialiser trois baigneurs. La laine jaune, initialement absente de sa réalisation a été ajoutée pour matérialiser la ligne d'eau. Une intervention du chercheur durant la leçon de recherche a incité les trois autres élèves du groupe à réaliser une représentation de ce « maillage » mou.

Un obstacle non anticipé a été de choisir une échelle car une élève proposait 15 cm pour représenter 25 m de ligne d'eau. L'échelle 1 cm sur la feuille pour 1 m en réalité n'allait pas de soi dans le groupe d'élèves concerné.

## IX - ANNEXE 3 : FEUILLE DE ROUTE DE L'ATELIER « AIRE DE BAIGNADE »

Ceci est le travail réalisé autour de la feuille de route dans l'atelier. Nous précisons qu'ordinairement cette élaboration collective nécessite a minima trois heures de travail et que l'atelier n'y était pas entièrement consacré. Y figurent des choix barrés (en particulier concernant le niveau de classe) comme en LSa où nous laissons des traces de propositions émanant du collectif mais n'ayant pas obtenu l'adhésion totale. Des idées sont momentanément écartées, parfois par un vote au sein du collectif, pour le temps de la leçon de recherche. Les laisser visibles sur le projet collectif permet aux enseignants de reconsidérer ces choix autres pour les expérimentations dans leur propre classe.

# Feuille de route de l'enseignant expérimentateur

*Cette feuille de route sera complétée au fur et à mesure que les documents (énoncé, bilan, etc) arriveront.*

## Table des matières



## Énoncé

**Aire de baignade**

Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25 m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m².

Pourront-ils respecter la loi ?

## **Objectifs :** En cycle 3 : ~~fin de~~ CM2 ? ~~Fin de~~ CM1 ?

Modélisation – problème de recherche – problème à plusieurs étapes/atypique

Dénouer les deux grandeurs mises en jeu

## Modus operandi

## Scénario

**Phase 1 (... minutes) :** Description

**Phase 2 (... minutes) :** Description

### Grille d'intervention de l'enseignant

| Phases | Déclencheur d'intervention | Interventions | Effets attendus, buts |
|---|---|---|---|
| | Les élèves ont construit un rectangle, on n'a pas 80 m², ça ne marche pas. | Tu ne peux pas en faire un deuxième pour être sûr ?<br>Pourquoi tu as tracé ça ?<br>On montre un autre rectangle du prof ou d'un autre élève. | |
| | | | |
| | | | |

Ceci est le travail réalisé autour de la feuille de route dans l'atelier. Nous précisons qu'ordinairement cette élaboration collective nécessite a minima trois heures de travail et que l'atelier n'y était pas entièrement consacré. Y figurent des choix barrés (en particulier concernant le niveau de classe) comme en LSa où nous laissons des traces de propositions émanant du collectif mais n'ayant pas obtenu l'adhésion totale. Des idées sont momentanément écartées, parfois par un vote au sein du collectif, pour le temps de la leçon de recherche. Les laisser visibles sur le projet collectif permet aux enseignants de reconsidérer ces choix autres pour les expérimentations dans leur propre classe.

# « LA VACHE ET LE PAYSAN » : UNE SITUATION DE FORMATION SUR LA RESOLUTION DE PROBLEME

**Edith PETITFOUR**
MCF, INSPE Normandie Rouen - Le Havre, COPIRELEM
Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France
edith.petitfour@univ-rouen.fr

**Frédérick TEMPIER**
MCF, INSPE de Versailles, COPIRELEM
CY Cergy Paris Université, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, Normandie Univ., Univ. Lille, LDAR, 95000 Cergy, France
frederick.tempier@cyu.fr

**Catherine THOMAS**
Prag, INSPE de Strasbourg, COPIRELEM
Université de Strasbourg
catherine.thomas@inspe.unistra.fr

**Claire GUILLE-BIEL WINDER**
MCF, INSPE Université d'Aix-Marseille, COPIRELEM
ADEF, UR 4671
claire.winder@univ-amu.fr

**Frédéric METIN**
Prag, INSPE de Dijon, COPIRELEM, IREM de Dijon
frederic.metin01@u-bourgogne.fr

**Résumé**
Cet atelier s'inscrit dans la réflexion menée par la COPIRELEM à propos de la conception d'outils pour la formation des professeurs des écoles à l'enseignement des mathématiques. Il étudie une situation de formation sur la résolution de problèmes, du point de vue de la modélisation, des représentations et de l'argumentation en mathématiques, en revisitant la situation de formation « La vache et le paysan », introduite par Péault (1991).

## INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit dans la réflexion menée par la COPIRELEM, depuis sa création, à propos de la conception d'outils pour le formateur. De nombreuses situations de formation ont déjà été produites par la COPIRELEM, mais nous avons constaté que les conditions actuelles de formation initiale et continue conduisent les formateurs à en faire des adaptations, et que les clés pour éviter de les dénaturer ne sont pas toujours suffisamment explicitées dans les documents proposés. Nous avons donc entrepris, depuis plusieurs années un travail de reprise de certaines situations et de conception de situations inédites (Guille-Biel Winder, Mangiante, Masselot, Petitfour, Simard, Tempier, 2019 ; Celi, Guille-Biel Winder, Mangiante, Masselot, Petitfour, Simard, Tempier, 2022). L'atelier vise à réinterroger une situation de formation sur la résolution de problèmes diffusée en France depuis les années 90 (Péault, 1991 ; Kuzniak, 1993), intitulée « La vache et le paysan » du fait du contexte du problème en jeu. Kuzniak (1993) indique s'être appuyé sur une situation proposée par Zaleska (1973), dans un contexte où elle étudie la notion d'influence dans les petits groupes. Cette dernière attribue la paternité du problème à deux chercheurs américains, Maier et Solem, dans une publication datant de 1952.

# I - PRESENTATION DE LA SITUATION DE DEPART

## 1 Description du dispositif

La situation de formation (Péault, 1991) est construite autour de la résolution d'un problème arithmétique d'apparence simple, mais réputé provoquer une diversité de réponses au sein d'un groupe. Elle est structurée en trois temps : résolution individuelle du problème ; discussion collective des différentes solutions proposées selon un protocole précis composé de différentes étapes dont l'objectif est de parvenir à un consensus ; prise de recul en analysant la situation vécue.

Nous avons expérimenté ce dispositif en formation initiale et continue, à partir de la version du problème de Péault (1991) que nous avons actualisée en transformant les milliers de francs en centaines d'euros (figure 1).

| |
|---|
| Un paysan va au marché. Il achète une vache 500 euros. Il la revend 600 euros. Se ravisant, il la rachète 700 euros. Il la revend de nouveau 800 euros. A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? Ou bien a-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas, combien ? Ou encore n'a-t-il rien gagné ni perdu ? |

*Figure 1. Problème « La vache et le paysan »*

## 2 Analyse *a priori* du problème

Le problème « La vache et le paysan » (figure 1) est un problème du champ additif au sens de Vergnaud (1981) : il se résout avec seulement des additions et des soustractions. Les valeurs numériques choisies ne conduisent à aucune difficulté de calcul.

Ce problème est un problème complexe au sens de Houdement (2018), c'est-à-dire qu'il est constitué de problèmes basiques sous-jacents, cachés, dont la mise en évidence est laissée à la charge du solveur. Nous rappelons que, pour Houdement, les problèmes basiques sont des problèmes arithmétiques appelés à être reconnus et résolus quasi automatiquement : ils correspondent peu ou prou aux problèmes à une étape dont Vergnaud (1981) a dégagé les différentes catégories dans les champs additifs et multiplicatifs. Chaque problème basique sous-jacent, donc caché, d'un problème complexe est dégagé en connectant deux données entre elles. La résolution de ce problème basique produit une nouvelle donnée. Qualifier cette solution permet de la connecter avec une autre donnée, produisant ainsi un nouveau problème basique calculable, et ainsi de suite jusqu'à parvenir à la solution finale.

Dans le problème qui nous occupe, il existe plusieurs façons de connecter les données entre elles, donc plusieurs enchaînements possibles de problèmes basiques permettant de parvenir à la solution. Chacun de ces enchaînements correspond à une interprétation du problème que l'on peut traduire par une expression numérique. Dans la suite, nous appelons « modélisation » le processus consistant à interpréter le problème d'une certaine façon et à le traduire en une succession d'opérations arithmétiques, et « modèle arithmétique du problème », l'expression numérique résumant cette succession d'opérations.

Nous avons dégagé trois modélisations possibles de ce problème mettant en œuvre des problèmes basiques de type « composition de transformation » et une quatrième, constituée de problèmes basiques du type « transformation d'état ». Avant de les présenter, nous allons revenir sur la description de ces deux catégories et sur la différence fondamentale, faite par Vergnaud (1981) entre « état » et « transformation ».

### *2.1 Les deux catégories « transformation d'état » et « composition de transformation »*

Prenons deux exemples, représentés chacun par une schématisation conforme à celles que propose Vergnaud.

#### *Transformation d'état*

*Problème n°1* : Un paysan va au marché avec 800 euros en poche ; il achète une vache 500 euros. Combien lui reste-t-il après cet achat ?

Ce problème n°1 relève de la catégorie additive « transformation d'état », dont la transformation est négative (- 500), l'état initial connu (800) et où l'on cherche à connaître l'état final[1] ($x$). Le diagramme sagittal de la figure 2 représente cette relation état initial – transformation – état final.


*Figure 2. Transformation d'état*

Le modèle arithmétique du problème est l'expression suivante : $x$ = 800 – 500. Il s'appuie sur le sens le plus spontané du résultat d'une soustraction, à savoir « ce qu'il reste après une perte », et ne pose en général pas de difficulté aux élèves, même débutants. Toutefois Vergnaud distingue les deux mesures de grandeurs, 800 et 500, la première indiquant une position (ici l'état du porte-monnaie du paysan), tandis que la seconde, la transformation, est un opérateur et s'exprime donc par un nombre relatif dont le signe donne le sens de la transformation (ici le signe est négatif car il s'agit d'une perte). Il indique cette différence dans sa schématisation en utilisant des rectangles pour les états et des ronds pour les transformations. La seconde catégorie présentée va permettre de comprendre l'importance de cette distinction.

### *Composition de transformations*

*Problème n°*2 : Un paysan va au marché ; il achète une vache 500 euros, puis la revend 600 euros. A-t-il gagné ou perdu de l'argent ?

Ce problème n°2 relève de la catégorie additive « composition de transformations ». On connaît les deux transformations composées, - 500 et + 600, et l'on cherche la transformation-bilan. Le schéma de figure 3 représente cette composition.

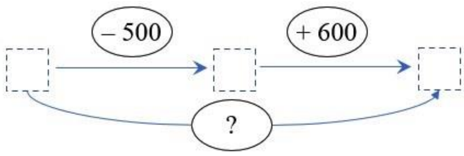



*Figure 3. Composition de transformations*

Le problème n°2 est notoirement plus difficile que le problème n°1 pour les élèves car, précisément, on ignore l'état du porte-monnaie du paysan à tout moment de la transaction (les valeurs qui seraient dans les rectangles) et, qui plus est, la réponse ne dépend pas de ces états. La première fois que des élèves rencontrent ce genre de problème, par exemple dans des contextes de montée ou descente d'autobus, ils cherchent systématiquement à imposer une valeur à l'état initial[2].

Le modèle arithmétique de ce problème ne relève d'ailleurs pas de l'école primaire puisqu'il convoque les nombres relatifs et s'exprime ainsi : $x$ = - 500 + 600, $x$ désignant la transformation-bilan. Et la réponse n'est pas 100, mais bien **+**100, à savoir une transformation (du point de vue du problème) ou un nombre relatif (du point de vue des mathématiques).

### *2.2 Modélisations du problème « La vache et le paysan »*

Le problème « La vache et le paysan » (figure 1) peut être interprété comme l'enchaînement de trois problèmes basiques sous-jacents, tous de type « composition de transformations », mais il existe différentes manières de connecter les premières données entre elles et donc de déterminer les problèmes basiques sous-jacents.

[1] Cette catégorie de *transformation d'état* se décline en six sous-catégories, selon le sens de la transformation (positive ou négative) et la place de la question. Vergnaud (1981) montre que la difficulté n'est pas la même selon que l'on cherche l'état final (problème le plus simple), la transformation ou l'état initial.

[2] Nous verrons que cette technique fait partie de l'une des techniques de résolution du problème « La vache et le paysan ».

### *Modélisation n°1*

Dans la modélisation n°1, nous suivons le fil de l'histoire du problème et calculons les transformations-bilans au fur et à mesure.

Ainsi le *premier problème basique* sous-jacent correspond au problème n°2, dont la solution arithmétique est : - 500 + 600 = **+ 100.** Nous qualifions cette nouvelle donnée +100 comme « le gain (en euros) après avoir revendu la vache la première fois ».

Le *deuxième problème basique* est le suivant : le paysan a gagné 100 euros, mais, se ravisant, il rachète la vache 700 euros. A-t-il gagné ou perdu de l'argent ? Il s'agit d'un nouveau problème de « composition de transformations », dont la solution mathématique est : +100 – 700 = **- 600.** Cette donnée correspond à la « perte (en euros) du paysan après le second rachat ».

Le *troisième et dernier problème basique* est alors : le paysan a perdu 600 euros avant de revendre sa vache 800 euros. A-t-il gagné ou perdu de l'argent ? Il s'agit encore d'un problème de « composition de transformations » dont la solution mathématique est : - 600 + 800 = **+200.** Ce résultat correspond au « gain (en euros) du paysan après la seconde vente », et donc au « gain total du paysan ».

Nous pouvons résumer ce découpage par la schématisation de la figure 4, où l'on retrouve les trois problèmes successifs de composition de transformations.

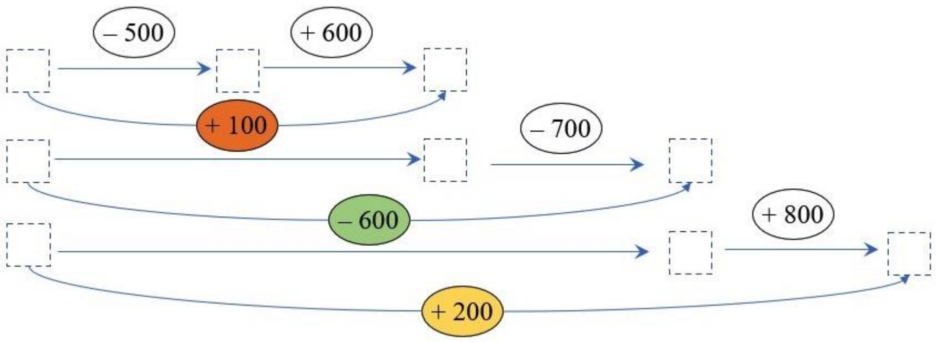



*Figure 4. Modélisation par « bilans successifs »*

Le modèle arithmétique de cet enchaînement est le suivant : $x$ = ((-500+600) – 700) + 800.

Cette première modélisation du problème n'est pas très naturelle, elle demande de savoir manipuler la notion de transformation. En revanche, une variante de cette modélisation est beaucoup plus accessible et permet de résoudre le problème en émettant une hypothèse sur l'état initial du porte-monnaie du paysan. Nous la présentons maintenant.

### *Modélisation n°1 bis*

Supposons que le paysan soit arrivé au marché avec 800 euros dans son porte-monnaie. Nous pouvons alors découper le problème en une succession de cinq problèmes basiques sous-jacents de « transformation d'état », selon le schéma de la figure 5.

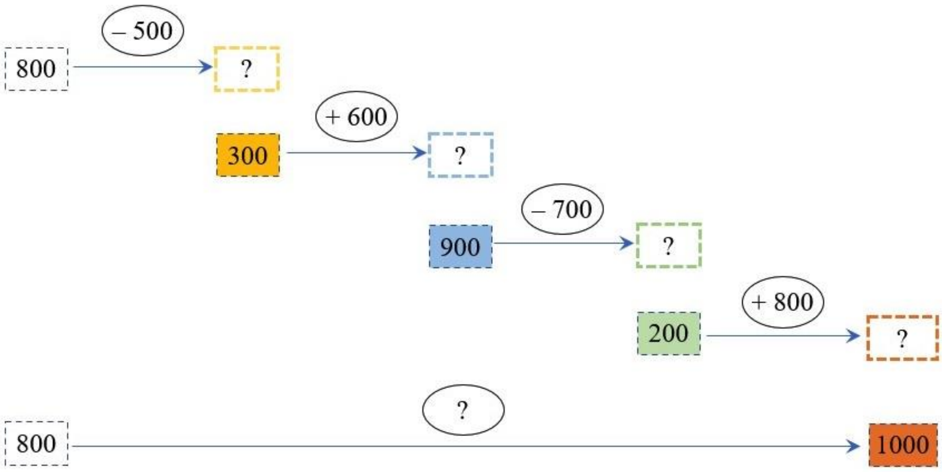



*Figure 5. Succession de cinq transformations d'état*

Les quatre premiers problèmes sont tous de la même catégorie, on recherche l'état final après un gain ou une perte ; on trouve les états successifs suivants : 300 euros ; 900 euros ; 200 euros ; 1 000 euros. Le dernier problème peut être verbalisé ainsi : le paysan est arrivé au marché avec 800 euros dans son porte-monnaie, il en repart avec 1 000 euros. A-t-il gagné ou perdu de l'argent, et combien ? Sa solution, 1 000 – 800 = +200, correspond à la solution du problème complexe.

Avec un état initial connu, le problème de départ devient nettement moins difficile ; toutefois l'idée de choisir un montant est à la charge du solveur, et relève de sa capacité à prendre des initiatives dans un problème mathématique. De plus, il peut être nécessaire de tester plusieurs montants initiaux pour se convaincre que la solution n'en dépend pas.

Le modèle arithmétique de cet enchaînement, avec l'hypothèse choisie, est le suivant : $x = ((800 - 500) + 600) - 700) + 800) - 800$. Ce modèle ne traduit pas exactement le problème puisqu'il ajoute une donnée. Si l'on souhaite garder le raisonnement sans émettre d'hypothèse, il convient alors d'opter pour un modèle algébrique tel que le suivant, où l'on note $i$ l'état initial : $x = ((i - 500)+600) - 700) + 800) - i$. Il suffit alors de simplifier l'expression ci-dessus pour démontrer qu'elle ne dépend pas de $i$.

Nous allons présenter un peu plus rapidement les deux modélisations suivantes, qui reprennent chacune un enchaînement de trois « compositions de transformations » successives.

### *Modélisation n°2*

On regroupe les achats d'un côté, et les ventes de l'autre, afin de faire un bilan comptable. La commutativité des « compositions de transformations » justifie ce raisonnement.

*Premier problème basique* : le paysan a fait deux achats successifs, l'un de 500 euros, et l'autre de 700 euros ; combien a-t-il dépensé ? (-500 – 700 = **- 1 200**).

*Deuxième problème basique* : le paysan a réalisé deux ventes successives, l'une de 600 euros, l'autre de 700 euros ; combien a-t-il gagné ? (+600 + 800 = **+1 400**).

*Troisième problème basique* : le paysan a dépensé 1 200 euros, et gagné 1 400 euros. Quel est son bilan ? (– 1 200 + 1 400 = **+ 200**).

Le modèle arithmétique de cet enchaînement est alors : $x = (-500 - 700) + (+600 + 800)$. La schématisation correspondante est présentée figure 6.

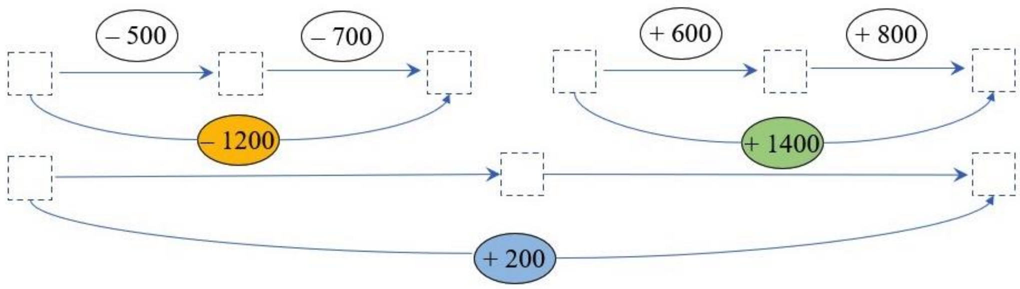



*Figure 6. Modélisation par « bilan comptable »*

***Modélisation n°3***

La modélisation n°3 s'appuie sur l'idée que les deux phases de l'énoncé sont indépendantes. Le paysan, après avoir revendu la première vache, pourrait tout aussi bien racheter une vache différente, ou un cheval, ou n'importe quel autre animal sans changer la nature du problème. Si l'on raisonne ainsi, il suffit de dresser le bilan de chacun des deux phases achat-vente, puis d'en déduire le bilan général. Ce raisonnement s'appuie sur l'associativité des compositions de transformations.

*Premier problème basique* : le paysan achète une vache 500 euros, puis la revend 600 euros ; a-t-il gagné ou perdu de l'argent et combien ? (-500 + 600 = **+ 100**).

*Deuxième problème basique* : le paysan achète une vache 700 euros, puis la revend 800 euros ; a-t-il gagné ou perdu de l'argent et combien ? (-700 + 800 = **+100**)

*Troisième problème basique* : le paysan a gagné 100 euros, puis encore gagné 100 euros. Combien a-t-il gagné en tout ? (+100 + 100 = **+ 200**).

Le modèle arithmétique de cet enchaînement correspond à : $x$ = (-500 + 600) + (-700 + 800). La schématisation correspondante est présentée en figure 7.

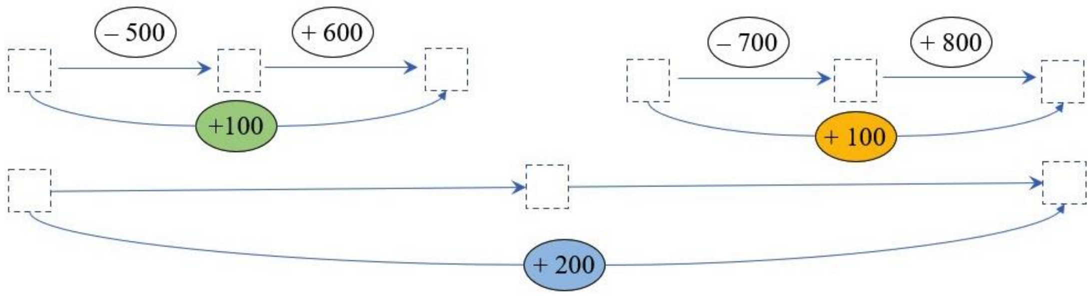



*Figure 7. Modélisation par « séparation des deux achats-ventes »*

## 3 Analyse de la situation de formation

Le problème a été choisi car il est riche non seulement en techniques pour le réussir, mais il suscite spontanément, même dans un public adulte, de nombreuses réponses erronées, dont une en particulier qu'il est difficile de contre argumenter. Nous allons présenter quelques-unes de ces réponses en les analysant succinctement, puis nous nous focaliserons sur l'enjeu de la formation, à savoir la problématique de l'argumentation. Cette analyse est en grande partie étayée par les résultats des expériences que nous avons menées, tant en formation initiale que continue, en amont de la formation proposées. Nous renvoyons à Péault (1991) pour compléter notre propos.

### *3.1 Différentes procédures erronées produites fréquemment*

***La réponse « 100 euros gagnés»***

La proposition erronée la plus fréquente, qui apparaît parfois chez presque la moitié des participants, est : « le paysan a gagné 100 euros ». Elle pourrait découler d'une confusion entre la notion d'état et celle de transformation. Le discours accompagnant le raisonnement est souvent proche du suivant : en achetant une vache 500 euros, puis en la revendant 600 euros, on fait un premier gain de 100 euros. Lorsqu'on la rachète 700 euros, on perd 100 euros *par rapport aux 600 euros de la précédente vente.* En la revendant 800 euros, on fait un second gain de 100 euros. Il est souvent accompagné d'une schématisation équivalente à celle de la figure 8.

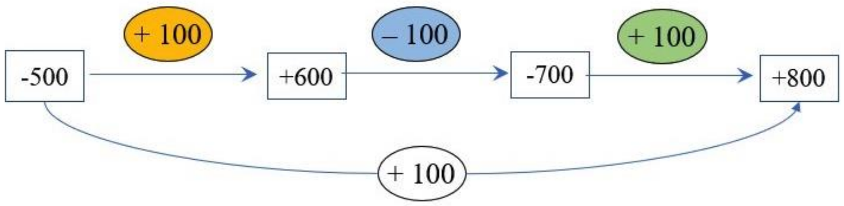



*Figure 8. Schématisation de la réponse « 100 »*

On peut constater que, dans le raisonnement produit en langue naturelle, la donnée + 600 euros joue un double rôle : elle correspond à une transformation positive dans la première partie du raisonnement, qui produit la transformation-bilan +100 ; mais elle devient un état dans la seconde partie, ce que le paysan a gagné et qui est donc désormais à disposition dans son porte-monnaie. Le schéma n'est pas interprétable en termes d'états et de transformation, mais il joue un rôle très fort dans les phases d'argumentation, nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

### *Autres réponses erronées possibles*

D'autres réponses, moins robustes que la première, sont produites spontanément. Elles ne résistent généralement pas à un premier tour d'échanges collectifs, mais elles apparaissent toutefois souvent lors des formations. En voici deux exemples :

1. « Le paysan gagne 300 euros car, peu importe ce qui se passe entre la première et la dernière transaction, c'est le bilan qui compte ; il a acheté une vache 500 euros et il finit par la revendre 800 euros ».
2. « Le paysan ne gagne rien, ni ne perd rien, car s'il gagne bien 100 euros sur chacune des deux ventes, soit un gain de 200 euros, il la rachète 200 euros plus cher la deuxième fois que la première, ce qui annule ses gains ».

On peut constater que ces types de raisonnement manipulent les transformations et non les états, mais des transformations « fluctuantes », dont les états initiaux et finaux ne sont pas correctement définis (et pour cause, puisqu'on en ignore les valeurs). Par exemple, pour le premier raisonnement, l'état final de la première transformation (-500) ne correspond pas à l'état initial de la dernière (+800), ces deux transformations ne peuvent donc s'additionner.

### *3.2 La nature de l'argumentation et ses difficultés*

La situation de formation s'appuie sur la production de ces différentes réponses afin de produire un débat au sein du collectif. Il s'agit, pour chacun, de défendre son raisonnement avec des arguments mathématiques, d'écouter celui des autres, puis éventuellement de le contre argumenter afin qu'une conviction puisse émerger pour tous. Or, il arrive souvent que la réponse « 100 euros gagnés » résiste à toutes les formes d'argumentation, contrairement aux autres.

Deux types d'argumentation, toutes deux probablement nécessaires pour emporter la conviction, permettent de contrer les réponses erronées : démontrer le « vrai » et déconstruire le « faux ». Démontrer le « vrai » revient à argumenter la réponse « 200 euros gagnés ». Nous avons vu que cette dernière découle de plusieurs types de raisonnement qui convainquent en général ceux qui ne l'ont pas produites. Pour autant cette démarche ne permet pas de comprendre où se situe l'erreur de raisonnement produisant la réponse « 100 euros gagnés ». Ce raisonnement est souvent défendu en établissant un schéma tel celui de la figure 8, qui s'avère difficile à déconstruire. Ce schéma parvient en effet à troubler des participants qui ne savent plus, après une période d'échanges, quelle est la bonne réponse, ni même si cette dernière est unique. Il est ainsi arrivé à plusieurs reprises qu'une petite minorité de participants (parfois un seul) se trouve à lutter contre le raisonnement majoritaire (et correct, bien que cela ne soit jamais dit) jusqu'au terme de l'activité. La conviction « pour tous » n'est donc pas acquise systématiquement.

Nous avons voulu soumettre les participants de l'atelier à ces questions que posait le déroulement de la situation telle que nous l'avons mise en œuvre, et les faire réfléchir à une alternative possible. C'est pourquoi nous avons choisi de la leur faire vivre telle qu'elle était proposée initialement chez Péault (1991), en la complétant par un jeu de rôles, avant de leur en proposer un retour réflexif.

## II - MISE EN SITUATION ET ANALYSE

Dans cette partie, nous exposons d'abord le déroulement de la situation de formation telle que proposée aux participants de l'atelier. Nous relatons ensuite les différentes explications des solutions proposées suite à une première recherche individuelle de la résolution du problème. Nous terminons par des éléments ayant émergé dans l'analyse de la situation vécue par les participants.

### 1 Déroulement de la mise en situation

La mise en situation lors de l'atelier s'est déroulée en plusieurs étapes (figure 9). Durant les six premières, les participants de l'atelier qui connaissaient déjà le problème posé (« La vache et le paysan ») ont joué un rôle d'observateur, prenant des notes et n'intervenant pas dans les échanges. L'ensemble des participants a pris part à la septième et dernière étape consistant en un jeu de rôles. Nous récapitulons chacune des étapes du déroulement en précisant la tâche des participants, le rôle de la formatrice et en donnant un éclairage sur certains de nos choix de mise en œuvre.


*Figure 9. Les sept étapes de l'atelier*

*Étape 1.* Le problème « La vache et le paysan » (figure 1) est projeté au tableau. Chacun cherche seul à le résoudre sur une feuille pendant 5 minutes. Ce temps court permet une appropriation du problème et l'émergence de premières solutions. La formatrice les repère, restant neutre face à ce qu'elle observe. Elle n'intervient que pour rappeler les consignes si besoin : la recherche au brouillon est individuelle pendant 5 minutes.

*Étape 2.* La formatrice note au tableau les différentes solutions observées sur les brouillons des participants, sans faire de commentaire. Elle veille à ne pas écrire la réponse correcte en premier pour éviter que cette solution ne soit argumentée dès le départ dans l'étape suivante.

*Étape 3.* Un représentant de chacune des solutions expose au groupe son explication (plusieurs si d'autres estiment avoir procédé différemment), en appui sur un écrit au tableau (schéma, calculs, etc.). Les autres posent des questions de compréhension si besoin. La formatrice veille à ce qu'il n'y ait pas d'expressions de contre arguments durant cette étape.

*Étape 4.* La formatrice réalise un premier sondage : pour chacune des solutions, elle inscrit au tableau le nombre de personnes convaincues de sa justesse. Des participants peuvent déjà avoir changé d'avis par rapport à leur production initiale, ou n'être convaincus par aucune solution. La formatrice ajoute alors la réponse « J'hésite encore ».

*Étape 5.* Pour chacune des solutions, la parole est à ceux qui veulent argumenter. La formatrice dirige le débat, mais ne se prononce à aucun moment.

*Étape 6.* La formatrice réalise un second sondage qui informe de l'évolution des convictions du groupe.

*Étape 7.* Un jeu de rôles est proposé pour terminer, notamment pour éviter de mettre en porte-à-faux ou déstabiliser les quelques participants qui resteraient seuls à défendre une solution. Nos expérimentations en formation initiale ou continue ont montré que la solution « gain de 100 € » était longtemps résistante, d'où l'importance de la traiter en formation de formateurs même si, dans ce cas, cette réponse ne « résiste pas ». On présente donc aux participants un exemple d'explications données par une étudiante de Master 2 professeur des écoles pour la réponse « Le paysan a gagné 100 euros » (figure 10). Cela laisse aux participants l'opportunité de s'appuyer sur une production erronée dont ils ne sont pas auteurs ou alors d'entrer dans la compréhension de cette réponse. Les participants, répartis en groupe de quatre, préparent pendant une vingtaine de minutes une argumentation pour la réponse « gain de 100 € » et une pour la réponse « gain de 200 € ». Deux représentants de chaque groupe viennent ensuite, l'un pour défendre la première réponse, l'autre la seconde, lors d'un débat animé par la formatrice. Le reste du groupe est observateur.

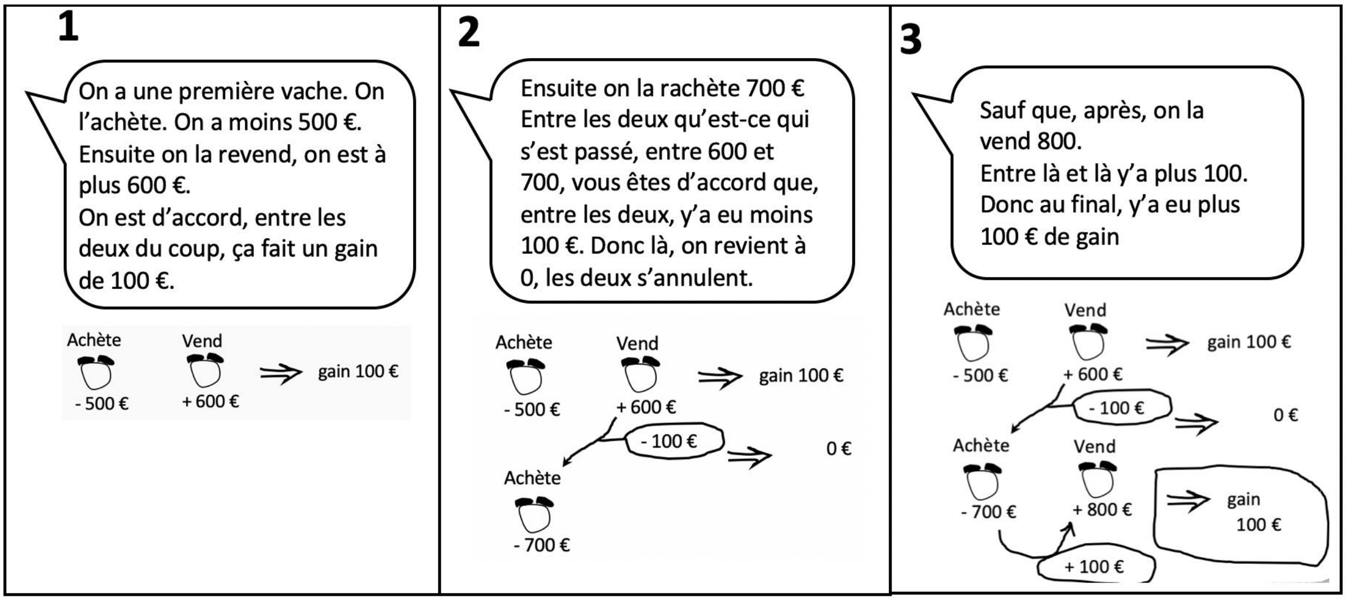



*Figure 10. Explication d'une étudiante pour un gain de 100 €*

## 2 Explications des solutions trouvées par les participants

Les solutions, suite à la recherche individuelle des participants lors de l'étape (1), sont - 500 €, - 400 €, + 100 € et + 200 €. Nous relatons les explications avancées pour chaque solution en y associant les schématisations utilisées.

**La perte de 500 euros** (figure 11) est expliquée par un investissement de 500 euros au premier achat. Les 200 euros supplémentaires investis au second achat sont compensés par le bénéfice de 100 euros de chacune des deux ventes : - 500 € - 200 € + 100 € + 100 € = - 500 €

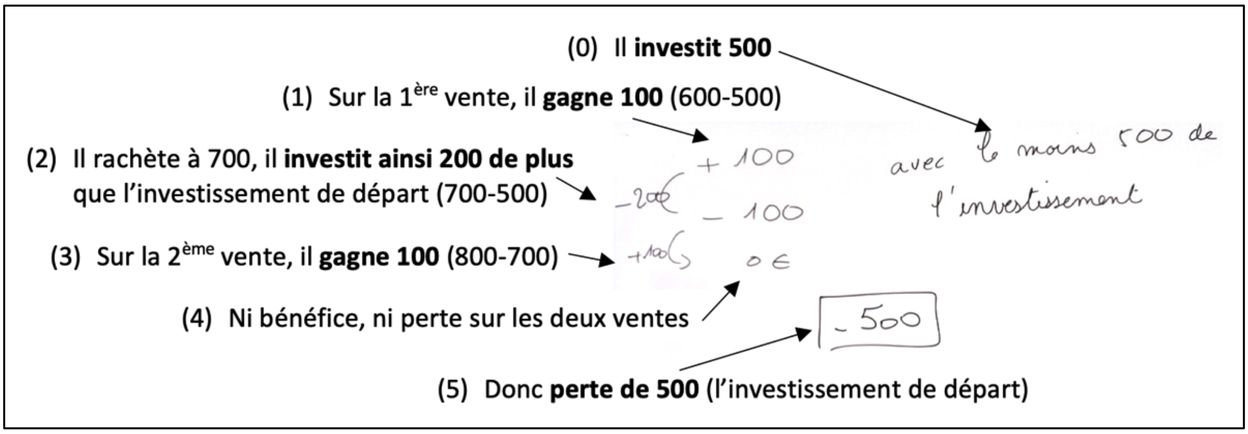



*Figure 11. Explications pour une perte de 500 €*

**La perte de 400 euros** (figure 12) est expliquée par un investissement de 500 euros au premier achat, suivi d'un gain de 100 euros à la première vente, puis d'une perte de 100 euros au second achat, suivie d'un gain de 100 euros à la seconde vente : - 500 € + 100 € - 100 € + 100 € = - 400 €. Un schéma en barres accompagne l'explication.

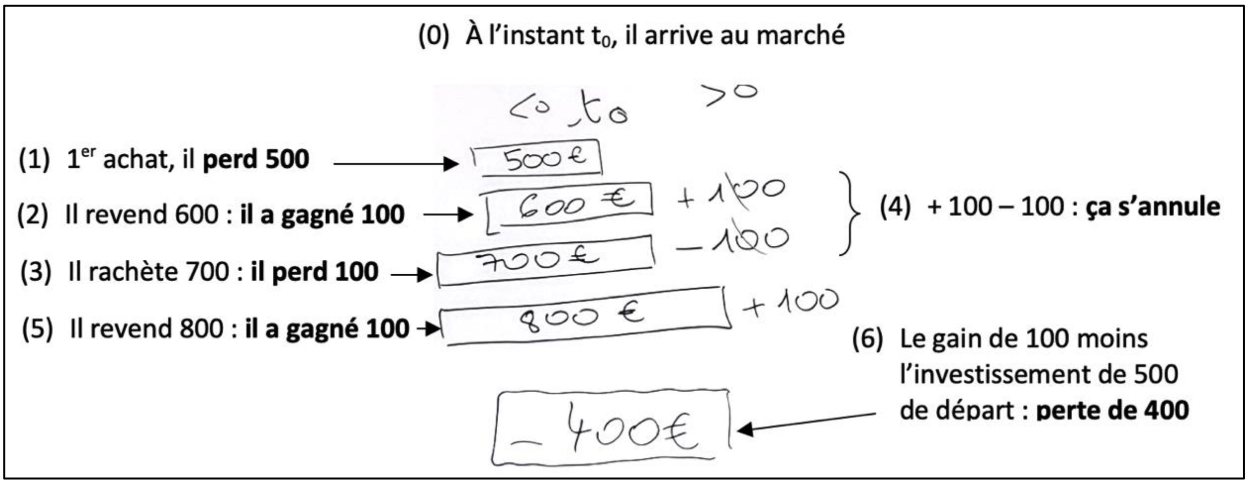



*Figure 12. Explications pour une perte de 400 €*

**Le gain de 100 euros** (figure 13) est expliqué par un gain de 100 euros à la première vente, d'une perte de 100 euros au second achat, d'un gain de 100 euros à la seconde vente : 100 € - 100 € + 100 € = 100 €.

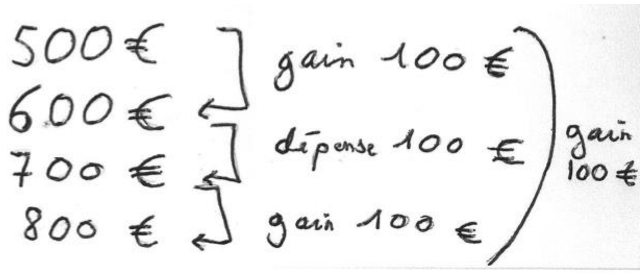



*Figure 13. Explications pour un gain de 100 €*

**Le gain de 200 euros** est expliqué une première fois par un gain de 100 euros à la première vente (600 € – 500 €), qui se transforme en une perte de 600 euros suite au rachat (100 € –700 €) et devient un gain de 200 euros suite à la revente (-600 € + 800 €) (figure 14a). Deux explications analogues sont présentées par la suite, l'une à l'aide d'un arbre de calcul (figure 14f) et l'autre à l'aide d'un axe gradué (figure 14b). Pour cette dernière représentation, les dépenses sont placées à droite de l'origine et le bénéfice à gauche : la dépense de 500 € pour l'achat (graduation 500) suivie de la vente de 600 € (longueur de l'intervalle [-100 ; 500]) donne un bénéfice de 100 € (graduation – 100) ; cette transaction suivie de l'achat à 700 € (longueur de l'intervalle [-100 ; 600]) aboutit à une dépense de 600 € (graduation 600) ; la deuxième transaction suivie de la revente à 800 € (longueur de l'intervalle [-200 ; 600]) donne un bénéfice de 200 € (graduation – 200). Ces trois expositions correspondent à la modélisation n°1 (figure 4). Une quatrième explication (figure 14d), traduisant algébriquement les achats et ventes successifs (- 500 + 600 – 700 + 800 = 200), correspond sans doute également à cette première modélisation, bien que les calculs intermédiaires soient absents. Une autre explication (figure 14c) s'intéresse aux pertes (500 € + 700 €) et aux gains (600 € + 800 €) pour en déduire un bénéfice de 200 € (1400 € - 1200 €) : elle correspond à la modélisation n°2 (figure 6). Une dernière explication enfin part d'une somme initiale de 1000 € dans le porte-monnaie, retire 500 € pour le premier achat (reste 500 €), ajoute 600€ pour la vente (reste 1100 €), retire 700 € pour le second achat (reste 400 €) et enfin ajoute 800 € pour la dernière vente (reste 1200 €), ce qui fait donc 200 € de bénéfice (1200 € - 1000 €) (figure 14e). Cette explication correspond à la modélisation n°1 bis (figure 5). Notons que la modélisation n°3 (figure 7, modélisation par « séparation des deux achats-ventes ») est, à ce stade, absente des échanges.

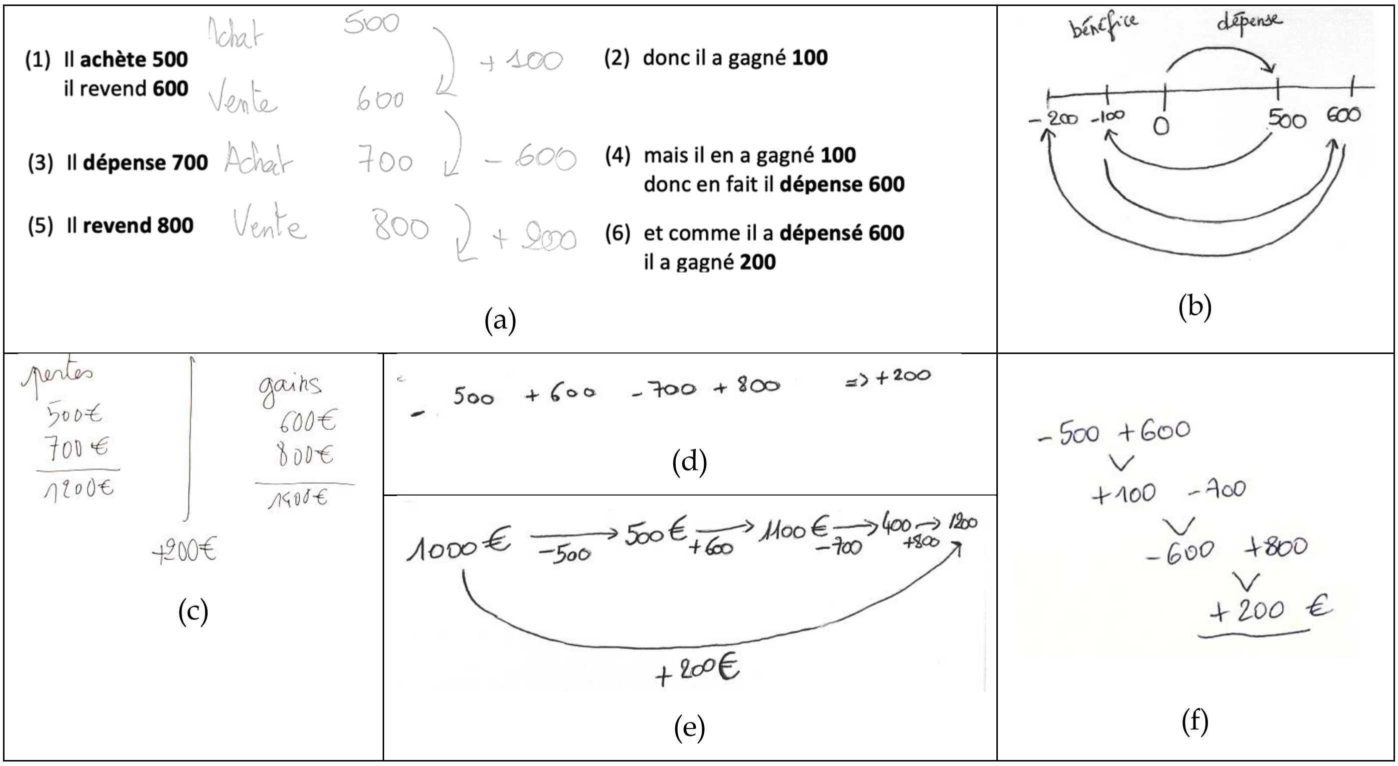


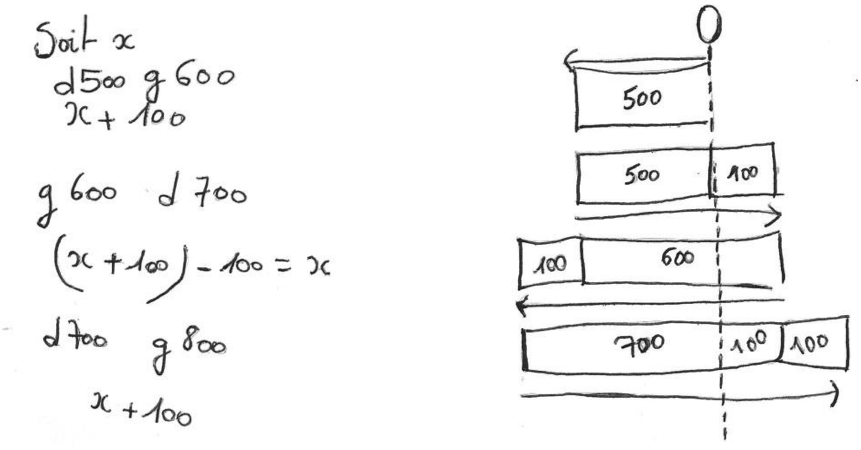

*Figure 14. Explications pour un gain de 200 €*

Le jeu de rôles mené avec les participants pour défendre la solution « gain de 100 euros » *versus* la solution « gain de 200 euros » a contribué ensuite à développer des arguments pour chacune de ces solutions. Nous présentons dans la partie suivante quelques points mis en avant dans l'analyse de la situation vécue avec les participants.

## 3 Analyse de la situation

Dans l'analyse de la situation a émergé le fait que certains arguments peuvent paraître convaincants pour des raisons autres que leur validité mathématique, comme le fait qu'un argument soit énoncé avec assurance[3] ou par une personne considérée comme « sachant » par le groupe. Le recours à l'algèbre, avec l'introduction de la variable $x$, ou le recours à une schématisation préconisée par l'institution, comme actuellement « le diagramme en barres », peuvent également produire cet effet. On a par exemple sur la figure 15a le support accompagnant une argumentation pour la réponse « gain de 100 euros », avec l'introduction d'une somme d'argent $x$ dont disposerait le paysan au départ, pour aboutir à la fin des transactions à la somme $x + 100$. Une participante témoigne s'être retrouvée « en position de petite fille devant aller dans le sens de celui qui se sert de $x$ ». Le diagramme en barres (figure 15b) a été support d'une argumentation pour un gain de 200 euros. Une participante a fait remarquer que le diagramme ne se suffisait pas en lui-même comme argument, le même diagramme pouvant tout aussi bien être support pour argumenter sur un gain de 100 euros. C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans l'explication de la figure 2 de (1) à (5).

[3] La longueur d'argumentation d'un individu et son assurance apparente sont deux déterminants de l'influence d'un individu au sein d'un groupe pointés par Zaleska (1972).




(a) (b)

*Figure 15. Exemples de supports de l'argumentation pendant le jeu de rôles*

## III - ENJEUX ET USAGES DE CE PROBLEME EN FORMATION

La troisième partie de l'atelier visait à interroger les enjeux et usages possibles de cette situation en formation. Nous avons profité de cet atelier pour partager des expériences de mise en œuvre de cette situation puisque quelques participants avaient déjà utilisé cette situation en formation. Puis nous avons proposé une alternative au scénario initial qui nous semble pouvoir permettre de réduire certaines limites exprimées par les formateurs vis-à-vis du scénario original.

### 1 Retours de mise en œuvre de la situation de formation

Trois participants ont fait part, au cours de l'atelier, de leur expérience de mise en œuvre de cette situation en formation.

Une première participante a indiqué utiliser en formation cette situation depuis de nombreuses années dans un contexte un peu modifié (les vaches sont remplacées par des motos, dans un contexte de foire de motos). Elle signale le côté extrêmement robuste de la situation, même sur de petits groupes d'étudiants : il y a toujours plusieurs réponses différentes trouvées par les participants, dont la réponse +100 qui apparaît systématiquement, même si elle n'est pas majoritaire. Et à chaque fois cette réponse résiste, c'est-à-dire qu'il est difficile de convaincre de sa fausseté. L'enjeu de formation qu'elle vise en proposant cette situation est de montrer que donner la bonne réponse et expliquer pourquoi elle est correcte, ne suffit pas à convaincre que les autres ne sont pas correctes et ni à comprendre quelles sont les erreurs de ces autres raisonnements. Hormis la modification de contexte, la mise en œuvre proposée et l'enjeu visé sont donc très proches de ceux proposés dans le scénario original de Péault (1991).

Une deuxième participante a indiqué avoir déjà utilisé la situation il y a quelques années et en fait un retour mitigé : « parfois ça marchait super bien, parfois ça bloquait complétement ». Elle fait part d'une difficulté des étudiants à se convaincre, qui peut parfois aboutir à ce type d'argument : « mais non, ce que je te dis c'est ça, point ! ». Ce blocage l'amenait à proposer l'argument des deux vaches : « imaginons qu'il y ait deux vaches, une vache marron et une vache blanche ». Les étudiants peuvent alors rencontrer des difficultés à comprendre qu'il s'agit bien du même problème : « Ah, mais est-ce que c'est pareil ? Est-ce que ça revient au même ? Et il a fallu, voilà, il a fallu cette discussion-là. Et finalement ils ont accepté parce que je leur ai dit que c'était ça, quoi ! ». Considérant qu'elle était amenée à utiliser ce type « d'argument d'autorité », elle a arrêté de mettre en œuvre cette situation en formation. Elle signale également un autre écueil possible de cette situation : renforcer l'idée, chez certains étudiants, qu'ils ne comprennent pas les mathématiques, que ce n'est pas fait pour eux, qu'il n'est pas utile de s'engager dans la recherche d'un problème (« les maths je n'ai jamais rien compris et là je ne comprends rien »). Même si cette formatrice trouve, par ailleurs, qu'il est important que les étudiants soient aussi parfois dans la position de quelqu'un qui ne comprend pas puisque cela fait partie du processus d'apprentissage (« finalement c'est normal de ne plus savoir où on en est, ce n'est pas grave, […] je l'accepte et ce n'est pas parce que je suis nul en maths, c'est parce qu'il y a de quoi réfléchir »).

Un troisième participant a indiqué utiliser depuis de nombreuses années cette situation en formation avec des modifications par rapport au scénario initial. Il indique tout d'abord avoir renoncé à travailler sur la contre-argumentation pour la réponse + 100 après avoir constaté des arguments du type « on voit que… », « c'est évident que… ». Il propose aux étudiants une simulation avec des faux billets, pour constater le solde obtenu après les différentes transactions. Il arrive ainsi à les convaincre de la validité de la réponse + 200, sans toutefois leur permettre de comprendre pourquoi la réponse + 100 est erronée. L'enjeu pour ce formateur est alors de « démystifier la place des schématisations et des modèles » (« ce n'est pas parce que tu apportes un modèle que voilà… et particulièrement les diagrammes en barres »). Enfin il signale un autre usage de cette situation en licence dans un module sur l'esprit critique, avec un déroulement assez différent, puisqu'il fait croire aux étudiants qu'ils vont gagner 300 euros avant de les laisser chercher la réponse au problème (« il faut qu'ils essaient de savoir s'ils se font avoir ou pas »). Il leur explique d'où vient ce + 300 (800 – 500) et essaie de les convaincre de cette réponse pour les faire ensuite réagir. Pour lui, ce déroulement est plus adapté (dans ce contexte) car les étudiants ne se construisent pas leur propre représentation qu'il serait plus difficile de déconstruire après (la réponse + 100 pourrait ne pas apparaître dans ce contexte, l'important pour les étudiants étant de contre argumenter sur + 300).

Ajoutons pour terminer une piste d'exploitation de la situation portant sur des contenus didactiques en lien avec la résolution de problèmes : la gestion de la situation selon les différentes étapes dissociant présentation des réponses, explicitation de procédures et argumentation sur leur validité met en évidence une modalité particulière pour l'organisation d'un débat mathématique en classe ; elle permet de revenir sur le processus de dévolution d'un problème.

## 2 Une alternative de Denis Butlen au scénario original de formation

Nous relatons dans cette partie des adaptations de la situation de formation « La vache et le paysan » par Denis Butlen, en appui sur une présentation de ses recherches[4] et sur un échange téléphonique dans lequel il nous a apporté des précisions avant l'atelier. Nous complétons alors la présentation des étapes de son scénario de formation, expérimenté dans plusieurs contextes de formation (formation initiale, formation continue, formation de formateurs), par les observations qu'il nous a faites (écrites en italique dans le texte). Ce nouveau scénario constitue une alternative à la proposition originale de Péault (1991), il donne une place plus importante au formateur dans le déroulement, tout en laissant à la charge des formés (étudiants, stagiaires ou enseignants), la responsabilité de la résolution du problème et de l'argumentation.

Cette proposition nous semble à même de « rassurer » les participants au fur et à mesure du déroulement et de rendre plus explicites les liens avec des questions d'enseignement donc ses enjeux de formation. Elle pourrait permettre d'apporter une réponse à certaines réticences de formateurs vis-à-vis du scénario original proposé par Péault, liées notamment à une trop grande déstabilisation des formés.

*Étape 1* - Résolution du problème. Le formateur donne l'énoncé du problème. L'énoncé initial est modifié de la façon suivante[5] : « Un paysan va au marché, il achète une vache nommée Marguerite 500 €. Il change d'avis et revend cette vache 600 €. Puis revenant sur sa décision il la rachète 700 €. Enfin, changeant une dernière fois, il la revend 800 €. Le paysan a-t-il gagné de l'argent et si oui combien ? » Les formés résolvent individuellement le problème.

---

[4] Diaporama de la conférence de Denis Butlen à l'Ifé « De recherches sur les pratiques enseignantes à la formation des enseignants », publié le 05/06/2020 http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/documents-frederique-j/Lavacheetlepaysan.pdf [Consulté sur le site de Ifé, Centre Alain Savary le 30 juin 2022].

[5] Dans ce nouvel énoncé, la vache est nommée, ce qui permet de préparer l'introduction d'une deuxième vache dans une phase ultérieure de la situation. D'autre part, la question est écourtée puisqu'il est seulement demandé si le paysan a gagné de l'argent et combien.

*Étape 2* - Premier sondage. Quand tous les formés ont trouvé un résultat, le formateur demande successivement d'énoncer le résultat trouvé sans explication et demande qui a trouvé le même résultat. Il écrit au fur et à mesure au tableau les réponses trouvées et le nombre de formés les ayant trouvées[6]. *En général, les formés sont assez étonnés et déstabilisés par la diversité des réponses produites et notamment par la quasi égalité entre le nombre de réponses « gain de 100 euros » et « gain de 200 euros ».* Après avoir écrit les résultats, le formateur signale que cette variété de réponses est assez fréquente en classe quand le professeur pose un problème complexe, il est alors amené impérativement à gérer cette diversité. Le formateur interroge alors les formés en leur demandant ce qu'ils feraient dans une situation de ce type. *En général, les formés, de façon quasi unanime, proposent de demander aux élèves d'expliquer leur procédure de résolution, ce qui amène le formateur à passer à l'étape suivante.*

*Étape 3* - Explicitation des solutions. Le formateur demande une (ou plusieurs si elles sont différentes) explication(s) pour chaque solution. Il fait commencer la présentation par une personne qui a trouvé un gain de 100 euros, puis une qui a trouvé un gain de 200 euros, et termine par les personnes qui ont trouvé d'autres réponses. *En général, lors de l'exposé des autres réponses, les formés s'aperçoivent assez vite de leur erreur.*

*Étape 4* - Nouveau sondage. Le formateur réalise un nouveau sondage sur la conviction des formés quant aux solutions proposées. *En général, plusieurs d'entre eux déclarent ne plus savoir ce qu'ils pensent et ne plus savoir quelle est la bonne réponse, trouvant chaque procédure explicitée convaincante.* Le formateur attire l'attention sur ce changement d'état, sur cette perte de conviction chez certains et signalent que ce phénomène est assez fréquent en classe. Il souligne que parfois la réponse apportée par les enseignants est un « passage en force » et attire l'attention des formés sur le danger de ce type d'attitude qui risque, quand elle se répète souvent, de décourager les élèves.

*Étape 5* - Une preuve par la simulation (conviction du vrai). Le formateur demande comment le professeur peut réduire ce risque de découragement des élèves. *Déroutés dans un premier temps, après avoir proposé de chercher d'autres méthodes sans arriver à en élaborer de très différentes des premières, certains finissent par proposer de simuler la situation*. Le formateur peut être amené à solliciter directement cette solution si elle n'émerge pas du groupe. On peut remarquer que, pour simuler la situation, il faut se la représenter mentalement et mettre en œuvre les étapes suivantes : désigner qui va jouer le rôle du paysan, celui du marchand, choisir un moyen de matérialiser la vache, matérialiser les sommes reçues et dépensées (billets de 100 € en nombre suffisant : le paysan doit disposer d'au moins 600 €, le marchand d'au moins 200 €), et enfin simuler chaque achat et vente et trouver la différence avec le montant initial choisi. *Si la majorité des formés arrivent à poser le décor de la manipulation et à la mettre en œuvre, certains éprouvent des difficultés, ce qui nécessite parfois une aide du formateur*. Cette étape du scénario se termine par le constat que tous (ou quasi tous) les formés sont convaincus que la bonne réponse est un gain de 200 €. Toutefois certains d'entre eux expriment leur désarroi. Ils savent maintenant que c'est un gain de 200 € mais ne comprennent pas pourquoi ce n'est pas un gain de 100 €. Le formateur signale que, là encore, cette situation est fréquente en classe et attire à nouveau sur le danger d'une pratique consistant une nouvelle fois pour le professeur à « passer en force » et ignorer la question soulevée en insistant sur le fait que maintenant c'est démontré.

*Étape 6* - Traitement du faux (Pourquoi ce n'est pas + 100 € ?). Le formateur demande de trouver un moyen de traiter l'erreur faite pour arriver à la réponse « gain de 100 € ». Après avoir laissé réfléchir les formés à cette question il peut, par exemple, proposer de dissocier les deux achats, car cela peut permettre de convaincre certains étudiants[7] (Péault, 1991). . Il expose alors un nouvel énoncé, comme par exemple : « Un paysan va au marché, il achète une vache nommée Marguerite 500 €. Il change d'avis et

[6] Noter l'effectif d'une réponse figure dans le scénario initial de Péault mais nous avions choisi une option différente afin de ne pas influencer les participants.

[7] Cette proposition (dissociation des deux achats), correspond à la modélisation n°3. Nous avons pu constater qu'elle est souvent spontanément utilisée par les participants lors de l'étape de contre-argumentation. Mais il est également envisageable de s'appuyer sur la modélisation n°1 en s'arrêtant après le second achat pour constater qu'à ce stade, on a forcément gagné de l'argent, contrairement à ce qu'induit le raisonnement erroné.

revend cette vache 600 €. Puis revenant sur sa décision, il achète une nouvelle vache nommée Florette 700 €. Enfin, changeant une nouvelle fois d'avis, il la revend 800 €. Le paysan a-t-il gagné de l'argent et si oui combien ? ». La comparaison de ces deux énoncés, qui relèvent de la même structure mathématique mais pas de la même structure linguistique, peut souvent permettre de constituer une explication de l'erreur produite et de l'absence de lien entre les deux achats, y compris quand il y a une seule vache. En particulier, il aide à comprendre qu'il n'est pas pertinent de composer les transformations (+600) et (-700) car elles sont indépendantes.

*Étape 7* - Synthèse. Le formateur synthétise les observations faites au cours du scénario mis en œuvre, notamment le fait que la dernière étape est souvent négligée ou absente dans les pratiques enseignantes quotidiennes. Le professeur a tendance à penser que l'exposé du vrai et la preuve du vrai éliminent, de fait, le faux.

*Étape 8* - Réinvestissement avec « Le chat de Gaston ». Cette situation utilise un problème et une production d'un élève (figure 16) proposés dans DeBlois (2011). L'énoncé est le suivant : « Gaston a deux chats. Le plus vieux a 4 ans, le plus jeune a 10 mois. Quelle est la différence d'âge en mois des deux chats ? ». Le formateur précise aux formés que l'élève qui a commis l'erreur décrite figure 16 sait que 1 an, c'est 12 mois et est capable d'en déduire que 4 ans, c'est 48 mois (ces conversions de durées ont été abordées précédemment). Le formateur donne la consigne suivante aux formés : « Voici une production d'un élève de CE2. Vous avez 30 ou 40 secondes pour élaborer ce que vous allez dire à cet élève pour l'aider à prendre conscience de son erreur ». Le formateur organise une mise en commun des propositions des formés. À une majorité, la réponse exprimée revient à dire à l'élève qu'il n'est pas possible de soustraire des mois et des années. Le formateur signale alors que cette explication permet à l'élève de trouver la bonne réponse mais ne déstabilise pas vraiment et ne traite pas vraiment du statut erroné de la production. Il expose alors un autre type d'intervention, s'il n'est pas apparu, qui consisterait par exemple à dire : « Si la différence en mois est de six mois et si le plus jeune a dix mois quel est l'âge du plus vieux ? ». Ce traitement consiste à interroger la pertinence de la réponse produite par l'élève afin de la remettre en question. Il s'agit de réinvestir le problème de la vache et du paysan, pour amener les formés à prendre conscience de la nécessité d'un traitement réel de l'erreur en mathématiques.

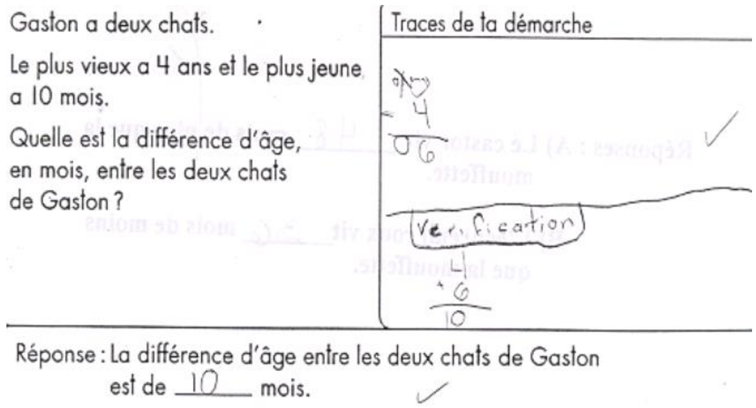

Gaston a deux chats.
Le plus vieux a 4 ans et le plus jeune a 10 mois.
Quelle est la différence d'âge, en mois, entre les deux chats de Gaston ?
Traces de ta démarche
Vérification
Réponse : La différence d'âge entre les deux chats de Gaston est de 10 mois.

*Figure 16. Production d'un élève*

## CONCLUSION

Nous soulignons, pour conclure, certaines potentialités de la situation de formation vécue dans cet atelier. Tout d'abord, le problème « La vache et le paysan » peut être étudié comme exemple de problème complexe (Houdement, 2018) pour lequel il faut construire des problèmes basiques (*ibid.*) pour le résoudre. L'identification des problèmes basiques se fait en appui sur le contexte, et nous avons vu dans l'analyse *a priori* du problème différentes modélisations possibles avec des choix de problèmes basiques différents. Ce problème est aussi l'occasion d'exploiter, de mettre à l'épreuve, la typologie de problèmes du champ additif établie par Vergnaud (1981), en utilisant des diagrammes sagittaux marquant états et transformations comme aide à la compréhension et conceptualisation de cette typologie pour les formés (Vergnaud, 1988).

Notons aussi que l'énoncé de ce problème est un exemple pour mettre en évidence la non pertinence des « aides méthodologiques » telles que dénoncées par Houdement (2018). En effet, repérer dans l'énoncé les informations utiles (achat de 500 €, vente de 600 €, rachat de 700 €, revente de 800 €) n'est pas une aide pour avoir une bonne représentation du problème. Les difficultés qui émergent dans la résolution du problème ne sont pas liées à ce repérage, ni à l'opération experte (il s'agit d'un problème additif), ni au champ numérique (des centaines), mais bien à la représentation cognitive du problème (Julo, 2002). Un passage rapide « en mode arithmétique » et sans contrôle pour résoudre le problème a de fortes chances de conduire à la solution erronée « gain de 100 euros ».

Comme cela était déjà souligné par Péault (1991), cette situation de formation peut permettre aux formés de prendre conscience que le fait de « dire à quelqu'un qu'il se trompe et lui indiquer une bonne solution est inopérant si on ne l'aide pas à prendre conscience de ses erreurs » et que le « traitement [des erreurs] passe par leur analyse et leur compréhension ». La proposition indiquée dans la partie III.2. Étape 8 permet de réinvestir cette question sur une situation de classe et d'aider les formés à prendre conscience de ce phénomène en identifiant des alternatives possibles pour un réel traitement de l'erreur. Ces questions de prise en compte des erreurs peuvent être mises en relation avec une réflexion plus générale sur la distinction entre explication et argumentation. Selon ERMEL (1999), une explication consiste en une formulation de propositions, alors qu'une argumentation vise à convaincre de la justesse ou de l'inexactitude de propositions, à produire des raisons, à les examiner, à les soumettre à la critique. Il est alors possible de distinguer le travail d'argumentation en mathématiques avec ce qui se fait dans d'autres domaines : en mathématiques il s'agit d'établir, au moyen de raisonnements, la valeur de vérité d'une proposition mathématique. L'analyse du déroulement du débat avec les formés, après-coup, peut permettre d'identifier les arguments utilisés et éventuellement de déceler des arguments qui ont pu convaincre pour des raisons autres que leur validité mathématique, comme cela a été observé au cours de l'atelier (argument énoncé avec assurance, introduction d'une variable $x$, recours à une schématisation préconisée par l'institution).

Enfin, malgré une certaine adhésion des participants de l'atelier à cette situation de formation, notamment pour ses possibilités de faire émerger les enjeux de formation que nous venons de citer, il est apparu certaines réticences de la part de formateurs l'ayant déjà expérimentée. Nous pensons que le scénario proposé par Butlen (partie III.2) constitue une alternative intéressante au scénario original, car il nous semble à même de permettre de « rassurer » les formés au fur et à mesure du déroulement, et de rendre plus explicites les enjeux de la situation et les liens avec des questions d'enseignement.

## BIBLIOGRAPHIE

Butlen, D. (2020). De recherches sur les pratiques enseignantes à la formation des enseignants. *Conférence à l'IFE, Centre Alain Savary.*

Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. (2022). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses.* Les outils du formateur Tome 2. ARPEME.

DeBlois, L. (2011). *Enseigner les mathématiques. Des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter*. Presse Universitaires de Laval.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Les outils du formateur Tome 1.* ARPEME.

ERMEL (1999). *Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques*. INRP.

Houdement, C. (2018). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31-52.

Kuzniak, A. (1993). Le conflit socio-cognitif en formation des maîtres. *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, *tome II, 131-134*. COPIRELEM Pau, mars 1992, IREM de Paris VII.

Péault, H (1991). La vache et le paysan. *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, *tome I,* 101-103. COPIRELEM Cahors, mars 199, IREM de Paris VII. Repris dans *Concertum*, 2003 ARPEME. Disponible en ligne : http://www.arpeme.fr/documents/32E4620459209AE838F.pdf

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité. Problèmes de l'enseignement à l'école élémentaire*. Berne : Peter Lang.

Zaleska, M. (1972). Les problèmes du leadership. Dans P. Moscovici (Dir.), *Introduction à la psychologie sociale. Vol. 2* (pp. 81-113). Librairie Larousse. Collection : Sciences humaines et sociales.

# ANALYSER DES CONNAISSANCES EN CALCUL MENTAL ADDITIF AU DEBUT DU CYCLE 2 POUR MIEUX COMPRENDRE L'ACTIVITE DE L'ELEVE EN RESOLUTION DE PROBLEMES

**Françoise CHENEVOTOT**
INSPE Lille
LDAR
francoise.chenevotot@univ-lille.fr

**Laurence LEDAN**
INSPE Toulouse
laurence.ledan@univ-tlse2.fr

**David BEYLOT**
INSPE Créteil
david.beylot@u-pec.fr

**Aline BLANCHOUIN**
INSPE Bretagne
CREAD
aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

**Eric MOUNIER**
INSPE Créteil
LDAR
eric.mounier@u-pec.fr

**Nadine GRAPIN**
INSPE Créteil
LDAR
nadine.grapin@u-pec.fr

Résumé
Notre équipe (Groupe de recherche et de production de ressource pour la formation G2R - IREM Paris Nord) a conçu une grille d'analyse didactique organisant différentes catégories de procédures selon les savoirs en jeu et les représentations du nombre utilisées en calcul mental additif. Nous montrons à l'aide de cette grille la diversité de ces procédures en début de cycle 2. Nous discutons l'aide qu'elle pourrait apporter aux enseignants pour évaluer les connaissances de leurs élèves impliquées dans la résolution d'un problème arithmétique à énoncé verbal.

# I - INTRODUCTION

L'atelier a pour objectifs de partager nos résultats concernant les procédures de calcul mental[1] additif au début du CE1 (élèves âgés de 6 à 7 ans) et de discuter des potentialités de la grille d'analyse didactique qui les organise pour accompagner l'enseignant dans le repérage de savoirs mathématiques en résolution de problèmes arithmétiques (Grapin, Chenevotot, Ledan, Beylot, Mounier et Blanchouin, en révision). Nous nous intéressons à la résolution de problèmes à énoncé verbal (RPAV), c'est-à-dire des « *problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit* » (Houdement, 2011). Nous considérons plus particulièrement certains problèmes de la structure additive (Vergnaud, 1990) : problèmes de transformation avec recherche de l'état final après une transformation positive ou négative ; problèmes de transformation avec recherche de la transformation positive ou négative ; problèmes de réunion avec recherche d'une partie ; problèmes de réunion avec recherche du tout.

Nos[2] réflexions et questionnements sont le fruit du partenariat que nous avons en tant que formateurs en INSPE (Bretagne, Créteil, Lille, Toulouse) avec une dizaine d'enseignants exerçant en cycle 2 dans l'école Danton située en REP en Seine Saint Denis (circonscription de Montreuil 1). La recherche/formation qui nous réunit a été initiée en septembre 2020 à la suite d'un Lieu d'Education Associé (EvalNumC2, Blanchouin, Grapin, Mounier et Sayac, 2021). Elle se déroule dans le cadre d'une formation continue entre pairs concernant la résolution de problèmes, conçue à partir des principes formulés par le rapport « *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* » (Villani et Torossian, 2018). Nous menons ainsi régulièrement (quatre à six fois dans l'année scolaire) des analyses collectives de séances de résolution de problèmes, motivés par des préoccupations spécifiques à chacun des deux groupes d'acteurs (formateurs-chercheurs & professeurs des écoles (PE)). La figure suivante (Figure 1) spécifie ce qu'il en est pour l'année scolaire 2021-2022, dans la continuité de l'année précédente.

Pour répondre aux objectifs de l'atelier, nous avons choisi d'exploiter du matériau recueilli en CE1 au tout début de notre collaboration en novembre 2020 : un extrait filmé d'une séance d'évaluation diagnostique en résolution de problèmes ; huit courts enregistrements d'entretiens individuels avec des élèves menés par l'un ou l'une d'entre nous, consistant à demander à l'élève de réaliser un calcul mental avec les mêmes données numériques que celles présentes dans les problèmes à résoudre. Ces deux types de traces d'activité d'enseignement/apprentissage sont issues d'un dispositif évaluatif, les « défis maths » (Annexe 1), négocié avec les PE pour les aider à débuter en CE1 leur enseignement en résolution de problèmes avec leurs anciens élèves de CP.

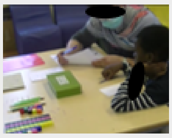
Le déroulement effectif de l'atelier a été repris pour structurer le contenu de ce texte à partir de prises de notes, de photos et de l'enregistrement audio de deux des sept groupes constitués avec les 35 participants.

[1] Il s'agit en fait de déterminer la somme de deux nombres qui, nous le verrons, peut se faire via un comptage ou un calcul (Conne, 1989). Dans cet article, nous utilisons le terme de calcul mental pour désigner ce type de tâche car c'est l'appellation la plus commune dans la sphère professionnelle des enseignants et des formateurs.

[2] Dans cet article le « nous » désigne les six auteurs.

**6 FORMATEURS en INSPÉ**
**(dont 4 chercheurs)**

**1-Documenter l'activité en résolution de problèmes des élèves en début d'école élémentaire (6 à 8 ans)** en échangeant dans deux sphères (entre formateurs ; avec les PE) à partir d'enregistrements vidéos de moments ordinaires de classe, des productions finales des élèves, ou encore d'entretiens individuels avec les élèves.

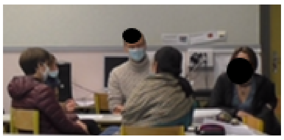


**2-Controverser autour d'hypothèses de compréhension de cette activité** à partir d'une référence commune (Verschaffel et al., 2000) et de l'étude de la compréhension du lien entre connaissances en calcul mental et résolution de problèmes arithmétiques verbaux (RPAV)

**3-Poursuivre la réflexion méthodologique** (contexte de tournage ; accès à la planification ; traitement des images) pour caractériser les gestes évaluatifs des PE et les diversifier au service d'une plus grande participation des élèves au processus d'apprentissage.

**OBJET COMMUN**

**-Analyse de la co-activité [PE-élèves] lors de rituels de résolution de problèmes, éclairés** par le projet de l'enseignant *(méthode du think aloud, Charters 2003)* & un retour sur la séance à chaud *(court entretien compréhensif)*, **au service de la régulation de l'enseignement / apprentissage.**



**-En lien avec l'enseignement de la résolution de problèmes et du calcul mental** à partir d'un même manuel (Mon année de Math, Mazollier et al., 2016)

**12 PE de cycle 2**
**11 classes**

**-Analyser l'activité des élèves pour dégager des pistes d'action** *(gestes professionnels ; règles de métier ; outils)* **à partir des écarts au manuel utilisé concernant** le déroulement de la séance à partir de l'interprétation de : l'objectif de la séance, des indications de « différenciation », de la liste des erreurs possibles des élèves pour les anticiper/les prendre en compte in situ.

**-Interroger les potentialités d'un moment** ***non proposé*** **par la méthode** *(genèse : échanges lors de l'année 2020/2021 au sein du collectif mixte [Formateurs-PE])* afin de favoriser la continuité de l'apprentissage entre 2 séquences.

*Figure 1. Les motifs des acteurs du collectif mixte de la recherche/formation*

La partie II qui suit est consacrée à la problématisation et correspond au lancement de l'atelier qui a duré une cinquantaine de minutes. Nous y présentons des éléments théoriques qui permettent de relier la RPAV aux connaissances en calcul mental (dont certaines sont étudiées ensuite) ainsi que l'extrait de classe visionné en grand groupe pour illustrer ces liens dans le vécu de la classe. Nous clôturons cette partie II de l'article par le questionnement qui a introduit l'étude des procédures de calcul additif d'élèves de début de cycle 2. Nous relatons ensuite cette étude dans la partie III en introduisant puis testant une grille d'analyse didactique que nous avons élaborée. Cette partie III, d'une durée effective d'une heure 10 min, correspond à l'activité principale de l'atelier. Dans une dernière et IVème partie, nous revenons sur les potentialités et les limites de la grille pour analyser l'activité des élèves, puis sur les retombées pour la formation des PE. Nous terminons par des perspectives de recherche.

## II - PROBLEMATISATION

Dans cette partie, nous exposons les éléments qui permettent de relier la RPAV aux connaissances en calcul mental. Ils sont issus d'un travail de recherche développé depuis plusieurs années dont certains aspects vont être précisés.

Afin de saisir ce que « font » les élèves et les enseignants lors de séances dédiées à la RPAV, nous distinguons tâche et activité en les définissant de manière dialectique.

> *La tâche est ce qu'il y a à faire ; le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions ». […] L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi des inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, la manière dont il gère son temps, mais aussi son état personnel – sa fatigue, son stress, le plaisir pris à l'interaction avec les élèves dans telle situation de classe, etc. (Rogalski, 2003, p. 349-350).*

Concernant un élève, la tâche mathématique initiale est le plus souvent prescrite par l'enseignant. Elle peut être redéfinie de manière diverse par l'élève et cette redéfinition n'est pas toujours cohérente avec la tâche attendue par l'enseignant. Ainsi, résoudre un problème peut se réduire à une tâche consistant à trouver l'opération en jeu « cachée » dans le texte et (bien) faire un calcul ; autrement-dit c'est essentiellement une tâche de calcul ou de dénombrement, le contexte n'étant qu'un prétexte (Van Dooren, Verschaffel, Greer, De Bock et Crahay, 2015). Nous utilisons le terme de « procédure » (au sens de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, voir par exemple Bessot (2003)) pour nommer l'activité cognitive qui recourt à des connaissances mathématiques concernant les traitements des nombres et des quantités (calculs et comptages en particulier). Comme nous allons le voir, l'activité cognitive déployée en RPAV fait cependant potentiellement appel à un ensemble varié de connaissances et de ressources cognitives et métacognitives. Dans cet article, sans les oublier, nous mettons en arrière-plan d'autres types de ressources citées par Rogalski (2003), par exemple sociales ou psychologiques. Signalons enfin que la distinction entre tâche et activité est également mobilisée pour regarder et comprendre « ce que fait l'enseignant » des tâches prescrites dans les textes institutionnels et comment il s'empare de ressources diverses (manuels scolaires, sites internet).

## 1 Une référence théorique pour appréhender l'activité en résolution de problèmes

Le schéma (Figure 2) de Verschaffel, Greer et De Corte (2000) permet de considérer la résolution de problèmes comme une activité dans laquelle intervient un processus de modélisation mathématique. Cette approche a été convoquée dans des recherches postérieures (Houdement, 2011 ; Van Dooren et al., 2015 ; Fagnant, 2018) mais aussi prise comme référence dans le récent document institutionnel concernant la résolution de problèmes destiné aux enseignants de l'école élémentaire (MENJS, 2022).

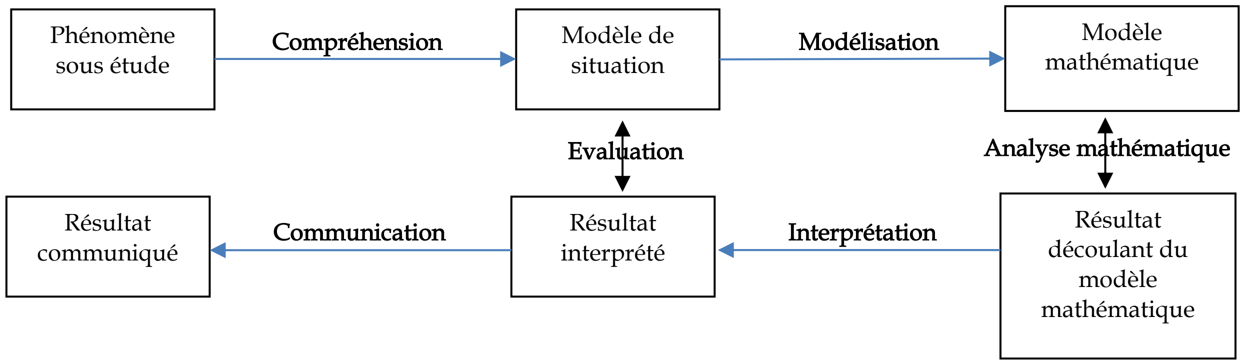



*Figure 2. Schéma du processus de résolution de problèmes (Verschaffel et al., 2000)*

Le schéma de la figure 2 ne doit pas laisser penser que l'activité déployée pour résoudre un problème est un processus linéaire. Les composantes de ce schéma ne sont pas à considérer comme des étapes à suivre de manière successive et encore moins comme une méthode pour résoudre un problème. Verschaffel et al. (2000) considèrent que leur modélisation du processus de résolution de problèmes peut être utilisée pour appréhender l'activité d'élèves d'âges divers et pour une diversité de problèmes arithmétiques. Nous présentons alors comment nous l'exploitons dans le contexte particulier d'élèves de cycle 2 (élèves âgés de 6 à 9 ans) qui sont au début de l'apprentissage scolaire de la RPAV et des opérations.

Prenons l'exemple de la résolution d'un problème relevant des structures additives (Vergnaud, 1990) avec recherche de la transformation positive dont l'énoncé est : « Au début Pierre a 2 billes. A la fin, il a 5 billes. Combien en a-t-il gagnées ? » et de sa résolution par l'opération 5-2, fournissant la réponse 3. Le texte du problème donne accès au phénomène sous étude. Le modèle mathématique est une soustraction (5-2= ?) ou une addition à trou (2+ ?=5). L'analyse mathématique conduit à une procédure amenant au résultat « 3 » dérivant du modèle mathématique (par un calcul mental par exemple) qui permet de formuler le résultat communiqué : « Pierre a gagné 3 billes ». Pour rendre compte de ces éléments et aussi des éléments non encore cités de la figure 2 (le modèle de situation et le résultat interprété ainsi que l'évaluation), nous avons pris le parti de considérer trois sous-processus (Figure 3).

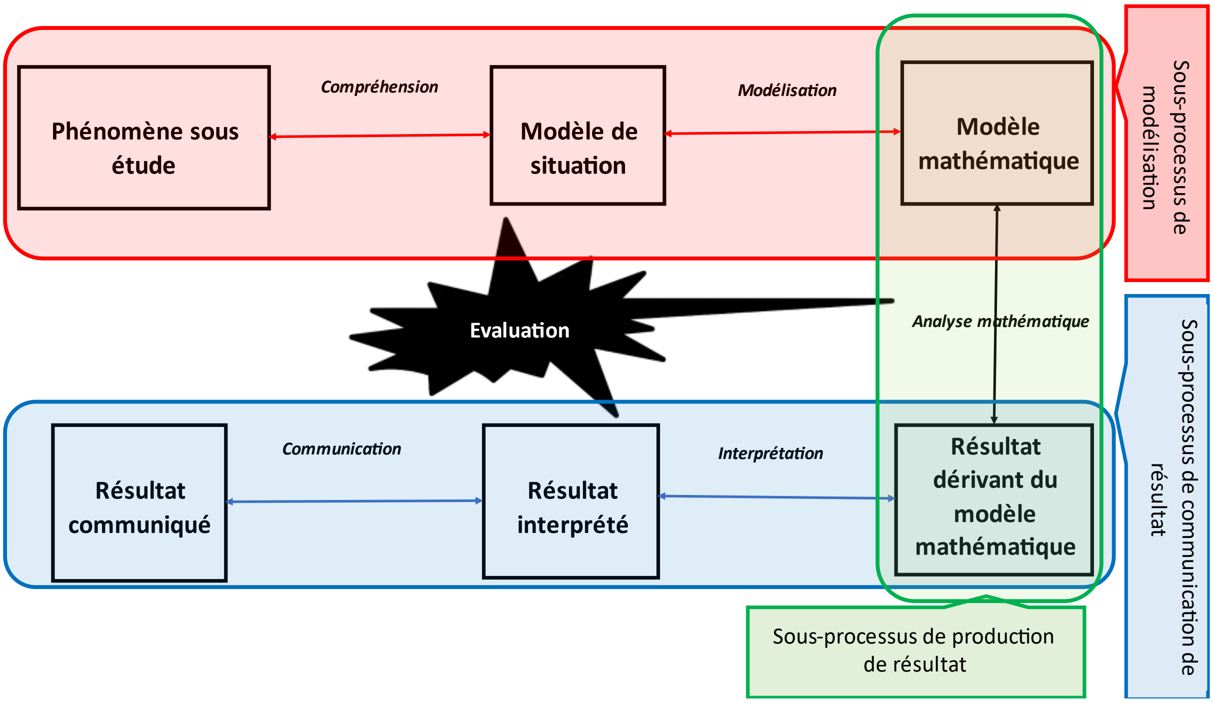



*Figure 3. Interprétation du processus de modélisation en RPAV d'après le schéma de Verschaffel et al. (2000)*

Le premier nommé est le « sous-processus de modélisation ». Il concerne toute l'activité de compréhension de l'énoncé dirigée dans le but de répondre aux questions du type : « A quoi me fait penser ce problème ? De quoi s'agit-il ? A quelle question dois-je répondre ? » et finalement « comment puis-je m'y prendre ? ». C'est ce qui permet de passer du phénomène sous-étude au modèle mathématique[3]. Nous nommons le deuxième sous-processus, « sous-processus de production de résultat ». Sa fonction est de répondre à « Comment obtenir un résultat à partir du modèle produit ? ». Ici le problème à résoudre est en arrière-plan et c'est avant tout une tâche de traitement numérique interne aux mathématiques qui motive l'activité, qui est donc essentiellement réduite à une procédure concernant les nombres et/ou les quantités. Nous appelons « sous-processus de communication de résultat » le troisième sous-processus. Il permet de répondre aux questions : « Est-ce que le résultat numérique obtenu est la réponse au problème ? Comment me permet-il de répondre au problème ? ». Il s'agit alors d'interpréter le résultat dérivant du modèle mathématique en revenant au modèle de situation du phénomène sous-étude, via une évaluation rétrospective, c'est à dire une vérification a posteriori (Burgermeister et Coray, 2008 ; Coppé, 1995). L'évaluation du résultat dérivant du modèle mathématique peut aussi être prospective, c'est-à-dire avoir lieu avant l'obtention d'un résultat, via une estimation (Burgermeister et Coray, 2008), ce qui montre qu'il existe une possible activité évaluative intervenant à différents moments de la résolution d'un problème. C'est cette activité d'évaluation, qui ne concerne pas forcément le résultat[4], qui selon nous éclaire sur la

---

[3] Les recherches de Jean Julo et Emmanuel Sander nous semblent éclairer ce sous-processus ; voir par exemple Julo (1995) et Sander (2016). Citons aussi Voyer, Beaudoin et Goulet (2012) sur les habiletés en lecture, spécifiques aux textes des problèmes arithmétiques.

[4] Margolinas (1993) utilise le terme de contrôle qui concerne également l'ensemble de la résolution. Houdement (2011) parle d'inférences et contrôles en RPAV. Nous gardons le terme « évaluation » pour se référer à Verschaffel et al. (2000) mais aussi pour souligner d'autres aspects : ceux qui relèvent de l'auto-évaluation - apprendre à l'élève à

non-linéarité du processus de résolution de problème de la figure 3. Par ailleurs la dimension non linéaire est également relevée par Julo (1995) :

> *Il existe nécessairement des liens étroits et une dynamique commune entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème, entre les procédures ou les stratégies que l'on élabore et la représentation que l'on se construit peu à peu, entre les connaissances qui vont servir à agir et celles qui vont servir à comprendre le problème (p. 24).*

Dans l'activité déployée en RPAV, nous nous intéressons plus particulièrement au rôle joué par les connaissances à l'œuvre dans les procédures mobilisées par l'élève lors du sous-processus de production de résultat. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 2 Un point sur les liens entre les connaissances des élèves en calcul et les activités en RPAV

Au début de l'atelier, afin de situer notre questionnement, nous avons évoqué de façon succincte des recherches antérieures, en didactique ou en psychologie, pour montrer l'intérêt de questionner les connaissances des élèves en calcul afin de mieux comprendre comment ils résolvent des problèmes. Certains résultats peuvent sembler contrastés et/ou conduire à des interprétations opposées.

En effet, Van Dooren et al. (2005) expliquent que les élèves qui sont entrainés à produire des raisonnements proportionnels appliquent ces raisonnements à certains problèmes non proportionnels. Cela conduit ces auteurs à dire, au moins dans ce cas, « *qu'un automatisme de calcul, bien entraîné et fortement ancré dans la base de connaissances des sujets, interfère avec la mobilisation du modèle mathématique adapté* » (ibid., p. 207). Par ailleurs, Van Dooren et al. (2015) expliquent qu'un certain type de travail fait à l'école élémentaire pourrait entrainer l'acquisition d'une expertise dans l'application d'un modèle mais pas dans le fait de reconnaître quelles situations relèvent de ce modèle. Les élèves utiliseraient alors des indices de surface pour décider de l'utilisation de ce modèle.

Quant à Butlen (2004), il indique qu'un entrainement au calcul mental permettrait des progrès en RPAV qui ne seraient pas limités à l'activité dans le sous-processus de production du résultat mais qui affecteraient les différents sous-processus :

> *« Un entrainement au calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves [favoriserait] une "prise de sens" et [contribuerait] ainsi à accélérer le processus d'automatisation de la reconnaissance […] cette aisance [contribuerait] à alléger la charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et de la représentation du problème » (ibid., p. 72).*

Le lien entre les procédures de calcul et le sous-processus de modélisation est à mettre en perspective avec le travail mené dans les classes. Or, selon les recherches, ce n'est pas toujours étudié, les auteurs ne faisant le lien qu'*a posteriori* avec leurs résultats. Pour regarder ce lien, nous n'étudions pas l'effet d'une certaine pratique régulière de calcul mental sur la réussite ou les démarches des élèves en résolution de problèmes arithmétiques. Nous avons choisi d'analyser une recherche/formation (Figure 1) qui comporte entre autres la conception et l'expérimentation d'une ingénierie évaluative en résolution de problèmes (Annexe 1).

---

juger la validité de sa production, voire de l'autorégulation - apprendre à l'élève à repérer comment modifier sa production (Mottier-Lopez, 2015, p. 85).

# 3 Un détour par la classe : illustration de la complexité pour l'enseignant d'accéder à l'activité cognitive de l'élève

## *3.1 Objectifs et modalités du visionnage collectif proposé lors de l'atelier*

Après la présentation des éléments théoriques précédents, les participants de l'atelier ont visionné un court moment de classe (Annexe 2), issu du dispositif évaluatif (Annexe 1) duquel sera également extrait les vidéos d'élèves en calcul mental analysées ultérieurement. Ce moment de classe permet d'illustrer la fonction ambivalente (levier ou obstacle) des connaissances en calcul d'un élève de début de cycle 2 lorsqu'il est en activité de RPAV. Il permet également de souligner la complexité pour l'enseignant à prendre des indices sur l'ensemble des connaissances en jeu à mobiliser *a priori* (en mathématiques mais aussi en français, construction de l'espace, du temps…) et qui doivent être disponibles effectivement chez les élèves. Il s'agit pour l'enseignant de les prendre en compte pour diriger ses observations, relancer et écouter les élèves de façon ajustée (Salliot, 2020) au service de l'apprentissage des élèves et de la régulation de son enseignement *in situ*/à moyen terme (suite de la séquence) /à long terme (programmation annuelle par période au sein d'une année d'un cycle).

Durant l'atelier, le visionnage en discontinu a offert un espace d'échanges après la présentation en collectif du problème par l'enseignante (L*) puis après les quatre premières minutes d'activité de recherche des élèves lors desquelles L* est rapidement interpellée par un élève (G*) avec qui elle décide de prendre un temps pour mieux comprendre son raisonnement (Annexe 2). Les participants de l'atelier ont reçu pour consigne de :

1. Caractériser la façon dont le problème est présenté aux élèves (cf. Figure 4) ;
2. Émettre des hypothèses d'une part sur le type d'informations que L* cherche à recueillir à propos de l'activité de certains élèves et d'autre part sur les dilemmes et les difficultés éprouvées par L* (cf. Figure 5).

Nous avons ainsi collectivement dégagé la façon dont L* présente le quatrième et dernier problème de la séance dont l'énoncé est le suivant :

« On a deux sachets de jetons et une boîte vide. Dans un sachet il y a 20 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet il y a 30 jetons d'une autre couleur. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ? ».

Pour ce problème de réunion avec recherche du tout, L* réalise deux mimes successifs sans faire référence au texte écrit de l'énoncé (possiblement consultable par les élèves sur leur livret individuel) et en mimant les actions de versement sans les sachets (elle utilise ses poings fermés puis ouverts). L* se retrouve gênée pour coordonner le versement simultané des deux sachets, ce qui la conduit à « renouveler » le mime en l'exécutant de façon continue et plus rapide lors d'une deuxième lecture orale de l'énoncé ; ce qu'elle n'avait pas fait pour les trois problèmes de transformation précédents.

| Annonce de la lecture du 4ème problème 13s | Mime (1) de la situation par L* 1' | Mime (2) de la situation par L* 20s |
|---|---|---|
| | Caractéristiques du mime :<br>-Lecture de l'énoncé : accent tonique sur les données numériques ; bafouement autour de la dernière action (je verse 2 jetons… mes 2 sachets de jetons).<br>-Tempo lent : le texte est scandé de silences.<br>-Réalisation sans le matériel « réel » : recours à son corps -les 2 bras-avant-bras-mains (ouvertes-fermées) pour signifier les sachets- et à une boîte métallique.<br>-Alternance de regards entre les élèves, chacun des 2 bras et le texte de l'énoncé déposé sur le bureau.<br>Elèves : silencieux ; ont le texte du problème écrit (4ème page du livret) qu'ils ne semblent pas « suivre » lors du mime. | Caractéristiques du mime :<br>-Lecture de l'énoncé : confusion entre « sachet » et « jetons » lors de la formulation de la question.<br>-Tempo rapide en faisant de courtes pauses entre chacune des phrases de l'énoncé dites en continu.<br>-Plus grande fluidité par rapport au mime précédant avec des gestes moins emphatiques et une meilleure coordination des différentes actions ; même matériel utilisé.<br>-Regard davantage dirigé vers 2 élèves en difficultés de l'îlot gauche.<br>Elèves : silencieux ; certains semblent commencer (se penchent vers l'espace feuille pour répondre). |

*Figure 4. Présentation du 4e problème (durée 1min 30)*

Les participants ont ensuite pris plus particulièrement connaissance de ce qui s'est passé entre L* et G* lors de la phase d'activité de recherche des élèves (Figure 5).

**EPISODES concernant les interactions entre l'enseignante, L* et un élève, G* environ 4'15**

| Interventions de L* à l'îlot central 4s | Interventions de L* à l'îlot de droite, à la place de G* 4'08 | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sollicitation immédiate de G* envers son enseignante (L*). G* a quitté sa table (située à moins d'1 mètre de L*) pour venir se positionner à côté de L* en lui tendant ce qu'il a écrit (page du 4ème problème) et en luis demandant « c'est + ou - ». L* dit qu'elle ne sait pas tout et qu'elle va lui refaire la scène, tout en amenant G* à se réasseoir. | **1-Représentation du problème par L*** *près d'1'*<br>-2 mimes de 15s reprenant la gestuelle de la présentation en collectif mais la durée n'est pas utilisée de la même façon. L* étire le temps lors du mime 1 sur le début de l'énoncé et sur le mime 2 sur la question.<br>-Un élève (Lou) donne la réponse à la volée | **2-Echanges autour de la bonne réponse de G*** *près de 2'*<br>G* pour justifier le choix du signe « + » explique sa procédure de calcul (qui est juste) et ne revient pas à la situation (contexte, question) | **3-Echanges autour de la bonne réponse de G*** *près de 1'05*<br>L* relance sur le choix de l'opération. G* est toujours incapable de le justifier en revenant à la situation | **4-L* Invite G* à écrire sa réponse sur sa feuille** *quelques secondes* |

*Figure 5. Épisodes concernant les interactions entre L* et un élève G**

### *3.2 Analyse de l'extrait de classe*

À la lecture du problème conçu par les chercheurs, lors de la préparation, l'enseignante (L*) et sa collègue (C*) ont fait quelques remarques sur le lexique mais aussi sur la faisabilité des calculs[5] :

*L * : « Non là il n'y aura pas de pas de problème...Je pense... (pause 2s) Et là, à mon avis, on n'aura pas le 30*

[5] Dans le cadre de la recherche/formation, les chercheurs ont demandé aux enseignantes, durant la planification, d'exprimer à voix haute et d'enregistrer tout ce à quoi elles étaient en train de penser (méthode du *think aloud*, Charters (2003)). Les extraits sont issus de ces enregistrements.

> *plus 20. Il passera mieux ici qu'en calcul mental parce qu'ils ont le support de l'écrit, la place de poser le calcul, de l'écrire, et le temps d'établir une procédure pour parvenir au résultat. Ok ».*
>
> *C* : « Pour celui-ci du coup les étapes sont plus évidentes en tout cas elles sont, c'est annoncé de façon plus évidente (…). Les nombres en jeu sont importants mais ... mais ils ne me semblent pas être justement hors de portée des enfants, même les plus fragiles, parce qu'il y a le repérage de dizaines qui est assez évident ici ».*

En classe, le sous-processus de production du résultat est au centre de l'interaction entre l'enseignante L* et l'élève G*. Ainsi L* choisit-elle, après deux lectures mimées en collectif, de renouveler cette même présentation de l'énoncé du problème pour que G* s'en empare. Elle ne diversifie pas les moyens d'appropriation de la situation à résoudre (retour au texte ; récit du problème à résoudre ; dessin ; proposition de matériel pour « jouer la situation » …) afin d'enquêter sur « le modèle de la situation » de G*. La justification par G* du choix du signe opératoire (témoignant possiblement de son modèle mathématique) aurait pu le permettre. On peut penser alors que c'est le sous-processus de modélisation que L* cherche à appréhender[6]. Mais l'attention de G* est focalisée sur la réalisation du calcul et de son résultat ; L* se retrouve alors à évaluer les connaissances en numération de G*, avec toute la difficulté qu'ont les jeunes élèves d'expliquer après coup leur procédure. Après l'avoir relancé en vain sur le choix du signe opératoire (le retour à la situation est donc avorté), L* clôture l'interaction en invitant G* à écrire le résultat alors que les autres élèves commencent à lever le doigt et qu'elle n'a pas pris d'informations sur l'activité des deux élèves très fragiles de l'îlot de gauche. Il s'est donc écoulé quatre minutes pendant lesquelles L* a été confortée sur le point de vue qu'elle a sur G* (« élève en difficultés en français et qui s'en sort en mathématiques », d'après le think aloud) sans prendre d'indices précis sur les obstacles qu'il rencontre lors de la résolution d'un problème mathématique.

Finalement, à la vue de la gestuelle des doigts de G*, coordonnée à certains mots et à son discours, ce n'est pas un manque de connaissances en calcul qui nous semble être l'obstacle principal à ce que G* résolve le problème. On peut alors penser que si les habilités en calcul de G* lui ont permis de s'engager dans la résolution du problème en cherchant « quoi faire avec les nombres du problème », elles peuvent en même temps être un frein à ce qu'il s'engage dans la tâche scolaire « résoudre un problème mathématique » avec le projet de comprendre « ce qui se passe » afin de repérer « ce qui est à résoudre ». En ce début de scolarité en élémentaire, G* ne semble pas faire beaucoup de différence entre les tâches prescrites par l'enseignant en séance de calcul mental ou de construction de la numération décimale et celles de résolution de problèmes.

## 4 Problématisation

Nos réflexions, basées en particulier sur les recherches citées et sur les échanges avec les PE de notre groupe de recherche/formation, nous ont poussé à investiguer les connaissances en-acte (Vergnaud, 1990) dans le calcul mental et à voir en quoi elles pourraient intervenir en RPAV. De manière générale, en étudiant les procédures des élèves, nous nous sommes demandé :

- En quoi certaines connaissances sur les nombres et les opérations pourraient-elles influer sur le processus de résolution de problèmes ? De quels problèmes ?
- Dans quelles tâches de calcul mental ces connaissances pourraient-elles être en jeu (et travaillées en classe) ? Comment les repérer ?
- En quoi cela pourrait-il aider les enseignants ?

[6] Une autre élève, Lou, a répondu « signe plus » à la place de G*. L* cherche à savoir si G* aurait aussi spontanément répondu la même chose.

Nous formulons une hypothèse pour la formation des PE enseignant en début de cycle 2 : une meilleure connaissance des procédures des élèves pourrait participer à développer une activité évaluative au quotidien au service des apprentissages. Par exemple, lors de la conception d'une séance, il s'agirait de pouvoir aider les enseignants dans les choix des données numériques des problèmes, dans la conduite d'une éventuelle phase collective de mise en commun/correction ; ou encore, en classe, dans la prise d'indices sur l'activité des élèves pour rétroagir individuellement et/ou collectivement.

La suite de l'atelier se centre sur l'étude de la robustesse de la grille d'analyse que nous avons produite pour repérer les procédures et connaissances relevant du « sous processus de production du résultat » (Figure 3). Notre objectif principal est donc ici de discuter de l'aide que la grille pourrait apporter aux enseignants pour évaluer les connaissances de leurs élèves potentiellement impliquées dans le processus de modélisation en résolution de problèmes.

# III - ETUDE DE PROCEDURES D'ELEVES POUR DETERMINER DES SOMMES EN DEBUT DE CE1

Nous abordons ici la partie centrale de l'atelier qui a pour enjeu l'étude de procédures d'élèves de début de CE1 pour déterminer des sommes (qui fait écho dans la sphère professionnelle des enseignants et des formateurs à une tâche de calcul mental comme nous l'avons déjà signalé). Après avoir exposé le déroulement de ce moment de l'atelier, nous présentons les modalités expérimentales de recueil des vidéos d'élèves qui ont été données à voir aux participants. Vient ensuite la présentation de la grille d'analyse des procédures des élèves et sa mise en œuvre par les différents groupes lors de l'atelier. Nous terminons par une synthèse sur les connaissances mathématiques en jeu dans chaque procédure.

## 1 Présentation générale

### *1.1 Un déroulement en cinq phases de travail*

Nous avons proposé cinq phases de travail pour amener les participants à découvrir et discuter de l'intérêt de la grille pour déterminer les procédures et les connaissances des élèves de début de cycle 2 pour calculer des sommes :

- Phase 1 : les participants déterminent individuellement les procédures qu'un élève de CE1 peut utiliser pour trouver le résultat de 2 + 5 et de 20 + 30 ;
- Phase 2 : nous présentons la méthodologie de recueil de données issues du dispositif d'évaluation que nous avons conçu (Annexe 1) ; certaines des données recueillies sont exploitées dans la phase 4 ;
- Phase 3 : la mutualisation des procédures identifiées par les participants en phase 1 conduit à la présentation de la grille d'analyse ;
- Phase 4, à l'aide de la grille :
    - 1er temps : collectivement, les participants visionnent à la suite huit vidéos d'élèves en train de déterminer la somme de deux nombres. Il leur est demandé de déterminer individuellement la procédure de l'élève au fur et à mesure du visionnage, comme s'ils observaient l'élève en classe ;
    - 2e temps : en groupe, les participants sont invités à déterminer les procédures précises employées par les élèves avec la possibilité de visionnages successifs sur tablette numérique ;
- Phase 5 : la mise en commun conduit à une synthèse sur les procédures utilisées par chaque élève et sur les connaissances mathématiques mises en jeu dans ces procédures.

### 1.2 Présentation de la méthodologie de recueil de données en phase 2

Le dispositif évaluatif (les « défis maths ») s'est déroulé en deux parties : une première partie sur le calcul mental et une deuxième partie sur la résolution de problèmes. Nous n'avons retenu pour cet atelier que la partie dédiée au calcul mental, mais nous revenons sur ce lien entre calcul mental et résolution de problèmes dans la conclusion.

Les calculs que nous avons sélectionnés sont des sommes dont les deux termes sont soit des « petits nombres » (PN), inférieurs ou égaux à 5, soit des « grands nombres ronds » (GNR), égaux à un nombre entier de dizaines inférieur ou égal à trois. Ainsi, la somme de deux PN est inférieure ou égale à 10 et celle de deux GNR est inférieure ou égale à 50. Le tableau ci-dessous (Tableau 1) récapitule l'ensemble des additions proposées aux élèves au cours de trois séries.

| | PN | GNR |
|---|---|---|
| 1ere série | 5+3 ; 3+2 | 30+20 |
| 2e série | 5+2 ; 2+3 | 30+10 |
| 3e série | 2+5 ; 3+5 | 20+30 ; 10+30 |

*Tableau 1. Listes des sommes proposées aux élèves*

Ces calculs ont d'abord été proposés aux élèves de trois classes de CE1 par leur enseignant, sans aide ni correction (ces séances ont été filmées). Nous avons au préalable demandé à chaque PE de sélectionner quatre élèves de sa classe à profil spécifique : un élève sans difficulté ni en mathématiques ni en maitrise de la langue ; un élève sans difficulté en mathématiques, avec des difficultés en maitrise de la langue ; un élève avec des difficultés en mathématiques, sans difficulté en maitrise de la langue ; un élève avec des difficultés en mathématiques et en maitrise de la langue.

Dans chacune des trois classes, ces quatre élèves ont alors repassé individuellement, avec un chercheur, l'ensemble des défis, en particulier la partie calcul mental. Ces passations individuelles ont été menées sur trois jours différents (Tableau 1). Le chercheur a lu deux fois la somme avant d'inviter l'élève à écrire le résultat sur papier blanc puis de lui demander comment il avait procédé pour la trouver. Afin de pouvoir étudier l'activité de l'élève, une caméra fixe tournée vers le chercheur et l'élève a enregistré l'ensemble des passations.

L'analyse *a priori* en termes de procédures et de connaissances qui a conduit à l'élaboration de la grille d'analyse didactique présentée ci-après a ensuite permis d'étudier l'activité des élèves à partir des vidéos.

## 2 La grille des procédures introduite en phase 3

Les procédures proposées par les participants pour déterminer le résultat de 2 + 5 et de 20 + 30, lors de la phase 1, rejoignent celles que nous avons listées dans notre analyse (Grapin & al., en révision). Plus généralement, nous avons dégagé quatre catégories de procédures pour déterminer la somme de deux PN et de deux GNR selon les connaissances qu'elles mettent en jeu (ce que nous développons au paragraphe 4) : par reconnaissance immédiate (P1), par comptage ou surcomptage (P2), par calcul sans mobiliser le nombre de dizaines (P3) et en mobilisant le nombre de dizaines (P4). Différentes procédures peuvent relever de chacune des catégories ; ces déclinaisons ont été explicitées lors de l'atelier et une synthèse a été fournie (Annexe 3). Pour chaque procédure, des exemples ont été donnés comme l'illustre le tableau 2 ci-dessous pour les catégories de procédures P1 et P3.

| P1 : Procédure par reconnaissance immédiate |
|---|
| **Exemple pour un plus deux (PN) :** L'élève visualise dans sa tête une première collection d'un objet et une deuxième collection de deux objets puis il reconnait par subitizing que cela forme une collection de trois objets et dit trois.<br>**Exemple pour quatre plus deux (PN) :** L'élève représente sur une main quatre par connaissance des configurations de doigts à partir du nom du nombre puis sur l'autre main deux ; il reconnait six et dit six. |
| P3 : Procédure par calcul sans mobiliser le nombre de dizaines |
| P31 : Connaissance automatisée de la somme des nombres en commutant ou non les termes. |
| **Exemple pour trois plus cinq (PN)** : l'élève sait que *trois* plus *cinq* ou *cinq* plus *trois* est égal à *huit.*<br>**Exemple pour trente plus vingt (GNR)** : l'élève sait que *trente* plus *vingt* ou que *vingt* plus *trente* est égal à *cinquante*. |
| P32 : Calcul réfléchi à partir de la décomposition additive d'un terme ou des deux. |
| **Exemple pour cinq plus trois (PN)** : l'élève sait que *cinq* plus *trois* est égal à *cinq* plus *un* plus *deux*, puis il sait que *cinq* plus *un* est égal à *six* tandis que *six* plus *deux* est égal à *huit*. |

*Tableau 2. Quelques procédures illustrées par des exemples de somme*

# 3 Exploitation de la grille pour étudier les procédures des élèves en phase 4

## *3.1 Présentation des vidéos d'élèves*

Huit vidéos ont été extraites des entretiens entre les chercheurs et les élèves lors des passations individuelles. Pour faciliter l'analyse par les participants, ces vidéos ont été sous-titrées, faisant apparaître les échanges entre élève et chercheur. Elles ont été sélectionnées pour montrer, d'une part, la diversité des procédures mobilisées par les élèves de début de CE1 pour déterminer des sommes de PN et de GNR et, d'autre part, la complexité à déterminer la(les) procédure(s) employée(s) par l'élève. Nous avons d'abord demandé aux participants (1er temps) de déterminer individuellement la procédure de chaque élève pour trouver le résultat du calcul mental à l'aide de la grille d'analyse des procédures (Annexe 3) ; les participants ont ensuite (2e temps) dû échanger par groupe sur leurs hésitations et les indicateurs retenus pour choisir la procédure puis indiquer les connaissances mathématiques mises en jeu dans les procédures.

Une mise en commun a été menée à la suite de ce temps de travail collectif et les connaissances sous-jacentes ont été présentées aux participants au fil des procédures rencontrées. Nous avons choisi de rendre compte de ce travail en deux parties : d'abord en revenant sur les échanges entre les participants lors de l'analyse des vidéos (en groupe) puis en présentant la synthèse sur les connaissances en jeu dans les procédures.

## *3.2 Analyse de l'activité des élèves*

Faute de temps, seules six des huit vidéos proposées ont été analysées durant le temps de l'atelier. Nous choisissons de les présenter par type de calcul (d'abord les PN puis les GNR) en donnant au début une brève description (encadrée) de chaque vidéo. Un récapitulatif des procédures des élèves relevées par les animateurs et les participants est donné en annexe 4.

*2+5 par Ralf*

> Ralf *: Je savais déjà. Avant je savais que cinq plus trois est égal à huit et un jour je me suis dit et si on faisait moins un et plus un. Peut-être plein de truc par cœur et j'ai commencé à faire plein plein plein de calculs et ça fait pareil et après j'ai réussi à connaitre par cœur.*

De façon consensuelle, nous avons conclu avec les participants que Ralf a mis en œuvre une procédure par calcul (P3) basée sur la commutativité de l'addition (il calcule *cinq plus deux*), l'utilisation d'un résultat mémorisé (*cinq plus trois* est égal à *huit*) et du calcul réfléchi (*cinq plus deux* c'est *un* de moins que *cinq plus trois*). Les échanges ci-dessous recueillis au sein d'un groupe soulèvent la question de l'automatisation du résultat et de ce qui motive la justification apportée par Ralf. Est-ce sa procédure pour déterminer 5+2 ? Ou est-ce qu'il explique comment il a mémorisé 5+2 ?

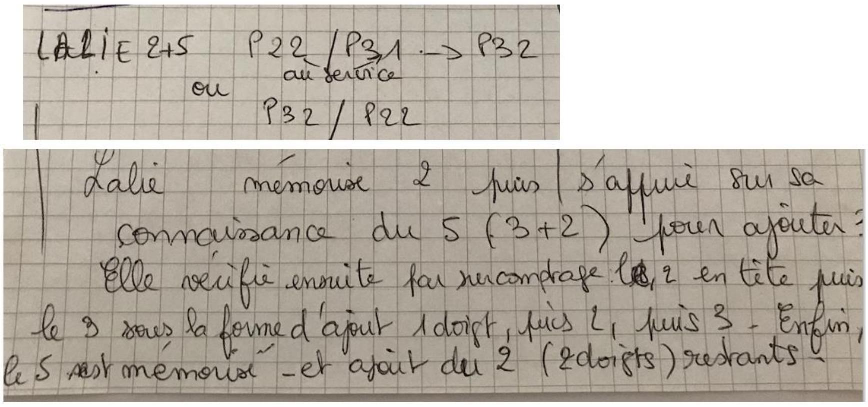
- *« Moi j'ai l'impression qu'il dit comment avant ça lui a permis d'automatiser.*
  *[…]*
- *En même temps il est très rapide pour dire que 5 plus 2 ça fait 7.*
- *Ouais mais si tu as automatisé, en se basant sur 5 plus 3 ça fait 8, je le sais, je suis sûr, 5 + 2 hop j'enlève un à huit, c'est possible mais bon est ce que…*
- *Oui mais bon après il dit qu'on peut ajouter un ou soustraire un. »*

Ces échanges témoignent de la difficulté pour identifier une procédure : est-ce que l'élève a mémorisé le résultat (P31) ou le construit-il par un calcul réfléchi (P32) ? Cela soulève la question de la méthodologie et de l'influence du contrat didactique sur les réponses des élèves ; nous y revenons en conclusion.

***2+5 par Lalie***

| |
|---|
| Lalie : [Elle lève l'annulaire et l'auriculaire de la main gauche qu'elle encercle momentanément par sa main droite] *J'ai deux* [puis elle lève successivement ses doigts, d'abord de la main gauche, puis de la main droite, jusqu'à en avoir sept levés]. |
| Chercheur : *Tu en as mis deux ici* [montre les *deux* doigts de départ] et ensuite ? |
| Lalie : *J'ai mis deux, j'ai mis trois et j'ai mis deux.* [Elle lève spontanément deux doigts puis, successivement, le pouce, l'annulaire et l'auriculaire de cette même main puis deux doigts de la main droite] et écrit *7*. |

Cet exemple illustre l'existence possible de procédures hybrides, basées sur une succession de procédures décrites dans la grille, ou des allers-retours entre différentes procédures :


LALIE 2+5 P22 / P31 → P32
au service
ou
P32 / P22

Lalie mémorise 2 puis s'appuie sur sa connaissance du 5 (3+2) pour ajouter ?
Elle vérifie ensuite par surcomptage le 2 en tête puis le 3 sous la forme d'ajout 1 doigt, puis 2, puis 3. Enfin, le 5 est mémorisé et ajout du 2 (2 doigts) restants.

*Figure 6. Extrait du travail d'un groupe*

Comme on le voit sur le document de travail de l'un des groupes (Figure 6), plusieurs hypothèses peuvent être émises. Lalie aurait-elle surcompté (P22) en ayant en amont décomposé 5 en 3+2 de manière automatisée ? Aurait-elle décomposé 5 en 3+2 et ensuite surcompté de 3 puis de 2 ? Elle pourrait également savoir, en appui sur ses doigts, que 5 c'est 3 et 2, et on pourrait envisager qu'elle surcompte (P22) pour obtenir le résultat ou qu'elle reconnaisse le résultat par reconnaissance immédiate (P1). Si les procédures recherchées sont celles permettant de déterminer la somme, nous observons ici des procédures hybrides en appui sur la décomposition additive de nombres et il n'est pas possible de déterminer si la décomposition de 5 en 3+2 relève de P31 (connaissance automatisée) ou P32 (calcul réfléchi).

***5+2 par Marie***

| |
|---|
| Marie : elle lève le pouce de la main gauche et chuchote *six* puis lève l'index de la main gauche et chuchote *sept* puis écrit *7*. |

Les participants ont déterminé de façon consensuelle que Marie surcompte à partir de l'un des deux termes de la somme (P25). Un des participants explicite d'ailleurs : « *c'est très limpide* », mais ses échanges avec sa collègue témoignent de la rapidité d'exécution de la procédure par l'élève et de l'intérêt pour les participants de pouvoir revoir la vidéo :

- *« Elle a mis 5 dans sa tête et elle a fait 6 et 7.*
- *Tu l'as vue faire 6 et 7 ? Ça j'ai pas vu. Refait voir ses doigts ? Si elle montre bien 6 et 7 ? Ça va vite hein.*
- *Regarde tiens. »*

Dans ce cas, la procédure a été déterminée sans aucun doute, aussi bien par les participants que par les animateurs. Mais les choix méthodologiques se sont avérés cruciaux car de multiples visionnages ont été nécessaires.

***5+2 par Isaï***

| |
|---|
| Isaï affiche d'un seul coup (environ une seconde) cinq doigts sur une main et deux doigts sur l'autre main et regarde le chercheur. Isaï écrit *7*. |
| Isaï : *Parce que j'en ai cinq* [montre ses cinq doigts de la main gauche] et j'en rajoute *deux* [montre l'index et le majeur de la main droite] *ça va faire sept ou sinon si tu sais pas, bah tu comptes et ça fait sept.* |
| Chercheur : *Et comment tu fais si tu sais pas ?* |
| Isaï : *Ben en fait, moi, ben je le savais déjà que cinq plus deux ça faisait sept.* |

Un premier groupe de participants explique avoir choisi une procédure basée sur la reconnaissance immédiate d'une somme à partir de représentations mentales (P1) :

- *« Il utilise les deux mains et il compte six, sept.*
- *On le voit pas compter.*
- *C'est carrément une reconnaissance immédiate.*
- *Ouais parce qu'il a cinq il a 2 il dit 7.*
- *Moi je savais déjà que cinq et deux ça fait 7 parce qu'il compte rien il dit 5 et 2 ça fait 7 donc c'est facile je le sais donc c'est P1. »*

Mais un autre groupe opte pour une procédure en appui sur la connaissance automatisée de la somme (P31) :

- *« Isaï, ce qui est intéressant, c'est que visiblement il savait déjà le faire mais il revient à l'explication.*
- *Ouais mais c'est l'attente aussi d'expliquer peut-être.*
  *[…]*
- *Pour moi c'est P31.*
- *Il se souvient encore de comment il a appris finalement avec les doigts. »*

Ces exemples viennent compléter l'analyse faite pour Lalie et nous amènent à conclure de façon générale sur l'impossibilité de trancher entre des procédures par reconnaissance immédiate d'une somme à partir de représentations mentales (P1) et par connaissance automatisée de la somme (P31).

***30+10 par Iban***

| |
|---|
| Iban : *En fait j'ai fait trois et après j'en ai rajouté un ça fait quatre et plus les zéros unités donc ça fait quarante.* |

Animateurs et participants infèrent tous la même procédure, à savoir passer d'un GNR au PN correspondant au nombre de dizaines, ajouter des PN puis utiliser la signification des chiffres dans l'écriture chiffrée (P41). Seul un groupe hésite entre P41 et P42 :

- *« J'hésitais parce qu'il dit aussi je fais 4 et 1 et 0 et 0 c'est presque la P42 je sais pas.*
- *J'ai ajouté 3 et j'ai ajouté un 1 et le 0 des unités ça fait 40, il réfléchit sur les unités de numération quand même.*
- *Et bah donc c'est la P42 tu as raison.*
- *Il pose pas quand même.*
- *P42 il pose dans sa tête ?*
- *En tout cas il réfléchit sur les unités de numération.*
- *Il fait pas 0+0 donc c'est P41. »*

Iban utilise explicitement les nombres de dizaines (trois et un) mais il ne précise pas qu'ils réfèrent à des dizaines, ce qui peut compliquer le repérage d'une procédure P4.

***30+10 par Lalie***

| |
|---|
| Lalie lève trois doigts sur la main gauche (pouce, index, majeur) et dit *trente*, elle lève le pouce de la main droite et dit *trente plus dix, ça fait trois, et trente plus dix, ça fait quarante.* |

Lalie peut être passée du GNR au nombre de dizaines (P41) ou elle peut avoir surcompté de dix en dix à partir de l'un des deux termes de la somme (P25). L'extrait suivant témoigne de ces deux interprétations :

- *« Elle compte de dix en dix ?*
- *Non je crois qu'elle a trente, elle a trois et elle a dit quarante.*
- *Elle passe d'un GNR à un PN c'est P41. »*

Un autre groupe précise que P41 est toujours accompagnée d'une autre procédure :

> *« Mais il y a deux procédures en fait, il y a une procédure où elle passe par les petits nombres mais il y a aussi une procédure avec ses doigts, donc il y a à la fois P41 et il y a aussi une procédure de surcomptage. »*

A la différence d'Iban (paragraphe précédent), Lalie ne fait pas référence au « zéro », renvoyant à l'écriture chiffrée et aux unités de numération. De manière générale, si un élève traite la somme de deux GNR en appui sur les doigts, un doute subsiste entre les procédures P41 et P25.

## 4 Connaissances associées aux procédures en phase 5

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe III.2, nous avons choisi de catégoriser les procédures selon les connaissances mathématiques qui leurs sont associées (Tableau 3).

| **Procédures** | **Connaissances associées** |
|---|---|
| P1 : Procédures par reconnaissance immédiate | ✓ représentations mentales des petites quantités inférieures à 3<br>✓ connaissance des configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10, c'est à dire association d'une quantité de doigts à un mot-nombre (sans passer par le comptage), par exemple associer quatre doigts à quatre à partir de la représentation ci-contre |

| | |
|---|---|
| P2 : Procédures par comptage ou surcomptage | **Connaissances en jeu pour les PN et les GN :**<br>✓ configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10<br>**Connaissances en jeu pour les PN :**<br>✓ récitation de la petite comptine en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé<br>**Connaissances en jeu pour les GNR :**<br>✓ récitation de la comptine des dizaines en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé<br>✓ correspondance entre le repérant (par exemple *trente*) et le nombre de dizaines (par exemple, *dix* plus *dix* plus *dix)*<br>✓ association entre un doigt et une dizaine |
| P3 : Procédures par calcul | ✓ les tables d'addition et les décompositions additives des nombres<br>✓ les doubles dans le cas de la somme de deux nombres identiques ou ayant un écart de un |
| P4 : Procédures mobilisant le nombre de dizaines | Pour P41 :<br>✓ passage du nom du nombre à son écriture chiffrée et réciproquement (pour déterminer le nombre de dizaines à partir de son nom ou lire le nombre à partir de son écriture chiffrée)<br>✓ somme de deux PN (3+2 dans l'exemple choisi)<br>✓ numération écrite chiffrée (aspect positionnel)<br>Pour P42 :<br>✓ algorithme de l'addition posée |

*Tableau 3. Connaissances associées aux procédures (tableau exposé aux participants)*

Ce tableau nous permet de dégager les connaissances associées aux procédures utilisées par les élèves pour déterminer une somme. Il pourrait motiver l'intérêt de faire évoluer des procédures en fonction des connaissances visées sans pour autant chercher à les hiérarchiser. Par exemple, un élève pourrait utiliser P4, témoignant ainsi de connaissances sur la numération écrite chiffrée, sans pour autant maitriser la comptine *de un en un* suffisamment loin indispensable pour P2.

## IV - BILAN DE L'ATELIER ET PERSPECTIVES

Dans un premier temps, nous revenons sur les potentialités et les limites de la grille pour analyser l'activité des élèves. Le second temps est dévolu aux retombées pour la formation des PE sur la RPAV. Nous terminons par des perspectives de recherche.

### 1 Potentialités et limites de la grille pour analyser l'activité des élèves

La présentation puis l'exploitation de la grille des différentes procédures et connaissances sous-jacentes a conduit en fin d'atelier à des échanges oraux en collectif. Nous les avons croisés avec nos analyses des traces audios de la partie centrale de l'activité (cf. partie III) et aussi avec des réflexions issues de nos recherches.

La grille a l'ambition de distinguer les procédures des élèves de manière fine. Nous remarquons que les participants n'ont véritablement éprouvé les difficultés à coder les procédures des huit élèves filmés qu'au cours du deuxième visionnage en groupe. Les conditions de visionnage « à son rythme » des huit vidéos, en maîtrisant les arrêts et les retours en arrière pour revoir et discuter avec les autres, ont permis de prendre des informations plus précises sur la gestuelle et le regard de l'élève ainsi que sur ce qu'il verbalise. Ceci a conduit bon nombre de participants à réinterroger leur codage initial pour certains élèves notamment[7]. Nous avons aussi retrouvé, dans la teneur des échanges entre les participants, les doutes et hésitations que nous avions vécus nous-mêmes pour coder la procédure de chaque élève avec la grille. Néanmoins, pour la grande majorité des élèves, nous relevons une convergence des analyses des participants et des animateurs sur l'identification des procédures (Annexe 4). Il semblerait alors que, pour les données vidéos recueillies, la grille aide effectivement à déterminer les procédures des élèves en les identifiant parmi celles listées, mais aussi à discriminer celles qui semblent à première vue identiques.

Le petit panel d'élèves dont l'activité a été étudiée dans l'atelier témoigne d'une certaine diversité des connaissances en jeu. C'est un autre argument en faveur de l'intérêt d'une grille d'analyse des procédures à un grain fin, basée sur la distinction entre d'une part les connaissances relevant du comptage et d'autre part les connaissances relevant de la numération orale et de la numération écrite chiffrée. Pour les GNR, on voit en particulier l'utilisation conjointe de connaissances déjà repérées pour les PN (doigts, surcomptages, résultats mémorisés) et d'autres liées à des principes de la numération écrite décimale, tel que le fait de concevoir « quarante » comme quatre dizaines, associé potentiellement à l'écriture chiffrée « 40 ».

La question se pose néanmoins de l'influence de ces connaissances dans l'activité en RPAV au-delà du sous-processus de production de résultat (Figure 3). Notre ambition est de mieux comprendre le rôle joué par des « habiletés en calcul » dans la RPAV, afin d'éclairer les résultats contrastés de Van Dooren et al. (2005) et Butlen (2004) que nous avons mentionnés. Il nous semble alors nécessaire de revenir sur la méthodologie consistant à analyser l'activité en « calcul mental » (ici la somme de PN et GNR) indépendamment de celle de la RPAV (Figures 2 et 3). En effet, la tâche concernant les nombres n'est pas rigoureusement identique dans le dispositif de calcul mental (partie 1 des « défis ») et en résolution de problèmes (partie 2 des « défis »). En premier lieu, les conditions de réalisation de cette tâche sont différentes : nombres donnés à l'oral *vs* disponibles en écritures chiffrées dans un texte ; aucun matériel excepté un crayon pour écrire la réponse *vs* espace de travail, gomme et crayon. Ces différences pourraient avoir un impact important sur l'activité des élèves, particulièrement en début de cycle 2. En second lieu, contrairement aux situations de calcul mental, l'activité déployée en RPAV dans le sous-processus de production de résultat ne répond pas à une tâche prescrite mais, potentiellement, à une sous-tâche que l'élève s'est redéfinie, la tâche prescrite étant celle de résoudre le problème. Pour étudier le rôle des connaissances en calcul mental dans l'activité en RPAV, il apparait alors nécessaire de développer une méthodologie tenant compte de ces remarques ; nous y revenons à la fin de ce bilan avec nos perspectives de recherche.

Le degré de précision de la description des procédures de la grille d'analyse nous apparait cependant avoir aiguisé le regard des participants, ce qui nous amène à des réflexions sur la formation.

## 2 Retombées pour la formation des PE sur la RPAV

De manière unanime, les auteurs de ce texte et les participants sont d'accord sur le fait que la grille d'analyse des procédures des élèves n'est pas un outil destiné au PE dans sa classe. Afin d'en voir l'intérêt pour la formation, nous donnons tout d'abord des éclairages généraux sur l'accès par un PE à l'activité cognitive de chacun de ses élèves.

[7] Nous n'avons pas pensé à lancer la mise en commun finale (phase 5) avec un sondage demandant à chaque participant de préciser pour quels élèves il a changé le codage de la procédure entre les deux temps (individuel puis en groupe) de la phase 4. Il nous semble que cela aurait été intéressant pour avoir des données plus précises mais aussi pour animer ce moment de mutualisation sur la grille complète avec, pour chaque procédure, le lien avec les connaissances mathématiques en jeu.

### *2.1 Hypothèses sur la complexité du travail de l'enseignant lorsqu'il fait classe*

Au-delà de l'étude de cas présentée au début de l'atelier (L* et ses 12 élèves), nous avons croisé des observations réalisées depuis 2017 à des pratiques narrées par des enseignants préparant l'examen pour devenir maitre-formateur (Bretagne, Créteil). Au regard de nos travaux sur l'évaluation au quotidien des élèves (Blanchouin, Grapin, Mounier, accepté), nous avons pu formuler des hypothèses sur les difficultés pour l'enseignant en classe d'accéder à l'activité cognitive de chacun de ses élèves pour réguler son enseignement, en particulier lors de séances de RPAV.

L'enseignant a-t-il ou pas un temps d'observation de l'activité d'un (plusieurs) élève(s) ? L'organisation de la classe choisie, les modalités de travail, voire les supports des élèves, offrent des potentialités différentes à l'enseignant pour regarder un (plusieurs) élève(s) silencieusement et/ou avec des questions ciblées et ajustées à ses observations. S'ajoute la difficulté d'interprétation de ce que dit un élève dans le « feu de l'action de la classe » obligeant le PE à décider d'allouer du temps ou non à ce moment, alors qu'il doit gérer le groupe classe.

L'enseignant a-t-il ou non en tête les critères et indicateurs lors du recueil d'indices de l'activité de l'élève ? Ces informations peuvent le renseigner sur les connaissances mathématiques mobilisées par chacun de ses élèves.

L'enseignant guide-t-il ou pas son regard sur ses élèves afin de décider d'intervenir ou non individuellement et si oui sur quel objet ? En fonction des outils des élèves (ardoise, cahier de mathématiques, de brouillon, fichier, affichages, etc.), il s'agit en outre de faire des choix *in situ* sur les modalités d'intervention entre par exemple un oral collectif et des retours individualisés.

A ceci s'ajoute la nécessité d'une analyse différée (potentiellement coûteuse en temps) qu'il faudrait articuler avec une pratique d'évaluation au quotidien. En formation, on voit ici l'importance de considérer ce que peut observer un PE en classe et ce qu'il peut interpréter de ses observations.

### *2.2 Utilisation de la grille en formation*

La grille et les vidéos d'élèves permettent d'apporter des connaissances fines sur la diversité des procédures employées par les élèves. Elles peuvent être mises en relation avec les connaissances à enseigner, notamment sur les deux numérations. Ainsi, en formation, la grille peut aider un PE à accéder à l'activité cognitive de chacun de ses élèves pour réguler son enseignement. Au regard des difficultés relatées ci-avant, il reste que cette dimension de l'activité en classe ne peut être traitée avec cet unique outil. Par ailleurs, si la grille traite des procédures de calcul, peut-elle aussi servir pour aiguiser le regard du PE sur la RPAV ?

Notre travail dans les dispositifs de recherche/formation nous a amené récemment à envisager trois profils archétypaux de PE selon leurs préoccupations durant l'accompagnement de leurs élèves dans la RPAV : une entrée par la compréhension d'un texte de français (accent mis sur la méthodologie d'étude du texte), une entrée par les techniques mathématiques (accent mis sur les habilités en calcul dans le sous-processus de production de résultat), une entrée par la modélisation mathématique (accent mis en particulier sur l'opération à choisir). Ces profils nous semblent à mettre en relation avec la polyvalence du PE, mais aussi avec deux finalités de la RPAV présentes dans les instructions officielles : apprendre à chercher et donner du sens aux opérations. La poursuite conjointe de ces deux finalités nous apparait difficile à gérer par les PE. La grille d'analyse met l'accent sur le sous-processus de production de résultat et, prise isolément, le risque est qu'elle ne concoure pas à ce que les enseignants en formation prennent pleinement conscience des deux finalités. C'est pourquoi, pour l'utiliser en formation, il y aurait lieu de circonscrire le rôle des « habiletés de calcul » dans l'activité en RPAV, par exemple en utilisant la modélisation de Verschaffel (Figure 2, schéma qui est aussi dans le document institutionnel concernant la résolution de problèmes destiné aux enseignants de l'école élémentaire (MENJS, 2022)) ou l'interprétation que nous en avons faite (Figure 3). Être performant en calcul mental n'assure pas la réussite en RPAV (Fagnant, 2018).

Comme nous allons le voir maintenant, il est cependant envisageable de relier de manière plus étroite les « habiletés en calcul » et l'activité en RPAV, mais nous pensons que des recherches complémentaires aideraient à en faire un outil pour la formation.

## 3 Nos perspectives de recherche

En premier lieu, il nous semble nécessaire de faire évoluer notre protocole pour analyser l'activité des élèves dans des tâches de « calcul mental ». Ce dernier doit pouvoir s'adapter à différentes situations, par exemple si l'élève formule une réponse ou réalise des actions visibles. Il nous faut également faire attention à des effets de contrat, l'élève essayant de répondre à ce qui lui semble attendu, par exemple en explicitant une procédure qui vient juste d'être introduite en classe. Nous devons, en outre, réfléchir aux potentialités et limites des échanges verbaux entre un chercheur et un élève de 6 à 7 ans afin de comprendre l'activité de ce dernier. Il pourrait aussi être pertinent de proposer des tâches complémentaires en ajoutant du matériel (de numération comme des cubes emboitables, ou un espace de travail sur feuille) ou des aides, mais aussi des tâches supplémentaires en jouant sur les valeurs de la variable didactique « nombre ».

Ce dernier point donne alors une autre possibilité pour identifier les procédures puis les connaissances des élèves : recouper les analyses concernant l'activité déployée dans des tâches mobilisant un panel plus important de nombres (que les PN et GNR), mais aussi dans des tâches autres que des sommes (des différences ou encore des tâches dont la formulation est de type « pour aller de … à … »).

Qu'en est-il des liens avec l'activité en RPAV ? Certains éléments méthodologiques décrits ci-avant devraient nous aider à analyser une partie de cette activité concernant les procédures (dans le sous-processus de production de résultat). Au regard de nos dernières recherches, il semble qu'une piste se dégage : celle de l'influence sur la démarche en RPAV de la disponibilité d'un certain nombre de procédures maitrisées et considérées comme fiables par l'élève. Ce serait donc moins les connaissances en jeu dans les procédures qui joueraient le plus grand rôle, que leur nombre, leur variété et leur disponibilité. Ces connaissances resteraient cependant utiles à connaitre pour le PE pour qu'il puisse les enseigner afin de déployer ce panel de procédures auprès du plus grand nombre de ses élèves. Une fois précisé le rôle des procédures et connaissances sur les nombres, il serait plus facile de porter attention à d'autres composantes de l'activité déployée dans l'activité en RPAV (Figure 3).

## BIBLIOGRAPHIE

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, 91*.

Blanchouin, A., Grapin, N. et Mounier, E (accepté). Documenter l'activité évaluative des professeurs des écoles à partir de leurs gestes évaluatifs - Etude de cas en mathématiques. *e-Jiref.*

Blanchouin, A., Grapin, N., Mounier, E. et Sayac, N. (2021). Les pratiques d'évaluation en mathématiques à l'école élémentaire : deux dispositifs de recherche formation. *Education & didactique, numéro spécial LEA, 15-3*, 65-84.

Burgermeister, P-F. et Coray, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(1), 63-106.

Butlen, D. (2004). Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles. Habilitation à diriger des recherches. Université Paris 8.

Charters, E. (2003). The Use of Think-aloud Methods in Qualitative Research. An Introduction to Think-aloud Methods. *Brock Education Journal*, 12-2, 68-82.

Conne, F. (1989). Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9-1*, 71-116.

Coppé, S. (1995). Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, *Différents types de savoirs et leur articulation*. La Pensée Sauvage Éditions, 129–144.

Fagnant, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM,* 94-113.

Grapin, N., Chenevotot, F., Ledan, L., Beylot, D., Mounier, E et Blanchouin, A. (2022). Etude exploratoire de procédures d'élèves de 7-8 ans en calcul mental additif. *Revue de Mathématiques pour l'École (RMÉ)*, 238, 29-40.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *16*, 67-96.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Presses universitaires de Rennes.

Margolinas, M. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La pensée sauvage.

Mazollier, M-S, Mounier, E. et Pfaff, N. (2016-2018). *Mon année de Maths CP, CE1, CE2.* Éditions SED.

MENJS, Ministère de l'Education Nationale de la Jeunesse et des Sports (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.

Mottier-Lopez, L. (2015). *Evaluations formative et certificative des apprentissages.* De Boeck.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(3), 343 – 388.

Salliot, E. (2020). *(S') ajuster au cœur de l'activité d'enseignement-apprentissage. Construire une posture d'ajustement.* L'Harmattan.

Sander, E. (2016). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de psychologie*, *546*, 463-469.

Van Dooren W., Essens, A., Janssens, D., De Bock, D. et Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and instruction*, *23*(1), 57–86.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., De Bock, D. et Crahay, M. (2015). La modélisation des problèmes mathématiques. *Psychologie des apprentissages scolaires*, *8*, 199-219.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*, 133-170.

Verschaffel, L., Greer, B. et De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande: Swets & Zeitlinger.

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Rapport pour le Ministère de l'Education Nationale.

Voyer, D., Beaudoin, I. et Goulet, M-P. (2012). De la lecture à la résolution de problèmes : des habiletés spécifiques à développer. *Revue canadienne de l'éducation*, *35-2*, 401-421.

# ANNEXE 1 : PRESENTATION DU DISPOSITIF EVALUATIF DES « DEFIS MATHS » EN DEBUT D'ANNEE EN CE1

## 1. Contexte d'élaboration du dispositif d'évaluation : le besoin des PE rejoint un besoin de chercheurs

Le dispositif évaluatif a été négocié avec les PE de trois classes de CE1 pour les aider à débuter leur enseignement en résolution de problèmes avec leurs anciens élèves de CP, lors d'une année qui a vu les élèves ne pas être à l'école sur plus de 50% de l'année scolaire (novembre 2019-janvier 2020 mouvements sociaux en France contre la réforme des retraites donnant lieu à des grèves répétées d'enseignants puis la crise du COVID-année 1). La préoccupation des PE à faire le point sur les connaissances de leurs élèves afin de repartir de « là où ils en étaient effectivement » a été saisie par les chercheurs pour tester des hypothèses lors de la conception de l'ensemble des tâches évaluatives proposées aux élèves. L'implémentation auprès des PE s'est faite en congruence avec nos façons collaboratives de travailler ensemble précédemment, en dépit de la situation inédite de « mettre en œuvre une ingénierie évaluative pensée par les formateurs-chercheurs ». Les PE ont donc eu un moment de découverte et de réactions /suggestions pour faire évoluer les tâches avant que la version 2 proposée aux élèves soit arrêtée par les formateurs-chercheurs arbitrant entre le fait de pouvoir tester leurs hypothèses et les différentes propositions d'adaptation des PE.

## 2. Contenu

L'ensemble des « défis maths » est composé de deux parties :

- 20 calculs répartis en 3 séries ;
- 12 problèmes additifs, répartis dans 3 livrets différents.

| **Exemple d'une série de calcul mental** (dont sont extraits certains des calculs traités en partie III) | **Extrait d'un livret en résolution de problèmes (page 4)** concernant l'extrait de classe visionné lors de l'atelier (paragraphe II.3) |
|---|---|
| **1ère série de calculs :**<br><br>A. 5 + 3<br>B. 3-2<br>C. 30 + 20<br>D. 3+2<br>E. 5 - 3<br>F. 30 - 20<br>G. De 2 pour aller à 5 | *On a deux sachets de jetons et une boîte vide.*<br>*Dans un sachet il y a 20 jetons d'une couleur.*<br>*Dans l'autre sachet il y a 30 jetons d'une autre couleur.*<br>*Je verse les deux sachets dans la boîte vide.*<br>**Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?**<br>*Écris ta réponse sur les pointillés.*<br><br>**A la fin, il y a ............... jetons.** |

## 3. Dispositif mis en place avec trois classes de CE1

### *3.1 Organisation générale des passations d'évaluations des connaissances des élèves en classe*

Six séances par classe en veillant à un décrochage temporel entre chaque séance évaluative de calcul mental et de résolution de problèmes.

### *3.2 Moments de mise à distance de ce qui s'est passé en classe*

Trois types de situations d'échanges entre les différents acteurs :

1. Des échanges réguliers post séance (15' à 45') avec les enseignantes observées et filmées avec leurs élèves ;
2. Un échange collectif entre [PE-Formateurs-Chercheurs] 1 mois après ;
3. Des entretiens individuels avec 12 élèves menés par les formateurs en mathématiques-chercheurs, 8 jours après les 6 passations en classe.

# ANNEXE 2 : PRESENTATION DE L'EXTRAIT DE CLASSE VISIONNE

## 1. Contexte classe

L'extrait de classe concerne une professeure des écoles expérimentée (près de 10 ans d'exercice) travaillant en cycle 2 depuis 4 ans (en alternant CP et CE1) que nous désignons par L*. L* conduit début novembre 2020 la première séance de résolution de problèmes du dispositif évaluatif. Exerçant dans un contexte de « CE1 dédoublé », L* et sa collègue ont décidé de conduire cette séance en demi-groupe ; L* se retrouve alors bibliothèque avec 12 élèves, élèves qu'elle a eus en CP l'année scolaire précédente qui avait été marquée par des grèves récurrentes en France (novembre à janvier) puis par la crise sanitaire du Covid (à partir de mi-mars).

## 2. L’extrait de séance visionné

D’une durée totale de 6 minutes, l’extrait concerne la passation du dernier problème à résoudre (1’30) puis la première moitié de la durée d’activité de résolution à réaliser individuellement (4’10/8’30).

| **1-L’avant défi du jour 4’** *A la fin du Calcul Mental en début de matinée, L* a annoncé « les défis » aux élèves par « on se creuse la tête »* | | | **2-Les 4 résolution de problèmes (défi du jour) environ 23’** ***(75% de la durée de la séance)*** **dont la durée totale de présentation des 4 problèmes : environ 5’ & la durée totale de recherche environ 18’** | | | | **3-Clôture 3’** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Annonce de l’activité de la séance et des règles de fonctionnement 1’25 | Distribution des livrets 35s | Activité d’écriture du prénom par les élèves 2’ | 2+3 = x<br>≈ 3’<br>*Problème de Transformation avec recherche de l’état final*<br>Présentation : 1’15<br>Activité : 1’45 | 30-10 =x<br>≈7’<br>*Transformation avec recherche de l’état final*<br>Présentation : 1’<br>Activité : 6’ | 5 -x = 2<br>≈3’<br>*Transformation avec recherche de la transformation.*<br>Présentation : 1’10<br>Activité : 2’ | Sachets 20 et 30=x<br>≈10’<br>*Réunion, recherche du tout*<br>Présentation : 1’30<br>Activité : 8’30<br>Extrait visionné | -Ramassage des livrets en annotant si besoin ; récupération du matériel<br>-Clôture : *« je vous annonce qu’on refera un défi la semaine prochaine »* |

# ANNEXE 3 : PROCEDURES PERMETTANT DE CALCULER LA SOMME DE DEUX PETITS NOMBRES ET DE DEUX GRANDS NOMBRES RONDS

## 1. Procédures par reconnaissance immédiate (P1)

**P1 :** Reconnaissance immédiate de la somme à partir de représentations mentales ou de configurations de doigts (sans comptage).

## 2. Procédures par comptage ou surcomptage (P2)

| | |
|---|---|
| **P21 :** Représentation sur les doigts d’une main d’un des termes de la somme par reconnaissance de configuration de doigts puis représentation sur les doigts de la même main, et si nécessaire de l’autre main, du second terme, par comptage en levant un doigt à chaque nouveau mot, puis… | … reconnaissance immédiate de la configuration<br>**ou**<br>… recomptage de l’ensemble des doigts |
| **P22 :** Représentation sur les doigts d’une main d’un des termes de la somme par comptage puis complétion de cette main et si nécessaire, suite sur les doigts de l’autre main par comptage, puis… | …reconnaissance immédiate de la configuration<br>**ou**<br>…recomptage de l’ensemble des doigts |
| **P23 :** Représentation sur chacune des mains d’un des termes de la somme par comptage (nombre d’unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR) puis… | …reconnaissance immédiate de la configuration<br>**ou**<br>…recomptage de l’ensemble des doigts |
| **P24 :** Représentation sur chacune des mains d’un des termes de la somme par reconnaissance de configuration de doigts puis recomptage de l’ensemble des doigts (nombre d’unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR). | |

**P25** : Surcomptage à partir de l'un des deux termes de la somme (représentation sur les doigts d'un seul des deux termes de la somme).

### 3. Procédures par calcul (P3)

**P31 :** Connaissance automatisée de la somme des nombres en commutant ou non les termes.

**P32** : Calcul réfléchi à partir de la décomposition additive d'un terme ou des deux.

### 4. Procédures par connaissance de la numération écrite chiffrée (P4)

| | |
|---|---|
| **P41** : Passer d'un GNR au PN correspondant au nombre de dizaines, ajouter des PN puis… | … passage du PN qui représente des dizaines au GNR par récitation de la comptine des dizaines (en appui éventuel sur les doigts) et production de l'écriture chiffrée.<br>**ou**<br>… utilisation de la signification des chiffres dans l'écriture chiffrée. |

**P42** : Simulation mentale de l'algorithme écrit de l'addition posée et « pose dans la tête » de l'opération en colonnes en alignant les unités avec les unités et les dizaines avec les dizaines, puis en calculant la somme colonne par colonne.

## ANNEXE 4 : IDENTIFICATION DES PROCEDURES DES ELEVES

| Sommes et élèves | Animateurs de l'atelier | Participants |
|---|---|---|
| 2+5 Ralf | P32 | P31 ou P32 |
| 2+5 Lalie | P21 | P21 ou P22 ou P31 ou P32 |
| 5+2 Marie | P25 | P25 |
| 5+2 Isaï | P1 au début puis abandon et P31 | P1 ou P31 |
| 30+10 Lalie | P25 | P25 et P41 |
| 30+10 Iban | P41 | P41 ou P42 |

Pour la signification du codage, voir l'annexe 3.

# DEVELOPPER DES PROCEDURES D'ANALYSE DES FIGURES GEOMETRIQUES CHEZ DES ELEVES DE CE2

**Sylvia COUTAT**
Université de Genève
Sylvia.Coutat@unige.ch

**Céline VENDEIRA**
Université de Genève
Celine.Marechal@unige.ch

Résumé
L'atelier proposé s'appuie sur une recherche avec des élèves de CE2 à qui un ensemble de tâches de reproduction et description de figures géométriques est proposé. Les élèves accèdent aux figures par des dessins de ces dernières. L'analyse de ces dessins s'appuie sur deux types de visualisations : iconique et/ou non iconique. La visualisation no iconique implique différentes déconstructions (méréologique, dimensionnelle et instrumentale) pouvant être mobilisées dans les tâches proposées. Ces différentes déconstructions comprennent des traitements propres, mais complémentaires, dont la mobilisation serait au service du développement de procédures d'analyses des figures géométriques par les élèves. L'analyse de la figure amène les élèves à se construire une représentation de cette figure dépendante de la visualisation et des déconstructions utilisées par les élèves.
Ces différentes tâches sont présentées, vécues puis discutées avec les participants, notamment du point de vue des déconstructions impliquées.

L'atelier proposé présente une séquence d'enseignement conçue afin de permettre à des élèves de CE2 de développer une représentation[1] des figures géométriques qui serait au service, d'abord, de leur reproduction puis, plus tard, réinvestie dans des tâches de constructions géométriques. Les procédures d'analyse développées par les élèves dépendent des différentes tâches qui leur sont proposées. En effet, le potentiel de ces tâches repose sur un jeu entre les deux visualisations et les différentes déconstructions possibles que la recherche en didactique des mathématiques met en évidence (Duval, 2005). Les différentes déconstructions témoignent des analyses spécifiques correspondant à des représentations différentes des objets géométriques travaillés. L'objectif de cet atelier est de faire vivre aux participants le même cheminement que celui proposé aux élèves, d'identifier les différentes visualisations voire les différentes déconstructions utilisées et les représentations associées.

Nous avons débuté l'atelier en décrivant brièvement le contexte de la recherche puis explicitant les principaux éléments du cadrage théorique et enfin les principales tâches de la séquence d'enseignement. Nous procédons à l'identique pour la rédaction de cet article. Les discussions qui ont suivi sont mises en regard de quelques productions caractéristiques d'élèves.

[1] Nous appelons « représentations » des constructions du sujet résultant d'une analyse de la figure permettant de considérer certains objets de la figure et certaines relations (Laborde, 1992).

# I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'atelier proposé s'appuie sur une recherche en cours autour de l'enseignement de la géométrie en classe de CE1, CE2 et CM1. Cette recherche prolonge nos travaux (Vendeira & Coutat, 2017) autour de l'introduction d'une visualisation non iconique (Duval, 2005) à l'école maternelle. Durant trois années consécutives, nous sommes intervenues auprès de deux classes en parallèle concernant le thème des figures géométriques. Lors de la première année (2020-2021), les élèves (en classe de CE1), ont travaillé sur des tâches de reconnaissance de formes visant le développement d'une visualisation non iconique avec l'introduction d'un travail sur quelques caractéristiques des formes (Coutat & Vendeira, 2019). Lors de la deuxième année (2021-2022), les mêmes élèves (en classe de CE2) ont réalisé un ensemble de tâches qui permettent de développer des procédures d'analyse des figures géométriques afin de pouvoir ensuite les reproduire. La séquence proposée articule des tâches de reproduction et de description de figures. Les premières s'appuient sur des dessins à main levée et sur des réseaux visant à alléger les contraintes manipulatoires pour des élèves de CE2. Les secondes sont des situations de communication. C'est cette deuxième année de notre recherche que nous partageons avec les participants lors de l'atelier. Lors de la troisième année (2022-2023, classe de CM1) il est prévu de développer les propriétés géométriques à partir du codage.

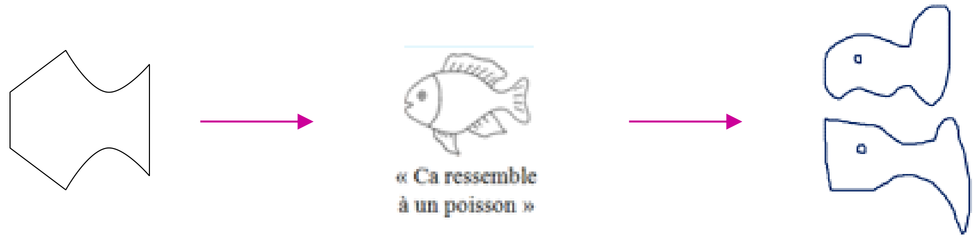
Chaque année, les observations se déroulent sur quatre périodes de 45 minutes afin d'être au plus proche des planifications des enseignants. Les deux classes rassemblent 28 élèves. Une partie des élèves est équipée de caméras d'action permettant de capturer leurs gestes, leurs constructions et leurs propos.

# II - CADRE THEORIQUE

Nous rappelons tout d'abord brièvement ce que sont les visualisations iconiques et non iconiques développées par Duval (2005). Ces visualisations renvoient à deux modes de fonctionnement cognitifs distincts. La visualisation iconique repose sur une reconnaissance d'un objet par sa ressemblance à un objet de référence. Il s'agit donc d'une identification perceptive. La visualisation non iconique se détache du perceptif pour se centrer sur les propriétés géométriques de l'objet considéré. Elle est caractérisée par le fait de considérer les objets géométriques à partir de leurs déconstructions possibles. Cette opération de déconstruction s'appuie sur un traitement des unités figurales qui sont définies comme les composantes élémentaires de la figure. Il s'agit, par exemple, de considérer ses points (0D), ses lignes et courbes (1D) et/ou ses surfaces, intersections de lignes (2D). Les déconstructions peuvent être de plusieurs types : méréologique, dimensionnelle ou instrumentale. Nous les présentons ci-dessous. Nous considérons par la suite ces différentes visualisations dans des tâches de descriptions ou de reproduction.

## 1 Visualisation iconique – pas de déconstruction nécessaire

La visualisation iconique ne nécessite pas de déconstruction étant donné qu'on voit l'objet à travers sa surface. En prenant la forme A de la figure 1, un recours à une visualisation iconique amènerait à la caractériser par exemple comme une « forme qui ressemble à un poisson ». Dans ce cas la représentation associée à ce dessin sera un poisson (figure 1-B). Une reproduction associée à cette représentation se baserait alors sur ce qui est reconnu perceptivement du poisson avec une partie arrondie pour la tête suivie d'un rétrécissement pour former une plus petite partie correspondant à la queue (figure 1-C).

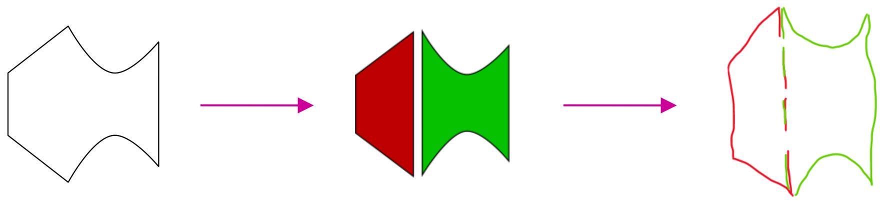



A B C

*Figure 1. Représentation(B) et reproductions (C) associées à une visualisation iconique de la figure A*

## 2 Visualisation non iconique – déconstruction méréologique

La déconstruction méréologique consiste « à partager [une figure] en plusieurs parties comme autant de sous-figures » (Duval, 1988, p. 61). Il s'agit de considérer « la relation entre partie et tout » (p. 61). Il est dès lors possible de faire un partage strictement homogène, homogène ou hétérogène. Dans la figure 2, il est possible de partager le dessin (figure 2-A) en deux parties distinctes dont l'une serait par exemple proche d'un trapèze et l'autre d'un non-polygone symétrique (figure 2-B). Il s'agit dans ce cas d'une déconstruction méréologique hétérogène étant donné que les deux unités figurales sont différentes entre elles. Cette représentation du dessin implique une reproduction qui s'appuie sur le trapèze et le non-polygone, ainsi que sur les relations entre ces deux objets (figure 2-C).



A B C

*Figure 2. Représentation (B) et reproduction (C) associées à une visualisation non iconique de la figure A avec le recours à une déconstruction méréologique*

## 3 Visualisation non iconique – déconstruction dimensionnelle

La déconstruction dimensionnelle consiste à concevoir un objet géométrique à partir de ses unités figurales de dimension inférieure et de leurs relations. Par exemple, c'est ce qu'il se passe lorsque l'on considère les droites et les points qui composent une figure. Les lignes sont des éléments à une dimension et les points à zéro dimension, alors que la figure est à deux dimensions. L'introduction de tracés supplémentaires (tracés auxiliaires ou réorganisateurs) est aussi un moyen d'orienter le regard sur ces unités figurales de dimensions inférieures. Les formes ainsi appréhendées sont considérées par lignes (courbes ou droites) porteuses de la figure (Mathé et al., 2020). Dans la figure 3, il est possible de concevoir le dessin (figure 3-A) à partir des unités figurales de dimension 1 (1D) qui le composent et leurs relations (figure 3-B). Il s'agit dans ce cas d'une déconstruction dimensionnelle. Cette visualisation implique une représentation du dessin qui considère les différentes lignes (droites et courbes) qui supportent le dessin ainsi que leurs relations. Ces relations sont les propriétés géométriques contenues dans la figure (symétries et parallélisme).

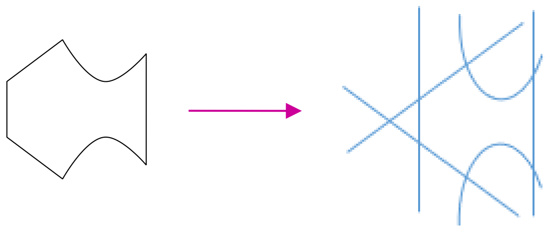



*Figure 3. Représentation associée à une visualisation non iconique de la figure A avec le recours à une déconstruction dimensionnelle*

## 4 Visualisation non iconique – déconstruction instrumentale

Enfin une visualisation non iconique peut apparaitre dans une tâche de reproduction de figure. Cette déconstruction implique un ordre dans les différentes unités figurales où les « propriétés géométriques sont ici des contraintes de construction qui assurent le bon déroulement d'un processus, plus que la cohérence de l'objet lui-même » (Mithalal, 2010, p. 18). Ainsi les différents éléments du dessin et leurs relations sont organisés selon un enchainement ordonné d'actions pour construire une figure ou reconstruire un dessin à partir de l'identification des différentes unités figurales et des instruments qui permettent de les construire. Ces outils associés à des constructions peuvent aussi accompagner la prise en compte de propriétés spécifiques comme la perpendicularité de deux droites ou le parallélisme de deux droites (Mithalal, 2010). Dans la Figure 4, les relations de symétrie entre les différentes lignes qui composent le dessin permettent d'organiser les étapes de construction de la figure. Cette visualisation conduit à une représentation qui s'appuie sur les relations entre les éléments qui permettent sa reconstruction.

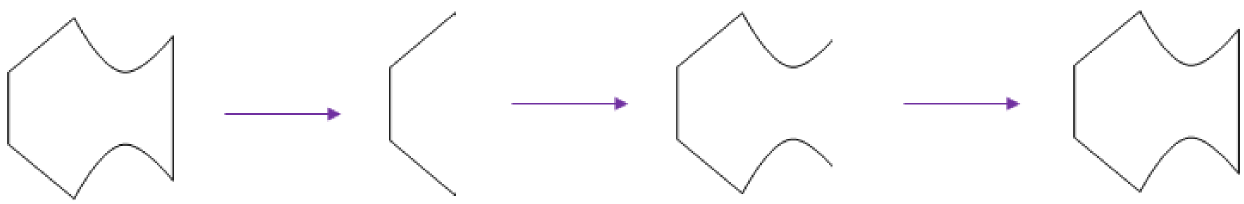


*Figure 4. Représentation associée à une déconstruction instrumentale dans une perspective de reproduction*

Comme nous pouvons le constater ces différentes déconstructions comprennent chacune des traitements propres résultant d'une analyse spécifique des figures géométriques et aboutissant à une représentation personnelle. Ces différentes visualisations et déconstructions ne s'opposent pas, mais peuvent se compléter lors de l'analyse du dessin pour aboutir à une représentation du modèle la plus riche possible (Vendeira, à paraitre). Selon la ou les déconstructions mobilisées par les sujets, les représentations d'une même figure seront différentes. En effet si la déconstruction utilisée est une déconstruction méréologique, la représentation est définie par les sous-surfaces qui composent le dessin et leurs relations. Si la décomposition est instrumentale, les contraintes des instruments conduisent à l'élaboration d'une représentation par l'organisation des étapes de constructions. Ainsi, le choix des tâches influence directement les visualisations et déconstructions disponibles et donc la représentation de la figure par l'élève.

## III - SEQUENCE MISE EN PLACE ET EXEMPLES DE PRODUCTIONS

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes tâches de la séquence proposée aux élèves. Nous les présentons en mettant en évidence nos intentions sous-jacentes (en termes de visualisations et déconstructions possiblement mobilisables pour résoudre la tâche), puis nous présentons des traces récoltées auprès des élèves. Dans cette optique nous articulons des tâches permettant de recourir aux différentes visualisations et déconstructions de manière isolée ou conjointe.

La séquence proposée comprend sept tâches. La première (T1) fait référence à la dernière séance proposée à ces mêmes élèves l'année scolaire précédente. Les élèves doivent classer différentes formes. Il s'agit d'activer leur mémoire didactique (Brousseau & Centeno, 1991) à propos du nom et de certaines caractéristiques des figures géométriques travaillées à l'école primaire. Au terme de cette séance nous visons, par exemple, à mettre en évidence que les formes à trois côtés sont toutes des triangles, bien que leurs particularités et leurs noms peuvent différer (triangle rectangle, isocèle, équilatéral, quelconque), que les figures ayant quatre côtés sont toutes des quadrilatères dont certains ont un nom connu (carré, rectangle), d'autres seront appris plus tard (cerf-volant, parallélogramme, trapèze) et d'autres n'en ont pas. Il est aussi possible d'étendre ces constats pour d'autres polygones convexes (pentagones, hexagones, …). Il s'agit de pouvoir s'appuyer ensuite sur ces différents constats lors de la réalisation des tâches ultérieures de notre séquence d'enseignement.

La seconde tâche (T2) consiste à dessiner à main levée un hexagone sur une feuille blanche à l'aide d'un modèle affiché au tableau. Cette tâche a pour objectif de donner du sens au fait de devoir prendre de l'information sur une figure afin de pouvoir la reproduire de la manière la plus fidèle possible. Malgré les éventuelles imprécisions, le dessin à main levée est porteur des relations entre des éléments du dessin affiché considérées comme principales. Le dessin produit peut informer sur la représentation construite par son auteur. C'est donc à partir de cette tâche que la nécessité de développer des procédures d'analyse des figures géométriques se fait véritablement ressentir et enclenche notre séquence.

Les tâches T3 à T6 permettent ainsi de jouer sur différentes manières de prendre de l'information sur une figure. Nous cherchons à faire mobiliser et articuler adéquatement les deux visualisations et les déconstructions. Les deux premières tâches (T3 et T4) sont des tâches de reproduction à main levée. Dans la tâche T3, les élèves doivent ajouter des tracés complémentaires pour décomposer l'hexagone. Dans la tâche T4, ils doivent reproduire un hexagone sur différents réseaux. Ces tâches ne requièrent volontairement pas l'usage des instruments de géométrie usuels. En effet, ceux-ci ne sont pas au programme des classes de CE2 en Suisse romande. Nous optons ainsi pour des tâches impliquant les dessins à main levée (Vendeira, accepté) et les dessins sur réseaux pour lesquels les contraintes manipulatoires sont moindres. Les tâches de (re)production à main levée dispensent l'élève d'une certaine précision dans ses tracés. Les réseaux fournissent un support qui permet d'outiller les constructions des élèves en prenant en charge des propriétés comme la mesure des côtés ou des angles, le parallélisme de certaines droites, l'alignement. Les tâches T5 et T6 sont des tâches de description impliquant des situations de communication. Pour finir, la tâche T7 conclut la séance : elle consiste en une mise à l'épreuve de ce qui a été travaillé précédemment et a pour objectif d'évaluer si la représentation construite par les élèves sur les figures est opérante.

Lors de l'atelier, nous avons d'abord proposé aux participants la tâche T7. Nous la présentons ci-dessous avec des productions d'élèves à l'appui, puis donnons ensuite les raisons de ce choix pour l'atelier et ce qui a émergé.

## 1 Tâche finale (T7)

Lors de cette tâche, la Figure 5 est présentée pendant 30 secondes aux élèves avant qu'elle ne soit dissimulée. Une fois disparue, les élèves doivent la reproduire de mémoire à main levée sur une feuille blanche. Pour ce faire, ils doivent prendre l'information nécessaire sur le dessin présenté. Cette prise d'information nécessite une coordination entre la visualisation iconique et non iconique : Vendeira (à paraître) met en effet en évidence que « l'usage exclusif de l'un[e] ou l'autre ne suffit pas, les deux doivent se coordonner afin que l'élève puisse véritablement prendre le contrôle sur le milieu ».

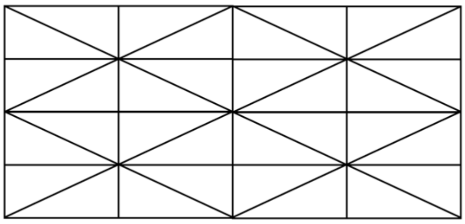
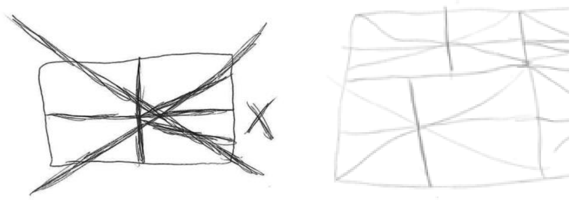


*Figure 5. Figure à reproduire de mémoire dans la tâche T7*

Concernant spécifiquement la visualisation non iconique, plusieurs déconstructions peuvent être mobilisées afin de réussir la tâche. Il est par exemple possible de percevoir un grand rectangle (niveau 1) qu'on aurait découpé selon ses deux axes de symétrie, en quatre rectangles identiques (niveau 2). Les diagonales de chacun de ces rectangles (niveau 2) peuvent être identifiées et chaque rectangle peut être partagé selon ses deux axes de symétrie. Ceci donne lieu à un total de 16 rectangles de niveau 3. Dans certains cas nous avons également pu observer des élèves qui pour chacun de ces quatre rectangles de niveau 2 procédaient plutôt par « rayonnement » depuis le milieu de chaque rectangle avec 8 segments tracés plutôt que 4, donnant lieu à 8 triangles rectangles isométriques.

S'agissant d'un dessin à main levée, il est important de contrôler si les segments sont bien rectilignes et faire attention à leurs intersections. Nous pouvons noter deux procédures différentes : soit l'élève se concentre sur ses tracés droits en priorité (Figure 6-A), soit il se focalise plutôt sur les intersections quitte à courber son tracé (Figure 6-B).



A B

*Figure 6. Procédure avec un contrôle soit sur les tracés droits (A) soit sur les intersections (B)*

Les figures 7 à 12 illustrent quelques exemples de productions d'élèves impliquant plusieurs procédures que nous pouvons raccrocher à différentes déconstructions, une déconstruction unique ou associations de déconstructions. Il s'agit donc d'hypothèses que nous inférons à partir de ces productions. Dans l'exemple ci-dessous (Figure 7), les élèves semblent considérer quatre motifs qui se répètent. On peut donc faire l'hypothèse que ces derniers sont reconnus par une déconstruction méréologique. Toutefois, afin de reproduire ces quatre motifs, une déconstruction dimensionnelle semble nécessaire. Même si ce motif semble être identifié tel un réseau, on remarque toutefois qu'il manque un certain nombre de contrôles, notamment concernant les intersections des segments ou encore la proportion des motifs à réaliser relativement au grand rectangle de niveau 1.

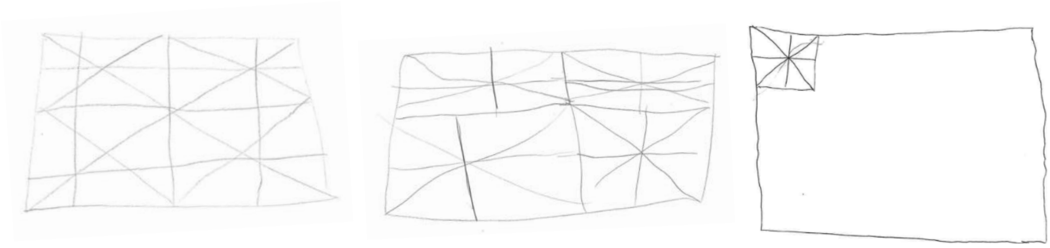


*Figure 7. Procédure impliquant de reproduire quatre fois le même motif*

Il est aussi possible de traiter individuellement les 16 rectangles de niveau 3. Dans ce cas, les 16 motifs ne sont pas identiques. Les diagonales qui sont à produire dans chaque rectangle ont deux orientations qui s'alternent.

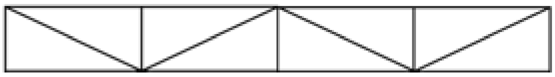


*Figure 8. Procédure impliquant la production d'une frise de niveau 1*

Cette procédure consiste en la production d'une frise où c'est probablement le recourt à une déconstruction dimensionnelle qui est privilégiée. En effet il s'agit du rectangle de niveau 3 séparé en deux par une diagonale. Une déconstruction méréologique utilisant les triangles rectangles pourrait être investie même si elle nous semble peu probable avec les élèves de CE2. Il est par conséquent nécessaire de regarder les productions finement afin d'en déduire la déconstruction mobilisée (voir l'exemple décrit en Figure 10 à cet effet).

Dans la figure 9, nous mettons en évidence la production d'un élève ayant utilisé la procédure consistant à réaliser une frise, mais impliquant un motif (de niveau 2). Elle se distingue de la figure 7 dans le sens où les rectangles de niveau 2 sont associés en ligne, alors que dans la figure 7 ils sont indépendants les uns des autres. Dans ce cas, les procédures sont proches de celles décrites pour la figure 7.

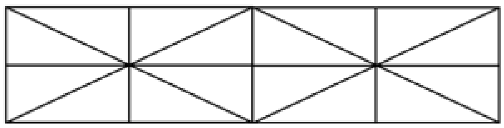


*Figure 9. Procédure impliquant la production d'une frise de niveau 2*

Si nous observons la production ci-dessous (figure 10), l'élève semble s'appuyer sur le repérage d'un motif qui se répète et qui serait constitué de droites qui se croisent en « x » sur un « bâton » vertical. Dès lors, une déconstruction méréologique intervient.

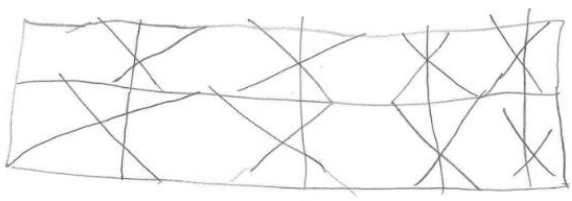


*Figure 10. Procédure horizontale de type « frise »*

Dans la Figure 11, l'analyse qui peut être faite de la production de l'élève révèle une visualisation non iconique qui comme pour la production précédente s'appuie sur une déconstruction méréologique. Il semble en effet voir un losange dans le rectangle de niveau 1. Toutefois, afin de reproduire le losange, il est nécessaire de se baser sur des propriétés géométriques de dimensions 1 et 0, par exemple en partant du milieu d'un côté du rectangle et en tirant un segment qui rejoint le milieu d'un des côtés adjacants (impliquant un certain angle). Si le segment initié ne permet pas d'atteindre le milieu du côté adjacent, les élèves se permettent alors une lègère courbure ou un trait correctif comme dans la figure ci-dessous.

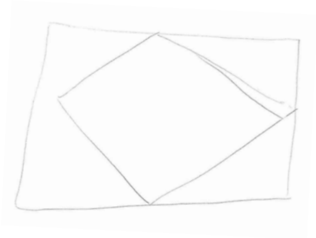
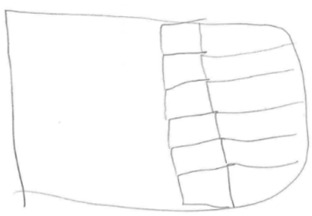
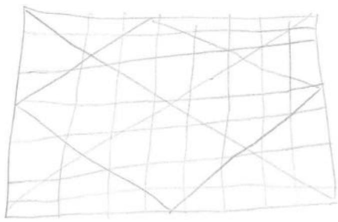
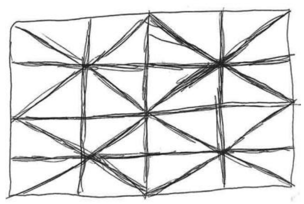


*Figure 11. Procédure utilisant la visualisation iconique (superposition d'un losange et d'un rectangle)*

D'autres élèves procèdent en recréant un réseau quadrillé sans toutefois maîtriser la reproduction fidèle de ce dernier (figures 12-A et 12-B). Deux hypothèse pourraient être envisageables. Ce réseau devient un support où les nœuds sont réinvestis dans les constructions suivantes (figure 12-C). Ce réseau devient une sorte de trame de fond sur lequel la reproduction du reste de la figure modèle vient se placer sans mise en relation (Figure 12-B). Dans les deux cas, l'élève utilise une vision non iconique avec une déconstruction dimensionnelle méréologique. Nous pouvons par exemple imaginer qu'un élève perçoive le découpage du rectangle de base (niveau 1) en 16 rectangles (niveau 3), comme dans la figure 12-C. Dans le cas où le réseau construit par l'élève devient un support pour le reste de la construction, on pourrait s'interroger si ce réseau porteur de certaines propriétés d'allignement, perpendicularité et parallélisme ne deviendrait pas un instrument pour la suite de la construction au même titre que les réseaux utilisés dans la tâche T4.

A B C

*Figure 12. Procédure utilisant un quadrillage*

Nous avons choisi de présenter T7 comme première tâche lors de notre atelier pour deux raisons. Tout d'abord, si nous voulons que les participants se confrontent à un problème lors de la résolution de cette tâche, il était nécessaire de la réaliser en amont de la description des différentes tâches de notre séquence ; celle-ci aurait trop balisé le terrain. Il est également nécessaire de modifier le temps mis à disposition des participants afin d'observer la figure à reproduire. Alors que les élèves de CE2 ont 30 secondes, les participants n'en ont que 5. La deuxième raison réside dans la variété des déconstructions qu'il est possible de mobiliser pour résoudre cette tâche. Il est important que les participants se rendent compte de cette variété à partir de leurs productions et non pas seulement à l'appui des productions d'élèves. C'est donc sans suprise que nous observons, lors de l'atelier, des productions parfois inabouties en l'absence d'une prise d'informations efficace ou suffisamment complète afin de reproduire la figure demandée. Quant aux productions abouties, elles mettent en évidence une grande variété de procédures (impliquant différentes déconstructions) comme chez les élèves. A ce stade nous n'avons pas mis en discussion les visualisations ou déconstructions mobilisées dans les productions, mais relevons uniquement la variété apparente des procédures.

## 2 Tâche initiale (T2) – dessin à main levée d'un hexagone

Les participants ont réalisé cette activité avec une consigne adaptée par rapport aux élèves. En effet, il leur a été demandé de tendre vers l'exhaustivité des solutions. Avec cette consigne nous souhaitons ainsi déjà faire émerger la variété des déconstructions possibles pour résoudre T2. Cette tâche demande à l'élève de dessiner un hexagone régulier sur une feuille blanche à partir d'un hexagone affiché au tableau. En proposant cette tâche, nous faisons l'hypothèse que les élèves vont rencontrer une certaine difficulté à produire quelque chose de satisfaisant à main levée. Il est fort probable que leur production initiale soit éloignée perceptivement du résultat attendu car il est nécessaire de contrôler des propriétés nécessitant une analyse minimale de la figure à reproduire, par exemple par un contrôle des longueurs des côtés, des angles ou encore des unités figurales de même dimension qui composent la figure ou encore de dimension inférieure avec les segments qui la compose et leurs relations. Dans la Figure 13, nous observons les nombreuses tentatives qu'un élève a effectuées pour cette tâche ainsi que l'auto-évaluation de ses productions où celles considérées comme non conformes sont marquées d'une croix (ou barrées). Nous constatons que seules 4 productions sur 12 sont validées positivement par l'élève, ce qui confirme la complexité de la tâche proposée.

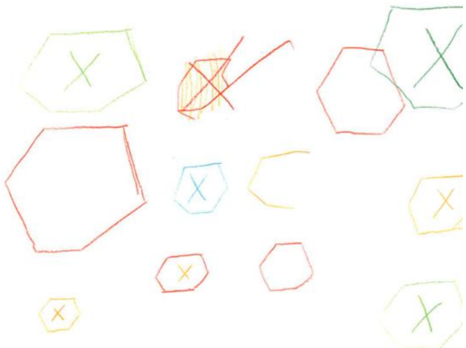


*Figure 13. Tentative de reproduction d'un hexagone régulier à main levée par un élève à partir d'un modèle*

La Figure 14 présente d'autres exemples de productions d'élèves.

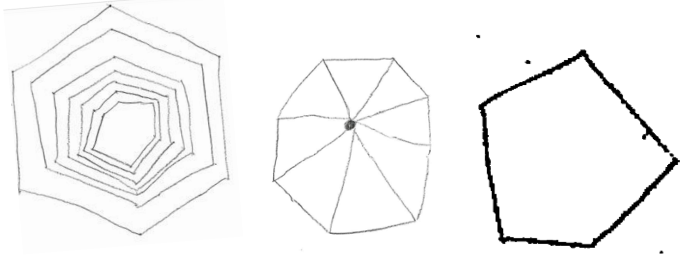


*Figure 14. Quelques exemples de production d'élèves lors de la tâche initiale (T2)*

Les tâches T3 à T6 prennent ensuite tout leur sens puisqu'elles permettent, en réponses aux difficultés constatées avec T2, de construire une analyse des figures géométriques qui permettrait de reproduire une figure donnée plus fidèlement et notamment qu'il est possible de le faire de différentes manières selon les visualisations et déconstructions mobilisables pour chaque tâche.

## 3 Tâches de production

### *3.1 Tâche de décomposition d'un hexagone (T3)*

Dans cette tâche, il s'agit pour les élèves de trouver différentes façons de décomposer un hexagone en unités figurales de même dimension. Cette tâche a pour objectif principal de faire appel à la déconstruction méréologique. Cette tâche a toutefois été faite dans un temps trop retreint dans les deux classes de CE2 ce qui a produit autant de productions inadaptées (Figure 15) que visées (Figure 16). Dans les productions ci-dessous un glissement vers une tâche de graphisme s'est produit.

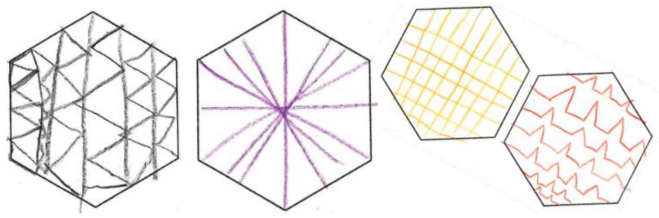
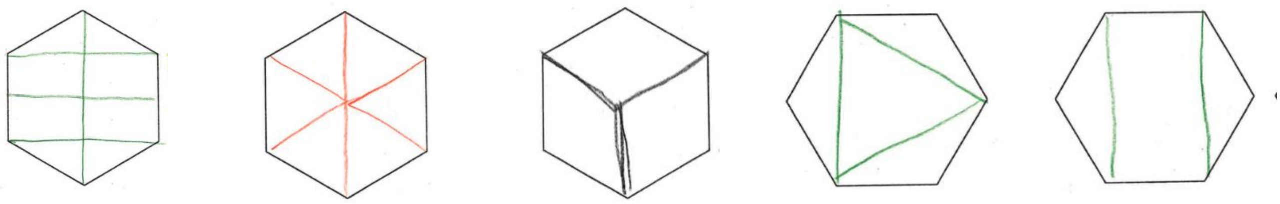


*Figure 15. Productions d'élèves réalisées de manière inadaptée à la tâche T3*

A l'inverse, les productions de la Figure 16, sont bien au service de l'analyse souhaitée avec un partage de l'hexagone en unités figurales de même dimension pouvant résulter d'une déconstruction méréologique. Par exemple en décomposant l'hexagone en un rectangle et deux triangles isocèles (Figure 16-E) ou encore à partir d'un triangle équilatéral et trois triangles isocèles (Figure 16-D), etc.



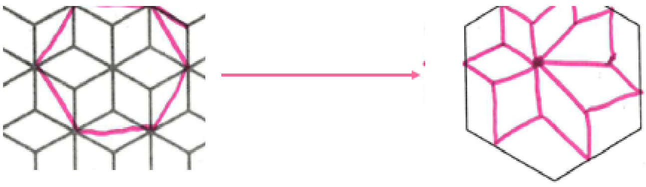
A B C D E

*Figure 16. Productions d'élèves à la tâche T3*

Cette tâche n'a pas été discutée lors des échanges collectifs. Elle a également été moins investie par les participants que les autres tâches de notre séquence probablement car elle est relativement peu ouverte et ne constitue pas un véritable problème pour les participants.

### *3.2 Tâche sur réseaux (T4)*

Dans cette tâche les élèves doivent cette fois trouver des hexagones (de différentes tailles, dans différentes orientations, qui suivent ou non les lignes du réseau) et les reproduire dans différents réseaux. Les réseaux proposés aux élèves sont composés de triangles équilatéraux, losanges agencés dans différentes orientations et hexagones (voir Figure 18). Dans le réseau composé de losanges, certains élèves perçoivent des cubes ou des fleurs plutôt que l'unité losange. Nous avons d'ailleurs observé un élève qui, face au réseau de losanges dans la tâche T4, est retourné sur la tâche T3 pour y produire un agencement de six formes proches du losange se joignant en un point afin de former une fleur (figure 17-B). Dans ce cas, il semble possible de dire que l'élève mobilise une visualisation iconique pour reconnaître le motif de la fleur. Toutefois, la déconstruction méréologique hétérogène peut également intervenir dans une certaine mesure avec la tentative de reproduction de six losanges qui se rejoignent en un sommet. Toutefois on ne retrouve pas les six triangles isocèles.

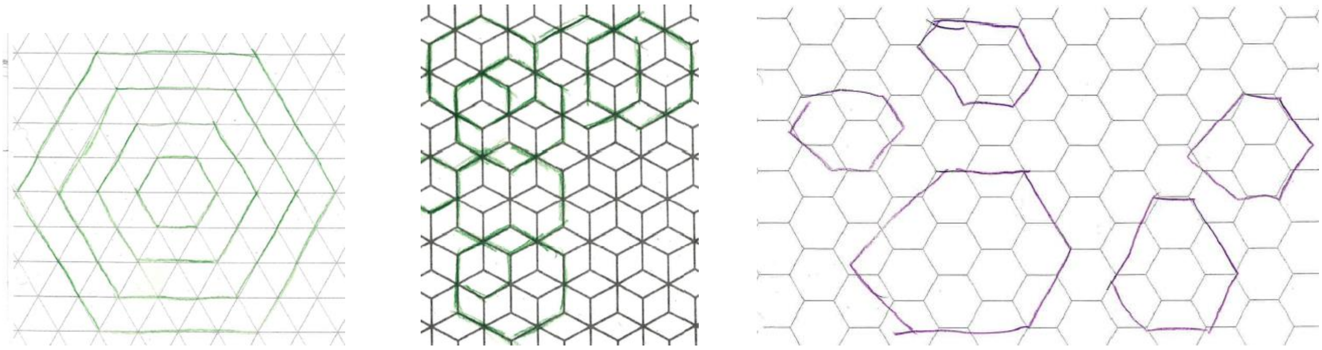


A B

*Figure 17. Production d'un élève suite à un va et vient entre les tâches T3 et T4*

Selon les réseaux, la tâche est plus ou moins complexe et le nombre de solutions varie. Dans le réseau triangulaire il est assez spontané de construire les côtés de l'hexagone régulier en prenant appui sur les côtés isométriques du réseau. Il ne reste plus qu'à définir le nombre de côtés isométriques utilisés et de répéter ce choix pour tous les côtés de l'hexagone en construction. Cette procédure est identique pour l'hexagone disposé « sur sa pointe » dans le réseau de losanges étant donné que ses côtés sont également isométriques. Toutefois cela se complique lorsqu'il s'agit de sortir des traits du réseaux (Figure 18-C) et/ou de prendre en considération des longueurs difficilement identifiables comme dans la Figure 18-C où les côtés de l'hexagone reproduit sont représentés par la longueur d'un côté de l'hexagone unité du réseau auquel s'ajoute la longueur de son axe de symétrie.

Selon les réseaux, les élèves ne parviennent pas du tout à construire la figure demandée (ou dans une autre orientation ou d'une autre taille) ou alors ils produisent des hexagones non réguliers comme c'est le cas dans les productions de la Figure 18-C et le réseau hexagonal.



A B C

*Figure 18. Exemple d'utilisations des différents réseaux*

Bien que cette tâche ait suscité beaucoup d'intérêt de la part des participants lors de sa réalisation en atelier, elle n'a pas été discutée particulièrement en lien avec les visualisations ou déconstructions impliquées. Ce sont surtout les tâches T5 et T6 de description qui ont permis d'aborder ces aspects-là.

Les tâches de production sur papier réseau ont mis en valeur une grande variété de procédures également chez les participants de l'atelier. Leurs tracés étaient plus contrôlés avec par exemple une prise en compte plus systématique des nœuds des quadrillages. Les échanges entre les participants dans les différents sous-groupes permettent de confronter les productions et les propriétés utilisées.

## 4 Tâches de description

Les deux prochaines tâches sont des tâches de description. Elles ont pour but une formulation spontanée de propriétés géométriques par les relations entre les différents éléments qui composent la figure à décrire.

### *4.1 Tâche « Qui est-ce ? » (T5)*

La première tâche utilise un ensemble de cartes contenant chacune un dessin (Figure 19). Dans notre exemple, tous les dessins sont dans un carré. Un élève choisit sans la montrer une des figures représentées et les autres élèves doivent poser des questions pour l'identifier. L'élève ne peut répondre aux questions que par oui ou non. Le choix du dessin, mais aussi les relations utilisées dans les questions dépendent des connaissances des sujets. Ici les connaissances des élèves sont très distinctes des connaissances des participants. Si les élèves sont restés dans des formulations très naïves, les participants ont utilisé un vocabulaire géométrique. L'interprétation des formulations permet tout de même des discussions autour des propriétés. Par exemple chez les participants : « est-ce qu'un sommet peut être considéré comme un point d'intersection, ou seuls les points qui ne sont pas les extrémités peuvent être des points d'intersections, comme l'intersection des diagonales ? »

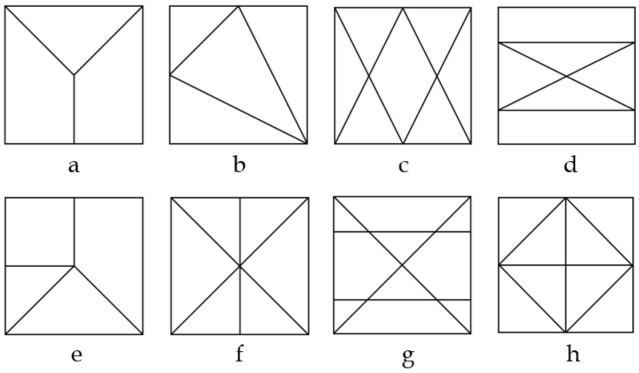



*Figure 19. Exemple de collection de dessins proposée*

Dans la classe, la réalisation collective de cette tâche permet une première formulation d'objets (segments, diagonales, sommets, milieu) et de relations (le segment qui relie un milieu avec un sommet …) avec un partage collectif du lexique. Les élèves utilisent plus volontiers une visualisation iconique avec « est-ce que dans la forme il y a une croix ? » qui peut être reformulé avec l'enseignant par « est-ce qu'il y a des segments qui se croisent ? ». La reformulation ne concerne pas uniquement le lexique car la croix peut être associée à une visualisation iconique alors que la référence aux segments implique une visualisation non iconique avec une déconstruction dimensionnelle. La réponse « non » à cette première question permet d'éliminer les dessin c, d, f, g et h de la figure 19. La deuxième question des élèves était « est-ce que l'on voit un carré dans la forme ? ». Cette question résulte d'une visualisation non iconique avec une déconstruction méréologique qui permet de distinguer la forme. La réponse « non » permet d'éliminer le dessin e. Pour départager les deux dernières formes a et b, un élève a demandé « est-ce qu'il y a un triangle dans la forme ? ». Cette question peut être suffisante si elle est interprétée comme « est-ce que la forme contient un seul triangle ? » mais ne l'est plus si on l'interprète par « est-ce que la forme contient au moins un triangle ? » car dans ce cas les deux formes conviennent. Là encore les élèves ont mobilisé une visualisation non iconique avec une déconstruction méréologique pour analyser les formes.

Les élèves peuvent difficilement se contenter d'une visualisation iconique. La visualisation non iconique peut être mobilisée à travers une déconstruction méréologique en identifiant les sous-éléments 2D comme des triangles par exemple. Une déconstruction dimensionnelle est aussi possible par la prise en compte des diagonales (unité figurale 1D) ou la prise en compte des milieux (unité figurale 0D). Cette déconstruction n'est cependant pas mobilisée par les élèves. Dans leurs questions, les élèves utilisent une visualisation iconique « Est-ce qu'il y a une croix ? » mais aussi une visualisation non iconique « est-ce qu'il y a un carré dedans ? Est-ce qu'il y a des triangles ? ». Dans tous les cas les questions des élèves sont propices à l'émergence de discussions sur ce qui est vu (qu'est-ce qu'une croix) et le vocabulaire qui peut être employé. Cependant les formulations spontanées des élèves sont peu géométriques. Ainsi les occasions sont assez nombreuses pour introduire du vocabulaire géométrique (diagonale pour segment d'un sommet à l'autre) ou pour utiliser un terme plus approprié (point sur segment vs milieu) et ainsi provoquer une déconstruction dimensionnelle. Les éléments 0D apparaissent dans les échanges avec l'enseignante. Deux hypothèses peuvent être émises concernant la non-évocation des unités figurales 1D ou 0D par les élèves. La représentation des élèves est le résultat d'une analyse par une déconstruction méréologique et les élèves ne décrivent que ces éléments 2D dans leurs questions. Il est aussi possible que la représentation des élèves utilise les différentes unités figurales 1D et 0D (diagonales et milieu) résultant d'une déconstruction dimensionnelle mais, ne maitrisant pas le vocabulaire, ils reviennent à une représentation utilisant les unités figurales 2D avec des triangles ou carrés.

### 4.2 Tâche Dessine (T6)

Pour cette deuxième tâche de description, un élève doit donner des indications orales à un autre élève pour que ce dernier parvienne à reconstruire le dessin sans le voir. Cette tâche reprend les déconstructions de la tâche précédente auxquelles s'ajoute la déconstruction instrumentale. Elle intervient après la tâche T5.

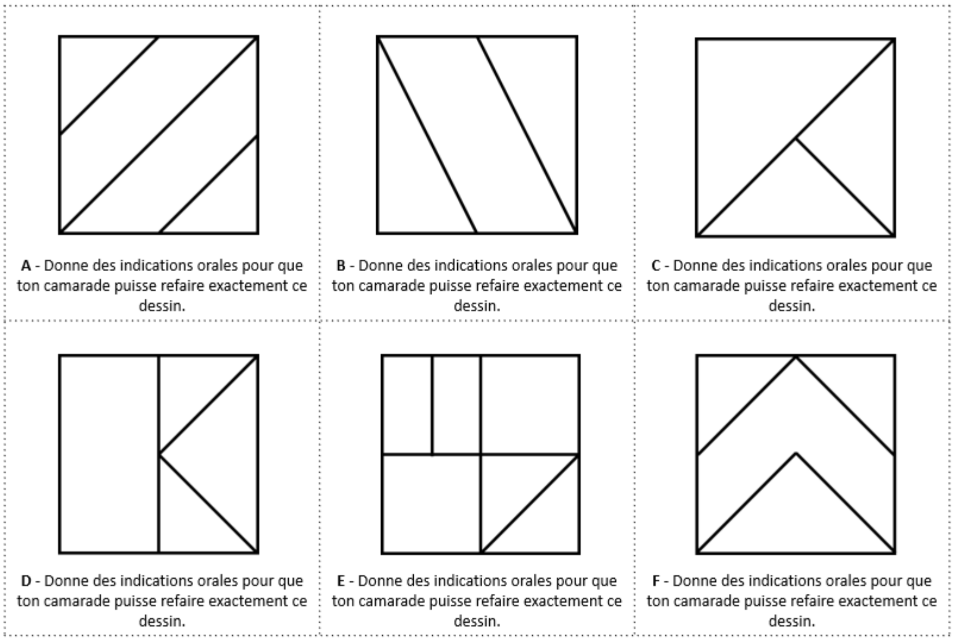



*Figure 20. Exemple de figures à décrire*

Pour décrire le dessin F, un élève utilise une déconstruction méréologique avec « Fais deux petits triangles en haut – en haut à droite heu non à gauche » et comme l'élève-dessinateur ne comprend pas, l'élève complète sa description avec des gestes indiquant sur la feuille où les tracés doivent être faits. Toujours pour ce même dessin, un autre élève utilise une déconstruction instrumentale « il y a deux segments qui se rejoignent en haut et après il y a deux segments qui se rejoignent en bas ». La chronologie du tracé est précisée par « et après » ce qui distingue une déconstruction instrumentale d'une déconstruction dimensionnelle. Pour décrire le dessin A une élève indique « tu fais un triangle en haut à gauche et en bas à droite – il y a un trait en diagonale au milieu ». L'analyse de cet élève semble passer par une déconstruction méréologique pour les deux triangles et une déconstruction dimensionnelle pour la diagonale. Cependant le « diagonale » peut renvoyer à un segment spécifique (la diagonale) du carré ou à une orientation spécifique (en diagonale). Ici on dirait plutôt que l'élève considère l'orientation plus que l'objet spécifique. Le fait que les sommets des triangles coïncident avec les milieux des côtés n'est pas précisé par l'élève. Enfin pour le dessin C un élève propose la description « La pointe en haut à droite heu non à gauche – fait un trait jusqu'en bas – en face – au milieu du trait (montre avec son doigt la diagonale) fais un trait jusqu'en bas (montre le sommet) ». Cette description utilise des unités figurales 1D (les traits) et 0D (milieu). Elle prend aussi en compte le tracé ce qui permet de la qualifier comme résultat d'une déconstruction instrumentale. Les indications sont complétées par des gestes indiquant les différents objets et illustrant les lignes à tracer, c'est-à-dire les actions à mener. Ainsi, bien que cette tâche n'engage pas l'utilisation d'instruments, certains élèves prennent en compte l'enchainement des tracés en s'appuyant ainsi sur une déconstruction instrumentale. Cette déconstruction a été discutée lors de l'atelier.

Ces descriptions informent sur les analyses menées par les élèves et les unités figurales de leurs représentations. Les élèves sont rapidement en difficulté dans leur description et sont souvent amenés à utiliser leurs mains pour préciser des orientations, ou leurs doigts pour montrer des points spécifiques comme un milieu ou un sommet.

Les indications sont complétées par des gestes indiquant les différents objets et illustrant les lignes à tracer, c'est-à-dire les actions à mener.

Ces deux tâches impliquent du langage. Le recourt à un vocabulaire géométrique est loin d'être spontané, il peut même bloquer certains raisonnements (comme identifiée dans Blanquart (2020)). Pourtant un lexique a été introduit dans les tâches T4 avec l'enseignant. Malgré tout, lorsque les élèves bloquent, ils complètent leur formulation à l'aide de gestes ou indiquent avec les doigts sur les dessins des camarades les éléments à considérer ou à construire.

## IV - DISCUSSIONS LORS DE L'ATELIER DE LA COPIRELEM

Les tâches proposées aux participants sont restées fidèles aux tâches présentées et proposées aux élèves. Seule la tâche T7 a été avancée dans la séquence et proposée comme première tâche. La diversité des procédures des participants est bien plus importante que celles des élèves comme le montre l'exemple de la figure 21.

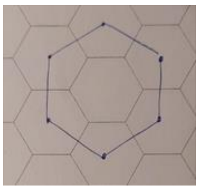


*Figure 21. Exemple de reproduction de l'hexagone régulier en dehors des traits du réseau*

En effet, les connaissances géométriques des participants sont plus vastes que celles des élèves. Si les élèves de CE2 rencontrent souvent des difficultés à identifier les sous unités figurales 1D ou 0D, les adultes parviennent plus volontiers à reconnaitre droites et points. Dans les tâches de production, les adultes maitrisent d'une part le dessin à main levée et d'autres part possèdent une représentation plus riche de l'hexagone. Par exemple, les représentations des élèves qui utilisent une vision iconique peuvent difficilement concevoir des hexagones dans des orientations différentes. Les adultes peuvent s'appuyer sur une représentation qui, en plus d'utiliser une vision iconique (soit pour anticiper les positions des sommets ou pour contrôler *a posteriori* le dessin obtenu) peut aussi utiliser par exemple la déconstruction dimensionnelle et les axes de symétrie, l'égalité des angles, des côtés et les propriétés des réseaux. De même pour le lexique, si les élèves commencent timidement à s'approprier quelques termes spécifiques géométriques, les adultes maitrisent ce vocabulaire. Les tâches de description (T5 et T6) n'ont pas le même statut. Avec les élèves, elles sont un prétexte pour l'introduction d'un vocabulaire plus adapté et permettant d'accompagner une déconstruction dimensionnelle ou instrumentale. Avec les adultes, ces tâches de description permettent des échanges autour des propriétés des figures et des éventuelles ambiguïtés d'interprétation des formulations (exemple pour la tâche T5 : la forme contient-elle des points d'intersections ?). Ainsi, les réponses des participants concernant les tâches de descriptions (T5-T6) se sont assez largement distinguées de celles des élèves. Les propositions de la tâche finale T7 ont pour certaines rejoint celles des élèves. Dans l'ensemble, des procédures observées chez les élèves ont pu être observées, complétées par d'autres procédures engageant des connaissances géométriques plus expertes. Chaque tâche proposée a cependant impliqué de nombreux échanges entre les participants mais aussi collectivement autour de l'effets des différentes visualisations mobilisées par exemple.

Afin d'orienter la réflexion des participants, des questions leur ont été posées : Qu'avez-vous fait ou découvert dans les tâches de T2 à T7 ? Quelles sont les déconstructions impliquées et comment s'articulent-elles ? Pour chaque tâche, les différentes déconstructions et visualisations possibles ont été discutées, en particulier la déconstruction instrumentale. Si cette déconstruction est classiquement associée à des tâches de (re)constructions instrumentées, elle apparait cependant dans la tâche T6 (« Dessine »). Cette tâche a été travaillée par les participants mais n'a pas fait l'objet d'un partage en collectif. Cependant la question de la présence ou non de déconstruction instrumentale sans instruments a été très discutée avec les participants. Dans une tâche de description pour reproduire, l'enchainement des actions pour la construction doit prendre en compte à la fois les unités de dimensions 1 et 0 et les relations entre ces unités. Ces relations (intersections de lignes ou alignement des points) doivent être prises en compte dans la réalisation du dessin. Même dans une configuration d'un dessin à main levée ces différentes étapes sont présentes et les relations doivent être rendues visibles sur le dessin. Ainsi une déconstruction dimensionnelle peut émerger, ainsi qu'une déconstruction instrumentale même si les instruments ne sont pas mobilisés. Les autres tâches ont permis d'illustrer la variété des productions des élèves et la nécessaire flexibilité du regard.

## V - CONCLUSION

Cet atelier présente un ensemble de tâches de production, reproduction et description travaillées en classe de CE2. Les tâches de (re)production étant à main levée, elles dispensent l'élève d'une certaine précision dans ses tracés. Les réseaux apportent un support qui permet d'outiller les constructions des élèves en prenant en charge des propriétés comme la mesure des côtés ou des angles. Ils peuvent aussi accompagner la déconstruction méréologique selon les formes qui composent le réseau. Les activités de description permettent de nombreux échanges entre les élèves. De plus, ces dernières permettent un travail autour d'un lexique géométrique en lien avec les unités figurales ou les relations entre les unités. A travers les différentes tâches, diverses analyses sont possibles. Les différentes visualisations et/ou déconstructions permettent des représentations variées au service d'une reproduction de figure réussie/efficace. Comme discuté lors de l'atelier, il apparait que l'usage d'outils de construction ne sont pas les seuls garants de la déconstruction instrumentale. Des tâches de description pour reproduire permettent elles aussi de déclencher cette déconstruction.

Au cours de ces quatre séances de classes, les élèves enrichissent leur visualisation et gagnent notamment en flexibilité en ajustant sans cesse leur regard sur les objets. Cependant ces séances sont trop peu nombreuses pour que ces différentes déconstructions deviennent de véritables outils d'analyse des dessins. Comme nous l'avons illustré, la vision iconique persiste encore et la vision non iconique doit être évidement encore entrainée. En effet, il serait intéressant de prolonger ce travail avec l'exploration d'autres figures à reproduire comme support d'analyse (par exemple avec le symbole Mitsubishi ou le cube) et sur d'autres types de réseaux également.

Ces différentes tâches peuvent être travaillées dans des contextes variés. Par exemple, avec l'utilisation du jeu de tâches et le contexte de l'enseignement spécialisé où il a été initialement exploité (Favre, 2008) qui permet à l'élève d'interagir avec un milieu évolutif et construire ses connaissances sur les différentes expériences vécues. Dans la formation initiale des enseignants elles permettent de revisiter les connaissances des futurs enseignants par des tâches qui leurs sont peut-être moins familières et de les sensibiliser à l'analyse des figures géométriques par la mobilisation de différentes visualisations. Ces tâches permettent aussi de questionner le rôle du milieu pour agir sur l'analyse des figures par les élèves et les amener à développer et enrichir leur visualisation des formes.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

Blanquart, S. (2020). *Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant*. Université Paris Cité.

Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Le rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *11*(2.3), 167-210.

Coutat, S., & Vendeira, C. (2019). Reconnaissance de formes à l'école maternelle, un point de vue didactique et psychologique. In S. Coppé, E. Roditi, V. Celi, F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard, C. Corriveau, M. Haspekian, P. Masselot, S. Rousse, H. Sabra, & M. Kiwan Zacka (Éds.), *Nouvelle perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 283-300). La pensée sauvage.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *1*, 57-74.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : Un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, *82*, 9-30.

Mathé, A.-C., Barrier, T., & Perrin Glorian, M. J. (2020). *Enseigner la géométrie à l'école élémentaire–Enjeux, ruptures et continuités.* Academia-L'Harmattan.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle.* Thèse de doctorat en mathématiques et informatique, Université de Grenoble.

Vendeira, C. (soumis). *Le dessin à main levée pour développer des connaissances géométriques en contexte d'enseignement spécialisé.* Colloque EMF2022.

Vendeira, C. (à paraitre). Le dessin à main levée pour les apprentissages géométriques à l'école primaire. In C. Guille-Biel Winder & T. Assude (Éds.), *Articulations espace sensible, espace graphique, espace géométrique. Ressources, pratiques et formation.* Londres : Iste Science Publishing.

Vendeira, C., & Coutat, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » Entre perception globale et caractéristiques des formes aux cycles 1 et 2. *Grand N*, *100*, 79-103.

# DES CONNAISSANCES ET DES RESSOURCES DANS LA MODELISATION DE DEPLACEMENTS LIEE A LA PROGRAMMATION D'UN « ROBOT DE PLANCHER » PEDAGOGIQUE EN GS-CP

**Carine SORT**
Prag Maths, INSPE de l'académie de Bordeaux
LaB-E3D (EA 7441) Université de Bordeaux
carine.sort@u-bordeaux.fr

**Lalina COULANGE**
PR Universités 26e section, didactique des mathématiques
Directrice du LaB-E3D (EA 7441) Université de Bordeaux
lalina.coulange@u-bordeaux.fr

**Résumé**
Dans cet article, nous avons choisi de porter un regard sur les situations d'enseignement et d'apprentissage avec un « robot de plancher » (le Blue-Bot) ; celles-ci convoquent potentiellement des connaissances spatiales relatives aux déplacements (réels ou représentés) d'un objet extérieur à soi dans l'espace (Verjat, 1994). Ces mêmes situations sont par ailleurs à même de faire émerger des nouvelles connaissances informatiques (Komis & Misirli, 2013) dans des modélisations liées à la programmation du robot. Les interactions entre ces connaissances spatiales et informatiques sont analysées au regard d'actions d'élèves de grande section (GS) de maternelle et des ressources variées que ces connaissances supposent, elles-mêmes repositionnées entre *oralité* et *littératie* (Laparra et Margolinas, 2016). Nous proposons le compte-rendu d'un atelier au cours duquel les participants ont analysé des vidéos d'une séquence d'apprentissage de la programmation des déplacements d'un robot pédagogique en GS ; notamment nous avons proposé de questionner la difficulté liée à la commande « pivoter » présente sur le Blue-Bot et comment des élèves se sont emparés des cartes d'instruction proposées avec le robot Blue-Bot pour écrire leurs premiers programmes.

Notre atelier prend appui sur une recherche en cours, conduite dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques. Celle-ci cherche à mettre en lumière les interactions entre les savoirs informatiques (autour de la programmation) et mathématiques (connaissances spatiales) dans des situations d'utilisation d'un robot pédagogique, le Blue-Bot. Nous avons participé à une recherche collaborative visant à observer et étudier la mise en œuvre de situations d'enseignement et d'apprentissage de ces savoirs à la fois informatiques et spatiaux avec le Blue-Bot dans des classes de GS. Les connaissances spatiales (repérage, vocabulaire) sont travaillées lors de résolution de problèmes notamment pour permettre aux élèves de modéliser l'espace (Verjat, 1994) au sein duquel se déplace le Blue-bot. Ces situations d'enseignement et d'apprentissage permettent également la construction d'un algorithme utilisant la construction d'un modèle mental concernant le trajet du Blue-Bot dans l'espace et la rédaction d'un programme par cartes de commandes. Ainsi nous estimons que ces situations permettent la construction de concepts préliminaires de programmation tels que : l'extériorisation de ce modèle (verbal), sa représentation iconique (cartes) et les gestions des différentes commandes liées au déplacement du Blue-bot (Komis & Misirli, 2013). Nous modélisons les situations de classe observées par le biais de situations didactiques (Brousseau, 1998) en envisageant des actions d'élèves sur et avec les « objets » d'un milieu, les moyens de ces actions étant eux-mêmes modélisés par des connaissances informatiques et spatiales. Nous repositionnons ces connaissances à la fois informatiques et spatiales au regard de ressources qui relèvent de l'*oralité* (car elles sont avant tout « corporelles ») ou de la *littératie* (car elles sont typiques de l'écrit ou de son usage) (Laparra et Margolinas, 2016) autour des robots de plancher.

# I - AUTOUR DES ROBOTS DE PLANCHER

## 1 Contexte de l'étude

La robotique pédagogique est plus ou moins présente dans les programmes scolaires en France depuis 1960. Dans les années 1980, des explorations ont alors été menées en classe avec des très jeunes enfants sur l'utilisation des robots de planchers. Parmi eux, la tortue de sol de Seymour Papert a fait figure de pionnière dans le cadre de la robotique pédagogique. Les buts de l'expérience initiale menée par Papert sont clairs : « *en apprenant à la tortue à agir ou à « penser », on en arrive à réfléchir sur sa propre action et sa propre pensée* » (Papert, 1981).

Depuis, d'autres expériences ont été relatées avec la Tortue Logo mais aussi d'autres robots de plancher (Bossuet, 1987 ; Peres, 1987 ; Boule, 1988 ; Greff, 2001). Ces expérimentations portaient aussi sur les apprentissages et les apports de la programmation. En France, elle est vraiment réapparue en 2015-2016 à l'école primaire avec l'écriture de nouveaux programmes, avec des enjeux liés à la programmation et à la structuration spatiale.

### *1.1 Différents robots des années 1980 aux années 2000*

La création de la tortue de sol est à l'origine du développement du langage LOGO par Seymour Papert, Marvin Minsky et le M.I.T. (Massachussets Institute of Technology) vers 1965. En France, dans les années 80, d'autres innovations ont permis de développer des robots de plancher (Greff, 1999).

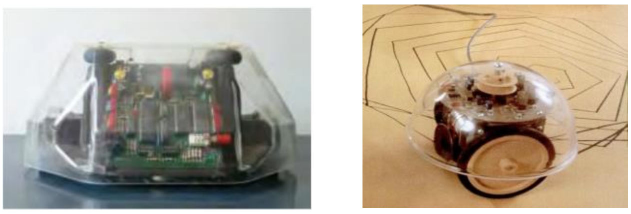


*Figure 1. Exemples de deux robots de plancher, Tortue Logo ou Tortue Jeulin ou Promobile T1 et T2 (chez Jeulin) Années 80.*

Les robots de chez Jeulin (Figure 1) par exemple étaient en relation avec un boîtier de commande (filaire ou rayon infra-rouge) utilisant des cartes correspondant à des instructions pour le robot ; ces dernières se distinguaient les unes des autres par leur couleur, leur perforation ainsi que l'ordre des instructions associées écrit sur une étiquette collée sur la carte (Figure 2). Bien qu'utilisées en maternelle, les cartes n'étaient donc pas « très lisibles » par un enfant. De plus, les cartes-instructions n'étaient lues qu'une par une, séquentiellement (Greff, 1999).

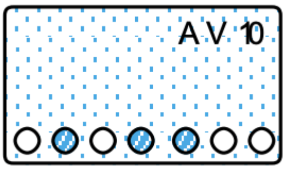



*Figure 2. Exemple d'une carte de codage d'un déplacement « Avancer de 10 ».*

Des expérimentations montrent que l'utilisation du robot permet aux enfants de s'appuyer sur l'espace sensible, l'espace vécu ; des références à Piaget viennent alors appuyer l'intérêt pédagogique des situations proposées pour mettre l'enfant au centre d'un monde où il voit, ressent, expérimente le résultat de ses actions personnelles sur les objets et les situations proposées et ainsi lui permettre de raisonner, d'anticiper (Linard, 1990 ; Dufoyer, 1988). Mais, dès 1986, Bossuet expose des mises en garde sur l'utilisation de robots pédagogiques en classe : « *Il a été créé un mythe : LOGO. La plupart des rapports d'expérimentation LOGO insistent sur les observations* [des manipulations lors de l'introduction du robot en classe] *et anticipent les résultats en laissant croire qu'ils seront atteints rapidement*. » Et de conclure : «

*Expérimenter LOGO dans des conditions de laboratoire et en tirer des conclusions intéressantes pour certains enfants ne signifie pas que LOGO puisse être introduit sans problèmes dans les institutions scolaires.* »


*Figure 3. Exemple d'un autre robot de plancher : Le Bigtrak® - vues latérale et du dessus.*

D'autres robots manufacturés apparaissent sur le marché et sont considérés comme des outils pédagogiques en maternelle (Greff, 1999). En particulier, le premier fut créé en 1979 et conçu par MB aux Etats-Unis avant d'arriver en France au début des années 1980 : le Bigtrak® (Figure 3). D'abord considéré comme un jouet, il fait néanmoins partie des « robots de sol » car il répond à des commandes similaires à celles de la tortue Logo. De plus il est autonome, il se programme sur un clavier situé sur sa coque, utilisant un code avec des flèches et permettant de programmer une suite d'instructions. Des explorations sont menées à cette époque en classe de maternelle pour « apprendre à maîtriser l'espace … apprendre la rigueur d'un langage et celle d'actions successives » (Combes-Trithard, 1984 ; Bossuet, 1987).

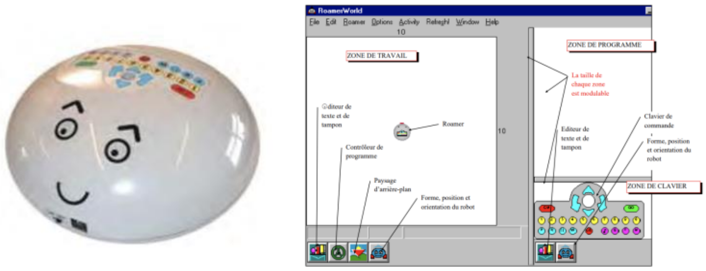



*Figure 4. Exemple d'un autre robot de plancher : Le Roamer – vue latérale et image de l'interface.*

Dans la même ligne, nous pouvons citer aussi le « Roamer » (chez Valiant) commercialisé en 1988 (Figure 4). Son apparence est une sphère aplatie décorée pour montrer l'orientation du robot, ce qui permet à la fois de l'orienter et de le personnaliser. Sur sa face supérieure, il possède un clavier souple dont les touches correspondent à des instructions comme celles du Bigtrack®. De la même façon, celles-ci permettent la programmation du robot qui pourra ainsi se déplacer, pivoter, faire de la musique, attendre et également mémoriser des procédures. Mais un certain nombre de modules additionnels sont proposés : console de contrôle, un module de dessin permettant au robot de laisser une trace au sol, un kit d'éclairage ou de capteurs. La société développe en parallèle un logiciel « Roamer world » dans lequel le robot est « *virtualisé* » (Greff, 2001). De plus des activités ont été construites autour de l'utilisation du robot en classe : construction de l'espace (anticiper, suivre un cheminement) ; construction du nombre (à partir d'une bande numérique, se rendre successivement sur des nombres donnés) ; estimation de longueur (l'unité de longueur d'avancement du robot étant définie, estimer la distance qui le sépare d'une cible) ; repérage sur quadrillage (anticiper un trajet sur quadrillage afin d'atteindre un but fixé) (Greff, 2001).

Ces robots conçus par des informaticiens ont donc pour but principal de transmettre des savoirs informatiques. Au début, il n'y a que peu de ressources fournies à destination des enseignants. Mais en même temps que leurs apparitions en classe, des premiers questionnements autour de l'utilisation de ces robots en classe apparaissent. Notamment l'introduction de l'informatique apparait autour de trois axes, *comme un outil d'enseignement, comme un ensemble d'outils disciplinaires et transversaux, ou comme un nouveau domaine d'enseignement* (Baron &Bruillard, 2001). Puis la question des savoirs mathématiques liés aux connaissances spatiales est aussi évoquée : déplacements, anticipation, codage/décodage et de leurs interactions potentielles avec les savoirs informatiques visés (Barrué et Vigot, 2015 ; Komis & Misirli, 2013).

Roamer Too Bee-Bot Pro-Bot Blue bot

*Figure 5. Exemples de robots de plancher : Le Roamer Too, le Bee-Bot, le Pro-Bot et le Blue-Bot.*

Dans les années 2012-2013, de nouveaux robots pédagogiques sont apparus (Figure 5). Plus facile d'accès (pour les écoles) et dans des formats plus petits, ces nouveaux robots sont attrayants, autonomes et rechargeables. Ils présentent aussi des avancées technologiques : des capteurs, une mémoire de plusieurs dizaines d'instructions (40 pour la Bee-Bot), une liaison Bluetooth, des applications développées sur ordinateur ou tablette. Ils s'inscrivent dans la lignée des robots de plancher qui depuis le Roamer, s'appuient sur une programmation type « flèches » dérivée du langage Logo de Seymour Papert. Une des avancées proposées par ces robots va aussi permettre à l'enfant de coder les actions qu'il a imaginées comme une suite d'instructions, un programme.

Nous avons ciblé le robot Blue-Bot (Figure 6) pour un public de très jeunes enfants. Des ressources[1] associées à son utilisation en classe de maternelle sont disponibles en lien avec des expérimentations (par exemple sur le site eduscol, partie Prim à bord). Enfin l'utilisation du robot est complétée avec des accessoires : barre de programmation, cartes d'instructions, tapis quadrillés, et par des ressources « techniques » : environnement de programmation sur tablettes avec des applications spécifiques. Certaines de ces expérimentations en classe de maternelle (Komis & Misirli, 2013 ; Temperman & al., 2019) tendent à montrer des enjeux forts sur la « programmation » et les savoirs informatiques mais aussi sur des savoirs spatiaux (notamment en ce qui concerne des tâches de déplacement réel ou codé sur un quadrillage).

*Figure 6. Le robot Blue-Bot[2].*

### 1.2 Projet de thèse

L'introduction en classe d'objets numériques programmables et ce, dès l'école maternelle, notamment avec le pilotage d'objets programmables nous a semblé une entrée intéressante pour questionner les connaissances et les savoirs à enseigner/apprendre tant au niveau mathématique qu'au niveau **informatique.**

---

[1] Sites : [www.hepfr.ch/dm/blue-bot.-](www.hepfr.ch/dm/blue-bot.-) [https://inshea.fr/sites/default/files/fichier-orna/EG_Blue-Bot_0.pdf](https://inshea.fr/sites/default/files/fichier-orna/EG_Blue-Bot_0.pdf) -

[2] Blue-bot Bluetooth – Programmable Floor Robot TTS International Schools [https://www.tts-international.com/blue-bot-bluetooth-programmable-floor-robot/1015269.html](https://www.tts-international.com/blue-bot-bluetooth-programmable-floor-robot/1015269.html)

Avant 2016, le numérique était intégré au socle au travers du B2i dont l'objectif était de former à une utilisation raisonnée des technologies de l'information et de la communication (MEN, 2013b)[3]. Depuis, le socle inclut ces compétences dans les différents domaines et enseignements, ce qui a pour conséquence de faire "disparaître" le B2i tel qu'il se présentait (MEN, 2015b)[4]. Dans les programmes de maternelle, le numérique apparaît à l'heure actuelle de manière transversale dans les domaines 1, 3, 4 et 5. L'objectif principal est d'initier les élèves à l'utilisation des outils du numérique (MEN, 2015a)[5] même si l'on retrouve la notion d'algorithme dans le domaine 4 : « identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application ». Dans le dernier programme en vigueur pour la maternelle, (MEN, 2021)[6] nous retrouvons une entrée liée à la robotique pédagogique dans le Domaine « Explorer le monde », le sous-domaine « Représenter l'espace » : « *Ils établissent alors les relations entre leurs déplacements et les représentations de ceux-ci. [...] Ces mises en relations seront plus précisément étudiées à l'école élémentaire, mais elles peuvent déjà être utilisées pour coder des déplacements ou des représentations spatiales*. »

Notre objectif est plus précisément d'identifier les potentialités didactiques de l'introduction de robots pédagogiques de type Blue-Bot mis en relation avec un thème mathématique particulier : celui de l'enseignement et de l'apprentissage de l'espace au cours des cycles 1 et 2. Il s'agit dès lors de comprendre et de mettre en lumière les compétences mathématiques et informatiques, d'étudier des usages comme vecteurs pour les apprentissages des élèves.

Notre regard se porte sur deux questionnements, l'un autour des connaissances spatiales et l'autre autour des connaissances informatiques. Les connaissances spatiales peuvent être considérées comme toutes les connaissances permettant à un sujet un contrôle convenable de ses relations à un espace sensible comprenant (entre autres) le déplacement, le repérage ou la communication de position d'objets (Berthelot et Salin, 2000, p.38). Celles plus potentiellement concernées par des premiers apprentissages à l'école comprennent : l'orientation spatiale, le vocabulaire spécifique : à la droite/gauche (de), devant/derrière, le repérage par rapport à soi et par rapport à un objet mobile (Fénichel & al., 2004 ; pp.28-30 ; Pierrard, 2002). Notamment les enfants de maternelle sont amenés à travailler le passage d'un repère autocentré (par rapport à leur propre corps) à un repère extérieur à soi (allocentré) qui de plus est mobile dans le cas du déplacement d'un objet orienté comme un robot pédagogique de type Blue-bot.

S'agissant des connaissances et savoirs informatiques, nous nous sommes intéressées plus particulièrement à ce que la littérature dit des « concepts de base » de la programmation comme *la séquence, l'algorithme, le programme, l'itération et la commande* (Touloupaki, Baron & Komis, 2018). En ce qui concerne plus spécifiquement la robotique pédagogique, la manipulation du robot permet l'introduction spécifique de la notion de logique de « commande » comme permettant d'atteindre un objectif ou un but

[3] Ministère de l'éducation nationale. (2013b). Référentiels de connaissances et capacités exigibles pour le brevet informatique et internet (B2i) (publication no 0182 du 7 août 2013). Repéré à l'URL : https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do;jsessionid=51CD01A6175D71871DC25CA2A6437D3C.tpdjo05v_2?cidTexte=JORFTEXT000027811513&idArticle=&categorieLien=id)

[4] Ministère de l'éducation nationale. (2015b). Socle commun de connaissances, de compétences et de culture (publication no 17 du 23 avril 2015). Repéré à l'URL : http://cache.media.education.gouv.fr/file/17/45/6/Socle_commun_de_connaissances,_de_competences_et_de_culture_415456.pdf

[5] Ministère de l'éducation nationale. (2015a). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4) (publication no 11 du 26 novembre 2015). Repéré à l'URL : http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

[6] Ministère de l'éducation nationale. (2015a). Programmes d'enseignement de l'école maternelle (cycle 1) (publication n° 25 du 24 juin 2021). Repéré à l'URL : https://eduscol.education.fr/document/20062/download

(Bossuet, 1986). Ainsi l'organisation, l'anticipation et la planification d'opérations complexes peuvent être réalisées dans un environnement réel grâce au recours aux jouets programmables. Ceci peut permettre d'entrer dans une compréhension des connaissances en programmation (Barrue et Vigot, 2016).

### *1.3 Description du corpus*

Nous avons participé à un déploiement d'un robot pédagogique Blue-Bot et de ressources liées à cet outil aux cycles 1 et 2, en Grande Section de maternelle et en CP de 2017-2020 (Projet persévérons[7]). Nous avons ainsi constitué la plus grande partie de notre corpus. Nous avons organisé un suivi particulier sur chaque année avec une formation technique en classes de GS et de CP avec 5 enseignantes (2 en GS, 2 en CP et 1 en GS/CP) sur 3 années. Mais nous avons aussi suivi des enseignants ponctuellement sur une année en classes de GS ou de CP pour assurer la continuité du projet et son déploiement sur le département des Landes.

Les séances ont été filmées à l'aide de caméscopes :

- Le premier fixe au fond de la salle, grâce à un grand angle ou suffisamment placé en hauteur permettait d'enregistrer l'ensemble des activités de la classe.

- Le second mobile filmait généralement un groupe d'élèves et l'observateur se déplaçait pour filmer plus précisément les interactions entre l'enseignant et les élèves ou les actions des élèves lors des phases de travail individuel ou en interaction entre pairs.

- Parfois un troisième caméscope permettait de filmer un groupe de 4 élèves pendant toute la séance pour observer les tâches réellement effectuées par les élèves.

Pour compléter, nous avons collecté les scans des activités des élèves pendant les séances de papier/crayon. Des prises de notes lors des rencontres avec les enseignantes ou des réunions de début et de bilan pour toutes les années ont été transcrites. Les ressources utilisées : fiches de préparation de séquences et de séances ou copies des cahiers journal des enseignantes, ont été co-construites avec les enseignantes sur la base de ressources préexistantes proposées sur différents sites[8] sur l'introduction du Blue-Bot en classe.

## 2 Contexte des situations de classe retenues pour l'atelier

### *2.1 Description*

Nous avons proposé lors de l'atelier des activités autour d'une partie de notre corpus constitué d'observations dans une école maternelle dans une classe de MS/GS, composée de 13 élèves de moyenne section dont 7 filles et 6 garçons et de 11 élèves de grande section dont 3 filles et 8 garçons (11 élèves dont un élève avec un trouble autistique avec AVS). L'enseignante a proposé une séquence de 9 séances dans deux salles, la salle de classe et la salle de motricité.

---

[7] http://perseverons.inspe-bordeaux.fr/

[8] Site DANE Aix-Marseille : http://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_10548296/fr/programmer-les-deplacements-de-blue-bot

Site Poitiers : http://sitesecoles.ac-poitiers.fr/poitiers-prets-malles/spip.php?article14

Site Suisse : https://edu.ge.ch/site/desrobotsenclasse/

### 2.2 Matériel

Lors de la séquence, l'enseignante a utilisé six robots Blue-bot associés à différents matériels (Figure 7) dont trois tapis différents :

- Tapis Taille « Blue-Bot » 2 (Image 3) utilisé pour découvrir et expliquer toutes les fonctionnalités du Blue-Bot. Ce tapis est quadrillé de 4 cases sur 4 cases de 15 cm par 15 cm (pas du Blue-bot lorsque la commande « avancer » est activée). Il contient 4 cases marquées : une case « maison » où le Blue-Bot est positionné par l'enseignante, trois cases possibles pour l'arrivée du robot : case « fleur », case « pomme » et case « coccinelle ».

- Tapis Taille « enfant » (Image 1 – 120 cm sur 120 cm) utilisé dans toutes les séances en salle de motricité avec des formes géométriques représentées sur le quadrillage.

- Tapis taille « Blue-Bot » 1 (Image 2) utilisé en parallèle avec le même modèle de quadrillage et avec les mêmes formes géométriques.

Tous les élèves de la classe savent reconnaître les formes géométriques proposées et les nommer sur chacun des deux tapis. Dans la salle de motricité, les tapis « taille enfant » (Image 1) sont disposés pour que chaque binôme puisse travailler, un tapis par binôme. Les tapis « taille Blue-Bot » (Image 2) sont eux au nombre de deux disposés sur un côté de la salle. A côté est disposé un Blue-Bot à disposition des élèves. Deux cartes : une « départ » et une « arrivée » sont positionnées sur deux cases de tous les tapis au même endroit.

*Image 1 – Tapis Formes géométriques Taille « ENFANT »*

*Image 2 – Tapis 1 Formes géométriques Taille « BLUE-BOT »*

*Image 3 – Tapis 2 Taille « BLUE-BOT »*

Cartes codage déplacement :

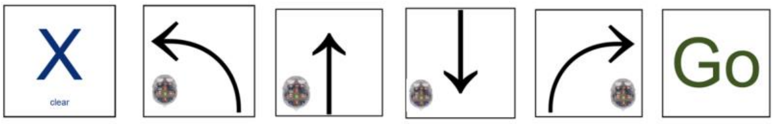



*Image 4 – Six cartes de codage*

*Figure 7. Images du matériel.*

De plus chaque binôme d'enfants a en sa possession un jeu de plusieurs cartes composé des modèles des six cartes de codage de déplacement (Image 4). Ces cartes sont de différentes natures : une carte pour commencer « *x* » ou « *clear* » qui sert à effacer la mémoire du robot, les commandes « *avancer* », « *reculer* », « *pivoter à droite* » et « *pivoter à gauche* » au nombre de cinq chacune, puis une carte pour terminer « *go* ». Les flèches présentes sur les cartes font le lien avec les boutons du clavier tactile du Blue-Bot (Figure 8).

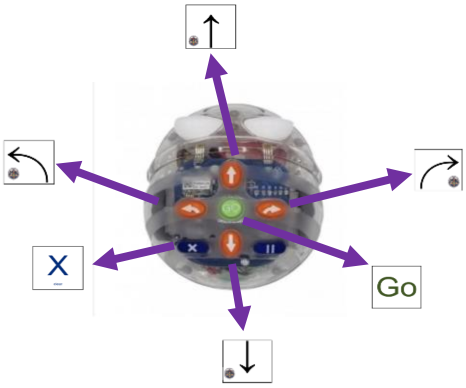



*Figure 8. Liens entre les cartes de codage et les commandes du robot.*

### 2.3 Description de la séquence

L'enseignante propose une séquence de 9 séances à ses élèves de GS (voir le descriptif de la séquence donné en Annexe 1). Elle choisit de mener deux fois la séance 1 en salle de motricité avant l'introduction des robots pédagogiques avec pour objectif de découvrir la nécessité d'un code commun pour communiquer des trajets imposés à des pairs. Ces séances sont inspirées d'une séance d'EPS (éducation physique et sportive) sur les parcours codés. Lors de la séance de découverte par les enfants des robots Blue-Bot et des différentes fonctionnalités des touches du cadran tactile (séance 2), l'enseignante travaille en salle de classe au coin regroupement en utilisant le tapis « taille Blue-Bot » 2 (Image 3 de la Figure 7). Dans les séances 4 – 5 – 7 qui ont suivi (le descriptif de ces séances est donné en Annexes 2 et 3), les enfants travaillent en salle de motricité avec les tapis « taille enfant » (Image 1 de la figure 7) et « tapis taille Blue-Bot » (Image 2 de la figure 7) suivant la description précédente. Les objectifs sont alors d'anticiper et de coder un déplacement. L'enseignante propose enfin aux enfants un réinvestissement sur papier où les élèves proposerons un programme d'un parcours en utilisant le code travaillé.

## II - ACTIVITES PROPOSEES PENDANT L'ATELIER

Avant les premières activités, nous présentons les robots Blue-Bot aux participants pour qu'ils les prennent en main avant les analyses. Les participants manipulent quelques minutes les robots pédagogiques. Ils découvrent et prennent en main les différents rôles des touches du cadran tactile. Ils s'aperçoivent rapidement d'une difficulté liée à l'appropriation de la « mémoire » du robot. Lors de leurs premiers essais pour programmer un déplacement libre qu'ils ont choisi, lorsque le robot s'arrête en cours de chemin avec un début de chemin correct mais incomplet, il est possible de corriger le programme par un complément. Ceci se produit pour les participants qui découvrent les instructions « pivoter à droite/à gauche », les enseignants ne pensent pas alors immédiatement à corriger leurs programmes par un complément d'un élément de programmation. Ils effacent complètement le programme avant de recommencer. Cette question soulevée dès le début de l'atelier nous a semblé intéressante car elle vient montrer que les savoirs informatiques sont présents et questionnés immédiatement par l'introduction du robot pédagogique ; elle touche en effet une connaissance sur la gestion de la mémoire dans la programmation d'un robot pédagogique. La construction de cette notion est un processus plus difficile que celle des capacités liées à des programmes séquentiels (Komis et Misrili, 2013). Une autre question a émergé sur le lien entre la difficulté de l'ordre « pivoter … » car le robot pivote sur lui-même sans changer de case. L'hypothèse d'un obstacle donnant lieu à une interprétation erronée de type « pivoter à droite/gauche » comme recouvrant « se positionner sur une nouvelle case à droite/à gauche » a émergé. Un exemple de déplacement à coder est proposé aux participants pour programmer un déplacement du Blue-bot du disque rouge (le robot Blue-bot est positionné sur la case et orienté vers la case du carré bleu) vers le triangle rouge (Figure 9).

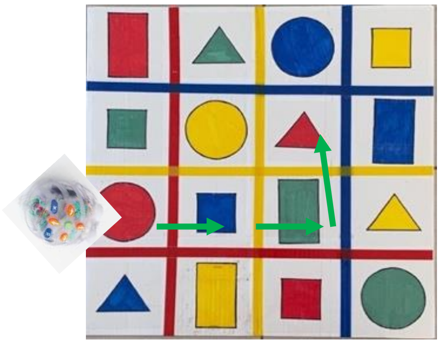
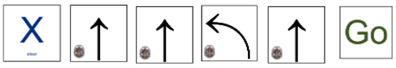


*Figure 9. Programmation avec les cartes de codage pour illustrer l'exemple.*

Un programme correct possible est : . Par contraste, des participants ont pu tester un programme erroné du type : .

Un des participants propose une piste utilisée dans d'autres expérimentations que celles qui vont être présentées par la suite (Berrouiller &Eysseric, 2018) ; celles-ci proposent un travail sans quadrillage. Utiliser le robot sur terrain libre atténuerait potentiellement l'obstacle : il n'y aurait plus de couplage univoque entre « une case » - « un ordre » qui pourrait contribuer à renforcer l'interprétation erronée de l'instruction pivoter « à droite/ à gauche » comme recouvrant le positionnement sur une nouvelle case « à droite/à gauche ». Toutefois, comme nous le verrons plus loin, nous avons aussi d'autres hypothèses sur ce qui pourrait être à l'origine d'un tel obstacle.

Nous avons proposé aux participants d'analyser des études de cas en analysant les extraits de vidéo, les transcriptions et les vidéogrammes qui ont été construits lors de l'étude, et enfin des éléments de nos propres conclusions prenant appui sur les résultats de notre recherche encore en cours. Nous avons commencé par la trajectoire d'un élève, Simon, à travers quelques séances donnant à voir différents phénomènes et interrogeant sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des connaissances spatiales visées, telles que le repérage par rapport à un objet mobile, le vocabulaire spatial, l'orientation spatiale.

## 1 Connaissances spatiales « contextualisées » avec le Blue-Bot : des difficultés et des leviers ?

### *1.1 Premier conflit – étude de cas Simon (1)*

Les participants ont été invités à identifier les conflits liés aux différentes positions du binôme et de l'enseignante lors d'un premier épisode choisi. Ce premier épisode se situe lors de la séance 5 de la séquence (Annexe 3) au moment du temps de rappel au coin regroupement. L'enseignante propose à un binôme de suivre la consigne : « Les cases « départ » et « arrivée » sont positionnées sur le grand tapis et le tapis du Blue-Bot. Vous devez programmer votre binôme qui joue le rôle de la Blue-bot grâce aux cartes de déplacements pour qu'il puisse suivre le chemin entre le départ et l'arrivée. Puis vous vérifierez votre programme sur le Blue-Bot sur son tapis. »
Nous avons proposé aux participants d'étudier un extrait de vidéo de cet épisode ; puis nous leur avons fourni : 1) le synopsis de l'épisode avec la transcription des échanges oraux entre l'enseignante et Simon ; ainsi que 2) des photographies légendées de la situation, enfin 3) des représentations codées d'une vue de dessus de la situation (Figure 10).

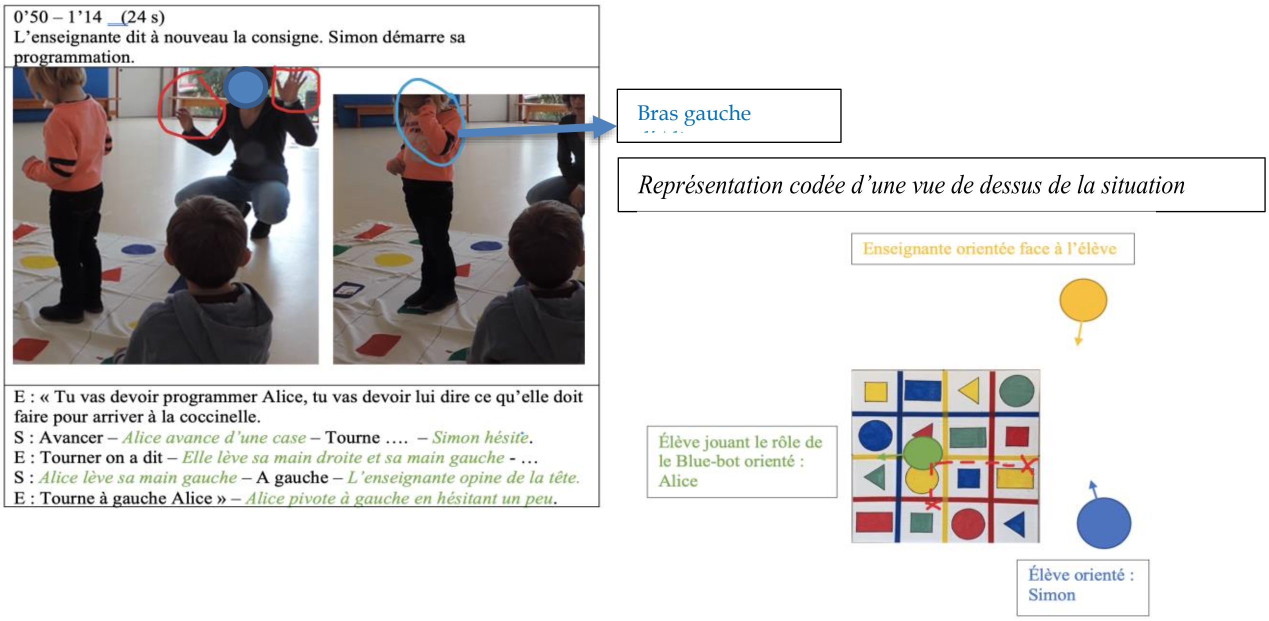



*Figure 10. Premier extrait sur un temps de regroupement – échange entre un binôme et l'enseignant.*

Dans cet épisode de classe, les conflits liés aux orientations de chacun-e (enseignante – Simon) sont visibles. L'enseignante en levant les bras pour marquer la gauche et la droite impose à Simon une transposition « miroir ». La situation proposée s'avère dès lors complexe du point de vue des connaissances spatiales convoquées, ce qui nous conduit à mettre en doute que l'intervention de l'enseignante puisse constituer une aide pour Simon. Toutefois, le milieu constitué de la présence d'une élève « jouant le robot » permet d'autres rétroactions. Nous pouvons observer qu'Alice lève la main gauche et pivote légèrement son corps vers la gauche avant même que Simon ne prononce « à gauche ». Ceci peut permettre à Simon de projeter une autre orientation que la sienne et que celle de la maîtresse, et ainsi de s'inscrire dans la perspective allocentrée requise par la situation. Il s'agit pour Simon de se repérer par une projection par transfert, cas simplifié ici par la présence d'Alice. Toutefois, les conditions très spécifiques de la situation qui ont permis à Simon ce repérage allocentré, posent la question du transfert possible de cet apprentissage à d'autres situations, notamment à celles où il s'agira de programmer la Blue-Bot.

### 1.2 Second conflit d'orientation – Étude de cas Simon (2)

Les participants ont poursuivi sur les conflits d'orientation avec un extrait de vidéo avec Simon. Ce second épisode se situe toujours lors de la séance 5 (Annexe 3) mais Simon se retrouve seul au moment où il vérifie son programme sur le Blue-Bot. Après avoir visionné son second extrait de vidéo, nous leur avons fourni : 1) le synopsis de l'épisode avec la transcription des échanges oraux entre l'enseignante et Simon ; ainsi que 2) des photographies légendées de la situation, enfin 3) des représentations codées d'une vue de dessus de la situation (Figure 11). Alors que dans la situation précédente, comme Alice est dans la case et tournée dans la bonne direction, Simon se repère par transfert, ici d'autres connaissances sur la structuration de l'espace apparaissent : s'orienter par rapport à un objet mobile, dans le cas de la latéralisation.

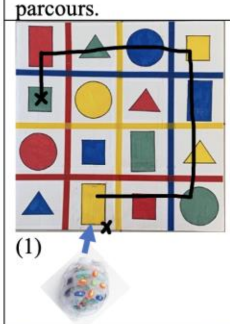
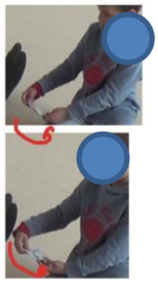
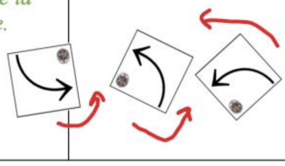
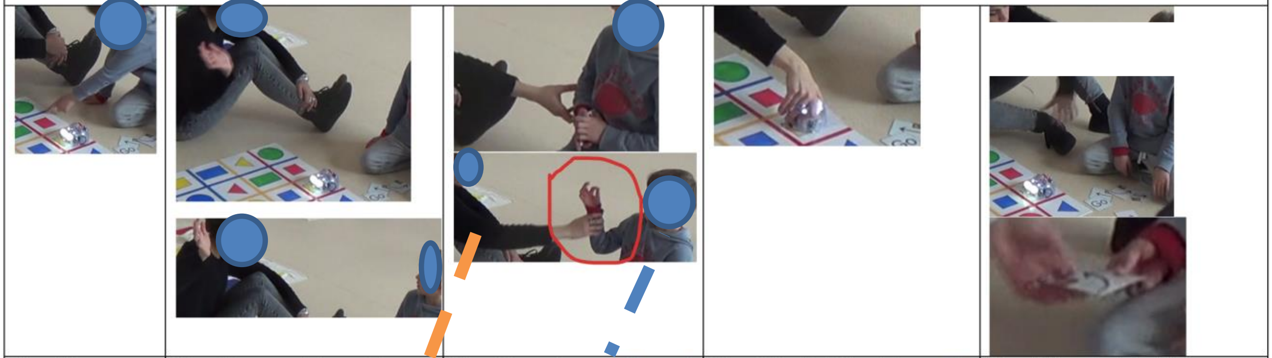
| Simon décide de son parcours. | 21'45 – 22'04 (19 s) Simon cherche la première carte à positionner | | | |
|---|---|---|---|---|
|   |  |  |  |  |
| *Simon n'a pas travaillé ce parcours en amont sur le tapis « taille enfant » avec ses cartes. L'orientation du Blue-Bot est vers le carré bleue (sens de la flèche bleue).* | *Simon a pris une carte « PIVOTER A GAUCHE », il la tient à l'envers pour que la carte indique la direction à prendre.*  | *Simon tourne la carte.* | *Il n'est pas convaincu par son premier choix. Il cherche parmi les cartes « PIVOTER » devant lui.* | *Il essaye à nouveau avec « PIVOTER A GAUCHE » en tenant la carte à l'envers.* |

*Figure 11. Difficulté de Simon pour orienter une carte « pivoter » – échange entre Simon et l'enseignant. Remarque : Simon indique avant cet épisode le trajet qu'il choisit ; ce dernier a été indiqué sur le tapis vu du dessus pour comprendre l'activité de Simon.*

Dans le milieu matériel de cette seconde situation, les éléments présents sont : Blue-Bot, cartes, chemin choisi. Simon cherche la carte « *pivoter à droite* » pour le déplacement du Blue-Bot. L'élève choisit la carte « *pivoter à gauche* » mais l'oriente dans la bonne direction à prendre pour le Blue-Bot. L'enseignante va intervenir pour essayer de l'aider à choisir la bonne carte (Figure 12).

Nous pouvons ici faire le parallèle avec le début de l'extrait précédent (Figure 13). L'enseignante propose une aide initiale de même type que lors de l'épisode précédent avec le même conflit potentiel d'orientation (« effet miroir ») qui se traduit par une absence de réponse de la part de l'élève. L'enseignante tente alors de réguler en prenant la « bonne » main de l'élève mais cela ne suffit pas à lever la difficulté rencontrée dans la recherche de l'instruction à verbaliser – ni même la recherche de l'instruction de codage – la connaissance spatiale à mobiliser – relevant d'un repérage « extérieur » à soi / orienté – n'étant pas convoquée. Ceci permet au passage de montrer que l'épisode vécu en amont avec une élève jouant le rôle d'un robot n'a pas permis la construction d'une connaissance immédiatement transférable pour le travail avec le Blue-Bot.

| 22'04 – 23'01 (57 s) Difficulté sur les cartes « *PIVOTER* » | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  | | | | |
| E : « Tu veux lui faire faire quoi ? » – *Simon indique du doigt la case à côté du Blue-bot.* | E : « Donc maintenant tu tournes à … » – *E lève la main droite, Simon la regarde, il est face à elle.* | E : « Regarde … – *E prend le bras droit de Simon et lui lève.* | E : « Elle doit être ici … – *E prend le Blue-bot et la fait pivoter vers la droite d'un quart de tour.*<br>S : Ah oui à gauche !<br>E : Ah non //<br>S : droite //<br>E : oui droite. | E : « Elle est où la flèche pour tourner à droite – *Simon lui la carte « PIVOTER A GAUCHE » à l'envers la flèche montre la direction droite.* – Non c'est pas à droite ça. » |

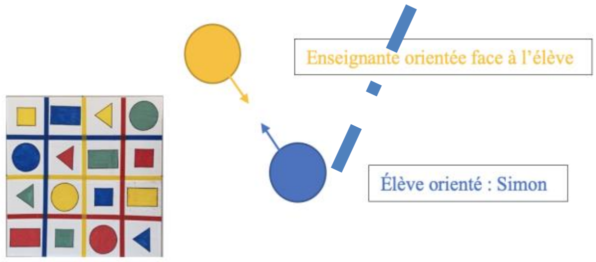



*Figure 13. Conflit d'orientation : « Effet miroir ».*

Nous retrouvons Simon un peu plus tard lors de sa programmation (Figure 14). Il se retrouve confronté à nouveau au choix d'une commande « pivoter », cette fois à gauche. L'enseignante est à nouveau confrontée à la gestion de différentes orientations (Figure 15).

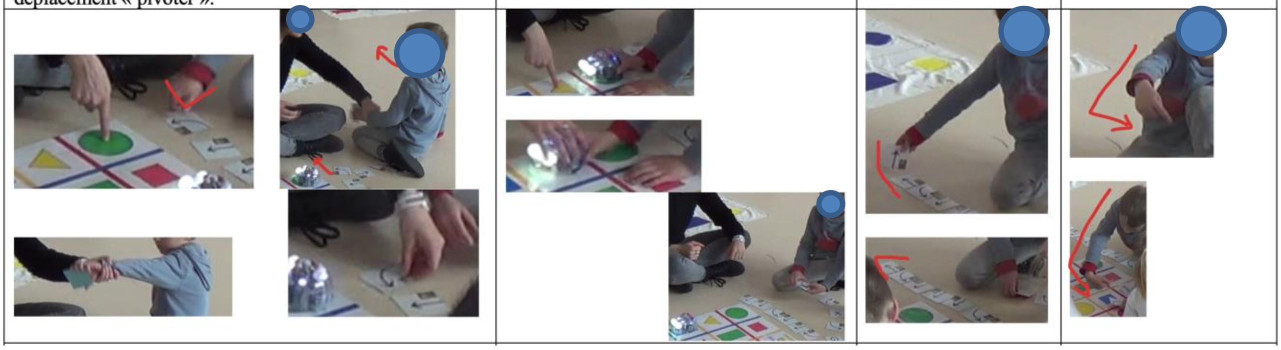
| 23'29 – 23'58 (29 s). Simon est confronté à un nouveau déplacement « pivoter ». | 23'58 – 28'32 (4'34) | 25'01 | 25'09 – 25'29 (20 s) |
|---|---|---|---|
|  | | | |

*Figure 14. Nouvel échange entre l'enseignante et Simon.*

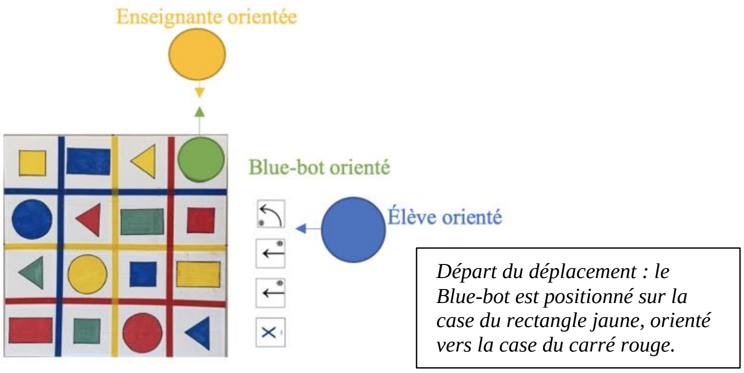



*Figure 15. Positions relatives : Enseignante, Blue-bot, Élève.*

Lors de la précédente situation, Simon était bien orienté comme le Blue-Bot ; mais cette fois, c'est l'enseignante qui le positionne dans l'orientation du Blue-Bot (Figure 16).

 (Première situation)  (Deuxième situation)

*Figure 16. Positions relatives entre Simon et le Blue-bot.*

Ce faisant fait le lien entre Simon et le Blue-bot, entre le bras gauche de l'élève et la touche « *pivoter à gauche* » du Blue-Bot (Figure 17).

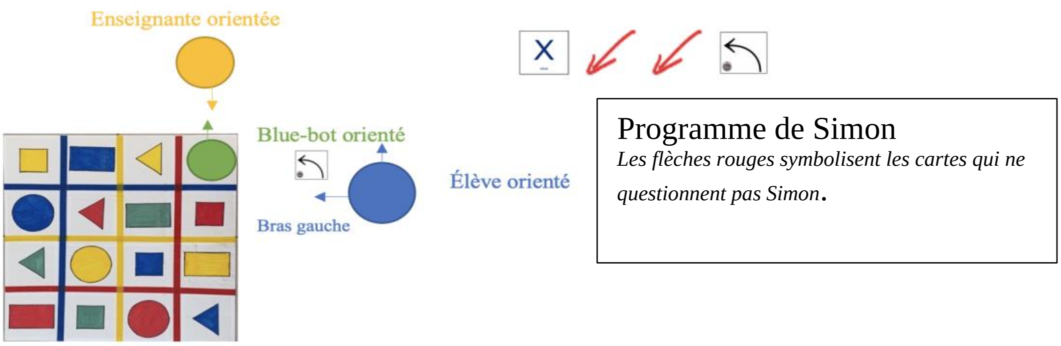



*Figure 17. Nouvelles positions relatives.*

L'aide de l'enseignante a donc évolué. Elle s'assure cette fois d'une orientation de l'élève, identique à celle du Blue-Bot et elle ne se réfère plus à son propre corps mais bien à celui de l'élève. Ceci permet alors de faire émerger à la fois la formulation attendue « à gauche » allant de pair avec un geste avec la main permettant de « conserver » la mémoire de cette instruction – même quand l'élève se repositionne comme initialement devant le tapis. Il nous semble qu'ici émerge le rôle d'un « objet intermédiaire » (la main de l'élève) sur lequel les épisodes de classe analysés par la suite permettront précisément de revenir : cet intermédiaire permet à l'élève de s'approprier une nouvelle connaissance pour se repérer dans un espace orienté, repéré par rapport à un objet mobile.

### *1.3 Commentaires*

Pendant notre atelier, le milieu matériel est questionné. Celui-ci est dense pour Simon lors de la première vidéo. Les participants ont échangé sur la nature du milieu des situations observées – s'accordant à dire que le milieu ne jouait pas vraiment le rôle de système antagoniste – y compris dans le cas d'instructions données à « un-e élève pair-e » dans le premier exemple car l'anticipation par Alice du sens dans lequel pivoter (main gauche levée) a permis à Simon de produire la réponse attendue mais sans construire les connaissances visées transférables.

## 2 Des objets intermédiaires permettant une entrée dans la littératie associée aux connaissances spatiales et/ou informatiques

Nous poursuivons avec les participants en reprenant les observations des deux mêmes épisodes de la situation précédente. Nous reprenons avec eux notre hypothèse d'un objet intermédiaire « la main » pour coder une instruction, en précisant le rôle qu'il semble jouer à l'issue de ce dernier épisode où il est apparu pour la première fois pour Simon. Nous proposons une focale sur des parties du synopsis du dernier épisode avec la transcription des échanges oraux entre l'enseignante et Simon ; ainsi que des photographies légendées d'autres situations proposées lors des séances 7, 8 et 9 (Figures 18 à 22).

### 2.1 Utilisation du robot pédagogique Blue-Bot

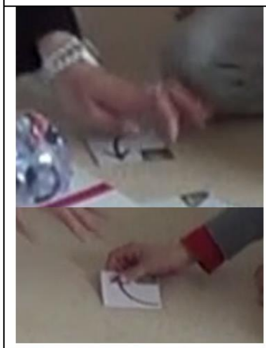
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 23'01 – 23'04 (3 s) | […] |
|  |  |  | |
| E : « Alors on a dit la flèche qui va à droite – *E pointe la flèche du doigt, Simon la positionne au début de son parcours*. – | E : « ça veut dire qu'elle va faire ça – *E prend le Blue-bot et la fait pivoter à droite*. – Ensuite … » | *Simon pose une carte « AVANCER ». E pointe du doigt la nouvelle position du Blue-bot après les deux ordres.* E : « Ensuite … » | |

*Figure 18. Utilisation du Blue-Bot comme objet intermédiaire.*

Nous reprenons l'observation du dernier épisode. Nous nous intéressons à l'activité réelle de l'élève (Figure 18). Ici il n'y a pas d'anticipation du programme : l'élève, guidé par les interventions de l'enseignante, utilise finalement une programmation pas à pas. En effet l'enseignante simule les déplacements successifs du Blue-Bot après que l'élève dépose une carte pour coder chaque déplacement élémentaire. La situation lui permet de déterminer un « bon » programme.

### 2.2 Utilisation de la « main » ou du « doigt orienté » une entrée dans la littératie des savoirs spatiaux (et informatiques ?)

Dans la suite, lors de la séance 5 (Annexe 3), Simon va utiliser sa « main » pour trouver une instruction suivante dans le codage (Figure 19).

| 25'09 – 25'29 (20 s) |
|---|
|   |
| *Simon mime la direction « gauche » avec le bras ; mais il utilise son bras droit. Il a des difficultés à faire le lien entre les deux.* E : « vers la gauche ou vers la droite ? » – *Simon montre une carte « PIVOTER A DROITE »* – Non ça c'est à droite … la gauche c'est celui-là … – *E prend la carte « PIVOTER A GAUCHE » et la positionne à la suite du programme.* |

*Figure 19. Utilisation de la main comme objet intermédiaire.*

Ce geste va devenir un intermédiaire récurrent dont Simon va user dans d'autres situations et lors de travaux individuels pour programmer la séquence complète (Figure 20). Sa main lui permet de simuler le déplacement du Blue-Bot avant de choisir la touche de commande qui correspond sur le clavier tangible.

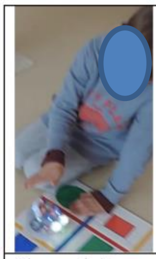
| | | |
|---|---|---|
|   |  |  |
| Simon doit programmer un pivotement du Blue-bot. Sa main simule la position du Blue-bot à l'étape précédente. | Sa main simule la position souhaitée après le pivotement. Elle va vers le bouton de la flèche de gauche du Blue-bot. | Simon valide la touche « *PIVOTER A GAUCHE* » du Blue-bot. (Ce qui est le bon choix) |

*Figure 20. Utilisation de la main comme objet intermédiaire (2) lors de la séance 5.*

Nous avons ensuite proposé aux participants de découvrir deux autres moments où Simon va utiliser sa « main » ou son « doigt orienté ». Lors de la séance 8, Simon travaille sur papier (Figure 21). L'objectif est de coder le déplacement choisi par l'élève pour simuler un trajet entre une case « départ » et une case « arrivée » à l'aide de cartes flèches collées sur une feuille sans la présence du robot. L'autre moment a lieu lors de la séance évaluative où Simon doit déterminer et entrer une séquence d'instructions complètes à l'aide du clavier tangible du Blue-Bot avant la validation par le déplacement du robot sur le tapis (Figure 22).

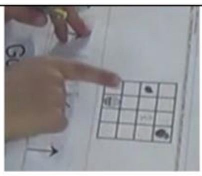
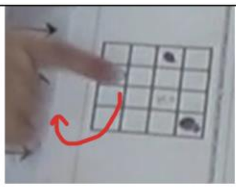
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| Simon choisit la première commande « *PIVOTER A DROITE* ». Il colle sa commande sur la feuille. | Puis il positionne son doigt sur le quadrillage à la place du Blue-bot. | Sa main pivote pour simuler la nouvelle position du Blue-bot. | Il choisit alors la commande « *AVANCER* ». | Son doigt suit à nouveau le chemin pour connaître la commande suivante. |

*Figure 21. Utilisation de la main comme objet intermédiaire (3) lors de la séance 8.*

| Premier chemin à la fleur – Réussite en une fois | Second chemin à la pomme – Réussite en une fois |
|---|---|
|  |  |

*Figure 22. Utilisation de la main comme objet intermédiaire (4) lors de la séance évaluative.*

Ces gestes « de la main » ou « du doigt » mobilisant une ressource corporelle liée à la main ou doigt de l'élève relevant de l'*oralité* mais permettant une *entrée littératiée* dans les savoirs spatiaux visés, notamment ceux liés au repérage allocentré. Nous qualifions ces gestes d'intermédiaires au regard de ce qu'ils semblent permettre du point de vue d'un continuum entre oralité et littératie décrit dans les travaux de Laparra et Margolinas (2016). En effet, le groupe classe pratique des échanges verbaux ou non, sur et à l'aide d'objets du monde en utilisant ses gestes « de la main » ou « du doigt », leurs ressources corporelles à disposition, de façon 'fortement routinisées' : *oralité*. L'organisation est liée aux objets du monde et aux configurations dans lesquels ces objets sont présents. Il se meut et agit dans un environnement qui organise les corps et les objets du monde selon des ressources fournies par l'écrit, ici l'ensemble des cartes représentant le code commun utilisé avec un usage raisonné et organisé : *littératie* (Laparra et Margolinas ; 2016).

Ces intermédiaires constituent aussi possiblement des leviers pour passer d'un codage « pas à pas » (celui convoqué sur les tapis par Simon) à un codage plus séquentiel, vers une programmation d'une suite d'instructions, comme le travail de Simon sur papier semble l'illustrer.

### 2.3 Commentaires

Pendant notre atelier, les participants ont échangé sur les différents exemples. Ceux-ci montrent comment l'enseignante a permis la construction d'un intermédiaire qui aide l'élève lors des différents exercices à résoudre. Cet intermédiaire lui permet de dépasser les difficultés liées à la compréhension du repère mobile. Il est même évolutif suivant les supports.

## 3 Deux littératies concurrentes : représenter un chemin ou coder un programme

### 3.1 Conflits de représentation

Nous avons proposé aux participants deux courts extraits de vidéo : celui de Mathis et d'Emma pour illustrer un autre résultat sur l'utilisation des cartes de codage pour coder un déplacement imaginé pour le Blue-Bot.

Le premier épisode se situe lors de la séance 4 de la séquence (Annexe 2) au moment d'un temps de travail en binôme où Mathis a choisi un trajet entre une carte « départ » et une carte « arrivée ». Le synopsis de l'épisode avec la transcription des échanges oraux entre l'enseignante et Mathis permet d'illustrer le premier conflit de représentation (Figure 22).

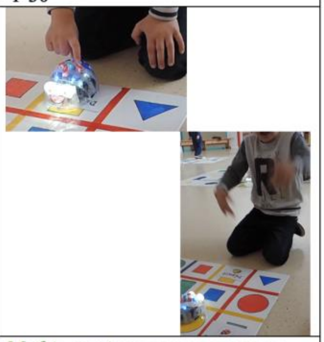
| 0'00 | 0'38 | 1'06 | 1'30 |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| *Mathis code le déplacement que doit suivre le Blue-bot en utilisant les cartes de codage. Puis il essaye de coder le robot mais appuie sur les touches trop rapidement en oubliant d'effacer la mémoire.* | E : « Ton chemin n'est pas le bon Mathis. Il faut le laisser terminer. // *L'enseignante positionne le Blue-bot sur la case « Départ ».* // Alors qu'est-ce qu'on commence par faire ? »<br>*Mathis appuie sur « x » : effacer la mémoire.*<br>E : « Oui … »<br>*Mathis entre son programme :*<br>*Avancer*<br>*Avancer*<br>*Pivoter à gauche* | *Le Blue-bot s'arrête trop tôt.*<br>E : « Est-ce-qu'on a réussi ? … // *Mathis secoue la tête* // Non on n'a pas réussi … Allez on recommence. »<br><br>*Mathis reprend le Blue-bot, le positionne correctement sur la case « Départ ».* | *Mathis corrige son programme :*<br>*Avancer*<br>*Avancer*<br>*Pivoter à gauche*<br>*Pivoter à gauche*<br>*La correction par l'élève n'est pas concluante. Il a une mauvaise compréhension de la commande « pivoter ».* |

*Figure 23. Lien entre le chemin suivi et le programme à construire.*

Dans ce premier temps, nous pouvons entrevoir la difficulté d'appropriation du code utilisant les flèches en regardant l'exemple de l'emploi de la carte « pivoter » (Figure 23). En effet Mathis semble attendre de la commande « pivoter à gauche » qu'elle permette au robot de se déplacer vers la gauche sur le tapis alors que cette commande se traduit par une rotation du Blue-Bot sur lui-même. Nous voyons aussi dans le programme construit avec les cartes sur le sol par Mathis, le double aspect porté par les cartes de commande (Figure 24). De fait, elles doivent traduire les commandes du robot mais pour l'élève, elles traduisent le trajet que celui-ci va suivre. Il trace sur le sol le chemin à suivre par le Blue-Bot. Il fait d'abord correspondre les trois cartes « avancer » chacune avec une case du tapis, il construit le dessin de la ligne de la trajectoire suivi.

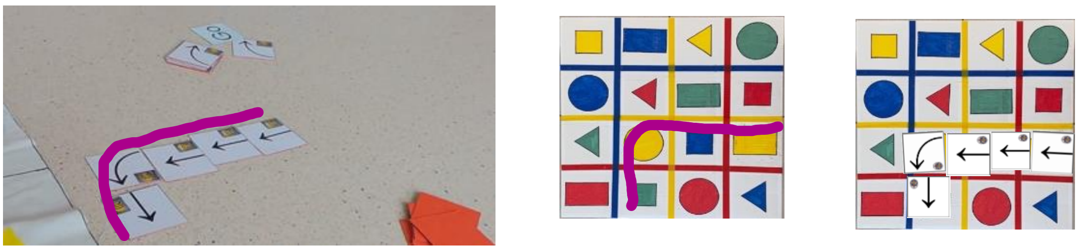


*Figure 24. Image du programme de Mathis.*

Le second épisode montre Emma qui quant à elle, code le chemin à parcourir directement sur le grand tapis (Figure 25). Elle propose une suite d'instructions, les cartes indiquent des déplacements d'une case à l'autre mais cette suite d'instructions n'est pas le codage du trajet en tant qu'une séquence d'instructions programmables en une seule fois sur le cadran tangible ; l'utilisation de la carte « pivoter à droite » le montre en l'utilisant pour coder un pivotement à gauche.

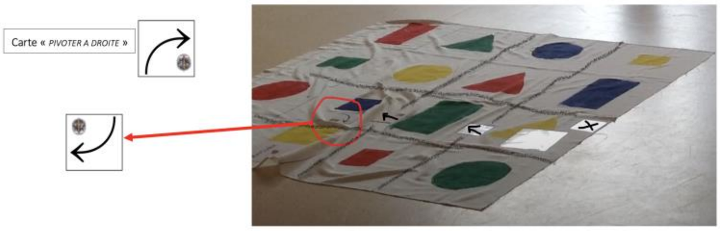



*Figure 25. Cartes de programmation positionnées sur le grand tapis.*

Nous pouvons toutefois observer ici une première avancée dans l'interprétation du code car les cartes sont positionnées non pas dans une case du tapis mais entre deux cases.

La représentation d'un chemin soit sur le quadrillage, soit à côté de celui-ci, prime pour les élèves ; mais dans certains cas des rétroactions du milieu – par exemple l'échec du programme chez Simon – peuvent permettre de faire évoluer les stratégies. Nous avons pu observer que cela n'est pas immédiat chez Mathis qui code deux fois « pivoter à gauche » pour « pivoter à gauche » « avancer ». Chez Emma toutefois, nous analysons un premier pas vers une programmation valide. Sans lui permettre tout fois l'accès à une étape utile pour élaborer un programme qui relèverait d'instructions ou d'une séquence d'instructions, Emma donne une « place particulière » à la carte « pivoter » pour dépasser l'idée qu'elle associe aussi une commande « avancer » : dans la case du carré bleu. Elle continue à « représenter » un chemin mais semble dépasser partiellement l'interprétation erronée de l'instruction « pivoter à droite/à gauche » fréquemment rencontrée chez les élèves. Toutefois Emma semble encore avoir du mal à gérer l'interaction entre des connaissances spatiales dans la situation observée – en se trompant sur l'orientation à « coder » (à gauche) qui irait de pair avec celle représentée sur le tapis.

### 3.2 Commentaires

Cette interprétation erronée anticipée par les participants de l'instruction « pivoter à droite/à gauche » est donnée à travers les extraits. Toutefois de notre propre point de vue, elle n'est pas totalement imputable à l'usage d'un quadrillage. Il nous semble que ce sont davantage deux littératies concurrentes qui semblent se retrouver en conflit du point de vue des élèves : celle de la représentation d'un chemin lié au déplacement du robot et celle de la suite d'instructions à donner au robot. Ce que donnent à voir les études de cas présentées, c'est que certains aspects de la littératie liée à la représentation d'un chemin sont à dépasser et ce, du point de vue de la littératie sous-jacente aux savoirs informatiques – pour interpréter ces cartes comme des « commandes » pour le robot, soit des instructions programmables. Le temps de l'atelier n'a pas permis d'aller jusqu'à la présentation d'autres études de cas. Une autre étude de cas non présentée lors de l'atelier montre toutefois que pour d'autres élèves qu'Emma, ce dépassement peut donner lieu à l'émergence d'un autre intermédiaire pour passer d'une littératie (celle de la représentation du chemin) à une autre : la création d'une « pile » (au sens matériel du terme, organisation verticale de cartes) de deux instructions différentes « pivoter à droite/à gauche -avancer » qui peut permettre une entrée dans la littératie propre aux savoirs informatiques. Un des élèves de GS à l'origine d'une telle « pile » dans nos observations a d'ailleurs été un des tout premiers élèves de la cohorte à dépasser la programmation du robot « pas à pas » en CP.

# III - CONCLUSION

En conclusion, lors de l'atelier, nous avons pu partager avec les participants notre problématique de recherche, des aspects méthodologiques présents dans les matériaux donnés à étudier lors de l'atelier comme le codage des instructions, la description de gestes intégrés dans les transcriptions et des premiers résultats de recherche.

La séquence proposée dans l'atelier a permis tout d'abord de montrer les difficultés liées à la latéralisation des élèves ; les conflits d'orientation vécus par les élèves sont présents dans les séances avec le Blue-bot. Cette première partie de l'atelier a ainsi questionné le milieu matériel présent. Celui est extrêmement complexe et souvent peu explicité, sa compréhension est laissée à la charge des élèves. Nous avons pu illustrer le fait que les élèves construisent spontanément des gestes qui constituent de notre point de vue des intermédiaires entre oralité (les ressources étant corporelles) et littératie (projection d'un déplacement à coder à l'écrit) pour s'approprier de nouvelles connaissances spatiales liées au repérage allocentré qui devient nécessaire pour anticiper le déplacement du Blue-Bot. Ces intermédiaires présents de manière récurrente dans nos observations s'avèrent évolutifs suivant les milieux des situations didactiques et les difficultés ressenties par les élèves.

Ces premiers résultats de recherche convergent avec certains constats faits par ailleurs, par certains participants ayant observé des expérimentations avec les robots pédagogiques de plancher à des niveaux similaires (GS ou CP). Le caractère délicat de l'interprétation de la commande « pivoter à droite et/ou à gauche » par les élèves a été mis en avant, et ce, tant du point de vue des connaissances spatiales (ce qui renvoie au point précédent) que de celui des connaissances informatiques visées. Ce que certain-e-s participant-e-s ont vu comme lié à l'usage d'un quadrillage dans les situations observées (entravant l'interprétation valide de la « commande » pivoter), nous le voyons davantage lié à la présence (concurrentielle) d'une autre littératie que celle strictement liée aux savoirs informatiques – celle liée à la représentation d'un chemin, chemin qu'il s'agit d'ailleurs bien « d'anticiper en quelque sorte » (par ailleurs requis dans cette situation). Ce travail de recherche en cours vise précisément à approfondir les conditions des apprentissages à la fois informatiques et spatiaux qui interagissent fortement dans les situations observées d'enseignement et d'apprentissage avec le Blue-Bot.

## IV - BIBLIOGRAPHIE

Barrue C. et Vigot N. (2016). Jouets programmables comme outils cognitifs : pratiques pédagogiques de stagiaires professeurs des écoles. *DIDAPRO6.*

https://didapro6.sciencesconf.org/83332/DIDAPRO.CBarrue.pdf

Baron, G.-L. et Bruillard, E. (2001). Une didactique de l'informatique ? *Revue française de pédagogie*, 135, 163-172.

Berrouiller, C. et Eysseric, P. (2018). Bee-bots et Blue-bots en classe : analyse de pratiques professionnelles. *Actes du 45ème Colloque de la COPIRELEM*. Blois : ARPEME.

https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO19006/IWO19006.pdf

Berthelot, R. et Salin, M.H. (2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N* (65), pp. 37 – 59.

Bossuet G. (1986). *L'accord LOGO, Vol. 2*. Université Paris VI, 1986.

Bossuet G. (1987). *L'accord LOGO, Vol. 3*. Université Paris VI, 1986.

Boule F. (1988). *L'informatique, l'enfant, l'école*. Armand Colin-Bourrelier.

Combes-Trithard F. (1984). *Enregistrer, lire, programmer à l'école maternelle*. Armand Colin-Bourrelier.

Dufoyer, J.-P. (1988). *Informatique, éducation et psychologie de l'enfant*. Le Psychologue, PUF, page 72.

Fénichel M., Pauvert M. et Pfaff N. (2004. *Donner du sens aux mathématiques. Tome 1 Espace et géométrie.* Bordas pédagogie.

Greff E. (1999). En quoi le robot Algor constitue-t-il un objet didactique original ? *La revue de l'Epi* n°93.

Greff E. (2001). Résolution de problème en GS autour des pivotements à l'aide du robot de plancher. *Grand N* (68). pp. 7 à 16.

Komis, V. et Misirli, A. (2013). Etude des processus de construction d'algorithmes et de programmes par les petits enfants à l'aide de jouets programmables. In : Drot-Delange, B. ; Baron, G-L. & Bruillard, E. *Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC) en milieu éducatif*, 2013, Clermont-Ferrand, France.

Laparra M. et Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe : Des liens entre énumération, oralité et littératie.* De Boeck, p.175, Le point sur… Pédagogie, 978-2-8041-9527-4.

Linard, M. (1990). *Des machines et des hommes*. Éditions Universitaires, p. 108.

Papert, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit, Ordinateurs et apprentissage.* Flammarion Edition.

Peres, J. (1987). *Recherches menées à l'IREM de Bordeaux sur l'utilisation de la tortue de sol LOGO à l'école maternelle.* Université de Bordeaux.

Pierrard A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle*. Scéren CRDP Grenoble.

Temperman, G., Durant, C. et De Lièvre, B. (2019). Programmer pour s'orienter, s'orienter pour programmer. *Review of science, mathematics and ICT education,* 13(1), pp.73-92.

Touloupaki, S. Baron, G.L. et Komis, V. (2018). Un apprentissage de la programmation dès l'école primaire : le concept de message sur ScratchJr. *Didapro 7 – DidaSTIC. De 0 à 1 ou l'heure de l'informatique à l'école*, Feb 2018, Lausanne, Suisse. ⟨hal-01753125⟩

Verjat I. (1994). Confrontation de deux approches de la localisation spatiale. *L'année psychologique*, vol. 94, n°3. pp. 403-423.

## V - ANNEXE 1 : SEQUENCE PEDAGOGIQUE

| **Séquence pédagogique BLUE-BOT** | |
|---|---|
| Domaine | Explorer le monde |
| Sous-domaine | Se repérer dans le temps et dans l'espace → l'espace |
| Objectifs | Anticiper un parcours, coder un déplacement, être capable de remettre en cause, d'ajuster son résultat, résoudre des problèmes |
| Objectifs langagiers | Utiliser le vocabulaire topologique : pivoter à gauche, pivoter à droite, avancer, reculer |
| Prérequis | Vocabulaire topologique : gauche, droite |
| 9 séances | |

| ***Séances*** | ***Objectifs*** | ***Déroulement*** | ***Durée*** |
|---|---|---|---|
| Séance 1 : découverte | Se déplacer sur un quadrillage | En binôme : L'élève pioche 4 cartes formes géométriques (ou plus) et doit se déplacer sur le quadrillage pour se rendre sur chaque forme correspondant à ses cartes. Puis il place ses cartes dans l'ordre du chemin parcouru et donne des consignes à un camarade pour qu'il le réalise à son tour. | 35 min |
| Séance 2 : découverte des robots pédagogiques | Découvrir les Blue-bot<br>S'approprier les Blue-bot en comprenant son fonctionnement | L'enseignante lit une histoire pour accueillir le Bee-bot (car pas encore le matériel Blue-bot).<br>Un groupe d'élèves de grande section décore les capes pour leur Blue-bot.<br>L'autre groupe va résoudre une situation problème ; il faut aider le Blue-bot à comprendre les fonctions sur son dos : aller à la coccinelle ou à la fleur. Le mode 'pas à pas' permet d'expliquer chaque fonction du Blue-bot. Il faudra insister sur le virage à gauche et à droite : le Blue-bot pivote sur elle-même et l'importance de la touche « *X* » ou « *CLEAR* » avant de rentrer un nouveau programme pour effacer la mémoire du Blue-bot. Chaque enfant amène le Blue-bot sur la coccinelle ou la fleur, puis la pomme.<br>Ensuite l'enseignante échange les groupes. | 40 min |
| Séance 3 : codage des parcours | Se déplacer sur un quadrillage<br>Coder un parcours | Retour sur le jeu n°1 et la nécessité de garder la trace des codages avec les cartes ou les écrire.<br>En binôme, un élève crée un parcours et l'inscrit dans son tableau de bord. Il se déplace sur le parcours en suivant son tableau de bord, en parallèle son camarade doit remplir le tableau de bord grâce aux formes et couleurs. La validation se fait par comparaison des tableaux de bord.<br>*Intégration du codage par flèches par comparaison avec le Blue-bot : aller d'un point à un autre, mettre les cartes dans l'ordre et venir l'essayer sur le Blue-bot. (non fait)* | 35 min |
| **Séance 4 et 5 : codage du parcours** | **Anticiper un déplacement<br>Coder un déplacement** | **Un élève est le Blue-bot. L'autre lui donne des ordres grâce à ses cartes flèches pour coder les déplacements du Blue-bot. Le but est d'aller d'un point à un autre grâce aux cartes « DEPART » et « Arrivée ».<br>Ensuite, l'élève essaye leur programme sur le Blue-bot.** | **35 min** |
| Séance 6 : sur papier | Anticiper un déplacement | Chaque élève a une feuille sur laquelle est dessiné le quadrillage du Blue-bot ; le but est de déterminer le programme permettant au Blue-bot d'aller de la maison à la coccinelle, à la fleur ou à | 35 min |
| | Coder un déplacement sur papier | la pomme. Pour indiquer le programme, chaque élève colle les cartes « Flèches » pour coder des déplacements dans le bon ordre et en optimisant les déplacements. | |
| Séance n°7 : codage | Identique séance 4 et 5 | | 35 min |
| Séance n°8 : sur papier | Identique séance 6 | | 35 min |
| Séance 9 : bilan | Bilan individualisé → chaque élève doit déplacer le Blue-bot de la maison vers la coccinelle, la fleur et la pomme, avec le moins de déplacements possibles sans utiliser le mode de programmation 'pas à pas'.<br>Découverte de l'application Blue-bot sur la tablette numérique. | | 30 min |

# VI - ANNEXE 2 : SYNOPSIS DE LA SEANCE 4

| **Durée** | **Modalités de travail : salle de motricité** | **Étapes de l'activité** |
|---|---|---|
| **0'00 – 6'28**<br>**(6'28)** | Regroupement (Coin regroupement) | Rappels des différentes commandes du Blue-Bot – échanges oraux entre l'enseignante et les élèves.<br>Consignes : « *Un élève sera le Blue-bot. Son camarade va donner des ordres au Blue-bot après avoir placer les cartes flèches correspondant au chemin voulu. Ensuite on échange !* » |
| **6'29 – 31'02**<br>**(24'33)** | Dyades | Consigne : « Un point de départ et un point d'arrivée sur les tapis Formes géométriques – Taille « enfant » (Figure 1) et Taille « Blue-Bot » (Figure 2) – sont positionnées. Vous devez programmer grâce aux cartes de déplacements le chemin entre le départ et l'arrivée. Puis vous vérifierez votre programme sur le Blue-Bot sur son tapis. »<br>Les cases « départ » et « arrivée » sont positionnées sur le grand tapis et le tapis du Blue-Bot.<br>Chaque élève programme un chemin dans un premier temps sur le grand tapis en utilisant les cartes, puis programme le Blue-Bot pour valider son travail. L'enseignante valide le travail sur la programmation du Blue-Bot. |
| **31'03– 32'00**<br>**(58 s)** | Regroupement (Coin regroupement) | Fin – Rangement du matériel |

# VII - ANNEXE 3 : SYNOPSIS DE LA SEANCE 5

| **Durée** | **Modalités de travail : salle de motricité** | **Étapes de l'activité** |
|---|---|---|
| **0'00 – 2'54**<br>**(2'54)** | Regroupement (Coin regroupement) | Consignes : « *Avec les mêmes règles, vous allez devoir programmer le Blue-bot pour qu'il aille du départ à l'arrivée. Un élève va placer les cartes, l'autre va programmer le Blue-bot. Ensuite on échange !* »<br>+ Jeu d'essai avec un binôme. |
| **2'54 – 29'58**<br>**(27'04)** | Dyades | Consigne : « Un point de départ et un point d'arrivée sur les tapis Formes géométriques – Taille « enfant » (Figure 1) et Taille « Blue-Bot » (Figure 2) – sont positionnées. Vous devez programmer grâce aux cartes de déplacements le chemin entre le départ et l'arrivée. Puis vous vérifierez votre programme sur le Blue-Bot sur son tapis. »<br>Les cases « départ » et « arrivée » sont positionnées sur le grand tapis et le tapis du Blue-Bot.<br>Chaque élève programme un chemin dans un premier temps sur le grand tapis en utilisant les cartes, puis programme le Blue-Bot pour valider son travail. L'enseignante valide le travail sur la programmation du Blue-Bot. |
| **29'54 –30'45**<br>**(51 s)** | Regroupement (Coin regroupement) | Fin – Rangement du matériel |

# ANALYSE DIDACTIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS DES MANUELS SCOLAIRES : MISE EN FONCTIONNEMENT D'UNE GRILLE DANS LE CAS DU MANUEL *MATHS EXPLICITES* CM1

**Claire GUILLE-BIEL WINDER**
MCF, INSPE-AMU
ADEF, COPIRELEM
claire.winder@univ-amu.fr

**Edith PETITFOUR**
MCF, INSPE Université Rouen Normandie, COPIRELEM
Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France
edith.petitfour@univ-rouen.fr

**Résumé**
La présence importante des manuels scolaires dans le domaine de l'édition française témoigne de leur place privilégiée en tant que ressources documentaires des enseignants de l'école primaire. Fournir aux enseignants un outil leur permettant un choix éclairé de ces ressources s'avère donc une nécessité. Cet atelier se situe ainsi dans le développement de nos travaux portant sur l'analyse didactique de manuels scolaires. Nous présentons ici le fonctionnement d'une grille d'analyse que nous avons élaborée à travers une étude de cas : les participants sont amenés à analyser les propositions d'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme en début de cycle 3 (9-10 ans) du manuel scolaire *Maths explicites* (Hachette Éducation, 2020).

La présence importante des manuels scolaires dans le domaine de l'édition française témoigne de leur place privilégiée en tant que ressources documentaires des enseignants de l'école primaire. Fournir aux enseignants un outil leur permettant un choix éclairé de ces ressources s'avère donc une nécessité (Villani et Torossian, 2018). Cet atelier se situe dans le développement de nos travaux portant sur l'analyse des propositions d'enseignement des relations de perpendicularité et de parallélisme au CM1 (9-10 ans) dans les manuels scolaires français (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2018, 2019, 2021). Il vise à présenter le fonctionnement d'une grille d'analyse que nous avons élaborée (Guille-Biel Winder et Petitfour, à paraître (a)). Après avoir présenté nos points d'appui théoriques, les critères retenus ainsi que les points d'attention conduisant à la grille d'analyse (annexe 1), nous avons invité les participants à réaliser, en groupes, une analyse préalable de l'enseignement des deux relations : deux groupes ont travaillé sur la relation de perpendicularité, deux autres sur celle de parallélisme. Ce premier travail visait à établir et s'approprier l'organisation de référence – institutionnelle d'une part, didactique d'autre part – relative à l'enseignement des deux relations, pour pouvoir ensuite analyser le manuel selon les critères retenus pour l'atelier. Pour ce faire, les participants disposaient des documents de l'annexe 2 (Extraits de documents institutionnels en vigueur en 2022 et récapitulatif des outils d'analyse présentés). La grille d'analyse a été mise en fonctionnement sur le manuel *Maths Explicites* CM1 (Hachette Éducation, 2020), toujours sur une seule des deux relations (la même que précédemment pour chacun des groupes). Les extraits du manuel analysés lors de l'atelier figurent en annexe 3. Les groupes ont terminé leur travail en réalisant une synthèse de l'analyse sous la forme d'un tableau à double entrée présentant la déclinaison des critères retenus selon les différents points d'attention (annexe 4). L'atelier s'est conclu par la présentation d'analyses complémentaires réalisées par les animatrices. Le plan de ce texte reprend en partie celui du déroulement de l'atelier : présentation des points d'appui théoriques (partie I), exposition des critères d'analyse et des points d'attention ainsi que de la grille proposée aux participants (partie II), analyses (partie III), synthèse et conclusion (partie IV).

# I - POINTS D'APPUI THEORIQUES

Nous définissons d'abord ce que nous entendons par manuel scolaire avant d'exposer les outils théoriques utilisés comme points d'appui pour la constitution de la grille d'analyse de manuels scolaires.

## 1 Manuel scolaire

En appui sur la définition de livres scolaires (décret 2004-922 du 31 août 2004), nous désignons par manuel scolaire d'une collection donnée les divers documents destinés à l'élève (livre-élève, fichier, cahier d'exercices, répertoire, etc.) ainsi qu'à l'enseignant (guide de l'enseignant, compléments d'informations transmis *via* l'éditeur sur son site ou dans un ouvrage). Nous illustrons cette définition figure 1, avec le manuel *Maths explicites* CM1 (Hachette Éducation, 2020). Celui-ci est composé : d'un livre-élève (Lé, (a)) (extraits pp.126-127 et 128-129 en annexe 3) ; d'un cahier d'exercices (b) présentant des exercices supplémentaires à proposer par l'enseignant soit en classe (pour un travail en autonomie ou en groupes), soit hors la classe ; d'un guide de l'enseignant (GdE, (c), extraits pp.101-181 et 182-183 en annexe 3). Il existe par ailleurs une version numérique pour le Lé et le GdE (mais pas de site compagnon). Nos analyses prennent appui sur toutes ces ressources ainsi que sur les informations données sur le site de l'éditeur[1] (présentation, vidéo).


(a) Livre-élève (b) Cahier d'exercices (c) Guide de l'enseignant

*Figure 1. Manuel* Maths Explicites *CM1 (Hachette Éducation, 2020)*

## 2 Échelle de codétermination didactique

Pour analyser la proposition d'enseignement des savoirs géométriques d'un point de vue didactique, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999). Concernant l'enseignement des savoirs mathématiques, nous convoquons la notion d'*Organisation Mathématique* (OM) à différentes échelles (Chevallard, 1995). Une OM *ponctuelle* correspond à un quadruplet formé par un type de tâches (défini comme tout type d'activité pensé comme élémentaire en ce sens que l'on pourrait l'énoncer à l'aide d'un verbe d'action et d'un complément d'objet), d'une technique (manière de faire déterminée permettant d'effectuer des tâches d'un certain type), d'une technologie justifiant la technique et d'une théorie, technologie et théorie se rapportant au savoir mathématique. Les principaux types de tâches que nous prenons en compte dans cette étude relèvent de la reconnaissance/identification de l'une des relations (perpendicularité ou parallélisme) ou bien du tracé de droites vérifiant cette relation. Les OM *locales* sont relatives à un thème d'étude (ici l'étude de l'une des deux relations). L'OM *régionale* est associée au secteur d'étude (ici « Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques ») et regroupe notamment les OM locales précédentes. L'OM *globale* correspond au domaine d'étude (ici la géométrie) au sein de la *discipline* des mathématiques. De manière plus générale, nous prenons appui sur l'échelle de codétermination didactique mettant en évidence l'interdépendance des différents niveaux en termes de conditions : « chaque niveau de cette échelle est le lieu d'origine de certaines conditions qui

[1] https://www.enseignants.hachette-education.com/collections/maths-explicites [Consulté le 30 juin 2022].

apparaissent souvent comme des contraintes aux autres niveaux » (Chevallard, 2011, p. 12). Les niveaux en lien avec les différentes OM sont spécifiques aux savoirs à enseigner, mais les niveaux relatifs à l'école ou à la pédagogie le sont moins. Le premier correspond au « niveau des contraintes et des points d'appui qui tiennent à l'institution scolaire elle-même » (Chevallard, 2002, p. 13). Nous situons donc à ce niveau l'origine des contraintes liées aux ressources institutionnelles ainsi que celles à l'organisation matérielle de l'année (par exemple les cours multi-niveaux), ou bien son organisation temporelle (par exemple les périodes de travail alternant avec les vacances scolaires). Le second comprend des points d'appui et des contraintes qui affectent toute étude scolaire. En particulier, la contrainte temporelle de la durée d'une séance a un impact sur le temps consacré à l'étude d'un sujet. Les choix pédagogiques relèvent aussi de ce niveau. Certains peuvent avoir un arrière-plan théorique revendiqué dans le manuel comme des théories de l'apprentissage (par exemple le constructivisme (Piaget, 1964)), ou des courants pédagogiques (pédagogie explicite (Rosenshine, 1986), pédagogie spiralaire (Bruner, 1960), etc.). La figure 2 présente cette échelle contextualisée à notre étude. Nous faisons l'hypothèse que l'enseignement des savoirs mathématiques proposé par un manuel est assujetti à ces différentes contraintes.

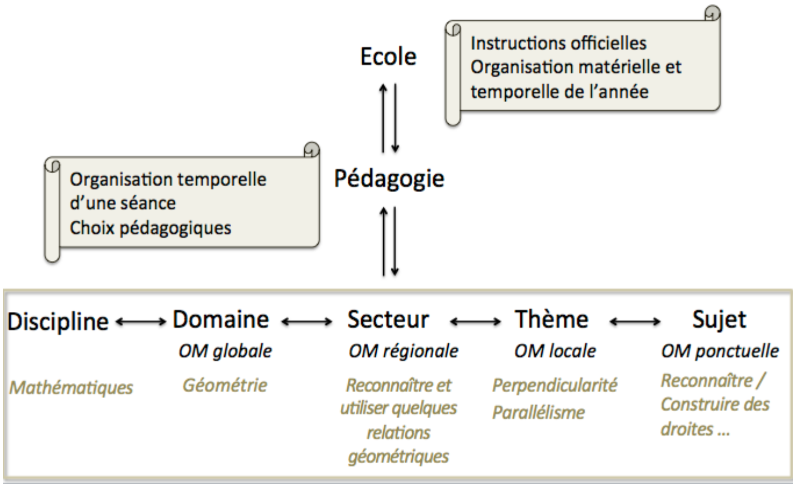



*Figure 2. Echelle de codétermination didactique contextualisée*

La mise en évidence par la Théorie Anthropologique du Didactique d'organisations mathématiques et didactiques et l'influence qu'elles exercent les unes sur les autres nous conduit, d'une part, à identifier des points sur lesquels nous faisons porter l'analyse de la proposition d'enseignement des savoirs géométriques d'un manuel et, d'autre part, à prendre en compte différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique dans l'analyse de chacun de ces points. Nos analyses se focalisent alors sur les éléments suivants : les tâches et types de tâches proposés, les techniques convoquées, les savoirs en jeu, les ostensifs manipulés ainsi que les « éléments organisationnels et planificateurs » (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2018) – c'est-à-dire les éléments du manuel qui explicitent et/ou témoignent de l'organisation et de la planification retenue.

## 3 Outils d'analyse liés aux ostensifs

Du point de vue de la Théorie Anthropologique du Didactique, le savoir mathématique est évoqué à travers la manipulation d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999), c'est-à-dire d'objets qui ont une forme matérielle : ostensifs gestuels (gestes), langagiers (mots, discours), graphiques (schémas, dessins, graphismes), scripturaux (écritures, formalismes). Nous portons une attention particulière aux objets utilisés pour enseigner les relations de perpendicularité et de parallélisme car ils permettent d'étudier le lien éventuel avec le réel ainsi que la manière dont le passage au géométrique est mis en œuvre. Nous prenons pour cela appui sur une catégorisation (présentée figure 3 et synthétisée dans le document E de l'annexe 3), que nous avons élaborée à partir de l'étude d'une vingtaine de manuels scolaires présents sur le marché durant l'année scolaire 2017-2018 (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2019).

Nous identifions des objets du monde[2] (Laparra et Margolinas, 2016) – ou leurs représentations figuratives, d'usages connus des élèves, qui appartiennent à l'environnement quotidien des élèves et des objets graphiques correspondant aux objets matériels (dessins) de la géométrie de l'école (Houdement, 2007). Dans la première catégorie, nous distinguons les objets du monde culturellement représentateurs[3] des relations spatiales de ceux qui ne le sont pas. Dans la deuxième, nous faisons la distinction entre représentations d'objets géométriques et modélisations d'objets du monde.

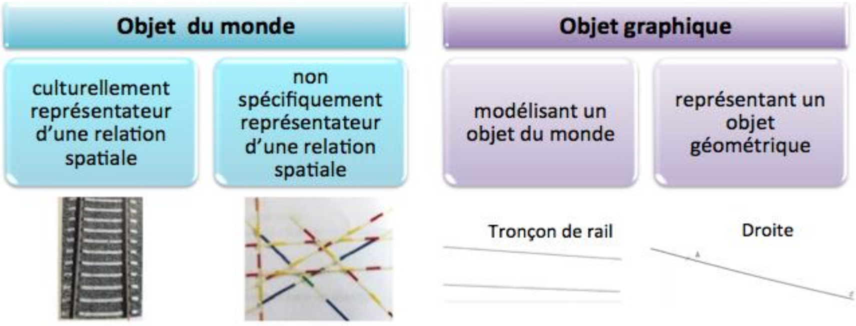



*Figure 3. Quatre catégories d'objets utilisés pour enseigner les relations géométriques*

Concernant les ostensifs langagiers (vocabulaire et expressions langagières), nous utilisons des outils d'analyse logique des concepts mathématiques (Petitfour et Barrier, 2019). La perpendicularité et le parallélisme sont des relations géométriques (entre des droites), alors que le concept d'angle droit est une propriété géométrique d'un secteur angulaire. Sur le plan logique, la perpendicularité et le parallélisme s'analysent comme des relations binaires : on dira que « deux droites *d* et *d′* sont perpendiculaires/parallèles » ou que la « droite *d* est perpendiculaire/parallèle à la droite *d* » ou encore que la « droite *d′* est perpendiculaire/parallèle à la droite *d* » (symétrie de la relation). Une droite *d* étant donnée, il y a une infinité de droites qui lui sont perpendiculaires/parallèles. Cette propriété se traduit au niveau langagier par un article indéfini lorsqu'on introduit une droite *d′* : « la droite *d′* est **une** droite perpendiculaire/parallèle à la droite *d* ». L'une des deux relations associée à une relation d'appartenance met en lien deux droites et un point. On a dans ce cas une conjonction de deux relations binaires du type « (*d* est perpendiculaire/parallèle à *d′*) ET (M appartient à *d′*) », formulée par exemple avec la syntaxe suivante : « *d′* est la droite perpendiculaire/parallèle à la droite *d* passant par le point M », l'article défini « la » exprimant à la fois l'existence et l'unicité de la droite *d′*.

## 4 Outils d'analyse liés à l'action instrumentée

Selon le cadre d'analyse de l'action instrumentée (Petitfour, 2017, 2018), différentes connaissances sont en jeu pour résoudre des types de tâches de reconnaissance de relations géométriques et de tracé : géométriques, techniques, graphiques, spatiales et pratiques (définies et illustrées dans le document C de l'annexe 2). Les *connaissances géométriques*, relatives aux objets, propriétés et relations géométriques, comprennent en particulier les significations sous-jacentes aux techniques instrumentées mises en œuvre dans les actions instrumentées. Pour nos analyses, nous nous appuyons sur les significations des relations de perpendicularité et de parallélisme suivantes (figure 4), abordables au cycle 3 (Reymonet, 2004 ; Dussuc, Gerdil-Margueron et Mante, 2006 ; ERMEL, 2006) (voir le document D de l'annexe 2).

---

[2] « Objet le plus souvent matériel, présent à l'école et hors l'école et qui de ce fait évoque pour l'élève les affects et les usages qu'il connaît déjà. » (Laparra & Margolinas, 2016, p.169).

[3] Représentateur (*adjectif*) : Qui sert à la représentation. Les hiéroglyphes étaient des signes représentateurs d'objets visibles. (Littré, 1876). Site http://www.la-definition.fr/definition/representateur consulté le 20/12/2018

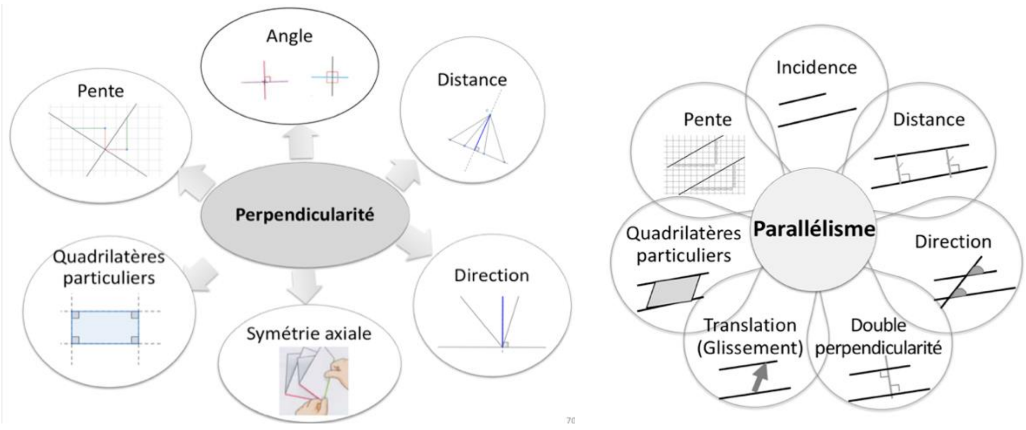



*Figure 4. Différentes significations des relations de perpendicularité et de parallélisme*

## II - PRESENTATION DE LA GRILLE D'ANALYSE

Nous n'aborderons pas dans cette présentation l'étude de la forme sous laquelle est diffusée le manuel, ni la « façon dont le propos des auteurs/concepteurs est représenté et leur façon de communiquer avec le professeur » (Remillard, 2021, p. 106), tel que nous l'avons fait dans des travaux antérieurs (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2021), nous centrons les analyses sur un point de vue didactique. La grille d'analyse conduit à étudier successivement, dans un manuel donné, chacun des éléments (types de tâches proposés, techniques, ostensifs associés, savoirs en jeu et leur organisation par le biais des éléments organisateurs et planificateurs) au regard de critères d'analyse que nous présentons dans une première sous-partie. L'analyse préalable de chaque point d'attention est ensuite réalisée. Nous revenons enfin sur la grille fournie aux participants.

### 1 Critères d'analyse

En lien avec les contraintes auxquelles est assujetti l'enseignement des savoirs mathématiques proposé par un manuel, nous avons mis au jour cinq critères (Guille-Biel Winder et Petitfour, à paraître (a)).
La *conformité institutionnelle*, en relation avec les contraintes du niveau de l'école, correspond à la conformité des propositions des manuels aux ressources transmises par l'institution concernant les savoirs et savoir-faire à enseigner, mais aussi concernant l'organisation de la classe. Dans cette étude, nous nous appuyons sur des textes officiels à disposition des enseignants sur le site Éduscol[4]. Ces textes regroupent les horaires de l'école, le programme d'enseignement du cycle de consolidation (MEN, 2015) ainsi que les ajustements apportés pour la rentrée 2020 (MEN, 2020), la ressource d'accompagnement *Espace et géométrie au cycle 3* (MEN, 2018) et enfin les attendus de fin d'année et repères annuels de progression (MEN, 2019).
*L'adéquation pédagogique* met en évidence la mise en pratique des idées centrales affichées sur lesquelles s'appuient le(s) auteur(s), dans le curriculum (programmation, enseignement des savoirs – tâches, techniques, introduction des savoirs –, place des ostensifs), voire dans les recommandations pédagogiques et didactiques qui l'accompagnent.
La *pertinence par rapport à l'enseignement du savoir* porte sur les choix didactiques retenus par le(s) auteur(s) concernant la progression retenue (aller-retour du niveau ponctuel au niveau global), les tâches mathématiques et le choix des objets sur lesquels elles portent, les significations abordées, la présentation des techniques ainsi que les formulations langagières. La *validité mathématique* est associée aux énoncés de savoir donnés (formulations langagières et notations symboliques utilisées), au domaine de validité des concepts et à l'usage des artefacts proposés.
La *cohérence du manuel par rapport aux savoirs enseignés* interroge, au niveau local, les liens entre le(s) type(s) de tâche(s) proposé(s) dans la première rencontre avec la notion, la(les) signification(s) en jeu,

[4] https://www.education.gouv.fr/programmes-et-horaires-l-ecole-elementaire-9011

la(les) technique(s) donnée(s) et les tâches proposées dans les différentes activités du manuel. Aux niveaux global et régional, elle interroge l'organisation des savoirs adoptée pour travailler les notions.

Les critères de pertinence, de validité mathématique et de cohérence permettent d'évaluer la *qualité didactique* du manuel.

## 2 Analyse préalable des points d'attention

### 2.1 Tâches et types de tâches

Nous distinguons deux grandes catégories de types de tâches élémentaires relatifs aux constructions instrumentées mettant en jeu les relations de perpendicularité et parallélisme : ceux associés à la reconnaissance de la relation et ceux liés à la construction de droites vérifiant cette relation. Pour répondre au critère de *conformité institutionnelle*, un manuel doit proposer la résolution des types de tâches suivants :

- Reconnaître la relation de perpendicularité.
- Tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné appartenant à la droite / extérieur à la droite.
- Reconnaître la relation de parallélisme.
- Tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Les tâches mathématiques proposées vérifient le critère *d'adéquation pédagogique* lorsqu'elles répondent aux intentions déclarées des auteurs du manuel. Elles sont jugées *pertinentes par rapport à l'enseignement du savoir* si le choix des variables (orientation des droites, nécessité ou non de les prolonger, support (papier blanc, quadrillé…), complexité de la figure, instruments à disposition …) conduit au dépassement des obstacles et à la compréhension des concepts. Elles vérifient le critère de *cohérence par rapport aux savoirs enseignés* lorsqu'elles nécessitent la mise en œuvre des techniques exposées et/ou institutionnalisées.

### 2.2 Techniques

Le critère de *conformité institutionnelle* est vérifié si les techniques instrumentées à développer sont en particulier celles qui utilisent équerre et règle. Le critère *d'adéquation pédagogique* est vérifié lorsque les techniques sont en lien avec la démarche pédagogique déclarée par les auteurs du manuel. La présentation des techniques est *pertinente par rapport à l'enseignement des savoirs* lorsqu'un ensemble d'informations nécessaires à la réalisation de la technique est fourni : connaissances techniques, spatiales, graphiques et pratiques. Le critère de *cohérence par rapport aux savoirs enseignés* est vérifié lorsque la justification de la technique s'appuie sur une des significations de la relation introduites dans le manuel.

### 2.3 Savoirs en jeu

Le manuel répond au critère de *conformité institutionnelle* lorsque sont abordées la signification de la relation de perpendicularité liée au plus court chemin entre un point et une droite, et au moins une signification du parallélisme en lien avec la perpendicularité. Le critère *d'adéquation pédagogique* est vérifié lorsque l'introduction des savoirs est en adéquation avec les intentions déclarées des auteurs. Le choix des significations abordées est *pertinent par rapport à l'enseignement des savoirs* s'il conduit *a priori* à une première compréhension de la relation. Le critère de *validité mathématique* est vérifié lorsque ces significations restent dans leur domaine de validité (par exemple la transposition du plan à l'espace de la signification du parallélisme « droites qui ne se coupent jamais » sort du domaine de validité de cette signification). Une *cohérence* existe entre la première rencontre de la notion proposée par le manuel (sous forme d'« activités préparatoires », de « situations introductrices »….) et l'institutionnalisation qui en découle (inscrite dans des rubriques telles que « retenons », « mémo » et/ou proposée dans le guide de l'enseignant en tant que formulation verbale notamment), si sont institutionnalisées, à l'issue de la première rencontre, seulement les significations et/ou les techniques venant d'être abordées.

### 2.4 Ostensifs

Le manuel répond au critère de *conformité institutionnelle* lorsque le symbolisme (//, ⊥, notation « segment [AB] ») ne fait pas l'objet d'un apprentissage et lorsqu'au moins l'emploi de l'équerre et de la règle est prévu dans les tâches liées à la relation de parallélisme. Lorsque les ostensifs proposés (langage, instruments, objets …) témoignent de la mise en œuvre de la démarche déclarée, le manuel est en *adéquation avec les intentions déclarées des auteurs*. Le choix des objets sur lesquels portent les tâches est *pertinent par rapport à l'enseignement des savoirs* s'il conduit à une représentation valide de la relation et/ou des objets géométriques en jeu, voire s'il favorise la compréhension de la relation et/ou de l'une de ses propriétés. Les formulations langagières sur la relation sont *pertinentes* lorsque l'expression de la relation est décontextualisée et si l'équivalence entre les formulations (exprimant sa symétrie), est institutionnalisée. L'usage d'un instrument est *mathématiquement valide* si l'instrument est approprié pour produire graphiquement la propriété géométrique voulue et obtenir ainsi une figure juste (Petitfour, 2017). Les notations et symboles utilisés sont *mathématiquement valides* lorsqu'ils sont conventionnels et corrects par rapport à l'usage. Les formulations langagières relatives aux relations de perpendicularité et de parallélisme sont *mathématiquement valides* lorsqu'un langage géométrique est employé à bon escient, par exemple : l'unicité de la relation est exprimée avec l'utilisation d'un article défini ; les termes « perpendiculaire » et « parallèle » sont utilisés pour exprimer une relation entre deux droites ; les relations sont effectivement exprimées en termes géométriques (sans mélange avec le langage courant) ; la présentation des concepts géométriques est mathématiquement correcte.

### 2.5 Éléments organisationnels et planificateurs

Au niveau global, la programmation est *institutionnellement conforme* lorsque les apprentissages abordés dans le manuel correspondent à ceux à enseigner, au niveau donné, identifiés dans les ressources institutionnelles. Elle est *pédagogiquement en adéquation* lorsque l'organisation des savoirs correspond aux intentions déclarées par les auteurs du manuel. Au niveau local, la progression est *pertinente par rapport à l'enseignement des savoirs* lorsque les notions de perpendicularité et de parallélisme sont effectivement mises en lien entre elles et/ou avec d'autres notions géométriques et lorsqu'elles sont abordées dans leur aspect outil au sein des séances de géométrie ultérieures. Dans un aller-retour entre ponctuel et local, l'organisation des savoirs est *cohérente* lorsque les notions et techniques utilisées font, en amont, l'objet d'un apprentissage ou lorsque les connaissances explicitées sont réinvesties.

## 3 Grille d'analyse renseignée lors de l'atelier

Nous avons fait le choix de ne pas interroger le critère d'adéquation pédagogique avec les participants de l'atelier, ni d'étudier les éléments organisationnels et planificateurs, l'analyse nécessitant un temps important avec la prise en compte de toutes les ressources composant le manuel. Nous en donnerons un aperçu dans les parties III.1 et III.3.5. La grille d'analyse proposée aux participants (annexe 1) est composée des rubriques suivantes présentées en colonne (voir figure 5) : les points d'attention, les critères, l'analyse préalable, l'analyse du manuel.

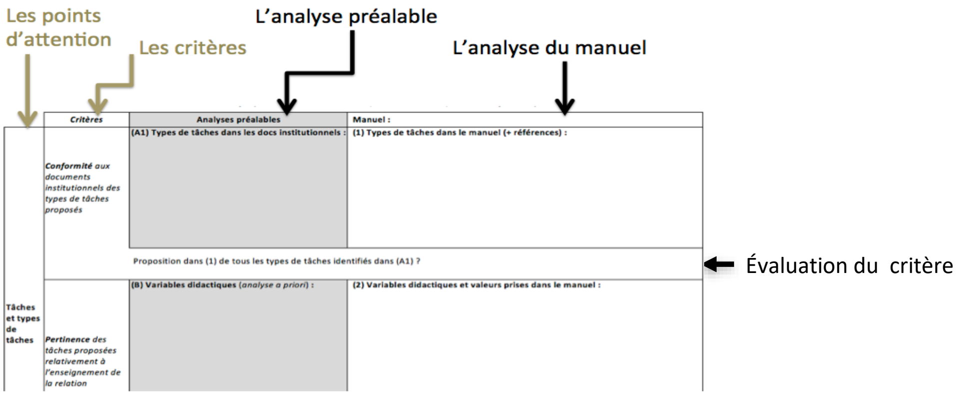



*Figure 5. Les différentes rubriques de la grille d'analyse*

Pour chaque point d'attention retenu (types de tâches, techniques, savoirs, ostensifs), sont étudiés les critères de conformité, pertinence et cohérence auxquels s'ajoute le critère de validité pour les savoirs et les ostensifs. L'évaluation des critères est inscrite en ligne (voir figure 5). Pour le critère de conformité aux documents institutionnels, elle se fait à partir d'une analyse préalable de ces documents. Pour le critère de pertinence, elle s'appuie sur des outils didactiques : étude des variables didactiques pour les types de tâches étudiés, des connaissances en jeu dans la mise en œuvre des techniques, des significations potentielles des relations et des objets potentiels sur lesquels elles sont étudiées. Pour le critère de cohérence, l'évaluation se fait par la mise en regard des éléments analysés dans le manuel (quatrième colonne).

Les participants ont d'abord été invités à réaliser l'analyse préalable des documents institutionnels en appui sur un extrait de ces documents (document A de l'annexe 2), pour compléter les cases grisées suivantes de la grille (annexe 1) : (A1) Types de tâches dans les documents institutionnels, (A2) Techniques dans les documents institutionnels, (A3) Significations dans les documents institutionnels, (A4) Symboles et notations dans les documents institutionnels. Ils ont également été invités à expliciter les différentes variables didactiques liées au travail sur la relation (de perpendicularité ou de parallélisme), en appui sur leurs propres connaissances didactiques, en complétant la case grisée (B) de l'annexe 1. Dans un second temps, les participants ont analysé les extraits de manuels (annexe 3) en complétant les cases de la quatrième colonne de la grille (annexe 2). Notons que les participants ont fait émerger un manque d'explicitations des documents institutionnels relativement aux relations de perpendicularité et de parallélisme. Par exemple, le type de tâches de reconnaissance des relations se trouve en combinant une partie du titre général « Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques » et du titre du paragraphe « Relations de perpendicularité et de parallélisme ». Il n'est pas formulé au même niveau que les types de tâches de tracés (présentés par une puce). Les techniques de construction ne sont pas mentionnées, seuls les instruments le sont, ce qui laissent inconnues les techniques attendues pour les tracés de droites parallèles à l'équerre et à la règle, comme les significations sous-jacentes à ces techniques.

## III - PRESENTATION ET ANALYSE DU MANUEL

La collection *Maths explicites* est présente sur le marché depuis plusieurs années et a déjà fait l'objet de trois éditions (2015, 2016, 2020). Avant de rentrer dans l'analyse, nous présentons les appuis théoriques ainsi que les intentions déclarées des auteurs du manuel *Maths Explicites* CM1 (Hachette Éducation, 2020). Nous détaillons également le déroulement de chaque séance.

### 1 Appuis théoriques et intentions déclarées des auteurs

La collection *Maths Explicites* se réfère à la pédagogie explicite « fondée sur la transmission directe des connaissances et des savoir-faire » (Lé, p.3) et prônant un enseignement fortement guidé par l'enseignant. Les principes sur lesquels s'appuie cette collection sont annoncés dans le GdE (p. 3) : « présenter en détail toutes les stratégies attendues (les étapes du raisonnement) et expliquer tout ce qui peut l'être » ; procéder « du plus simple au plus complexe » ; « faire faire de nombreux exercices, donner un nombre limité de nouvelles informations » ; « pratiquer la répétition (…) avec des révisions régulières sur toute l'année » ; « valoriser les efforts et les stratégies pour amener l'élève à réussir ». Selon le GdE et la vidéo de présentation de la méthode réalisée par l'un des auteurs, ces principes se traduisent par « un enseignement très structuré » (*ibid*) puisque toutes les leçons suivent le même plan. Une première *phase orale d'explicitation* (rubrique « Apprenons ensemble » dans le Lé), est fondée sur le principe des exemples travaillés que l'enseignant résout devant ses élèves en explicitant son raisonnement. Une deuxième *phase de pratique guidée* (« Entrainons-nous ») est réalisée d'abord à partir d'exemples similaires à l'exemple travaillé puis de l'exercice du manuel pour une vérification individuelle de la compréhension de chaque élève. Dans la *phase d'objectivation*, la synthèse de la leçon est présentée en deux points : le savoir à apprendre (« J'apprends ») et le savoir faire à mettre en pratique dans les exercices (« J'ai compris »). Enfin une *phase de pratique autonome* propose des exercices dont la difficulté est repérée par un codage (application directe – une étoile ; exercice incluant une difficulté supplémentaire – deux étoiles ; exercice pluri- ou trans- disciplinaire – trois étoiles), offrant, selon les auteurs, « une possibilité de différenciation en classe » (GdE, p. 4). En outre une *phase de réactivation du savoir* est proposée ultérieurement à trois reprises sous forme d'un exercice pouvant faire office de remédiation si besoin. Ces exercices sont regroupés dans le Cahier d'exercices. Les appuis théoriques annoncés par les auteurs concernent donc uniquement la pédagogie explicite, rien n'est indiqué sur les contenus d'enseignement et en particulier celui de la géométrie.

## 2 Déroulé des propositions d'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme

Les propositions d'enseignement des relations de perpendicularité et de parallélisme suivent le plan précédemment explicité. Une « leçon », formée deux séances d'une heure chacune, est consacrée à chaque relation. Le travail débute par une *mise en projet d'apprentissage* consistant pour l'enseignant à présenter oralement l'objectif d'apprentissage ainsi que les résultats attendus : « Aujourd'hui vous allez apprendre à reconnaître et tracer des droites perpendiculaires. À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites sont perpendiculaires ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé et sur du papier uni. » (GdE, p.180)/« Aujourd'hui vous allez apprendre ce que sont des droites parallèles et apprendre à les reconnaître. À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites et des côtés de figures sont parallèles ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé. » (GdE, p. 182). La séance se poursuit par un rappel des *connaissances préalables*. Dans le cas de la relation de perpendicularité, il s'agit de « révisions du CE2 » (GdE, p.180) : par un jeu de questions, les élèves sont invités à identifier deux rectangles de tailles différentes dessinés au tableau quadrillé par l'enseignant, puis à justifier leur réponse en s'appuyant sur la notion d'angle droit ; l'équerre est alors présentée comme l'instrument qui en permet la vérification. Pour la relation de parallélisme, l'enseignant indique aux élèves qu'ils ont « déjà appris ce qu'est une droite [et] des droites perpendiculaires » (GdE, p.182), et vient en faire tracer par un ou deux élèves. Le GdE prévoit ensuite quatre cycles formés d'une *phase d'explicitation* en lien avec la rubrique « Apprenons ensemble », suivie d'une *phase de pratique guidée* en appui sur les cinq exercices proposés dans la rubrique « Entrainons-nous ». Chaque cycle est en lien avec une ou plusieurs « sous-compétences ». Le premier cycle concerne le vocabulaire (« définir le mot perpendiculaire/parallèle »), ainsi que la vérification de la relation de perpendicularité/la perception visuelle du parallélisme de deux droites. Le second cycle est consacré à la notion de plus court chemin entre un point et une droite pour la relation de perpendicularité/à la vérification de la relation de parallélisme sur quadrillage. Le troisième cycle propose un travail sur les tracés (sur papier uni pour la relation de perpendicularité, sur papier quadrillé et pointé pour celle de parallélisme). Ce travail se poursuit au quatrième cycle avec le tracé d'une droite perpendiculaire à une autre donnée et passant par un point donné/la vérification du parallélisme de deux droites sur papier uni.

La deuxième séance commence par un « rappel de l'explicitation de la séance 1 » : il s'agit de « Rappeler ce que sont des droites perpendiculaires/parallèles puis, à partir de quelques exemples au tableau, rappeler les différentes stratégies pour identifier et tracer des droites perpendiculaires/identifier des droites parallèles » (GdE, p.181 et 183). Puis dans une *phase de pratique autonome*, les élèves doivent faire les exercices de la rubrique « Je travaille seul ». Dans cette phase le rôle de l'enseignant est précisé : il «questionne et aide les élèves à s'approprier la stratégie précédemment présentée » ; il peut « leur proposer de refaire par écrit des exercices de 'Entraînons-nous' » ou, pour les élèves « qui n'ont pas de difficulté », des exercices notés deux ou trois étoiles à réaliser seuls ou en binômes selon le cas. Les exercices sont corrigés pendant la séance. La séance se termine par une *phase d'objectivation* dans laquelle l'enseignant demande aux élèves ce qu'ils ont appris, puis lit et commente les rubriques « J'apprends » et « J'ai compris ».

## 3 Analyse du manuel

À la suite de la discussion portant sur les contenus des ressources institutionnelles, les participants, répartis dans les mêmes groupes de trois, ont été invités à remplir la grille d'analyse pour l'une des deux relations. Ils avaient pour cela à leur disposition, les extraits du manuel *Maths Explicites* CM1 correspondant à la « leçon principale » (annexe 3). D'autres documents sont fournis pour soutenir l'analyse (annexe 2) : ils reprennent des éléments de l'analyse préalable présentée dans la partie précédente. Dans cette partie, nous reprenons et complétons les analyses réalisées par les participants.

### 3.1 Analyse des tâches et types de tâches proposés

Les types de tâches relatifs aux deux relations dans le manuel *Maths Explicites* CM1 sont les suivants :

- vérifier la perpendicularité/le parallélisme entre deux droites données ;
- identifier deux droites perpendiculaires/parallèles dans un réseau de droites ;
- tracer deux droites perpendiculaires/parallèles ;
- tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné sur la droite ;
- tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné extérieur à la droite.

La reconnaissance de la relation de perpendicularité est étudiée sur des droites, des polygones ou autres lignes brisées sur support quadrillé et sur support uni, ainsi que sur des objets du monde (plan d'un quartier). Les tâches proposées concernant cette relation sont conformes aux attendus des programmes. La reconnaissance de la relation de parallélisme est étudiée sur des droites, des polygones sur support quadrillé et sur support uni, mais également sur des objets du monde (des lignes horizontales déformées). Le tracé de couples de droites parallèles entre elles est proposé sur papier quadrillé ou pointé. En revanche le tracé de la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné n'est pas proposé. Le *critère de conformité institutionnelle des types de tâches proposés est donc partiellement validé*.

Les tâches proposées vont « du simple vers le complexe » pour les tâches de reconnaissance de la relation de perpendicularité en ce qu'elles sont données d'abord sur support quadrillé puis sur support uni, sur une figure simple (paire de droites) puis sur une figure complexe (réseau de droites). Concernant le tracé, le degré de difficulté est lié à la présence ou non d'une aide (positionnement de l'équerre dessinée). De même, les tâches de reconnaissance de la relation de parallélisme portent d'abord sur une figure simple, puis sur une figure complexe. La reconnaissance de chaque relation est introduite sur un objet du monde, à savoir un plan pour la perpendicularité, des lignes de plots alignés séparant des couloirs dans une course à pied pour le parallélisme. L'explicitation prévue est contextualisée (on parle de perpendicularité de rues, de lignes de plots parallèles).

Les exercices d'entrainement ne permettent pas un réinvestissement direct de la démarche explicitée dans les « exemples travaillés », vu le changement d'objets de travail (représentation de rues par des bandes, polygones puis couples de droites pour la relation de perpendicularité ; lignes puis couples de droites pour la relation de parallélisme). *L'adéquation avec les intentions déclarées des auteurs est donc partielle.*

Le choix des variables (orientation des droites sur le support, nécessité ou pas de les prolonger, cas où la perception visuelle est mise en défaut avec une relation « presque » vérifiée, support (papier blanc), complexité de la figure étudiée), conduit aux dépassements des obstacles concernant la relation de perpendicularité et à la compréhension des concepts. Cependant un lien « droites parallèles/droites verticales (ou horizontales) », mis en avant dans le GdE, risque de générer une confusion verticale (ou horizontale) et parallèle. Notons également que dans les tâches de reconnaissance de la relation de parallélisme, l'appui assez important sur la perception visuelle conduit peu à l'utilisation des instruments. *Les tâches proposées sont donc partiellement pertinentes relativement à l'enseignement des deux relations*.

La reconnaissance et le tracé de droites vérifiant la relation de perpendicularité nécessitent la mise en œuvre des techniques exposées. Ce n'est pas toujours le cas pour les tâches en lien avec la relation de parallélisme. Ainsi la trace écrite « J'ai compris » (Lé, p.129), annonce l'utilisation du guide-âne pour tracer des parallèles alors que cette technique n'aura jamais à être utilisée (les seules droites parallèles à tracer le sont sur support quadrillé). Par conséquent les *tâches sont partiellement en cohérence avec les techniques institutionnalisées*.

### 3.2 Analyse des techniques abordées

La reconnaissance de la relation de perpendicularité et le tracé sont abordés avec l'usage de l'équerre. Concernant la reconnaissance de la relation de parallélisme, plusieurs techniques sont mobilisées, en particulier : prolonger des droites pour permettre de conclure qu'elles ne sont pas parallèles (technique non explicitée dans le GdE) ; utilisation du guide-âne (présentée dans la trace écrite « J'ai compris », p. 129) ; compter les carreaux entre les droites (explicitée dans un exercice, Lé p.123). Deux techniques de tracé sont essentiellement évoquées – sur papier quadrillé ou pointé, compter les carreaux ou les « points » qui séparent les deux droites puis et utiliser la règle pour tracer les droites ; utiliser un guide-âne (sans autre indication) – , mais aucune s'appuyant sur l'usage de la règle et de l'équerre. *Ces différentes techniques sont partiellement en conformité avec les ressources institutionnelles*. La manipulation des instruments est explicitée par l'enseignant tandis que les élèves écoutent et observent la « présentation de la stratégie » au tableau. *Il y a donc bien adéquation des techniques proposées avec les intentions déclarées des auteurs*.

Diverses connaissances techniques sont apportées dans le manuel. Dans le travail sur la notion de perpendicularité, une fonction de l'équerre est ainsi donnée : « J'utilise l'équerre pour vérifier qu'un angle est droit » avec une description contextualisée de la technique de vérification (« Apprenons ensemble », p. 126) :

> *Je positionne l'équerre pour superposer l'angle droit sur le coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle. Je superpose aussi un côté de l'équerre sur le bord de la rue.*
>
> *L'autre côté de l'équerre se superpose exactement sur le côté de l'autre rue.*
>
> *La rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.*

Des termes du langage géométrique (angle droit, perpendiculaire à), se mêlent à ceux du langage courant (coin où se croisent les rues, bord/côté de la rue). Ce qui est appelé « angle droit » pour l'équerre doit être interprété comme le « sommet de l'angle droit ». À la charge de l'enseignant (ou sinon des élèves), d'associer la description d'objets du monde (les rues) à la représentation d'objets géométriques pour extraire ensuite les schèmes d'utilisation de l'équerre dans sa fonction de vérification de la présence d'un angle droit. Les « bords de rues » sont représentés par des droites. « Le bord de la rue » suppose un choix particulier de bord parmi les deux possibles. Le « coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle » correspond au point d'intersection de deux lignes représentant chacun l'un des bords d'une rue. Le terme « côté » dans l'expression « le côté de l'autre rue » doit être compris comme synonyme de « bord ». Le discours sur l'utilisation du guide-âne pour vérifier/identifier des droites parallèles est prévu dans le guide pédagogique. Cette technique fait l'objet d'une trace écrite qui annonce également l'utilisation du guide-âne pour tracer des parallèles mais sans expliciter la technique (qui par ailleurs n'aura jamais à être utilisée, les seules droites parallèles à tracer étant sur support quadrillé). Les techniques de tracé de deux droites perpendiculaires et d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné dans le cas où le point est sur la droite et dans celui où il n'y est pas, sont explicitées dans le GdE (Sous-compétences 4 et 5, p. 181). L'enseignant est invité à faire une présentation des techniques de construction sur le tableau uni de la classe. Quelques imprécisions langagières apparaissent dans la verbalisation à associer à une démonstration de la réalisation des tracés au tableau par l'enseignant, outre la confusion « angle droit » - « sommet de l'angle droit » dont nous avons déjà parlé. L'équerre, avec un côté de l'angle droit sur la droite, doit « glisser jusqu'au point » : on ne sait donc pas quelle partie de l'équerre doit s'arrêter sur le point ; on trace ensuite « la droite le long du côté de l'équerre » : le côté à considérer n'est pas précisé. Les élèves devront donc prélever ces informations lors de la démonstration au tableau de la manipulation de l'équerre par l'enseignant.

Des connaissances graphiques sont apportées pour le codage de l'angle droit. Le terme de « coin » est utilisé pour parler de ce codage dans le GdE : « On marque un angle droit par un 'coin' ».

Aucune connaissance spatiale n'est formulée dans le manuel ou le guide pédagogique. Nous constatons cependant une volonté des auteurs de s'appuyer sur ces connaissances lorsque, dans les exemples de tracés de droites perpendiculaires à faire au tableau en démonstration pour les élèves, une orientation privilégiée de droites est choisie : « l'enseignant trace une droite *d* horizontale » (GdE, p. 181). Cela peut conduire, d'une part à renforcer la reconnaissance de la relation de perpendicularité dans les seuls cas d'orientations horizontale et verticale de droites, d'autre part à cultiver la confusion entre perpendicularité et verticalité.

Des connaissances pratiques sont formulées dans la présentation de la technique de tracé de la perpendiculaire à une droite passant par un point lorsque le point n'est pas sur la droite. Les auteurs manifestent en effet la volonté de prendre en compte l'utilisation d'une équerre matérielle particulière qui aurait un côté de l'angle droit plus long que l'autre et envisagent le cas de figure où le point est éloigné de la droite à une distance supérieure à la longueur du petit côté (Figure 6).

*On place l'équerre sur la droite : le point étant d'un côté de la droite, il n'y a plus que 2 positions possibles et quelquefois, selon la distance du point à la droite, il n'y en a plus qu'une quand il faut utiliser le côté le plus long de l'équerre.*

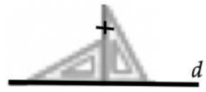



*Figure 6. Extrait du GdM de* Maths Explicites *CM1, Hachette Éducation 2020, p.181*

Remarquons qu'en fait, si le grand côté de l'angle droit de l'équerre matérielle atteint le point extérieur à la droite lorsque le petit côté de l'angle droit est sur la droite, il n'y a pas qu'une position possible de l'équerre mais deux, sauf si l'on s'interdit de retourner l'équerre. Remarquons aussi qu'il faut entendre « le grand côté de l'angle droit de l'équerre » (la plus grande cathète) dans « le côté le plus long de l'équerre » si l'on se réfère au dessin accompagnant l'explication (figure 6), alors que le plus grand côté de l'équerre, c'est son hypoténuse. *La présentation des techniques, avec l'exposition de toutes ces connaissances, est ainsi partiellement pertinente par rapport à l'enseignement des savoirs*.

La justification de la technique de tracé d'une droite perpendiculaire à une autre s'appuie sur une signification de la relation abordée. Cependant la signification « se coupent en quatre angles droits » reste implicite à la remarque faite sur les quatre positions possibles pour l'équerre. Des techniques de contrôle/identification de la relation de parallélisme sont abordées en lien avec l'une des significations institutionnalisées. Mais la technique incitant à dénombrer les carreaux pour identifier l'écart entre deux droites met en jeu plusieurs significations sous-jacentes de la relation de parallélisme : « écart constant », « même pente », voire « même direction ». *Le critère de cohérence entre les significations abordées des relations et les techniques proposées est donc partiellement validé.*

### 3.3 Analyse des savoirs en jeu

Les significations abordées pour la relation de perpendicularité sont en lien avec la notion d'angle et à celle liée au plus court chemin entre un point et une droite conformément aux attendus des programmes. Plusieurs significations de la relation de parallélisme sont abordées : incidence (« droites qui ne se coupent jamais même si on les prolonge » en référence à l'exemple introductif), direction (« elles vont dans la même direction », « toutes les lignes horizontales sont parallèles entre elles »), écart constant (« l'écartement (la distance) entre les droites est constant : il ne change pas »), pente (« on reproduit le même déplacement », GdE). La signification « écart constant » de la relation de parallélisme est abordée, mais pas institutionnalisée, et aucun lien n'est fait avec la relation de perpendicularité. *Par conséquent le critère de conformité institutionnelle n'est que partiellement validé.* Les auteurs du manuel se revendiquent de la pédagogie explicite, qui prône un exposé explicite des apprentissages, notamment par l'explication de tout ce qui peut l'être. Le manque d'explicitation des significations en jeu dans les différentes techniques envisagées de reconnaissance/identification de droites parallèles conduit à ne *valider que partiellement le critère d'adéquation pédagogique*. Concernant la relation de parallélisme, nous constatons une volonté d'ancrer l'ancien dans le nouveau puisque la notion d'alignement est évoquée dans la situation introductrice. Cependant le passage entre les significations « écart constant » et « incidence » est uniquement contextualisé, l'articulation avec « même direction » et « même pente » n'est pas aménagée, l'équivalence des formulations semblant aller de soi. Nous en déduisons que *l'enseignement des différentes significations est partiellement pertinent*. Les significations des relations restent dans leur domaine de validité. *Le critère de validité mathématique est ainsi vérifié*. La relation de perpendicularité est introduite *via* l'observation des côtés de l'angle droit de l'équerre, suivie de l'observation d'un plan avec des rues. La signification de la perpendicularité introduite, « se couper en formant un angle droit », est cohérente avec la situation introductrice. L'exemple introductif de la relation de parallélisme s'appuie sur la perception que les lignes de plots vont finir « par se couper », ce qui réfère directement à la relation d'incidence entre les droites. Seule cette première signification est donc traitée avant la première institutionnalisation orale. Pourtant le GdE incite l'enseignant à proposer une institutionnalisation orale « trois en un » en évoquant en outre des droites de même direction ainsi que des droites d'écart constant. La trace écrite ultérieure revient enfin uniquement sur le sens lié à l'incidence. Elle présente également la technique de contrôle de la relation utilisant le guide-âne, technique préalablement explicitée oralement qui ne réfère pas uniquement au même sens que celui de la définition donnée. La trace écrite propose enfin l'utilisation du guide-âne pour tracer des parallèles mais n'explicite pas la technique qui n'a pas été abordée du tout. Elle ne reprend pas non plus les autres techniques présentées et travaillées. *Le critère de cohérence de l'enseignement des savoirs n'est donc que partiellement validé.*

### 3.4 Analyse des ostensifs

Le manuel est *institutionnellement conforme* puisque les notations pour les droites et les segments ne sont pas utilisées, les symboles ⊥ et // ne sont pas évoqués, les instruments mis à disposition des élèves sont la règle, l'équerre ainsi que le guide-âne, les tâches relatives aux deux relations sont proposées sur support quadrillé, uni, voire pointé dans le cas de la relation de parallélisme. Les ostensifs proposés (langage, instruments, objets …) sont bien explicités, le manuel est donc en *adéquation avec les intentions déclarées des auteurs*.

Différentes catégories d'objets apparaissent dans le manuel : des objets du monde culturellement représentateurs de la relation de perpendicularité (plan avec des rues), objets du monde non culturellement représentateurs de la relation de parallélisme (plots alignés séparant des couloirs dans une course à pied, « lignes horizontales parallèles » d'un tableau de Vasarely), ainsi que des objets graphiques représentant des objets géométriques (couples de droites ou réseau de droites, côtés de polygones). Nous notons que le choix des objets du monde ne conduit pas toujours à une représentation valide des objets géométriques en jeu (des droites représentées par des lignes courbes par exemple). Par ailleurs dans la situation introductrice à la relation de perpendicularité (Lé, p.126), la vue du dessus pour les rues cohabite avec vue de côté pour les maisons, ce qui peut poser des problèmes d'interprétation. Par conséquent le *critère de pertinence n'est pas entièrement vérifié*.

Le GdE propose différentes formulations équivalentes en contexte : pour la relation de perpendicularité « Les rues de Gaëlle et Kenza sont perpendiculaires ou la rue de Gaëlle est perpendiculaire à celle de Kenza ou la rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle » (GdE, p. 180) ; pour la relation de parallélisme « On peut dire que les lignes droites de Lou et Enzo ne sont pas parallèles, ou que la ligne d'Enzo n'est pas parallèle à celle de Lou, ou que la ligne de Lou n'est pas parallèle à celle d'Enzo. » (GdE, p.182). Ainsi la symétrie des deux relations est mise en avant. Dans les traces écrites (Fé, p.127 et p.129), l'expression de chaque relation est décontextualisée, de même que l'équivalence des formulations concernant la relation de parallélisme. Les *formulations langagières sont donc pertinentes par rapport à l'enseignement du savoir visé*.

Dans le travail sur les relations, l'usage des instruments proposés est approprié à la réalisation des tâches. *L'usage des instruments est ainsi mathématiquement valide*. Les notations et symboles sont conventionnels et corrects par rapport à l'usage. Les relations sont exprimées en langage géométrique. Le discours sur l'utilisation du guide-âne pour vérifier/identifier des droites parallèles est prévu dans le GdE. Cette technique fait l'objet d'une trace écrite (« J'ai compris », Fe, p.183). Cependant l'unicité de la relation de perpendicularité est mal formulée (« on veut tracer **une** droite e perpendiculaire à la droite d passant par le point O », GdE, p.181), le terme « perpendiculaire » renvoie quelquefois à une propriété plutôt qu'à une relation (« Quelles droites sont perpendiculaires ? », Fé, p.127) et l'angle droit de l'équerre est assimilé à son sommet (« On pose l'angle droit de l'équerre sur le point O », GdE, p.181). L'imbrication langage courant – langage géométrique se révèle à plusieurs reprises et notamment dans les exemples introductifs de chaque relation : le mot « rue » ou l'expression « ligne de plots » (objets du monde) sont substitués au terme « droite » (objet géométrique) (« la rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle », Fé, p. 180 ; « les lignes de plot (…) ne doivent pas se couper : elles doivent être parallèles », Fé, p. 182). On relève également l'expression « lignes horizontales parallèles » (Fé, p. 129). L'emploi dans cet exercice du terme « parallèle » fait alors référence à l'usage social qui exprime la position relative des lignes courbes, mais pas à la définition mathématique qui réfère à une relation entre droites. La manière de tracer des « lignes parallèles de plus en plus espacées [qui] se déforment dans le cercle » (ibid.) renvoie en effet plus à une activité d'art plastique que de géométrie. Par ailleurs cette formulation est erronée, les lignes n'étant pas « horizontales » puisque courbes … On constate par ailleurs dans le GdE, une formulation incorrecte (« les droites vont dans la même direction », GdE, p. 182, à la place de « elles **ont** la même direction »). On en conclut que *le manuel ne vérifie que partiellement le critère de validité mathématique*.

### 3.5 Analyse des éléments organisationnels et planificateurs

L'organisation du manuel *Maths Explicites* est thématique, à raison de deux séances par « leçon », et une programmation par période et par semaine est proposée à l'enseignant utilisateur. Nous synthétisons cette répartition en mettant en évidence l'aspect outil ou objet (Douady, 1986) des concepts enseignés pour les relations de perpendicularité et de parallélisme (figure 7). À propos de l'aspect outil, nous identifions notamment les séances dans lesquelles l'une des relations est utilisée pour définir un autre concept géométrique (la relation de perpendicularité est outil par exemple pour définir la relation de parallélisme à partir de l'écart constant), ou pour caractériser un objet géométrique (notamment les quadrilatères particuliers). Depuis l'édition 2020, le Cahier d'exercices pour l'élève existe (visant la *phase de réactivation* prônée par la méthode) : ces exercices sont à proposer par l'enseignant soit en classe (pour un travail en autonomie ou en groupes), soit hors la classe. Les exercices de réactivation à donner aux élèves font l'objet d'une progression qui apparaît dans le GdE en parallèle de la programmation (pp. 10-12). L'usage du Cahier d'exercices étant optionnel et non effectivement pris en considération dans la description du déroulement des séances par le manuel, nous proposons une représentation de la planification sans ces exercices supplémentaires : ces derniers sont pris en compte dans une ligne spécifique de la figure 7.

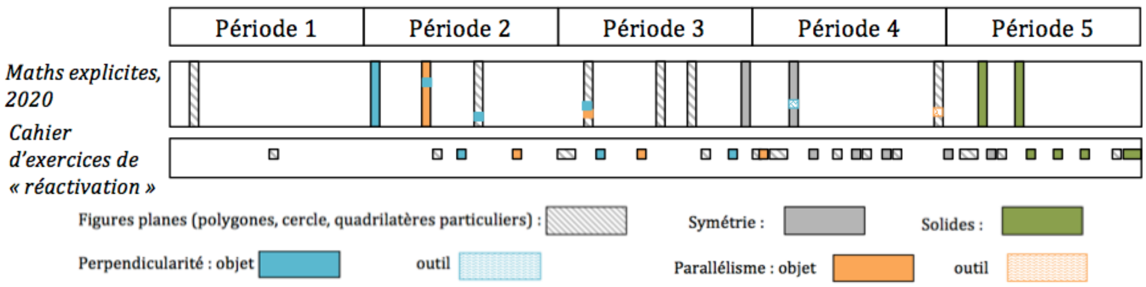



*Figure 7. Programmation du domaine géométrique dans l'année*

Ainsi les thèmes géométriques abordés correspondent à ceux à enseigner identifiés dans les ressources institutionnelles. *La programmation est donc en institutionnellement conforme*. De nombreux exercices sont réalisés de loin en loin (par le biais du Cahier d'exercices), ce qui correspond à une « pratique de la répétition » annoncée dans l'avant-propos. En outre le même plan suivi pour chaque leçon (selon le même enchainement des rubriques « Apprenons ensemble », « Entrainons-nous », « J'apprends/J'ai compris », « Je travaille seul(e) », « Je vais plus loin ») nous semblent en adéquation avec la démarche prônée : il s'agit en effet de « procéder de manière structurée » et simplifier le travail de l'enseignant. *La programmation est donc en adéquation avec les intentions déclarées des auteurs*. Cependant les notions de perpendicularité et de parallélisme sont peu réinvesties en tant qu'outils. Elles ne sont pas mises en lien avec d'autres notions, en particulier la perpendicularité n'est pas réinvestie dans le travail sur le parallélisme. Si les deux relations ne sont pas articulées entre elles, elles sont en revanche peu dissociées dans leur introduction (la relation de perpendicularité est introduite en début de période 2, celle de parallélisme en milieu de cette même période). *La progression retenue apparaît donc peu pertinente par rapport à l'enseignement des notion*s. Au niveau «micro », nous notons enfin que la notion de direction d'une droite n'est pas explicitée et que les savoirs ne sont pas mis en lien. *L'organisation des savoirs n'est donc que partiellement cohérente.*

## IV - SYNTHESE ET CONCLUSION

Nous synthétisons l'analyse sous la forme d'un bilan visuel (tableau à double entrée) reprenant les critères ainsi que les points d'attention (un tableau vide est proposé en annexe 4). Le bilan complet est présenté figure 8 en distinguant les « points validés » et les « points partiellement validés ». Les bilans réalisés par les participants à l'atelier à l'aide de post-it (bleu pour les « points validés », roses pour les « points partiellement validés »), figurent en annexe 4 et ne portent que sur une seule des deux relations. Cette analyse peut être mise en relation avec celle de deux autres manuels déjà réalisés : *Cap Maths* CM1 et *Méthode Heuristique en Mathématiques* CM1 (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2021, à paraître (b)).

L'outil d'analyse de manuels scolaires que nous avons construit, dont les fondements théoriques et méthodologiques sont présentés dans la première partie de ce texte, prend en compte différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique (Chevallard, 2002). La grille d'analyse élaborée permet d'étudier les propositions d'enseignement des mathématiques à l'école primaire française en ciblant le domaine de la géométrie et plus spécifiquement le thème des relations de perpendicularité et de parallélisme en classe de CM1, moment où ces relations sont introduites. Comme les participants de l'atelier ont pu le découvrir, renseigner la grille d'analyse nécessite une étude didactique approfondie du manuel. En formation, cette analyse exigera un accompagnement de la part du formateur ainsi que des choix en termes de critères et de points d'attention à étudier. Pour autant, la lecture de synthèses des analyses réalisées par les chercheures (telles que faîtes en partie III), nous paraît tout à fait accessible aux professeurs des écoles pour éclairer leurs choix. Nous pensons aussi que ces synthèses seront utiles aux formateurs pour les renseigner sur la qualité d'un manuel donné afin de pouvoir conseiller les professeurs des écoles, mais aussi de construire des situations de formation autour de l'usage des manuels.

| | CONFORMITE INSTITUTIONNELLE | ADEQUATION PEDAGOGIQUE DECLARE / PROPOSE | QUALITE DIDACTIQUE | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | PERTINENCE | VALIDITE | COHERENCE |
| Tâches et types de tâches | Conformité aux documents institutionnels des types de tâches proposés | Adéquation des tâches proposées avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence des tâches proposées relativement à l'enseignement de la relation | | Cohérence entre les tâches proposées et les techniques institutionnalisées |
| Techniques | Conformité aux documents institutionnels des techniques présentées | Adéquation des techniques proposées avec les intentions déclarées | Pertinence de la présentation des techniques | | Cohérence entre les significations de la relation abordées et les techniques proposées |
| Savoirs | Conformité aux documents institutionnels des significations abordées | Adéquation de l'introduction des savoirs avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence de l'enseignement des différentes significations abordées | Validité mathématique des significations abordées | Cohérence entre première(s) rencontre(s) avec la relation et les savoirs institutionnalisés |
| Ostensifs (objets et instruments, notations et langages) | Conformité aux documents institutionnels des ostensifs proposés | Adéquation de la place des ostensifs proposés avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence du choix des objets par rapport à l'enseignement de la relation | Validité mathématique de l'usage des instruments | |
| | | | | Validité mathématique des symboles et des notations | |
| | | | Pertinence des formulations langagières par rapport à l'enseignement du savoir | Validité mathématique des formulations langagières | |
| Eléments organisation-nels et planificateurs | Conformité aux documents institutionnels de la programmation | Adéquation de la programmation avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence de la progression par rapport à l'enseignement du savoir | | Cohérence de l'organisation des savoirs |

*Figure 8. Bilan de l'analyse de* Maths Explicites *CM1*

La grille d'analyse nous semble adaptable à l'analyse d'autres thèmes géométriques mettant en jeu des constructions instrumentées, reste à voir dans quelle mesure elle peut aussi l'être à d'autres domaines mathématiques tels que la numération, le calcul ou les grandeurs et mesure, pour pouvoir analyser un manuel dans son entier.

## V - BIBLIOGRAPHIE

Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Harward University Press, Cambridge.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(3), 221-266.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (coord.) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41–56). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 5-31.

Dussuc, M.-P., Gerdil-Margueron, G. et Mante, M. (2006). Parallélisme au cycle 3. Dans J.C. Rauscher (dir.) *Actes du 32e colloque COPIRELEM* (p.1–15). IREM de Strasbourg, Strasbourg.

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Éditions Hatier, Paris.

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (2018). L'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme dans le manuel Méthode de Singapour. *Grand N, 102*, 5-40.

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (2019). Enseignement-apprentissage des notions de perpendicularité et de parallélisme en CM1 : que proposent les manuels ? Dans *Manipuler, représenter, communiquer : quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Actes du 45e colloque COPIRELEM* (p. 147-197). ARPEME.

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (2021). Contribution à l'analyse didactique de manuels scolaires numériques du premier degré : une étude de cas. *Education et didactique, 21*(2), 49-76.

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (à paraître (a)). Outil d'analyse de l'enseignement de la géométrie dans les manuels scolaires. Dans C. Guille-Biel Winder et T. Assude (eds.) *Articulations entre espace sensible, espace graphique et espace géométrique. Ressources, pratiques et formation.* London : Iste Editions.

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (à paraître (b)). Outiller l'analyse de l'enseignement d'un thème géométrique dans un manuel scolaire : une grille et son utilisation. *Grand N.*

Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM, 67*, 69–84.

Laparra, M. et Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages à la loupe*. De Boeck, Bruxelles.

MEN (2015). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). *Bulletin Officiel Spécial n°11 du 26 novembre 2015.* Ministère de l'éducation nationale, France.

MEN (2020). Modification des programmes d'enseignement du cycle de consolidation. *BOEN n°31 du 30 juillet 2020.* Ministère de l'éducation nationale, France.

MEN (2018). *Espace et géométrie au cycle 3.* Ministère de l'éducation nationale, France. Disponible à l'adresse : https://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html [Consulté le 30 juin 2022].

MEN (2019). Attendus de fin d'année et repères annuels de progression du cycle de consolidation. *BOEN n°22 du 29 mai 2019*. Ministère de l'éducation nationale, France.

Petitfour, E. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 37*(3-2), 247–288.

Petitfour, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N, 101*, 45-70.

Petitfour, E. et Barrier, T. (2019). D'un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie à l'élaboration d'un dispositif de travail en dyade au cycle 3. Dans S. Coppé, E. Roditi (coord.) *Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques ARDM* (p. 329–349). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Piaget, J. (1964). *Six études de psychologie*. Gonthier-Denoël, Paris.

Rabardel, P. (1995). Les *hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin, Paris.

Remillard, J.T. (2010). Modes d'engagement : comprendre les transactions des professeurs avec les ressources curriculaires en mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.) *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématique*s (p. 201-216). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Reymonet, C. (2004). Un cadre expérimental pour l'étude de la géométrie au cycle 3 : le cas du parallélisme. *Grand N, 73,* 33–48.

Rosenshine, B. (1986). Synthesis of research on explicit teaching. *Educational leadership, 43*, 60-69. [En ligne]. Disponible à l'adresse : http://formapex.com/telechargementpublic/ rosenshine1986c.pdf

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *Rapport : 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. [En ligne]. Disponible à l'adresse : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf [Consulté le 30 janvier 2019].

# VI - ANNEXE 1 : GRILLE D'ANALYSE FOURNIE AUX PARTICIPANTS DE L'ATELIER

| | *Critères* | **Analyses préalables** | **Manuel :** |
|---|---|---|---|
| **Tâches et types de tâches** | ***Conformité** aux documents institutionnels des types de tâches proposés* | **(A1) Types de tâches dans les docs institutionnels :** | **(1) Types de tâches dans le manuel (+ références) :** |
| | | Proposition dans (1) de tous les types de tâches identifiés dans (A1) ? | |
| | ***Pertinence** des tâches proposées relativement à l'enseignement de la relation* | **(B) Variables didactiques** (*analyse a priori*) | **(2) Variables didactiques et valeurs prises dans le manuel :** |
| | | Choix des variables conduisant au dépassement des obstacles et à la compréhension des concepts ? | |
| | ***Cohérence** tâches / techniques exposées* | Techniques exposées (3) permettant de résoudre les tâches proposées (1) ? | |
| **Techniques** | ***Conformité** aux documents institutionnels des techniques présentées* | **(A2) Techniques dans les docs institutionnels :** | **(3) Techniques exposées dans le manuel :** |
| | | Proposition dans (3) de techniques identifiées dans (A2) ? | |
| | ***Pertinence** de la présentation des techniques* | **(C) Connaissances nécessaires à la mise en œuvre des techniques de construction**<br>Connaissances géométriques, techniques, graphiques, spatiales, pratiques<br>*(présentées dans le document C)* | **(4) Identification des connaissances exposées dans le manuel pour la mise en œuvre des techniques** |
| | | Prise en compte des connaissances nécessaires à l'action instrumentée ? | |
| | ***Cohérence** significations de la relation / techniques proposées* | Justification des techniques exposées (3) s'appuyant sur une des significations de la relation introduite (5) ? | |
| **Savoirs** | ***Conformité** aux documents institutionnels des significations abordées* | **(A3) Significations dans les docs institutionnels** | **(5) Signification(s) abordée(s) dans le manuel (cf. document D) :** |
| | | Signification(s) abordée(s) (5) figurant dans (A3) ? | |
| | ***Pertinence** de l'enseignement des significations abordées* | Mise en lien des significations abordées (5) ? | |
| | ***Cohérence entre** première rencontre de la relation et savoirs institutionnalisés* | Signification(s) et/ou technique(s) institutionnalisées à l'issue de la première rencontre correspondant à celles rencontrées ? | |
| | ***Validité** mathématique de la (des) signification(s) abordée(s)* | Signification(s) exposée(s) valide(s) ? | |
| **Osten-sifs** | ***Conformité** aux documents institutionnels des symboles et notations proposés* | **(A4) Symboles et notations dans les docs institutionnels :** | **(6) Symboles et notations utilisé/institutionnalisés dans le manuel :** |
| | | Symboles et notations dans (6) réduits à ceux attendus dans (A4) ? | |
| | ***Pertinence** du choix des objets par rapport à l'enseignement de la relation* | **(E) Objets pouvant être utilisés pour enseigner la relation**<br>Objets du monde<br>Objets graphiques<br>*(présentés dans le document E)* | **(7) Objets utilisés dans le manuel pour enseigner la relation géométrique :** |
| | | Choix des objets (7) conduisant à une représentation valide de la relation ou de l'une de ses propriétés, ou bien des objets géométriques en jeu ? | |
| | ***Pertinence** des formulations langagières par rapport à l'enseignement de la relation* | Expression décontextualisée de la relation ? Institutionnalisation de l'équivalence de formulations ? | |
| | ***Validité** mathématique de l'usage des instruments* | Usage approprié de chaque instrument conduisant à la production graphique de la propriété désirée ? | |
| | ***Validité** mathématique de l'usage des symboles et notations* | Symboles et notations (6) conventionnels et corrects par rapport à l'usage ? | |
| | ***Validité** mathématique des formulations langagières* | Formulation correcte des connaissances géométriques (langage géométrique) ? des connaissances techniques (langage technique) ? | |

# VII - ANNEXE 2 : DOCUMENTS FOURNIS AUX FORMÉS

## 1 Document A - Extrait des documents institutionnels (en vigueur 2022)

Programme du cycle 3 – En vigueur à la rentrée 2020 (BOEN n°31 du 30 juillet 2020) :

| Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques |
|---|
| **Relations de perpendicularité et de parallélisme**<br>- Tracer avec l'équerre la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.<br>- Tracer avec la règle et l'équerre la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.<br>- Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite.<br>▪ Alignement, appartenance.<br>▪ Perpendicularité, parallélisme.<br>▪ Segment de droite.<br>▪ Distance entre deux points, entre un point et une droite. |

Attendus de fin d'année de CM1 (BOEN n°22 du 29 mai 2019) :

**Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques**

**Relations de perpendicularité et de parallélisme**

**Ce que sait faire l'élève**

- L'élève connaît les notions d'alignement/appartenance, de perpendicularité/parallélisme, de segment de droite, de distance entre deux points, entre un point et une droite.
- Il trace avec l'équerre la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné qui peut être extérieur à la droite.
- Il trace avec la règle et l'équerre la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
- Il détermine le plus court chemin entre deux points, entre un point et une droite.
- Il trace un carré, un rectangle ou un triangle rectangle de dimensions données.

Espace et géométrie (eduscol.education.fr/ressources, février 2018) :

**Les notations en géométrie**

À l'école élémentaire, lorsque des lettres sont utilisées pour désigner des points, des droites ou des angles, le professeur veille à toujours préciser explicitement l'objet dont il parle : « le point A », « le segment [AB] », « le triangle ABC », « la droite d », « l'angle â », etc. Aucune maîtrise n'est attendue des élèves pour ce qui est des codages (par exemple, l'usage des crochets pour un segment) avant la dernière année du cycle. L'enseignant qui, lui, utilisera toujours la notation correcte au tableau, jugera de la pertinence ou non de corriger sur les productions des élèves d'éventuelles notations non conformes. Les nouvelles notations sont introduites au fur et à mesure de leur utilité, et non au départ d'un apprentissage.

## 2 Document C – Connaissances en jeu dans une action instrumentée (Petitfour, 2017, 2018)

Les **connaissances géométriques** sont relatives aux objets, propriétés et relations géométriques.
Les **connaissances techniques** portent sur la fonction des instruments (ce qu'ils permettent de vérifier ou de tracer) et sur leurs usages spécifiques (mise en relation d'un instrument avec des tracés pour les analyser ou produire un nouveau tracé).

> Par exemple l'équerre a pour fonction de vérifier un angle droit ou de produire un angle droit. On l'utilise pour produire un angle droit par exemple dans le tracé d'une droite-droite perpendiculaire à une droite *d* donnée, d'origine un point *A* de la droite *d* : on place un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite *d* et le sommet de l'angle droit de l'équerre sur le point *A*, puis on trace le long du deuxième côté de l'angle droit de l'équerre, à partir du point *A*.

Les **connaissances graphiques** portent sur les informations graphiques à prélever sur le dessin et à interpréter. Elles sont reliées aux tracés, aux codages, aux notations et aux symboles.

Par exemple, « une droite est représentée par un trait rectiligne que l'on peut prolonger autant que l'on veut » (tracé), « un petit carré placé dans un angle formé par deux droites sécantes indique une relation de perpendicularité vérifiée par ces deux droites » (codage), « la lettre capitale A inscrite à côté d'un point pour le nommer » (notation), « *d // d'* signifie que les droites *d* et *d'* sont parallèles » (symbole).

Les **connaissances spatiales** sont liées à l'expérience qu'a le sujet de l'espace sensible. Elles sont relatives à la sélection perceptive d'informations spatiales et à leur interprétation, à l'anticipation de transformations et de déplacements.

Par exemple, la connaissance de la relation de perpendicularité de droites dans des directions prototypiques (l'une horizontale, l'autre verticale) est une connaissance spatiale.

Les **connaissances pratiques** relèvent du plan matériel et corporel lié à l'action instrumentée en lien avec des compétences manipulatoires (coordination de mouvements et ajustements posturaux pour manipuler l'instrument avec dextérité et précision). Elles concernent aussi son organisation (capacité à planifier un enchaînement d'actions selon un plan déterminé).

Par exemple, savoir qu'il faut appuyer plus fort sur la main qui maintient la règle que sur celle qui trace est une connaissance pratique.

## 3 Document D – Significations des relations de perpendicularité et de parallélisme (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2021)

Deux droites perpendiculaires peuvent être principalement vues comme deux droites :

- qui se coupent en formant quatre angles droits (ou un angle droit), en lien avec la notion d'**angle** ;
- dont l'une a une **direction** particulière par rapport à l'autre (« ne penche ni d'un côté ni de l'autre »);
- dont l'une est celle qui, passant par un point n'appartenant pas à l'autre, permet d'obtenir la distance de ce point à cette autre droite, en lien avec la notion de **distance** ;
- obtenues par le pliage pli sur pli d'une feuille de papier pliée en deux, en lien avec la notion de **symétrie** ;
- supports de côtés consécutifs d'un rectangle, en lien avec des **propriétés du rectangle** ;
- ayant une relation entre leur **pente**, que l'on peut observer sur un support quadrillé lorsque les droites passent par des nœuds du quadrillage.

Deux droites parallèles peuvent être principalement vues comme :

- des droites non sécantes (ou qui ne se coupent jamais) en lien avec la relation d'**incidence** ;
- des droites d'écart constant à relier avec la notion de **distance** ;
- des droites de même **direction** ou des droites de même **pente**, en relation avec la notion d'**angle** ;
- des droites obtenues par **translation,** en référence aux transformations du plan ;
- des droites perpendiculaires à une même troisième, en appui explicite sur la notion de **perpendicularité** et pouvant être considéré comme un cas particulier de droites de même direction ;
- des droites supports de côtés opposés de **quadrilatères particuliers** (carré, rectangle, … parallélogramme).

## 4 Document E – Catégorisation des objets utilisés pour enseigner les relations de perpendicularité et de parallélisme (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2021)

*Objets du monde* (Laparra & Margolinas, 2016) – ou leurs représentations figuratives, d'usages connus des élèves (appartenant à l'environnement quotidien des élèves) : *culturellement représentateurs des relations spatiales* (par exemple des rails de chemin de fer pour la relation de parallélisme), ou *non* (par exemple des baguettes de Mikado disposées parallèlement).

*Objets graphiques* correspondant aux objets matériels (dessins) de la géométrie de l'école (Houdement, 2007) : *représentations* d'objets géométriques ou *modélisations* d'objets du monde

# VIII - ANNEXE 3 : EXTRAITS DE MATHS EXPLICITES CM1

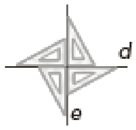
## 1 Relation de perpendicularité - Extrait du GdE (pp. 180-181)

### 49 Reconnaître et tracer des droites perpendiculaires

Manuel pp. 126-127

| | |
|---|---|
| **Programmes** | Connaître les notions de perpendicularité/parallélisme. Tracer avec l'équerre la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné qui peut être extérieur à la droite. |
| **Introduction** | En CE2, les élèves ont appris à vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre et à construire un carré ou un rectangle de dimensions données. Ils savent donc identifier et tracer des angles droits. En revanche, ils n'ont pas étudié la notion de droites perpendiculaires et l'utilisation de l'équerre n'est pas maîtrisée par tous : beaucoup d'élèves ne savent pas comment positionner l'équerre. |
| **Matériel** | – Chaque élève a une équerre et une feuille blanche.<br>– L'enseignant a tracé au tableau quadrillé 2 rectangles de tailles différentes (Figure 1). |

| **SÉANCE 1** | **1 heure** |
|---|---|
| **Exercice écrit**<br>*15 min* | **Exercices de « *Problèmes* »** pour l'évaluation formative d'une notion déjà étudiée : « Situations additives : chercher un tout avec des parties inégales », exercices 3 et 4 p. 172 du manuel. |
| **Calcul mental**<br>*10 min* | **Compétence :** « Calculer le complément à 60 ». (Cette compétence est une préparation à la lecture de l'heure et au calcul des durées.)<br>***Stratégie :*** Combien de minutes pour aller de 25 à 60 ? Je complète la dizaine entière suivante puis de la dizaine à 60 : (25 + 5) + 30 = 25 + (5 + 30) = 25 + 35 = 60.<br>**Items :** 35 pour aller à 60 ? ; 17 pour aller à 60 ? ; 48 pour aller à 60 ? ; 31 pour aller à 60 ? |
| **Mise en projet d'apprentissage**<br>*1 min* | **Présentation de l'objectif d'apprentissage**<br>*« Aujourd'hui, vous allez apprendre à reconnaître et à tracer des droites perpendiculaires. »*<br>**Présentation des résultats attendus**<br>*« À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites sont perpendiculaires ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé et sur du papier uni. »* |
| **Explicitation et pratique guidée**<br>*34 min* | ➤ **Rappel des connaissances préalables *(révision du CE2)***<br>Montrer la figure 1 et demander : *« Comment s'appellent les figures qui sont tracées au tableau ? »* → Des rectangles.<br>*« Comment sait-on que ce sont des rectangles ? »* → Les rectangles ont des angles droits.<br>*« Comment sait-on qu'elles ont des angles droits ? »* → Car les lignes du quadrillage se coupent en formant des angles droits.<br>*« Avec quel instrument peut-on le vérifier ? »* → Une équerre.<br>Montrer et demander aux élèves de montrer l'angle droit de l'équerre et ses 2 côtés perpendiculaires. |
| **Explicitation** | ➤ **Sous-compétences 1 et 2 : Définir le mot « perpendiculaire » et vérifier que les côtés d'une figure ou des droites sont perpendiculaires.**<br>« APPRENONS ENSEMBLE » **A**<br>Après lecture de la situation du manuel, vérifier la compréhension de la situation par les élèves grâce à des questions ou reformulations.<br>**C'est l'enseignant qui explique la démarche pour résoudre le problème ; les élèves écoutent.**<br>L'enseignant reprend, pas à pas, les phases décrites dans le « APPRENONS ENSEMBLE » du manuel pour résoudre la situation-problème.<br>Préciser que l'on peut dire que les rues de Gaëlle et Kenza sont perpendiculaires ou que la rue de Gaëlle est perpendiculaire à celle de Kenza ou que la rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.<br>« APPRENONS ENSEMBLE » **B**<br>L'enseignant reprend les étapes de la démarche (compréhension et stratégie) en guidant les élèves par des questions. |
| **Pratique guidée** | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Faire oralement l'exercice 1 et sur ardoise les exercices 2 et 3 p. 126 du manuel. |
| **Explicitation** | ➤ **Sous-compétence 3 : Connaître le chemin le plus court entre une droite et un point**<br>• **Exemple 1 :** L'enseignant trace au tableau une droite (*d*) et un point A n'appartenant pas à (*d*).<br>*« Quel est le chemin le plus court entre la droite (d) et le point A ? »*<br>L'enseignant trace plusieurs segments reliant (*d*) à des points appartenant à (*d*) dont un perpendiculaire à (*d*).<br>Il peut ensuite comparer la longueur des segments en les reportant avec un compas sur une demi-droite ou en les mesurant avec une règle graduée. Il utilise ensuite le compas pour montrer que le chemin le plus court est le segment perpendiculaire à (*d*).<br>***Présentation de la stratégie***<br>Pour trouver le chemin le plus court entre une droite et un point, on trace le segment perpendiculaire à la droite passant par ce point.<br>• **Exemple 2 :** L'enseignant trace une autre droite (*y*) et un point B. Quel est le chemin le plus court ?<br>Un élève vient au tableau tracer le segment perpendiculaire. |
| **Pratique guidée** | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Faire sur l'ardoise l'exercice 4 p. 126 |

| | |
|---|---|
| Explicitation | ➤ **<u>Sous-compétence 4</u> : Tracer des droites perpendiculaires sur une feuille blanche.**<br>• **Exemple 1 :** Tracer une droite *d* horizontale sur le tableau uni et dire : *« On veut tracer une droite e perpendiculaire à la droite* d. *»*<br>***Présentation de la stratégie***<br>– On place l'équerre sur la droite *d* ; on pose l'angle droit de l'équerre sur la droite et on superpose un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite. Il y a 4 positions possibles (voir ci-contre).<br><br><br>– On trace une droite le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.<br>– On peut prolonger cette droite avec la règle, on nomme la droite *e* et on marque un angle droit par un « coin ».<br>• **Exemple 2 :** Un élève vient tracer une droite *f* perpendiculaire à la droite *d* puis *e*. Utiliser les différentes positions de l'équerre. |
| Pratique guidée | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Demander aux élèves de tracer des droites perpendiculaires sur leur feuille blanche. |
| Explicitation | ➤ **<u>Sous-compétence 5</u> : Sur une feuille blanche, tracer des droites perpendiculaires en passant par un point donné.**<br>**1^er^ cas : Le point est sur la droite.**<br>• **Exemple 1 :** Sur le tableau uni, l'enseignant trace une droite *d* horizontale et place un point O sur la droite. On veut tracer une droite *e* perpendiculaire à la droite *d* passant par le point O.<br>***Présentation de la stratégie***<br>– On place l'équerre sur la droite *d* : on pose l'angle droit de l'équerre sur le point O, on superpose un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite. Il y a 4 positions possibles.<br>– On trace la droite le long de l'autre côté de l'équerre.<br>• **Exemple 2 :** Un élève vient placer un point P et un point R vers les extrémités de *d*. Utiliser les positions adéquates de l'équerre pour tracer les perpendiculaires.<br>**2^nd^ cas : Le point n'est pas sur la droite.**<br>• **Exemple 1 :** Placer un point S qui ne soit pas sur la droite *d*.<br>***Présentation de la stratégie***<br>– On place l'équerre sur la droite : le point étant d'un côté de la droite, il n'y a plus que 2 positions possibles et quelquefois, selon la distance du point à la droite, il n'y en a plus qu'une quand il faut utiliser le côté le plus long de l'équerre.<br>– On fait glisser l'équerre jusqu'au point.<br>– On trace la droite le long du côté de l'équerre. On peut prolonger la droite.<br>• **Exemple 2 :** Un élève vient placer un point T et un point U à des distances éloignées de la droite.<br>Utiliser les positions adéquates de l'équerre pour tracer les perpendiculaires. |
| Pratique guidée | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Faire sur l'ardoise l'exercice 5 p. 126 du manuel. |

| **SÉANCE 2** | **1 heure** |
|---|---|
| **Exercice écrit**<br>*5 min* | Correction des exercices faits la veille : exercices 3 et 4 p. 172 du manuel. |
| **Calcul mental**<br>*15 min* | 1. Même compétence que la veille.<br>2. Réactivation de la compétence : « Écrire des nombres en lettres ». L'enseignant(e) écrit des nombres en chiffres au tableau, les élèves les écrivent en lettres sur leur ardoise. |
| **Explicitation**<br>*5 min* | **Rappel de l'explicitation de la séance 1**<br>Rappeler ce que sont des droites perpendiculaires puis, à partir de quelques exemples au tableau, rappeler les différentes stratégies pour identifier et tracer des droites perpendiculaires. |
| **Pratique autonome**<br>*30 min* | **« JE TRAVAILLE SEUL(E) »**<br>**Travail par écrit :**<br>– *Sous-compétences 1 et 2 :* Exercices 6 et 7 – *Sous-compétence 5 :* Exercice 9<br>– *Sous-compétences 3 et 4 :* Exercice 8<br>**Différenciation :** Repérer les élèves en difficulté dans ces exercices. Les aider à faire ces exercices. On peut également leur proposer de refaire par écrit des exercices de « ENTRAÎNONS-NOUS ». Les élèves qui n'ont pas de difficulté font, seuls, l'exercice 10 et, en binômes, les exercices 11 et 12 de « JE VAIS PLUS LOIN ». Les exercices sont corrigés pendant la séance. |
| **Objectivation**<br>*5 min* | **« J'APPRENDS / J'AI COMPRIS »**<br>– Demander : *« Qu'avez-vous appris ? »*<br>– Lire et commenter les rubriques « J'APPRENDS » et « J'AI COMPRIS » du manuel p. 127. |
| **Évaluations** | • **Formative :** Pour la semaine suivante, faire apprendre la rubrique « J'APPRENDS », lire la rubrique « J'AI COMPRIS » et faire les exercices 3 et 4 de *« J'évalue mes connaissances »* p. 156 du manuel.<br>• **Sommative (bilan périodique) :** exercices 49.1 et 49.2 p. 219 du guide pédagogique. |
| **Réactivation** | Pendant les semaines et les mois qui suivent, à chaque réactivation, revoir la leçon et faire un exercice du **Cahier d'exercices** (voir la planification de réactivation p. 11). |

## 2 Relation de perpendicularité - Extrait du Lé (pp. 126-127)

# 49 Reconnaître et tracer des droites perpendiculaires

Sous-compétences 1 et 2 : Définir le mot « perpendiculaire » et vérifier que les côtés d'une figure ou des droites sont perpendiculaires.
Sous-compétence 3 : Connaître le chemin le plus court entre une droite et un point.
Sous-compétence 4 : Sur une feuille blanche, tracer des droites perpendiculaires en passant par un point donné.

### Apprenons ensemble

**A** Kenza habite dans la maison bleue et son amie Gaëlle dans la maison verte.
Observe le plan. La rue de Kenza est-elle perpendiculaire à celle de son amie ?

*Des **droites perpendiculaires** sont des droites qui se coupent en formant **un angle droit**.*
*J'utilise **l'équerre** pour vérifier qu'un angle est droit.*

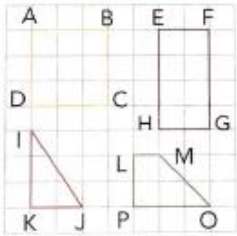

*Je positionne l'équerre pour superposer l'angle droit sur le coin où se croisent les rues de Kenza et de Gaëlle. Je superpose aussi un côté de l'équerre sur le bord de la rue.*


*L'autre côté de l'équerre se superpose exactement sur le côté de l'autre rue.* → **La rue de Kenza est perpendiculaire à celle de Gaëlle.**

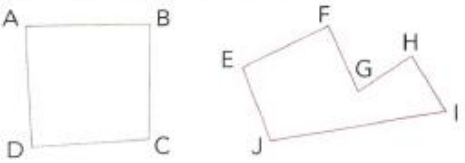
**B** Louise habite la maison orange. Sa rue est-elle perpendiculaire à celle de Kenza ?

### Entraînons-nous

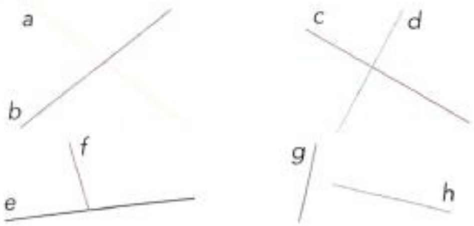
**1** **Nomme** les côtés perpendiculaires de chaque figure.
[AB] et [BC] sont perpendiculaires.



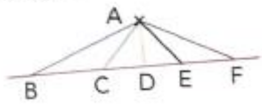

**2** Avec une équerre, **vérifie** quels sont les côtés perpendiculaires de ces 2 figures.



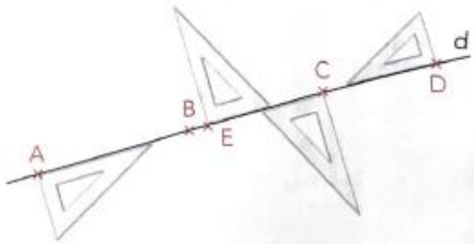

**3** Pour chaque figure, **indique** si les droites sont perpendiculaires.




**4** **Mesure** les segments qui relient le point A aux autres points.
a. Quel est le chemin le plus court entre A et la droite rouge ?
b. Quel angle ce segment forme-t-il avec la droite rouge ?



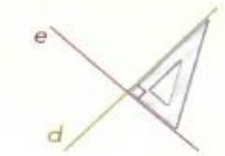

**5** Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.
a. **Trace** une droite *d*.
b. **Place** les 5 points sur la droite.
**Trace** les droites perpendiculaires passant par chacun de ces points. Tu peux positionner ton équerre comme dans les exemples.




126

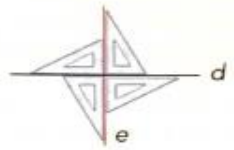
**J'apprends**

Deux droites **perpendiculaires** sont 2 droites qui se coupent en formant un angle droit.
Sur une figure, on indique qu'un angle est droit avec ce signe.
Exemple : La droite *d* est perpendiculaire à la droite *e*.




**J'ai compris**

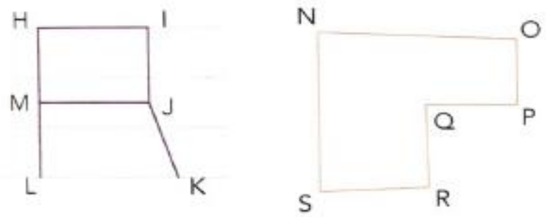
- Le chemin le plus court entre un point A et une droite *d* est le segment perpendiculaire à *d* qui passe par le point A.
- Sur une droite, je peux positionner l'angle droit de l'équerre et un de ses côtés de 4 manières différentes.



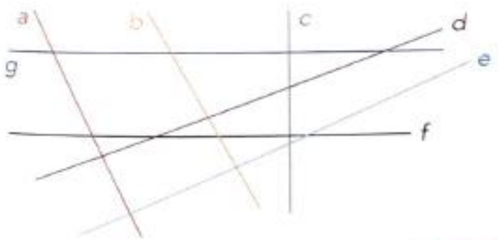

## Je travaille seul(e)

**6** • Les côtés de ces figures sont-ils perpendiculaires ? **Réponds** par **oui** ou **non**.

a. [HI] et [IJ]
b. [JM] et [JK]
c. [HI] et [HL]
d. [NO] et [NS]
e. [OP] et [PQ]
f. [QR] et [RS]




**7** • Quelles droites sont perpendiculaires ?




**8** • **Reproduis** ces figures.

**9** • Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.

a. **Trace** une droite *d* et **place** deux points K et L qui ne sont pas sur cette droite.

b. **Trace** le chemin le plus court entre chaque point et la droite *d*.

**10** •• Sur une feuille blanche, **construis** cette figure.

a. **Trace** 2 droites perpendiculaires *d* et *e* qui se coupent au point H.

b. **Place** un point I sur la droite *d* et un point J sur la droite *e*.

c. **Trace** le segment [IJ]. Quelle figure obtiens-tu ?

## Je vais plus loin

**11** •• **Trouve** toutes les rues qui sont perpendiculaires.


**12** ••• **Décalque** la figure. Les 7 premières lettres que touche la balle en rebondissant en angle droit forment le nom d'une ville.

## 3 Relation de parallélisme - Extrait du GdE (pp. 182-183)

# 50 Reconnaître des droites parallèles

Manuel pp. 128-129

| | |
|---|---|
| **Programmes** | Tracer avec la règle et l'équerre la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. |
| **Introduction** | La notion de droites parallèles n'a pas été étudiée en CE2. Toutefois le mot « parallèle » peut être connu par les élèves car il est utilisé dans la vie courante (rue parallèle, monde parallèle…).<br>En CM2, les élèves utiliseront les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles. C'est donc avec un réseau de parallèles (p. 288) que les élèves en CM1 vérifieront le parallélisme de droites. |
| **Matériel** | – Chaque élève a un calque-réseau de parallèles (p. 288), l'enseignant aussi en a préparé un en grand format.<br>L'enseignant a tracé sur le tableau uni :<br>– 2 droites *x* et *y* parallèles (Figure 1) ;<br>– 2 droites *a* et *b* sensiblement non parallèles (Figure 2). |

| SÉANCE 1 | 1 heure |
|---|---|
| **Exercice écrit**<br>*15 min* | **Exercice de « *J'évalue mes connaissances* »** pour l'évaluation formative d'une notion déjà étudiée : en ce début de période, l'enseignant choisira une compétence que certains élèves maîtrisent mal. |
| **Calcul mental**<br>*10 min* | **Compétence :** « Connaître les tables de multiplication de 0 à 4 ».<br>***Stratégie :*** Il s'agit de connaître les tables de multiplication sous la forme de multiplication, de multiplication à trous et de division.<br>**Items :** 3 × 8 = ? ; 2 × ? = 14 ; 16 : 2 = ? ; 4 × 8 = ? ; 4 × ? = 20 ; 36 : 4 = ? … |
| **Mise en projet d'apprentissage**<br>*1 min* | **Présentation de l'objectif d'apprentissage**<br>*« Aujourd'hui, vous allez apprendre ce que sont des droites parallèles et apprendre à les reconnaître. »*<br>**Présentation des résultats attendus**<br>*« À la fin de la séance, vous saurez vérifier si des droites et des côtés de figures sont parallèles ; vous saurez aussi en tracer sur du papier quadrillé. »* |
| **Explicitation et pratique guidée**<br>*34 min* | ➤ **Rappel des connaissances préalables**<br>Dire : *« Vous avez déjà appris ce qu'est une droite* (un élève vient en tracer une au tableau), *des points alignés* (un élève vient en placer sur la droite), *des droites perpendiculaires* (en tracer une ou deux passant par des points sur la droite et à l'extérieur de la droite). » |
| **Explicitation** | ➤ **Sous-compétences 1 et 2 : Définir le mot « parallèles » et percevoir, à vue d'œil, que des droites sont parallèles.**<br>« APPRENONS ENSEMBLE » **A**<br>Après lecture de la situation du manuel, expliquer les mots **couloirs** et **plots** et vérifier la compréhension de la situation par les élèves grâce à des questions ou reformulations. Pour cela, l'enseignant pourra soit les questionner, soit leur demander d'expliquer avec leurs propres mots.<br>**C'est l'enseignant qui explique la démarche pour résoudre le problème ; les élèves écoutent.**<br>L'enseignant reprend, pas à pas, les phases décrites dans le « APPRENONS ENSEMBLE » du manuel pour résoudre la situation-problème.<br>Préciser la définition de **droites parallèles** : des droites qui **ne se coupent jamais**, même si on les prolonge. Elles vont **dans la même direction** et **l'écartement** (la distance) entre des droites parallèles est **constant** : il ne change pas.<br>On peut dire que les lignes droites de Lou et Enzo ne sont pas parallèles ou que la ligne d'Enzo n'est pas parallèle à celle de Lou ou que la ligne de Lou n'est pas parallèle à celle d'Enzo.<br>« APPRENONS ENSEMBLE » **B**<br>L'enseignant reprend les étapes de la démarche (compréhension et stratégie) en guidant les élèves par des questions. |
| **Pratique guidée** | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Faire sur l'ardoise l'exercice 1 p. 128 du manuel. |
| **Explicitation** | ➤ **Sous-compétence 3 : Vérifier sur un quadrillage que des droites sont parallèles.**<br>• **Exemple 1 :** *« On a déjà vu que les droites du quadrillage du tableau et de votre cahier sont perpendiculaires. »* L'enseignant repasse à la craie de couleur 2 lignes horizontales ou verticales du tableau et les nomme *a* et *b*.<br>*Demander : « Que peut-on dire des droites a et b ? »* → Elles sont parallèles.<br>*« On le voit à vue d'œil mais qu'est-ce qui le prouve ? »* → L'écart : le nombre de carreaux reste toujours le même.<br>*« Que peut-on dire de toutes les lignes verticales du tableau ? »* → Elles sont toutes parallèles entre elles.<br>• **Exemple 2 :** *« Que peut-on dire de toutes les lignes horizontales ? »* |
| **Pratique guidée** | « **ENTRAÎNONS-NOUS** » : Faire sur l'ardoise l'exercice 2 p. 128 du manuel. |

| | |
|---|---|
| **Explicitation** | ➤ **<u>Sous-compétence 4</u> : Tracer des droites parallèles sur du papier quadrillé et pointé.**<br>• **Exemple 1 :** L'enseignant trace une droite *d* horizontale sur le tableau quadrillé. *« On veut tracer une droite e parallèle à la droite* d. *»*<br>***Présentation de la stratégie***<br>Les droites horizontales du tableau ou du cahier étant parallèles, il suffit de tracer une ligne horizontale du quadrillage avec la règle.<br>• **Exemple 2 :** L'enseignant trace une droite *m* oblique sur le quadrillage, passant par des points d'intersection des carreaux. *« Comment tracer une droite parallèle à cette droite m ? »*<br>***Présentation de la stratégie***<br>– On repère les coins (les points d'intersection) des carreaux par lesquels la droite passe.<br><br>– On calcule la position entre ces 2 points en comptant les carreaux qui les séparent.<br>– On choisit un écart entre les droites de 1, 2 ou 3… carreaux et, à partir d'un coin de carreau, on reproduit le même déplacement pour placer le 2nd point.<br>– On trace la droite passant par ces 2 points. |
| **Pratique guidée** | **« Entraînons-nous » :** Faire sur l'ardoise l'exercice 3 p. 128 du manuel. |
| **Explicitation** | ➤ **<u>Sous-compétence 5</u> : Vérifier sur papier uni que des droites sont parallèles.**<br>• **Exemple 1 :** montrer la figure 1 et demander si les droites *x* et *y* semblent parallèles. Oui.<br>*« Comment le vérifier ? »* → Présenter le calque de réseau de parallèles.<br>***Présentation de la stratégie***<br>– On place le calque de manière à superposer une droite du calque sur la droite *x*.<br>– On vérifie alors la position de la droite *y* : si elle croise l'une des droites du réseau, c'est qu'elle ne va pas dans la même direction, l'écartement entre ces droites n'est pas constant ; il change. Donc elle n'est pas parallèle à *x*. Si *y* se superpose ou ne croise pas une droite du réseau, c'est qu'elle est parallèle à *x*.<br>• **Exemple 2 :** Demander à un élève de venir appliquer la stratégie pour la figure 2. |
| **Pratique guidée** | **« Entraînons-nous » :** Faire oralement l'exercice 4 et sur l'ardoise l'exercice 5 p. 128 du manuel. |

| **SÉANCE 2** | **1 heure** |
|---|---|
| **Exercice écrit**<br>*5 min* | Correction des exercices faits la veille. |
| **Calcul mental**<br>*15 min* | 1. Même compétence que la veille.<br>2. Réactivation de la compétence : « Décomposer une fraction décimale ». L'enseignant(e) propose plusieurs fractions décimales à décomposer pour rappeler la stratégie. |
| **Explicitation**<br>*5 min* | **Rappel de l'explicitation de la séance 1**<br>Rappeler ce que sont des droites parallèles puis, à partir de quelques exemples au tableau, rappeler les différentes stratégies pour identifier des droites parallèles. |
| **Pratique autonome**<br>*30 min* | **« Je travaille seul(e) »**<br>– *Sous-compétences 1, 2 et 3 :* Exercice 6<br>– *Sous-compétences 2 et 5 :* Exercice 7<br>– *Sous-compétence 4 :* Exercices 9 et 10<br>**Différenciation :** Repérer les élèves en difficulté dans ces exercices. Les aider à faire ces exercices. L'enseignant questionne et aide les élèves à s'approprier la stratégie précédemment présentée. On peut également leur proposer de refaire par écrit des exercices de « Entraînons-nous ».<br>Les élèves qui n'ont pas de difficulté font, seuls, l'exercice 8 et, en binômes, les exercices 11 et 12 de « Je vais plus loin ». Les exercices sont corrigés pendant la séance. |
| **Objectivation**<br>*5 min* | **« J'apprends / J'ai compris »**<br>– Demander : *« Qu'avez-vous appris ? »*<br>– Lire et commenter les rubriques « J'apprends » et « J'ai compris » du manuel p. 129. |
| **Évaluations** | • **Formative :** Pour la semaine suivante, faire apprendre la rubrique « J'apprends », lire la rubrique « J'ai compris » et faire l'exercice 5 de *« J'évalue mes connaissances »* p. 156 du manuel.<br>• **Sommative (bilan périodique) :** exercices 50.1 et 50.2 p. 219 du guide pédagogique. |
| **Réactivation** | Pendant les semaines et les mois qui suivent, à chaque réactivation, revoir la leçon et faire un exercice du **Cahier d'exercices** (voir la planification de réactivation des compétences dans le guide pédagogique p. 11). |

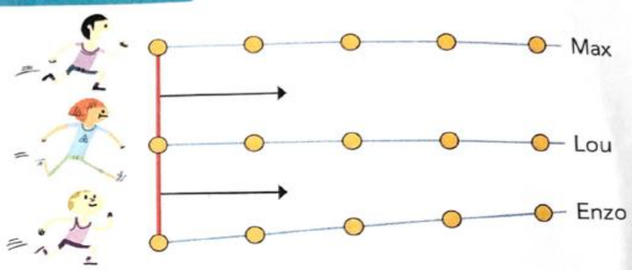
## 4 Relation de parallélisme - Extrait du Lé (pp. 128-129)

# 50 Reconnaître des droites parallèles

**Sous-compétences 1 et 2** : Définir le mot « parallèles » et percevoir, à vue d'œil, que des droites sont parallèles.
**Sous-compétence 3** : Vérifier sur un quadrillage que des droites sont parallèles.
**Sous-compétence 4** : Tracer des droites parallèles sur du papier quadrillé et pointé.
**Sous-compétence 5** : Vérifier sur papier uni que des droites sont parallèles.

### Apprenons ensemble

**A** Dans la cour de l'école, Max, Lou et Enzo alignent des plots pour préparer les deux couloirs de la course de 40 m.
La maîtresse dit à Enzo :
« Tu vas avoir un problème ! »
Quel est ce problème ?




*Est-ce un problème d'alignement ?* → À vue d'œil, les plots d'Enzo sont bien alignés.

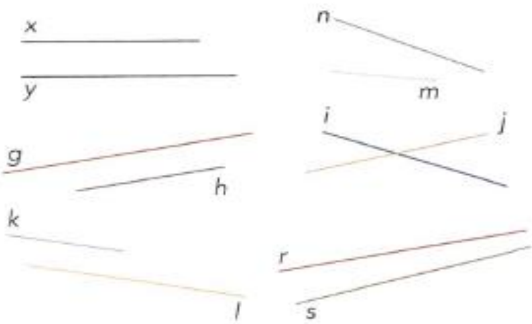
*Est-ce un problème de largeur de couloir ?* → Oui. La largeur du couloir diminue. Enzo rapproche de plus en plus ses plots de ceux de Lou. La ligne de plots d'Enzo va finir par couper la ligne de Lou.

**Les lignes de plots pour faire les couloirs ne doivent pas se couper. Elles doivent être parallèles.**

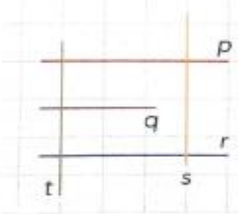
**B** Les lignes de plots de Max et de Lou sont-elles parallèles ?

### Entraînons-nous

**1** Dans chaque figure, **indique** si les droites sont parallèles.
Les droites *x* et *y* sont parallèles ou la droite *x* est parallèle à la droite *y*.

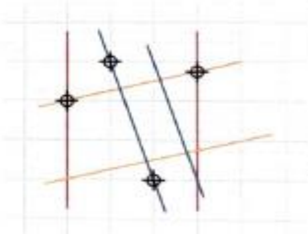



**2** **Réponds** aux questions par **oui** ou **non**.




a. *p* est-elle parallèle à *q* ?
b. *r* et *t* sont-elles parallèles ?
c. *p* est-elle parallèle à *r* ?
d. *p*, *q* et *r* sont-elles parallèles ?
e. *t* est-elle parallèle à *s* ?
f. *p* est-elle parallèle à *t* ?

**3** **Recopie** ces droites sur ton cahier. Les droites de la même couleur sont parallèles.

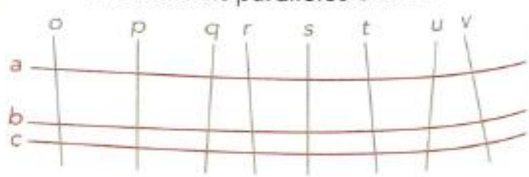


*Prends comme repère un coin de carreau ✦, puis vérifie l'écart entre 2 droites de la même couleur en comptant les carreaux.*

**4** **Trouve** quelles droites sont parallèles à la droite *x*.


*Pour t'aider, tu peux utiliser un calque du réseau de parallèles.*

**5** Quelles droites sont parallèles entre elles ?

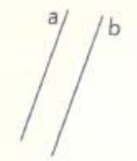



128

Espace et géométrie

**J'apprends**

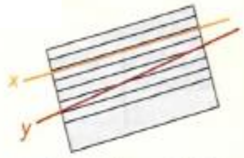
Des droites **parallèles** sont des droites qui ne se coupent jamais.
Exemple : La droite *a* est parallèle à la droite *b*.
Les droites *a* et *b* sont parallèles.




**J'ai compris**

• Pour vérifier ou tracer des droites parallèles, je peux utiliser un calque de réseau de parallèles.

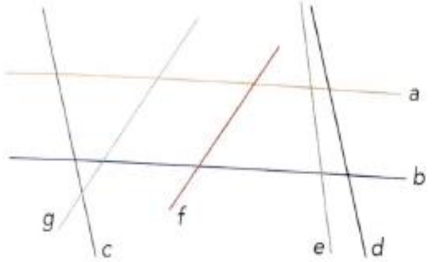
• Pour vérifier si la droite *x* est parallèle à la droite *y*, on superpose le calque sur *x* ; *y* coupe une droite du réseau : elle n'est pas parallèle à *x*.




un réseau de parallèles

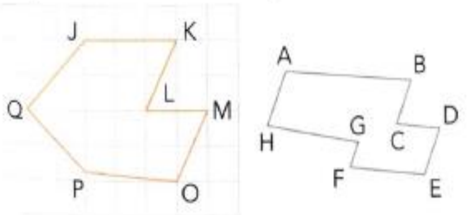
## Je travaille seul(e)

**6** • a. **Écris** les noms des droites qui, à vue d'œil, te semblent parallèles.

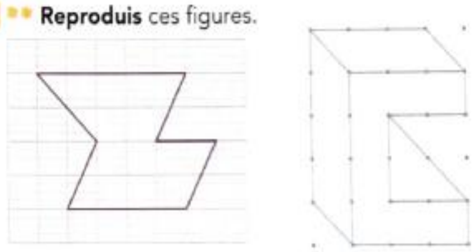



b. **Utilise** le réseau de parallèles pour vérifier tes réponses.

**7** • Quels sont les côtés parallèles de ces figures ? Tu peux utiliser le réseau de parallèles.




**8** •• **Reproduis** ces figures.



**9** • Sur une feuille quadrillée, **construis** cette figure.

a. **Trace** 2 droites parallèles *x* et *y*.

b. **Trace** 2 droites parallèles *m* et *n* qui coupent les droites *x* et *y* aux points F, G, H et I.

c. Que peux-tu dire de la figure FGHI ?

**10** • Sur une feuille quadrillée, **construis** cette figure.

a. **Trace** 2 droites parallèles *x* et *y*.

b. **Trace** 2 droites parallèles *o* et *p* perpendiculaires à *x* et *y* et qui coupent les droites *x* et *y* aux points J, K, L et M.

c. Que peux-tu dire de la figure JKLM ?

## Je vais plus loin

**11** •• Max, Enzo et Lou ont placé des plots pour délimiter 2 couloirs parallèles de 40 m de long. Ils ont placé un plot sur chaque ligne de départ et d'arrivée et ils ont placé un plot tous les 5 m.

a. Combien de plots chaque élève a-t-il placés ?

b. Combien de plots ont-ils placés en tout ?

**12** ••• **À la manière de Vasarely.**

a. Sur ta feuille de dessin, **trace** un grand cercle.

b. **Trace** des lignes horizontales parallèles de plus en plus espacées. Ces lignes se déforment à l'intérieur du cercle.

c. **Colorie** de la même couleur une ligne sur deux.

129

# ANNEXE 4 : DOCUMENT DE SYNTHESE

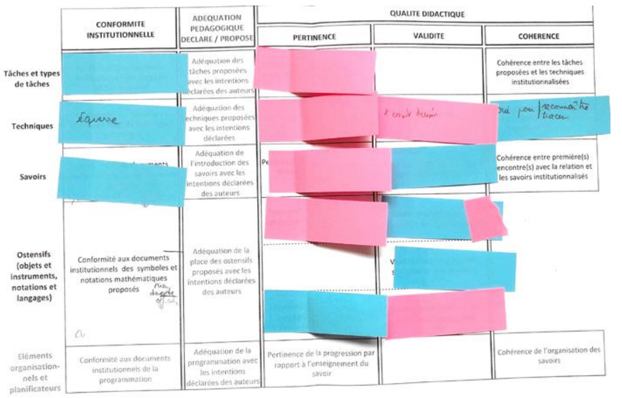
## 1 Grille à renseigner par les participants

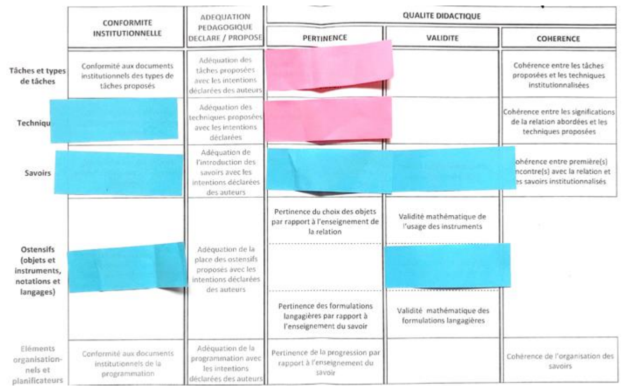
Les cases écrites en gris clair correspondent aux critères et points d'attentions non analysés au cours de l'atelier.

| | CONFORMITE INSTITUTIONNELLE | ADEQUATION PEDAGOGIQUE DECLARE / PROPOSE | QUALITE DIDACTIQUE | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | PERTINENCE | VALIDITE | COHERENCE |
| Tâches et types de tâches | Conformité aux documents institutionnels des types de tâches proposés | Adéquation des tâches proposées avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence des tâches proposées relativement à l'enseignement de la relation | | Cohérence entre les tâches proposées et les techniques institutionnalisées |
| Techniques | Conformité aux documents institutionnels des techniques présentées | Adéquation des techniques proposées avec les intentions déclarées | Pertinence de la présentation des techniques | | Cohérence entre les significations de la relation abordées et les techniques proposées |
| Savoirs | Conformité aux documents institutionnels des significations abordées | Adéquation de l'introduction des savoirs avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence de l'enseignement des différentes significations abordées | Validité mathématique des significations abordées | Cohérence entre première(s) rencontre(s) avec la relation et les savoirs institutionnalisés |
| Ostensifs (objets et instruments, notations et langages) | Conformité aux documents institutionnels des symboles et notations mathématiques proposés | Adéquation de la place des ostensifs proposés avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence du choix des objets par rapport à l'enseignement de la relation | Validité mathématique de l'usage des instruments | |
| | | | | Validité mathématique des symboles et des notations | |
| | | | Pertinence des formulations langagières par rapport à l'enseignement du savoir | Validité mathématique des formulations langagières | |
| Eléments organisation-nels et planificateurs | Conformité aux documents institutionnels de la programmation | Adéquation de la programmation avec les intentions déclarées des auteurs | Pertinence de la progression par rapport à l'enseignement du savoir | | Cohérence de l'organisation des savoirs |

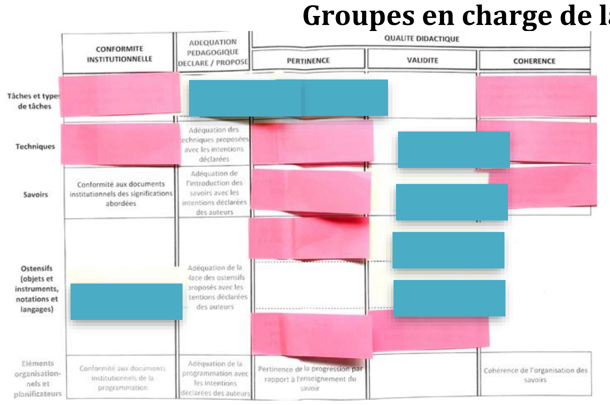
## 2 Synthèse de chaque groupe à l'issue de l'atelier

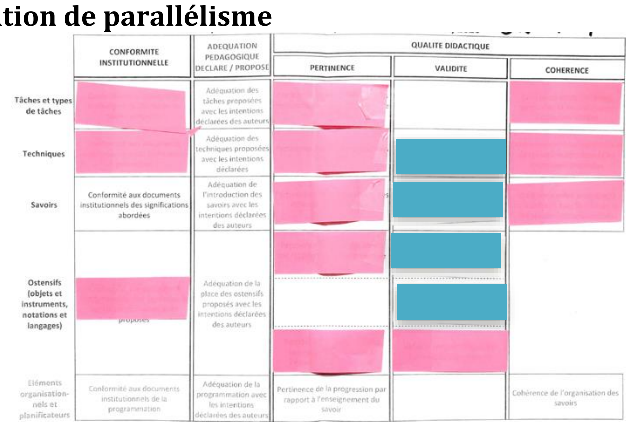
### Groupes en charge de la relation de perpendicularité





### Groupes en charge de la relation de parallélisme





# DES MATHÉMATIQUES SITUÉES ET À L'AIR LIBRE AVEC MATHCITYMAP

**Christian MERCAT**
Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1
ER4148 S2HEP, IREM de Lyon
christian.mercat@univ-lyon1.fr

**Résumé**

La mathématique fournit des outils de résolution de problèmes, en particulier de problèmes de la vie réelle qu'elle permet de modéliser. Il est cependant difficile de rester cohérent avec l'idéal de l'Éducation Mathématique Réaliste (Freudenthal, 1968) de placer le réel avant la mathématique. Afin d'aider les enseignants à trouver des contextes d'enseignement riches et appropriés, l'application MathCityMap permet de construire et mener des rallyes géolocalisés où les étudiants doivent résoudre des tâches situées, en prenant des informations sur place, en mesurant, observant, raisonnant, en modélisant leur environnement. Les réponses sont de divers types (questionnaire à choix multiples, phrase à trous, valeurs numériques exactes ou approchées, position géolocalisée), validées par le système avec un retour immédiat. Le rallye peut être asynchrone et indépendant ou synchrone, en mode compétition.

**Mots-clefs** : Modélisation, Mathématiques situées, Rallye, Résolution de problèmes, Construction de problèmes

**Abstract**

Mathematics provides tools for solving problems, especially real world problems through modeling our environment. It is nevertheless difficult to stick to the Realistic Mathematics Education (Freudenthal) intent of the preeminence of reality over mathematical content. In order to help teachers find appropriate contexts to teach mathematics, the MathCityMap application provides a way to set and run mathematical trails where students have to solve tasks on site, make observations, measurements, reasonings, in a word modeling their environment. The answers are of different types (multiple choice, fill in the blanks, exact or approximate numerical values, geolocalised position) with an instant feedback by the system. Students gain points along the way in a synchronous competition or an asynchronous independent trail.

**Keywords** : Modeling, Embodied Mathematics, Mathematical Trails, Problem Solving, Problem Posing

## I - ENSEIGNER À L'AIR LIBRE

### 1 Mathématiques réalistes et situées

Le mouvement de l'Éducation Mathématique Réaliste (RME en anglais) a été fondé par Hans Freudenthal (Freudenthal, 1968). Il vise, pour enseigner les mathématiques, à partir non pas du curriculum à enseigner mais du réel, des questions que se posent les élèves, lesquelles sont envisagées comme un outil de résolution de ces problèmes. Ce courant est à l'opposé d'un enseignement centré sur le savoir curriculaire qui doit être enseigné et que l'enseignant cherche au mieux à illustrer par des exemples, plus ou moins contextualisés. Dans la classe ordinaire, avec la pression du programme à "tenir" pour un niveau donné, à des élèves qu'on ne voit que quelques heures par semaine sur une unique année scolaire, le mouvement RME est (malheureusement) une utopie, un horizon, difficile à mettre en place. Une contextualisation réaliste des problèmes nécessite en effet un travail interdisciplinaire de fond, et, dans un contexte monodisciplinaire, il est parfois plus concret de choisir une contextualisation interne à la mathématique plutôt que de prétendre réaliste un habillage artificiel plaqué sur un exercice-type simplement enrobé de mots. La tâche de l'élève est sinon trop souvent de repérer la procédure-type derrière le verbiage et d'appliquer une technique standard là où l'enseignant espérait motiver et donner du sens.

Ce mouvement en rencontre un autre, celui des mathématiques situées, géographiquement et corporellement dont le travail de Nathalie Sinclair (De Freitas & Sinclair, 2012) est un bon exemple, en particulier dans l'aspect parfois facilitateur de la technologie. Il s'agit de sortir de l'attitude passive des élèves assis sagement à leur table sans bouger pendant de longues heures, de reconnaître que le corps et l'espace peuvent ancrer la cognition, que la mémoire à long terme peut s'aider de la mémoire épisodique, des gestes et de la situation spatiale du corps.

Dans des écoles de Lyon et sa périphérie, des classes de cycle 1 et cycle 2 font des promenades hebdomadaires autour de leur établissement ; carnet en main, les enfants font des croquis, des plans, comptent, mesurent, interrogent les anciens dans le parc (Sutter, Blandan, Chambovet ou Sisley par exemple), s'intéressent aux commerçants, visitent la mairie, le cimetière, la bibliothèque, lisent les panneaux, s'interrogent sur le monument aux morts, bref, questionnent leur environnement. Leur questionnement constitue le matériau de base qu'ils collectent pour construire, sous la houlette de leur enseignant, le contenu du cours de français, de mathématique, de science. Des expérimentations sont en cours pour transformer ces questions construites par les élèves, situées géographiquement, dont les réponses sont élaborées dans le cours, en un parcours pédestre, d'une manière qui peut se partager avec leurs parents lors de la fête de l'école, ou leurs camarades d'un autre établissement, ou simplement faire mémoire du travail de l'année. L'application MathCityMap offre un cadre logiciel dans lequel ces parcours peuvent se concrétiser, être stockés et être utilisés. Ils peuvent être construits par l'enseignant ou par les élèves, utilisés dans un cadre scolaire, lors de la fête de l'école, la visite d'une classe jumelée, ou bien encore dans un cadre de tourisme scientifique, familial ou entrepreneurial, lors de la visite d'une ville ou d'un site industriel (Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age conference, 2020).

De fait, l'apprentissage hors la classe et la construction par les élèves de problèmes ancrés dans la vie réelle offrent des avantages mais présentent également des risques. Favoriser la créativité et la motivation des élèves sont les premiers bénéfices d'un changement de cadre de travail. Mais cet effet peut s'émousser à mesure que cette pratique redevient conventionnelle, que des contenus standards sont adaptés et évalués ; son aspect ludique et nouveau n'a qu'un temps. L'aspect multidisciplinaire des apprentissages (non seulement scientifique mais également culturel, artistique, historique), plaçant la mathématique au cœur des apprentissages scientifiques, comme langage commun de l'objectivation du réel est sans doute le vecteur le plus important du changement d'attitude vis-à-vis de l'enseignement. Les risques, du point de vue de l'enseignant, sont en particulier la gestion des sorties, ses aspects logistiques, techniques et organisationnels, voire même légaux, en particulier dans la coopération potentielle avec des partenaires hors de l'institution scolaire. La gestion de la liberté perçue par les élèves peut aussi créer des tensions : accepter que le parcours n'est pas seulement un jeu mais qu'il est également relié aux apprentissages, est un contrat didactique à négocier. La création des groupes et leur contrôle s'ajoutent au travail de création du contenu pédagogique, de la préparation et du retour sur l'expérience en salle de classe. Sans être une baguette magique, l'application MathCityMap aide l'enseignant autour de ces différents points de vigilance.

## 2 Les compétences travaillées, son corps pour mesurer

Lors d'un parcours mathématique, l'élève est amené à se situer sur une carte, lire chaque question, en comprendre le sens en situant les éléments de son environnement auxquels il est fait référence, modéliser la situation afin de traduire la question dans le domaine des mathématiques, en s'aidant le cas échéant des indices qui sont donnés, puis élaborer une stratégie pour répondre à la question d'un point de vue théorique, réaliser les mesures ou plus largement les observations nécessaires à donner une réponse concrète à la question, calculer ou tout du moins raisonner, et enfin vérifier si cette réponse est considérée comme correcte. Il peut alors lire des éléments de réponse qui vont préciser ce qui était envisagé par les auteurs.

La compétence mathématique essentielle d'un parcours mathématique est donc résolument la modélisation, mais il est clair que suivant le sujet de la question, des compétences plus fines seront convoquées. Il faudra prendre des informations dans son environnement comme **dénombrer** des objets, **observer** des alignements, des formes, les reconnaître et les modéliser par des formes simples, **lire** et comprendre un texte, des horaires, des prix, des options ; cependant le mode principal de recueil d'information est **mesurer**. Les mesures peuvent concerner un grand nombre de grandeurs mais principalement des durées, des angles et surtout des longueurs pour accéder par le **calcul** à d'autres grandeurs composées comme l'aire, le volume, la contenance, la masse, la pente, la vitesse, le débit, la densité, des probabilités…

Mesurer n'est pas une mince affaire. En se concentrant sur la longueur, les élèves apprennent qu'on ne mesure pas avec le même instrument ni le même protocole, une distance de quelques millimètres, quelques centimètres, quelques décimètres, quelques mètres ou quelques décamètres, et que le raisonnement nous permet d'estimer une grandeur inaccessible à la mesure directe. Ainsi, on n'apprend pas à mesurer une seule fois, mais à étalonner, pour chaque gamme d'amplitude, un protocole adapté.

À l'université Claude Bernard Lyon 1, nous formons des étudiants, pour la plupart futurs enseignants, mais également futurs ingénieurs, aux rallyes mathématiques (Mercat & Berger, 2020). Dans nos formations, nous passons habituellement plusieurs heures préparatoires à permettre aux participants d'étalonner leur propre corps comme un instrument de mesure, de devenir un *bématiste* capable de se repérer finement en comptant ses doigts ou ses pas, comme un arpenteur grec ou une fourmi (Steck et al., 2009)!

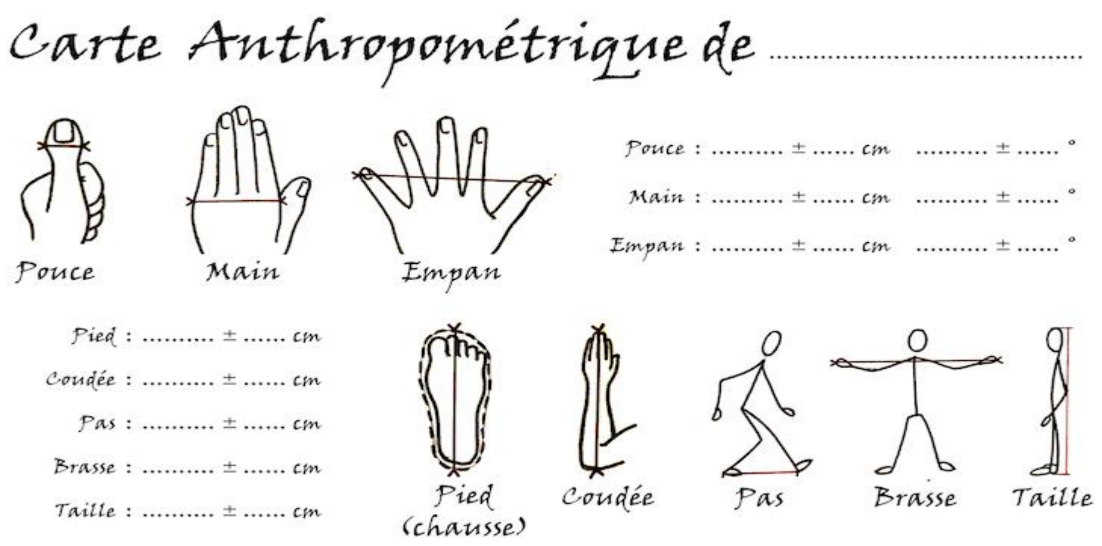



*Figure 1. Carte anthropométrique de bématiste renseignée par nos étudiants (Mercat & Berger, 2020)*

Pour étalonner la largeur de son pouce, on ne mesure pas son pouce mais on en déduit une estimation en l'utilisant pour mesurer plusieurs distances de quelques décimètres de tailles connues. On établit ainsi, non seulement une moyenne de cette mesure mais également sa dispersion. Ce faisant, on construit le fait qu'une mesure n'est pas un nombre mais une distribution, qu'on modélise le plus souvent par une loi normale, avec une moyenne et un écart-type. Des outils plus normés comme une règle graduée donnent souvent l'illusion d'une mesure précise alors que le protocole, comme le choix de l'endroit où la mesure est effectuée sur un objet, peut avoir une incidence importante sur le résultat. Au moins, quand on utilise son corps pour mesurer, on sait que la mesure est imprécise. Cette question de l'éducation à la mesure a été abordée dans un autre article (Mercat & Berger, 2020). Nous verrons que cette dispersion est prise en charge dans le dispositif MathCityMap.

Ces compétences sont d'autant plus apparentes dans la deuxième phase de la formation où les étudiants créent leurs propres épreuves. Ils sont alors touchés de manière presque systématique par une sous-estimation des erreurs de mesure, celles des participants qui vont résoudre les énigmes, mais avant tout les leurs, se voyant comme détenteurs de "la" bonne réponse. Malgré une formation théorique à ces aspects, c'est la confrontation aux réactions de leurs collègues, dépités d'échouer à des questions simples, qui les font évoluer sur la question.

## II - CRÉER UN PARCOURS

Cet atelier s'intéresse principalement à former rapidement les enseignants à une première prise en main de l'outil pour construire un rallye et former des étudiants à le faire. Le premier aspect du dispositif est qu'il est composé de deux parties, une application et un site web (Cahyono & Ludwig, 2019). L'**application**, utilisée sur un smartphone ou une tablette, permet d'accéder au parcours, aux questions, aux indices et d'y répondre. Le **portail** internet est la plateforme de création et de gestion des parcours et des épreuves.

### 1 L'application

Disponible pour les machines Android et iOS, l'application MathCityMap se trouve dans les dépôts usuels. L'utilisateur localise un parcours public sur une carte ou l'identifie par un code fourni par l'enseignant *(Fig. 1)*. Il accède au parcours *(Fig. 2)*, aux questions, aux indices et peut entrer ses réponses, qui sont vérifiées par le système, octroyant des points pour les réponses correctes.

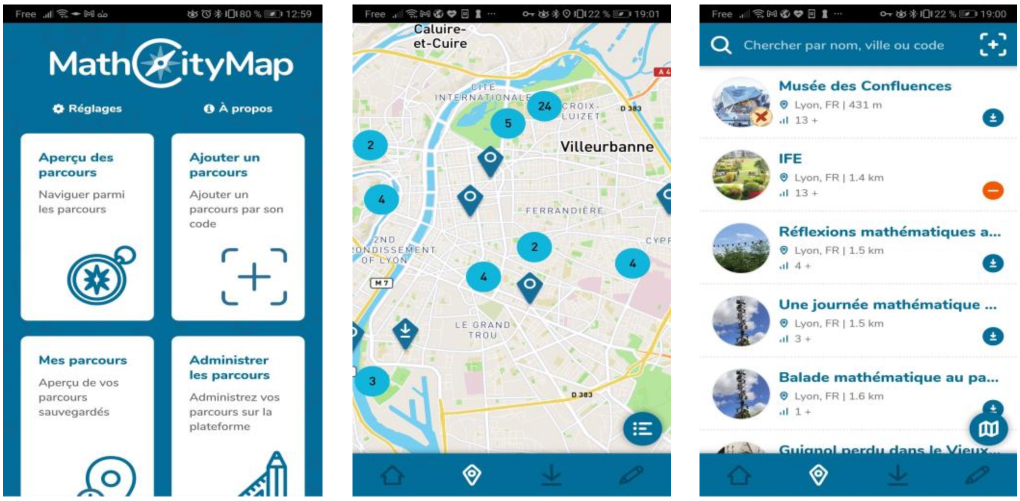



*Figure 1. L'application MathCityMap, l'aperçu des parcours publics et la recherche par code [+].*

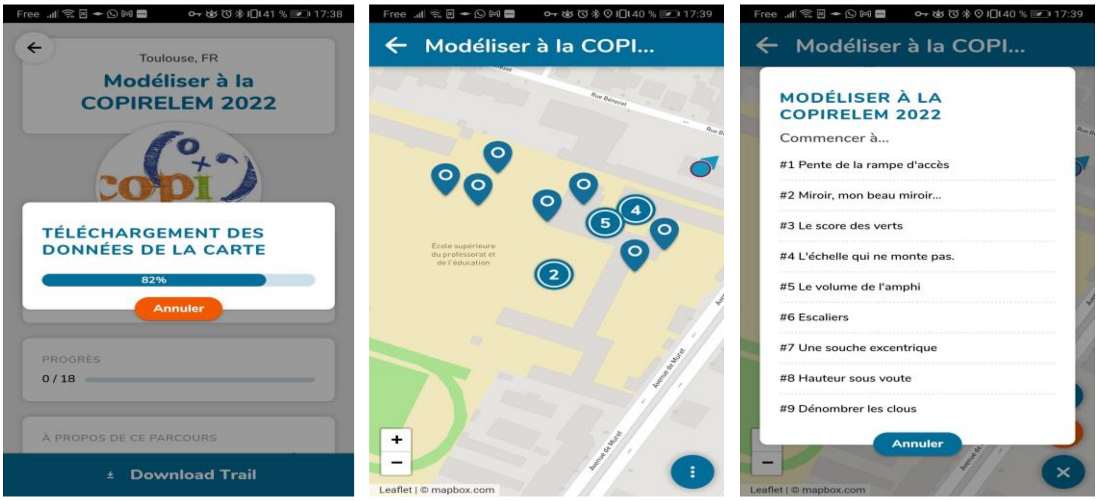



*Figure 2. Téléchargement du parcours 2310631 à Toulouse, vue des épreuves sur une carte ou dans une liste.*

Du point de vue de l'utilisateur, l'application donne différents niveaux de rétroactions, utiles à l'ajustement des stratégies utilisées (Bangert-Drowns et al., 1991) (Hattie & Timperley, 2007) : la position GPS est indiquée ; l'objet sur lequel se porte la tâche est documenté par une photographie ; des indices permettent de s'engager dans la tâche ; la réponse entrée est vérifiée et une rétroaction est donnée quant à sa correction, voire l'écart à la réponse attendue ; une performance est évaluée sous forme de points, permettant de se situer soi-même par rapport à la norme et par rapport aux autres utilisateurs, et finalement, une suggestion de réponse est détaillée pour comprendre ce qui était envisagé par l'auteur de la question *(Fig. 3)*.

Dans le cadre d'un rallye mathématique synchrone, ce qu'on appelle une *classe numérique*, la fonctionnalité de discussion entre l'enseignant et les utilisateurs est une autre forme de rétroaction (Barlovits et al., 2021).

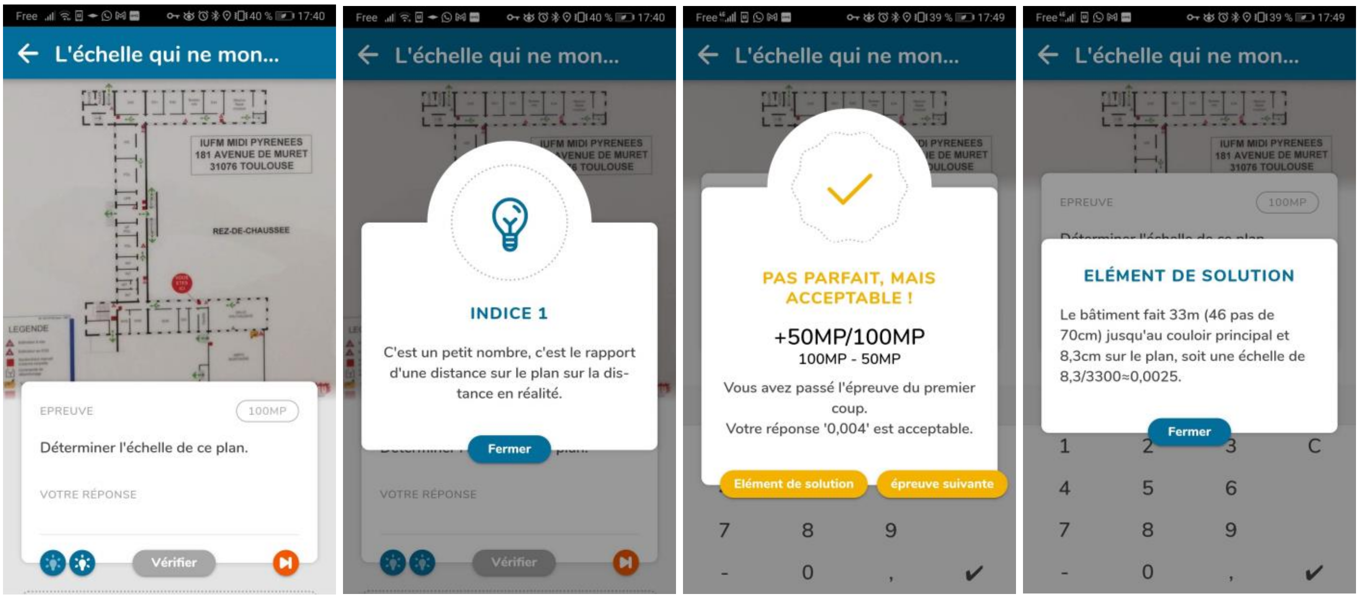



*Figure 3. Une épreuve, un indice, une validation partielle, les éléments de solution.*

## 2 Le portail internet

L'université Goethe de Francfort maintient le site http://mathcitymap.eu sur lequel la communauté MathCityMap travaille. Voici à quoi ressemblent le parcours et l'épreuve ci-dessus sur le portail.

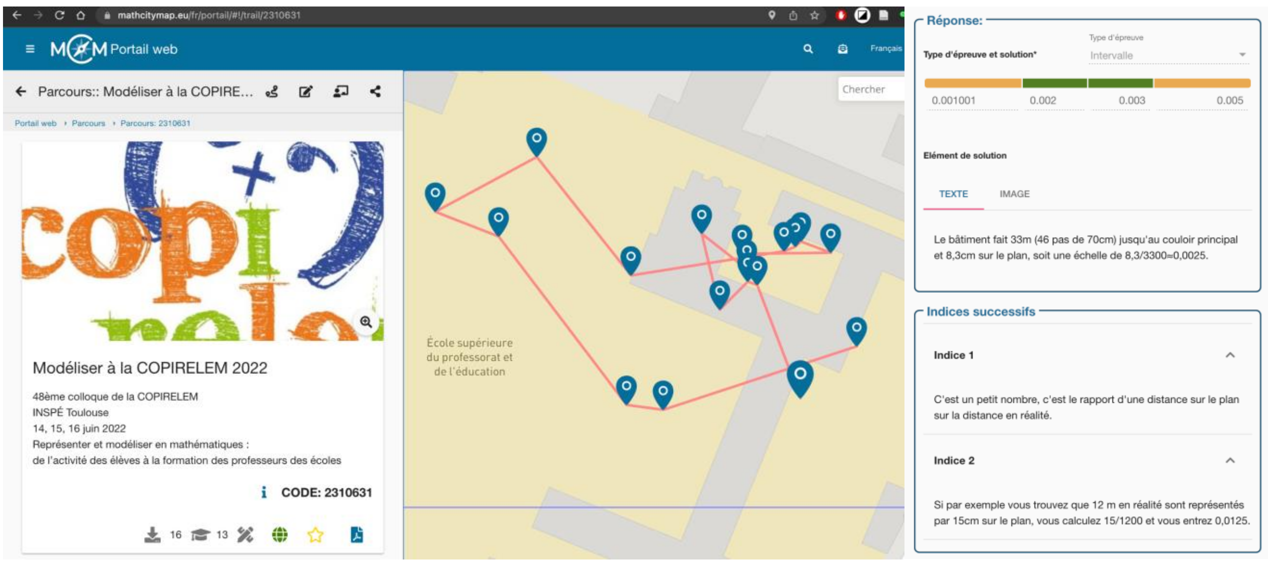



*Figure 4. Un parcours, une épreuve, un indice et les éléments de solution.*

Diverses rubriques renseignent sur le projet. Pour construire des rallyes, il faut tout d'abord créer un compte utilisateur. Un-e utilisat-eur-rice travaille rarement seul-e, iel va participer à des groupes qui vont construire conjointement des épreuves partagées et les rassembler dans des parcours. Cette communauté d'intérêt a un petit aspect réseau social sur ce site : des contacts peuvent se tisser entre les auteurs (tout en respectant le Règlement Général sur la Protection des Données, RGPD), on peut s'abonner à leurs productions afin de s'en inspirer en les dupliquant dans un autre contexte, gagner des badges qui favorisent l'appropriation des diverses fonctionnalités de la plateforme…

## 3 Construire une épreuve

Sur le portail, on peut visualiser, dupliquer et construire des épreuves en cliquant sur Épreuves. Vous pouvez créer une épreuve avec le bouton + à droite sur la deuxième ligne du bandeau de gauche.

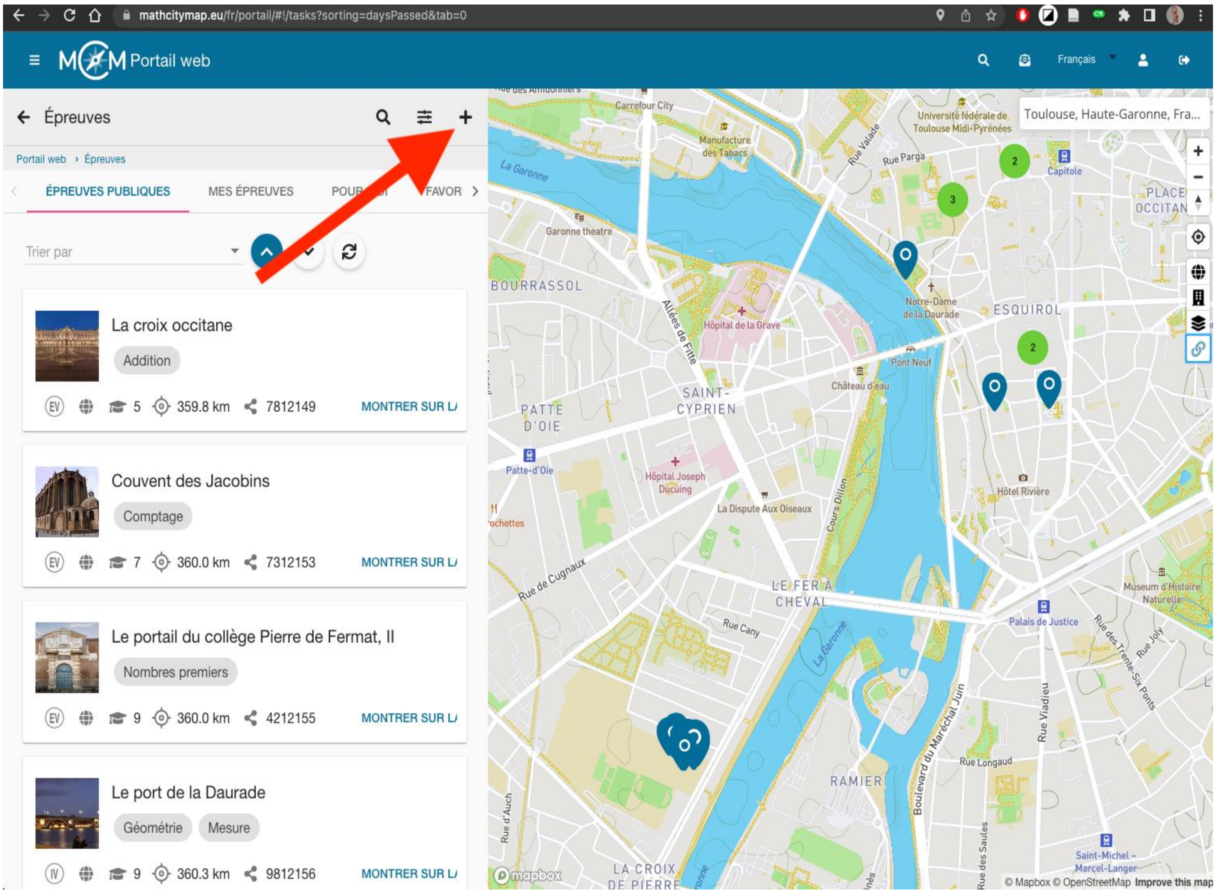



*Figure 5. Les épreuves, publiques ou privées, l'outil de création [+].*

Vous avez le choix d'utiliser l'assistant d'épreuve en cliquant sur l'icône représentant une petite "baguette magique". Vous pourrez ainsi fabriquer rapidement des questions standards impliquant d'estimer : la pente d'une rambarde, le nombre de briques sur un mur, de pavés sur une place, la masse ou le volume d'un objet standard (pierre parallélépipédique, colonne cylindrique, pièce d'eau), le nombre de façons de monter un escalier ou de ranger des vélos, la vitesse d'un escalier mécanique. Vous devez aussi passer par cet assistant pour mettre au point les tâches géolocalisées. La réponse est alors une ou plusieurs positions. Il faut bien entendu que le ciel soit bien visible pour que le signal de géolocalisation soit clair, on ne peut pas faire ce genre de question si la position attendue est dans un bâtiment. Les types de questions proposés sont : un segment de longueur donnée ("Appuyez sur le bouton A, marchez 10m, appuyez sur le bouton B et validez") à proposer en début de formation, pour outiller les élèves et évaluer la précision de leur estimation ; un segment orienté ("10 m au Nord"); un triangle équilatéral de côté donné; un carré de côté donné; le milieu de deux points; le centre du cercle circonscrit à un triangle; deux points sur une fonction affine dans un repère donné.

### 3.1 *Les tâches*

Toutes les épreuves requièrent un titre, une illustration, un texte décrivant l'épreuve et une géolocalisation (en cliquant sur la carte ou lue dans les données EXIF de l'image). Toutes contiennent également une réponse, des éléments de correction et au moins deux indices. Le type de réponse et la solution dépendent du type de tâche. Ces types sont : valeur exacte, choix multiple, phrase à trous, n-uplet de valeurs exactes (pour une date JJ/MM/AAAA par exemple), ensemble non ordonné, fraction et la tâche reine de MathCityMap, la valeur approchée. Elle est associée à une mesure, typiquement modélisée par une distribution suivant la loi normale avec une valeur moyenne et un écart-type. Pour modéliser ce type de réponse, l'application demande 4 nombres dans l'ordre croissant, représentant l'intervalle acceptable avec des limites hautes et basses en dehors duquel la réponse est considérée comme fausse, et un intervalle plus étroit où la réponse est considérée comme correcte. Une réponse précise rapporte 100 points et une réponse imprécise décroit linéairement jusqu'à 10 points aux extrémités. L'évaluation de l'amplitude de ces intervalles est une question centrale dans la formation.

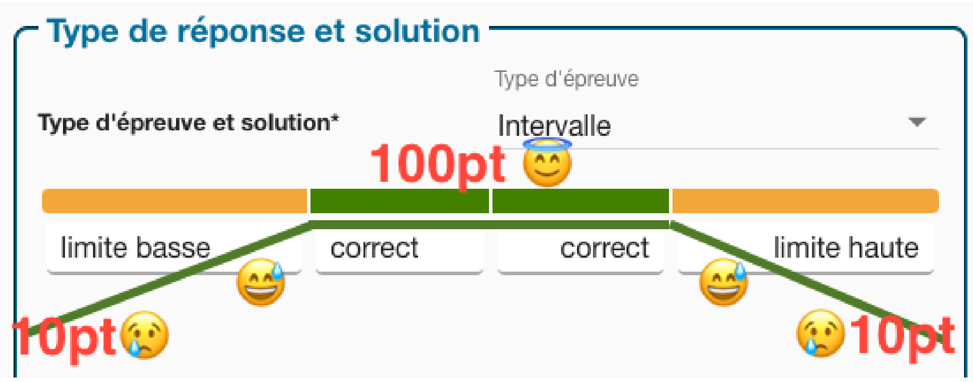



*Figure 6. Le type d'épreuve Intervalle requiert 4 nombres.*

Un dernier type d'épreuve est le n-uplet d'intervalles, typiquement pour un triplet de dimensions.

Les éléments de correction doivent être soignés et spécifier une stratégie utilisée, les calculs envisagés, les mesures effectuées, les applications numériques intermédiaires et le résultat final.

L'épreuve est accompagnée de méta-données, un champ "à propos" qui permet de détailler des aspects du lieu, de l'objet, des anecdotes annexes, le niveau scolaire minimal (1-5: élémentaire, 6-9: collège, 10-12: lycée, 13: université), l'équipement éventuel et des mots-clefs thématiques pour faciliter la recherche.

Quand une tâche est considérée terminée, elle peut être proposée à la publication. Cette publication se base sur une évaluation par des rapporteurs qui valident ou non le respect de certains critères : la résolution de l'épreuve doit être

- univoque : le lieu, l'objet et le résultat attendu sont non ambigus (image, description, unité de mesure, géolocalisation) ;
- située : la résolution de l'épreuve nécessite de se rendre sur place ;
- active : des observations, des mesures, un calcul ou un raisonnement sont nécessaires ;
- étayée : au moins deux indices permettent de se lancer dans la résolution sans dévoiler la réponse ;
- au format adapté : valeur exacte / ensemble / phrase à trous / n-uplet / GPS / intervalle avec marges d'erreur vraisemblables correspondant aux différents modèles ;
- documentée : les éléments de solution indiquent le modèle choisi, les mesures et les calculs ;
- ouverte : plusieurs procédures sont envisagées (optionnel).

Cette phase de discussion avec les rapporteurs est considérée comme un élément de développement professionnel des enseignants : une critique constructive permet de prendre conscience des problématiques liées à l'enseignement des mathématiques en plein air et en particulier de la modélisation.

### 3.2 *Le parcours*

Sur le portail, la page des parcours permet de créer et d'administrer les parcours. Pour remplir les critères techniques, ils doivent avoir un titre, une illustration, une description, une position GPS et une liste d'épreuves pas trop éloignées les unes des autres. On ajoute et on ordonne les épreuves à son gré. Il est important de faire tester son parcours par un-e collègue, cela permet de lever les implicites et débusquer les erreurs ou les estimations trop étroites (DGESCO, 2010). Il est utile de partager les épreuves et le parcours afin de pouvoir les gérer en groupe mais il est primordial de ne pas céder à la tentation du biais de validation et de bien effectuer les mesures de manière complètement indépendante.

Une fois le parcours construit et testé, on peut distribuer son code aux élèves, c'est celui qu'ils doivent indiquer dans l'application pour un parcours asynchrone en autonomie. On peut également en demander la publication, ce qui demande la publication de toutes les tâches impliquées mais ce n'est pas nécessaire pour une utilisation restreinte ou une utilisation papier-crayon.

Le parcours peut en effet être donné tel quel, au travers de son code, aux participants qui peuvent le faire de manière autonome et on peut aussi en tirer une version papier qui permet, du point de vue de l'enseignant, de collecter les calculs intermédiaires et les raisonnements, mais où on perd, du point de vue de l'utilisateur, la rétroaction immédiate sur une tentative et les indices contextuels.

Cependant, l'utilisation la plus motivante est de faire le parcours par équipe de manière synchrone en programmant une *classe numérique*.

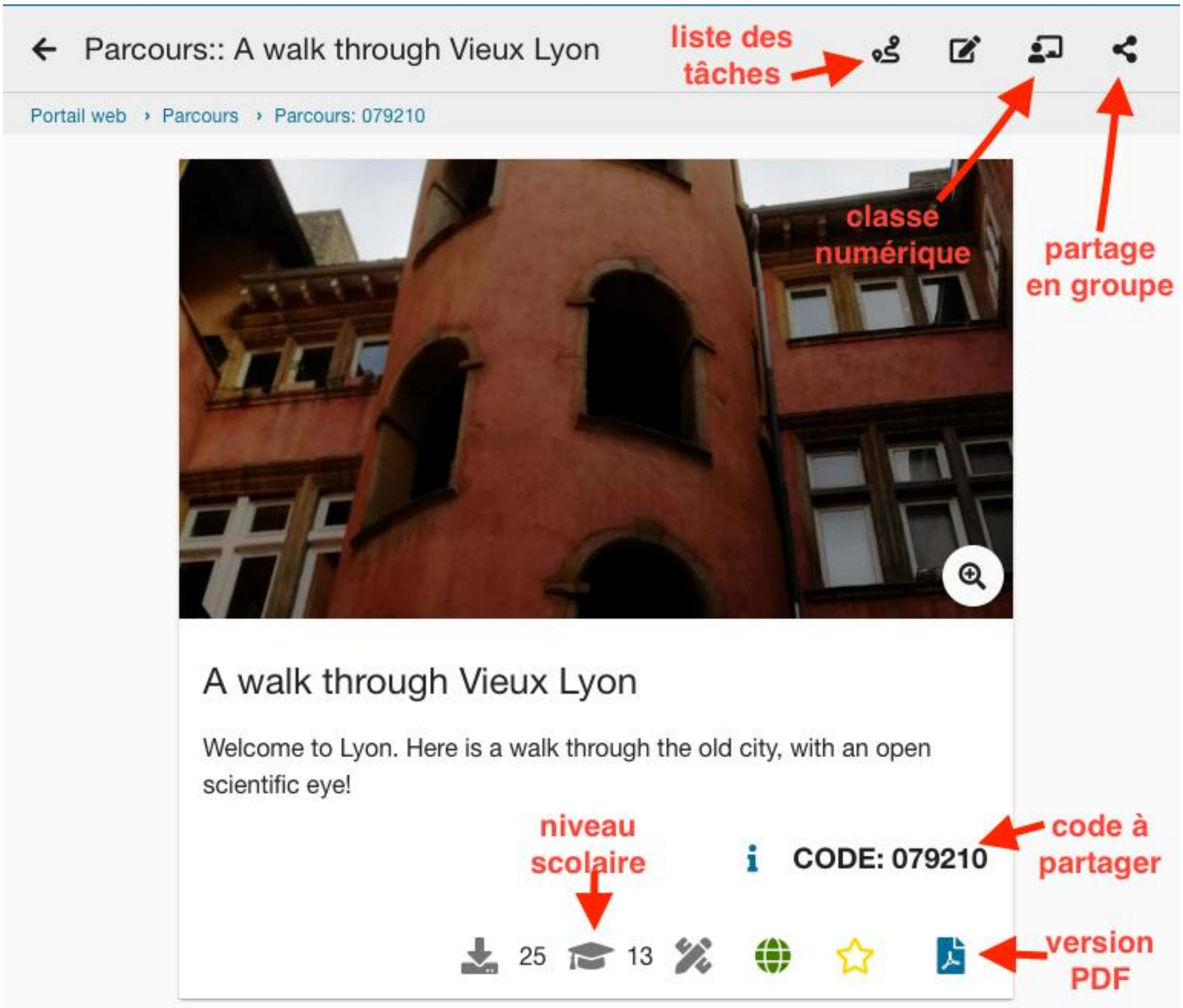



*Figure 7. Le parcours 079210, son illustration, son titre, sa description, son code, le nombre d'utilisation, le niveau scolaire conseillé, la liste des équipements nécessaires, son statut public/privé, s'il est dans mes favoris, l'accès aux PDF pour une utilisation papier-crayon. En haut, les outils pour éditer la liste des tâches, les classes numériques et partager avec un groupe.*

### 3.3 *Le jour J, la classe numérique*

La manière la plus intéressante de gérer la mise en œuvre d'un parcours avec l'application est d'utiliser non pas le code du parcours en autonomie mais plutôt de créer une classe numérique, avec un titre, un texte d'introduction et un texte de conclusion mais surtout un début et une fin pour une utilisation synchrone en mode compétition. On y gagne de nombreux avantages : en tant qu'enseignant, on peut converser avec les participants et les localiser. On peut aussi inspecter les tentatives, les réponses fausses, ce qui permet de revenir en classe sur ce qui a été mal compris et, plus humblement, de revoir certaines questions qui "ne fonctionnent pas". C'est aussi un moyen d'animer une activité grand public avec les parents lors d'une fête de l'école, avec possibilité de classements et prix. Pour ne pas mettre trop en avant la compétition, chaque équipe est informée seulement du score des deux autres équipes adjacentes, immédiatement au-dessus et en-dessous au niveau du score.

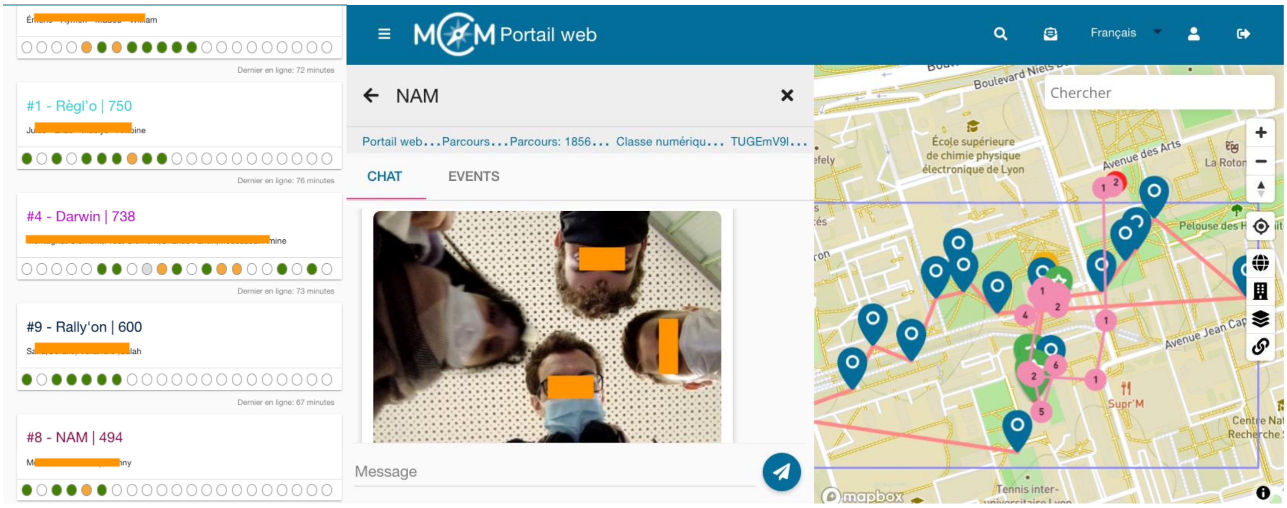



*Figure 8. Quelques équipes participantes à une classe numérique, les tâches qu'elles ont abordées, résolues ou abandonnées, la conversation avec l'équipe NAM et leur trajet en temps réel.*

La fonctionnalité de discussion instantanée, où les équipes peuvent envoyer une image, un enregistrement audio ou un texte, permet de débloquer des situations, de remotiver les troupes et de faire passer des consignes générales. La vue permettant de détailler le parcours effectivement fait par une équipe est intéressante à analyser. On y retrouve tous les détails qui permettent de mieux comprendre ce qui pose un problème, malgré le peu d'expressivité de l'outil (on n'a pas accès aux brouillons, les réponses sont fermées).

## III - CONCLUSION

L'outil MathCityMap n'aplanit pas tous les écueils que doit contourner un enseignant désirant enseigner par la modélisation et en faisant classe à l'extérieur ; cependant il facilite grandement la création des questions, la gestion et la passation d'un rallye. S'approprier l'outil est en soi un élément de formation continue (Taranto et al., 2021), en particulier quand il s'inscrit dans la participation à une communauté, partageant des ressources communes, de formation (un MOOC fini par une centaine d'enseignants), d'expertise et de productions. L'effet le plus spectaculaire reste encore la création de questions par les élèves eux-mêmes, s'appropriant la mathématique comme un outil les autorisant à s'emparer de questions dont ils ne connaissent pas la réponse et comprendre le monde autour d'eux.

## IV - BIBLIOGRAPHIE


Bangert-Drowns, R. L., Kulik, C.-L. C., Kulik, J. A., & Morgan, M. (1991). The Instructional Effect of Feedback in Test-Like Events. *Review of Educational Research*, *61*(2), 213-238. https://doi.org/10.3102/00346543061002213

Barlovits, S., Jablonski, S., Milicic, G., & Ludwig, M. (2021). *DISTANCE LEARNING IN MATHEMATICS EDUCATION : SYNCHRONOUS AND ASYNCHRONOUS LEARNING WITH MATHCITYMAP@HOME*. 10179-10189. https://doi.org/10.21125/edulearn.2021.2101

Cahyono, A. N., & Ludwig, M. (2019). Teaching and learning mathematics around the city supported by the use of digital technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(1). Scopus. https://doi.org/10.29333/ejmste/99514

De Freitas, E., & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency : Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1-2), 133-152. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9364-8

DGESCO, M. (2010). *Mesures et incertitudes*. 13.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1-2), 3-8. https://doi.org/10.1007/BF00426224

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Mercat, C., & Berger, P. (2020). Man is the Measure of all Things—Math Trails in Lyon. In M. Ludwig (Éd.), *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (1st éd., p. 127-138). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.16

Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age conference, Ludwig, M., Jablonski, S., Caldeira, A., & Moura, A. (2020). *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age*. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0

Steck, K., Wittlinger, M., & Wolf, H. (2009). Estimation of homing distance in desert ants, Cataglyphis fortis, remains unaffected by disturbance of walking behaviour. *Journal of Experimental Biology*, *212*(18), 2893-2901. https://doi.org/10.1242/jeb.030403

Taranto, E., Jablonski, S., Recio, T., Mercat, C., Cunha, E., Lázaro, C., Ludwig, M., & Mammana, M. F. (2021). Professional Development in Mathematics Education—Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics. *Mathematics*, *9*(22), 2975. https://doi.org/10.3390/math9222975

# TEXTES COMMUNICATIONS

# CRÉER DES PROBLÈMES ADDITIFS

**Francine ATHIAS**
Maîtresse de Conférences, INSPE Besançon
ELLIADD
francine.athias@univ-fcomte.fr

**Sophie JOFFREDO LE BRUN**
Maîtresse de Conférences Université Catholique de l'Ouest
CREAD
sjoffred@uco.fr

**Olivier LERBOUR**
Professeur des écoles
Olivier.Lerbour@ac-rennes

**Résumé**
La modélisation mathématique d'un problème est d'une grande complexité, en soi et pour les élèves de l'école primaire ; modéliser s'apprend. Notre étude porte sur les problèmes additifs. Nous faisons l'hypothèse que résoudre des problèmes va de pair avec leur création. Les élèves sont invités à créer des problèmes à partir de situations de la vie de la classe. Cette modélisation prend appui sur les propriétés des relations mathématiques. L'activité consiste alors en une traduction entre représentations. Ces activités de création / résolution font l'objet d'échanges au sein d'une ingénierie coopérative (LéA réseau Armorique Méditerranée), puis de mises en œuvre dans des classes. Nous analyserons ces différentes données dans le cadre de la théorie de l'action conjointe en didactique. Comment l'usage des représentations permet-il la création de problèmes par les élèves ? Les résultats portent sur les transactions entre les élèves et le professeur dans des situations de création / résolution de problèmes.

## I - INTRODUCTION

Les résultats des élèves français aux évaluations nationales sont en dessous de la moyenne des pays de l'Union Européenne et des pays de l'OCDE (TIMMS[1], 2019). Ces résultats sont particulièrement bas dans le domaine "raisonner". La résolution de problèmes constitue un élément-clé de ce domaine.

La résolution de problèmes ne consiste pas en la seule recherche de l'opération à appliquer. La modélisation mathématique est mise en avant pour penser et décrire le réel (Sensevy, Quilio & Mercier, 2015). La modélisation mathématique s'apprend (Blum & Ferri, 2009).

Notre étude porte sur les problèmes additifs. Elle s'appuie sur la recherche Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire[2] (ACE) qui décrit et coordonne les activités mathématiques proposées au cycle 2. La progression ACE est organisée autour de quatre domaines : « Situations, estimation et grandeurs et mesures, calcul mental, et résolution de problèmes ». C'est précisément sur ce dernier domaine que porte notre étude.

Notre communication comporte quatre parties. D'abord, nous présentons le contexte de notre étude. Puis nous exposons brièvement quelques éléments théoriques et méthodologiques. Ensuite, nous montrons le travail de représentation/modélisation dans la classe, avant d'engager une discussion conclusive.

1 https://www.education.gouv.fr/timss-2019-evaluation-internationale-des-eleves-de-cm1-en-mathematiques-et-en-sciences-les-resultats-307818

2 http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=457

# II - CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Pour préciser le contexte de notre étude, nous présentons rapidement le contexte de la recherche et le contexte institutionnel, une structure des problèmes additifs et la notion de représentation pour enfin présenter nos choix dans la création de problèmes.

## 1 Contexte de la recherche

Cette communication s'appuie sur les travaux de notre LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Ifé/ENS Lyon) réseau Armorique-Méditerranée[3] regroupant aujourd'hui 15 professeurs, 5 enseignants chercheurs et un ingénieur de recherche. Notre recherche porte sur la conception des systèmes hypermédias par le collectif comme instrument pour donner à voir et à comprendre certaines pratiques d'enseignement-apprentissage à partir notamment de séquences/séances de création et de résolutions de problèmes aux cycles 2 et 3. Nous présentons dans cette communication le début de cette recherche. Ce LéA s'organise en ingénierie coopérative (Sensevy, 2015 ; Joffredo-Le Brun et al, 2018 ; Sensevy & Bloor, 2020) qui se définit comme une action conjointe entre professeurs et chercheurs autour d'un projet commun de conception et d'analyse de séquences d'enseignement dans un processus itératif avec mise en œuvre de séances, analyse et remise en œuvre.

## 2 Contexte institutionnel

Nous reprenons quelques éléments institutionnels permettant de comprendre le cadre de notre présentation. Ainsi, d'après le BO de 2020 (MEN, 2020), la résolution de problèmes au cycle 2 en mathématiques met en jeu la mémorisation, l'utilisation d'outils de référence, des essais, des propositions, des argumentations, des vérifications. Il est spécifié dans la partie « Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » que le cycle 2 doit conduire à la résolution de problèmes issus de situations de la vie quotidienne, ou adaptés de jeux, portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée, etc., et conduisant à utiliser les quatre opérations. Le document d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 3[4] intitulé « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » propose, quant à lui, un paragraphe sur la création de problèmes intitulé « Doit-on faire créer des problèmes aux élèves ? » dont nous présentons ci-dessous un extrait :

> *« La création de problèmes est une tâche particulièrement importante et utile pour les élèves. En les invitant à créer des problèmes, on les encourage à porter un autre regard sur les problèmes, à avoir une intention quand ils écrivent l'histoire de leur problème et quand ils posent la question du problème créé » (p. 106).*

La création de problèmes n'apparaît donc pas dans les textes officiels au cycle 2. Cependant, nous faisons l'hypothèse que proposer cette activité aux élèves dès le CP va leur permettre de comprendre la structure sémantique des problèmes.

## 3 La résolution et la création de problèmes du point de vue de la recherche

Comme nous venons de le voir, les programmes intègrent la création de problèmes (Singer *et al.*, 2015 ; Felmer *et al.*, 2016) qui sera centrale dans les analyses produites dans cet article. Ainsi, celle-ci est au centre de cet article. En effet, de nombreuses recherches montrent (notamment, Cai et Cifarelli, 2005 ; English, 1998 ; Silver, 1994, 1997 ; Singer & Moscovici, 2008) que la création de problèmes contribuerait à une meilleure compréhension des concepts mathématiques et au développement de la pensée mathématique. La création de problèmes aurait aussi des effets sur la résolution des problèmes par les élèves (Koichu, 2020 ; Kilpatrick, 1987).

---

[3] http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-ecoles-armorique-mediterranee

[4] https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

## 4 Structure des problèmes additifs

Les problèmes du champ additif ont fait l'objet de différentes classifications (Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Vergnaud, 1986), à partir de leur structure sémantique. Ces classifications permettent notamment de rendre compte des relations, statiques ou non, entre les quantités. Vergnaud (1986) a proposé une représentation schématique des problèmes, en particulier de trois types de problèmes : composition, comparaison ou transformation de mesures. L'habileté des élèves à résoudre des problèmes ne dépend pas que de la catégorie à laquelle les problèmes font référence, elle peut dépendre des données et de leur place (Vergnaud, 1986). Par exemple, dans un problème de transformation négative, Vergnaud (1986) explique la difficulté à le résoudre par le fait que la représentation du problème (□ -7 = 5) et la représentation de la résolution (5 + 7 = □) sont différentes. Autrement dit, les élèves ont du mal à représenter symboliquement le problème.

## 5 Représentation

Brousseau (2004) explique qu'une représentation met en présence deux univers : l'un contient la chose représentée et l'autre contient la chose représentante, qui est parfois appelée « représentation ». De plus une certaine relation relie ces deux choses, qui est également parfois nommée « représentation ». Dans le même temps, Brousseau (Ibid.) précise que la relation est commutative dans les deux univers. Ainsi donc, résoudre un problème dans l'un des univers peut conduire à le résoudre dans l'autre univers :

> *« …une représentation consiste donc en l'utilisation d'un univers représentant, pour y accomplir une action* a priori *impossible dans un univers représenté, afin de pouvoir par la suite ramener dans ce dernier le résultat de cette action » (Brousseau, 2004, p. 249).*

Modéliser, c'est traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle rend la réalité calculable. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations. Dans le cadre de la recherche ACE, les représentations et en particulier leur traduction jouent un rôle primordial. L'écriture mathématique devient un modèle commun à différentes représentations, situations, types de problèmes mathématiques. Nous ne développons pas ici les choix opérés par les concepteurs de la progression (Mercier & Quilio, 2018 ; Vilette et al., 2017). Nous allons maintenant donner à voir deux représentations proposées dans cette progression.

### *5.1 La ligne numérique*

La première représentation est la ligne numérique (voir la Figure 1) qui s'appuie sur l'idée de *number line* (Davydov, 1975 ; Elia, 2011). Cette ligne numérique est une demi-droite de longueur quelconque qui connaît une évolution tout au long de la progression. Tout d'abord, des graduations de un en un y sont représentées désignant des entiers positifs avec comme point d'origine le 0. Chaque graduation est séparée par un segment de même longueur. Une collection d'objets (doigts, cubes, constellation) est représentée sur cette graduée par un demi-arc de cercle incluant des intervalles, des unités. Ce demi-arc (ou « pont ») est alors désigné par un nombre, cardinal de la collection représentée. Puis, cette demi-droite évolue, les graduations un à un disparaissent pour laisser des graduations de 5 en 5. Pour terminer, toutes les graduations sont supprimées. Les élèves représentent sur cette ligne numérique des nombres par des longueurs (Mercier & Quilio, 2018 ; Vilette et al., 2017, Joffredo-Le Brun, 2020).

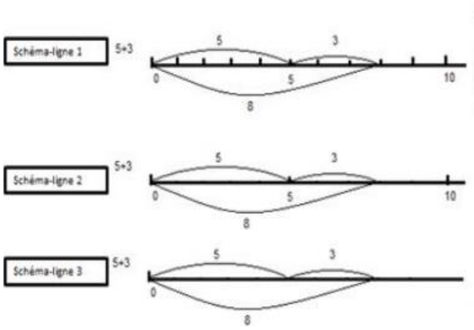


*Figure 1. Évolution de la ligne graduée (Joffredo Le Brun, 2016, p. 74)*

### 5.2 Le diagramme- boîte

Le diagramme-boîte (Fischer et al., 2019) donne à voir la réunion de deux nombres. Les deux termes de l'addition, le 7 et le 6, sont notés dans les deux cases inférieures, la somme est écrite dans la case supérieure (voir la Figure 2). L'organisation spatiale du diagramme-boîte donne donc à voir que le nombre 13 est composé de deux nombres, le 7 et le 6. Dans le même temps, ce diagramme-boîte donne à voir que le 6 est une partie de 13, c'est ce qu'il manque à 7 pour atteindre 13.

<table>
<tr><td colspan="2">13</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td></tr>
</table>

*Figure 2. Le diagramme-boîte*

Ainsi, en appui sur le diagramme-boîte, les élèves peuvent alors écrire différentes écritures mathématiques : 13 = 7 + 6 ; 7 = 13 – 6 ; 6 = 13 – 7.

### 6 Représentation / modélisation

Le travail des représentations vise à développer les liens entre ces différentes représentations pour mieux comprendre les relations mathématiques. Cette compréhension se traduit par ce dont les élèves se rendent capables de faire. Ainsi, décrire l'activité mathématique des élèves, c'est décrire l'usage de ces représentations.

Pour conclure, une représentation peut être utilisée pour modéliser une réalité donnée ou pour produire des relations mathématiques. Ainsi, par exemple, on peut considérer la ligne numérique de deux manières. D'une part, on peut considérer qu'elle modélise une situation de la vie pratique et une question qu'elle pose (nous développerons ci-après). D'autre part, on peut la considérer aussi comme support pour écrire différentes écritures mathématiques ou équations qui modélisent la situation de la vie pratique. Dans cette acception, la représentation et la modélisation s'entrelacent pour donner à voir les relations mathématiques qui modélisent une réalité.

## III - ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

### 1 Éléments théoriques pour l'analyse

Comme nous venons de le dire, le travail des représentations vise à développer les liens entre ces différentes représentations pour mieux comprendre les relations mathématiques. Cette compréhension se manifeste par ce dont les élèves se rendent capables de faire. Pour notre analyse, nous recourons à des notions théoriques développées au sein de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) (Sensevy, 2011). En filiation avec la théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1998), la TACD redéfinit le contrat didactique comme un système de capacités, constitués de savoir-que et de savoir-comment, en tant que système stratégique disponible. Il s'agit donc d'un « déjà-là » (CDpE, 2019), pour lequel nous ne retenons que les éléments issus de l'action conjointe professeurs-élèves. L'activation de ce système stratégique va se faire dans un milieu, défini comme la structure épistémique d'un problème. Les élèves sont confrontés à un état du monde problématique, qui contient certes des saillances, mais qui ne leur sont pas nécessairement visibles à un moment donné. Nous élaborons notre question de recherche comme suit : comment l'usage des représentations permet-il la création de problèmes par les élèves ?

### 2 Éléments méthodologiques

Pour étudier la question de la représentation et de la modélisation en création et résolution de problèmes, nous avons recueilli plusieurs données.

Dans la cadre de cette communication, nous utilisons une vidéo d'une classe du LéA dans laquelle les élèves créent des problèmes additifs tout en utilisant différentes représentations. Cette classe, tout en étant spécifique, rend compte de ce qui se passe au sein des classes du LéA. Elle compte 22 élèves (entre

7 et 8 ans) 7 CP et 15 CE1. Le professeur et les élèves utilisent la progression ACE depuis le début d'année pour les CP. Parmi les quinze CE1, seuls quatre ont fait ACE en CP. Autrement dit, dix-huit élèves sur vingt-deux débutent la progression ACE cette année.

Depuis le début de l'année scolaire, des rituels ont été mis en place dans cette classe sous forme de problèmes. Par la description et l'analyse, nous découpons la séance en différentes phases, repérées à partir de l'organisation de la classe ou des enjeux de savoir. Nous avons effectué les transcriptions de chacune des phases.

Par ailleurs, cette vidéo a été partagée au sein du LéA, sur la plateforme Vialogue[5]. Chaque collègue du LéA, professeur, formateur ou chercheur, peut alors annoter la vidéo de manière asynchrone, à l'écrit. L'auteur peut alors répondre s'il le souhaite. L'extrait ci-dessous (voir la Figure 3) montre comment s'organisent ces commentaires. Chacun peut à tout moment écrire un commentaire. Il apparaît sur la droite de l'écran avec l'instant de la vidéo auquel il se rapporte.

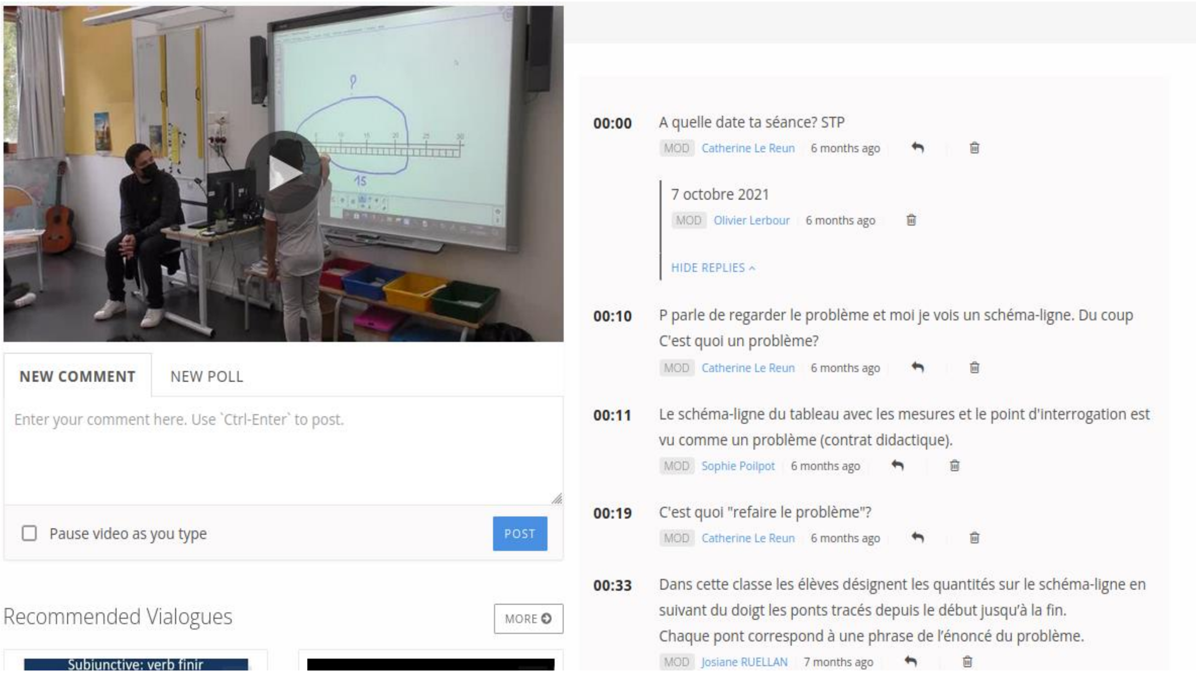



*Figure 3. La vidéo de classe, les annotations*

De plus, les séances au cours desquelles le collectif de professeurs et de chercheurs se réunit, sont enregistrées. Les dialogues viennent compléter nos analyses.

## IV - LE TRAVAIL DE REPRÉSENTATION / MODÉLISATION DANS LA CLASSE

Nous avons repéré trois phases au cours de cette séance. La première phase est un moment collectif où les élèves et le professeur explicitent des relations mathématiques entre le nombre d'élèves de CP et de CE1 de la classe. La deuxième phase porte sur une création de problème dans le collectif-classe. La troisième phase est un moment pendant lequel chaque élève doit créer un problème.

5 La plateforme est désormais inaccessible.

## 1 Phase 1 : « les élèves de la classe »

### 1.1 Description

Lors cette phase, sur le tableau devant l'ensemble de la classe, le professeur affiche une ligne numérique accompagné de deux « ponts » désignés par des nombres (7 et 15), et d'un pont avec un point d'interrogation (voir la Figure 4).

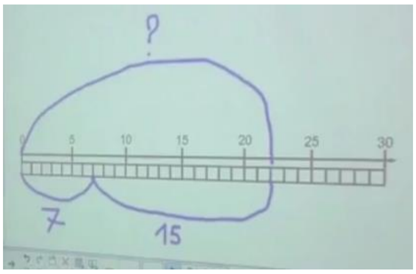



*Figure 4. Les nombres 7 et 15 sur la ligne numérique*

Il explique qu'il s'agit des « élèves de la classe ». Il ajoute que c'est un problème qu'ils ont déjà fait ensemble. Un premier élève va au tableau, et énonce oralement le problème mathématique en suivant les « ponts » avec la main : « Il y a 7 CP, 15 CE1. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ? »

### 1.2 Analyse

Le professeur propose à ses élèves un premier problème, qu'il indique comme problème portant sur les élèves de la classe. Autrement dit, le milieu constitué par la représentation de la ligne numérique ne prend tout son sens qu'en appui sur des habitudes de la classe (la ligne numérique accompagnée des ponts et des nombres, le point d'interrogation et les nombres choisis reflétant les nombres d'élèves des différents groupes) et sur des attentes spécifiques (énonciation orale et gestuelle d'un problème contenant une question). L'ensemble constitué de la ligne numérique, des nombres et des ponts est à la fois une représentation du problème à créer et une modélisation de la réalité. Le choix du professeur est de faire travailler, de manière ritualisée, des problèmes de composition (Vergnaud, 1996). Cette situation de création de problèmes comporte essentiellement deux particularités. La première concerne la question soulevée par le point d'interrogation. Tous les élèves savent que la classe comporte 22 élèves, dont 7 en CP et 15 en CE1. Autrement dit, la réponse à la question est connue par celui qui pose le problème et par ceux qui doivent y répondre. Ce positionnement est original lorsqu'il s'agit des élèves eux-mêmes qui créent le problème. D'habitude, le professeur pose un problème, dont lui seul connaît la réponse, et les élèves cherchent le problème. Par conséquent, à aucun moment, il n'est prévu de connaître ou de donner une réponse. La deuxième particularité porte sur la forme de l'énoncé lui-même. Dans la classe, proposer un problème, c'est pour les élèves le dire à l'oral, sans nécessairement proposer une solution.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le film de classe est partagé et discuté collectivement (en différé sur Vialogue ou en présentiel). Sur Vialogue, lors du visionnage du film, une première question a été posée quant à la date de ce moment. Le professeur de la classe a répondu le 7/10, autrement dit, un mois après la rentrée. Puis au cours des échanges entre les professeurs et les chercheurs, le professeur a complété son explication quant au choix de problèmes oraux. Cela résultait de son double niveau CP-CE1 : début octobre, les élèves de CP ne peuvent pas écrire/lire un tel texte. Ainsi, le professeur organise des habitudes de représentations dans la création de problèmes, dès le début de l'année, tant pour les élèves de CP que de CE1.

## 2 Phase 2 : « Créer un problème »

### 2.1 Description

Le professeur propose maintenant une ligne numérique vierge. Il demande aux élèves de réfléchir à un problème. L'un d'eux Yann va au tableau. En même temps qu'il fait les ponts et qu'il écrit leurs valeurs (9 et 3), il présente oralement le problème en respectant un ordre chronologique : « j'ai 9 crayons et ma maman m'en donne 3 ». Puis il fait le pont du tout, tout en écrivant un point d'interrogation (voir Figure 5). Il pose alors la question du problème mathématique : « Combien j'ai de crayons en tout ? ».

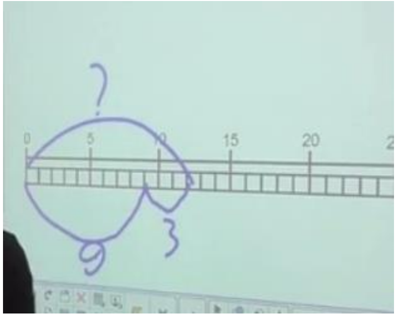



*Figure 5 : le problème oral : « J'ai 9 crayons et ma maman m'en donne 3. Combien j'ai de crayons en tout ? ».*

### 2.2 Analyse

La demande du professeur porte sur la présentation orale d'un problème mathématique inventé par l'élève, en appui sur la ligne numérique à compléter. Comme on l'a vu, ce milieu graphique n'a de sens que dans le déjà-là auquel il fait référence. Pour les élèves, « inventer des problèmes » consiste donc à s'inscrire peu à peu dans une culture de la création de problème qui repose sur un travail indissociablement oral et gestuel dans le travail de la représentation. L'énoncé du problème mathématique est oral, mais il s'inscrit profondément dans l'écrit, puisqu'il est accompagné d'une représentation-traduction graphique par l'élève. Avec cette pratique, le dispositif proposé par le professeur met au second plan la résolution du problème, et au premier plan sa représentation, et donc sa modélisation.

Dans les deux moments que nous venons d'analyser, il est intéressant de remarquer que le nombre sur la ligne numérique ne dit rien sur la spécificité des objets de la collection mesurée. C'est le discours oral qui en précise la spécificité (Mercier & Quilio, 2018, p 174). Contrairement à l'exemple de la phase précédente, les trois nombres ne sont pas « connus » des élèves. Les deux parties sont connues (9 et 3) tandis que le nombre (12) du tout n'est pas exprimé.

## 3 Phase 3 : un élève

### 3.1 Le journal du nombre

Au cours de cette troisième phase de la séance, un élève, Anselme, écrit un problème dans son journal du nombre. Le journal du nombre est un cahier dans lequel les élèves écrivent des mathématiques. L'introduction à ce cahier est la suivante : « J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir, et pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques, pour mieux s'en servir ». L'incitation proposée est : « je crée un problème dans lequel on cherche le tout ou une partie ». Cette incitation est directement liée à l'activité mathématique proposée dans les deux premières phases de la séance. Les élèves peuvent alors s'appuyer sur leurs connaissances, sur un déjà-là, pour créer leur problème : représenter sur une ligne numérique les données d'un problème de composition avec recherche d'une partie ou d'un tout, puis créer un énoncé de problème à partir de cette représentation. Rappelons que cet énoncé n'a pas été écrit dans la première partie de la séance, il a été simplement verbalisé. Les élèves sont libres de choisir les valeurs numériques, le contexte du problème ainsi que la question posée (portant sur le tout ou la partie).

### 3.2 Anselme[6] : 8 et 1

Anselme trace sur son cahier une ligne numérique délimitée par trois graduations (bornes) sans que celles-ci soient chiffrées c'est à dire désignées par les nombres 0, 8 et 9. Seuls sont représentés les ponts et la valeur de chacun d'entre eux désignant la mesure d'une grandeur (voir la Figure 6), nombre d'entités et/ou de longueur (8 et 1).

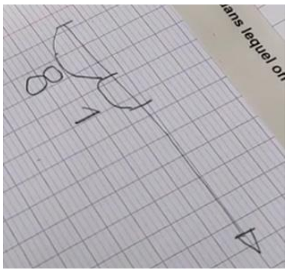


*Figure 6 : la ligne numérique proposée par Anselme*

Le professeur intervient auprès de l'élève et lui demande « tu veux que ton problème parle de quoi ? C'est 8 quoi ? ». L'élève répond de 8 et de 1. Le professeur reprend alors « mais c'est 8 quoi ? ». L'élève répond 8 crayons.

Le professeur demande à l'élève de signifier la grandeur à laquelle se réfère le nombre 8. En effet, dans le cadre de la création de problèmes, cette identification de la grandeur est essentielle pour construire un énoncé. Le 8 devient alors 8 crayons.

Le professeur reprend alors et demande « qu'est-ce qui se passe avec ces 8 crayons ? ». Ainsi, il oriente l'élève vers une première narration de l'énoncé du problème basé sur l'explicitation du 8 mais sans évoquer le second terme « 1 ».

### 3.3 Anselme : de 8 et 1 à 8 = 3 + ?

L'élève répond que dans ces 8 crayons « il y en a 3 qui sont cassés ».

Par différentes expressions synonymes « dans ces 8 crayons, comment tu peux faire voir qu'il y a 3 crayons qui sont cassés […] qu'il y a quelque chose qui se passe à l'intérieur de ces 8 crayons, dans ces 8 crayons, parmi ces 8 crayons », le professeur amène Anselme à représenter, à traduire sur la ligne numérique ce qu'il vient de verbaliser. L'élève montre alors avec le bout de son stylo le pont du "1" et dit : « ce qui reste ici, les crayons ». Le professeur dit alors « est-ce que tu te rappelles que dans le problème que l'on a fait tout à l'heure, Yann montrait qu'il avait des crayons en tout, qu'il avait des crayons cassés et des crayons pas cassés ? ».

Le professeur redemande alors à Anselme la signification du 8, « c'est tous les crayons, ou une partie de tous les crayons ? ». L'élève réplique ce que 8 est une partie de tous les crayons.

Le professeur ne relève toujours pas à ce niveau de l'enquête de l'élève la signification du 1 présent sur la ligne numérique, qu'Anselme a pointé.

Nous pouvons faire l'hypothèse ici qu'il existe deux milieux d'enquête relevant de deux représentations différentes :

- Le premier est la modélisation/représentation que l'élève s'est donnée : 8 + 1 avec la recherche du tout sur la ligne numérique.
- Le second relève de l''énoncé verbale du problème, du langage « 8 crayons en tout et 3 crayons cassés ».

Le seul élément du milieu en cohérence est la présence du nombre « 8 » mais qui ne donne pas à voir la même chose dans les deux problèmes de composition proposés, respectivement une partie et un tout.

[6] Dans ce qui suit, pour plus de lisibilité, nous faisons la description en même temps que l'analyse.

Comme le fait remarquer une des professeures du LéA commentant la vidéo sur Vialogue, l'élève a déjà tracé les deux ponts en dessous de la ligne numérique représentant les deux parties qu'il désigne par un nombre (8 et 1). Il semble alors que l'élève va proposer un problème de recherche de tout.

Un second commentaire revient sur la régulation étroite du professeur. « Qu'est ce qui se passe avec ces huit crayons ? » « Je trouve que cette question du professeur induit toute la suite. Il pose la question avant de savoir ce que représente le 1. »

Si nous reprenons la représentation initiale du problème d'Anselme, nous pourrions dire qu'il souhaite proposer un problème de tout alors qu'il réalise avec l'aide du professeur, une recherche de partie. Le professeur semble orienter l'action de l'élève vers un problème connu. L'élève se retrouve dans un jeu d'imitation réplicatif, le professeur l'amenant à produire un problème presque identique à celui proposé lors de la phase collective. Le professeur va alors montrer à l'élève que dans le 8, on ne peut pas avoir 8 et encore 1 (voir la Figure 7) en suivant avec son doigts les différents ponts.

Le professeur reprend en gardant les valeurs numériques présents sur la ligne numérique « et dans les 8 crayons il y en a 1... ». Anselme répond : « 1 qui n'est pas cassé ». Le professeur insiste « il y en combien qui sont cassés ? ». L'élève répond 3.

Cette fois-ci le professeur souhaite faire enquêter l'élève sur la représentation du problème sur la ligne numérique alors que l'élève mêle le nombre énoncé à l'oral, le 3, et le 1 présent sur la ligne numérique.

Le professeur montre alors avec son doigt le pont de 1 et le premier pont : « S'il y en a un qui n'est pas cassé, ça fait combien ? ». L'élève répond : « ça veut dire que je dois effacer le 1 et mettre un 5 ». Le professeur cherche à obtenir une explication « 5 quoi ? ». À cela Anselme répond : « Pour dire que s'il y a 3 crayons cassés dans 8, ça va encore rester 5 ». L'élève représente alors correctement sur la ligne l'énoncé de son problème (voir la Figure 8).

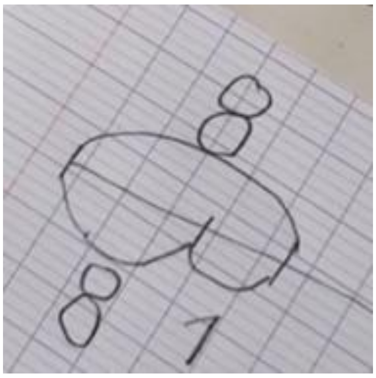



*Figure 7 : dans le 8, on ne peut pas avoir 8 et encore 1*

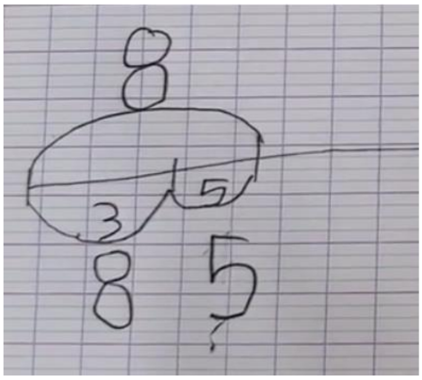



*Figure 8 : Le problème « Pour dire que s'il y a 3 crayons cassés dans 8, ça va encore rester 5 »*

La traduction effectuée par l'élève de l'énoncé du problème l'amène à produire une situation dé-problématisée où toutes les valeurs numériques du problème sont données.

Après qu'Anselme a traduit par le langage la représentation / modélisation du problème sur la ligne numérique en reliant les éléments oraux avec les différents éléments de la représentation, le professeur lui demande de reprendre la représentation des ponts pour que ceux-ci soient proportionnels à la mesure de grandeur désignée. En effet, comme nous le montre les figures 8 et 9, nous voyons que le pont de 3 est plus long que celui de 5.

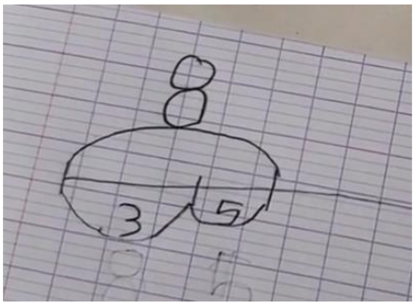



*Figure 9 : « Il y a un problème »*

Anselme a donc bien compris que le segment donnant à voir le nombre 5 est plus grand que celui de 3 et que sur sa représentation, la graduation 3 est trop éloignée du point d'origine pour pouvoir ajouter un segment de 5 pour aller jusqu'à la graduation 8, c'est-à-dire la borne supérieure du pont de 8, désignant le nombre tout. Anselme a donc une compréhension de ce que montre cette représentation, que le 5 et le 3 sont contenus dans le 8, qu'ils sont les deux parties de 8 (voir la Figure 10).

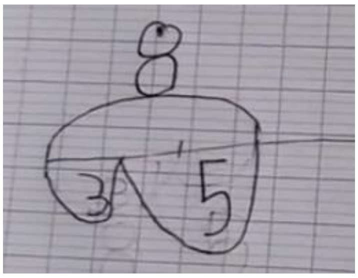



*Figure 10 : le 5 et le 3 sont contenus dans le 8*

Ces trois premiers épisodes montrent la qualité épistémique de ce qui est produit par l'élève, ses capacités à traduire sur une ligne numérique l'énoncé d'un problème. En effet, sa production, son comportement, attestent d'une manière raisonnable de ses capacités épistémiques et épistémologique, soit, le nombre vu comme mesure de quantité (trois crayons cassés), la traduction de cette mesure sur la ligne numérique par un segment, sans néanmoins définir l'unité de compte utilisée.

### 3.4 Anselme : d'une situation dé-problématisée à la création d'un problème

Le professeur amène alors à remplacer le 5 sur la ligne numérique par un point d'interrogation. L'expression du professeur est ici forte (position topogénétique haute). Cette nouvelle représentation / modélisation du problème sur la ligne numérique va alors permettre à Anselme d'énoncer : « il y a 8 crayons en tout, il y a 3 crayons cassés, il y a combien de crayons pas cassés ? » L'élève traduit ici l'énoncé oralement produit par une monstration sur la ligne numérique (voir la Figure 11). À partir de la représentation / modélisation de cette situation dé-problématisée, le professeur permet donc à Anselme de produire un énoncé de problème.

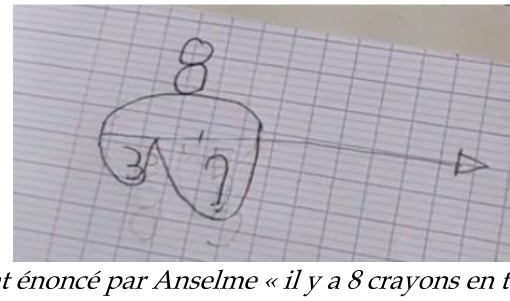



*Figure 11 : le problème finalement énoncé par Anselme « il y a 8 crayons en tout, il y a 3 crayons cassés, il y a combien de crayons pas cassés ? »*

Nos analyses montrent les difficultés d'Anselme à créer un problème. Dans le même temps, nous avons mis en évidence sa capacité à modéliser / représenter un problème sur une ligne numérique.

## V - CONCLUSION ET DISCUSSION

Dans notre exemple, nous voyons que le langage a une part très importante pour parler le problème, et qu'il vient soutenir le travail de l'élève dans la modélisation / représentation du problème. La ligne numérique vient modéliser / représenter des additions et des soustractions. D'une part, le nombre (mesure des quantités) est représenté par une longueur sur une ligne numérique (sans graduation et sans unité de longueur). D'autre part, la somme de deux nombres est représentée par deux longueurs successives sur la même ligne numérique, auxquelles s'ajoutent des « ponts ».

Le nombre est représenté sous la forme d'une grandeur étendue, d'une longueur. On peut voir dans l'exemple présenté que les élèves ont une compréhension fine de la longueur désignée par un nombre (par exemple pour le nombre 8) mais aussi sur la composition d'un nombre en deux parties (3 et 5). Nous avons montré que les élèves étudient les relations entre représentations mathématiques (ici principalement la ligne numérique) et les problèmes (ici création de problèmes). Nous avons présenté comment ils parviennent peu à peu à explorer de leur propre mouvement la création de problèmes. Nous voulons insister sur le fait que l'exploration des élèves n'en est qu'à ses débuts. Pourtant, nous avons mis en évidence la nécessité de l'enquête, à la fois collective et individuelle, au cours de laquelle la place du professeur est fondamentale. La possibilité donnée aux élèves de passer d'une représentation à une autre, de traduire une représentation par une autre et de faire des allers-retours entre concret et abstrait semble les amener à comprendre la structuration d'un énoncé, la signification des valeurs numérique de ces énoncés et le lien entre l'écriture additive et soustractive comme nous le montrent les écritures mathématiques produites par l'élève dans l'exemple d'une recherche de partie. Ce travail se réalise sur un temps long, sur une année, sur un cycle. Notre recherche est au commencement. Nous travaillons avec des professeurs de CP au CM1. Le travail de création / résolution de problèmes est nécessaire sur un temps long avec une organisation spécifique didactique et mathématiques qui est toujours en cours d'expérimentation. Le travail que nous menons dans le cadre de notre LéA et plus particulièrement des ingénieries coopératives, nous amène à concevoir, mettre en œuvre, analyser, remettre en œuvre dans la même classe ou dans d'autres classes. Des hypothèses de travail sont expérimentées et des situations améliorées. Par exemple dans la classe présentée, d'autres types de problèmes ont été travaillés de manière spiralaire (composition, comparaison et transformation) toujours en appui sur les représentations dans une forme de continuité de l'expérience mathématique des élèves.

Ce travail s'accompagne d'un recueil systématique de mesure dans les classes du LéA et de la constitution à partir des différentes productions collectives de création et de résolution de problèmes de répertoires instruments des problèmes additifs et multiplicatifs.

Nous avons montré ainsi, à partir d'un exemple, représentatif du travail au sein du LéA, comment l'élève peut s'appuyer sur des représentations pour créer des problèmes. Il nous parait maintenant important d'étudier les effets de ce travail de création de problèmes en l'articulant avec celui de résolution de problèmes toujours en lien avec les représentations.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

BLUM, W., & FERRI, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application,* 1(1), 45-58.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation,* 30 (2), 241–277.

CAI, J., CIFARELLI, V. (2005). Exploring mathematical exploration: how do two college students formulate and their own mathematical problems? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43–72.

COLLECTIF DIDACTIQUE POUR ENSEIGNER, CDpE (2019). *Didactique pour enseigner*. Presses Universitaires de Rennes.

DAVYDOV, V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L. P. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics* (p. 55–107). Chicago: University of Chicago.

ELIA, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol 16, 45-66.

ENGLISH, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(1), 83–106.

FELMER, P., PEHKONEN, E., & KILPATRICK, J. (Éds.). (2016). *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. Springer.

FISCHER, J. P., SANDER, E., SENSEVY, G., VILETTE, B., & RICHARD, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality ? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education,* 34(2), 439-456.

JOFFREDO-LE BRUN, S. (2016). Enseignement et apprentissage des mathématiques au CP : continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation, un exemple. *Questions Vives [En ligne], N° 25.*

JOFFREDO-LE BRUN, S. , MORELATTO, M., SENSEVY, G. & QUILIO, S. (2018). Cooperative Engineering in a Joint Action Paradigm. *European Educational Research Journal,* vol. 17(1), 187-208. http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1474904117690006

JOFFREDO-LE BRUN, S (2020). Co-conception d'un curriculum en mathématiques au CP entre professeurs et chercheurs : une étude exploratoire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *40*(3), 269–318**.**

KILPATRICK, J. (1987). Problem formulating : Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

KOICHU, B., & ANDZANS, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, p. 285–307. Brill Sense.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (Ed.) (2020). Programmes d'enseignement : école maternelle : modification ; cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycles des approfondissements (cycle 4) : modification. Dans Bulletin Officiel n° 30 du 31 juillet 2020. Paris : MEN. Repéré à [https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39771].

MERCIER, A. & QUILIO, S. (2018). M*athématiques élémentaires pour l'école, nombres, grandeurs, calculs*. Presses Universitaires de Rennes.

RILEY M., GREENO J., HELLER J. (1983). Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic. in Ginsburg Herbert P. (Dir.) *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York.

SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

SENSEVY, G. (2015). Le collectif en didactique : quelques remarques. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. Angels Sierra, L. Trouche, C. Winslow et S. Besnier (dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques,* (p. 223-253). XVIII école d'été de didactique des mathématiques, Brest.

SENSEVY, G., QUILIO, S. ET MERCIER, A. (2015). Arithmetic and Comprehension at Elementary School. *ICMI 23, Proceedings,* Macao, juin.

SENSEVY G. & BLOOR T. (2020) Cooperative Didactic Engineering. *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer International Publishing, pp.1-5, 2019.

SINGER, F. M., & MOSCOVICI, H. (2008). Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction. *Teaching and Teacher Education*, 24(6), 1613–1634.

SILVER, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

SILVER, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75–80.

VERGNAUD, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N*, n°38, 21-40.

VILETTE, B., FISCHER, J-P., SANDER, E., SENSEVY, G, QUILIO, S. et RICHARD, J-F. (2017). « Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE ». *Revue Française de Pédagogie*, vol. 201, p. 105-120.

# UN PROJET DE FORMATION-RECHERCHE SUR LA MEMORISATION ET LA MOBILISATION DES FAITS NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES ELEMENTAIRES

**Laurianne FOULQUIER**
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Laurianne.Foulquier@u-bordeaux.fr

**Patricia LAMBERT**
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Patricia.Lambert@u-bordeaux.fr

**Cynthia LAROCHE**
PRPE, INSPE de l'académie de Bordeaux
Cynthia.Laroche@u-bordeaux.fr

**Carine REYDY**
Maître de conférences, INSPE de l'académie de Bordeaux
Laboratoire Lab-E3D, université de Bordeaux
Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

**Patrick URRUTY**
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Patrick.Urruty@u-bordeaux.fr

Nous présentons un projet de formation-recherche conduit avec les enseignants de deux écoles de REP qui expérimentent une progression annuelle selon deux axes complémentaires : un travail spécifique autour de la mémorisation des faits numériques dans le domaine du calcul est mené en parallèle à un travail visant leur mobilisation dans le cadre de la résolution de problèmes basiques au sens de Houdement (2017). La progression proposée aux enseignants prend appui, pour l'axe calcul, sur des représentations particulières : des boîtes, des rectangles et des écritures mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que ces représentations favorisent non seulement la perception d'équivalences numériques par les élèves mais peuvent également enrichir leur répertoire didactique (Gibel, 2018) pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires. Ce sont plus particulièrement les usages de ces représentations et les fonctions que leurs assignent les enseignants et les élèves dans la modélisation du problème que nous souhaitons interroger et illustrer dans cette communication.

## I - ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

Notre équipe mène depuis trois ans un projet de recherche-action conduit avec les enseignants de deux écoles de REP. Ces derniers expérimentent une progression annuelle que nous leur avons fournie. En parallèle, nous organisons des visites de classe régulières, chacune suivie d'un entretien entre l'enseignant ou l'enseignante ayant mené la séance et le ou la chercheuse l'ayant observée. À ceci s'ajoutent des réunions en petits groupes (par niveau de classe ou par cycle) entre enseignants et chercheurs du projet ainsi que des séances plénières réunissant tous les acteurs du projet au cours desquelles des extraits vidéos de classes sont visionnés et discutés et des échanges sont organisés au sujet des points ayant émergé des entretiens post-visites. À partir de ces échanges, la ressource est rectifiée et complétée puis testée à nouveau dans les classes et ainsi de suite. Ainsi, ce processus de boucle itérative permet, au cours des trois années du projet, d'améliorer de manière collaborative la ressource tout en participant à la formation des enseignants impliqués.

Cette ressource articule des tâches dans le domaine du calcul et une progression en résolution de problèmes constituée d'une liste annuelle de problèmes pour chaque niveau de classe. La spécificité de notre ressource tient dans l'utilisation de représentations particulières pour exprimer et mettre en relation des faits numériques : les « boîtes » dans le champ additif et les « rectangles » dans le champ multiplicatif, chacun étant associé à quatre écritures mathématiques, comme le montre l'exemple ci-dessous (figure 1).

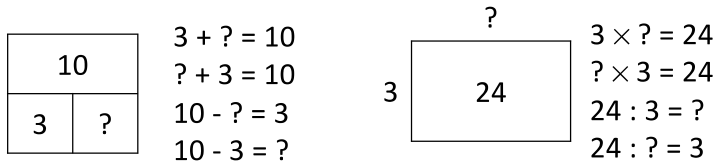



*Figure 1. Exemples de représentations utilisées dans la progression.*

## II - QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

### 1 Hypothèses et questions de recherche

En appui sur les travaux de Butlen et Pézard (2003, 2007), nous considérons que dans la résolution d'un problème numérique, le choix des opérations n'est pas indépendant des connaissances sur les nombres et des habiletés en calcul, y compris mental. Nous avons donc choisi de concevoir une ressource articulant tâches de calcul et résolution de problèmes basiques.

La ressource que nous avons proposée aux enseignants et les représentations qui lui sont associées étaient initialement destinées à doter les élèves d'outils qui permettraient d'enrichir leurs connaissances dans le domaine du calcul. Nous faisions alors l'hypothèse que la manipulation régulière des représentations en boîtes, en rectangles et des écritures mathématiques, favoriserait non seulement la perception d'équivalences numériques par les élèves mais qu'elle permettrait également d'étoffer leur répertoire didactique (Gibel, 2018) pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires et qu'ainsi les élèves progresseraient dans ce domaine.

Nos questions de recherche sont les suivantes : quelles fonctions ont effectivement données les enseignants à chacune de ces représentations et quelles fonctions leur donnent les élèves en situation de résolution de problèmes ? *In fine*, quels apports constituent-elles pour les apprentissages des élèves en résolution de problèmes ? En d'autres termes, nous nous demandons quels effets nous pouvons constater dans le processus de transposition didactique lié à l'appropriation de ces outils.

### 2 Méthodologie

Pour répondre à la question des fonctions données par les enseignants aux représentations utilisées dans la ressource, nous nous appuyons sur les vidéos et observations réalisées en classe lors des visites et nous analysons également les ressources produites par les enseignants pour mettre en œuvre la progression et les échanges qui ont eu lieu lors des entretiens post-visite ou en séances plénières.

Pour répondre à la question des fonctions données par les élèves à ces représentations, nous avons interviewé des élèves selon une modalité inspirée des entretiens d'explicitation au sens de Vermersch. La technique de l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994) s'appuie sur l'hypothèse du primat de l'action sur la conscience, ce qui signifie que le sujet (l'élève dans le cas qui nous intéresse) peut réaliser une tâche sans savoir ce qu'il a fait ou comment il a fait pour y parvenir. Ainsi, il existe une part importante de ses actions que l'élève sait faire mais dont il n'est pas conscient et qu'il ne peut pas mettre en mots sans une aide. Le rôle de l'entretien d'explicitation est d'aider l'élève à formuler sa pensée privée avec ses propres mots. Cette démarche peut avoir plusieurs finalités : permettre au chercheur de prélever des informations, permettre à l'enseignant de comprendre comment l'élève est parvenu à son résultat, permettre à l'élève de prendre conscience de la démarche qui l'a conduit à la réussite ou à l'échec (et donc apprendre de son expérience) et enfin permettre à l'élève d'apprendre à s'auto-informer. C'est en priorité à la première finalité que nous nous intéressons ici bien que les autres aient un intérêt certain dans le cadre de notre projet.

Plusieurs techniques sont destinées à mener un entretien d'explicitation : poser des questions descriptives, favoriser l'usage de « *quoi* », plutôt que de « *pourquoi* » ou encore utiliser des formulations vides de contenu, etc. Il s'agit de cette façon de privilégier la référence aux observables produits immédiatement par l'action car on fait l'hypothèse qu'ils fournissent un témoignage non conscient de l'activité intellectuelle de l'élève sans trop la déformer. Dans cette idée, nous avons préparé des questions types sur lesquelles nous appuyer pour mener les entretiens, comme par exemple « *Qu'est-ce que tu as fait en premier pour résoudre le problème ?* », « *Je vois que tu as fait ça.* », « *Et là, c'est terminé ?* », etc. Les entretiens ont eu lieu au mois de mai 2022, en fin de progression annuelle, avec des élèves de CE1 de deux classes différentes.

# III - CADRE THÉORIQUE

Nous présentons ici le cadre théorique dans lequel s'inscrit notre réflexion.

## 1 Un processus cyclique

Duval (1993) explique qu'au cours des processus en jeu lors de la résolution d'un problème numérique, l'élève mobilise tour à tour plusieurs types de représentations au sein de différents registres : des représentations dans le registre de la langue naturelle (l'énoncé et ses reformulations) qu'il devra convertir en représentations du registre symbolique (pour produire une ou plusieurs expressions mathématiques qui utilisent des écritures chiffrées et des symboles) en transitant peut-être par des représentations schématiques ou analogiques (du matériel par exemple). Une fois le résultat numérique obtenu, l'élève produit une phrase réponse en revenant dans le registre de la langue naturelle. Ces changements de registres nécessaires sont à l'origine de certaines difficultés rencontrées par les élèves en situation de résolution de problème.

Depuis, plusieurs auteurs ont décrit de manière métaphorique le processus de résolution de problème comme un processus cyclique (par exemple Verschaffel & al., 2000 ; Blum & Leiß, 2005). Voici, dans cet esprit, la schématisation du processus de résolution de problèmes que nous utilisons dans le cadre de la formation des enseignants de notre projet.

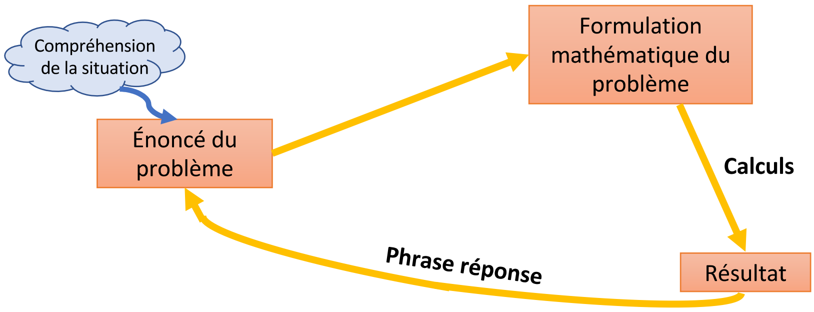



*Figure 2. Schéma utilisé pour représenter le processus de résolution de problèmes*

Nous rejoignons ici les propos de Maaß (2006) cités dans la présentation du colloque :

> *Le choix d'une schématisation du processus de modélisation peut rendre compte de ce qui est l'enjeu d'apprentissage dans une situation d'enseignement (Maaß, 2006), pour autant que les processus de modélisation soient perçus par l'enseignant comme objet de savoir à enseigner.*

En effet, le fait de rendre ce schéma explicite auprès des enseignants de notre projet nous a permis de situer nos intentions dans le processus de résolution de problème.

## 2 Un fonctionnement par analogie

Julo (1995) s'intéresse aux processus cognitifs en jeu lors de la résolution d'un problème : selon lui, certains de ces processus ont pour objet la construction d'une représentation du problème qui permettra alors au sujet d'agir, c'est-à-dire d'élaborer une procédure ou une stratégie. Il précise cependant que « *ni la construction de la représentation, ni la résolution d'un problème en général, ne sont des processus linéaires* » (*Ibid.*, p. 27). Ceci illustre le fait qu'à partir du moment où l'élève a compris le problème posé, il est sur le chemin de sa résolution et que réciproquement, le fait d'essayer de le résoudre participe à sa compréhension.

Julo explique par ailleurs que nous nous constituons une mémoire de problèmes à partir « *des différents problèmes auxquels nous sommes confrontés, des représentations que nous nous en faisons pour les résoudre et des analogies que nous percevons entre eux* » (*Ibid.*, p. 88). Ainsi lorsqu'un élève est face à un problème mathématique, s'il existe un prototype dans sa mémoire de problèmes qui lui correspond, alors il le résout par analogie avec ce prototype et enrichit par la même occasion le prototype. S'il n'identifie pas de prototype dans sa mémoire de problèmes, alors il cherche à construire une stratégie pour résoudre ce problème et s'il y parvient, il enrichit alors sa mémoire de problèmes d'un nouveau prototype. En ce sens, la confrontation régulière à des problèmes est indispensable pour que l'élève étoffe sa mémoire de problèmes. Ainsi à l'école primaire, deux objectifs sont poursuivis en parallèle : d'une part construire un répertoire de problèmes mémorisés – c'est-à-dire enrichir sa mémoire de problèmes et, d'autre part, s'entraîner au développement de stratégies de résolution de problèmes à partir de situations inconnues.

## 3 Problèmes basiques, complexes et atypiques

Dans la lignée des travaux de Julo, Houdement (2017) identifie certains types de problèmes vus comme des « *briques élémentaires de raisonnement* » dont la résolution doit être automatisée en fin de cycle 3, c'est-à-dire dont la structure mathématique sous-jacente doit être rapidement reconnue par les élèves. Ces problèmes, qu'elle nomme « *problèmes basiques* » et pour lesquels elle précise qu'un enseignement progressif doit être pensé sur les cycles 2 et 3, sont les problèmes « *à deux données […], où il s'agit de* *déterminer une troisième valeur […], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue* » (*Ibid.*, p. 64). Houdement catégorise aussi les problèmes complexes (agrégats de problèmes basiques) et les problèmes atypiques pour lesquels les élèves ne disposent pas de stratégies connues et doivent en inventer de nouvelles en s'appuyant sur leurs connaissances passées. Dans le cadre du projet que nous présentons ici, nous nous intéressons spécifiquement à l'apprentissage de la résolution de problème basiques au sens de Houdement.

### 4 Une typologie pour les problèmes basiques

C'est en particulier aux travaux de Vergnaud (1991) que nous faisons référence pour analyser les différents problèmes et pour construire la liste de problèmes basiques proposée à chaque niveau de classe. Vergnaud s'appuie sur le postulat que c'est au travers des problèmes qu'il permet de résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Il définit le champ conceptuel des structures additives comme l'ensemble des situations faisant appel à une addition, à une soustraction ou à une combinaison de ces deux opérations. De même, le champ conceptuel des structures multiplicatives renvoie aux situations dont le traitement appelle une multiplication, une division, ou une combinaison de telles opérations. Enfin, il élabore des catégories bien connues au sein de ces deux champs conceptuels (par exemple pour le champ des structures additives, problèmes de transformation d'états, de composition d'états, etc.). Cette typologie nous permet de constituer, pour chaque niveau de classe, une programmation annuelle de problèmes appartenant aux différentes catégories et pour lesquels la place de la donnée recherchée varie.

### 5 Développer une activité numérico-algébrique à l'école primaire

Pilet et Grugeon-Allys (2021) mettent en avant le fait que la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires issus des champs conceptuels additifs et multiplicatifs peut revêtir un caractère pré-algébrique. Elles précisent que :

> *Les élèves peuvent, très tôt, être amenés à produire des équations, sous la forme d'égalités à trous, et à raisonner sur des relations équivalentes, notamment entre l'addition à trous et la soustraction. Les relations peuvent être exprimées par des représentations en cours de formalisation (par exemple en utilisant des symboles « ? » ou « ... » pour désigner l'inconnue) et à partir de différentes représentations connues des élèves en primaire comme la droite graduée (Elia, 2011) ou des schémas. (Pilet & Grugeon-Allys, 2021, p. 16-17)*

Elles notent que les relations ainsi exprimées sont particulièrement intéressantes pour le développement de l'activité numérico-algébrique. Dans notre ressource, nous reprenons ces propositions en favorisant la production d'écritures pré-algébriques lors de la résolution des problèmes basiques par les élèves.

## IV - NOS CHOIX POUR L'ELABORATION DE LA RESSOURCE ET SA MISE EN OEUVRE

### 1 Description de la ressource

La progression annuelle que nous proposons aux enseignants s'articule autour de deux axes complémentaires : un travail spécifique sur la mémorisation des faits numériques dans le domaine du calcul et, en parallèle, un travail visant leur mobilisation dans le cadre de la résolution de problèmes basiques au sens de Houdement (2017).

La partie calcul de cette progression prend appui sur deux types de représentations particulières. Pour les faits numériques additifs, tout « trio de nombres » (trois nombres liés par une relation additive) est accompagné d'une « boîte », représentation qui illustre la structure additive existant dans le trio. Nous supposons que cette représentation, analysée entre autres par Fischer (1993), peut aider les élèves à percevoir les équivalences du type « 3 + ? = 8 ⇔ 8 – 3 = ? ». De même pour les faits multiplicatifs, toute « triplette de nombres » est accompagnée d'un « rectangle » qui illustre la relation multiplicative entre les trois nombres. Cette représentation pourrait aider les élèves à percevoir des équivalences du type « 3 × ? = 15 ⇔ 15 : 3 = ? ».

À partir de cette progression, les enseignants proposent régulièrement aux élèves des tâches spécifiques sollicitant ces représentations (souvent sous la forme de rituels ou de jeux) qui mettent l'accent sur l'équivalence entre plusieurs écritures mathématiques. Ces tâches visent aussi à favoriser la mémorisation des faits numériques et à développer des habiletés de calcul chez les élèves en lien avec ces équivalences.

Parallèlement, les élèves sont également confrontés très régulièrement à la résolution de problèmes basiques proposés dans une progression pour chaque année de l'école élémentaire. Sa progressivité est établie grâce aux classifications issues de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) et articulée à la progression dans le domaine du calcul évoquée précédemment. Par exemple, en période 2 de l'année de CE1, les élèves rencontrent des problèmes de transformation d'états la première semaine, composition d'états les deux semaines suivantes puis indifféremment de l'une ou l'autre catégorie pendant les quatre semaines restantes ; le champ numérique évolue progressivement au fil de la période.

## 2 Nos intentions initiales

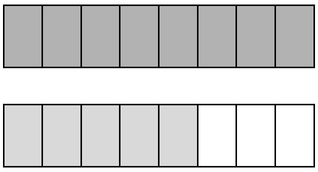
Dans le cadre de la résolution des problèmes basiques, nous avons proposé aux enseignants d'adopter la méthodologie suivante : après la découverte de l'énoncé qui peut être donné à l'écrit ou à l'oral, les élèves produisent d'abord une écriture mathématique (arithmétique ou pré-algébrique) qui traduit le problème, puis utilisent si nécessaire la boîte ou le rectangle pour transformer l'écriture et ainsi calculer plus facilement le résultat. Enfin, ils rédigent une phrase réponse.

Par exemple, si l'on considère le problème « *Avant la récréation, Enzo avait 12 billes. Il a perdu des billes pendant la récréation. Maintenant il a 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes ?* », un élève ayant suivi la progression peut produire l'écriture mathématique « 12 – ? = 3 » pour traduire le problème en congruence avec l'énoncé. Puisqu'il a été entraîné à faire le lien entre cette écriture mathématique, les trois écritures reliées « 12 – 3 = ? », « 3 + ? = 12 », « ? + 3 = 12 » et la représentation en boîte contenant 12 en haut, 3 et ? en bas, il dispose alors de plusieurs moyens de calcul pour résoudre le problème (lien avec un résultat mémorisé des tables d'addition, décomptage de 3 à partir de 12, etc.).

À l'origine du projet, notre intention initiale était donc de donner aux représentations en boîtes ou en rectangles le statut d'outil de calcul *a priori* transitoire dans l'apprentissage de la résolution de problèmes basiques.

Notons que ces représentations ont été choisies car elles peuvent émerger en appui sur la manipulation de cubes emboîtables. Ainsi dès le début du CP et aussi longtemps que nécessaire, les élèves utilisent des cubes ou des réglettes Cuisenaire lorsqu'ils mobilisent les représentations en boîte, ce qui leur permet de donner du sens aux écritures utilisant les signe « + » et « - ». Par exemple, le trio (3 ; 5 ; 8) est associé au matériel, à la représentation en boîte et aux écritures mathématiques suivants (figure 3).

Matériel Boîte Écritures mathématiques



| 8 | |
|---|---|
| 5 | 3 |

3 + 5 = 8 8 – 5 = 3

5 + 3 = 8 8 – 3 = 5

*Figure 3. Représentations associées au trio (3 ; 5 ; 8).*

De même, à partir de la période 3 du CE1, les enseignants proposent aux élèves de s'appuyer temporairement sur la manipulation de barres de cubes lorsqu'émerge la représentation en rectangle afin de donner du sens aux écritures utilisant les signes « × » et « : ». Par exemple, la triplette (3 ; 5 ; 15) est associée au matériel, à la représentation en rectangle et aux écritures mathématiques suivants (figure 4).

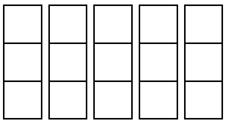
| Matériel | Rectangle | Écritures mathématiques | |
|---|---|---|---|
|  | 5<br>3 [15] | 3 × 5 = 15<br>5 × 3 = 15 | 15 : 5 = 3<br>15 : 3 = 5 |

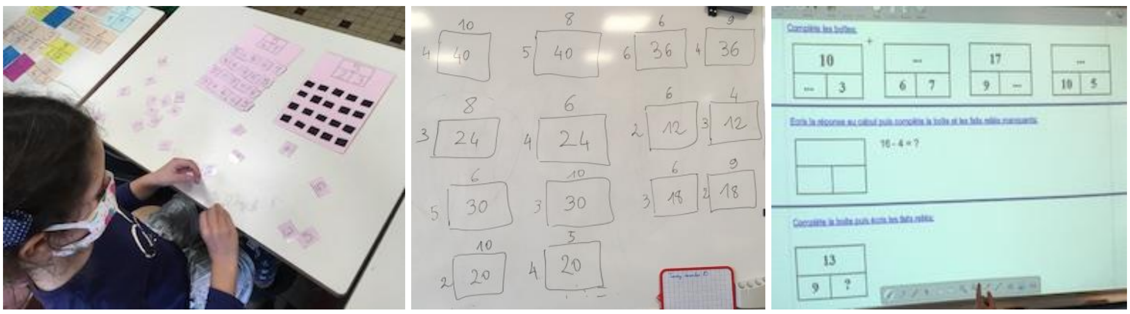
*Figure 4. Représentations associées à la triplette (3 ; 5 ; 15).*

## V - FONCTIONS ASSIGNÉES AUX REPRÉSENTATIONS PAR LES ENSEIGNANTS

### 1 Dans le domaine du calcul

Les enseignants du projet ont investi ces représentations à la fois pour développer chez leurs élèves des compétences en calcul mais aussi pour travailler avec eux le lien entre addition et soustraction ou entre multiplication et division. Ils ont en effet imaginé de nouvelles tâches et de nouveaux jeux qu'ils leur ont proposés.

Sur la figure 5a, une élève de CP travaillant en autonomie est en train de reconstituer les quatre faits reliés associés aux boîtes qui lui sont proposées. La figure 5b représente une production collective d'élèves de CM1 qui ont déterminé toutes les possibilités pour lesquelles deux rectangles différents ont le même nombre central. La figure 5c montre les consignes de trois exercices d'entraînement adressés à des élèves de CE1 dans lesquels il faut tour à tour compléter des boîtes, renseigner une boîte à partir d'une écriture mathématique puis déterminer les trois autres faits reliés et écrire les quatre faits reliés à une boîte contenant deux nombres et un « ? ». Notons que dans cette dernière tâche, les élèves s'exercent à la manipulation d'expressions contenant des « ? », ce qui n'est pas commun à ce niveau de classe.



*Figures 5a, 5b et 5c. Exemples de tâches imaginées par les enseignants du projet.*

Certains enseignants ont proposé des tâches assez élaborées. Par exemple, un professeur de CM1 fait jouer ses élèves au nombre mystère « à deux opérations ». Il donne une consigne du type : « *Je pense à un nombre, je le divise par 3. J'ajoute 1 au résultat et j'obtiens 7. À quel nombre ai-je pensé ?* ». Les élèves produisent alors l'écriture mathématique ( ? : 3) + 1 = 7 puis trouvent le nombre cherché en faisant appel aux égalités à trous qu'ils ont déjà travaillées (« *Combien plus 1 égale 7 ?* », la réponse est 6 ; puis « *Combien divisé par 3 égale 6 ?* », la réponse est 18).

Enfin, les représentations mobilisées et les affichages proposés par les enseignants du projet permettent aux élèves de disposer d'un répertoire plus riche que le répertoire usuel. En effet, il permet de répondre à beaucoup plus de questions. Ainsi, la boîte contenant 7, 4 et 3 que nous voyons apparaître en bas de la colonne du « 7 » sur l'affichage (figure 6a) a été mobilisée lors des tâches proposées aux élèves pour répondre à des questions diverses telles que « *Combien égalent 3 plus 4 ?* », « *Combien y a-t-il depuis 3 jusqu'à 7 ?* », « *7 moins quoi égale 4 ?* », etc.


*Figures 6a et 6b. Exemples d'affichages, à gauche en CP en période 2 et à droite en CE1 en période 4.*

## 2 Dans le processus de résolution de problèmes

Il est difficile d'apprécier avec certitude les fonctions que les enseignants assignent aux représentations en boîtes et en rectangles dans le processus de résolution de problèmes car nous nous basons avant tout sur leurs déclarations en séances plénières qui peuvent être altérées par un certain nombre de facteurs. Nous pouvons quand même nous appuyer sur les observations que nous avons menées en classe et les outils que les enseignants ont créés pour émettre des hypothèses.

L'image de la figure 7 est une photo de l'adaptation par un des enseignants de CP du livret de la MHM (Méthode Heuristique en Mathématiques créée par Nicolas Pinel dont les ressources sont disponibles en ligne gratuitement et publiées chez Nathan[1]). Lors de l'observation d'une séance dirigée de résolution de problème, l'un des chercheurs de l'équipe constate que la représentation en boîte est clairement utilisée par l'enseignant comme un outil de représentation du problème. Au cours de cette séance, l'enseignant propose aux élèves de résoudre successivement les premiers problèmes du livret : pour chacun d'entre eux et après avoir lu l'énoncé à la classe, il engage une discussion collective pour se mettre d'accord le

[1] N. Pinel, *MHM : Mes mini-fichiers CP*, Nathan, édition 2021.

schéma le plus approprié. Il aboutit avec les élèves à la conclusion suivante : s'il s'agit d'une histoire avec une chronologie facilement identifiable, on remplit le schéma de droite qui figure sous l'énoncé ; sinon, on remplit le schéma de gauche, c'est-à-dire la boîte. Les élèves procèdent ensuite seuls pour la phase de calcul et ont le choix d'utiliser ou pas la boîte pour trouver le résultat.

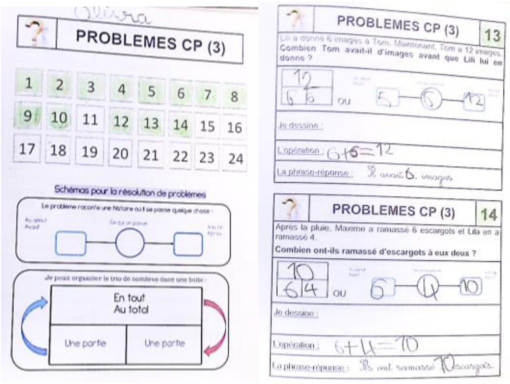
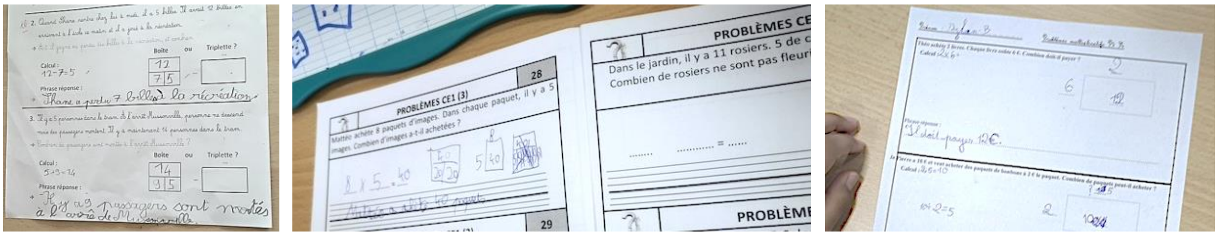



*Figure 7. Livret de la MHM CP revisité par un enseignant du projet.*

Les enseignants du projet proposent aux élèves des supports variés pour la résolution des problèmes qui témoignent de fonctions différentes assignées aux représentations. En effet, voici sur les photos ci-dessous (figures 8a, 8b et 8c) les supports proposés par trois enseignants de CE1 à leurs élèves. Sur la figure 8a, les boîtes et les rectangles sont pré-dessinés : ces représentations servent de point d'appui pour identifier le champ additif ou multiplicatif. Sur la figure 8b, un emplacement est signifié sur le support pour l'écriture mathématique et la représentation en boîte ou rectangle n'est pas exigée. Sur la figure 8c, la boîte est déjà représentée. Elle est imposée à l'élève qui se doit de la remplir et on peut noter que le champ est déjà identifié par la présence de la représentation.




*Figures 8a, 8b et 8c. Supports proposés par trois enseignants de CE1 pour la résolution de problèmes.*

Une enseignante propose à ses élèves de CP de travailler sur un support libre, l'ardoise, dans lequel la boîte n'est pas imposée. Elle a instauré avec ses élèves, dès le début de l'année, la méthodologie proposée : elle leur demande de commencer par l'écriture mathématique et de ne faire la boîte que s'ils le jugent nécessaire. Pour elle, la boîte n'est utilisée que si elle peut aider pour trouver la valeur du « ? », c'est un outil de calcul. Toutefois elle constate au fil de l'année que pour les problèmes de composition, les élèves arrivent plus facilement à produire d'abord la boîte. Elle modifie alors la méthodologie établie avec eux en convenant que dans certains cas, on peut commencer par la boîte si l'on pense que c'est plus facile. À ses yeux, la boîte devient ainsi outil d'aide à la représentation du problème. Il y a un glissement dans le rôle qu'elle lui attribue qui est accompagné d'un changement du contrat initial.

Enfin, dans la méthodologie qu'elle utilise avec ses élèves de CM1, une autre enseignante du projet attend une congruence entre l'énoncé et la phrase mathématique produite, ce qui la conduit parfois à réfuter des écritures mathématiquement correctes (par exemple, pour le problème « *Pierre avait 5 billes, il en gagne* *et maintenant il en a 13. Combien a-t-il gagné de billes ?* », seule l'expression 5 + ? = 13 est acceptée. L'expression ? + 5 = 13 est refusée). Ici encore, on observe un glissement entre l'usage que nous avions envisagé de ces représentations et celui qui en est fait par certains professeurs du projet. Notons que pour une phrase mathématique avec « ? » donnée, cette enseignante essaie en revanche de mettre en relation plusieurs calculs (pour 5 + ? = 13, elle cherche à faire apparaître 5 + 8 = 13, 8 + 5 = 13, 13 – 5 = 8 et 13 – 8 = 5), ce qui est intéressant.

Ainsi, conformément aux propositions faites initialement par l'équipe de recherche, les représentations en boîte et en rectangle ont été largement investies par les enseignants du projet dans le champ du calcul. Nous avons cependant observé un glissement vers d'autres fonctions chez plusieurs enseignants qui les ont notamment utilisées comme outil de représentation des situations pour la résolution de problèmes basiques.

## VI - FONCTIONS ASSIGNÉES AUX REPRÉSENTATIONS PAR LES ÉLÈVES

Nous interrogeons maintenant le rôle attribué par les élèves aux représentations mobilisées dans la ressource. Pour ce faire nous avons, lors d'entretiens d'explicitation individuels menés tels que nous l'avons décrit précédemment, proposé à quelques élèves de CE1 de résoudre deux problèmes. Le premier problème est dans le champ additif : « *Papy Stéphane a acheté une veste à 28 € et des nouvelles chaussures. Il a payé 52 €. Combien lui ont coûté ses nouvelles chaussures ?* », alors que le second est dans le champ multiplicatif : « *5 pirates se partagent les 35 pièces d'or de leur trésor pour tous en avoir le même nombre. Combien chacun en aura-t-il ?* ». Nous revenons sur certains points significatifs des témoignages de trois élèves dont nous avons modifié les prénoms pour préserver leur anonymat.

### 1 Alina

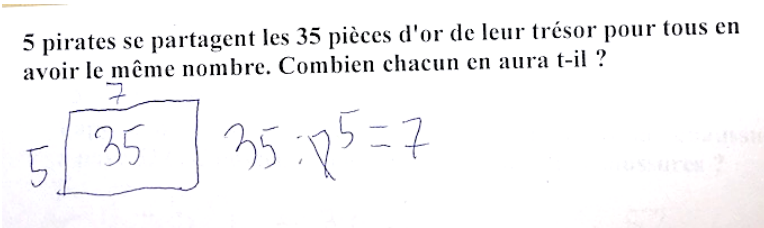



*Figure 9. Production d'Alina pour le problème des pirates.*

Pour résoudre le problème des pirates, Alina commence par identifier le champ concerné grâce au contexte du problème, ce qu'elle explique lors de l'entretien : « *Ben oui, si y'a 5 pirates, il faut se les partager équitablement, heu… y'a pas d'autre manière vraiment.* » Elle trace alors le rectangle et place 35 au centre parce que c'est « *le plus grand* ». On pourrait dire qu'elle a un usage très « technique » de l'outil rectangle (où mettre le plus grand nombre ?), mais ce dernier lui permet de résoudre correctement le problème. De plus, il correspond à la procédure experte qui consiste à déterminer le champ et repérer le plus grand des trois nombres en présence dans le problème afin d'identifier le calcul à effectuer (cette procédure n'est bien entendu valable qu'en présence de nombres entiers). Alina trouve le nombre recherché (7) sur l'affichage qui est situé sur le mur face à elle dans la salle de classe. Elle commence alors par écrire 35 : 7, puis raye le 7 pour finalement écrire 35 : 5 = 7.

Lors de l'entretien, elle justifie cette rectification de la manière suivante :

- *Chercheuse : Si tu avais écrit 35 : 7 = 5…*
- *Alina : Ça marcherait aussi mais le but c'est de mettre ce que t'as trouvé à la fin.*
- *Chercheuse : Parce que ça te permet quoi ?*
- *Alina : Oh je sais pas, c'est maître qui nous l'a dit d'le faire.*

Nous pouvons en déduire qu'elle connait l'équivalence entre 35 : 5 = 7 et 35 : 7 = 5 (qui sont deux écritures associées au même rectangle). Elle nous précise qu'elle utilise l'écriture pour laquelle le résultat est à droite du signe « = » par contrat, mais ne semble pas avoir conscience de l'intention du maître qui est vraisemblablement d'écrire la phrase mathématique pour laquelle le résultat est à la fin car cela permet de retrouver facilement le résultat.

## 2 Anton

Pour justifier le choix du calcul qu'il effectue pour résoudre le problème des pirates, Anton s'appuie sur sa connaissance des tables : *« Le seul nombre qui peut arriver à faire 35 c'est 5 × 7, 35 ».* On peut alors se demander s'il a réellement identifié le champ concerné. C'est en effet un biais temporaire de notre progression : dès la période 3, les élèves découvrent des problèmes multiplicatifs variés auxquels ils associent des écritures mathématiques pour lesquelles ils construisent du sens, mais les nombres en présence sont des nombres familiers puisqu'ils sont presque exclusivement situés « dans les tables » pour le champ multiplicatif. Des problèmes dont les nombres sont situés « en dehors des tables » sont proposés plus fréquemment les années suivantes.

## 3 Mila

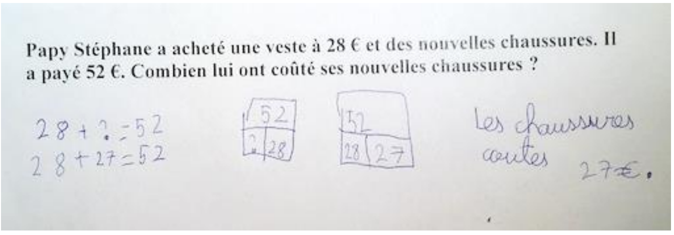



*Figure 10. Production de Mila pour le problème de papy Stéphane.*

Pour le problème du champ additif, Mila commence par produire une écriture mathématique avec « ? » qu'elle justifie très bien à l'oral lors de l'entretien : « *Il a acheté une veste à 28 € et des nouvelles chaussures, on sait pas combien ça coûte. En tout il a payé 52 €.* ». On peut noter que dans la façon dont elle verbalise la représentation du problème en lien avec l'écriture à trou, elle fournit à l'oral une expression congruente à l'énoncé et à la phrase mathématique qu'elle a écrite. Puis elle produit une écriture mathématique avec le résultat qu'elle détermine en ajoutant trois dizaines et en réajustant (elle commet une erreur de calcul lors du réajustement). Elle trace ensuite une boîte avec les deux données de l'énoncé et un « ? » en mettant « *le plus grand nombre en haut* ». Puis elle trace une boîte avec les deux données de l'énoncé et le résultat qu'elle a déterminé précédemment. Enfin, elle écrit une phrase réponse. Il semblerait que pour elle, les boîtes soient uniquement présentes par effet de contrat et ne présentent plus aucune utilité.

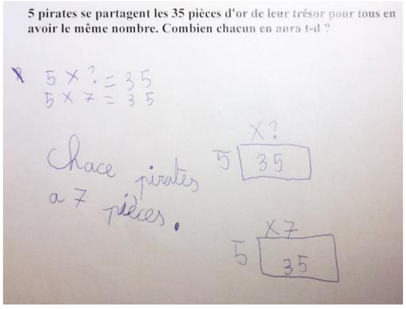



*Figure 11. Production de Mila pour le problème des pirates.*

Pour le problème du champ multiplicatif, Mila commence par identifier le champ. Elle repère immédiatement que c'est un problème de division mais elle produit l'écriture 5 × ? = 35 et verbalise lors de l'entretien le fait que pour trouver le résultat, elle préfère faire une multiplication à trou qu'une division : « *Je préfère la fois parce que je suis plus forte à la fois qu'à la division* ». Elle cherche mentalement combien de fois 5 pour arriver à 35 et obtient 7. Elle écrit alors 5 × 7 = 35. Elle trace un rectangle avec 5, ? et 35 puis un autre avec 5, 7 et 35. À la question « *Qu'est-ce que ça t'apporte ?* », elle improvise une réponse peu convaincante : « *Ça te permet d'écrire tes réponses et de garder un petit truc sur le côté qui va t'aider* », qui semble confirmer le fait qu'elle utilise les boîtes par effet de contrat.

### 4 Discussion

Alors qu'Alina produit d'abord le rectangle qui lui sert à conforter sa représentation du problème avant de devenir un outil de calcul, Anton et Mila, en revanche, produisent d'abord une écriture mathématique avec un « ? », puis une boîte ou un rectangle qui semblent n'être présents que par effet de contrat. Nous pouvons également noter que Mila s'appuie exclusivement sur les écritures mathématiques pour résoudre le problème. Elle a construit l'équivalence entre multiplication à trou et division.

Pour mieux comprendre les procédures de ces élèves, il est important de rappeler que dans la ressource fournie aux enseignants, la progression en calcul conduit les élèves dès le CP à utiliser et mettre en relation les signes « + » et « – » à partir des représentations en boîtes et dans des écritures pré-algébriques. Il en est de même à partir du CE1 pour les signes « × » et « : » par l'intermédiaire des représentations en rectangles et des écritures pré-algébriques.

Lorsqu'ils sont confrontés chaque semaine à la résolution de problèmes du champ additif ou multiplicatif en parallèle de la progression en calcul, les élèves prélèvent alors les connaissances nécessaires pour les résoudre dans le répertoire qu'ils se constituent progressivement dans le domaine du calcul. Cela les conduit à utiliser des représentations en boîtes ou en rectangles ou bien des écritures mathématiques (arithmétiques ou pré-algébriques), en fonction de la maîtrise qu'ils ont de ces différents objets mathématiques, mais aussi en fonction d'effets de contrat existant entre eux et leur enseignant.

## VII - CONCLUSION

Lors de cette recherche-action conduite sur trois années consécutives, nous avons pu constater que les enseignants se sont emparés de manière très diverse de la ressource mise à leur disposition. Tous ont exploité les représentations en boîtes et en rectangles pour proposer des activités originales dans le champ du calcul mental, dans le but de consolider chez les élèves les équivalences entre différentes écritures mathématiques. En revanche, la place à assigner à ces représentations dans la résolution de problèmes basiques a été diversement appréciée par les enseignants et a donné lieu à des pratiques différentes : imposer ou pas l'utilisation de ces représentations, la suggérer dans certaines catégories de problèmes et pas dans d'autres…

De même, les entretiens d'explicitation réalisés avec certains élèves ont montré qu'ils pouvaient avoir des utilisations diverses des écritures mathématiques (arithmétiques ou pré-algébriques) et des représentations en boîtes et en rectangles lors de la résolution de problèmes basiques. Les explications qu'ils ont fournies lors de ces entretiens laissent penser que cette diversité est liée à des niveaux de maîtrise différents de ces outils mathématiques d'un élève à l'autre ainsi qu'à des effets de contrat avec l'enseignant.

Si la plus-value de notre expérimentation dans le développement des habiletés calculatoires des élèves est très nette, ses effets sur leurs compétences en résolution de problèmes basiques n'ont pour le moment pas été attestés par une méthodologie de recherche adéquate. En effet, alors que six enseignants et leurs classes participaient au projet lors de sa première année, les autres s'y sont progressivement associés pour que toutes les classes et tous les enseignants des deux écoles y adhèrent finalement en troisième année. Ce point très positif, car témoignant d'un réel intérêt de la part de l'équipe enseignante pour notre projet, a toutefois rendu impossible les comparaisons à moyen terme entre performances des classes-tests et des classes témoins. En outre, les perturbations liées à la crise sanitaire de 2020 et 2021 ont affecté à la fois la mise en place du travail dans les classes et l'accompagnement du projet par les enseignants-chercheurs. Néanmoins, une analyse partielle faite à partir de la comparaison de productions d'élèves en début et fin d'année scolaire sur les mêmes problèmes basiques laisse entrevoir un effet positif prometteur sur les performances des élèves d'un point de vue quantitatif (meilleure réussite) et qualitatif (plus de procédures de calcul, moins de prise d'appui sur la schématisation).

Pour conclure, plusieurs questions demeurent et ouvrent de nouvelles perspectives pour notre recherche. Tout d'abord, quels sont les effets à plus long terme de cette expérimentation sur les compétences des élèves dans le domaine du calcul et de la résolution de problèmes basiques ? Quelle méthodologie robuste adopter pour suivre une cohorte et apprécier ces effets ? De plus, nous nous demandons comment enrichir la ressource pour mieux appréhender la question du transfert des habiletés en calcul et en résolution de problèmes à des nombres « en dehors des tables » et aux problèmes complexes. Enfin, une réflexion approfondie est à conduire concernant les conditions de diffusion de la ressource à d'autres équipes enseignantes.

## VIII - BIBLIOGRAPHIE

Blum W., Leiss D. (2005) « Filling up » - the problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623-1633.

Butlen, D. et Pézard, M. (2003) Une contribution à l'étude des rapports en habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire et au début du collège. *Spirale, revue de recherche en éducation, 31,* 117-140.

Butlen, D. et Pézard, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N, 79,* 7-32.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5,* 37-61.

Fischer, J.-P. (1993) La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement proactif, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5,* 177-210.

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques.* Note de synthèse pour une HDR. HAL : https://hal.archives-ouvertes.fr/ tel-01919188

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes. Collection Psychologies.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100,* 59-78.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation & Didactique, 2(15),* 9-26.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10*(2,3), 133-170.

Vermersch (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et continue.* Paris : ESF.

Verschaffel, L., Greer, B. et De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger

# REGARDS SUR LE COUPLE REPRÉSENTER- MODÉLISER DEPUIS UN PARCOURS PRÉPARATOIRE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES

**Olivier DELORD**
Professeur de Mathématiques en PPPE au Lycée Louis Barthou, PAU
Coordonnateur du LMB (Laboratoire de Mathématiques du Lycée Louis Barthou)
Olivier.Delord@ac-bordeaux.fr

Résumé :
Depuis la rentrée 2021, un nouveau parcours s'offre, à la sortie du baccalauréat, aux étudiants désireux de devenir professeur des écoles. Indépendamment de la licence universitaire sur laquelle s'adosse le parcours, les mathématiques y occupent une place centrale. Le texte de cadrage du PPPE en fixe les lignes entre reprise des mathématiques élémentaires, approfondissement des mathématiques du CRPE, résolution de problèmes, éléments culturels et historiques, etc. Dans le traitement des questions que les étudiants affrontent, et qui pour la plupart ont déjà été rencontrées dans leur scolarité, leur « machine à produire » représentations et modèles s'active sans relâche, avec ses réussites, mais aussi ses ratés et ses pannes. Nous proposons d'explorer deux situations géométriques qui ont été travaillées avec les étudiants de L1. A plusieurs égards, elles ont été révélatrices : qu'est-ce qu'elles ont à nous dire sur le couple « représenter- modéliser » ? Et comment tenter de dénouer au mieux, après les avoir entendues, de possibles imbroglios ?

## I - PRÉAMBULE

### 1 « Modéliser » et « représenter » : au cœur des mathématiques du PPPE

À la rentrée 2021, plusieurs parcours préparatoires au professorat des écoles (PPPE) ont ouvert en France. Ils mêlent des enseignements de culture générale et du socle commun dispensés en Lycée (voir le Cadrage national des enseignements disciplinaires au Lycée), des cours d'une licence universitaire adossée au parcours, et des stages d'observation et de pratique accompagnée dans les écoles.

Une des ambitions affichées du parcours concerne clairement les mathématiques : offrir aux nombreux étudiants se destinant au professorat des écoles éloignés de la discipline (pour des raisons de goût, de défiance, de lacunes) une occasion de renouer, si ce n'est avec le plaisir de l'activité mathématique, tout au moins avec une certaine confiance, un sens renouvelé, une compréhension plus approfondie du champ des mathématiques élémentaires.

À Pau, au Lycée Louis Barthou, ce sont deux classes de PPPE (sur les 24 proposées au niveau national) qui ont vu le jour, mélangeant des étudiants qui suivent une licence de Lettres et une licence MIASHS (Mathématiques appliquées aux sciences humaines et sociales).

C'est dans ce contexte, en s'appuyant sur des questions de nature géométrique proposées et pensées à partir du texte de cadrage du parcours en mathématiques, et en s'attachant aux cheminements réflexifs des étudiants, que le dialogue fécond entre les actes croisés, complémentaires, parfois difficilement démêlables, de modélisation et de représentation, a été interrogé. Par ailleurs, les éléments du cadrage national (p. 13) rejoignent le cœur des préoccupations du colloque :

> *La formation assurée en mathématiques au lycée dans le cadre de ce parcours prend largement appui sur la résolution de problèmes. Celle-ci constitue un cadre privilégié pour développer les six compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer) et leur donner du sens dans la perspective d'un enseignement qui favorise la prise d'initiative. L'analyse de l'activité de résolution de problèmes doit permettre d'identifier de quelle façon ces compétences interviennent, notamment « représenter », « modéliser » et « calculer » qui ont un rôle essentiel à l'école primaire.*

Il est à noter qu'il est demandé aux étudiants non seulement d'affronter des problèmes, mais aussi d'être capable d'exhiber les étapes cruciales d'un chemin de résolution (au moins dans le cas de problèmes relativement élémentaires) en scrutant les mécanismes qui s'y attachent. L'expérience des classes montre qu'une modélisation incorrecte peut être assortie d'un calcul juste menant à une solution privée d'examen critique, qu'inversement une structure adaptée peut conduire à un résultat faux non décelé, qu'un modèle peut ne pas être opérant car la représentation adéquate n'est pas mobilisée, ou qu'une représentation mal interprétée fausse la constitution du modèle, etc.

L'acuité des catégories, même poreuses, ne relève donc pas seulement d'un souci d'étiquetage, mais d'une attention fine aux mouvements de la pensée en mathématique, variée dans ses réussites, ses impasses, et ses bifurcations. Cet effort n'est pas l'assurance d'un aboutissement mais la condition de dévoilements successifs. Bref, tenter de mettre à jour les impensés, les non-dits, les modèles spontanés, les hypothèses prématurées, les contradictions, les renoncements d'une démarche, à commencer par les siens propres, mais aussi les possibilités de relance, ce qui est sans doute le plus délicat.

## 2 Questions, contextes, et motivations

La communication orale souhaitait offrir un panorama d'exemples pour étudier le duo représenter-modéliser sous différentes coutures dans les mathématiques du PPPE. Pouvait-on observer quelques lignes de force ? Au-delà des deux exemples qui vont être détaillés, le schéma proposé en conclusion a été construit pour tous les accueillir. Des questions de transposition, à partir du texte de cadrage, ont aussi été évoquées à Toulouse. Pour ce compte-rendu, nous examinerons deux questions rattachées à des problématiques spatiales au sens large, déjà rencontrées par les étudiants dans leur cursus. Elles ont été choisies car elles sont symptomatiques du dialogue constant et fécond, parfois trompeur ou à renouer, qui peut se jouer entre modèles et représentations. En étant attentif au travail des étudiants, on observe le jaillissement d'images mentales, de modèles de référence, de modèles antagonistes, d'analogies maladroites, de correctifs, de changement de cap, de représentations manquantes, etc. Il s'agit de les accueillir et de les méditer. Plus difficile : comment initier d'autres associations, favoriser les glissements, ouvrir de nouveaux chemins quand la source se tarit et que le fil entre les représentations disponibles et les modèles opérants se rompt ?

Voici les deux questions :

| |
|---|
| *Question 1* : Au jour du solstice d'été, pas d'ombre à Syène, et de courtes ombres à Alexandrie. Comment l'expliquer ? |

| |
|---|
| *Question 2* : Dans une cour d'école bordée d'un mur droit, les enfants inventent un jeu de course. Ils matérialisent au sol un point de départ et un point d'arrivée dans la cour. Entre les deux, ils doivent aller toucher le mur. L'endroit où les enfants touchent le mur est-il indifférent ? |

<u>Contexte de la question 1</u> : le texte de cadrage du PPPE propose d'explorer quelques mesures célèbres. Parmi celles traitant des lignes inaccessibles : le génial « calcul » de la circonférence terrestre par Ératosthène. Avant même l'admiration ressentie devant l'admirable précision du résultat produit, c'est bien la modélisation d'Ératosthène et des conditions de production de ce résultat qui nous intéressent ici. L'œuvre est au programme de l'enseignement scientifique commun en classe de Première. Les documents d'accompagnement du cycle 3 en sciences et technologies (*représentations géométriques de l'espace et des*

*astres*) évoquent déjà la méthode. Les étudiants sont donc censés avoir fréquenté ces questions. Elles n'en restent pas moins épineuses et édifiantes. Un parcours autour des mesures inaccessibles a été proposé aux étudiants : c'est dans ce cadre, et en leur laissant l'initiative de la modélisation avant même tout calcul, que la question 1 intervient. Nous interrogerons leurs productions au regard du couple représenter-modéliser.

<u>Contexte de la question 2</u> : ce grand classique est très riche, et à plusieurs entrées. Proposé en clôture d'une séquence d'introduction, ce premier problème notable permet de tirer des fils variés . Il a été conduit sur deux séances dont une en salle informatique. Les étudiants ont pu faire tourner les modèles. La dévolution a opéré, jusqu'à une impasse : les représentations n'étaient plus disponibles. Nous rendrons compte de ce parcours.

## II - CONFLIT DE MODÈLES

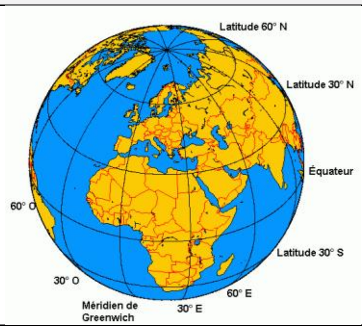
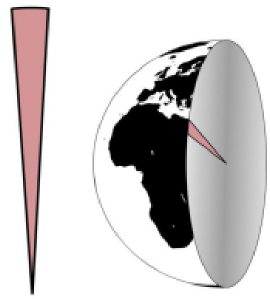
### 1 Scénario

En amont de la démarche d'Ératosthène, nous avons souhaité faire réfléchir les étudiants sur deux des hypothèses de son modèle. Et ce faisant exhiber que tout modèle fait des hypothèses, qu'il s'agit de mettre à jour, d'autant plus quand elles ne sont pas explicites. Les voici :

*Hypothèse 1* : Syène et Alexandrie sont sur un même méridien

*Hypothèse 2* : Le jour du solstice d'été, aucune ombre n'est visible à Syène le jour solstice d'été.

En effet, ces deux hypothèses sont nécessaires au modèle d'Ératosthène. La circonférence est un grand cercle. L'idée du calcul est d'évaluer la fraction que représente un arc accessible de grand cercle par rapport au grand cercle tout entier qui, lui, est inaccessible. Encore faut-il que les deux villes dont il a estimé l'éloignement soient sur un grand cercle. Si elles sont sur un même méridien, c'est le cas, l'axe Nord-Sud entre les deux villes antiques semblent approximativement respecté :

| Modèle cartographique | Modèle du méridien | Modèle d'un arc de grand cercle |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Représentation plane. Orientation Nord-Sud globalement respectée | Représentation sphérique. Syène et Alexandrie sont grosso modo sur le méridien de longitude 30°E (erreur de 2°) | Représentation sphérique et angulaire. L'arc entre Syène et Alexandrie correspond à un secteur angulaire de la circonférence terrestre |

Cette hypothèse est identifiée sans difficulté par les étudiants. Et si l'on avait choisi deux villes quelconques, y a-t-il un moyen simple de les rallier en cheminant sur un arc de grand cercle ? La question semble bien plus ardue, et l'on se range à l'évidence qu'avec les moyens antiques, suivre un alignement Nord-Sud (les caravaniers savaient s'orienter aux étoiles) semble la méthode la plus convaincante pour parcourir une portion de la circonférence terrestre. Les étudiants entendent l'intérêt de l'hypothèse 1 et sa vérité approximative.

Quant à l'hypothèse 2, on ne peut l'admettre que par ouï-dire ! Le schéma suivant qui représente l'illumination de la Terre par le Soleil lors du solstice d'été est donné :

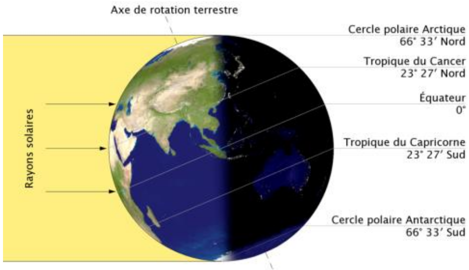



*Figure 2. Solstice d'été (source : wikipedia)*

Il est demandé aux étudiants de s'appuyer sur ce schéma pour donner du sens à l'hypothèse 2. Ils ont prolongé le rayon solaire médian sur la figure 2 (semblant éclairer approximativement Assouan) : il semble viser le centre de la Terre. Là aussi, la représentation fonctionne et permet de donner corps à l'absence d'ombre à Assouan le jour du solstice d'été. Pas de problème particulier.

D'autres hypothèses sont nécessaires au modèle d'Ératosthène :

*Hypothèse 0* : La Terre est considérée comme sphérique.

*Hypothèse 4* : Le Soleil est considéré comme tellement éloigné de la Terre que ses rayons peuvent être vus comme parallèles lorsqu'ils éclairent Alexandrie et Syène.

*Hypothèse 5* : On se place dans le plan contenant le méridien passant par Alexandrie et Syène.

L'hypothèse 0, qui a une longue histoire et a eu des contradicteurs, est une évidence pour les étudiants et apparaît dans les représentations précédentes qui la présupposent.

Nous allons voir que c'est l'hypothèse 4, hypothèse absolument cruciale, qui pose problème, et qui est tout, sauf naturelle. Sans même évoquer les questions que posent les modèles de rayons lumineux ou de lumière tout court, etc. Nous faisons remarquer à cet instant que la figure 2 avait été donnée et travaillée en amont de la question qui va suivre. N'était-ce pas une grossière erreur ? La représentation n'allait-elle pas orienter les étudiants de manière décisive ?

*Question* : Nous avons vu qu'au solstice d'été, il n'y avait pas d'ombre à Syène. Il y a en revanche de courtes ombres à Alexandrie. Comment l'expliquer ? Schématiser la situation.

## 2 Persistance du modèle spontané

Objectifs : il s'agissait de laisser l'initiative aux étudiants, d'accueillir leurs représentations, d'interroger leurs modèles. *Comme nous l'avons précisé, le schéma précédent de l'illumination était mal venu, puisqu'il sous-entendait le parallélisme des rayons ! Nous allons voir que les étudiants n'en ont tenu nul compte quand ils ont commencé à produire leur propre représentation.*

Remarque : la plupart des manuels proposent aux élèves de raisonner directement à partir d'un schéma déjà réalisé. Exemple canonique :

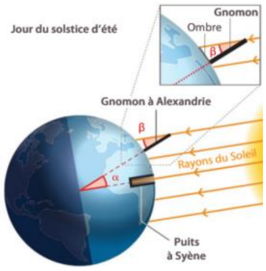



*Figure 3. Extrait du manuel d'« Enseignement scientifique » Hatier (classe de 1ère)*

A priori, en fournissant directement ce type de représentation, l'acte de modélisation à la charge de l'élève est tué dans l'œuf.

<u>Productions étudiantes</u> : le résultat est sans appel. Un seul étudiant dans la classe propose un modèle sphérique avec parallélisme des rayons. Voici ce qui est dessiné au tableau par quelques étudiants (le triangle lumineux et l'ombre sur le tableau est comme une mise en abîme involontaire mais éclairante !) :

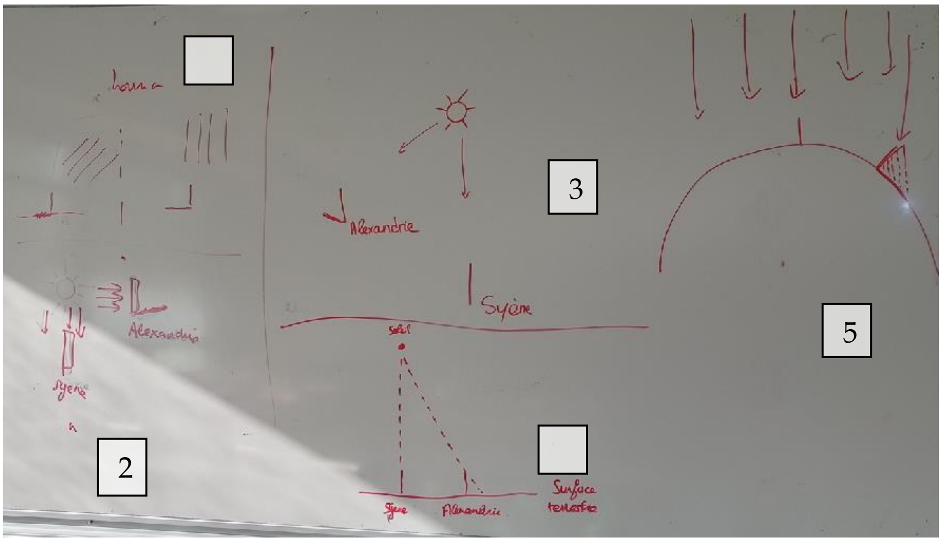



*Figure 4. Propositions d'étudiants*

Nous pouvons esquisser une classification des modélisations proposées :

| Modélisation | Présence du Soleil ? | Géométrie des gnomons et de la surface terrestre | Géométrie des rayons |
|---|---|---|---|
| 1 | Absent | Terre plate, lieux séparés | Parallèles localement, fortement divergents |
| 2 | Présent (imagé) | Terre plate, lieux mis en perspective | Parallèles localement, à angle droit |
| 3 | Présent (imagé) | Terre plate, lieux mis en perspective | Divergents |
| 4 | Ponctuel | Terre plate, lieux sur une ligne matérialisée | Divergents, dessin du triangle marquant l'ombre |
| 5 | Absent | Terre sphérique, gnomons sur un grand cercle | Parallèles, dessin du triangle marquant l'ombre |

<u>Premiers commentaires</u> : les hypothèses ultra-majoritaires sont les suivantes : Terre « localement » plate, rayons du Soleil divergents. Avec une gradation des représentations à l'intérieur de ces hypothèses : espaces des deux villes séparées, comme n'appartenant pas au même « espace » (frontière marquée), rayons verticaux et horizontaux, jusqu'au modèle du Soleil ponctuel et des villes représentées sur un même segment de droite.

Dans ce dernier modèle (modèle 4), un triangle apparaît, ou plutôt une configuration de Thalès avec deux triangles semblables. C'est ce que nous appellerons le modèle d'Anaxagore (modèle A) car Gamow (1966) lui attribue la paternité de la figure qui légitime un certain calcul de la distance Terre-Soleil :

> *Anaxagore prétendit que le Soleil flottait à environ 6500 km de la surface de la Terre. Son raisonnement était assez logique. Des voyageurs revenant de la ville de Syène lui avait appris que le jour du solstice d'été, à midi, le Soleil se trouve au zénith. Il savait d'autre part qu'à Alexandrie, 5000 stades (1 stade ≈ 160 m) au nord de Syène, le Soleil, ce même jour à midi, était à peu près à sept degrés du zénith. Croyant la Terre plane, il traça une figure, d'où il conclut que la hauteur du Soleil au-dessus de la Terre était égale à un peu plus de 40 000 stades.*

Cette paternité est remise en cause par les historiens. À cet instant, ce qui importe n'est pas l'exactitude historique mais la compréhension des conditions de production du modèle et l'examen de ses hypothèses implicites. D'ailleurs, le modèle A est quasi unanime dans la classe. Un seul étudiant propose le modèle 5, que nous avons raison de nommer modèle d'Ératosthène (modèle E) car il est établi, pour le coup, que l'on doit au conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie et à l'inventeur du mot « géographie » cet exploit d'avoir estimé avec une précision stupéfiante la circonférence terrestre ; surtout, en amont, d'avoir élaboré un modèle pertinent.

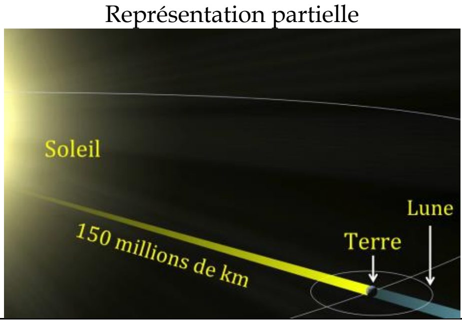
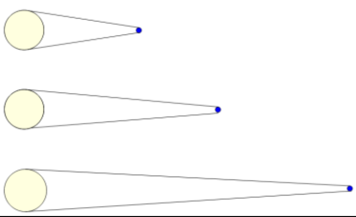
Dans le modèle A qui offre une situation de proportionnalité, connaître trois grandeurs (tailles du gnomon et de son ombre, distance Alexandrie-Syène) permet de déduire la quatrième inaccessible (distance Terre -Soleil). La méthode calculatoire est exacte, c'est le modèle qui ne l'est pas. Malgré l'éloignement des villes, un début de rotondité n'est pas envisagé. Cette erreur est reproduite par les étudiants car elle s'ancre profondément dans la perception. Le désert égyptien est comme un plan interminable et le Soleil si proche quand il se couche sur Alexandrie, ses rayons formant un faisceau éclatant à travers les nuages (effet de perspective) !

## 3 Questionner le modèle spontané

Une discussion s'est engagée. Nous avions sous les yeux deux modèles contradictoires et sous les yeux encore, un peu plus haut dans le livret, un schéma qui faisait l'hypothèse du parallélisme des rayons. Comment et pourquoi le modèle spontané a-t-il pu s'imposer avec une telle force ? Il s'agissait de ne pas l'écarter sans interroger ses racines, sa genèse évocatrice.

Une source lumineuse dans l'espace émet bien dans toutes les directions (pensons aux représentations naïves du Soleil qui disent quelque chose de vrai). Mais le Soleil est tellement loin. Nous connaissons désormais les ordres de grandeur : le Soleil a un diamètre cent fois plus grand que celui de la Terre et il est à 150 millions de kilomètres de nous. Si la Terre était représentée par une bille minuscule de un millimètre de diamètre, la lampe en forme de boule qui pourrait représenter le Soleil serait environ à 15 mètres et aurait 10 centimètres de diamètre. Nous essayons avec les étudiants de nous en faire une image mentale, qui puisse se substituer au modèle spontané qui semble indéboulonnable. Pour construire un schéma, il faut affronter l'échelle du système Soleil-Terre : délicat. Si l'on se joue le film d'un disque solaire s'éloignant de la Terre, peut-être admet-on avec davantage de conviction que le faisceau tend au parallélisme ? Le tableau suivant rend compte de ces examens successifs avec les étudiants :

| Représentations | Modèles |
|---|---|
| Représentation immédiate | Modèle perceptif : Soleil proche et rayons divergents, dû à un effet de perspective ! Les sens, la vue sont premiers. Cela s'impose à nous. Les raies sont bien parallèles mais nous apparaissent divergents pour les mêmes raisons que les bords parallèles d'un chemin sur lequel nous marchons semblent se |

| | |
|---|---|
|  | rejoindre à l'horizon.<br><br>Ce qui est pourtant vrai : une source lumineuse émet bien dans toutes les directions ! |
| Représentation schématique<br> | Quels modèles sous-jacents à ce type de dessin ? Deux modèles contradictoires cohabitent : le soleil émettant ses rayons dans toutes les directions (vérité spatiale) et des rayons arrivant avec une certaine inclinaison en un instant et un lieu donné de la Terre (vérité locale). La représentation peut induire chez l'observateur le fait que des rayons verticaux éclairent sans ombre une autre pyramide en arrière-plan. |
| Représentation partielle<br> | Il est très difficile sur un même schéma de représenter à la même échelle le Soleil, la Terre, et la distance qui les sépare. Par exemple, sur une feuille, si la distance Terre-Soleil mesure 15 cm, le Soleil est un disque de 1 mm de diamètre, et la Terre un disque invisible de 10 micromètres ! |
| Représentation dynamique<br> | Avec des dessins qui ne sont pas à l'échelle, mais en dynamique, on peut saisir le parallélisme. Éloignons le Soleil progressivement de le Terre. Le cône de lumière qui atteint la Terre tend à s'horizontaliser. L'imagination fait le reste. |

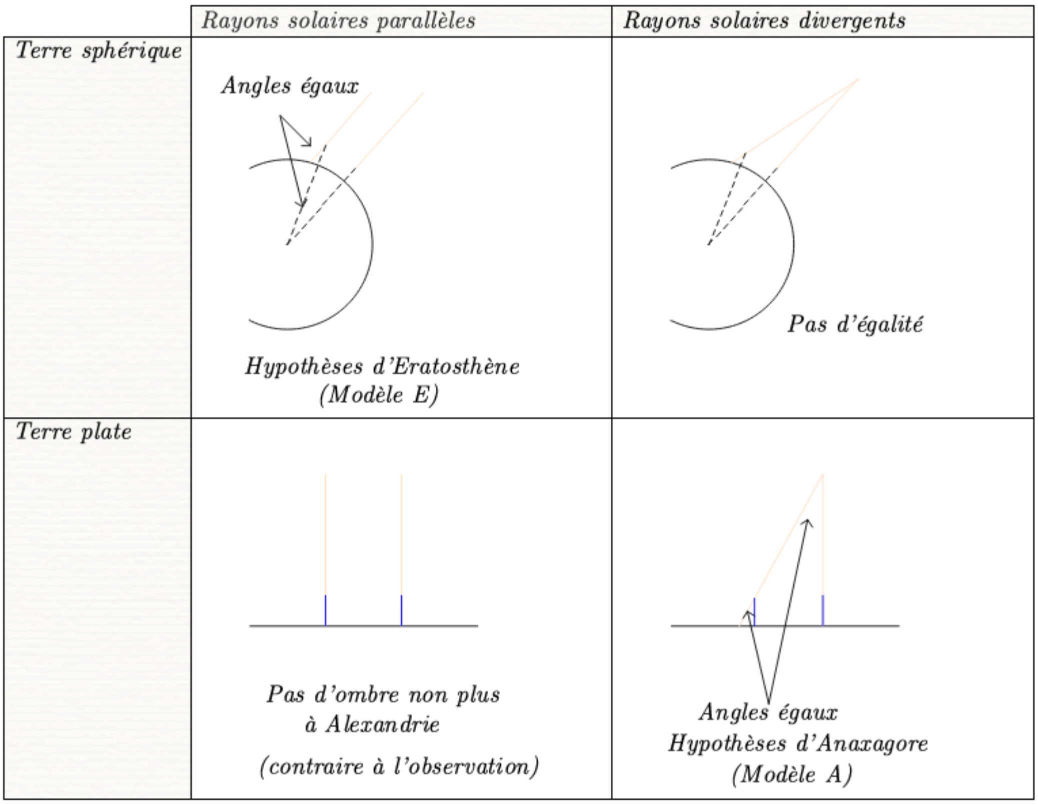
S'opposer à la force du modèle spontané ? Travail laborieux et patient de mise à jour de nos représentations et des modèles induits, de pas de côté, d'élaboration d'autres représentations qui puissent, si ce n'est se substituer définitivement aux anciennes, tout au moins les ébranler et offrir à l'esprit d'autres images convaincantes.

## 4 Logique propre des modèles

À l'époque d'Ératosthène, les ordres de grandeurs précédemment évoqués n'étaient pas connus. C'est d'autant plus frappant d'avoir produit, outre la sphéricité de la Terre (qui est un prérequis si l'on cherche sa circonférence), la fameuse hypothèse 4 : *le Soleil est tellement loin que l'on peut considérer ses rayons parallèles quand ils arrivent sur Terre.* Sauf que c'est bien le parallélisme (voir tableau ci-dessous) qui permet de récupérer l'égalité d'angles qui établit que la circonférence vaut 50 fois l'arc entre Syène et Alexandrie.

En amont de tout calcul de la circonférence terrestre, et nous nous répétons, il semble indispensable de demander aux étudiants de proposer leur propre schéma. Donner le schéma d'Ératosthène, c'est couper tout l'effort de modélisation. Même simplifié, le modèle pose encore des questions épistémologiques et didactiques que nous n'aborderons pas ici (voir par exemple (Décamp et De Hosson, 2011).

La méthode d'Ératosthène repose mathématiquement sur des calculs simples (angles alternes-internes et proportionnalité). Le travail de production des mesures, évoqué mais non détaillé (celle de l'ombre à Alexandrie et de la distance Syène-Alexandrie), serait bien sûr aussi à questionner. Les hypothèses cruciales sont les suivantes : Syène et Alexandrie sur un même méridien (c'est une bonne approximation), rayons du Soleil parallèles (c'est une excellente approximation même si parler de «rayons du Soleil » est une modélisation de la lumière qui est très loin d'être anodine), Terre sphérique (c'est une très bonne approximation). On peut présenter ci-dessous le tableau croisé des 4 modèles qui émergent à partir des hypothèses de sphéricité ou non de la Terre, et du parallélisme supposé ou non des rayons solaires. Ce tableau a été construit avec les étudiants suite à leurs productions.




L'hypothèse de parallélisme des rayons solaires, adossée à la sphéricité de la Terre, est déterminante. Cette hypothèse de parallélisme ne fonctionne plus avec l'hypothèse platiste (il n'y aurait alors pas d'ombre à Alexandrie non plus). Si on fait l'hypothèse de rayons divergents et de la sphéricité de la Terre, on ne dispose plus d'égalité d'angles intéressante. Il est à noter que les modèles A et E ont ceci de commun de fournir une situation de proportionnalité dans laquelle la grandeur qui n'est pas accessible, s'exprime en fonction des trois autres qui le sont. Comment mieux rendre compte, lorsque la modélisation est correcte, de la merveilleuse force applicative des théorèmes de la géométrie élémentaire ?

Sondons pour finir les soubassements des deux modèles dans l'optique qui nous occupe.

Modèle A : le soleil paraît proche, ponctuel et ses rayons divergents. Le modèle est local, fidèle aux sens, miniaturisé homothétiquement. La représentation est une copie perceptive. Elle induit le modèle. La main qui trace la figure a des yeux d'abord, et ce qui se dessine en esprit pour l'observateur à partir des positions du gnomon, du puits et du Soleil est un triangle. Le modèle peut être dit local, ponctuel, centré, homothétique et induit par la position de l'observateur, qui y est incorporé. La présence-absence simultanée de l'ombre à Alexandrie et Syène est expliquée par la divergence des rayons solaires.

Modèle E : le Soleil est rejeté au loin, absentifié, et la sphéricité de la Terre considérée. Le modèle est global, décentré, zénithal et extérieur à l'observateur qui s'en extrait. La présence-absence simultanée de l'ombre à Alexandrie et Syène est expliquée par la sphéricité de la Terre. L'hypothèse du parallélisme des rayons est nécessaire pour calculer l'angle inaccessible. La pensée du modèle est première, la décentration, contre-intuitive, induit la représentation correcte.

Entre A et E, il y a comme le passage d'un macro-espace qui englobe l'observateur à ce que l'on pourrait appeler un méta-espace qui le place à distance de l'espace qu'il représente. Ici, la représentation précède le modèle, elle est première. Est-elle conforme aux sens, ou effort d'imagination ? Modéliser, ce serait alors mettre à jour les hypothèses implicites des représentations qui viennent pour qu'elles gagnent le statut de modèle, quitte à ce que ce dernier soit inadéquat. D'ailleurs, *tous les modèles sont faux et certains sont utiles* comme le dit avec humour George Box. Le début d'un « bonne » modélisation, n'est-ce pas une représentation consciente d'elle-même ? Et si elle n'est pas fidèle au réel, qu'elle ait au moins conscience d'être fidèle à ses hypothèses, on peut toujours en changer.

Nous laissons la conclusion à Revuz. Même si son contenu n'est pas neuf (G. Bachelard et J. Piaget l'ont aussi exprimé avant lui), elle nous semble témoigner de manière limpide du phénomène que nous avons rapporté.

> *Si l'on opère une conversion du point de vue épistémologique à un point de vue psychologique et didactique, on est amené à souligner dans les triplets situation-modèle-théorie la priorité chronologique des modèles. De quelque phénomène qu'il soit témoin, aucun homme n'est à court d'explication. Et qu'est cette explication, sinon un modèle qui lui permet de rendre compte de ce qu'il a observé ou cru observer. La fabrication de modèles est une activité spontanée de l'homme, et peut-être est-elle une de ses caractéristiques. Seulement ces modèles spontanés sont généralement chargés de lourdes tares qui sont leur mauvaise adéquation, sinon leur totale inadéquation à la situation et leur incohérence interne. Ce qui caractérise l'activité scientifique ce n'est donc pas la création de modèles, mais l'exigence d'adéquation à la situation réelle et de cohérence interne des modèles. L'homme ne regarde pas innocemment la réalité telle qu'elle est, ses modèles spontanés la lui masquent. (Revuz, 1980, p. 36-37)*

# III - QUELS CHEMINS ?

## 1 Scénario

Nous rappelons la question :

*Question* : Dans une cour d'école bordée d'un mur droit, les enfants inventent un jeu de course. Ils matérialisent au sol un point de départ et un point d'arrivée dans la cour. Entre les deux, ils doivent aller toucher le mur. L'endroit où les enfants touchent le mur est-il indifférent ?

Nous décrivons sous forme du tableau ci-dessous les différentes phases, questionnements et propositions des étudiants, modélisations, simulations, conjectures, réfutations, reformulations de la question, relances, etc. La question est suffisamment ouverte pour ne pas présupposer que nous avons affaire à un problème de chemin minimal. D'ailleurs, une bonne partie des étudiants ont des arguments à faire valoir en faveur de l'« indifférence », comprise comme étant la marque d'une longueur constante quel que soit le trajet emprunté par l'enfant. À dessein, nous réservons les schématisations au paragraphe suivant pour mettre en lumière les articulations et correspondances entre représentations et modèles de manière plus épurée.

| Phase | Questionnement | Descriptif | Questions qui surgissent, commentaires |
|---|---|---|---|
| 1 | Individuel | Prise en main de l'énoncé, première schématisation sur feuille | Modélisation assez immédiate de l'espace de la cour par un plan, du mur par un segment, des positions de départ et d'arrivée par des points, « l'endroit » où l'enfant touche le mur est représenté par un point. En général d'un seul trajet générique représenté. Une représentation fléchée. Une étudiante empêchée : *doit-on représenter la situation en 3D ?*<br><br>Partie significative de schémas pour lesquels les points de départ et |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | d'arrivée de la course sont à égale distance du mur. |
| 2 | Echange individualisé avec le professeur et entre pairs | Questionnement critique du schéma, formulation des premières conjectures | Relecture de l'énoncé : prise de conscience que la situation d'équidistance au mur des points de départ et d'arrivée est un cas particulier. Question : est-ce que cela change quelque chose ?<br><br>Partage assez équitable des conjectures :<br><br><u>Conjecture 1</u> : l'endroit où l'enfant touche le mur est indifférent.<br><br><u>Conjecture 2</u> : l'endroit où l'enfant touche le mur n'est pas indifférent.<br><br>Arguments en faveur de la conjecture 1 :<br><br>Invariance du trajet total (*ce qui est perdu en distance d'un côté serait compensé de l'autre, conservation d'une longueur de « ficelle » qui tourne autour d'un point*) |
| 3 | Point collectif | Retour sur la modélisation,<br><br>émergence de deux conjectures contradictoires,<br><br>comment continue-t-on ? | Mise en accord sur le modèle : qu'a-t-on éliminé ?<br><br>Confirmation d'une hypothèse implicite : c'est une course, les enfants sont censés courir en ligne droite.<br><br>L'équidistance au mur des positions de départ et d'arrivée est un cas particulier.<br><br>Désaccord dans la classe dans les réponses spontanées à la question : conjecture 1 et 2. Que pourrait-on faire concrètement pour trancher entre les deux conjectures ? *Mesurer deux trajets différents* |
| 4 | Individuel | Mesures sur les schémas | Mesures effectives. |
| 5 | Débat collectif | Réfutation de la conjecture 1, transformation de la question initiale | Consensus pour <u>rejeter la conjecture 1</u>, si l'endroit où on touche le mur n'est pas indifférent, comme c'est un jeu de course, la question initiale prend une autre tournure : <u>où l'enfant devrait-il toucher le mur pour minimiser son trajet ?</u><br><br>Combien y a-t-il de trajets possibles *? Beaucoup, une infinité (mathématiquement)*<br><br>Geogebra permet de simuler de nombreux trajets. |
| 6 | Individuel | Modélisation de la situation avec Geogebra et simulation | Point libre.<br><br>Point lié (point sur un segment).<br><br>Les longueurs des segments apparaissent.<br><br>Aide pour écrire dans la fenêtre algébrique le trajet total comme somme des longueurs de deux segments.<br><br><u>Conjecture 3</u> : il existe une « zone » où l'enfant peut toucher le mur pour minimiser son trajet.<br><br><u>Conjecture 4</u> : il existe un point où l'enfant doit toucher le mur pour minimiser son trajet. |
| 7 | Point collectif | On retient la conjecture 4<br><br>Relance : au niveau du point assurant le trajet minimal, remarque-t-on | Zone ou point ? Insuffisance des décimales ?<br><br>Retour sur les situations de départ :<br><br><u>Conjecture 5</u> : Si les points de départ et d'arrivée sont à équidistance du mur, le trajet est minimal si l'enfant touche le mur « au milieu ». |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | quelque chose de particulier ? | Conjecture 6 : ce point n'est pas le milieu si les points de départ et d'arrivée ne sont pas à la même distance du mur. |
| 8 | Individuel | Egalité d'angles | Aide : penser aux angles.<br><br>Conjecture 7 : le trajet est le plus court lorsque les angles d'incidence et de rebond sont égaux (conjecture commune aux situations d'équidistance ou non). |
| 9 | Point collectif | Relance, analogie | A quelle situation tout cela peut-il faire penser ? Trajectoire d'une boule de billard ? réflexion de la lumière ? Symétrie ?<br><br>Point de blocage… Ces images mentales ne semblent pas disponibles.<br><br>Soit B' le symétrique de B par rapport au mur et I le point d'intersection entre [AB'] et le mur.<br><br>Conjecture 8 : Pout tout point M de $(d)$, on a : $AM + MB \geq AI + IB$.<br><br>Preuve (dialoguée) des conjectures 7 et 8. |
| 10 | Travail de groupes | Retour sur l'argument de la ficelle | Expérience d'une ficelle tendue matérialisant le trajet entre deux points fixes et un crayon mobile censé parcourir un segment de droite : le tracé est incurvé.<br><br>Réfutation de l'argument de la ficelle modélisant un trajet constant.<br><br>Caractérisation d'une ellipse de foyers F et F' : ensemble des points M tels que MF+MF' est constant.<br><br>Conjecture 9 : Si le mur de l'école était elliptique, et que les points de départ et d'arrivée se trouvaient au foyer, l'endroit où toucher le mur aurait été indifférent ! |
| 11 | Individuel | Calculs dans un cas particulier | On fixe des distances, et les étudiants calculent les valeurs exactes de deux trajets (théorème de Pythagore).<br><br>Détermination de la position I dans ce cas particulier (théorème de Thalès). HI=6,25. |
| 12 | Individuel puis dialogué | Introduction d'une variable et d'une fonction | On pose $HM = x$ dans le cas particulier précédent. Expression de la longueur L du trajet en fonction de $x$. Pour $x \in [0; 10]$, on a : $L = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 9}$. |
| 13 | Collectif | Simulation avec Geogebra | Dans deux fenêtres, vision simultanée des déplacements de M et du point de coordonnées $(x\ ; L)$. Tracé de la courbe de la fonction $x \longmapsto L$.<br><br>Conjecture 10 : le minimum de la fonction $x \longmapsto L$ est obtenue pour $x = 6{,}25$.<br><br>Au passage, entre le trajet le plus court (12,81) et le plus long (15,44), 20% de longueur en plus. |
| 14 | Prolongement (étudiants MIASHS) | Recherche du min. de de la fonction $x \longmapsto L$. | Calcul de la dérivée, recherche du point stationnaire. |

Avant d'aller plus loin, il nous semble intéressant de souligner les points suivants :

— À l'exception notable près de l'introduction du symétrique, la dévolution, plutôt les dévolutions successives, ont globalement eu lieu.

— L'introduction du symétrique a été un point de blocage.

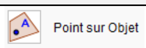
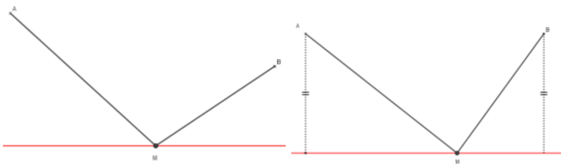
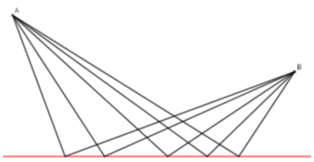
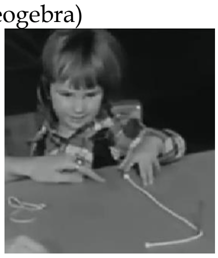
— Le cheminement progressif dans une formulation de plus en plus fine de la manière de traduire le problème est un cas d'école. Il a demandé un temps incompressible. La preuve géométrique, si elle ne tombe pas tout à fait encore comme un fruit mûr à l'issue du processus, est facilitée par cette décantation.

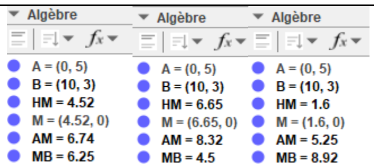
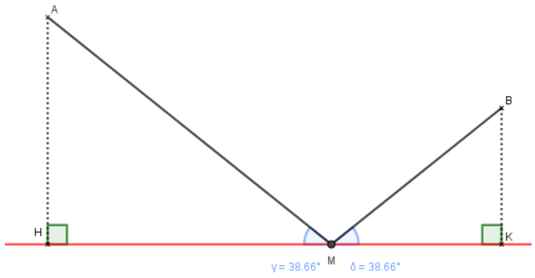
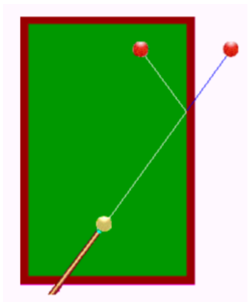
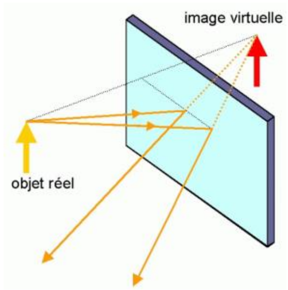
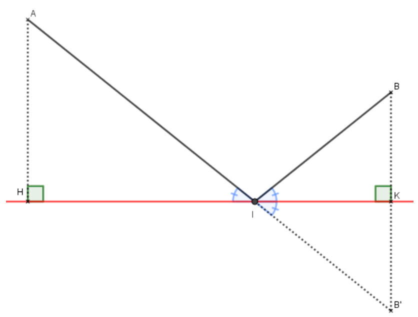
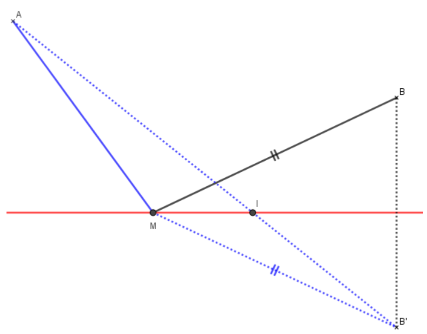
— Nous avions vu avec les étudiants un extrait d'un film de Jean Piaget où un enfant non conservant imaginait qu'une ficelle de longueur fixe qui pivotait autour d'un point changeait de taille. Par analogie, une étudiante a utilisé un argument de conservation en citant cet extrait. C'est la remarque de cette étudiante, « trop conservante » pour le coup dans cette situation, qui a suscité l'activité autour de l'ellipse à la séance suivante.

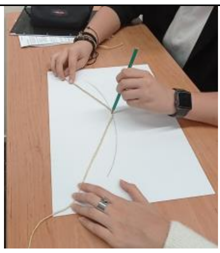
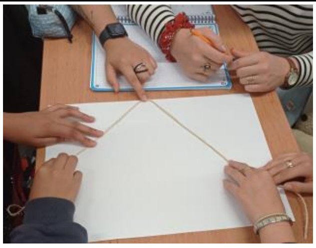
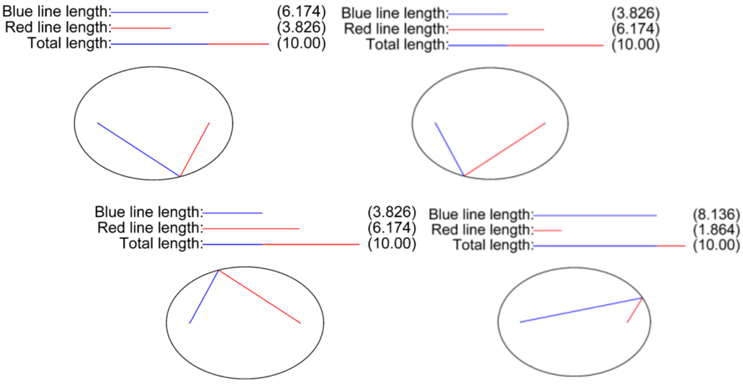
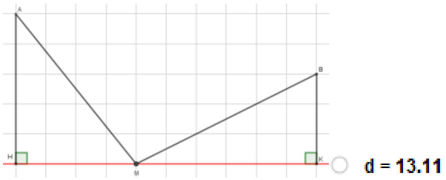
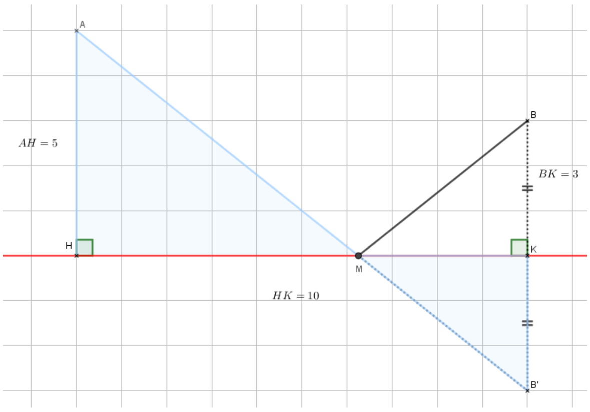
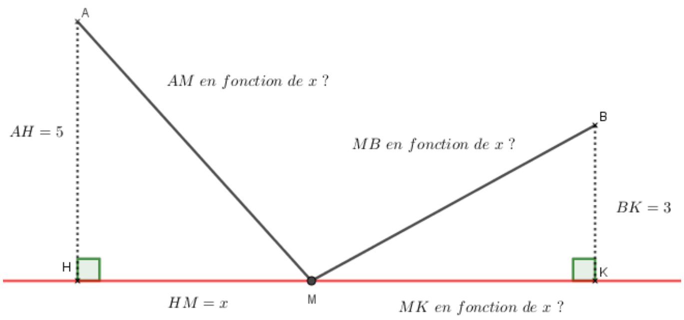
À une échelle très modeste, cet exemple montre ce qu'explique Lakatos (1984) dans son essai sur la logique de la découverte mathématique. L'approche heuristique est faite de conjectures, de reformulation de la question en sous-conjectures, de lutte des modèles, d'abandon provisoire par contre-exemple, de déplacement, de reprise d'une idée abandonnée, etc. : *en sciences, on trouve d'abord et on cherche ensuite.* Ce renversement, contre-intuitif de prime abord, s'exprime dans ce problème : les représentations induisent les modèles qui sont testés. Supposons que l'endroit où l'enfant touche le mur est indifférent, alors cela signifie que deux trajets différents ont la même longueur. On mesure : ce n'est pas vrai. Abandon de l'hypothèse, dans laquelle se niche une autre forme de mur, la forme elliptique, sur laquelle on pourra revenir. La question se transforme alors : si l'endroit où l'enfant touche le mur n'est pas indifférent, dans un contexte de course, où doit-il toucher le mur pour que son trajet soit minimal ? La question initiale se reformule dans les termes d'un problème d'optimisation. Le travail sur les représentations géométriques et les simulations conduisent à une observation remarquable : le minimum est obtenu en cas d'égalité d'angles. Ce n'est pas anodin : cherchons de ce côté, etc. Finalement, quand la question est resserrée en son cœur (on a *trouvé*), *chercher* la preuve à la fois s'impose et paraît moins inaccessible.

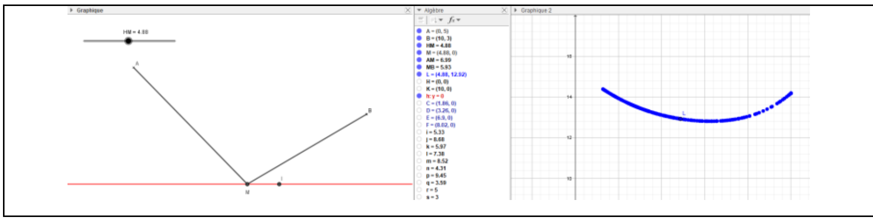
## 2 Le jeu dynamique des représentations et des modèles

Ici, le tableau livre toutes les représentations en vis-à-vis des modèles, qui en jaillissent ou les justifient, dont se sont saisis les étudiants.

| **Représenter** | **Modéliser** |
| --- | --- |
| Image mentale ?  Deux schémas   | Consensus sur un modèle-plan, des trajets rectilignes, 3 points essentiels (dont l'un est lié à un segment).<br>Cas général versus cas particulier quand à la distance des points au mur. Abandon provisoire du cas particulier (repris pour saisir la symétrie sous-jacente). |
| Schéma de plusieurs trajets et image mentale (sur feuille (mesures) puis simulation avec Geogebra)<br> <br>Affichages de Geogebra Image en tête du film de J. Piaget | Modèle (1) : invariance de la longueur des trajets (modèle conservant)<br>Arguments en faveur du modèle 1 :<br>-type « croissant+décroissant =constant » ou « petit+grand=même longueur »<br>-évocation d'un enfant non-conservant vu dans un extrait de film de Piaget (ficelle de longueur fixe tournant autour d'un clou non reconnue comme étant de longueur constante) : étudiante ici « trop » conservante<br>Modèle (2) : variation de la longueur des trajets |

| | |
|---|---|
|  | Modèle (1) écarté après mesures sur les schémas (et confirmation avec Geogebra) |
| Affichage des angles sur Geogebra<br> | Modèle angulaire : trajet de longueur minimale obtenu lorsque l'angle avec lequel arrive l'enfant sur le mur est le même que celui avec lequel il repart (configuration de deux triangles semblables) |
| Analogies<br> | Modèle du billard : la bille rebondit sur la bande du billard en angle égal à l'angle sous lequel elle l'a touchée. Pour se repérer plus facilement, il est courant d'avoir des marques sur le bord des billards pour mieux se positionner, afin de mieux calculer la symétrie du rebond.<br><br>Modèle de réflexion lumineuse sur un miroir plan : angle d'incidence et de réflexion sont égaux. La lumière suit le trajet le plus court. |
| Représentation du symétrique du point d'arrivée<br> | Modèle de la symétrie : la solution du problème est le point d'intersection entre le segment [AB'] et la droite qui porte le mur. |
| Représentation d'un trajet nécessairement plus long<br> | Modèle de la symétrie et de l'inégalité triangulaire : la solution du problème est le point d'intersection entre le segment [AB'] et la droite qui porte le mur. Minimiser AM+MB c'est minimiser AM+MB' (inégalité triangulaire dans AMB'). |
| Tracés d'étudiants (invariance de longueur des trajets) | Modèle d'invariance de la longueur du trajet : si le trajet est de longueur fixe, avec positions de départ et d'arrivée fixes et forme du trajet conservé, la rectitude du mur est remise en cause. Si l'on reste sur un mur droit, la ficelle se détend. |

| | |
|---|---|
|   | |
| Animation sur l'ellipse (wikipedia)<br> | Modèle de l'ellipse : l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dit foyers, est constante.<br>Si l'on joue au même jeu dans une cour elliptique en positionnant les points de départ et d'arrivée aux foyers de l'ellipse, peu importe l'endroit où l'on touche le mur car la longueur du trajet reste la même. |
| Représentation de deux triangles rectangles dans un cas particulier<br> | Modèle de la configuration de Pythagore : calcul d'un trajet comme somme de deux hypoténuses de deux triangles rectangles dans le cas particulier AH=5, HM=4, MK=6, et KB=3. Cohérence avec l'affichage de Geogebra : $\sqrt{41}+\sqrt{45}\approx 13{,}11$. |
| Représentation de deux triangles semblables dans un cas particulier<br> | Modèle de la configuration (papillon) de Thalès : position du point assurant le trajet minimal dans le cas particulier AH=5, HM=4, MK=6, et KB=3. On a : $\frac{HM}{10-HM}=\frac{5}{3}$. On en déduit $HM = 6{,}25$. Cohérence avec l'affichage de Geogebra. |
| Schéma légendé (avec variable et relations à découvrir)<br> | Modèle de dépendance fonctionnelle (dans un cas particulier) :<br>$MK = 10 - x$, $AM = \sqrt{25 + x^2}$, $MB = \sqrt{(10-x)^2 + 9}$<br>Pour $x \in [0; 10]$, on a : $L = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 9}$. |
| Trois fenêtres simultanées de Geogebra | Modèle graphique |

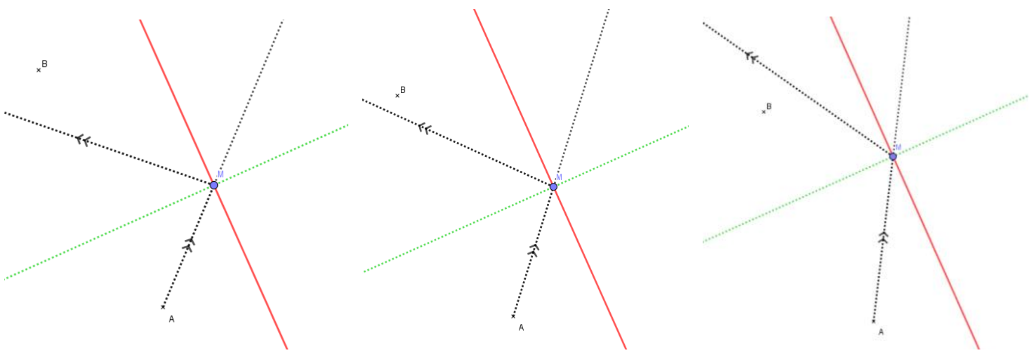
| | |
|---|---|
|  | Lorsque M se déplace, trace du point de coordonnées (x ;L) dans un repère. Identification d'un minimum. |

<u>Commentaires et nouvelles pistes possibles</u> : Il apparaît clairement que représentations et modèles se portent, s'engendrent, jouent un ping-pong qui ponctue l'aventure de résolution. Invariance ? Modèle réfuté en travaillant sur la représentation. Et si l'on décidait de l'imposer ? C'est une autre forme qui naît, dont le modèle sous-jacent est à explorer. Registre géométrique, registre métrique, registre angulaire, registre de la symétrie, registre des triangles (rectangles ou semblables), registre des lieux de points, registre des coniques, registre fonctionnel, croisement et interaction des registres. Au plus difficile, on justifie le modèle et on écrit la preuve parce qu'on la *voit* se déployer depuis la représentation. Dans le cadre fonctionnel, Geogebra permet la visualisation simultanée des registres de représentations géométrique, numérique et graphique, et les effets de variations de l'une sur les autres chers à Duval (2002) quand il souligne l'importance des phénomènes de conversion entre registres.

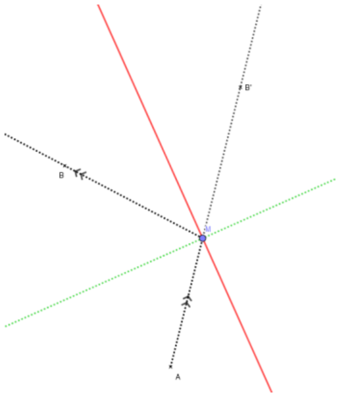
Revenons au point de butée : comment penser au symétrique ? C'est au-delà du mur. L'égalité des angles d'incidence et de rebond suggère une symétrie par rapport à la normale. Et non par rapport au mur. Pour débloquer les étudiants, nous avons tenté un questionnement analogique qui faisait un pas de côté : *cela ne vous fait pas penser à des situations que vous avez déjà rencontrées ?* Pas de réponse. *Le jeu du billard ? La réflexion de la lumière sur un miroir plan ?* Ces pistes latérales ont éveillé la curiosité, stimulé des connexions sans doute, mais aucun étudiant n'a évoqué l'idée décisive.

Avons-nous été trop impatient ? L'analogie entre la trajectoire de l'enfant vers le mur et celle qu'on imprimerait à une boule de billard pour en toucher une autre par rebond sur une bande a-t-elle été bien comprise ? Devait-on inventer une nouvelle activité s'intéressant à ce que vise réellement un joueur de billard (effectivement le symétrique de la boule à percuter par rapport à la bande) ? Pouvait-on déplacer la question initiale : et si l'on devait rejoindre un point de l'autre côté du mur ?

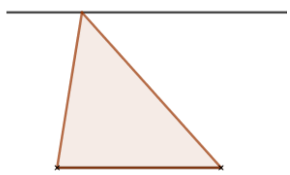
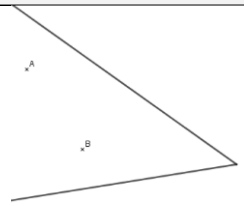
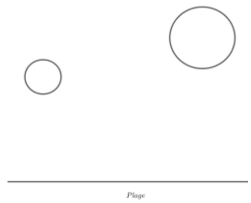
Nous formulons une hypothèse qui sera à tester : c'est sans doute encore du côté de la dynamique des représentations qu'il faut chercher pour faire émerger le modèle souhaité. Il est nécessaire de laisser du temps aux étudiants pour manipuler le modèle du billard ou de la réflexion d'un rayon lumineux en libérant provisoirement la contrainte du passage par B.



Le joueur de billard expérimente la symétrie de la trajectoire incidente et de son rebond par rapport à la normale à la bande. Ci-dessus : trois échecs. Mais ce qu'il vise aussi, c'est un point virtuel. La réussite a lieu quand la direction incidente se prolonge en passant par le symétrique de la boule à percuter par rapport à la bande. La manipulation concrète de ce type de représentation avec un logiciel de géométrie dynamique par les étudiants eux-mêmes a manqué pour produire de manière autonome l'ultime conjecture et le modèle associé qui ne venait pas : la solution était du côté d'une seconde symétrie, celle d'axe le mur.



Pour finir, on peut évoquer trois prolongements à proposer aux étudiants pour réinvestir le jeu de ses symétries :

| Q1 : Parmi tous les triangles de même aire ayant une base commune, quel est celui qui a un périmètre minimal ? | Q2 : Chemin le plus court entre A et B en touchant les deux murs ? | Q3 : Trajet minimal entre deux îles circulaires en passant par la plage ? |
|---|---|---|
|  |  |  |

## 3 Un problème, des modélisations

À travers un réseau de situations, nous avons abordé avec les étudiants de PPPE les notions de géodésique (chemin le plus court dans un espace donné, que ce soit dans le plan euclidien, sur une surface, dans un graphe, etc.) et de distance, modèle antérieur nécessaire (pour pouvoir parler de chemin le plus court, il faut une métrique) en réponse à des questions qui sont souvent de nécessité : minimiser les pertes sur les terres arables, tendre un fil, calculer une superficie pour lever l'impôt, minimiser un trajet, etc. Voici des armatures conceptuelles générales, bref des modèles. Pour ne donner qu'un exemple, le texte de cadrage demande d'aborder un exemple de géométrie non euclidienne à travers la géométrie sphérique : qu'est-ce qu'une « ligne droite » sur une sphère, au sens de chemin le plus court (géodésique) ? Un grand cercle. Cela doit avoir un sens très concret pour les oiseaux migrateurs, et de manière un peu plus polluante pour les compagnies aériennes qui cherchent néanmoins à minimiser les longueurs de leurs trajets. Voici ci-dessous une bataille épique de représentations et de modèles que nous ne détaillerons pas ici !

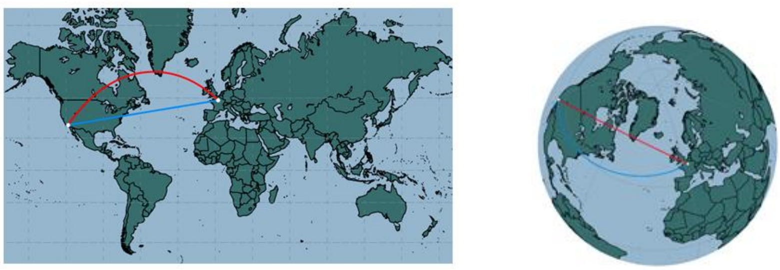


*Figure 5. Comparaison entre les routes loxodromique (bleu) et orthodromique (rouge) entre Paris et Los Angeles sur une carte en projection de Mercator et sur le globe. (source : wikipedia)*

Dans notre exemple de chemin le plus court dans la cour d'école, il y a plusieurs types de modélisations générées à partir du modèle euclidien des deux points et de la droite : métrique, angulaire, recours aux symétries, fonctionnelle. Il est intéressant à ce titre d'entendre Dhombres quand il distingue « modèle » et « modélisation » :

> *Un exemple ancien résume simplement ce que je veux distinguer. Faire de la force en mécanique un vecteur, c'est-à-dire une longueur dans un espace euclidien, dotée d'une direction et d'un sens (flèche) est un* modèle *qui peut interpréter le levier d'Archimède, la gravitation, etc. Travailler sur les vecteurs comme éléments d'un espace vectoriel, donc installer l'algèbre linéaire avec ses opérations en mécanique jusqu'à la notion de vecteur propre, est pour moi une* modélisation. *Une autre* modélisation *serait celle de l'analyse vectorielle de la géométrie différentielle, mais il faudrait alors faire entrer la notion de couple vectoriel avec le jeu de la vis dans le modèle décrit plus haut avec la force. (Dhombres, 2004, p. 27)*

Les objets mathématiques premiers qui encodent le fragment de réel qui intéresse, le *modèle*, ne présage pas des mathématisations (corpus de concepts et de méthodes opérant sur les objets premiers) qui seront activées à partir du modèle : les *modélisations*. Si la démonstration géométrique est lumineuse (sans jeu de mots !), nous avons vu que la pensée du symétrique ne vient pas facilement. En revanche, certains étudiants (L1 MIASHS) ont introduit des variables.

En suivant l'approche de J. Dhombres, nous pouvons partager avec le lecteur d'autres modélisations et replacer ce problème dans les champs historique et épistémologique. Cela ne dépasse qu'en apparence le cadre du PPPE qui forme les étudiants à la polyvalence, à la démarche et à la culture scientifique, à la capacité à établir des ponts entre les disciplines. Esquissons seulement et sans les détailler dans le cadre de cette communication, quelques emboîtements possibles. Quelle est la question ? Chercher un plus court chemin, une géodésique. La question est fondamentale en ce sens qu'elle transcende les cadres géométriques qui la voient naître (géométrie euclidienne et sphérique notamment, au programme du PPPE). Pour les trajets lumineux et leur réflexion sur des miroirs plans, le résultat est connu depuis l'Antiquité (Héron). Ce principe d'extrémalité (minimisation d'une longueur) n'est qu'une sous-question de celui de Fermat (minimisation d'un temps (à l'œuvre dans la réfraction)), elle-même cas particulier d'un principe général de moindre action (minimisation d'une énergie). Nous résumons les différents enchâssements des modélisations évoquées dans le schéma non clos ci-dessous. Que ce soit par extension ou glissement, on connecte les modèles et les représentations à des questions plus larges. N'est-ce pas l'occasion d'inviter les étudiants à puiser dans le vivier des situations qu'ils ont déjà rencontrées ? À entrevoir des rapprochements masqués entre des questions et des disciplines apparemment éloignées ? À tisser les fils d'une matrice problématique commune ?

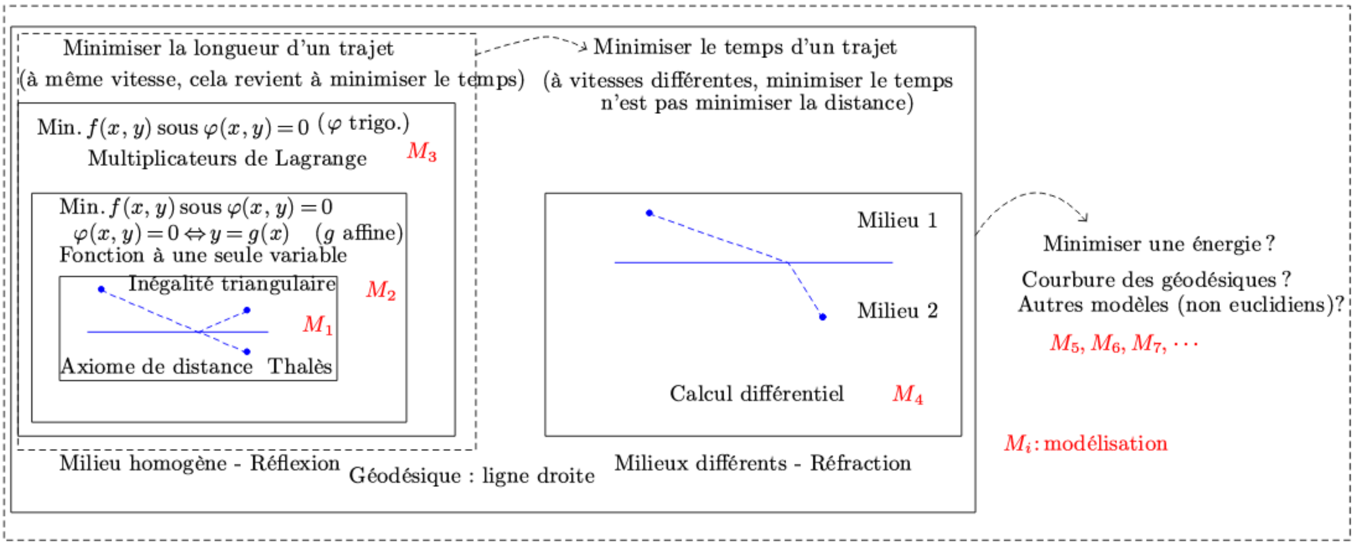


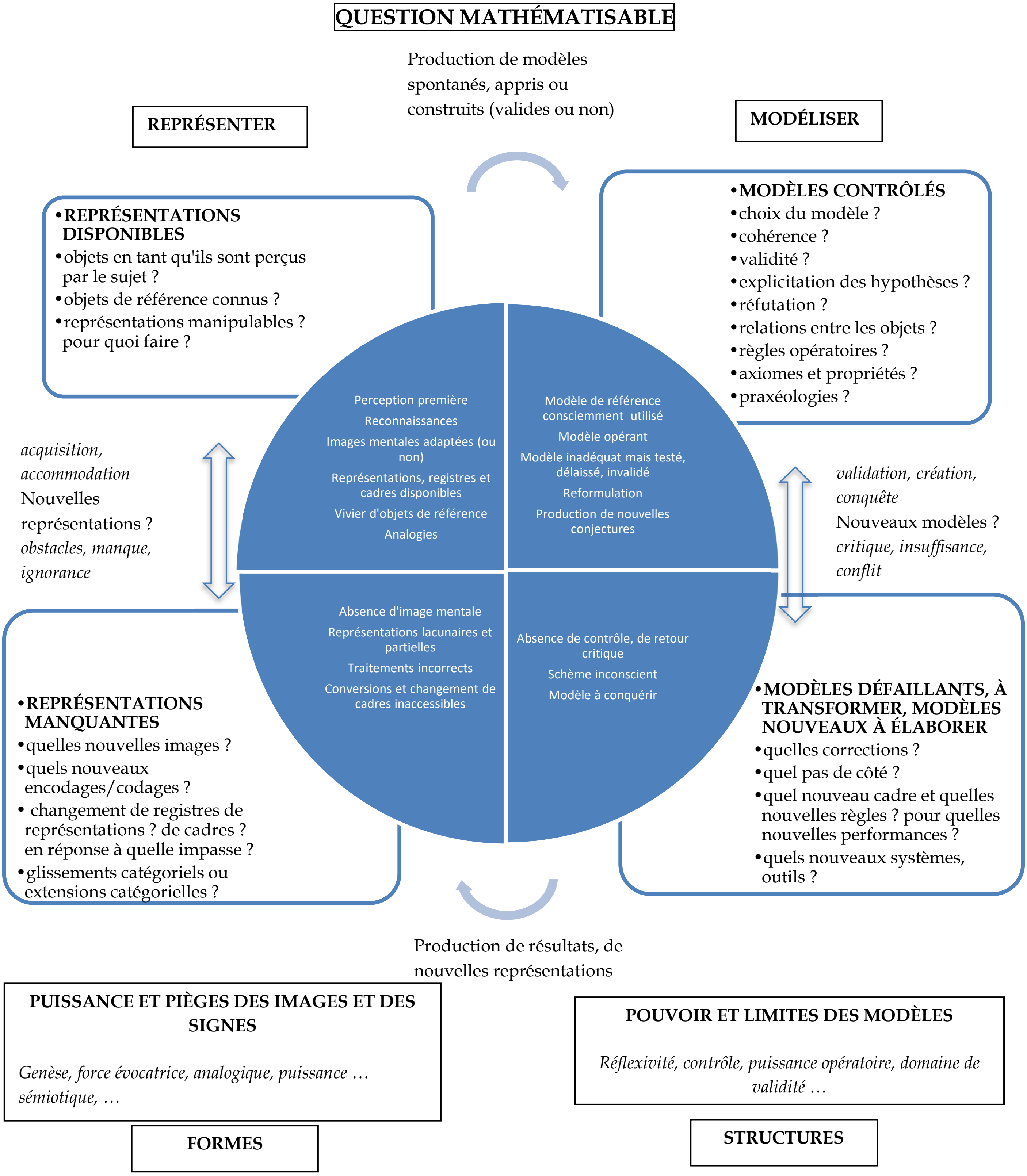

*Figure 7. Un modèle, des modélisations. Une question, une sous-question d'autres questions*

# CONCLUSION

Nous avons présenté deux situations. D'autres exemples, bien trop en fait pour le cadre contraint d'une restitution détaillée, avaient été préparés pour la communication et auraient pu être mobilisés. Les problèmes proposés aux étudiants de PPPE puisent dans un corpus mathématique qu'ils ont déjà rencontré d'une manière ou d'une autre. Nous le rappelons pour signaler qu'il ne s'agit pas pour eux a priori de conquérir de nouveaux objets mathématiques, mais de revisiter ceux qu'ils sont censés avoir déjà rencontrés pour mieux les comprendre, en user, parfois les redécouvrir quand ils leurs avaient échappé. Nous n'avons encore que peu de recul sur ce tout jeune parcours. Et nous apprenons nous-mêmes en chemin au moins autant que les étudiants. Nous souhaitons toutefois dégager certains traits communs dans ce que nous avons pu observer des processus en jeu dans l'activation du couple représenter-modéliser face à une situation reconnue comme pouvant être mathématisée et résolue par un étudiant de PPPE.

De nombreux chercheurs (notamment A. Revuz, R. Douady, R. Duval, Y. Chevallard, J. Dhombres) ont pointé les difficultés inhérentes aux phénomènes d'abstraction, de reformulation, représentation, traduction, changement de cadres, conversion, modélisation, etc. Sur le terreau terminologique commun : *qu'entend-on par représentation ? modèle ? modélisation ?* germe la diversité conceptuelle, et il faut naviguer avec attention pour entendre la voix singulière des auteurs. Pour un même signifiant, cohabitation de signifiés. On s'est autorisé une navigation libre et souple dans l'univers lexical. Re-présenter, n'est-ce pas présenter à nouveau ?

Dans tous les cas, il s'agit de coder des informations choisies en les rapatriant à l'intérieur d'un modèle mathématique manipulable capable de produire en sortie l'information recherchée. C'est finalement une chaîne d'encodages ou de codages qui s'articule et dont les maillons sont autant de sauts (et donc de difficultés à surmonter) posant des questions didactiques spécifiques (car relatives à la nature de chaque saut). Nous employons le terme très large de « codage » susceptible d'embrasser tout type de transformation : de la première évocation à la représentation mentale spontanée, du cycle de modélisation comme acte de science (des fragments du réel vus à travers des objets mathématiques) aux modélisations successives des concepts mathématiques comme échafaudage interne, des changements de cadres et des actes de conversion entre différents registres de représentation des objets aux traitements à l'intérieur d'un registre particulier, etc.




Les éléments cardinaux des deux situations qui ont largement été discutées peuvent être repérés grâce à la carte ci-dessus. Elle est découpée verticalement en deux espaces poreux, qui s'alimentent l'un l'autre. Horizontalement, on découpe à nouveau les deux colonnes en deux régions : la partie haute concerne les activités conscientes et contrôlées tandis que la partie basse explore les manques et les défaillances. Il existe aussi une circulation entre le bas et le haut, et inversement. Ce schéma grossier a le mérite, dans le mouvement des réponses individuelles et collectives à la question initiale, d'embrasser et de situer des phases importantes : conjectures, choix et contrôle des modèles, reformulation, avancées dans les traitements, mais aussi lignes de faille, lacunes, embûches, possibilités de relance et de dépassement, etc.

Accompagner les étudiants sur leur chemin de résolution est délicat : en embuscade, à chaque étape, des questions. Quelles sont les causes d'une mauvaise circulation entre images, représentations et modèles ? Que faire avec les représentations ancrées qui posent problème ? Comment laisser leur chance aux modèles inexacts ? Comment stimuler la production de nouvelles représentations en cas d'impasse ? Comment susciter et organiser les phases d'initiative et de contrôle ? Comment inviter les étudiants à développer une réflexion personnelle et critique des modèles qu'ils utilisent ? Quelles nouvelles questions leur proposer pour solidifier les modèles conquis ?

Dans la démarche scientifique, il faut vaillamment interroger ses propres représentations, ses modèles, ses erreurs. Qu'il est difficile ce chemin de Sisyphe ; à tout âge. Pour un futur professeur des écoles, méditer en amont la leçon pour soi-même, c'est se mettre en position d'accompagner avec davantage d'écoute, de discernement et d'inventivité, les pas mathématiques de ses futurs élèves.

## IV - BIBLIOGRAPHIE

Décamp, N., De Hosson, C. (2011). La procédure de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite d'Ératosthène : un support pour une reconstruction didactique. *Grand N, 87,* p. 77-91

Dhombres, J. (2004). La modélisation doit-elle être la partie vive de l'enseignement des mathématiques ? Les leçons d'une histoire du professeur de mathématiques en tant que metteur en scène. *Actes du colloque Quelles mathématiques au lycée ? (IREM de Limoges)*, p. 26-65

Duval, R. (2002). Cadres et registres : comment décrire et analyser l'activité mathématique ? *Actes de la journée en hommage à Régine Douady (IREM de Paris)*, p. 83-105

Gamow, G. (1966). *Une étoile nommée Soleil.* Dunod.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Hermann.

MEN (2021). *Parcours préparatoire au professorat des écoles. 2021. Cadrage national des enseignements disciplinaires au lycée.* Eduscol, p. 14-16

Revuz, A. (1980). *Est-il possible d'enseigner les mathématiques ?* PUF.

# COMPRENDRE COMMENT LES ELEVES APPRENNENT POUR CONSTRUIRE SES PRATIQUES ENSEIGNANTES

**Sylvia COUTAT**
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Résumé
Dans le cadre d'un séminaire d'initiation à la recherche, des étudiants de licence en science de l'éducation analysent une séance de résolution de problèmes. Cette analyse s'appuie sur une analyse a priori d'une situation de résolution de problème (Arsac et al., 1991; Grenier, 2008; Hersant, 2008). L'observation de cette situation dans une classe d'école primaire genevoise permet ensuite une analyse a posteriori guidée par une question de recherche choisie par les étudiants. Les représentations ou traces que les élèves produisent dans le processus de création d'un modèle pour la résolution (Burgermeister & Dorier, 2013) sont souvent au cœur des analyses des étudiants. En menant ces recherches les étudiants sont souvent amenés à faire évoluer leurs conceptions concernant la place de la modélisation dans les résolutions des élèves, dans les interactions entre élèves voir avec l'enseignant. Cette recherche analyse l'effet du dispositif de formation sur les connaissances des étudiants autour de l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problème. Ces analyses utilisent le cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles développé par des membres de la COPIRELEM (Bueno-Ravel et al., 2017).

## I. NOTRE INTENTION

De nombreux chercheurs en didactique des mathématiques ont tenté de caractériser la résolution de problème. On trouve par exemple les problèmes ouverts (Arsac et al., 1991), les situations de recherche en classe (Grenier & Payan, 2003), les problèmes pour chercher (Hersant, 2008; Houdement, 2009). L'enseignement de ces problèmes est au cœur de nombreuses recherches (Houdement, 2009 ; Julo, 2002; Polya, 1965; Schoenfeld, 1985). Les notions transversales liées à la résolution de problème restent difficiles pour les enseignants et leurs élèves (Coulange, 1998). S'interroger sur ces difficultés reste un enjeu majeur. Ainsi dans le cadre d'un séminaire d'initiation à la recherche en science de l'éducation, les étudiants sont amenés à questionner une activité de recherche tant dans sa mise en œuvre que dans son déroulement et l'analyse des éventuels apprentissages des élèves. Selon l'activité travaillée les étudiants peuvent se centrer sur une ou plusieurs notions spécifiques comme la modélisation, la stratégie d'essais-ajustement, l'énumération, etc… Le but de notre étude est d'interroger l'effet de l'expérience d'une telle recherche sur les connaissances des étudiants en particulier concernant la modélisation. Cette interrogation est traitée à travers deux questions. Tout d'abord il s'agit d'analyser les choix de scénarii utilisés dans cette formation et dans quelle mesure ils pourraient développer une posture Praticien-chercheur selon le cadre d'analyse des situations de formation (Bueno-Ravel et al., 2017). Ensuite cette étude s'intéresse aux postures développées effectivement par les étudiants au cours de la formation.

Tout d'abord différentes définitions de la modélisation sont introduites, sans viser l'exhaustivité, principalement pour illustrer une certaine variété et malgré tout quelques points communs. Ensuite quelques éléments de contexte sont présentés suivis du développement des questions de recherche. Deux exemples et quelques tendances illustrent les analyses et résultats.

## II. MODELISATION(S)

De nombreuses notions mathématiques sont en jeux dans la résolution de problème. La modélisation est inévitable lors de la résolution d'un problème. Dans le cadre de ce travail, et des problèmes mathématiques considérés, la modélisation tient une place importante et peut prendre différentes formes (un schéma qui permet de résoudre le problème ou d'accéder à un modèle mathématique, un calcul, l'accès à une déduction …).

Quelques travaux concernant la modélisation et provenant de la didactique des mathématiques sont présentés suivis des prescriptions romandes qui définissent le cadre institutionnel de référence des enseignants. Finalement une définition de la modélisation utilisée dans le cadre de ce travail sera proposée.

## II.1 Travaux de recherche

Il serait intéressant de répertorier les différentes définitions mais la place va manquer. Les quelques définitions qui sont proposées ici permettent d'illustrer que malgré des définitions variées, elles partagent une certaine cohérence autour de la modélisation, de sa place et son rôle qui lui revient lors de la résolution d'un problème.

Coulange (1998) considère la modélisation comme une « interprétation mathématique liée à une situation « réelle » […] ou à sa description en langage naturel, relativement à des questions que l'on se pose sur cette situation » (p.35). Une démarche de modélisation passe par 4 phases en interrelation et non linéaire. Une première phase consiste au passage de la situation extra-mathématique à un modèle pseudo-concret, c'est-à-dire un modèle intermédiaire qui peut être une reformulation de la situation ou un schéma. La deuxième phase est le passage du modèle pseudo-concret au modèle mathématique. La troisième phase est la résolution de la situation dans le domaine des mathématiques et la construction d'une réponse. La quatrième phase est la validation de la réponse dans le domaine extra-mathématique.

On retrouve ces différentes étapes dans les travaux de Verschaffel et De Corte (2008) pour qui la résolution d'un problème mathématique passe par 4 étapes (modèle de la situation initiale, transformation mathématique, analyse mathématique puis interprétation). La transformation du modèle de la situation en un modèle mathématique permet d'exprimer les relations qui unissent les éléments importants de la situation étudiée. Ces relations entre les éléments de la situation sont aussi présents dans la proposition de Laborde (1992) pour qui le modèle est une abstraction du domaine de réalité, représentant certains objets et certaines relations.

Julo (2002) considère que la modélisation est une construction de modèles, ces modèles permettant la maitrise de tout système avec une simplification et des actions sur le système.

Cette simplification du système peut passer par l'élaboration de schémas, graphiques. Le rôle de ces différentes représentations peut être variable. Les illustrations, qui peuvent accompagner les énoncés, pourraient sembler être une aide pour la résolution, participant au passage pseudo-concret ou modèle de la situation. Cependant pour Fagnant (2019) ce n'est pas forcément ce qui peut être constaté. En effet ces illustrations sont une aide pour les élèves, lorsqu'ils sont interprétables par ces derniers. Se pose alors la question de la place de l'utilisation d'illustration dans l'enseignement, : doit-on apprendre à utiliser, interpréter des schémas et comment ? Sachant que la production d'un schéma ou l'utilisation d'une illustration appartient au processus de résolution du problème. Il s'agit de s'interroger sur les conditions spécifiques de son enseignement (variétés des schémas, en lien avec un objectif précis, …).

## II.2 Prescriptions romandes

Dans le Plan d'Étude Romand (PER[1]) la modélisation a une place privilégiée. En effet, elle est à l'intersection des mathématiques et des sciences de la nature : « la thématique *Modélisation* est commune aux deux parties. Il s'agit de la considérer avec chaque objectif d'apprentissage » (CIIP, 2010). Et apparait dans les visées prioritaires :

> *Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.*

[1] Disponible en ligne : www.plandetudes.ch

Ce positionnement de la modélisation doit permettre le développement des outils communs aux mathématiques et sciences de la nature. Même si ces outils sont communs ils prennent des colorations spécifiques. Pour les mathématiques la modélisation est liée aux raisonnements attendus en résolution de problème (essais-erreurs, ajustements, généralisation, formulation d'une conjecture et validation). Enfin dans le lexique, modéliser est défini par « choisir et utiliser une démarche, un outil ou une connaissance. En fonction de la situation, ce choix et cette utilisation sont laissés à l'initiative de l'élève. »

### II.3 Notre choix

Dans le cadre de cette recherche nous utilisons les travaux de Burgermeister et Dorier (2013). Selon eux la modélisation est le processus qui permet de construire, discuter et étudier une correspondance entre deux (aux moins) systèmes incluant des objets, des relations entre ces objets et des questions.

Ainsi modéliser doit permettre de transposer une question posée dans un premier système où elle est problématique - difficile à résoudre - dans un autre système où elle peut être résolue. La réponse doit ensuite être interprétée dans le système initial. Modéliser doit aussi interroger la pertinence de la correspondance entre deux systèmes. Finalement plus de deux systèmes peuvent être en jeu ce qui permet une discussion sur le choix du modèle. Travailler la modélisation en classe, reviendrait à faire vivre un questionnement de correspondance entre deux systèmes. Un enseignement de la modélisation revient à exploiter des potentiels qui s'appuient sur des choix didactiques. En s'appuyant sur une analyse de différentes tâches proposées dans le moyen d'enseignement romand, les auteurs ont défini une typologie en 3 niveaux.

Au niveau 1, les deux systèmes sont évoqués dans l'énoncé du problème, mais la résolution du problème ne se fait que dans un des deux systèmes. On ne revient pas dans l'autre système.

Au niveau 2, les deux systèmes sont donnés, le travail consiste dans les relations entre les deux systèmes (pertinence du modèle, lien entre les deux systèmes…).

Niveau 3, un seul système est donné, la tâche de l'élève est d'élaborer un ou plusieurs autres systèmes (modèles) pour répondre à la question. S'il y a plusieurs modèles possibles, l'élève doit s'interroger sur la pertinence de chacun.

Cette typologie ayant été construite à partir des moyens d'enseignement romands, elle est adaptée au contexte de la formation.

## III. NOTRE ETUDE

### III.1 Contexte

Le cours que nous allons étudier est proposé dans le cadre de deux Bachelors (équivalent licence) à la faculté des sciences de l'éducation à l'université de Genève. Le Bachelor orientation Enseignement Primaire concerne les étudiants qui se destinent au métier d'enseignant d'école primaire. Le Bachelor orientation Education et Formation aborde les différents concepts liés aux sciences de l'éducation (l'éducation, la formation, la formation d'adultes, la sociologie, …). Dans la présentation du Bachelor orientation Enseignement Primaire[2] l'ouverture sur la recherche est justifiée comme étant

> *L'occasion d'expérimenter des procédures, de formuler et de tester des hypothèses, d'apprendre à observer, à écouter, à récolter et à analyser les données. Elle favorise donc des prises de conscience, le développement d'un rapport actif à la réalité et la construction de compétences inhérentes à une pratique réfléchie.*

Les étudiants choisissent un séminaire parmi plusieurs proposés. Celui qui concerne la didactique des mathématiques s'appuie principalement sur la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue, 1988) et de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) en ce qui concerne les théories didactique pour la recherche. Le savoir mathématique qui est la cible des recherches des étudiants est la résolution de problème comme objet d'enseignement (Arsac et al., 1991; Grenier & Payan, 2003; Hersant, 2008). Parmi les différents savoirs transversaux aux mathématiques, la modélisation est introduite à l'aide de la

[2] https://www.unige.ch/fapse/lesetudes/baccalaureat/bsep/

typologie de Burgermeister et Dorier (Burgermeister & Dorier, 2013). Le niveau en jeu dans la résolution de problème comme objet d'enseignement est le niveau 3, c'est-à-dire qu'un système est donné et la construction d'un ou plusieurs systèmes est à la charge de l'élève.

Les deux Bachelor sont représentés parmi la vingtaine des étudiants qui suivent le séminaire, à raison d'une moitié pour chaque. La question naïve à laquelle les étudiants sont confrontés serait comment mener une situation de recherche en classe de primaire en mathématiques ? Selon les activités de recherche choisies, les observables recueillis et les ambitions de chacun, cette question peut évoluée vers l'analyse de production d'élèves, le rôle de l'enseignant dans les moments collectifs, l'analyse des échanges entre élèves ou entre les élèves et l'enseignant.

Le dispositif de formation conçu et mis en œuvre se déroule sur une année, c'est-à-dire sur 25 semaines à raison de 90 min en présentiel par semaine.

### III.2 Problématique

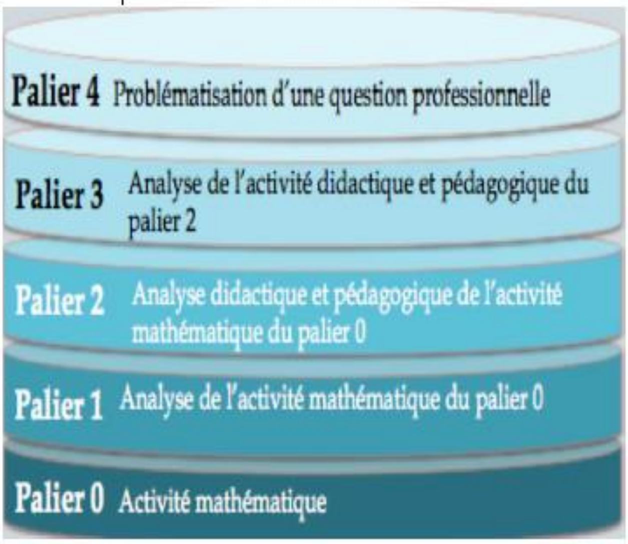
Ce travail de recherche mené par les étudiants vise plusieurs objectifs. Il doit leur permettre de mener une recherche basée sur des hypothèses, de construire une question de recherche, de confronter leurs choix à la réalité de la classe, de mener une analyse qui utilise un cadre théorique issu de la didactique des mathématiques. Cela dans le but d'outiller leur interprétation objective de faits observés dans une classe et de développer une posture réflexive autour de l'enseignement de la résolution de problème dans une classe de primaire. Le développement de cette posture d'étudiant-chercheur devrait influencer leurs connaissances en mathématiques voir en résolution de problème et concernant la place et la forme de la modélisation dans un enseignement de la résolution de problème. Pour pouvoir nous positionner relativement ces objectifs, nous considérons deux questions de recherche. **En quoi le scénario de formation construit permet une posture d'étudiants-chercheurs ? Comment les étudiants s'approprient cette posture avec quel effet sur leurs connaissances mathématiques et plus précisément sur la place de la modélisation dans la résolution de problème ?**

### III.3 Méthodologie d'analyse

Pour la première question qui s'intéresse au dispositif de formation, sans analyser la totalité des séances du scénario de formation, nous nous concentrons sur des séances spécifiques, clés dans le but d'identifier en quoi elles devraient permettre une posture d'étudiant-chercheur.

Pour la seconde question concernant les connaissances des étudiants, nous allons reprendre les mêmes situations pour identifier dans quelle mesure les étudiant se placent effectivement dans la posture attendue et si cette posture évolue au cours du déroulement du dispositif de formation. Pour cela nous utiliserons des productions des étudiants à savoir leur analyse a priori de l'activité qu'ils vont observer et leur analyse a posteriori de cette même activité utilisant les données récoltées durant l'observation.

Pour analyser à la fois le dispositif de formation et les postures des étudiants nous utilisons le cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles développé par des membres de la COPIRELEM (Bueno-Ravel et al., 2017). Ce cadre, illustré par la figure 1, nous permet d'une part de caractériser les situations de formations utilisées et les postures attendus des étudiants. Bien qu'il soit principalement utilisé par les formateurs comme un outil pour la conception de situations de formation, nous l'utiliserons aussi pour identifier les différentes postures que l'on peut observer chez les étudiants au cours de l'année.




| Nature de l'activité | Posture du formé | Connaissances mathématiques | didactiques | pédagogiques |
|---|---|---|---|---|
| Palier 4 | . Praticien - chercheur | Décontex-tualisées | Décontex-tualisées | Décontex-tualisées |
| Palier 3 | Enseignant | | | |
| Palier 2 | . Élève - enseignant | | Explicitées en contexte | Explicitées en contexte |
| Palier 1 | Élève - enseignant Élève | | Implicites en contexte | Implicites en contexte |
| Palier 0 | Élève | En contexte | | |

*Figure 1 : Schéma récapitulatif du cadre d'analyse issu de Bueno-Ravel et al. (2017)*

Ce cadre d'analyse permet de caractériser les tâches de formation selon les types d'activés qu'elles impliquent et chaque type d'activité est caractérisé par les connaissances convoquées, leur degré de décontextualisation et la posture du formé.

Pour répondre aux questions de recherche nous analysons dans un premier temps quelques séances du dispositif de formation afin d'identifier leur potentiel. Dans un second temps nous analysons les postures développées par les étudiants durant les quelques séances analysées ainsi que leurs productions concernant les travaux écrits, à savoir l'analyse a priori et l'analyse a posteriori de l'activité choisie.

## IV. EXEMPLES ET ANALYSES

L'ensemble du dispositif se compose de 25 périodes de cours avec une période de 90 min par semaine. Ces 25 périodes sont réparties sur l'ensemble de l'année, 12 pour le premier semestre et 13 pour le second semestre. Ces séances de cours sont complétées par l'élaboration d'un dossier reprenant une analyse a priori et une analyse a posteriori d'une activité issue des moyens d'enseignement.

Une analyse des potentiels de ce dispositif est proposée. Puis à l'aide de quelques exemples nous identifions quelles postures sont investies par les étudiants selon les différents éléments du dispositif.

### IV.1 Analyse du dispositif

L'objectif de ce dispositif de formation est d'amener les étudiants à investir une posture de praticien-chercheur. Cela doit participer au développement d'une pratique réflexive pour les étudiants se destinant au métier d'enseignant d'école primaire. Pour les autres étudiants, ce cours doit leur permettre de s'approprier des cadres théoriques et des méthodologies d'analyse. La méthodologie de recherche utilisée est l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). Les deux premières phases, les analyses préalables et la conception et analyse a priori, sont travaillées pendant le premier semestre. La troisième phase, expérimentation, analyse a posteriori et validation, est concentrée au deuxième semestre.

Lors du premier semestre, 2 séances utilisent l'homologie (jeu de Nim pour les situations d'actions-formulation-validation, résolution de problèmes pour les différents modes de raisonnement (Houdement, 2009)), 1 séance l'analyse comparative d'activités et 1 séance l'analyse productions d'élèves. Ces 4 séances doivent permettre aux étudiants d'investir des connaissances mathématiques et didactiques avec une posture allant d'Elève à Enseignant. Les connaissances impliquées sont les connaissances mathématiques liées aux savoirs en jeu dans la résolution de problème ainsi que des connaissances didactiques de la TSD.

Ces connaissances travaillées en contexte sont illustrées à travers les différentes situations rencontrées et sont ainsi progressivement décontextualisées.

Ainsi, potentiellement les trois premiers paliers peuvent être exploités lors de ces séances de cours.

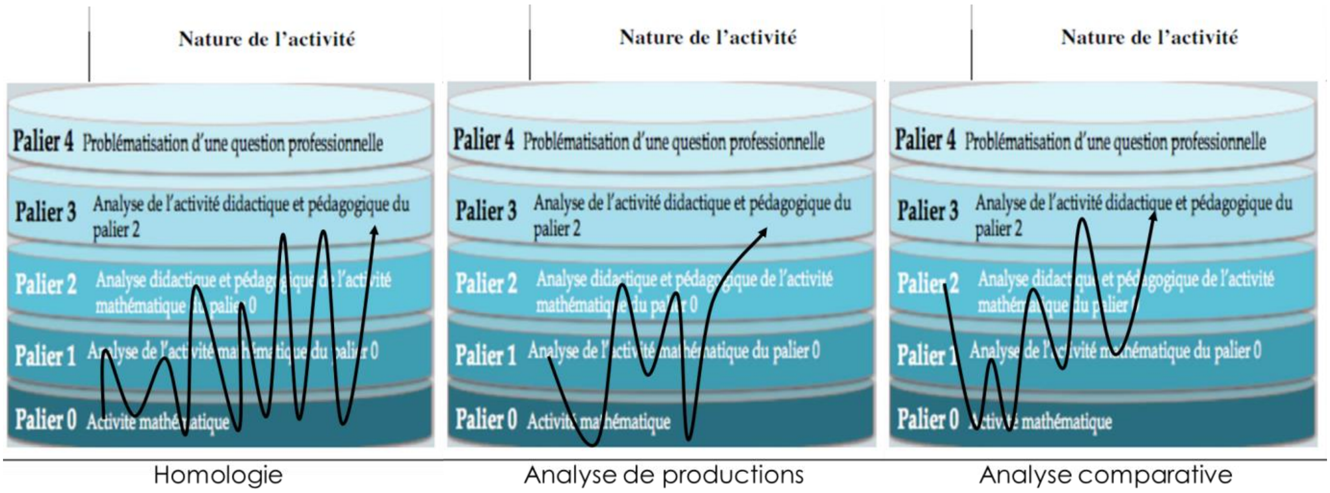



*Figure 2 : Itinéraires possibles prévus pour la première moitié du semestre*

Les analyses préalables des contenus en lien avec la résolution de problèmes sont travaillées lors de ces 4 séances et complétées par 2 séances plus théoriques autour des contraintes institutionnelles et l'épistémologie de la résolution de problèmes en s'appuyant sur quelques travaux de recherche (Polya, 1965; Rott et al., 2021; Schoenfeld, 1985).

Pour compléter ces premières séances, les 6 dernières séances de cours sont consacrées à l'avancée de leur dossier. L'objectif de ce dossier est que les étudiants définissent une question de recherche autour d'une activité de résolution de problème et se donnent les moyens de répondre à cette question en confrontant leurs choix didactiques à l'analyse de leur observation de l'activité en classe. Pour cela, 2 séances d'échanges en petits groupes sont organisées. Le but de ces séances en groupes est de faire avancer les étudiants sur les phases 1 et 2 de l'ingénierie didactique. Une première séance vise un travail autour des choix didactiques à travers l'exploitation des variables macro et micro didactiques relativement aux contraintes institutionnelles. Une deuxième séance vise plutôt une réflexion didactique et pédagogique dans les choix de mise en œuvre de l'activité choisie (enchainement des différentes phases -action-validation-formulation, les différents moments collectifs et les modalités de travail). Intercalées avec ces 2 séances, 2 autres séances sont consacrées au travail en binôme. Chaque binôme doit affiner sa question de recherche qui va motiver les choix des valeurs des variables, les modalités de travail (individuel, groupe, collectif) selon les connaissances visées. Enfin 2 séances de présentations et d'échangent avec l'ensemble des étudiants clôturent ce premier semestre.

Au cours de ces 6 séances les étudiants doivent développer une problématisation d'une question professionnelle. Dans le cadre de ce cours la question professionnelle concerne l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problème comme objet d'étude. Cette question professionnelle se spécifie en fonction du degré de la classe, du ou des modes de raisonnement visés par l'activité, des questionnements propres aux étudiants. Cette problématisation s'organise autour des différents apports des séances précédentes mais aussi lors des échanges entre paires, de l'analyse de l'activité choisie à travers les connaissances qu'elle vise, des justifications des choix didactiques et pédagogiques.

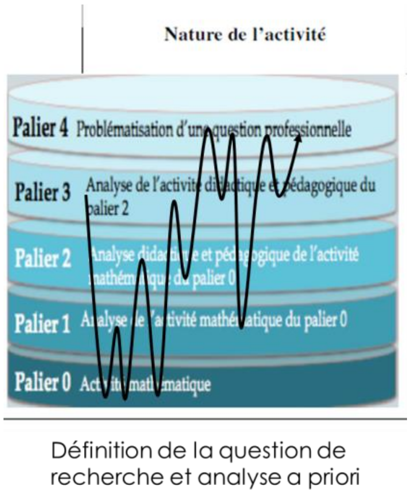



*Figure 3 : Itinéraires possibles prévus pour la deuxième moitié du semestre*

Le dispositif du deuxième semestre est très proche de celui du premier semestre avec une première moitié du semestre consacré à des mises en situation d'analyse avec 1 séance d'homologie, 4 séances d'analyse de productions et 1 séance de comparaison de situations. Le premier semestre ne contient qu'une analyse de productions, elle doit permettre aux étudiants de comprendre une des finalités possibles de leur travail de recherche. Lors de ce second semestre, ces analyses de productions sont plus nombreuses car elles concernent la majorité des directions d'analyses choisies par les étudiants. La méthodologie d'analyse utilisée par les étudiants autour des procédures, des interactions, du rôle du milieu, de l'enseignant, … doit permettre de développer encore la posture de Praticien-Chercheur.

La modélisation étant présente dans le Plan d'Etude Romand, elle fait partie des savoirs liés à la résolution de problème. Ainsi dans les différents apports et réflexions autour des connaissances liées à la résolution de problème, nous intégrons la modélisation à partir de la définition de Burgermeister et Dorier (2013). Cela permet d'intégrer un enjeu de modélisation dans toutes les activités travaillées par les étudiants. Cet enjeu est présenté à travers les schémas ou dessins ou tableaux que les élèves peuvent produire, mais aussi plus largement à travers la pluralité des stratégies possibles chez les élèves. Les étudiants peuvent s'ils le souhaitent traiter spécifiquement la thématique de la modélisation dans leur question de recherche.

Afin d'identifier dans qu'elle mesure les postures des étudiants évoluent au cours de chaque semestre et au cours de l'année, nous commençons par nous intéresser à deux exemples de travaux d'étudiants qui ont se sont intéressés à la modélisation. Ensuite nous reprenons les différentes postures développées lors des différentes situations présentées brièvement précédemment.

## IV.2 Travaux d'étudiants 1 : Basse-cours

Ce premier exemple présente un travail réalisé par un duo d'étudiantes. Elles ont choisi une activité issue des moyens d'enseignement pour les classes de 1P2P (élèves de 4-6 ans). L'apprentissage visé indiqué dans le document d'accompagnement de l'activité est « Utiliser un tableau, un dessin, un croquis, une liste, un schéma, … pour résoudre un problème ». Voici la consigne telle qu'elle est proposée dans la ressource :

| |
|---|
| Consigne : dans la basse-cour il y a 1 canard, 2 poules, 3 lapins |
| Combien y a-t-il d'animaux en tout ? Utilise ta feuille et tes crayons pour trouver la solution. |

Lors de cette étude, les étudiantes ont travaillé autour de la question de recherche suivante :

> *Nous attendons que les élèves prennent conscience que cette activité doit être résolue à l'aide d'un dessin/schéma. Nous souhaitons que les élèves passent par l'écrit et évitent à tout prix la mémorisation ou le comptage sur les doigts. Il faudrait que les élèves soient capables de distinguer le nombre d'animaux, c'est-à-dire de prendre conscience de l'importance de la quantité et non pas celle de la qualité du dessin.*

Cette question de recherche a été construite progressivement en s'appuyant sur l'apprentissage visé donné par la ressource, leur résolution de la tâche, leur analyse des stratégies possibles des élèves et finalement sur les choix didactiques qui permettraient d'atteindre l'apprentissage visé. À partir de leur résolution et de l'analyse des stratégies possibles, elles ont considéré que les nombres choisis par la consigne n'assuraient pas forcément une résolution par un dessin. En effet, il est possible d'obtenir le nombre total d'animaux en utilisant les doigts. Elles ont alors choisi de modifier la consigne en augmentant le nombre total d'animaux ce qui rend plus difficilement accessible une résolution par comptage sur les doigts ou mémorisation. Pour permettre aussi un travail autour des informations que doit contenir le dessin, elles ont ajouté des espèces. Leur nouvelle consigne est alors :

> Consigne : dans la basse-cour il y a 2 canards, 4 poules, 3 lapins, 2 chèvres, 3 cochons
>
> Combien y a-t-il d'animaux en tout ?

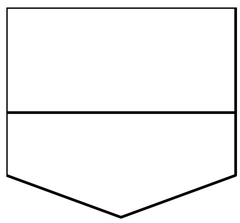
Ce premier travail a permis différentes postures chez les étudiantes allant d'Élève (résolution de la tâche) à Enseignant (identification des enjeux d'apprentissages) en passant par Elève-enseignant (analyse mathématique de la tâche et analyse des conditions de mise en œuvre). Ainsi le palier 3 est atteint. Cependant le passage au palier 4 ne nous semble pas certain. En effet les étudiantes se sont appropriées la tâche à travers une posture Enseignante mais elles sont restées très proche de la tâche dans la formulation de leur question sans visiblement relier leur questionnement à une pratique professionnelle plus globale autour de la place des dessins ou schémas dans la résolution de problème en général ou dans la classe de 1P2P.

Lors de l'analyse a posteriori les étudiantes ont récolté l'ensemble des productions des élèves (disponibles en annexe1). Elles ont construit une méthodologie d'analyse s'appuyant sur la forme des informations codées dans les schémas (dessins, uniquement des valeurs numériques, des dessins et des valeurs numériques). Face à la pluralité des productions des élèves les étudiantes ont interrogé la place de la schématisation dans l'enseignement : « la schématisation va-t-elle de soi ou doit-elle être travaillée en classe ? ». Cette nouvelle problématique n'est pas investiguée par les étudiantes mais apparait comme une nouvelle piste de réflexion. On peut considérer que lors de ce travail autour des analyses de cette activité les étudiantes se sont appropriée une posture de Praticienne-Chercheure correspondant au palier 4.

### IV.3 Travaux d'étudiants 2 : les blasons

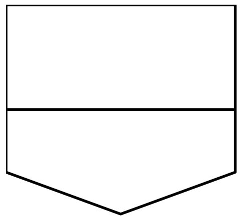
Ce deuxième exemple présente un travail réalisé à nouveau par un duo d'étudiantes. Elles ont collaboré pour la première partie (analyse a priori) puis ont travaillé individuellement l'analyse a posteriori. Elles ont choisi une activité issue des moyens d'enseignement pour les classes de 5P (élèves de 8-9 ans). Il est attendu que les élèves résolvent ce problème en exploitant « des informations portant sur des critères et attributs afin de constituer une collection structurée » (Danalet et al., 1998, p. 37). Voici la consigne telle qu'elle est proposée dans la ressource :

> Un artiste a commencé à peindre des blasons. Il veut peindre tous les blasons possibles avec ces quatre couleurs : jaune, rouge, vert et bleu.
>
> Le haut et le bas du blason doivent toujours être de couleurs différentes.
>
> Il lui reste encore à peindre tous les blasons avec le vert en bas.
>
> Trouve tous les blasons qu'il a déjà peints.



Initialement les étudiantes ont choisi de situer leur recherche autour de l'énumération (Briand et al., 2000) et leur question de recherche s'intéresse aux procédures que les élèves pourraient développer qui n'utilisent pas le répertoire multiplicatif. Elles sont arrivées à cette questions suite à l'analyse a priori de la tâche (les variables didactiques et les résolutions possibles). Leur objectif était que les élèves développent des stratégies qui utilisent la multiplication. Les schémas pouvaient être utilisés mais devaient être rapidement non adaptés pour inciter à l'abstraction et la multiplication (ou addition itérée). Pour avoir une tâche qui correspondent à leurs attentes, elles ont augmenté le nombre de couleurs et ainsi augmenté le nombre de blasons de la collection. Cela dans le but d'inciter les élèves à s'organiser dans le comptage des blasons (énumération) et basculer dans le calcul une fois l'organisation identifiée.

Afin de réponde à leur question, elles ont proposé la consigne suivante :

| | |
|---|---|
| Un artiste a commencé à peindre des blasons. Il veut peindre tous les blasons possibles avec ces **huit** couleurs : jaune, vert, bleu, rouge, orange, violet, noir, blanc.<br><br>Le haut et le bas du blason doivent toujours être de couleurs différentes.<br><br>Il lui reste encore à peindre tous les blasons avec le vert en bas. Trouve tous les blasons qu'il a déjà peints. |  |

Les étudiantes sont passées par une posture d'Elève et Enseignant-Elève lorsqu'elles ont travaillé sur la tâche, sa résolution et les savoirs qu'elles visent. Elles ont su identifier l'énumération (Briand et al., 2000) comme étant une connaissance que les élèves doivent utiliser. Elles ont développé une posture d'Enseignante en choisissant de modifier la consigne pour rendre les stratégies utilisant l'énumération prioritaires.

Là encore il nous semble que les étudiants restent dans une posture Enseignant car leur question de recherche reste très contextualisée au problème sans embarquer la problématique de l'énumération pourtant citée dans leur travail.

Alors que les étudiantes attendaient que les modèles s'appuyant sur des dessins ou schémas évoluent rapidement vers des modèles arithmétiques, les élèves ont, pour la majorité, conservé des schémas et dessins (productions en annexe 2). Cet écart entre ce qui était attendu et ce qui est finalement apparu a incité les étudiantes à faire évoluer leur question de recherche. Elles ont choisi d'orienter leurs analyses avec chacune une question de recherche spécifique. Une étudiante s'est focalisée sur les procédures des élèves et les modélisations qu'ils ont développées. La deuxième étudiante s'est intéressée au rôle du milieu pour mieux comprendre pourquoi la stratégie visée n'a pas émergé. Pour répondre à sa nouvelle question de recherche, la première étudiante a analysé les différents modèles à travers les modes de raisonnement développés par les élèves. La deuxième étudiante a cherché à identifier la place de l'énumération dans les productions des élèves et comment le milieu et la mise en commun ont fait évoluer une procédure s'appuyant sur l'énumération à une procédure s'appuyant sur le calcul.

Le déroulement de la séance a obligé une évolution des questions de recherche. Les étudiantes sont parvenues à construire une méthodologie de recherche pour répondre chacune à une nouvelle question de recherche. Cela nous indique qu'elles ont investi une posture de Praticienne-Chercheure. Cependant cette posture est restée ancrée dans la tâche sans permettre une prise de recul sur une pratique professionnelle comme nous avons pu le voir dans le duo précédent.

### IV.4 Analyse des postures des étudiants

Les étudiants sont très impliqués dans les différentes situations proposées (homologie, analyse comparative, et analyse de production) que ce soit au premier ou au second semestre. Au cours de ces situations de formation, les étudiants se projettent volontiers dans une posture d'Enseignant ce qui permet d'atteindre le palier 3.

Lors des séances en petits groupes, les étudiants considèrent principalement leur tâche et les apprentissages visés et parviennent difficilement à mutualiser une réflexion autour de l'enseignement ou l'apprentissage de la résolution de problème en réinvestissant les apports théoriques (didactiques et mathématiques). Les étudiants restent dans une posture d'Enseignant plus focalisés sur la mise en œuvre de la tâche dans la classe, les modalités de travail que sur une réflexion autour des choix didactiques et pédagogique en lien avec leur question de recherche. De même dans les séances de travail en duo du premier semestre, les étudiants se projettent dans la classe avec une focale importante sur mise en scène de leur activité. Ce sont principalement ces réflexions qui induisent des choix (souvent inconsciemment) didactiques et pédagogiques plus que leur question de recherche. Lors du second semestre, les étudiants relatent, parfois comparent, leurs observations mais la mise en relation de leurs choix didactiques et pédagogiques avec le déroulement de la situation d'enseignement est rarement discutée et s'avère plus difficile.

Ce travail autour de l'analyse a priori ne permet pas de faire évoluer les étudiants à une posture Praticien-Chercheur qui restent souvent à une posture Enseignant. La question de recherche apparait parfois comme artificielle. Les étudiants n'interrogent pas la place, le rôle ou la forme de la modélisation, souvent très confiants d'un modèle unique et accessible.

Lors de l'analyse a posteriori, les étudiants doivent construire une méthodologie d'analyse pour répondre à leur question de recherche. Cela les placent dans une posture de Praticien-Chercheur. Un questionnement autour de la modélisation peu apparaitre face à la pluralité des procédures des élèves. À titre d'exemple, voici quelques questions motivant les analyses des étudiants :

- Quelle schématisation dans la résolution des élèves ?
- A partir de productions d'élèves de 1P (CP) et 2P (CE1) quelles traces sont produites par les élèves pour résoudre un problème de logique ?
- Quelles stratégies les élèves vont mobiliser pour résoudre le problème ? Quelle modélisation du problème (Burgermeister & Dorier, 2013) vont-ils adoptés, pour trouver le bon résultat ?
- Par quels systèmes les élèves de 1P (CP) vont-ils passer lors d'une résolution de problèmes par ajustements d'essais successifs ?
- Comment les traces écrites peuvent renseigner l'enseignant sur la procédure de l'élève ?

Pourtant les réflexions suite aux résultats des étudiants restent malgré tout très liées à leurs observations et le contexte de la classe. Peu de recul sur des pratiques enseignants sont apparus.

## V. DISCUSSION CONCLUSION

Le but de notre étude était d'analyser l'effet du dispositif de formation sur les connaissances des étudiants autour de l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problème (Arsac et al., 1991; Grenier, 2008; Hersant, 2008). Pour effectuer cette analyse, nous avons utilisé le cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles développé par des membres de la COPIRELEM (Bueno-Ravel et al., 2017). Dans un premier temps ce modèle nous a permis d'analyser le potentiel de ce dispositif. Ainsi une partie des séances du cours sont consacrées à des situations de formation de type homologie, analyses comparatives et analyses de productions d'élèves. Ces situations visent une exploitation des paliers 0 à 3, avec les postures d'Elève, Elève-Enseignant et Enseignant. Une autre partie du dispositif se focalise sur les temps de travail des duos sur leurs recherches. Ces temps d'échange ont pour but que les étudiants développent leur question professionnelle en fonction du degré de la classe, du ou des modes de raisonnement visés par l'activité, de leurs questionnements propres. Les différents apports des séances précédentes doivent alimenter les réflexions autour des justifications de leurs choix didactiques et pédagogiques. Cette deuxième étape du dispositif de formation devrait développer une posture de Praticien-Chercheur avec l'exploitation du palier 4.

Dans un second temps nous avons analysé ce potentiel à travers les postures effectivement investies par les étudiants. Les situations d'homologie, d'analyses de productions et d'analyses comparatives permettent effectivement d'atteindre le palier 3 où les étudiants investissent une posture d'Enseignant. Les situations d'échanges entre paires pour favoriser la problématisation de pratiques professionnelles autour de l'enseignement ou l'apprentissage de la résolution de problème fonctionnent beaucoup moins bien. En effet lors de ces séances, les étudiants restent centrés sur la tâche, sa mise en œuvre en classe et son observation. Le palier 4 visé par ces séances est rarement atteint.

Pour les deux travaux analysés, le travail autour de la première partie du dossier ne permet pas d'atteindre le palier 4 et de mettre les étudiants dans une posture de Praticien-Chercheur. En effet les différents choix didactiques et pédagogiques sont peu justifiés par des problématiques professionnelles. L'analyse de la séance observée amène les étudiants à développer une méthodologie d'analyse des observables selon la question qu'ils se posent et d'en inférer des résultats. Cela les approche d'une posture de Praticien-Chercheur. Pourtant dans leur réflexion, il semble que la problématisation de questions professionnelles reste peu exploitée.

La place, le rôle ou la forme de la modélisation dans une démarche de résolution de problème est peu investiguée par les étudiants dans leur analyse a priori. Cependant elle prend une place plus importante dans les analyses a posteriori qui souvent s'intéressent à l'analyse des productions des élèves et donc au processus de construction de leur deuxième système (Burgermeister & Dorier, 2013) pour résoudre la tâche. Ainsi, les étudiants analysent principalement la transformation des objets d'un système à l'autre cependant, sans caractériser le système construit à travers la transformation des objets ni des relations entre les objets et les questions.

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ces résultats. La moitié des étudiants sont des futurs enseignants de l'école primaire. Ces futurs enseignants cherchent principalement des solutions locales, liées aux différentes activités qu'ils souhaitent mener en classe. Ce besoin peu entraver une prise en compte globale du projet pédagogique qu'ils doivent mener. Cela est d'autant plus vrai que la résolution de problème comme objet d'apprentissage contient un ensemble de notions transversales aux mathématiques qui impliquent que le projet didactique dépasse forcément l'échelle de la leçon et doit être considéré sur l'année scolaire voire plus encore. Cette dimension temporelle est difficilement appréhendable dans un cours et dans l'étude d'une seule tâche. Pour les autres étudiants, la classe peut sembler plus lointaine et ils ont besoin de s'y projeter au risque de perdre les perspectives de recherches initiales.

Face aux défis que représente la résolution de problème et les pratiques enseignantes à développer, la modélisation semble être une entrée que les étudiants parviennent à appréhender. Ainsi il serait certainement plus pertinent de recentrer, au moins dans un premier temps, les travaux des étudiants autour de la place, le rôle ou la forme de la modélisation dans la résolution de problème. On pourrait par exemple les questionner autour des systèmes effectivement possibles, des relations qui pourraient être construites, du transfert des questions et des données. On pourrait aussi envisager de travailler collectivement des questions comme

- En résolution de problème, en quoi la démarche de résolution se distingue-t-elle du processus de modélisation ?
- Est-ce que la représentation est la modélisation ?
- Quelle est la place de la schématisation dans le processus de modélisation ?

Ces questions pourraient permettre aux étudiants de prendre du recul face à leur tâche et à leur recherche.

## VI. BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Briand, J., Lacave Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, B., & Goua De Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, *66*, 7-22.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Bueno-Ravel, L., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Tempier, F., & Guille-Biel Winder, C. (2017). Usage d'un cadre d'analyse pour s'approprier, concevoir et enrichir des situations de formation. In ARPEME (Éd.), *Actes du 43ème colloque de la COPIRELEM - Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : Quelles orientations, quels enjeux ?* (p. 279-304).

Burgermeister, P.-F., & Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, *91*, 5-24.

CIIP. (2010). *Plan d'Etude Romand*. CIIP. http://www.plandetudes.ch

Coulange, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x*, *47*, 33-58.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques, Troisième année, Livre du maître.* Neuchâtel : COROME.

Fagnant, A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construcion de représentations schématiques par les élèves : Quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? In J. Pilet & C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018* (p. 94-113). IREM de Paris – Université Paris Diderot.

Grenier, D. (2008). Expérimentation et preuve en mathématiques. In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (p. 237-256). Presses Universitaires de France. https://www.cairn.info/didactique-epistemologie-et-histoire-des-sciences--9782130570899-page-237.htm

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en « classe » essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahier du laboratoire Leibniz*, *92*, 1-17.

Hersant, M. (2008). Problèmes pour chercher : Des conduites de classes spécifiques. *Grand N*, *81*, 57-75.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31-52.

Laborde, C. (1992). Enseigner la géométrie : Permanences et révolutions. *7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7*.

Polya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème. Mathématiques, Physique, Jeux, Philosophie*. Dunod.

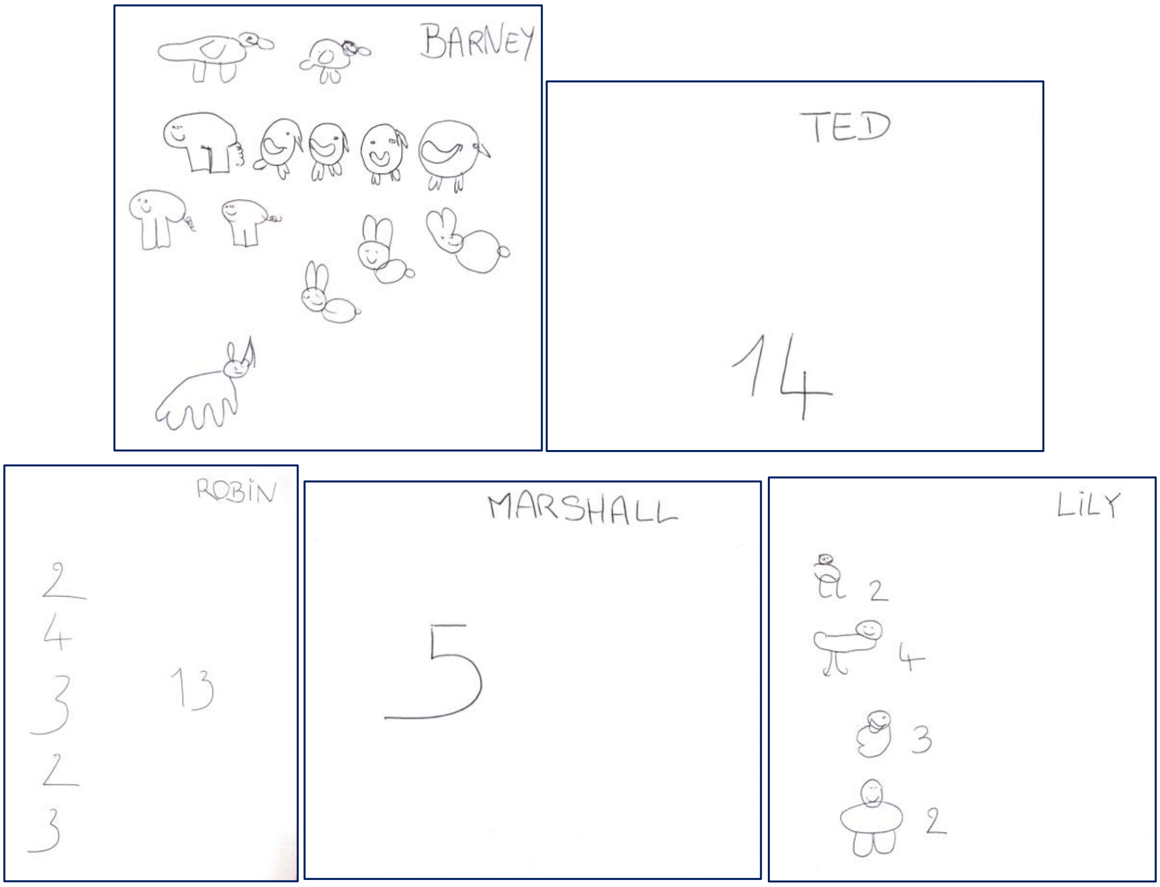
Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

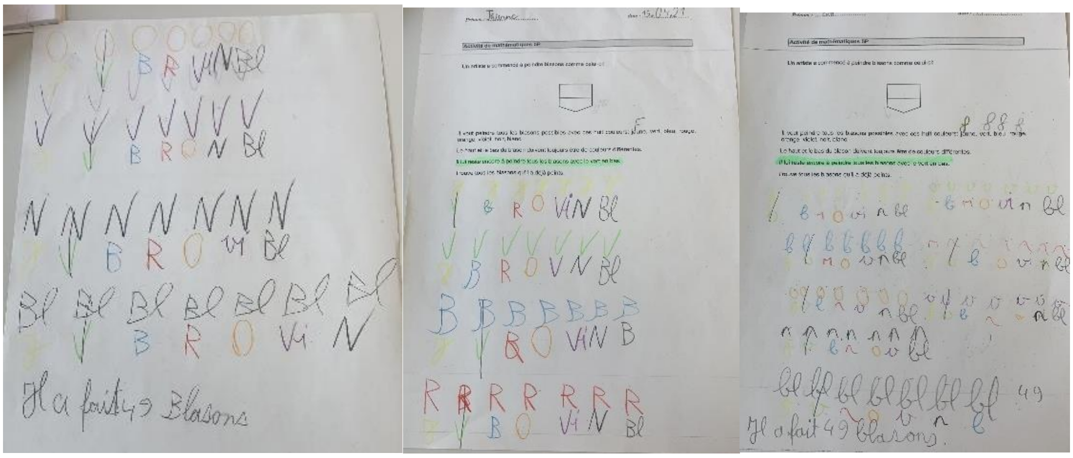
Verschaffel, L., & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : De l'analyse à l'utilisation efficace. In L. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte, & J. Grégoire (Éds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 153-176). Bruxelle : De Boeck.

# VII. ANNEXES

## Annexe 1




## Annexe 2



# MODELISER POUR FABRIQUER UN LIVRE OU FABRIQUER UN LIVRE POUR MODELISER

**Floriane WOZNIAK**
PU, INSPE Université Jean Jaurès Toulouse 2
EFTS, université de Toulouse 2
floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

**Emilie JAUDON**
Professeure des écoles, IREM de Montpellier
emilie.jaudon@ac-montpellier.fr

**Crystèle POUGET**
Conseillère pédagogique, circonscription de Lodève, IREM de Montpellier
crystele.pouget@ac-montpellier.fr

Résumé
Dans ce texte nous présentons une situation élaborée par le groupe « premier degré » de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de l'université de Montpellier. Cette séquence trouve son inspiration dans la situation de *la boîte du pâtissier* de Chappaz et Michon (2003) qui proposent une situation de modélisation à travers la conception de boîtes par pliage. Nous reprenons l'idée de fabriquer un objet par pliage, *un livre*, et celle d'accompagner le processus de modélisation par une évolution des questions. La situation étudiée conduit ainsi à construire et articuler des modèles de complexité et de complétude croissantes.

Depuis septembre 2015, le programme de mathématiques du cycle 3 – élèves de 9 à 12 ans –, réaffirme l'importance de la résolution de problèmes comme fin et comme moyen de l'enseignement des mathématiques en présentant les six compétences majeures qu'il participe à développer[1] : « chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer » (ministère de l'éducation nationale, 2015, p. 45). La place accordée à la démarche d'investigation et la modélisation dans ces programmes n'est pas spécifique à la France. Elle s'inscrit dans un mouvement de changement curriculaire international (Barquero et *al*., 2018) sous l'influence des évaluations internationales comme TIMSS et PISA et l'impulsion de recommandations européennes (Rocard et *al*., 2007). C'est ainsi que l'explicitation de la compétence *modéliser* dans les programmes français renvoie à un certain type de problèmes proposés dans les évaluations internationales (Cabassut, 2023) : « Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. […] Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques. » (Ministère de l'éducation nationale, 2015, p. 46). Un changement de paradigme scolaire se dessine qui fait de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement (Wozniak, 2019). Il s'agit d'enseigner un ensemble de savoirs mathématiques pour résoudre certains types de problèmes, mais aussi, une démarche où les étapes sont aussi importantes que le résultat. C'est dans ce contexte que le groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier a choisi de travailler sur la modélisation en suivant un parcours du même type que celui proposé à l'université de Barcelone (Barquero, 2023 ; Wozniak, Barquero, Bosch, Kaspary, *à paraître*).

[1] Il est en de même pour les programmes de mathématiques des cycles 2 (élèves de 6 à 9 ans) et 4 (13 à 16 ans).

Mais qu'est-ce que la modélisation ? Il existe de nombreuses définitions dont certaines semblent faire référence aux seules « situations réelles » (voir Barquero, 2023 ; Cabassut, 2023). La définition qu'en donne Chevallard (1989), et que nous retiendrons dans ce texte, repose sur trois étapes. Premièrement, *la définition du système étudié* – qui peut être une situation extra-mathématique ou mathématique – en précisant les éléments pertinents pour l'étude. Ensuite, *la construction du modèle* pour étudier le système qui consiste à mettre en relation les différentes variables identifiées précédemment. Enfin, *le travail mathématique dans le modèle* qui permet de construire des connaissances sur le système étudié. Ces trois étapes ne sont pas linéaires mais en interaction : un travail mathématique dans le modèle peut conduire à réévaluer la pertinence des éléments choisis pour définir le système étudié, et par conséquent, à modifier le modèle initial. C'est la raison pour laquelle il est préférable de parler de processus de modélisation et d'envisager ce processus comme cyclique. Le cycle de modélisation s'achève lorsque la solution mathématique construite est validée comme *réponse au problème* initial posé. Notons que lorsque la situation à modéliser est mathématique, construction et validation de la réponse au problème initial sont confondues.

L'objet de ce texte est de présenter une séquence d'enseignement, conçue et expérimentée par notre collectif d'enseignants et de formateurs[2], qui fait vivre à des élèves d'école primaire un processus de modélisation. La première partie présente la naissance du projet tandis que la seconde partie décrit la situation du *livre* que nous illustrons de traces écrites produites au cours de différentes expérimentations. En conclusion, nous tirons les premiers enseignements de nos expérimentations.

## I - LA NAISSANCE DU PROJET

Avant de présenter la situation du *livre* et d'exposer l'intérêt d'un travail de co-élaboration avec des enseignants de situations d'enseignement autour de la modélisation, nous rendons compte de différents résultats de recherche autour des pratiques de la modélisation qui ont nourri la réflexion de notre collectif.

### 1 Pratiques de modélisation

Nos recherches s'inscrivent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Nous considérons qu'une pratique n'est pas seulement *un faire*, elle révèle *une pensée* car même les gestes faits machinalement, « sans y penser », sont des révélateurs. Dialectiquement, *une pensée* s'adosse, s'incarne et se révèle par *un faire,* y compris dans les expériences de pensée. C'est ainsi que nous utilisons comme modèle de l'activité humaine, les praxéologies (Chevallard, 1992) faites d'une *praxis* – types de tâches et de techniques pour les réaliser – et d'un *logos* – discours technologiques s'inscrivant dans une théorie qui décrivent, explicitent, justifient, développent les techniques). Nos recherches portent sur les conditions et les contraintes du travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019, p. 25), c'est-à-dire,

> *l'ensemble des praxéologies qui contiennent, y compris de façon naïve ou spontanée, une part d'étude des processus de production, de formation, de développement, de transformation, d'organisation et de transmission des objets mathématiques ou une part de caractérisation de la nature de l'activité mathématique elle-même et de ses objets.*

Le travail épistémologique du professeur met en œuvre des praxéologies mathématiques et didactiques articulées par l'épistémologie du professeur (voir figure 1) qui est « une théorie – implicite ou explicite – des savoirs et connaissances à enseigner et une théorie de l'apprentissage de ces savoirs et connaissances au sein d'une institution donnée, à une époque donnée. » (Wozniak, *ib*., p.16)

[2] Le groupe est constitué de professeurs des écoles, de maîtres formateurs, référents en mathématiques, d'une conseillère pédagogique, d'une mathématicienne formatrice à l'INSPE de l'académie de Montpellier et d'une chercheuse didacticienne des mathématiques. Lors de l'élaboration de cette séquence, il était composé de Sonia Bayle, Samuel Causse, Anne Cortella, Deva Dauriac, Virginie Dalmayrac, Sophie Gastal, Hervé Gensac, Laëtitia Granier, Corinne Gruel, Emilie Jaudon, Mattieu Lafon, Sylvie Passet, Crystèle Pouget, Florence Valour.

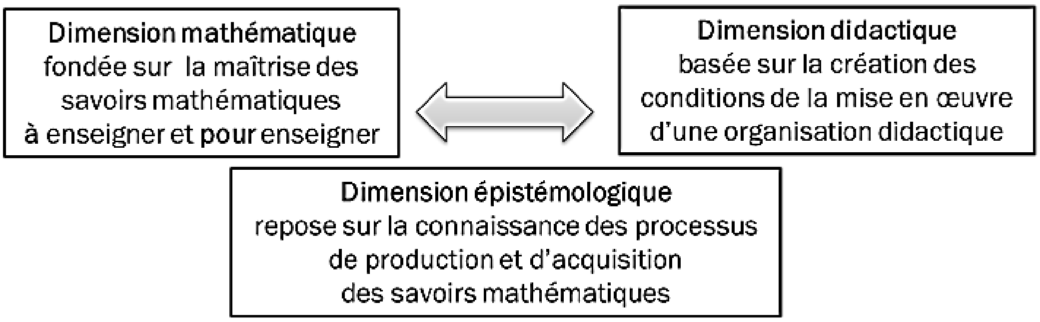



*Figure 1. Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur. Wozniak (2019, p. 23).*

Si la transposition didactique (Chevallard, 1991) permet de déterminer d'où viennent les savoirs enseignés, l'analyse écologique (Artaud, 1996) pose la question des conditions qui favorisent, permettent, gênent ou empêchent leur existence dans un système didactique. De telles analyses permettent d'expliquer pourquoi les professeurs font vivre telles organisations mathématiques ou telles organisations didactiques plutôt que telles autres dans un rapport de nécessité. Le postulat qui fonde nos travaux est qu'il existe des déterminants didactiques qui conduisent les professeurs à faire ce qu'ils font. Et c'est pour les mettre au jour que nous nous sommes intéressées aux praxéologies des professeurs lorsqu'ils enseignent des situations intégrant un processus de modélisation au cycle 3.

Une première recherche (Wozniak, 2012) portait sur un problème de grandeur inaccessible qui pouvait être résolu en utilisant comme modèle mathématique la proportionnalité. Au moment de ces observations, le programme d'enseignement ne spécifiait pas le développement de la compétence « modéliser ». Cependant, la démarche d'investigation en sciences était déjà enseignée. Or, l'observation a révélé des confusions entre ce que sont les données et les hypothèses ; une absence d'interrogation sur le domaine de validité du modèle construit ; et le modèle de la proportionnalité étant « déjà là », un abord du problème comme un simple exercice où les professeurs enseignent leur propre solution, sans percevoir et discuter des alternatives possibles. Ce sont des praxéologies muettes qui n'explicitent pas aux élèves les étapes du processus de modélisation qui transparaissent alors. La deuxième recherche (Wozniak, 2021), concerne des problèmes dits de généralisation[3]. Ces problèmes entrent dans la catégorie des « problèmes pour chercher » pour lesquels il n'y a pas un objet d'enseignement clairement identifié dans les programmes[4]. Ces problèmes sont néanmoins proposés aux élèves pour développer des heuristiques et un rapport aux mathématiques qui ne soit pas celui d'une science faite et figée qu'il s'agit d'appliquer. L'étude de ce type de problèmes intègre l'expérimentation, la recherche, l'investigation. Dans la recherche mentionnée ici, les professeurs observés, comme libérés de ne pas avoir à enseigner un objet mathématique particulier, n'enseignent plus *leur* solution mais valorisent la multiplicité des techniques et des modèles produits par les élèves. Dans une troisième recherche (Wozniak et Cattoën, *à paraître*), nous souhaitions évaluer le poids du curriculum sur les praxéologies de modélisation des professeurs, et en particulier celles où l'algèbre pouvait intervenir. Lorsqu'on croise la place d'un savoir (*S*) dans le curriculum et les connaissances des professeurs – mathématiques, didactiques ou épistémologiques – relatives à son enseignement, quatre cas de figures peuvent se produire (voir tableau 1).

[3] Il est proposé des représentations dessinées ou une suite de nombres et il s'agit d'identifier la règle qui généralise le processus qui génère les représentations dessinées ou la suite de nombres. Par exemple, sont représentés une table carrée avec 4 chaises autour puis deux tables carrées collées par un côté avec 6 chaises autour, et il faut déterminer le nombre de chaises autour d'une rangée de 3, 4, … tables.

[4] Les problèmes de généralisation sont préconisés au collège pour introduire l'algèbre.

| | Connaissances relatives à l'enseignement de *S* non actives | Connaissances relatives à l'enseignement de *S* actives |
|---|---|---|
| S n'est pas au programme d'enseignement | (1) | (2) |
| S est au programme d'enseignement | (4) | (3) |

*Tableau 1. Connaissances du professeur et présence d'un savoir (S) dans le curriculum.*

En prenant l'algèbre pour exemple, nous pouvons illustrer ces différents cas[5] :

(1) : CM2, si le professeur est non spécialiste des mathématiques et que ses connaissances en algèbre sont non actives car par exemple, trop anciennes ;

(2) : 6e ou 5e, un professeur de mathématiques de collège connait l'algèbre même s'il ne l'enseigne pas à ce niveau ;

(3) : 4e ou 3e, un professeur de mathématiques de collège connait l'algèbre et l'enseigne à ce niveau ;

(4) : ce cas ne devrait pas exister dans les conditions normales de l'enseignement de l'algèbre. Il se produit lorsqu'un nouveau savoir est introduit dans le curriculum et que les professeurs ne l'ont pas étudié dans leur propre cursus, comme récemment en France avec le langage Python au lycée.

Dans la situation de *la boîte du pâtissier* expérimentée à l'école primaire par Chappaz et Michon (2003), il est attendu d'identifier la relation entre les dimensions d'une feuille et les dimensions de la boîte construite par pliage de cette feuille pour des valeurs particulières. Un modèle géométrico-numérique suffit, même si une connaissance de l'algèbre permet de développer un modèle mathématique de la situation pour n'importe quelles dimensions. C'est cette situation qui a été étudiée dans des classes de CM2, 6e, 4e et 3e (cas 1, 2, 3 du tableau 1). Nos observations ont révélé que les techniques spontanées des élèves sont semblables, et relèvent essentiellement de praxéologies numériques même si elles évoluent progressivement selon le niveau scolaire vers des praxéologies de types algébriques[6]. Du côté des professeurs, aucun n'avait perçu qu'une même feuille permettait de construire deux boîtes différentes selon son orientation initiale (dimension mathématique du travail épistémologique du professeur), ce qui a eu des incidences dans l'interprétation de certaines réactions ou réponses des élèves (dimension didactique du travail épistémologique du professeur). On retrouve des praxéologies de modélisation muettes, où comme Jourdain avec la prose[7], les élèves conçoivent des modèles mathématiques sans le savoir. Les professeurs enseignent les solutions plutôt que les moyens de les construire. Dans la perspective de mettre au jour les conditions et les contraintes qui pèsent sur un enseignement de la modélisation ou par la modélisation, nous avons proposé à un collectif de professeurs et de formateurs de réfléchir ensemble aux leviers permettant de les dépasser.

[5] En CM2, les élèves ont 10 à 11 ans, en 6e ils ont de 11 à 12 ans, etc. Le CM2 est la dernière année de l'école primaire, les classes de 6e à 3e forment les quatre premières années de l'enseignement secondaire, le collège.

[6] Dans une praxéologie de type algébrique « les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre. Les cas particuliers ne sont plus envisagés comme des singularités mais comme des cas génériques qui permettent d'envisager d'autres possibles. » (Wozniak et Cattoën, *à paraître*).

[7] Brousseau (1998) a utilisé ce personnage de la pièce de Molière, *le bourgeois gentilhomme*, pour qualifier un type de contrat didactique où le professeur interprète un comportement banal de l'élève comme révélateur d'une connaissance.

## 2 Co-construction d'une ingénierie didactique

### *2.1 Le groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier*

Les réunions du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier sont inscrites au plan départemental de formation ce qui permet aux enseignants d'être libérés de leur classe. En dehors des réunions, des observations de classes sont organisées selon les projets expérimentés. Le fonctionnement de notre collectif n'est pas hiérarchisé, chacun de ses membres peut apporter un questionnement, une envie d'approfondir un thème ou une situation d'enseignement – vécue ou non –, rendre compte d'une expérience – réussie ou non. Les projets sont validés collectivement et si tous les membres n'ont pas le même statut, chacun est reconnu comme légitime et contribue à la réflexion, aux analyses, aux expérimentations. Les séances sont ainsi organisées en des temps d'apports didactiques, de mutualisations d'expériences et de travail en groupes pour concevoir ou analyser des situations d'enseignement.

### *2.2 Le processus de co-élaboration*

Lors d'une de nos séances, après avoir abordé les enjeux institutionnels de la modélisation à travers les programmes d'enseignement, une séance d'homologie (Houdement, Kuzniak, 1993) à partir de la boîte du pâtissier (Chappaz, Michon, 2003) a été proposée aux membres du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier. À l'issue de l'analyse didactique de cette situation, différents résultats de recherche autour des pratiques de modélisation ont été présentés. La question de la mise en œuvre de situation de modélisation dans les classes, rendue légitime par les programmes entrés en vigueur en septembre 2015, a été validée comme objet d'étude par le collectif. La figure 2 synthétise le processus qui a conduit à l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de la séquence présentée dans ce texte. Les expérimentations et analyses n'étant pas terminées, notamment au cycle 2, la ressource est en cours d'élaboration.

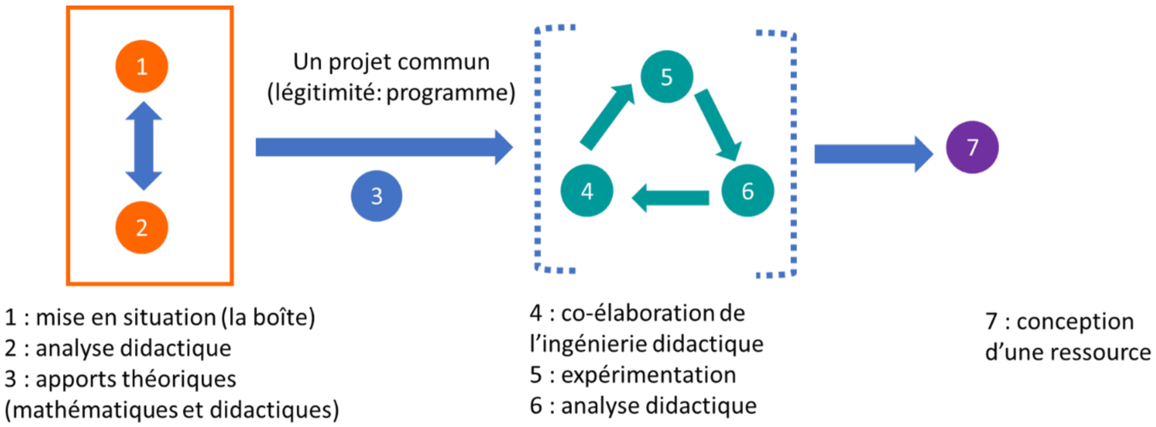



*Figure 2. Co-élaboration d'une ingénierie didactique en vue de la co-production d'une ressource.*

Dans ce qui s'est constitué en recherche collaborative, chacun des acteurs, a ses propres motivations. Pour les professeurs engagés, la co-élaboration de l'ingénierie et de la ressource qui en rend compte est une finalité. Elle permet de répondre à une question professionnelle – comment enseigner la modélisation ? – et la formation qui découle du travail collectif est en quelque sorte un bénéfice induit. Pour les formateurs, la co-production de la ressource est un moyen au service d'une fin, la formation à l'enseignement de la modélisation. Plusieurs membres de notre collectif sont des formateurs et certains travaillent à la conception de séances de formation continue en s'appuyant sur la ressource qui sera finalement produite. Enfin, pour la chercheuse didacticienne, c'est le dispositif entier (et pas seulement la ressource) qui joue le rôle de phénoménotechnique au sens de Bachelard comme révélateur des conditions et des contraintes qui pèsent sur les praxéologies des professeurs.

Une fois le projet partagé, il s'agissait de déterminer sur quelle situation travailler. C'est l'une des membres du groupe qui a présenté comment plier une feuille pour fabriquer un livre. Parce qu'elle utilise ce pliage dans une classe de cycle 2 et que le modèle mathématique nous a semblé plus simple que celui de la boîte du pâtissier, nous avons choisi de concevoir une séquence d'enseignement autour du *livre*. Nous avons ainsi repris de Chappaz et Michon (2003) l'idée de fabriquer un objet par pliage et celle d'accompagner le processus de modélisation par une évolution des questions. La situation étudiée conduit ainsi à construire et articuler des modèles de complexité et de complétude croissantes. Puisque la boîte du pâtissier nous a servi de modèle, voici une rapide description des étapes de son étude (pour une étude plus approfondie, voir Wozniak, Barquero, Bosch, Kaspary, *à paraître*).

## 3 La boîte du pâtissier comme modèle

La situation qui nous sert de modèle travaille trois types de tâches : construire une boîte par pliage (T1) ; trouver les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte de dimensions données (T2) ; trouver les dimensions de la boîte à partir d'une feuille de dimensions données (T3). C'est une situation auto-validante, puisqu'il suffit de construire les boîtes pour avoir la réponse aux questions posées. La figure 3 présente une série de photos pour illustrer le pliage alors que Chappaz et Michon (2003) fournissent une notice sous forme de dessins sur lesquels figurent des tirets différents qu'il s'agit d'interpréter en termes de types de plis.

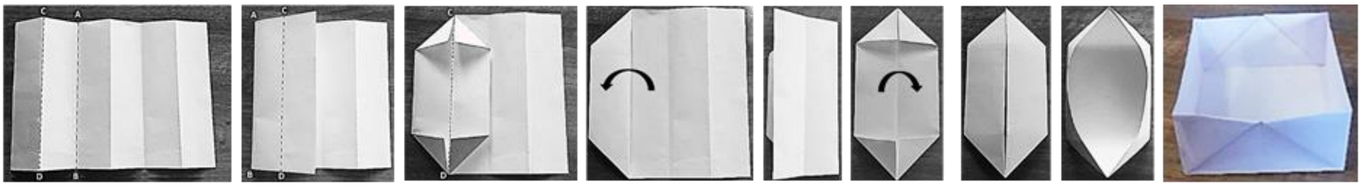


*Figure 3. Pliage pour construire une boîte.*

Avec une feuille rectangulaire, selon l'orientation de la feuille et le sens du pliage deux boîtes différentes peuvent être construites (figure 4). En revanche, deux feuilles de dimensions différentes peuvent fournir une boîte dont le fond a les mêmes dimensions mais qui diffèrent par leur hauteur.

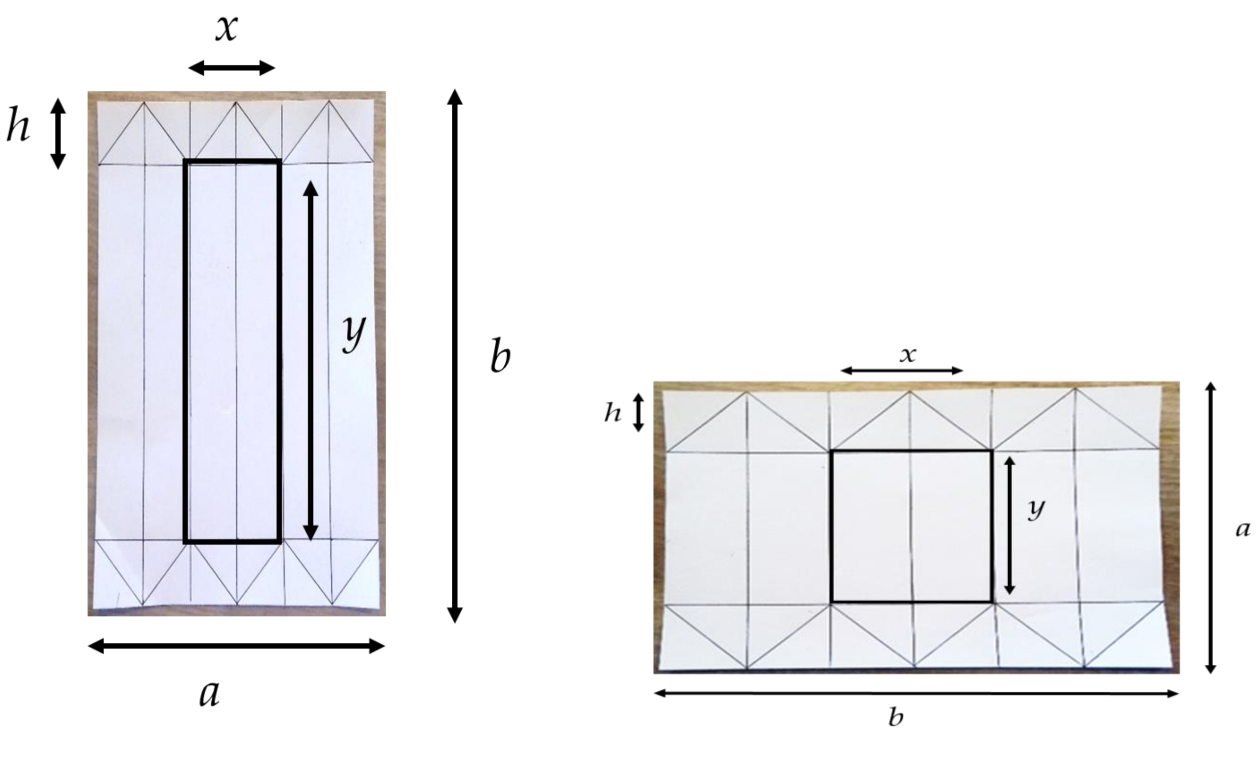



*Figure 4. – Les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis.*

Un modèle fonctionnel permet de réaliser les deux types de tâches T2 et T3. Les fonctions $F_1$ et $F_2$ associent aux dimensions d'une boîte de fond ($x$, $y$), les dimensions ($a$, Is) de la feuille nécessaires pour la fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 4) ou le second (à droite dans la figure 4). Les fonctions $B_1$ et $B_2$ associent aux dimensions ($a$, $b$) d'une feuille, les dimensions ($x$, $y$, $h$) de la boîte qu'on peut fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 4) ou le second (à droite dans la figure 4). :

$F_1 : R^2 \rightarrow R^2$, $F_1\,(x, y) = (3x; x + y)$; $F_2 : R^2 \rightarrow R^2$, $F_2\,(x, y) = (x + y, 3x)$.

$B_1 : R^2 \rightarrow R^3$ , $B_1(a, b) = (a/3; b - a/3; a/6)$ ; $B_2 : R^2 \rightarrow R^{3,}$ $B_2(a, b) = (b/3; a - b/3; b/6)$.

La situation de la boîte du pâtissier est étudiée en cinq étapes qui chacune a une fonction didactique dans le processus de modélisation :

| |
|---|
| ***1re étape : compréhension de la notice***<br>*Construire une boîte de dimension quelconque à partir de la notice.* |
| ***2e étape : construction du modèle (dimensions boîte → dimensions de la feuille)***<br>*Question 1 : Construire une boîte à fond carré. Quelles sont les dimensions de la feuille si le fond de la boîte est un carré de côté 7cm ?*<br>*Question 2 : Quelles sont les dimensions de la feuille si la boîte a un fond rectangulaire de dimensions 5 cm sur 8 cm ?* |
| ***3e étape : Mise à l'épreuve/validation du modèle (dimensions de la feuille → dimensions boîte)***<br>*Sans construire la boîte, quelles seront ses dimensions si la feuille est un rectangle de 18 cm par 24 cm ? Vous validerez vous-même votre réponse.* |
| ***4e étape : Mise en œuvre, application du modèle***<br>*Question 1 : Pourquoi suis-je certaine de ne pas pouvoir construire une boîte à fond carré avec une feuille de dimensions 12 cm et 24 cm ?*<br>*Question 2 : Peut-on construire une boîte de dimensions a) L = 8 cm, l = 4 cm, h = 4 cm ? b) L = 8 cm, l = 6 cm, h = 2 cm ?* |
| ***5e étape : Enrichissement du modèle***<br>*Construire trois boîtes gigognes, à partir d'une 1re feuille de 15 cm par 16 cm.* |

Ce sont ces différentes étapes qui sont reprises pour construire la séquence autour du *livre*.

## II - LE LIVRE DE LA MODELISATION

Avant de présenter la séquence, nous décrivons le procédé de pliage.

### 1 Le procédé de pliage

La description du pliage est délicate car, d'une part, il y a beaucoup de manipulations, selon différentes orientations de la feuille et, d'autre part, elle donne des informations sur les relations entre les plis (par exemple, avec des expressions comme « plier la feuille en deux »). Aussi, pour éviter les difficultés d'interprétation d'une notice et faciliter la compréhension du procédé de pliage par les élèves sans « dire » les relations entre les plis, nous avons conçu une vidéo sans parole dont sont issues les photos suivantes.

Prendre une feuille rectangulaire et la plier en deux (photo 1). Tourner la feuille dans l'autre sens et la plier à nouveau en deux (photo 2). Tourner une seconde fois la feuille dans l'autre sens et la plier encore une fois en deux (photo 3). À ce moment, la feuille est pliée en huit rectangles superposables.

*Figure 5. Photos 1 à 3 du pliage.*

Déplier deux fois cette feuille (photo 4). La feuille reste pliée en deux et plusieurs plis sont visibles. Couper de la longueur d'un pli, du côté de la pliure (photos 5). La photo 6 présente le résultat lorsque la feuille est entièrement dépliée.

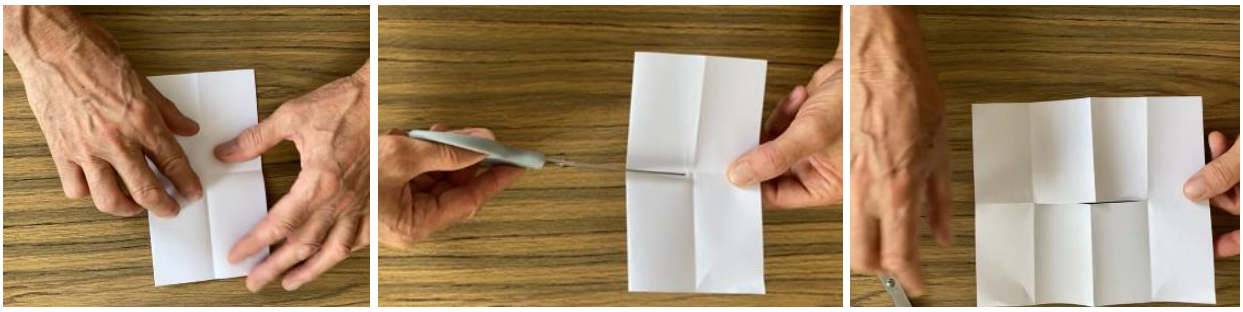


*Figure 6. Photos 4 à 6 du pliage.*

Un pliage le long du pli découpé et selon les plis verticaux permet d'obtenir un livre de quatre pages faites de deux morceaux de feuilles que l'on pourrait coller entre elles (photos 7 à 11).

*Figure 7. Photos 7 à 11 du pliage.*

## 2 Un modèle mathématique de la relation entre les dimensions de la feuille et celles du livre

Comme pour la boîte du pâtissier, une même feuille permet de fabriquer deux livres de dimensions différentes selon l'orientation et le sens du pliage. Et là encore, deux feuilles distinctes permettent de fabriquer deux livres de mêmes dimensions mais différents par la longueur de leur reliure. Sur la figure 8 qui présente les dimensions de la feuille et du livre selon l'orientation initiale de la feuille, les traits épais représentent le dos du livre (là où se trouve la reliure), les traits en pointillés représentent la découpe.

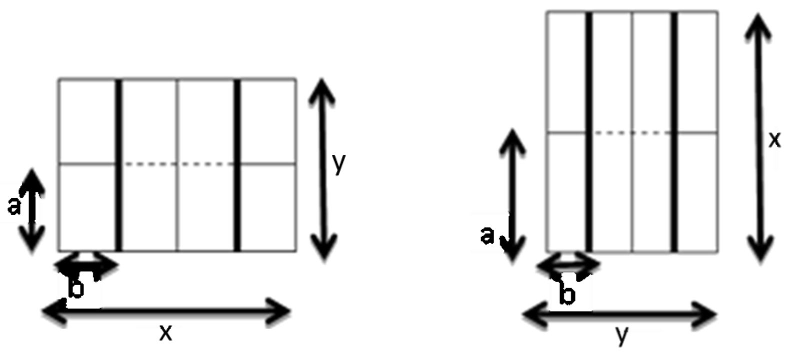



*Figure 8. Les dimensions de la feuille et du livre selon les deux orientations des plis.*

Un modèle fonctionnel permet de réaliser les deux types de tâches T2 et T3. Les fonctions $F_1$ et $F_2$ associent aux dimensions d'un livre ($a$, $b$), les dimensions ($x$, $y$) de la feuille nécessaire pour le fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 8) ou le second (à droite dans la figure 8) Les fonctions $L_1$ et $L_2$ associent aux dimensions ($x$, $y$) d'une feuille, les dimensions ($a$,$b$) du livre qu'on peut fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 8) ou le second (à droite dans la figure 8).:

$F_1 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$, $F_1 (a, b) = (2a; 4b)$; $F_2 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$, $F_2 (a, b) = (2b; 4a)$.

$L_1 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^3$, $L_1(x, y) = (y/2; x/4)$ ; $L_2 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^3$, $L_2(x, y) = (x/2; y/4)$.

Notons que si la feuille est carrée de côté $c$, l'orientation initiale de la feuille n'intervient pas et on obtient un seul livre de dimensions ($c/2$ ; $c/4$). De la même façon, une seule feuille permet de construire un livre carré de côté $c$, elle a pour dimension ($2c$, $4c$).

## 3 La séquence

La séquence est organisée en trois étapes autour de trois types de tâches : construire un livre par pliage (T1) ; trouver les dimensions de la feuille pour obtenir un livre de dimensions données (T2) ; trouver les dimensions du livre à partir d'une feuille de dimensions données (T3). Chacune de ces étapes peut prendre plusieurs séances selon l'avancée des élèves. Cette séquence ayant été expérimentée plusieurs fois, selon différentes variantes, sa présentation est illustrée avec des documents produits dans des classes différentes.

### 3.1 Etape 1 : installation du milieu

La première étape, qui occupe une seule séance, porte sur la construction de livres à partir de feuilles de dimensions différentes (type de tâches T1). La compréhension du procédé de pliage peut prendre un peu de temps, aussi la vidéo est présentée autant de fois que le réclament les élèves.

Cette étape est indispensable car elle permet d'installer le milieu (Brousseau, 1998) et le vocabulaire commun – dimensions, longueur, largeur d'une feuille ou d'un livre ; dos du livre – qui se stabilise progressivement au cours de la séquence.

Au-delà de la découverte du procédé de pliage et de l'institutionnalisation du vocabulaire, cette première séance vise l'identification par les élèves que des feuilles de dimensions différentes permettent de construire des livres de dimensions différentes. Cette identification se concrétise avec l'élaboration d'une affiche qui présente différentes feuilles et les livres obtenus (figure 8).

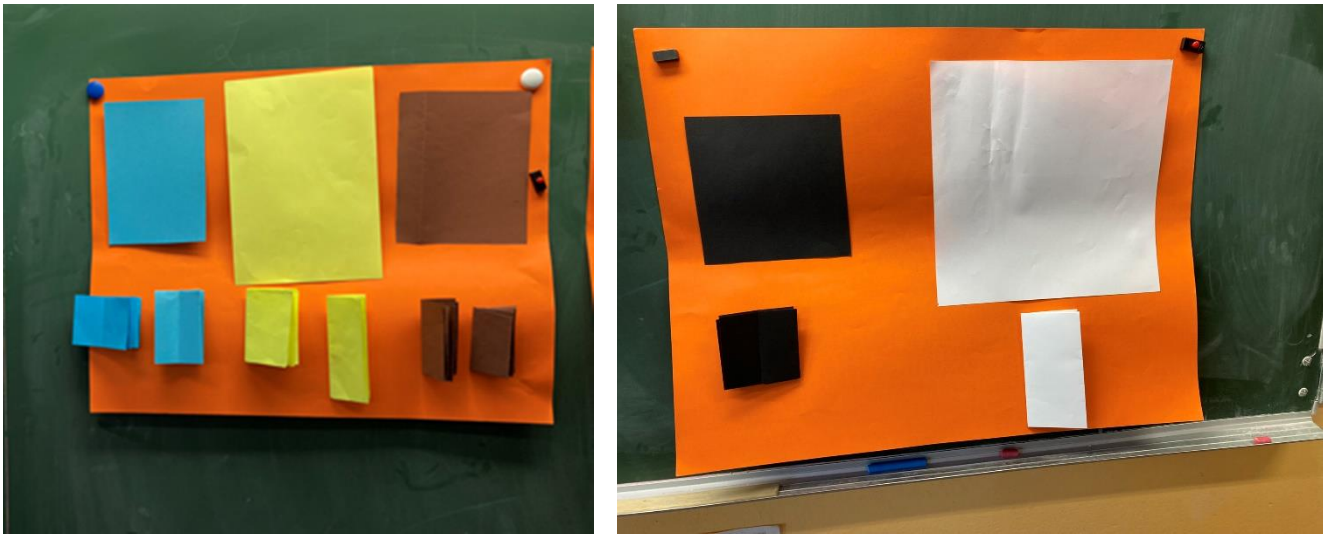
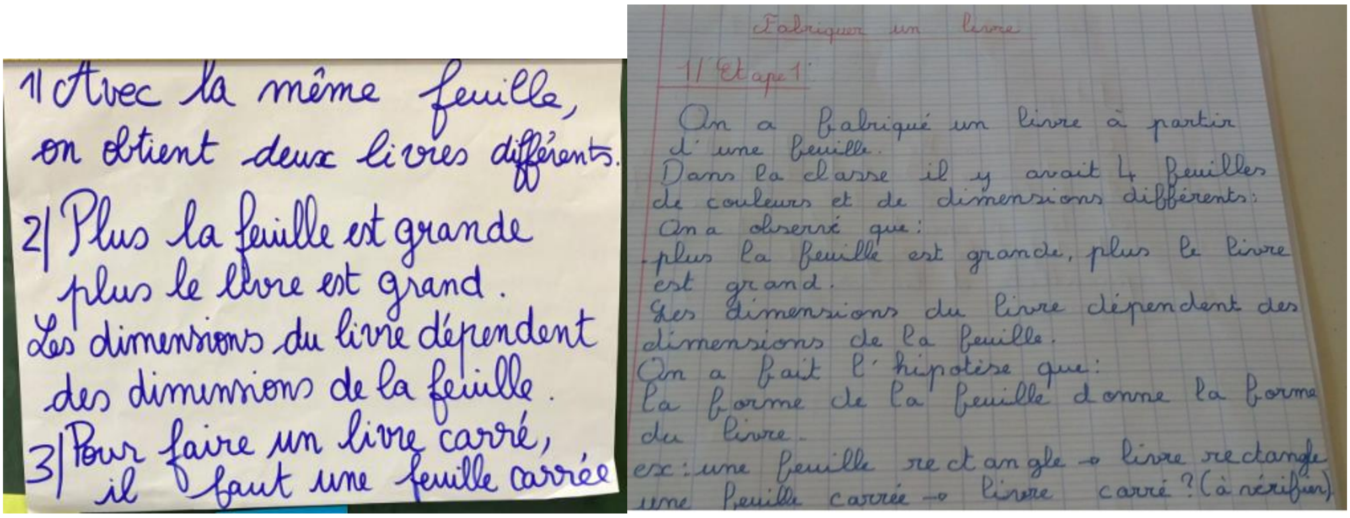


*Figure 8. Affiche collective à l'issue de l'étape 1.*

Lorsque à partir d'une même feuille, les deux livres ont été obtenus, l'affiche en rend compte. Cependant, l'obtention de deux livres à partir d'une même feuille arrive rarement dans les classes où une vidéo avec une seule orientation est présentée car par, effet de contrat didactique, les élèves sont attentifs à respecter l'orientation de la feuille comme dans la vidéo.

Le choix des feuilles de différentes dimensions est important, en particulier, celui de proposer des feuilles carrées ou qui donnent l'impression visuelle de l'être. Cela induit chez certains, à faire des hypothèses comme en attestent les traces narratives produites collectivement ou individuellement (figure 9).


1/ Avec la même feuille,
on obtient deux livres différents.
2/ Plus la feuille est grande
plus le livre est grand.
Les dimensions du livre dépendent
des dimensions de la feuille.
3/ Pour faire un livre carré,
il faut une feuille carrée

Fabriquer un livre
1/ Etape 1
On a fabriqué un livre à partir
d'une feuille.
Dans la classe il y avait 4 feuilles
de couleurs et de dimensions différents.
On a observé que :
plus la feuille est grande, plus le livre
est grand.
Les dimensions du livre dépendent des
dimensions de la feuille.
On a fait l'hipotèse que :
La forme de la feuille donne la forme
du livre.
ex : une feuille rectangle → livre rectangle
une feuille carrée → livre carré ? (à vérifier)

*Figure 9. Trace écriture narrative collective (à gauche) et individuelle (à droite).*

Dans le cadre d'une séquence portant sur un processus de modélisation, il est indispensable que les élèves sachent faire la différence entre les faits et les hypothèses, comme en atteste la trace écrite individuelle de la figure 9.

### 3.2 Etape 2 : construire un modèle

La seconde étape travaille le type de tâches T2 et se réalise en deux temps (chacune faisant l'objet d'au moins une séance).

La première question porte sur la possibilité d'obtenir un livre carré avec cette technique de pliage et fait suite aux hypothèses qu'ont pu faire les élèves à l'issue de la séance précédente. Dans un premier temps, les élèves plient une feuille carrée et parce que cela n'aboutit pas au résultat escompté, certains coupent les livres obtenus pour obtenir des livres carrés. Ce faisant, dans le même temps, l'hypothèse initiale est invalidée, tout en répondant à la question posée : il est possible de construire un livre de forme carrée.

Nous faisons l'hypothèse que modéliser, c'est passer du statut de fabricant à celui de concepteur, aussi cette première question est complétée en spécifiant les dimensions du livre à construire tout en interdisant la technique expérimentale de découpe d'un livre déjà construit : « nous devons aider une usine qui fabrique des livres par pliage. Pour ne pas gaspiller de feuille, on ne peut plus découper les livres. Il faut connaître les dimensions de la feuille pour fabriquer un livre carré dont la longueur des côtés mesure 6 cm. »

La contrainte de non-découpage conduit à devoir anticiper le résultat du pliage et donc de concevoir un modèle qui lie les dimensions de la feuille à celles d'un livre carré de longueur de côté donnée. Pour y parvenir, les élèves partent en général d'un livre déjà réalisé – le plus souvent découpé a posteriori pour avoir une forme carrée – qu'ils déplient. Certains restent au niveau expérimental de la mesure (à gauche sur la figure 10), tandis que d'autres passent par l'analyse des plis et produisent un modèle géométrico-numérique (à droite sur la figure 10).

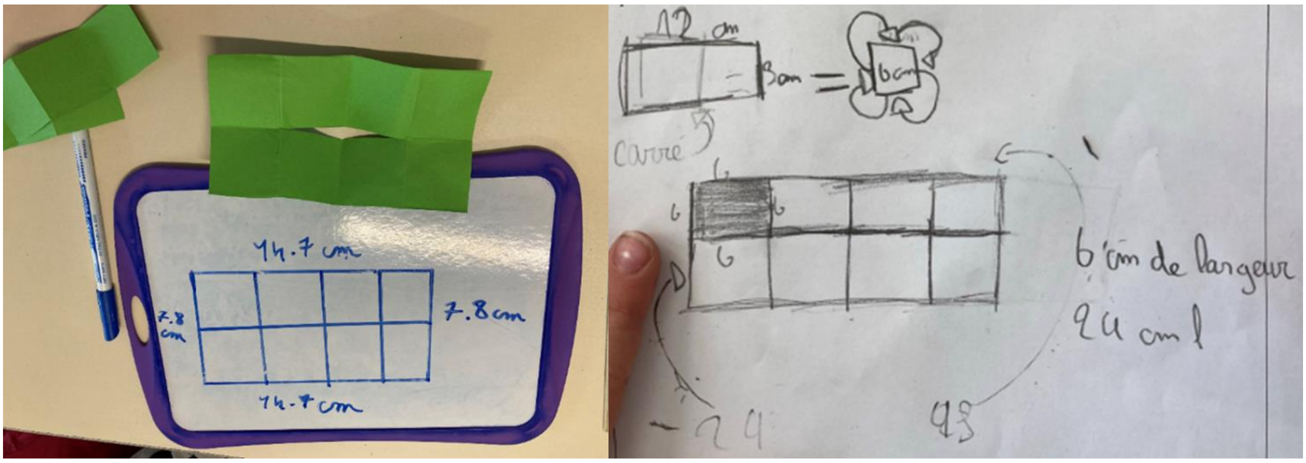



*Figure 10. Modèle empirique-mesure (à gauche) et modèle géométrico-numérique (à droite).*

A l'issue de cette recherche, une mise en commun est réalisée et une affiche collective est conçue qui présente le livre carré, la feuille qui a permis de le construire et un schéma qui explicite les relations entre les dimensions. Sur la figure 11, le schéma est remplacé par une feuille dépliée sur laquelle les traits ont été repassés pour être visibles.

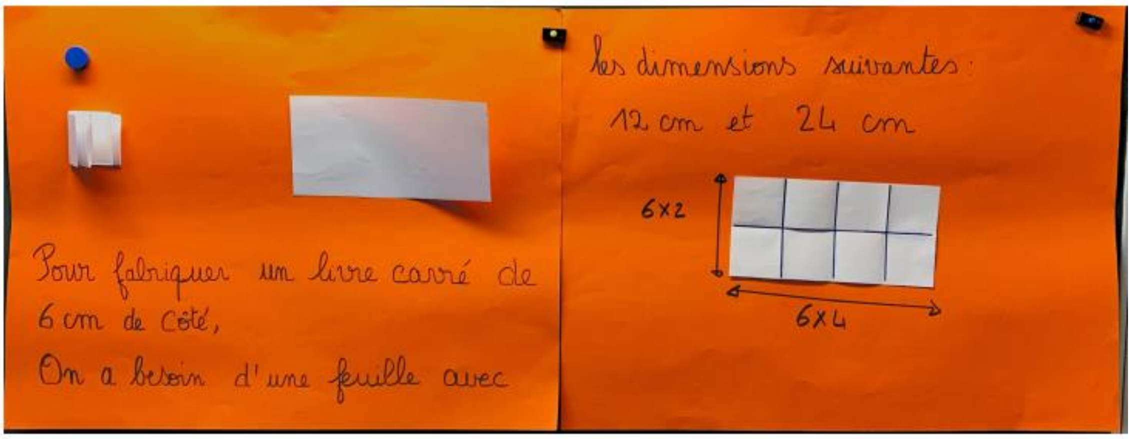
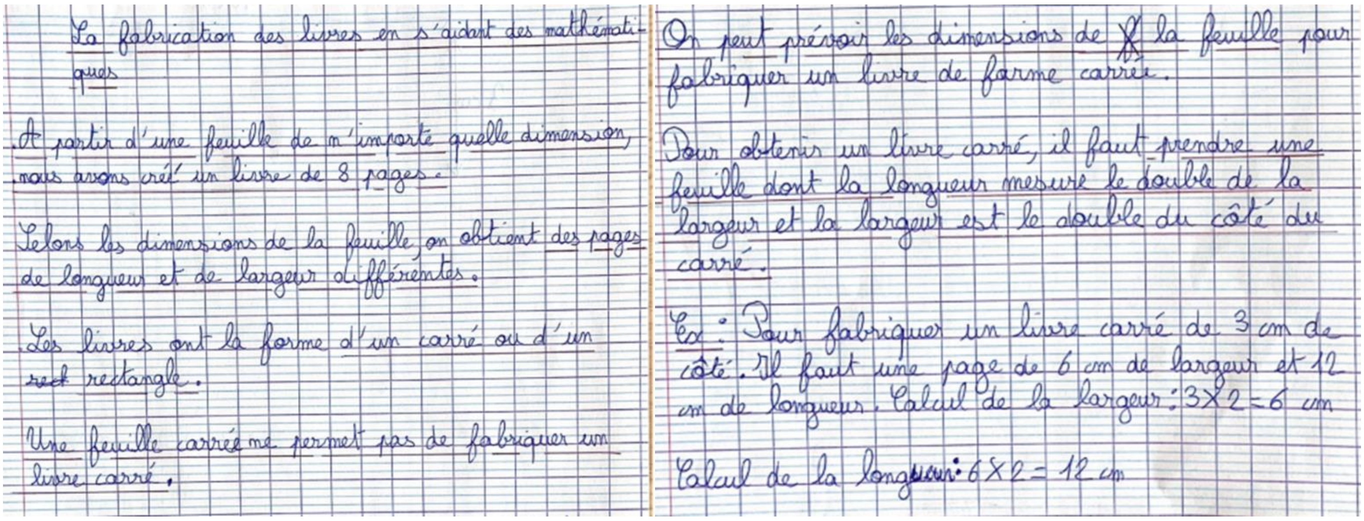



*Figure 11. Affiche : les dimensions de le feuille pour construire un livre carré.*

Une autre modalité a été expérimentée dans une autre classe. Les élèves qui travaillaient en groupe ont produit eux-mêmes des affiches à partir desquelles une mise en commun a permis de dégager un consensus : il faut des feuilles de dimensions (12 cm, 24 cm) pour réaliser un livre carré dont la longueur des côtés mesure 6 cm. En appui à cet exemple, qui joue alors le rôle d'exemple générique, différentes longueurs de côté d'un livre carré sont données oralement et un tableau se constitue progressivement qui associent aux dimensions d'un livre, celles de la feuille correspondante. Cette organisation des réponses facilite l'identification et l'institutionnalisation de la relation entre les dimensions : pour obtenir un livre carré de longueur de côté $c$, il faut une feuille rectangulaire de dimensions ($2c$, $4c$). La figure 12 présente la trace écrite narrative produite collectivement et copiée par les élèves, dans la classe où cette modalité a été expérimentée.


La fabrication des livres en s'aidant des mathématiques

A partir d'une feuille de n'importe quelle dimension, nous avons créé un livre de 8 pages.

Selons les dimensions de la feuille, on obtient des pages de longueur et de largeur différentes.

Les livres ont la forme d'un carré ou d'un ~~rect~~ rectangle.

Une feuille carrée ne permet pas de fabriquer un livre carré.

On peut prévoir les dimensions de ~~X~~ la feuille pour fabriquer un livre de forme carrée.

Pour obtenir un livre carré, il faut prendre une feuille dont la longueur mesure le double de la largeur et la largeur est le double du côté du carré.

Ex : Pour fabriquer un livre carré de 3 cm de côté. Il faut une page de 6 cm de largeur et 12 cm de longueur. Calcul de la largeur : 3X2 = 6 cm

Calcul de la longueur : 6X2 = 12 cm

*Figure 12. Trace écrite narrative à l'issue de la première partie de l'étape 2.*

Enfin, notons que si les élèves n'ont pas découvert précédemment qu'avec une même feuille, deux livres peuvent être fabriqués, il peut arriver que dans un moment de validation des réponses par pliage, un élève construise, à partir d'une feuille aux bonnes dimensions, un livre rectangulaire de dimensions ($c/2$,$2c$). Cette « mésaventure » est alors l'occasion de découvrir les deux sens de pliage.

Une fois le problème étudié avec des livres carrés, la même question est posée pour fabriquer un livre rectangulaire de dimensions données, ce qui permet de mettre à l'épreuve et de valider le modèle mathématique. Par exemple, pour fabriquer un livre de dimensions (5 cm, 7 cm), on a besoin d'une feuille de dimensions (10 cm, 28 cm) et le dos du livre mesure 5 cm ou d'une feuille de dimensions (14 cm, 20 cm) et le dos du livre mesure 7 cm. À ce stade, c'est un modèle géométrico-numérique qui est utilisé par les élèves (figure 13).

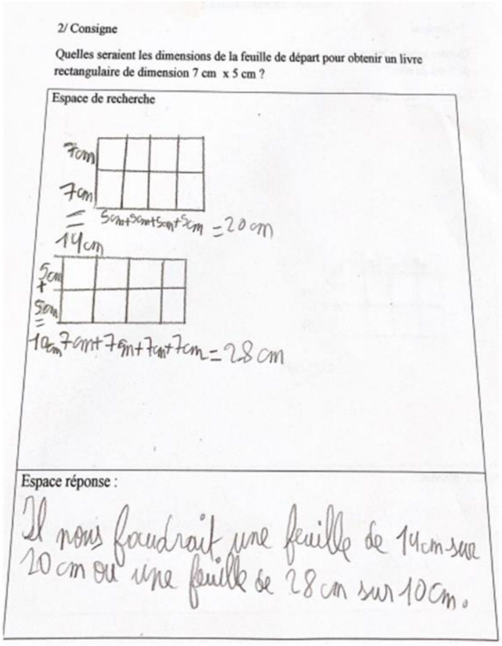



*Figure 13. Recherche des dimensions d'une feuille pour réaliser un livre rectangulaire de dimensions (5 cm, 7 cm).*

Notons, qu'au cours de cette séquence, le pliage et la manipulation ont progressivement changé de statut : si dans un premier temps, la réalisation de livres soutient le travail de modélisation tout en permettant de produire une réponse, dans un second temps, ils sont devenus des techniques de validation du modèle conçu.

### 3.3 Etape 3 : utiliser le modèle

La troisième étape travaille le type de tâches T3 et utilise le modèle mathématique conçu précédemment. Le modèle mathématique montre toute sa puissance, puisqu'il permet d'anticiper les dimensions d'un livre à partir des dimensions de la feuille sans passer par le pliage. À ce stade, les élèves ont identifié que les dimensions d'une livre étaient la moitié et le quart de chacune des dimensions de la feuille. Le calcul permet de trouver la réponse tandis que le schéma, qui initialement a servi à construire un modèle géométrico-numérique de la situation, est utilisé comme moyen de valider cette réponse. Le recours au pliage n'est plus utile pour se convaincre du bien-fondé des réponses (figure 14).

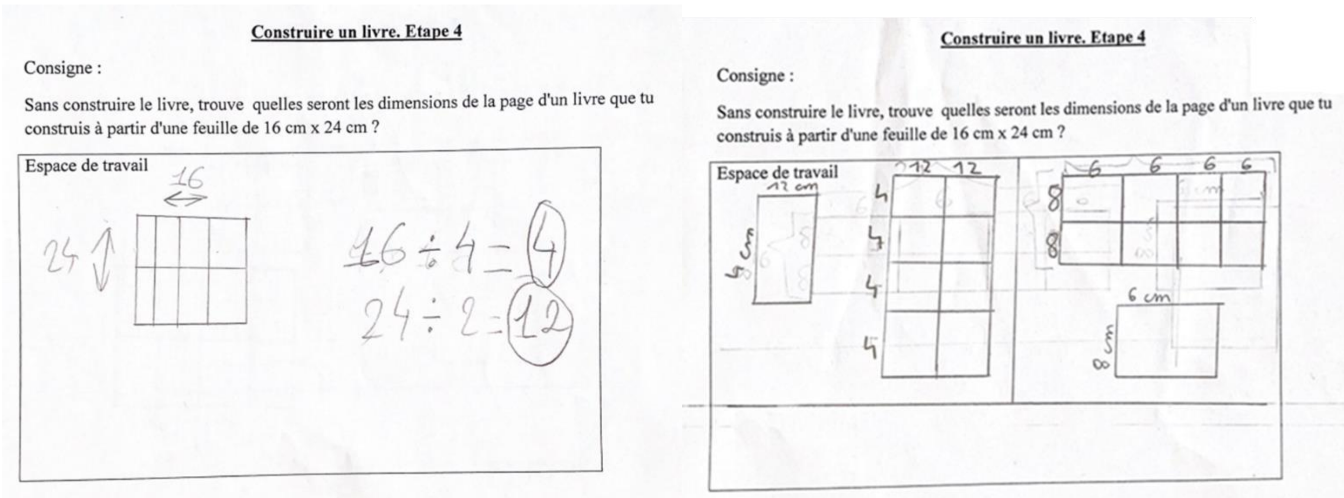



*Figure 14. Détermination des dimensions d'un livre obtenu par pliage d'une feuille de dimensions données.*

Le modèle liant dimensions d'une feuille et dimensions d'un livre peut être institutionnalisé, s'il ne l'a pas été à l'étape précédente. Et pour montrer sa puissance, les élèves sont invités à répondre à des questions du type : » Pourquoi sommes-nous certains de ne pas pouvoir construire, sans découpage après pliage, un livre carré avec une feuille de dimensions (14 cm, 24 cm) ?

Nos expérimentations ont montré que cette situation, qui s'appuie sur des connaissances géométriques et numériques de base, pouvait être une première rencontre avec la modélisation pour des élèves de 9 ans à 12 ans et leurs professeurs.

## III - CONCLUSION

L'objet de cette communication était de présenter une séquence qui fasse travailler la modélisation à des élèves de l'école primaire. Cette situation, qui a été expérimentée plusieurs fois, par différents membres du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier, selon différentes modalités et dans différents contextes, vise à établir les relations entre les dimensions d'une feuille et les dimensions d'un livre obtenu selon un procédé de fabrication par pliage. Elle est auto-validante et comporte une part importante de manipulation.

Notre recherche collaborative en est encore aux étapes 4, 5, 6 du processus de co-élaboration d'une ingénierie didactique (figure 2) et la rédaction de la ressource est encore partielle. Ce texte prend appui sur certaines des modalités expérimentées mais d'autres ont été réalisées, y compris au cycle 2 (en nous limitant au modèle associé à un livre carré) qui nécessitent encore d'être analysées. Néanmoins, il nous a semblé que nous avions suffisamment avancé dans notre réflexion pour partager cette situation et pour faire un premier bilan des enseignements que nous tirons de ces expérimentations sur le travail épistémologique du professeur, en reprenant chacune de ses trois dimensions, mathématique, didactique et épistémologique.

Dimension mathématique : l'analyse mathématique (notamment l'identification de l'effet des deux orientations de la feuille initiale, l'identification des relations entre les dimensions des feuilles et des livres et le fait qu'une seule feuille pouvait produire un livre carré) a été un appui important dans la gestion didactique de la séquence car elle a nourri la vigilance didactique des professeurs : capables d'identifier et d'interpréter les procédures des élèves, ils sont en mesure d'y répondre sans rien laisser dans l'ombre. Les professeurs sont plus autonomes et plus à même d'analyser ce que font les élèves, ambiguïtés et incompréhensions disparaissent au bénéfice d'un enrichissement du processus de modélisation.

Dimension didactique : la situation recourt aux mêmes grandeurs (longueur, largeur, dimension) sur deux objets différents. Il y a donc une vigilance didactique particulière à exercer avec un enjeu de précision du fait de la polysémie des mots utilisés. Le mot « taille », par exemple, spontanément employé par les élèves et les professeurs génère des ambiguïtés et des confusions au moment de la définition du système modélisé.

Dimension épistémologique : la mathématisation du problème nécessite d'être étayé par une exploration de cas. Il ne suffit pas d'étudier un cas particulier associé à des dimensions spécifiques pour construire un modèle générique. Un travail spécifique est à faire qui permette de passer du singulier au général. Le rôle des traces écrites individuelles et collectives (feuilles de recherche, affiches, traces écrites narratives, recueil de données au tableau) pour soutenir les temps de mises en commun est essentiel. Elles contribuent à faire distinguer les faits qui sont des éléments du système à modéliser et les hypothèses qui sont constitutives de la construction du modèle. Elles accompagnent l'explicitation du modèle mathématique qui se construit et s'enrichit au fil des questions et ce faisant, révèlent le processus de modélisation.

## IV - BIBLIOGRAPHIE

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parysz, M.- H. Salin (éds.), *Actes de la IXe École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Caen : ARDM & IUFM.

Barquero, B. (2023). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire à travers les parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles Actes du 48e colloque* (à paraître). *COPIRELEM.* ARPEME.

Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C. et Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. *ICMI Studies 24. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (p. 189-197). University of Tsukuba, Japan.

Brousseau, G. (1998). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* https://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Cabassut, R. (2023). Contraintes des systèmes didactiques dans une formation institutionnelles : exemples de la représentation et de la modélisation. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles Actes du 48e colloque* (à paraître). *COPIRELEM.* ARPEME.

Chappaz, J. et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.

Chevallard, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique.* La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 -112.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1993). Autour des stratégies utilisées pour former des maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.

Ministère Education Nationale (2015). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. Ministère de l'éducation nationale, France.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. et Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés européennes.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(1), 7- 55.

Wozniak, F. (2019a). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. *Didactiques en pratique*, 5, 27-36.

Wozniak, F. (2019b). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques,* 39(1), 15-50.

Wozniak, F. (2021). Modéliser au cycle 3 : les problèmes de généralisation. *Grand N*, 107. p. 53-78.

Wozniak, F. Barquero, B., Bosch, M. et Kaspary, D. (*à paraître*). Dépasser les praxéologies muettes de modélisation : un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques de l'ARDM.* La Pensée sauvage, Grenoble.

Wozniak, F. et Cattoën, M.-O. (*à paraître*). Modélisation et praxéologies (de type) algébriques : une étude de cas. *Revue québécoise de didactique des mathématiques.*

# LA COP-MATHS : UNE COMMUNAUTE DE PRATIQUE « AU SERVICE » DE L'ENSEIGNEMENT DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

**Camille ANQUETIL**
PE, académie de Bordeaux
Camille-Si.Anquetil@ac-bordeaux.fr

**Caroline BULF**
MCF, INSPÉ de l'académie de Bordeaux
LaB-E3D EA 7441 - Université de Bordeaux
caroline.bulf@u-bordeaux.fr

Résumé
Notre communication s'inscrit dans la continuité de celle présentée l'an dernier (Anquetil & Bulf, 2021) et cherche à rendre compte de l'avancée de notre « communauté de pratique », la CoP-Maths (Anquetil, 2021). Depuis sa création, les préoccupations de la CoP-Maths gravitent autour du rôle de la schématisation dans la résolution de problème et nourrissent un questionnement vif et partagé au sein de notre CoP-Maths : comment aider les élèves à produire et se servir du schéma pour mieux résoudre des problèmes mathématiques ? Nous faisons l'hypothèse qu'un schéma, en tant que production écrite personnelle et singulière des élèves, peut être une voie d'entrée pour ouvrir des espaces dialogiques entre pairs et être propice à la co-construction de savoirs mathématiques qui lui sont attachés. Dès lors, l'objectif que la CoP-Maths s'est fixé pour sa deuxième année est le suivant : organiser un apprentissage autour de la schématisation, au service de la compréhension de l'énoncé, pour favoriser la résolution de problèmes par les élèves du CP au CM2.
Au fil de notre collaboration autour de cet objectif commun, nous avons recueilli diverses traces (productions d'élèves lors d'un pré-test, fiches de préparation, extraits filmiques de séances, affiches produites pour la classe, …) et notre contribution a pour but d'en présenter les premières analyses.

## I - LES DÉBUTS DE LA COP-MATHS

### 1 La CoP-Maths, c'est qui, c'est quoi ?

La genèse du projet est la suivante : en novembre 2020, dans le cadre d'un mémoire de recherche sur le sujet des communautés de pratique (CoP), nous avons voulu créer un groupe expérimental. Notre projet s'est construit en appui sur le modèle théorique de Wenger, dont voici la définition la plus courante :

> *« Les communautés de pratique sont des groupes de personnes qui se rassemblent afin de partager et d'apprendre les uns des autres, face à face ou virtuellement. Ils sont tenus ensemble par un intérêt commun dans un champ de savoir et sont conduits par un désir et un besoin de partager des problèmes, des expériences, des modèles, des outils et les meilleures pratiques. Les membres de la communauté approfondissent leurs connaissances en interagissant sur une base continue et à long terme, ils développent ensemble de bonnes pratiques. » (Wenger, McDermott & Snyder, 2002, p.4)*

Notre projet cherche à explorer les potentialités d'un accompagnement, d'une formation des enseignant·e·s en appui sur le partage et la collaboration entre pairs, ce qui n'est pas sans rappeler des dispositifs collaboratifs de formation continue qui ont récemment été mis en œuvre dans différents contextes dans le premier ou second dégré[1] : les « lesson studies », les « LAAC », les « Laboratoires de mathématiques », le « plan mathématiques » déployé par les ex-RMC (Référents Mathématiques de Circonscription) ou CPC (Conseiller Pédagogique de Circonscription) mathématiques auprès des « constellations », …

Théoriquement, la structure de toute communauté de pratique est la même : une communauté construit une pratique partagée, guidée par un domaine d'intérêt commun. Au tout début du projet, nous avons constitué notre communauté, pour cibler ensuite un domaine d'intérêt qui découlerait de préoccupations communes. Nous avons donc réuni, par bouche à oreille, dix professionnelles de l'éducation en élémentaire qui ont voulu s'investir, poussées par leur curiosité d'explorer un nouveau mode de formation. Six de ces participantes avaient le même profil : enseignante en élémentaire, cycle 2 ou 3, en REP ou REP+. Les autres profils correspondaient plutôt à la formation ou à la recherche : formatrices INSPE, anciennes PEMF, chercheuse didacticienne, référentes mathématiques de circonscription, …

Dans le cas de la CoP-Maths, la collaboration s'est rapidement orientée vers des préoccupations autour de la schématisation en résolution de problèmes en cycle 2 et cycle 3 en appui sur la définition suivante :

> *Un schéma est une représentation visuelle abstraite qui prend sens spatialement et qui permet de rendre compte de structures et de processus complexes dans leur globalité (Winn, 1987). Les schémas sont une représentation externe [au sens de (Goldin, 1986)] permettant de révéler des représentations mentales internes (Presmeg, 1986) offrant un accès privilégié aux connaissances des élèves à travers les connections construites (Bereiter, 1991). (Diezmann, 1995, p. 2)*

Nous développons dans les parties suivantes les interrogations que suscite notre dispositif et les questionnements afférents au processus de schématisation dans la résolution de problème à l'école.

## 2 Des questionnements sur le sujet de la schématisation

Tout au long de la première année, la CoP-Maths a développé un répertoire théorique partagé, à savoir de nombreuses références spécifiques à la résolution de problème, faisant consensus en didactique des mathématiques : les différentes catégories de problèmes des champs additif et multiplicatif de Vergnaud (1982), la catégorisation de Houdement (2017), ou encore les apports théoriques de Julo (2002) dont l'importance de construire des banques de problèmes basées sur l'analogie. Nous nous sommes également inspirés des travaux de Polotskaia (2010), de Fagnant (2018) et par la suite de Camenish et Petit (2007). Ces références plus ou moins connues par les membres de la CoP, régulièrement enrichies et diversifiées au cours des discussions et interactions du groupe, ont été explicitées durant les réunions et publiées sur le *padlet* du groupe impliqué dans la CoP-Maths.

Ainsi, en appui sur ces nombreux travaux de recherche et à travers l'accompagnement des membres les plus experts, les enseignants ont rapidement cheminé vers un point de vue partagé, doublé d'un questionnement qui sera le moteur de notre collaboration, à savoir : Le schéma peut aider les élèves à résoudre des problèmes mathématiques, mais **comment aider les élèves à produire des schémas pour mieux résoudre des problèmes mathématiques ?** En effet, il existe de nombreux points d'achoppement à un usage idoine ainsi que de réelles tensions entre ce que les travaux de recherche peuvent proposer (Vergnaud, 1989 ; Houdement, 2017 ; Cabassut, 2020) et les dernières recommandations institutionnelles parues (comme dans « Le guide Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » publié en décembre 2020).

Aussi, c'est un deuxième questionnement plus axé sur le rôle du langage qui anime le groupe, à l'issue de cette première année. En appui sur les travaux de recherche en cours de V. Magniant (doctorante au LaB-

[1] Pour plus d'informations :
- « les Lesson Studies » : https://irem.univ-rouen.fr/actualités ou https://orfee.hepl.ch/handle/20.500.12162/670
- les « LAAC » : Laboratoire d'Analyse de l'Activité en Classe (dispositif innovant développé au sein d'un établissement)
- Les « Laboratoires de mathématiques » : https://eduscol.education.fr/1469/laboratoires-de-mathematiques
- « le plan mathématiques » : https://eduscol.education.fr/1476/le-plan-mathematiques-l-ecole?menu_id=1761

E3D) sur les pratiques scripturales des élèves à l'école, **nous faisons l'hypothèse qu'un schéma, en tant que production écrite personnelle et singulière des élèves, peut être une voie d'entrée pour ouvrir des espaces dialogiques entre pairs et être propice à la co-construction de savoirs mathématiques qui lui sont attachés**.

## II - LA SUITE DE LA COP-MATHS

### 1 La deuxième rentrée de la CoP-Maths

Nous avons commencé notre deuxième année avec quelques changements : nous étions désormais soutenus par le dispositif INSPE-CARDIE[2] ; certains membres étaient partis et d'autres fraîchement arrivés, ce qui portait la communauté au nombre de 13. Nous avons vite remarqué à quel point notre communauté était un réseau aux mailles nombreuses : certaines étaient voisines, l'une avait été l'enseignante de l'autre, certaines avaient déjà travaillé ensemble, bénéficié de la formation de l'une, été la directrice de mémoire de l'autre, etc. Comme nous l'avions observé l'année précédente, ces liens ne sont pas anodins dans la dynamique d'une telle communauté.

À la fin de la première année, les participantes se sont mises d'accord sur la nécessité de se lancer dans la co-création d'outils d'enseignement, permettant de s'engager collectivement dans des expériences de classe, non seulement par une réflexion en amont mais aussi dans l'action et sur l'action, par exemple à travers des situations de co-intervention, d'observations croisées, ou au moyen d'extraits filmés soumis à l'analyse collective. La CoP-Maths a donc commencé sa première réunion de l'année 2 en se fixant l'objectif suivant : « **Organiser un apprentissage autour de la schématisation pour favoriser la résolution de problèmes par les élèves du CP au CM2.** »

### 2 La dynamique globale de l'année

La CoP-Maths a conçu et mis en œuvre une progression entière du CP au CM2 et donc un grand nombre de séances pour chaque niveau, en situant le schéma au centre de la réflexion. L'année a été ponctuée de plusieurs rencontres avec tout le groupe près d'une fois par mois, au sein de l'école.

D'un point de vue méthodologique, les membres de la Cop-Maths collaborent lors des réunions en grand groupe ou en cercles privés ou de façon plus isolée pour participer à l'élaboration de ressources communes, partageant ensuite leur travail grâce à divers supports numériques. Puis, après la mise en œuvre dans leur classe, ils donnent à voir leur pratique en partageant des traces de leur activité enseignante et celles des élèves : productions écrites, entretiens audio, extraits filmiques de séances de classe, affichages, … Ainsi, la CoP-Maths permet d'analyser collectivement ces traces qui constituent alors notre corpus, tout comme les échanges au sein de la CoP, qui sont également parfois enregistrés. Ce retour réflexif permet alors un retour à l'activité en classe éclairé par les différents points de vue partagés en réunion. En ce sens, la CoP-Maths s'est affirmée cette année comme un lieu de circulation, de confrontation, d'échanges et d'évolution des pratiques permettant d'échafauder, d'ajuster, et d'améliorer l'action enseignante.

### 3 Le point de départ du travail collaboratif : le pré-test

La CoP-Maths a décidé de faire passer un pré-test aux élèves afin d'évaluer leur capacité à résoudre les mêmes problèmes basiques, au sens de Houdement (2017), à deux moments de l'année (octobre et Juin), et de récolter ainsi des informations et des traces de l'activité des élèves en appui ou non sur la schématisation. Le but étant de comprendre dans un premier temps d'où partaient les élèves mais aussi de mesurer une évolution au moyen d'un post-test à la fin de l'année, en gardant à l'esprit qu'il sera difficile d'en déduire que ce sont les actions seules de la CoP-Maths qui auront eu un réel impact.

[2] CARDIE : Conseil Académique en Recherche, Développement, Innovation et Expérimentation. https://www.ac-bordeaux.fr/la-mission-cardie-innovation-experimentation-123201

Ainsi, pour les élèves de cycle 2, nous avons choisi des problèmes basiques relevant du champ additif (composition, transformation et comparaison) et pour ceux de cycle 3, nous avons choisi des problèmes basiques relevant du champ multiplicatif (proportionnalité simple, comparaison, configuration rectangulaire), en référence aux catégories de Vergnaud (figure 2). Il y a une recherche de progressivité entre les différents niveaux de chaque cycle à travers le nombre de problèmes proposés, le choix des nombres et la difficulté de la procédure de résolution (en fonction de la donnée manquante).

Avant d'aborder les résultats de ces pré-tests, il convient de faire un détour par le processus de résolution de problème en lui-même afin de mieux appréhender le cheminement pris par la CoP-Maths suite aux pré-tests. De manière générale, les enseignants peuvent le plus souvent identifier trois grands temps dans la résolution par leurs élèves : l'appréhension de l'énoncé, la résolution, la rédaction d'une phrase de réponse. Au sein de la CoP-Maths, nous nous appuyons sur le modèle de Verschaffel et al. (2000) pour illustrer le processus de résolution de problème (figure 1). Nous pouvons y retrouver ces trois temps.

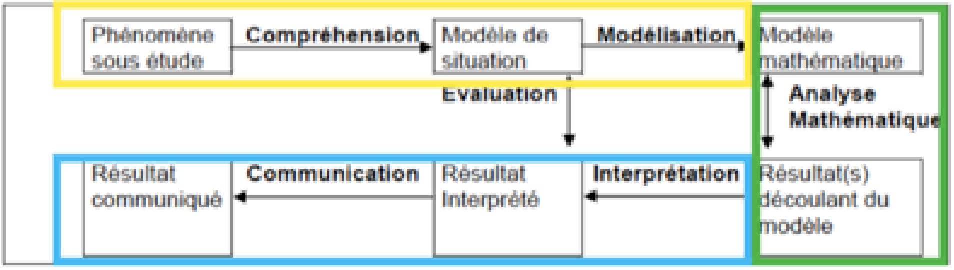



*Figure 1. Modification du processus de résolution de problème selon Verschaffel et al. (2000), en jaune l'appréhension de l'énoncé, en vert le temps de la résolution en bleu celui de la rédaction d'une phrase de réponse.*

Pour pouvoir mieux communiquer au sein de la CoP sur les pré-tests, nous avons dressé un tableau récapitulatif du pourcentage de réussite par niveau et par type de problème (figure 2), dans lequel nous avons rapidement pu constater que les élèves de cycle 3 semblaient globalement en difficulté. Nous avons aussi dressé un tableau récapitulatif du pourcentage d'élèves qui ont utilisé une représentation graphique de type schématique, visible grâce aux couleurs. Sous chaque valeur, on peut aussi lire le pourcentage d'élèves ayant réussi le problème parmi ces élèves qui ont utilisé un schéma.

| **PRE TESTS : pourcentage de réussite selon les problèmes proposés et le niveau scolaire** (effectif) | CP (9) | CE1 (22) | CE2 (12) | CM1 (13) | CM2 (14) |
|---|---|---|---|---|---|
| Problème de composition - recherche du total | 88 | 81 | 83 | | |
| Problème de composition - recherche d'une partie | 33 | 40 | 75 | | |
| Problème de transformation - recherche état final (ajout) | 77 | | | | |
| Problème de transformation - recherche état final (retrait) | | 72 | 75 | | |
| Problème de transformation - recherche transformation (ajout) | 66 | 30 | | | |
| Problème de transformation - recherche transformation (retrait) | | | 66 | | |
| Problème de transformation - recherche état initial (ajout) | | 40 | | | |
| Problème de transformation - recherche état initial (retrait) | | | 75 | | |
| Problème de comparaison additive - recherche de l'état d'un comparé | | | 50 | | |
| Problème de comparaison additive- recherche du rapport entre comparés | | | 66 | | |
| Proportion simple - recherche du résultat d'un produit | | | | 53 | 21 |
| Proportion simple - recherche de la valeur d'une part | | | | 46 | 35 |
| Proportion simple - recherche du nombre de parts | | | | 30 | 7 |
| Comparaison multiplicative - le référent a « ... fois plus que » | | | | 30 | 64 |
| Comparaison multiplicative - le référent a «... fois moins que » | | | | 15 | 0 |
| Configuration rectangulaire - recherche du résultat du produit | | | | | 35 |
| Configuration rectangulaire - recherche de la valeur d'un diviseur | | | | | 50 |

*Légende : Dans chaque case, le nombre est le pourcentage d'élèves ayant réussi à résoudre le problème.*

| 0 à 19 | 20 à 39 | 40 à 59 | 60 à 79 | 80 à 100 |
|---|---|---|---|---|

| **PRE TESTS : pourcentage d'élève utilisant une représentation graphique pour résoudre le problème et taux de réussite lié à cette procédure** (effectif) | CP (9) | CE1 (22) | CE2 (12) | CM1 (13) | CM2 (14) |
|---|---|---|---|---|---|
| Problème de composition - recherche du total | 100 (88%) | 45 (80%) | 16 (100%) | | |
| Problème de composition - recherche d'une partie | 100 (33%) | 72 (43%) | 33 (75%) | | |
| Problème de transformation - recherche état final (ajout) | 100 (77%) | | | | |
| Problème de transformation - recherche état final (retrait) | | 86 (68%) | 1 (100%) | | |
| Problème de transformation - recherche transformation (ajout) | 100 (66%) | 63 (28%) | | | |
| Problème de transformation - recherche transformation (retrait) | | | 33 (50%) | | |
| Problème de transformation - recherche état initial (ajout) | | 54 (33%) | | | |
| Problème de transformation - recherche état initial (retrait) | | | 0 | | |
| Problème de comparaison additive - recherche de l'état d'un comparé | | | 1 (0%) | | |
| Problème de comparaison additive- recherche du rapport entre comparés | | | 16 (50%) | | |
| Proportion simple - recherche du résultat d'un produit | | | | 23 (66%) | 21 (0%) |
| Proportion simple - recherche de la valeur d'une part | | | | 46 (50%) | 64 (22%) |
| Proportion simple - recherche du nombre de parts | | | | 23 (33%) | 21 (0%) |
| Comparaison multiplicative - le référent a « ... fois plus que » | | | | 1 (0%) | 14 (50%) |
| Comparaison multiplicative - le référent a «... fois moins que » | | | | 1 (0%) | 14 (0%) |
| Configuration rectangulaire - recherche du résultat du produit | | | | | 64 (22%) |
| Configuration rectangulaire - recherche de la valeur d'un diviseur | | | | | 57 (37%) |
| **Moyenne d'utilisation d'une représentation graphique** | **100** | **64** | **14** | **18** | **36** |
| **Moyenne du taux de réussite lié à cette procédure** | **66** | **50** | **53** | **30** | **18** |

*Légende : Dans chaque case, le premier nombre est le pourcentage d'élèves ayant utilisé une représentation graphique autre qu'un calcul ou une phrase. Le deuxième nombre est le pourcentage de réussite dans les élèves ayant utilisé ce type de représentation.*

| 0 à 19 | 20 à 39 | 40 à 59 | 60 à 79 | 80 à 100 |
|---|---|---|---|---|

*Figure 2. Tableaux récapitulatifs des résultats du pré-test 2021.*

D'un point de vue de la résolution du problème en elle-même, nous avons observé des erreurs récurrentes :

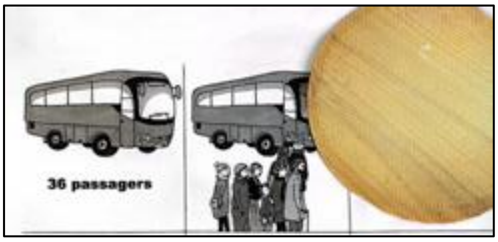
- dans la phase d'appropriation de l'énoncé : l'oubli d'une donnée ou le choix d'un mauvais calcul ;
- dans la phase de résolution : des erreurs de calcul, une procédure trop coûteuse pour être réussie, ou un calcul dont la technique n'est pas maitrisée ;
- dans la phase d'interprétation : beaucoup n'écrivent pas de phrase réponse, d'autres écrivent un résultat invraisemblable et d'autres encore mésinterprètent leur résultat.

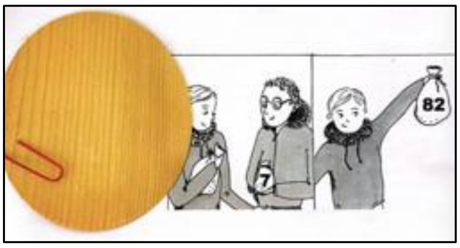
Concernant l'utilisation du schéma, ce que l'on observe en premier lieu est que la totalité des CP utilisent une représentation schématique pour résoudre le problème, ce qui n'est pas surprenant compte tenu de leur accès limité à l'écriture symbolique. Presque aucun CE2 n'utilise de schéma pour les problèmes additifs, sur lesquels ils sont d'ailleurs en réussite. De plus, on constate peu de schémas pour les problèmes de comparaison multiplicative en CM1 ou CM2. Enfin, lorsque l'on regarde les deux dernières lignes, on remarque que globalement, plus on avance dans les niveaux, moins les élèves qui font un schéma réussissent le problème. On peut se poser la question : quels schémas sont produits par ces élèves en difficulté ? Si cette analyse n'a pas été menée au sein de notre CoP-Maths malgré l'intérêt qu'elle pourrait représenter, nous avons cependant observé deux utilisations récurrentes du schéma dans les pré-tests : celle pour s'approprier l'énoncé (représentation des collections, réécriture des informations, …) et celle pour calculer (barrer pour soustraire, distribuer un par un, … ).

Au regard de la relation au schéma observée chez les élèves, surtout ceux en difficulté, il semblait évident pour la CoP-Math que la direction à prendre était d'accompagner le processus de mathématisation de la situation en jeu en prenant appui sur cet outil : en donnant du sens aux nombres de l'énoncé, en rendant visibles les liens qui existent entre eux pour mieux choisir le calcul à mettre en œuvre. En référence aux travaux de Julo (2002) déjà évoqués, qui décrivent qu'il n'est pas possible de séparer le travail de compréhension de l'énoncé et celui de construction d'une stratégie, ainsi que les nombreux travaux de

Fagnant (2018), nous avons donc choisi de focaliser notre action sur le schéma pour accompagner le recodage sémantique et modéliser les liens entre les données.

La CoP-Maths a donc repris et modifié son objectif de l'année à savoir : organiser un apprentissage autour de la schématisation, **au service de la compréhension de l'énoncé**, pour favoriser la résolution de problèmes par les élèves du CP au CM2. L'équipe s'est alors mise d'accord sur quelques lignes directrices pour envisager des activités à mettre en place dans les classes, par exemple l'importance à donner aux situations de communication entre pairs ou encore la nécessité de cibler de petits objectifs à travers des activités ritualisées.




## 4 Une ressource co-construite et mise en oeuvre

Le groupe de travail constitué uniquement des enseignant·e·s de la CoP-Maths s'est alors réuni deux fois en décembre 2021 pour co-construire ces activités, puis une réunion en janvier en grand groupe a permis de faire quelques ajustements avant de se lancer avec les élèves. Ces activités ont été conçues sous la forme de 9 paliers progressifs, du CP au CM2. Pour se constituer une base de réflexion, les enseignant·e·s se sont appuyé·e·s sur le travail de Camenisch et Petit (2007), dans lequel ces derniers travaillent sur les trois temps d'une histoire, en utilisant une illustration en triptyque, tout droit venue d'un manuel russe des années 90. Pour cela nous avons conçu nos propres triptyques (figure 3) :

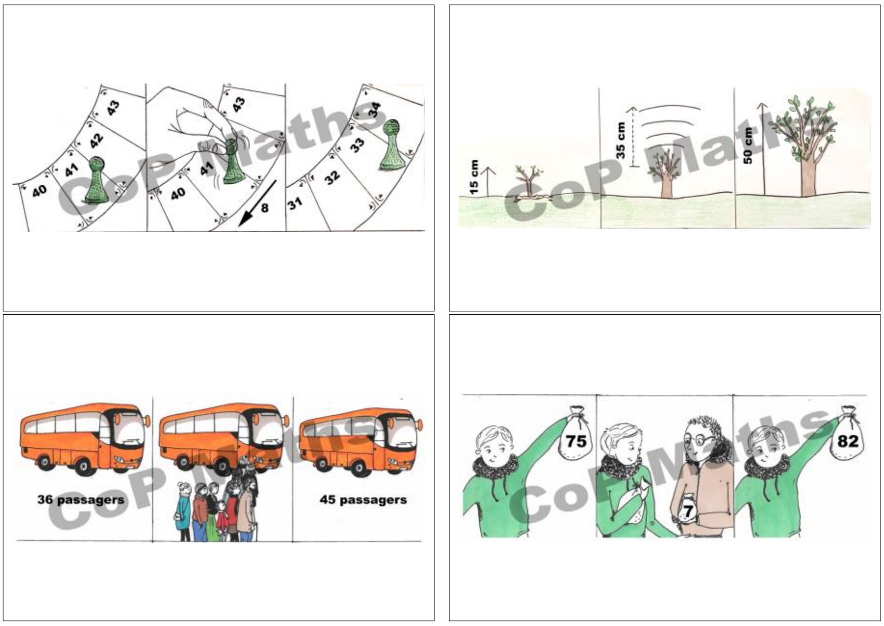



*Figure 3. Exemples de triptyques conçus par la CoP-Maths, pour les niveaux CP-CE1.*

Ces illustrations en trois vignettes sont surtout utilisées pour les deux premiers paliers de la progression qui s'adressent aux CP-CE1. Dans le premier palier, nous proposons aux élèves de formuler l'histoire mathématique complète représentée sur un triptyque, en insistant sur le caractère chronologique, en utilisant des connecteurs logiques et en précisant les liens entre les nombres. Ensuite, la classe est séparée en 4 ou 5 groupes qui reçoivent un triptyque différent. Les élèves doivent alors formuler l'histoire complète (en dictée à l'adulte ou écriture autonome) puis, choisir laquelle des trois informations ils veulent faire deviner au groupe suivant, en cachant un morceau du triptyque (figure 4).

*Figure 4. Exemple de tryptique avec un morceau caché.*

Les triptyques incomplets tournent alors entre les groupes. Les élèves qui le reçoivent doivent écrire l'histoire complète en formulant aussi le morceau de l'histoire qui a été caché. Puis, ils découvrent l'histoire complète mais ne peuvent pas changer leur texte. Ils doivent alors cacher une autre partie de l'histoire pour le groupe suivant, qui devra faire la même chose. Le but étant, à la fin de l'activité, de comparer chacune des versions de chaque histoire pour voir si les élèves avaient réussi à retrouver l'intégralité malgré le « trou ». Les élèves comprennent que lorsqu'il manque un morceau de l'histoire, il faut s'imaginer la situation mentalement pour reconstituer l'intégralité des événements.

Le deuxième palier reprend les triptyques complets et vise à la fois le dessin par les élèves des trois vignettes pour aller vers la schématisation, mais aussi la formulation de la question à la place du morceau manquant. Il se termine par une activité de communication où les élèves représentent une histoire en trois vignettes pour qu'un camarade, qui ne l'a pas lue, puisse la deviner.

Du côté des élèves de cycle 3 (une classe de CM1-CM2 en REP+), le palier 7 reprend le même principe d'histoire complète en trois vignettes mais sans illustration, l'histoire relevant du champ multiplicatif. Pour démarrer ce palier, nous avons choisi la co-intervention : sur trois séances, nous avons souhaité jouer avec ces trois vignettes avec ce même objectif, transformer l'histoire mathématique complète en énoncé de problème. Ces trois séances, dont la première a marqué chez les élèves une rupture de contrat concernant l'activité de résolution de problème, nous ont permis de faire le constat suivant : même lorsque les élèves connaissent l'information manquante, il est difficile pour eux de formuler la question permettant de la retrouver. Voici l'histoire proposée en début de séance (figure 5) :

| | | |
|---|---|---|
| Lily a 45 caramels. | Elle les répartit en 9 sachets pour ses amis. | Dans chaque sachet, elle met 5 caramels. |

*Figure 5. Tryptique (sans illustration) pour la séance 1 du Palier 7 en CM1-CM2.*

Lorsque l'on cache la première information, 9 élèves sur 17 proposent une question correcte. Lorsque c'est la deuxième qui est cachée, seulement 5 élèves réussissent. Enfin, lorsque la dernière information disparaît, 2 élèves seulement parviennent à poser une bonne question.

Nous avons pleinement conscience que la nature du problème sous-jacent est de complexité différente selon la partie manquante de l'histoire, néanmoins nous ne pouvions que constater que les élèves avaient beaucoup de difficultés à formuler les questions, avant même de passer à la résolution, alors qu'ils connaissaient la donnée cachée. Il nous est donc apparu comme essentiel pour la suite du travail dans cette classe de CM1-CM2 de travailler sur la création d'énoncés de problèmes à partir d'histoires complètes.

Aussi, le retour réflexif que nous avons eu sur ces trois séances nous a mené à chercher comment accompagner ce processus de création d'énoncés de problème par l'enseignement de la schématisation.

## 5 Utilisation et partage d'autres ressources pour enrichir l'expérimentation, zoom en cycle 3

Pour les séances suivantes, nous avons donc expérimenté dans cette classe de CM1-CM2 (REP+) plusieurs activités situant le schéma, en tant qu'outil, au cœur de la résolution de problème. Ces expérimentations se sont détachées des activités co-construites avec la CoP-Maths et ont été largement alimentées par l'ouvrage de Fagnant et Demonty (2013) « Résoudre des problèmes, pas de problème ». Toutes ces activités ont été publiées sur le *Padlet* après leur mise en œuvre, avec des photos de productions d'élèves et ont pu être source de discussion au sein de la CoP-Maths lors des réunions et même hors réunion. Certaines de ces situations ont pu être expérimentées ensuite dans d'autres classes de niveaux différents.

### *5.1 Qu'est-ce qu'un bon dessin mathématique ? (dans le champ additif)*

Une première situation a permis de construire les bases du travail mené dans la classe de CM1-CM2 sur la schématisation en résolution de problème. Dans un premier temps, nous avons proposé l'activité du « téléphone arabe » : les élèves sont par équipe, un seul lit l'énoncé du problème et les joueurs doivent ensuite se le passer oralement pour que le dernier puisse le reformuler correctement. Cette activité, généralement peu réussie, a pour but de faire émerger la difficulté de compréhension de l'énoncé et donc faire apparaître l'utilité d'un « dessin ». Quand nous avons compris qu'aucune équipe n'avait réussi, nous avons lu l'énoncé et l'avons résolu ensemble pour obtenir l'histoire complète suivante « La maitresse a reçu 5 cartons avec des crayons de couleur. Chaque carton contient 4 sachets de 12 crayons. Au total, il y a 240 crayons. »

Nous avons demandé aux élèves de dessiner cette histoire, l'objectif étant de dépasser l'échec du téléphone arabe et de voir comment chacun l'avait comprise. La séance suivante, quelques dessins d'élèves faux ou incomplets ont été projetés et la classe devait les commenter, expliquer pourquoi ils ne représentaient pas l'histoire : « il manque des nombres, les nombres sont faux, on ne comprend pas que tel nombre est le total, … ». Ensuite, quelques dessins corrects ont été cette fois projetés et les élèves ont pointé ce qui fonctionnait bien. Nous nous sommes donc mis d'accord sur les critères d'un bon dessin mathématique :

- *les nombres de l'histoire doivent tous être présents*
- *les nombres doivent être corrects*
- *les liens entre les nombres doivent être représentés.*

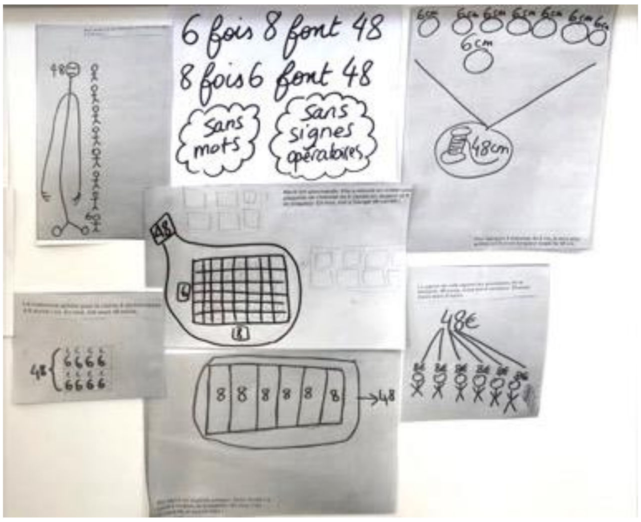
Une affiche synthétique produite à l'issue de cette séance s'est avérée très utile pour les séances suivantes, les élèves s'y référant très souvent (voir annexes).

### 5.2 Représenter une multiplication

Pour cette activité, adressée toujours aux mêmes élèves de la classe de CM1-CM2 en REP+, les élèves étaient par binômes et devaient représenter l'histoire complète qui leur avait été donnée. Toutes les histoires mettaient en lien 6, 8 et 48 mais avec un contexte différent (âge, longueur, somme d'argent, *etc.*) sans contraintes particulières. Nous avons commencé par afficher et valider les critères des dessins produits, en prenant connaissance des différentes histoires. Comme les dessins étaient très figuratifs, l'objectif était de les faire évoluer vers des schémas plus abstraits. En s'inspirant d'un schéma produit par un binôme qui avait réussi à représenter le lien entre 6, 8 et 48 sans utiliser aucun mot, ni aucun signe opératoire, il a été demandé à la classe de refaire les dessins des histoires affichées avec ces deux nouvelles contraintes (les binômes changeaient d'histoire).

Ces deux contraintes ont représenté un vrai défi pour les élèves, et ont rendu la tâche réellement engageante. En affichant les schémas produits, les élèves ont remarqué qu'il y avait moins de détails, mais que l'on comprenait mieux les liens entre les trois nombres. Cette activité a donné lieu à un affichage de référence (figure 6), permettant de montrer différentes façons de représenter 6×8=48.

*figure 6. Affichage de référence CM1-CM2.*




### 5.3 Dessiner avec une contrainte de temps (problème additif)

L'objectif de cette activité, toujours adressée aux élèves de la même classe de CM1-CM2, était d'aller vers des représentations plus efficaces des liens entre les nombres en imposant une durée limitée pour dessiner, avec l'histoire suivante : « la maitresse a compté 4 boîtes de 12 crayons de couleur et 63 crayons gris, en tout elle a 111 crayons ». Lors de la mise en commun, les élèves ont pu formuler l'inutilité de dessiner la maitresse, les différentes façons de montrer 4 paquets de 12, les moyens de représenter un total, ou encore l'importance des flèches et de leur sens. L'affichage produit en fin de séance reprend quelques dessins d'élèves faits au propre. C'est un affichage qui a beaucoup servi lors des séances suivantes comme référence pour savoir représenter un total (figure 7).

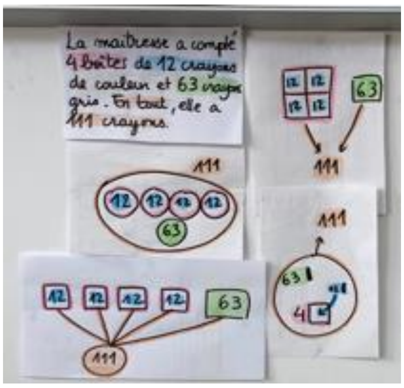



*Figure 7. Affiche de référence pour représenter un « tout » (CM1-CM2).*

### 5.4 Représenter un énoncé de problème (problèmes additifs)

Lors de cette séance, nous avons commencé par lire un premier problème (à la recherche d'un total de fruits), nous l'avons résolu et avons représenté l'histoire complète. Puis, nous avons remplacé le total dans notre dessin par un point d'interrogation. Nous avons donc obtenu la représentation de l'énoncé de problème, et non plus de l'histoire complète. Puis, nous avons lu un deuxième problème (à la recherche du total de passagers dans un train après un arrêt), et les élèves ont proposé plusieurs façons de le représenter en s'assurant que tous les dessins correspondaient au bon calcul. Nous nous sommes alors mis d'accord sur la pertinence de la représentation par paquets ou la bande graduée. Ensuite, les élèves étaient répartis en deux groupes avec deux énoncés différents. Leur objectif était de lire l'énoncé, trouver un calcul permettant de trouver la réponse, puis de dessiner le problème (sans mots, sans signes opératoires) pour que l'équipe adverse puisse trouver le calcul. L'affichage produit à l'issue de cette séance reprend les 4 problèmes rencontrés et les différents schémas qu'ils ont produits (figure 8).

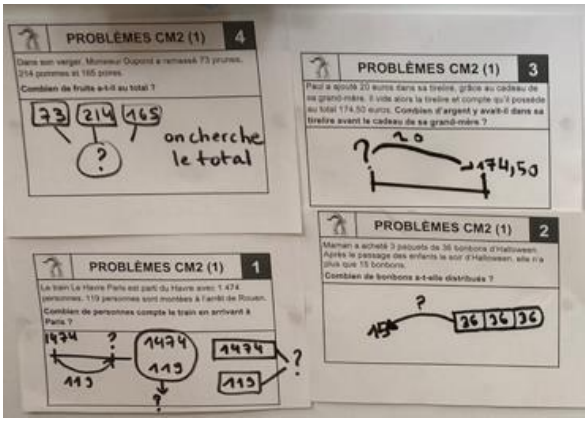



*Figure 8. Affichage produit pour la recherche d'un « tout » dans différents problèmes additifs (CM1-CM2).*

### 5.5 Plusieurs représentations d'une même histoire pour répondre à 4 questions

Enfin, nous terminons en présentant une dernière activité qui débutait en projetant aux élèves cet énoncé : « Lucie a 73 graines de dahlia et Antoine en a 3 fois plus ». Les élèves dessinaient l'histoire, si possible, sans utiliser de signes opératoires. De manière plutôt unanime, nous avons repéré sur les ardoises le même dessin : Lucie et Antoine avec une bulle chacun dans laquelle figurait 73 ou 73 73 73 (ceux qui n'avaient pas réussi à ne pas écrire de signes opératoires ayant écrit 73×3 dans la bulle d'Antoine).

Les élèves ayant déjà rencontré et représenté des problèmes de comparaison (notamment d'âge, mais aussi de distance), il leur a été demandé quel schéma pouvait être proposé si on utilisait une bande graduée. Celle-ci fut ensuite construite avec l'aide de l'enseignante. La représentation en barres fut également coconstruite de la même manière. Certains élèves ont remarqué qu'il s'agissait presque de la même représentation : l'une étant disposée de manière horizontale et l'autre verticale. Par la suite, il leur a été demandé d'écrire les questions que l'on pouvait poser pour le transformer en un énoncé de problème mathématique ; ils en ont trouvé quatre. Enfin, l'histoire, les schémas, et les questions ont été formulés « au propre » et il a été demandé aux élèves d'y répondre l'après-midi même. Les élèves devaient justifier leur réponse au moyen d'un calcul, d'une explication verbale ou d'un schéma (figure 9).

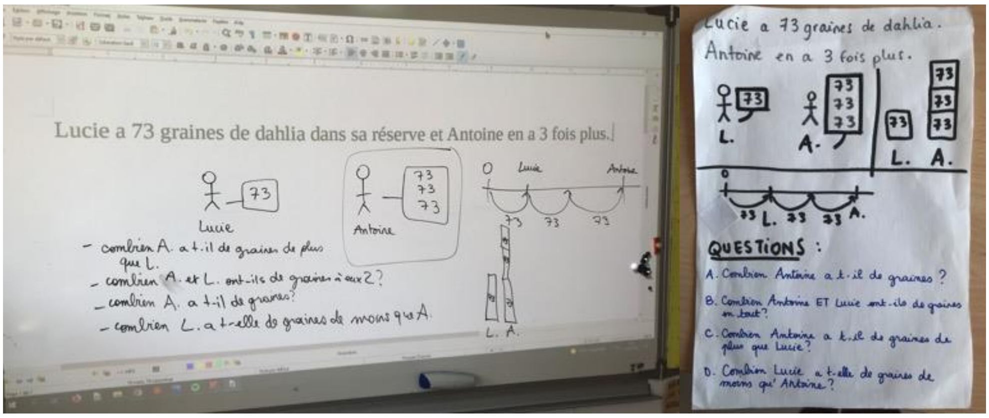



*Figure 9. Traces écrites négociées (énoncé, schéma et questions) du problème de « Lucie et Antoine » (CM1-CM2).*

Ce qui parut le plus intéressant à observer, fut le rôle qu'a semblé jouer le schéma dans la façon de communiquer entre les élèves sur le problème, mais aussi avec l'enseignante, et plus particulièrement les élèves en difficulté en résolution de problème. Dans un court extrait filmique (dont la transcription est en annexe), par ailleurs soumis à l'analyse de la CoP-Maths lors d'une réunion, on ne peut que constater l'appui que le schéma offre dans le dialogue avec ces élèves (figure 10). Les déictiques mobilisés (en gras) ne prennent un sens partagé que parce qu'ils sont soutenus par des gestes de pointage en appui sur le schéma (tour de parole 6). Ces gestes de pointage peuvent dès lors être repris, enrichis et étayé verbalement, par l'enseignante (tour de parole 7).

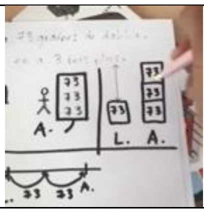
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | E1 | Euh bah parce que **là** on voit que c'est le nombre de Lucie/ et **là** celui d'Antoine et on a dit qu'est-ce que Antoine a t-il de plus/ du coup ben Lucie elle a déjà **ça** et c'est ici donc **ça** on l'enlève et **ça** c'est les graines en plus/ | *montre avec le stylo qu'on retrouve les 73 de Lucie dans la colonne d'Antoine donc qu'on peut l'enlever et considérer les deux paquets au dessus comme en plus* |  |
| 7 | M | D'accord donc c'est ce qu'il a en plus donc **c'est l'écart entre les deux**/ donc en fait on pourrait compléter ce dessin-là en montrant que **ça c'est l'écart/** ouais? et du coup c'est quoi le calcul que vous allez faire pour trouver la réponse? | *dessine une flèche pour signifier l'écart entre la colonne de Lucie et celle d'Antoine* |  |

*Figure 10. Extrait de la transcription dans laquelle l'élève prend appui sur le schéma de façon explicite.*

Suite à cette séance, l'on peut se demander quel étayage aurait pu guider certains élèves s'il n'y avait pas eu cette représentation schématique des nombres du problème et des liens entre eux. Nous concluons en citant Larkin et Simon (1987) dont les propos semblent parfaitement illustrer la fonction « révélatrice » que jouent les représentations graphiques dans la compréhension d'un énoncé de problème mathématique linéaire :

> *"Sentential representations are sequential, like the propositions in a text. Diagrammatic representations are indexed by location in a plane. Diagrammatic representations also typically display information that is only implicit in sentential representations and that therefore has to be computed, sometimes at great cost, to make it explicit for use." (Larkin & Simon, 1987, p. 65)*

# III - CONCLUSION

Revenons sur notre hypothèse initiale qui supposait que le schéma pouvait être un support intéressant à exploiter pour ouvrir des espaces dialogiques entre les élèves ou entre l'enseignant et les élèves dans la perspective de résoudre un problème mathématique. En cette fin de première année d'expérimentations en classe, au regard des éléments recueillis qui restent bien sûr à affiner et nuancer, l'on peut pressentir cette potentialité et quelques limites. En particulier, il semblerait que s'appuyer sur des formes de plus en plus évoluées des productions personnelles des élèves présente un réel intérêt pour développer des formes langagières spécifiques à l'activité mathématique, pour parler des nombres mais aussi des liens implicites entre eux. Il reste à questionner : **comment se saisir de ces points d'appui pour aller plus loin dans la modélisation des problèmes et les résoudre ?** Par ailleurs, notre protocole a favorisé la recherche de problèmes à partir d'histoires tripartites. Par conséquent, les enseignant.e.s de la CoP-maths ont été conduites à favoriser un enseignement portant sur la production de ce type de problèmes, ce qui pourrait conduire à un glissement métadidactique, au sens de Brousseau (1998). Par la suite, il nous semble donc important de veiller à diversifier les types de problèmes proposés, afin qu'ils ne soient pas facilement réductibles à une structure tripartite.

Sur la question du dispositif en lui-même, des questions restent à exploiter : **en quoi la dynamique collaborative de notre CoP-Maths favorise-t-elle une dimension formative ? Quelles traces, quels observables des effets de la CoP-Maths sur la pratique de ses membres ? Et sur la réussite des élèves ?** En effet, nous avons pu observer que les enseignant·e·s de la CoP-Maths se sont réellement engagé·e·s pour penser et mettre en œuvre un continuum du CP au CM2 centré sur un enseignement de la schématisation en faisant preuve d'un réel travail collectif qu'on ne peut que saluer. Malgré tout nous ne pouvons, à ce stade précoce, conclure sur les effets de ce continuum et n'avons pas réellement de moyens pour évaluer le rôle effectif du schéma dans le processus de résolution de problèmes des élèves impliqués cette année. S'il nous reste beaucoup de questionnements, nous avons à ce jour des perspectives très concrètes pour la troisième année d'existence de la CoP-maths : améliorer la progression collectivement conçue puis stabiliser une ressource écrite pour une meilleure appropriation par les enseignant·e·s de la CoP, et pourquoi pas envisager de la diffuser plus largement.

# IV - BIBLIOGRAPHIE

Anquetil, C. (2021). La CoP-Maths : un dispositif collaboratif de formation au service de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Mémoire de Master 2 PIF - Pratique et Ingénierie de la Formation, Université de Bordeaux. https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03361053/document

Anquetil, C. et Bulf C. (2021) La communauté de pratique comme dispositif horizontal de formation : le cas de la CoP-Maths, Actes de la copirelem 2021, 616-654. http://www.arpeme.fr/documents/Actes-Grenoble-e.pdf

Auquière, A., Demonty, I. et Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives,* 23*,* 41-68. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST18017/IST18017.pdf

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». *Revue au fil des maths,* 537. *https://afdm.apmep.fr/rubriques/sommaire/n537/*

Camenisch, A. et Petit, S. (2007). Projets d'écriture en mathématiques, *Actes du 33e colloque COPIRELEM, IREM de Paris 7.*

Diezmann, C.M. (1995). Evaluating the effectiveness of the strategy 'Draw a diagram' as a cognitive tool for problem solving, *Proceedings of the 18th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia,* 223-228, Darwin. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.92.7695&rep=rep1&type=pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-61. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST93004/IST93004.pdf

Fagnant, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*, 94-113 https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document

Fagnant, A. et Demonty, I. (2013). *Résoudre des problèmes ; pas de problèmes ! 10-12 ans*, De Boeck Edition.

Fagnant, A. et Vlassis J. (2010). Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Éducation Canada,* 50(1), 50-52.

Houdement C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école, *Grand N,* 100, 59-78, IREM de Grenoble. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01902810/document

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52, IREM de Grenoble. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/69n4_1555591199676-pdf

Laparra, M.et Margolinas, C. (2012). Le schéma : un écrit de savoir ? *Pratiques : linguistique, littérature, didactique, Centre de recherche sur les médiations (Crem) - Université de Lorraine 2009,* 143-144 Numéro spécial : les écrits de savoir*,* 51-82. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00722211/document

Larkin, J. et Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words*, Cognitive Science*, 11 (1), 65-99. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1551-6708.1987.tb00863.x

Magniant,V. (en cours)*Des gestes professionnels langagiers didactiques au service de l'enseignement de l'écriture - une étude de cas en classe de CP* (titre provisoire). Thèse de doctorat en cours, U. de Bordeaux.

Sander, E. (2019). Le rôle des analogies dans la résolution de problèmes aux cycles 2 et 3. *Université de Genève* (conférence pour l'IFE, centre Alain Savary). http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/compte-rendus-formations-de-formateurs-mathematiques/session-2019-2020/le-role-des-analogies-intuitives-dans-la-resolution-de-problemes-arithmetiques-aux-cycles-2-et-3

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in T.P. Carpenter, J.M. Moser & T. A. Romberd (Eds.) *Addition and substraction : a cognitive perspective*, 39-59. https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1982_cognitive-tasks-operation_addition-subtraction.pdf

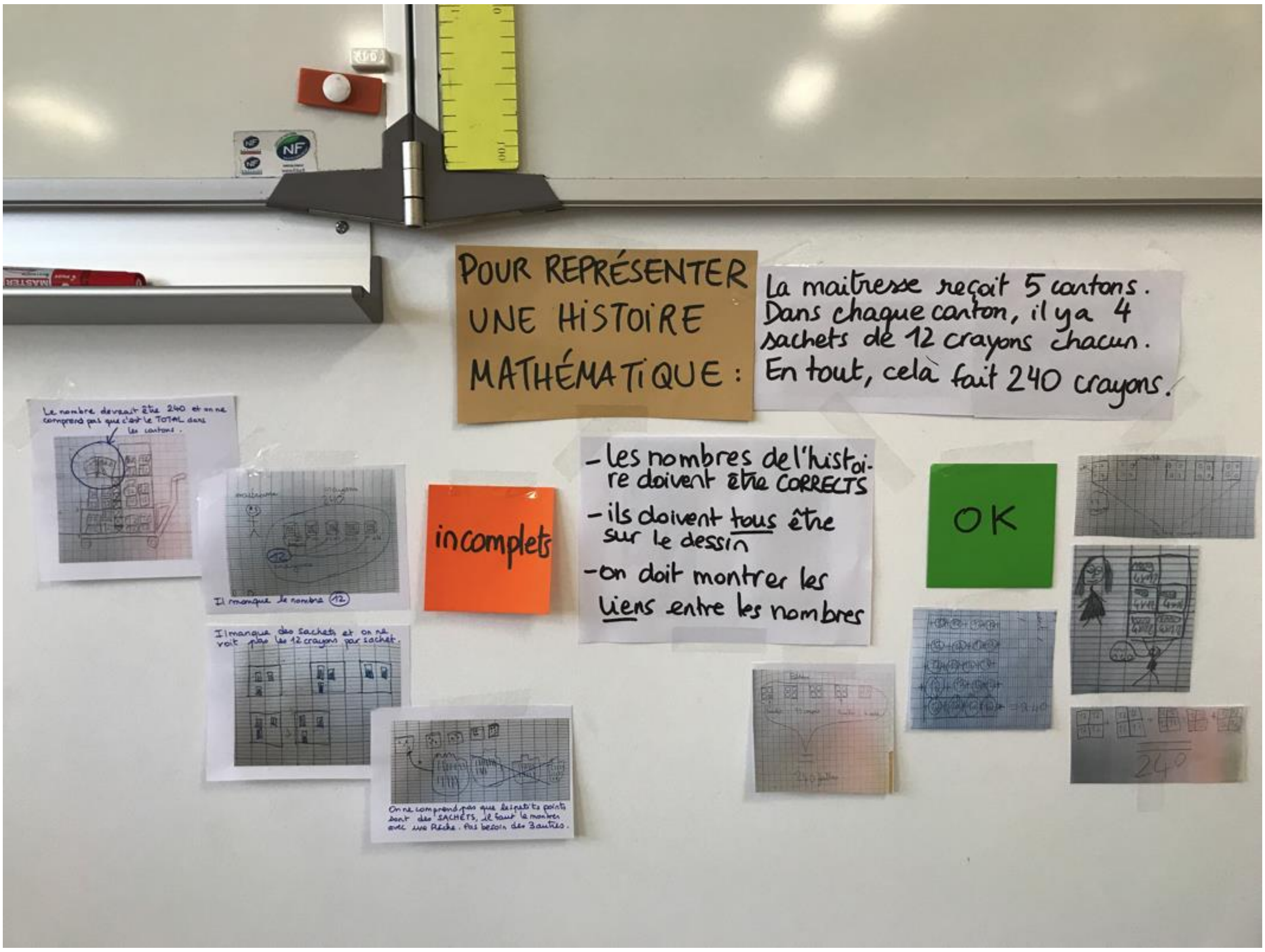
Wenger, E., Mc Dermott, R. et Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: a guide to managing knowledge*, Ed. Harvard Business School Press.

Wenger, E. (2005). *La théorie des communautés de pratique, apprentissage, sens et identité*. Ed. Les presses de l'Université Laval.

Wenger, E. (2010). Communities of practice and social learning systems: the career of a concept. *Social Learning Systems and communities of practice*, Springer Verlag and the Open University. https://wenger-trayner.com/wp-content/uploads/2012/01/09-10-27-CoPs-and-systems-v2.01.pdf

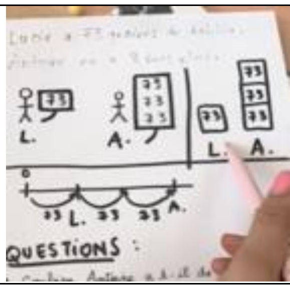
## V - ANNEXES

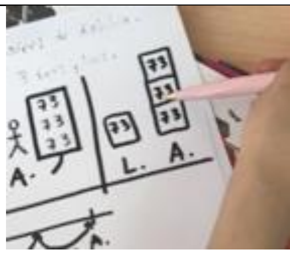
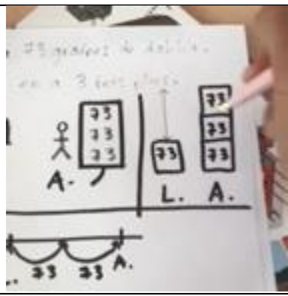
**Affichage produit synthétisant les critères d'un « bon dessin mathématique », CM1-CM2.**



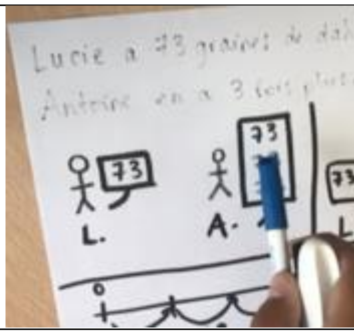
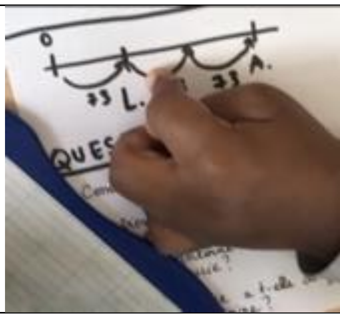

**Transcription de l'extrait vidéo évoqué en 5.5**

*Maitresse et Elève 1*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | M | Alors la question/ vas-y lis nous la question C/ | | |
| 2 | E1 | Combien Antoine a t-il de graines de plus que Lily/que Lucy ? | | |
| 3 | M | Ok / quel est le dessin qui peut t'aider là ? | | |
| 4 | E1 | Euh bah lui/ | *montre le schéma « barres » vertical* |  |
| 5 | M | Pourquoi ? | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | E1 | Euh bah parce que là on voit que c'est le nombre de Lucie/ et là celui d'Antoine et on a dit qu'est-ce que Antoine a t-il de plus/ du coup ben Lucie elle a déjà ça et c'est ici donc ça on l'enlève et ça c'est les graines en plus/ | *montre avec le stylo qu'on retrouve les 73 de Lucie dans la colonne d'Antoine donc qu'on peut l'enlever et considérer les deux paquets au dessus comme en plus* |  |
| 7 | M | D'accord donc c'est ce qu'il a en plus donc c'est l'écart entre les deux/ donc en fait on pourrait compléter ce dessin-là en montrant que ça c'est l'écart/ ouais? et du coup c'est quoi le calcul que vous allez faire pour trouver la réponse? | *dessine une flèche pour signifier l'écart entre la colonne de Lucie et celle d'Antoine* |  |
| 8 | E1 | Euh 73 fois 2 ou 73 plus 73/ | | |
| 9 | M | D'accord donc tu vas calculer ce que ça fait ces deux paquets qu'il a en plus/ | | |
| 10 | E1 | Oui / | | |

*Maitresse, Elève 2 et Elève 3*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | M | Alors est-ce que ça fait le même résultat? | | |
| 2 | E2 | Oui/ 146/ | | |
| 3 | M | Il vient de le faire le calcul E2/ E3/ il vient de le faire/ | | |
| 4 | E2 | Oui/ | | |
| 5 | M | Donc ça fait la même chose/ les deux calculs étaient corrects/ est-ce qu'il y a un dessin toi qui t'a aidé pour trouver la réponse? | | |
| 6 | E2 | Beh par exemple ça m'a aidé de dire qu'on pouvait juste faire ça plus ça/ | *pointe les deux nombres 73 dans la bulle d'Antoine* |  |
| 7 | M | D'accord/ on voyait bien qu'il en avait deux paquets de plus lui/ | | |
| 8 | E2 | Oui/ du coup oui le dessin m'a aidé/ | | |
| 9 | M | Où est-ce qu'on voit aussi qu'il a deux paquets de plus E3? | | |
| 10 | E3 | Hum/ là/ | *montre la bande graduée, puis repasse avec le doigt les deux sauts entre Lucie et Antoine* |  |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | M | Oui c'est vrai on voit bien qu'il a deux paquets de plus/ Lucie elle est là/ et Antoine il est là/ ça veut dire que la différence entre les deux… | *pointe la graduation de Lucie puis celle d'Antoine* |   |
| 12 | E3 | …c'est qu'il a deux paquets de plus/ | | |
| 13 | M | Ça cette différence on peut aussi la retrouver là regardez/ pour aller de là à là/ ben c'est l'écart entre les deux qui correspond bien aux deux paquets qu'Antoine a en plus | *dessine une flèche pour signifier l'écart entre la colonne de Lucie et celle d'Antoine et ajoute en pointillés les deux paquets de plus dans la colonne de Lucie* |  |

# L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA PREUVE EN MATHEMATIQUES DU CYCLE 1 AU CYCLE 3 : PREMIERS OUTILS ET PREMIERS RESULTATS

**Michèle GANDIT**
Formatrice INSPE, IREM DE GRENOBLE
Maths à Modeler
michele.gandit@orange.fr

**Laurence MOSSUZ**
Professeure des écoles, IREM DE GRENOBLE
laurence.mossuz@ac-grenoble.fr

**Sylvain GRAVIER**
Directeur de Recherche CNRS
Maths à Modeler
sylvain.gravier@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé
Dans le cadre du LéA « Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy », nous nous interrogeons sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques depuis l'école maternelle jusqu'au lycée. L'intitulé précis de notre action de recherche est le suivant : « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique ».
Ce projet de recherche, qui a débuté à la rentrée 2021, s'appuie sur une précédente recherche-action-formation, menée depuis quatre ans, avec des équipes d'enseignants de plusieurs écoles (cycles 1, 2 et 3).
Nos questions de recherche sont les suivantes : 1) Est-il possible, grâce à une progression dans l'enchaînement de situations de recherche (Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et *al.*, 2011) – et de problèmes s'en approchant – d'amener les enseignants à une pratique adéquate, favorisant l'autonomie, la responsabilité scientifique des élèves et le débat scientifique (Legrand, 1992 ; Gandit, 2015) ? 2) Quels bénéfices en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes ?
Nous présentons les outils développés et les premiers résultats obtenus concernant les cycles 1, 2 et 3.

## I - LE CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET LES MODALITES DE TRAVAIL

Les travaux que nous présentons sont d'abord issus d'un projet de recherche-action-formation, qui a débuté en 2018, dans le cadre d'une convention de partenariat scientifique entre la Direction des Services Départementaux de l'Éducation Nationale de Haute-Savoie et l'IREM de Grenoble, à la demande de l'équipe d'enseignants d'une école d'Annecy, qui souhaitait améliorer la pratique de la résolution de problèmes dans ses classes de cycles 2 et 3. Ce premier projet s'est d'abord étendu à d'autres écoles d'Annecy, ainsi qu'au cycle 1. Puis les équipes de professeurs des écoles impliqués se sont réduites à des enseignants très motivés et demandeurs. Le travail collaboratif entre ces derniers et l'équipe de recherche s'est ainsi ensuite poursuivi, à partir de la rentrée 2021, au sein d'un second projet de recherche collaborative, coordonné par l'Institut Français de l'Éducation (IFé), nommé « Lieu d'Éducation Associé (LéA), Réseau de l'école à l'université – Grenoble et Annecy ». Comme son nom l'indique, le périmètre d'action de ce second projet dépasse largement le cycle 3, mais nous ne développons ici que les résultats qui relèvent de l'école primaire, sur la période 2018 – 2021. La recherche du LéA est portée par l'IREM de Grenoble et l'Institut Fourier, en lien avec *Math à Modeler* et en partenariat avec l'Académie de Grenoble.

La demande initiale des enseignants concernait l'organisation de la résolution de problèmes de type « problèmes pour chercher » dans les différentes classes de l'école et était argumentée sur la difficulté à motiver les élèves, à les mettre au travail, à obtenir des résultats. Peu à peu la préoccupation initiale, sous l'impulsion de l'équipe de recherche, s'est muée en une question sur les pratiques des enseignants lors de la résolution de problèmes, sur le choix des problèmes, sur les savoirs en jeu, sur ce qu'il est important d'institutionnaliser en classe. Finalement, l'action de recherche du second projet s'est intitulée « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique ». Ce n'est plus la résolution de problèmes qui est mise en avant – celle-ci reste évidemment le cadre des expérimentations – mais c'est la preuve en mathématiques avec des objectifs dépassant largement le cadre des mathématiques.

Le travail de recherche rapporté dans ce texte concerne plus particulièrement, pour l'année 2021-2022, huit professeurs des écoles, enseignant dans quatre écoles d'Annecy et une de Grenoble, ainsi que deux conseillers pédagogiques du premier degré et quatre animateurs de l'IREM de Grenoble, dont la porteuse du projet de recherche, co-auteure de cet article. Il s'agit d'une recherche collaborative, c'est-à-dire une recherche où les questions se travaillent, avec l'ensemble du groupe, enseignants et chercheurs, sur le mode d'une démarche d'investigation en groupe. Chaque enseignant est ainsi amené à adopter une posture oscillant entre, d'une part, celle du chercheur, impliqué dans l'investigation, avec toute l'incertitude qui en découle dans l'étude des questions qui se posent, d'autre part, celle du praticien qui se forme tout en restant dans le strict cadre de sa classe ou bien qui se développe sur le plan professionnel, n'hésitant pas à sortir de sa zone de confort.

Les modalités de travail de l'équipe consistent en réunions avec les enseignants, une réunion par période scolaire entre deux temps de vacances, et recueil de données dans les classes lors des séances de résolution de problèmes, sous la forme de prise de notes, mais le plus souvent, réalisation de vidéos. Généralement, les réunions ont lieu à la fin de la journée scolaire et permettent un retour à chaud avec les enseignants sur les séances en classe. Ces réunions sont aussi l'occasion de faire avancer le questionnement de recherche et de partager entre équipe de recherche et équipe des enseignants, des connaissances liées, d'une part, à la recherche en didactique des mathématiques, d'autre part, à la pratique en classe. Des échanges ont également lieu en visioconférence, notamment lors de la crise sanitaire de 2020-2021, ou par courriels, d'une part, au sein de l'équipe de recherche, d'autre part, entre chercheurs et enseignants. Il est explicitement demandé aux enseignants d'expérimenter librement des séances de résolution des problèmes proposés. Des fiches de préparation de séances sont proposées, mais elles ne constituent pas un cadre que les enseignants doivent suivre à tout prix. Ceci va être explicité dans la suite. Les enseignants doivent également garder des traces personnelles du projet, les communiquer, participer au questionnement et à la co-construction de réponses, ainsi que présenter certains axes de leur travail, à l'ensemble de l'équipe, ou à l'extérieur.

Deux présentations de ce projet ont ainsi déjà eu lieu, l'une à l'IFé à Lyon le 18 mai 2022, la seconde à Strasbourg en réponse à l'invitation à participer à la Journée Nationale de l'Innovation Pédagogique, le 11 mai 2022. Les travaux du LéA sont visibles sur le site de l'IFé, http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-de-lecole-a-luniversite-grenoble-et-annecy, ainsi que sur le blog, https://reseaulea.hypotheses.org/category/lea_en_cours/reseau-ecole-a-universite-grenoble-annecy

En outre, une des enseignantes a été particulièrement suivie sur la période 2018-2021 dans le cadre d'une étude de cas destinée à étudier dans quelle mesure il était possible de faire évoluer les pratiques des enseignants concernant la preuve en mathématiques. Cette étude de cas a été réalisée dans le mémoire de master que Laurence Mossuz, co-auteure de ce texte, a soutenu en septembre 2022.

## II - LA PROBLEMATIQUE

L'intitulé de l'action de recherche commence par *Enseigner la preuve en mathématiques*. En reprenant Balacheff (2011), qui invite à « reconsidérer l'épistémologie de la preuve » (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01567192, p.3) et Deloustal-Jorrand et *al.* (2020), nous présentons ci-après les différentes dimensions suivant lesquelles nous avons choisi de considérer la preuve, sur les plans épistémologique et didactique : validation/explication, processus/produit, syntaxe/sémantique, activité sociale.

# 1 Différentes dimensions suivant lesquelles nous considérons la preuve en mathématiques

## *1.1 La double dimension de validation et d'explication*

Nous partons du principe qu'on n'apprend pas de mathématiques si on ne cherche pas à comprendre son moyen essentiel de validation : la preuve. On n'enseigne donc pas les mathématiques si on ne cherche pas à faire comprendre les preuves, ou du moins, la nécessité d'une preuve, et ceci, même à un niveau élémentaire. L'enjeu de la preuve n'est pas la vérité, mais celui de la *validité* des énoncés – le mot d'énoncé est utilisé dans ce texte pour désigner une phrase compréhensible en mathématiques, dont on peut dire si elle est vraie ou si elle est fausse, et non pas les consignes données aux élèves pour un problème – dans un cadre théorique bien défini, celui-ci étant régi par des *règles du jeu* et contenant d'autres énoncés déjà acceptés. Une de ces règles du jeu est, par exemple, *celle qui régit le faux* pour un énoncé de portée générale. Ainsi un tel énoncé, de type « Quel que soit $x$ appartenant à un ensemble $E$, si $x$ satisfait une hypothèse $H$ (*$H$ est vraie pour $x$*), alors $x$ satisfait une conclusion C (*$C$ est vraie pour $x$*) » est faux si, et seulement si, il existe au moins un *contre-exemple*, c'est-à-dire au moins un élément $a$ de E pour lequel $H$ est vraie et $C$ est fausse. Plus concrètement, si l'on considère l'énoncé suivant, « Le nombre de diagonales d'un polygone est égal au nombre de ses côtés divisé par deux », conjecture qui émerge rapidement, lorsqu'on confronte les élèves au problème des *Diagonales* (voir plus loin) d'un polygone et qu'ils considèrent le cas des quadrilatères. Cet énoncé est faux, comme le prouve le contre-exemple proposé à la figure 1. Ici l'ensemble $E$ est l'ensemble de tous les polygones, l'élève montre un pentagone (cinq côtés) dont le nombre de diagonales n'est pas égal au nombre de côtés divisé par deux.

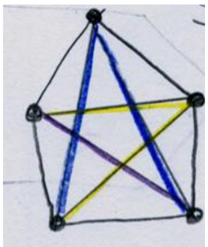


*Figure 1. Contre-exemple donné par un élève de cycle 3*

Ramener ainsi la preuve à la validation implique qu'on se questionne sur la construction de raisons pour accepter tel énoncé dans le cadre choisi. Comment s'y prendre pour construire ces raisons reste une question essentielle pour l'enseignant.

Pour un individu donné, l'entrée dans la preuve d'un énoncé mathématique se fait d'abord par la recherche d'une *explication* de la validité de cet énoncé, de son point de vue (Balacheff, 2011). Cette explication ne peut devenir une preuve que si elle est acceptée comme valide par une communauté. Ainsi se pose la question, pour l'école primaire, des preuves données par les élèves qui vont être acceptées comme valides par la communauté classe. Nous y revenons plus loin. Par exemple (figure 2), accepte-t-on comme un élément de preuve la soustraction « 5 – 3 = 2 » et le dessin, en bleu et en rose, des faisceaux de diagonales partant d'un sommet, qui semblent expliquer la démarche de dénombrement des diagonales issues de chaque sommet du polygone ?

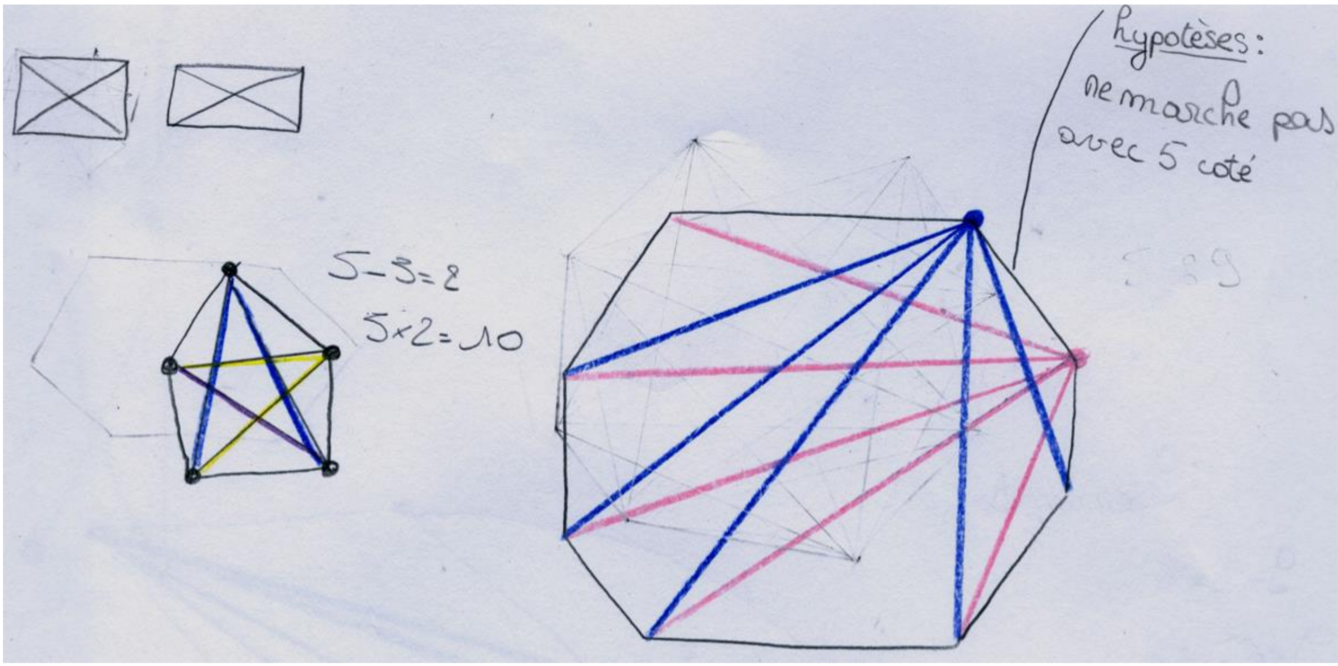



*Figure 2. L'élève montre qu'on retire 3 au nombre de sommets (donc de côtés) et qu'on multiplie ce résultat par le nombre de côtés. Ce faisant, chaque diagonale est comptée deux fois, ce que l'élève ne mentionne cependant pas explicitement*

### 1.2 La preuve en tant que processus et produit, processus qui permet aussi la construction des concepts

La preuve en mathématiques est à la fois un processus et un produit (Gandit, 2008). C'est le processus qui accompagne toute l'investigation sur un problème, faite d'essais, d'erreurs, de retours en arrière, de conjectures… La preuve est aussi un produit pour communiquer, oralement ou à l'écrit, des mathématiques, en tant que résultats, aboutissement d'un travail d'écriture et de verbalisation. L'enjeu est de faire vivre la preuve davantage comme un processus que comme un produit et de considérer le produit comme évoluant en accompagnement du processus, ce produit étant constitué par tout ce qui résulte de la *formulation* (Brousseau, 1998) :

> *La formulation intervient après la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant sa communication. Plusieurs formulations précèdent la preuve et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité […] (ibid. p.28)*

Des éléments essentiels pour la preuve apparaissent au cours de la recherche d'un problème, que l'enseignant peut réussir à identifier et renvoyer leur validation à toute la classe, afin d'aider les élèves à construire de la connaissance.

> *Deux idées fondamentales de Lakatos (1976) : les preuves évoluent en fonction des contradictions qu'elles rencontrent et il y a un lien fondamental entre le remaniement des preuves et l'élaboration des concepts. (Arsac, 1990, p.263)*

Trop souvent les mises en commun lors de séances de résolution de problème se font sur la base des résultats que les élèves décident de montrer, sous la forme d'une affiche, par exemple – le produit final –. Ceci ne donne pas de place au processus de preuve. De plus, ce sont des moments où l'écoute est souvent difficile parce que les élèves n'ont pas la responsabilité de ce qui se dit. C'est l'enseignant qui valide ou non les productions. La preuve ne vit plus dans ces moments.

### 1.3 La double dimension de syntaxe et de sémantique

La logique fournit des outils pour établir si des raisonnements sont corrects ou non. Ces outils sont des schémas de raisonnement, des règles de déduction. Un raisonnement donné peut alors être modélisé comme une mise en relation entre des propositions, conforme ou non à ces schémas et à ces règles. La validité d'un raisonnement peut ainsi être attestée par sa conformité à une certaine structure, ainsi que celles des propositions qu'il met en jeu. Examiner ainsi la validité des raisonnements utilisés dans une preuve relève de l'aspect syntaxique de celle-ci (Deloustal-Jorrand et *al.*, 2020). Cet aspect, qui prend de l'importance à partir du collège (cycle 4), ne sera pas considéré à l'école primaire.

Si l'on peut considérer la syntaxe comme un monde de structures, de symboles, de « coquilles vides », la sémantique quant à elle permet un retour au contenu de ces coquilles, à la signification. Un raisonnement valide du point de vue de la syntaxe permet d'obtenir en conclusion une proposition vraie (valide) qui « dit des choses », qui apporte des éléments nouveaux, qui donne vie à des objets mathématiques.

L'enseignement-apprentissage de la preuve s'articule autour de ces trois doubles dimensions, qui, par les attitudes qu'elles encouragent, font ainsi apparaître le lien étroit entre la pratique de la preuve en mathématiques et la pratique du raisonnement, de l'argumentation, de la recherche d'explications scientifiques. Nous ne considérerons ici, étant donné le niveau d'enseignement concerné, que les deux premières, à savoir validation/explication et processus/produit, auxquelles nous associerons ce quatrième aspect de la preuve, celui d'une activité sociale.

### 1.4 La preuve comme activité sociale

En mathématiques la pratique de preuve est aussi une activité sociale : « La démonstration atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux », entre enfants. » (Brousseau, 1998, p.28). La transposition en classe de cette pratique amène à développer la socialisation des élèves au sens qu'elle nécessite que la classe fonctionne comme une communauté scientifique, dans laquelle on accepte ou rejette des propositions avec des arguments fondés sur des raisons objectives – et non sur des opinions. Elle nécessite de la part des élèves une attitude d'écoute au sens où, pour échanger des arguments, les élèves doivent s'intéresser aux arguments des autres et accepter le débat, le *débat scientifique* (Legrand, 1993). Par suite, il faut apprendre à reconnaître l'erreur dans le cas où un argument de preuve l'atteste. Il faut savoir différencier les résultats établis et les conjectures, dont on n'a pas encore construit la preuve. « [Cette] attitude de preuve n'est pas innée ; le « pourquoi » en mathématiques ne peut pas être appris en référence à l'autorité. » (Brousseau, 1998, p. 39). Il faut aussi être curieux et créatif. Ainsi la pratique de la preuve conduit à la formation de l'esprit critique, aidant à la prise de décision également en dehors des mathématiques. C'est une de nos hypothèses de travail.

## 2 Les hypothèses de travail

La recherche porte sur les pratiques des enseignants par rapport à la mise en œuvre en classe d'une pratique de preuve *adéquate* et ses effets sur les apprentissages et les attitudes des élèves.

Nos hypothèses de travail – ce que nous ne remettons pas en question - confortées par des travaux antérieurs (quelques références citées ci-dessous) donnent une première description de ce que nous appelons une *pratique adéquate de la preuve en classe*. Tout d'abord, elle a lieu lors de la mise en œuvre de la résolution d'un problème (Arsac, 1990) dans une classe investie d'une responsabilité scientifique par rapport aux arguments échangés et aux résultats produits sur le problème, pratiquant le débat scientifique (Legrand, 1993 ; Gandit & Massé-Demongeot, 1996). Ceci permet ainsi le développement de la socialisation des élèves et de l'esprit critique. Ensuite, il existe des situations qui reposent sur des problèmes issus de la recherche en mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et *al.*, 2011), dont les analyses mathématique et didactique révèlent les potentialités concernant une pratique adéquate de la preuve (Da Ronch et *al.*, 2020). Ces situations de recherche, sous réserve d'une gestion en classe pertinente, permettent une pratique adéquate de la preuve. Enfin, une telle pratique est difficile à mettre en œuvre (Hersant, 2010), du fait, d'abord de sa nature de processus qui accompagne l'investigation, processus qui peut suivre des directions diverses, ainsi que de la nécessité d'installer un contrat didactique permettant le débat scientifique.

Ces différents axes de description de la preuve amènent à la présentation de notre problématique. Ces hypothèses étant posées, notre première question de recherche est la suivante : est-il possible, grâce à une progression dans l'enchaînement de situations de recherche – et de problèmes s'en approchant – d'amener les enseignants à une pratique *adéquate* de la preuve en classe ? La seconde interroge les bénéfices qu'en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes. Nous n'abordons pas ici cette seconde question de recherche.

Pour engager le travail par rapport à la première question, nous utilisons un modèle qui permet de penser l'action de recherche et de décrire comment on peut agir sur les pratiques des enseignants.

## III - UN MODELE DE TROIS CONCEPTIONS QUI PERMET DE PENSER L'ACTION DE RECHERCHE

Comme le concède Balacheff (2011), il est illusoire de vouloir définir le concept de *preuve*. Nous avons ci-dessus donné seulement quelques points de vue.

> *Que peut-on retenir ou accepter pour preuve ? Nous connaissons de nombreuses tentatives pour apporter une réponse à cette question soit à partir de problématiques épistémologiques (Arsac, 1987), soit à partir de problématiques didactiques ou éducatives (Arsac, 1988 ; Balacheff, 2008). Je suggèrerais, et il ne s'agit pas simplement d'être prudent, qu'il n'y a pas de réponse unique et définitive. (Ibid., p.13, Hal 01567192)*

Par ailleurs, la preuve étant présentée uniquement dans le cadre de la résolution d'un problème, nous utiliserons pour désigner ce concept, l'infinitif substantivé des deux verbes chercher et prouver, ce qui permet de donner davantage de corps au processus de preuve : nous dirons *le chercher-prouver*.

La première question de recherche s'attachant à l'étude des pratiques des enseignants et celles-ci étant indissociables de leurs conceptions (autre hypothèse de travail), nous utilisons le modèle de conception de Balacheff, qui s'appuie sur le modèle de Vergnaud (1990), auquel il ajoute une structure de contrôle. Globalement, une conception est, pour un sujet donné, ici chercheur ou enseignant, une connaissance dans le cadre d'une situation caractérisée par les propriétés du milieu en jeu – même si ce terme a un sens précis dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous le considérerons ici comme signifiant environnement dans lequel est considéré le sujet – et les contraintes sur les relations entre ce milieu et le sujet.

Relativement au *chercher-prouver*, nous distinguerons ainsi les trois types de conceptions suivantes C1, C2 et C3 : pour C1 (notre référence épistémologique), le sujet est chercheur en mathématiques, considéré dans son milieu de chercheur ; pour C2, le sujet est enseignant, mais il est considéré en dehors de son activité d'enseignement ; pour C3, le sujet est un enseignant qui transpose en classe le *chercher-prouver*. Ces deux dernières, pour un même sujet, s'influencent l'une l'autre, mais elles peuvent aussi être très différentes, certains enseignants s'interdisant, par exemple, de faire chercher en classe un problème, alors même qu'ils ont vécu très positivement sa recherche.

Plus précisément, Balacheff (2011) décrit une conception comme un quadruplet d'ensembles, ($P$, $R$, $L$, $\Sigma$).

L'ensemble $P$ est constitué des problèmes — nommé par Balacheff, *sphère de pratique* — où le *chercher-prouver* a été mis en œuvre. Pour le chercheur, $P$ est constitué de tous les problèmes ou questions de recherche, qu'il se pose, depuis le début de son activité. Concernant C2, $P$ est l'ensemble de tous les problèmes étudiés par l'enseignant, depuis le début de sa scolarité. Pour C3, $P$ comprend tous les problèmes que l'enseignant a expérimentés en classe.

L'ensemble $R$ est un ensemble *d'invariants opératoires* ou *opérateurs*, ensemble qui constitue, pour le chercheur sa méthodologie de recherche, pour l'enseignant sur le plan épistémologique, les démarches de résolution des problèmes étudiés, et pour l'enseignant par rapport à la transposition en classe du *chercher-*

*prouver*, sa conduite des mises en œuvre en classe des problèmes expérimentés. L'ensemble *L* est un *système de représentation*, permettant la formulation et la manipulation des invariants opératoires, par le sujet, et la rétroaction du milieu.

Pour donner quelques exemples d'éléments constituant les ensembles *P*, *R* et *L* concernant C1, C2 et C3, prenons l'exemple du *problème de la Grille*. Il s'agit d'un problème d'optimisation discrète, dont une instance (pour $n = 5$) a été étudiée par Hersant (2010) avec pour objectif d'amener les élèves à entrer dans la rationalité mathématique. Ce problème, posé par Dudeney (1970, p.94), connu sous le nom de « no three in line problem », consiste à se demander combien de points au maximum on peut placer sur les intersections d'une grille à *n* lignes et *n* colonnes, avec la contrainte qu'il n'y ait aucun alignement de trois points. Ce problème de *la Grille* peut faire partie de l'ensemble *P* pour C1 et C2. Concernant C3, pour les enseignants du projet, c'est l'instance $n = 5$ de ce problème qui fait partie de *P*. Pour C1 et C2, le théorème-en-acte qui consiste à choisir quelques valeurs de *n*, telles que 2, 3, 4, 5 – on dira *des petits cas* – et à dessiner le plus possible de points, en respectant la contrainte, sur les intersections des grilles correspondantes, est un exemple *d'invariant opératoire* correspondant au *chercher-prouver*, qui se représente sous la forme du dessin de grilles de formats choisis et du placement de points sur ces grilles. Pour C3, la distribution à chaque élève de plusieurs grilles 5 x 5 dessinées sur une feuille, avec la consigne que chacun, individuellement, doit placer le plus possible de points aux intersections, en respectant la contrainte, et annoncer à toute la classe combien il en a trouvés, est une formulation de l'invariant opératoire – engager les élèves dans une démarche expérimentale individuelle sur plusieurs cas avec un enjeu – qui s'exprime avec la mise à disposition de plusieurs grilles et de cette consigne. Pour C3, la désignation par l'enseignant des connaissances en jeu est également un invariant opératoire, qui peut s'exprimer, dans *le problème de la Grille*, par exemple, par : en proposant une grille valide à 8 points, on prouve que le maximum cherché est plus grand que 8 ou égal à 8 ; si on ne trouve pas de grille valide à 10 points, cela ne veut pas dire qu'il n'en existe pas…

Enfin Σ est une *structure de contrôle*, qui comprend tous les outils utiles à la prise de décision, aux choix effectués, à l'expression des jugements sur la mise en œuvre des invariants opératoires, sur le fait qu'un problème est résolu ou pas, qu'une preuve est valide ou non.

> *La structure de contrôle, Σ, permet l'expression et la discussion des moyens du sujet pour décider de l'adéquation et de la validité de son action, mais aussi les critères nécessaires au milieu pour choisir un feedback. (Balacheff, 2011, p.12)*

Ainsi, par exemple concernant C3, dans une classe qui a trouvé des grilles à 9 points et qui a accepté l'argument qu'on ne pouvait pas avoir une grille valide à 25 points, l'enseignant, mettant en œuvre cette structure de contrôle, exprimera que le problème n'est pas résolu et qu'on peut seulement conclure que le maximum cherché est compris entre 9 et 25.

Ce modèle, constitué de ces trois types de conceptions, permet d'identifier certains éléments des conceptions des enseignants, sur lesquels l'équipe de recherche peut agir, par exemple, proposer des problèmes à résoudre en dehors de la classe pour enrichir la conception épistémologique ou bien proposer directement des problèmes à mettre en œuvre en classe pour enrichir la conception par rapport à la transposition du *chercher-prouver*. De plus ce modèle, coquille vide au départ puisque le sujet n'est pas désigné, permet d'identifier des points d'entrée et des points de progression pour les enseignants eux-mêmes.

Pour décrire la conception C3, *visée*, et préciser ce que nous avons désigné par *pratique adéquate de la preuve*, nous prenons appui sur le modèle d'Enseignement des Mathématiques fondé sur l'Investigation des élèves (EMI) développé dans Lepareur et *al.* (2016), puis Chanudet et *al.* (2019). Côté *Enseignant*, ce modèle est centré sur quatre variables : la problématisation des savoirs à faire acquérir à l'élève, l'enrichissement des connaissances de l'élève par rapport à l'activité de recherche et de preuve, la dévolution à l'élève d'une responsabilité scientifique et l'explicitation des apprentissages. Nous insisterons sur ce dernier point, considéré comme particulièrement délicat du côté enseignant, lorsqu'il s'agit d'expliciter en classe les apprentissages réalisés au cours de la résolution d'un problème (Hersant, 2010). Côté *Elève*, un tel enseignement de mathématiques favorise des catégories d'actions scientifiques se décrivant sous les titres *Expérimenter*, *Généraliser*, *Questionner*, *Communiquer* (Figure 3).

| Catégorie d'action | Description de l'action |
|---|---|
| **Expérimenter** | Choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème, observer ces exemples au regard du problème, formuler des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider ces conjectures, reconnaître les résultats établis concernant ces cas particuliers.<br>Sur des conjectures dans des cas particuliers : preuve d'une existence par un exemple, invalidation par un contre-exemple. |
| **Généraliser** | Dégager le généralisable du particulier en formulant une conjecture de portée générale, la prouver ou l'invalider par un contre-exemple, définir des objets nouveaux utiles à l'étude.<br>Sur des conjectures dans des cas généraux : preuve d'une existence par un exemple, invalidation par un contre-exemple<br>Dégager une méthode pour étudier un problème. |
| **Questionner** | Poser et se poser des questions, dégager un questionnement dans une situation donnée, proposer de nouveaux problèmes ou questions, induits par les actions précédentes. |
| **Communiquer** | Argumenter, débattre scientifiquement de ses résultats, de ses conjectures, donner (par écrit ou oralement) une preuve acceptable par la communauté à laquelle elle s'adresse, expliciter sa démarche de recherche et sa démarche de preuve, présenter un problème et les résultats obtenus sur celui-ci.<br>CA : donner son avis sur un résultat mathématique.<br>CP : donner un argument, un résultat, une méthode de portée générale, pertinents.<br>CF : donner un argument, un résultat, une méthode de portée générale, faux ou non pertinents.<br>Reconnaître son ignorance ou son erreur.<br>Identifier ce qu'on a appris. |

*Figure 3. Les actions scientifiques essentielles dans le modèle EMI (repris de Chanudet et al., 2019)*

Ainsi, nous appuyant sur nos hypothèses de travail et nos travaux précédents, nous précisons le sens que nous donnons à « une pratique *adéquate* de la preuve ou encore du *chercher-prouver* » : c'est une pratique due à une conception C3, dont les invariants opératoires et la structure de contrôle favorisent ces actions scientifiques de la part des élèves (figure 3) par la désignation pertinente et l'explicitation des apprentissages en jeu dans des problèmes bien choisis, par la dévolution à la classe d'une responsabilité scientifique, dans la production et la communication des résultats sur les problèmes, par la mise en œuvre du débat scientifique.

Cette conception C3 *visée* s'oppose à une conception C3 *répandue*, où lors des séances de résolution de problèmes à l'école, la plupart du temps, c'est l'enseignant qui pose les questions dont il s'agit de trouver la réponse, qui choisit les cas que les élèves doivent étudier, pas trop complexes, qui, finalement, donne la réponse au problème, qui prend en charge la validation des réponses. Une rupture semble inévitable, qu'il s'agit de négocier avec les enseignants, tout en restant dans leur *zone proximale de développement professionnel* (Venet & al., 2016). Pour les cycles 1, 2 et 3, l'équipe de recherche décide d'agir sur les problèmes expérimentés en classe de la conception C3.

## IV - LES PREMIERS RESULTATS : DES OUTILS

Nous ne présentons ici que trois des outils développés.

## 1 Une liste de problèmes ordonnée en une progression annuelle en termes d'apprentissages

Le premier outil développé consiste en une progression annuelle consistant en une liste de problèmes, un problème *phare* par période entre deux vacances. Cette programmation en périodes doit être adaptée pour la maternelle. Ces problèmes sont considérés comme pertinents pour la mise en œuvre du *chercher-prouver*, sous réserve d'une gestion adéquate de la classe, gestion que nous avons cherché à installer progressivement, afin que la rupture évoquée ci-dessus ne soit pas trop brutale. Cette liste de problèmes est donc ordonnée suivant une complexité croissante de la gestion de la classe, visant la mise en œuvre du débat scientifique. Outre la complexification de la gestion de la classe, qui concerne davantage l'enseignant, ces problèmes sont également ordonnés suivant l'enrichissement des actions scientifiques (voir figure 3) que les élèves peuvent mettre en œuvre lors de leur recherche. Le développement de ces actions étant nécessairement lié aux apprentissages réalisés, ces problèmes sont ainsi ordonnés suivant une progression en termes d'apprentissages visés, c'est-à-dire une liste de connaissances – d'ordre II en référence à Sackur et *al.* (2005) – qui relèvent de la compréhension de la nature de l'activité mathématique, de l'heuristique, de la logique et du raisonnement (au sens générique de ces mots). Ces connaissances d'ordre II sont mises en œuvre en tant qu'*outils* dans la recherche des problèmes proposés et il s'agit ensuite de les institutionnaliser, en tant qu'*objets* (Douady, 1986). Ces objets peuvent ensuite être travaillés, au cours de la période, grâce à des variantes de ces problèmes *phares* ou sous la forme de rituels. La plupart de ces problèmes porte sur le dénombrement d'objets, la combinatoire, l'optimisation discrète, l'arithmétique.

Nous ne pouvons pas donner dans ces quelques pages une analyse de chacun de ces problèmes. Nous renvoyons à https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/resolution-de-problemes-aux-cycles-1-2-et-3-571600.kjsp où figurent des éléments descriptifs de mise en œuvre des problèmes suivants.

La progression débute (période 1) par un problème de dénombrement d'objets. Nous avons choisi le problème *des Tours* : « En désignant par $n$ et $p$ des nombres entiers naturels, construire une tour en superposant $n$ cubes de $p$ couleurs différentes. » Une fois compris ce qu'on appelle une tour, ce que signifie que des tours sont différentes et que plusieurs solutions sont donc possibles, l'enseignant demande aux élèves de trouver toutes les solutions. Les connaissances visées peuvent être institutionnalisées, par exemple en cycle 3, sous la forme : 1) Un problème peut avoir plusieurs solutions ; 2) On fait des essais ; 3) On note ces essais ; 4) On contrôle chaque essai ; 5) On doit organiser la présentation de ces essais pour convaincre qu'on a trouvé toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres et que chacune n'a été comptée qu'une seule fois. L'intitulé 3) recouvre un enjeu de codage. Cette institutionnalisation sera adaptée au niveau d'enseignement et à l'instance choisie par l'enseignant. Diverses instances ont été expérimentées de multiples fois : $n = p = 3$ en cycle 1, 2 et 3 ; $n = p = 4$ en cycle 3. Les variantes se construisent en choisissant d'autres objets que des cubes et en prenant des valeurs différentes pour $n$ et $p$. On pourra consulter https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/resolution-de-problemes-aux-cycles-1-2-et-3/les-tours-979203.kjsp?RH=413148517470877. A la suite de la résolution du problème *des Tours* – qui peut durer plusieurs séances – l'institutionnalisation a d'abord lieu dans le contexte du problème : 1) Ce problème *des Tours* a plusieurs solutions ; 2) On a réalisé plusieurs tours ; 3) On a noté ces tours ; 4) On a contrôlé que chaque tour était valide ; 5) On a organisé les différents essais pour… Cette institutionnalisation prendra une forme plus générale lorsque les élèves auront travaillé sur des variantes à la suite du problème *des Tours* ou bien à la suite du problème suivant qui remet en jeu ces connaissances d'ordre II.

Le problème proposé pour la période 2 s'intitule *la Monnaie* ou *les Billets* : « On dispose de différentes valeurs monétaires, chaque valeur en nombre fixé (ou non, dans un premier temps). On se demande si l'on peut payer n'importe quel montant avec ces valeurs, si l'on peut payer un montant fixé à l'avance et, si oui, de quelle manière. » L'instance expérimentée en cycle 1 utilise le matériel « Numicon » et s'énonce, en grande section de maternelle, par exemple sous la forme : « Vous voulez acheter une couronne chez le bijoutier. Pouvez-vous payer le bijoutier avec l'argent qui est dans votre porte-monnaie. La couronne coûte

20 €. Dans le porte-monnaie, il y a 5 billets de 5 € et 12 pièces de 2 € ». Pour la moyenne section de maternelle, la couronne coûte 6 € et, dans le porte-monnaie, il y a 2 billets de 5 €, 4 pièces de 2 € et 7 pièces de 1 €. En cycle 2, on a expérimenté l'instance suivante : « La maman d'Alix veut donner 20 € à sa fille pour son anniversaire. Elle dispose de 5 billets de 5 € et de 12 pièces de 2 €. Peut-elle donner 20 € à Alix ? Si oui, comment ? ». Un exemple d'instance expérimentée en cycle 3 : « On dispose de 12 billets de 20 € et de 12 pièces de 5 €. Est-il possible de faire une somme de 200 € ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? » Les connaissances d'ordre II visées sont les mêmes que pour le problème précédent – en cycle 3, on peut mettre en œuvre ces deux problèmes dans la même période 1 – sauf si l'on démarre sur une version plus générale du problème. Dans ce cas en effet, les catégories d'actions scientifiques, *Questionner* et *Généraliser* sont davantage potentiellement favorisées et doivent alors donner lieu à une institutionnalisation.

Pour la période 3, voire 2 en cycle 3, il est proposé de travailler sur la notion de conjecture, sur le mode de validation en mathématiques – la logique du quotidien se heurte au fonctionnement du vrai et du faux en mathématiques – la formulation de propriétés de portée générale, en utilisant le problème des *Nombres pairs / impairs* : « Si l'on additionne deux nombres impairs, n'importe lesquels, alors le résultat est un nombre impair. Cette généralité est-elle vraie ou bien fausse ? Faire une conjecture sur la somme de deux nombres impairs. Comment être sûr qu'elle est vraie ? ». Comme pour les problèmes précédents, la formulation du problème, la question du matériel proposé est à adapter au niveau d'enseignement. En cycle 1, le matériel « Numicon » s'avère utile et on pourra travailler cette question en considérant seulement les nombres de 1 à 10. L'institutionnalisation locale, c'est-à-dire dans le contexte du problème, peut se faire de la manière suivante, même si les élèves ne parviennent pas à une preuve de la parité de la somme de deux nombres de même parité : 1) Faire des essais en choisissant de nombreux nombres pairs qu'on a additionnés a permis de dégager une généralité n°1 qui est la suivante : si l'on additionne deux nombres pairs, n'importe lesquels, alors le résultat est toujours un nombre pair. 2) Faire des essais en choisissant de nombreux nombres impairs qu'on a additionnés a permis de dégager une généralité n°2 qui est la suivante : si l'on additionne deux nombres impairs, n'importe lesquels, alors le résultat est toujours un nombre pair. 3) Ces deux généralités sont vraies ou bien fausses, mais les essais effectués ne suffisent pas pour le prouver. 4) La généralité proposée au départ est fausse, comme le prouve le cas suivant : 3 + 5 (on additionne deux nombres impairs), 3 + 5 = 8, et le résultat n'est pas un nombre impair. Le principe du tiers exclu, énoncé dans 3), est à présenter comme une convention du fonctionnement des mathématiques. Il est à noter que la résolution de ce problème passe par la nécessité de définir la parité d'un nombre.

Le problème proposé ensuite pour le cycle 3, est celui *des Diagonales d'un polygone*. Il s'agit de chercher si, étant donné un polygone, on peut trouver le nombre de ses diagonales. Nous renvoyons à Balacheff (1988). Outre qu'il met en jeu les connaissances précédemment institutionnalisées, il demande la formulation de ce que nous avons appelé (pour les élèves) « une généralité », qui exprime ici le nombre de diagonales en fonction du nombre de sommets du polygone.

Les deux derniers problèmes, pour les périodes de deuxième partie de l'année, sont d'abord le problème de *la Grille*, déjà présenté ci-dessus (sauf pour le cycle 1), ensuite une situation de recherche pour la classe (Gandit & *al.*, 2011), comme, par exemple, *le Carrelage de la salle de bains.* La gestion en classe de *la Grille* se complexifie du fait que l'enseignant doit gérer différemment, notamment sur le plan matériel, la preuve de minorants, d'une part, et de majorants, d'autre part, du maximum recherché (voir Hersant, 2011). Pour ces deux problèmes, outre les connaissances d'ordre II déjà explicitées à propos des problèmes précédents, il s'ajoute la preuve d'une impossibilité, ainsi que la mise en place d'une communication scientifique, par l'ensemble de la classe, portant sur la formulation du problème et des résultats obtenus, comme elle se fait dans les *séminaires juniors Math à Modeler* (Pastori, 2013).

Mis à part le problème *des Tours*, les différents problèmes proposés peuvent ne pas être résolus par la classe, surtout si de nouvelles questions ont été étudiées par les élèves. Il revient à l'enseignant d'arrêter la recherche quand il estime suffisantes les connaissances d'ordre II qui sont apparues. Désigner les connaissances d'ordre II en jeu dans un problème, puis les institutionnaliser, sous la forme d'une trace écrite dans le cahier des élèves, sont des invariants opératoires de la conception C3 *visée*. Comme déjà dit, Hersant (2010) souligne la difficulté pour les enseignants de procéder ainsi, ce que nous avons également constaté au cours de ce projet.

Pour compléter cette liste de problèmes, notamment en ce qui concerne les situations de recherche comme le *Carrelage de la salle de bain*, nous renvoyons à quelques articles : Gandit & *al.* (2013) *pour Les Caisses de dynamite*, Ouvrier-Buffet & *al.* (2017) pour *La chasse à la bête*, Da Ronch & *al.* (2020) pour *Le problème de Wang*...

## 2 Une trame de mise en œuvre de la démarche de résolution, cohérente avec les stratégies d'évaluation formative, qui favorisent l'auto-régulation des apprentissages

Dès le début du projet, les enseignants ont demandé comment mettre en œuvre les problèmes proposés. L'équipe de recherche a fourni des documents pour rassurer les enseignants, tout en précisant qu'aucun protocole n'était imposé pour ces séances de résolution de problèmes. Peu à peu a émergé une trame de mise en œuvre, regroupant un certain nombre d'invariants opératoires et d'éléments de contrôle de la conception *visée* C3. Cette trame repose sur les différentes phases suivantes.

P) *Présentation du problème* : l'enseignant peut, au choix, donner un énoncé sur papier, écrit au tableau, oralisé, mimé, avec ou sans matériel et mettre en œuvre un étayage adapté à certains élèves en jouant sur la forme de l'énoncé, le format de présentation, la mise à disposition de matériel particulier.

Ri) *Recherche individuelle des élèves* : ils s'engagent dans les premiers essais ; l'enseignant adopte alors la posture *d'observateur actif* de cette mise en recherche.

Mp) *Mise au point collective* : des reformulations de l'énoncé sont proposées par les élèves ou l'enseignant, des décisions sont prises collectivement sur la définition d'objets en jeu ou sur le choix des questions à étudier, dans le cas où l'énoncé permet l'étude de différents sous-problèmes.

Rb) *Recherche (en binômes) des élèves et production des premières idées* : l'enseignant est un observateur des actions scientifiques des élèves, des idées ou productions, erronées ou non, qui peuvent être communiquées à l'ensemble de la classe, pour faire avancer la recherche collective ; il peut interrompre cette recherche dans le cas où émerge une idée particulièrement intéressante, et la mettre en débat, puis relancer la recherche en binômes ; si un élève est particulièrement en difficulté, il mettra en œuvre un étayage personnalisé.

D) *Débat scientifique* : l'enseignant orchestre la formulation de conjectures de la part des élèves, l'ordre de leur étude collective, le vote – vrai, faux, autre réponse – sur chacune d'elles, les interactions entre élèves (et non pas entre l'enseignant et quelques élèves) pour valider ou non ces conjectures ; il est nécessaire que les élèves aient une responsabilité scientifique lors de cette phase ; le tableau est utilisé comme support de la communication entre élèves, l'enseignant s'efforçant d'écrire les idées des élèves sans les déformer.

C) *Communication scientifique par les élèves sur le problème* : les élèves eux-mêmes présentent le problème – si possible à un public extérieur à la classe – et les résultats qu'ils ont obtenus, avec leurs preuves, sans intervention de l'enseignant, et répondent aux questions du public ; cette phase est préparée en amont par l'enseignant et permet la parole de chaque élève ; mais, en raison de l'organisation qu'elle nécessite, elle n'a pas lieu systématiquement, elle peut être réservée au problème de la dernière période de l'année. Il faut noter que, en dehors de cette phase particulière qui constitue un séminaire de clôture de la recherche, la communication scientifique est travaillée au cours des phases précédentes, notamment *le débat scientifique*.

I) *Conclusion et Institutionnalisation* : c'est l'enseignant qui prend la responsabilité complète de cette phase, qu'on subdivise en trois temps : d'abord les conclusions sur le problème – le problème est-il résolu ? quels résultats ont été obtenus ? –, ensuite une institutionnalisation *locale*, avec trace écrite, dans le cadre du problème, sur les connaissances d'ordre II – mais aussi éventuellement d'ordre I, comme ce que signifie que des points sont alignés, par exemple, dans le cas du problème de *La Grille* –, enfin une institutionnalisation *globale*, avec trace écrite, en fonction des institutionnalisations locales déjà réalisées à partir des problèmes précédents. Cette explicitation des apprentissages en trois temps est essentielle.

Ces phases s'enchaînent à peu près chronologiquement, les phases Rb) de recherche et D) de débat pouvant se répéter plusieurs fois successivement, pour un même problème.

Pour évaluer cette trame, nous avons utilisé certains résultats déjà obtenus en termes d'évaluation de la démarche d'investigation dans le cadre de projets de recherche antérieurs – le projet européen ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology & Mathematics Education, 2013-2017, et le LéA EvaCoDICE (Évaluation par Compétences dans les Démarches d'Investigation au Collège et à l'École, 2012-2015) – notamment le rapprochement entre les enseignements scientifiques fondés sur l'investigation et l'évaluation formative. Nous renvoyons à Lepareur & *al*. (2018), qui reformulent dans ce contexte les cinq stratégies d'évaluation formative, dues à Wiliam & Thompson (2007). Ces stratégies agissent positivement sur les apprentissages. Elles prennent en compte les rôles de l'enseignant, des apprenants et des pairs et se situent dans le schéma de la boucle du *feedback* (*Ibid*., p.103) qui peut se résumer par ces trois questions : Q1) Quel est l'objectif visé ? Q2) Quelle rétroaction permet de connaître l'écart entre l'état des apprentissages, atteint à un moment donné, et l'objectif visé ? Q3) Comment réduire cet écart ?

La stratégie (1), « Clarifier, partager et faire comprendre les intentions d'apprentissage et les critères de réussite », permet à l'enseignant de répondre à Q1). Dans la trame proposée, cette stratégie est présente dans les phases P), Mp), ainsi que I), de manière à préparer le *chercher-prouver* sur le problème suivant.

Les quatre autres stratégies se formulent ainsi : (2) « Organiser de véritables discussions, activités et tâches qui produisent des preuves sur les apprentissages », (3) « Donner un feedback qui fait progresser les élèves », (4) « Inciter les élèves à être des ressources pour leurs pairs », (5) « Inciter les élèves à être responsables de leurs apprentissages ». On retrouve ces deux dernières, (4) et (5), successivement dans les phases Mp) de mise au point, Rb) de recherche, D) de débat et C) de communication scientifique. La stratégie (3) figure dans les phases D) de débat et I) de conclusion et institutionnalisation. Enfin la stratégie (2) est au cœur de la phase D) de débat.

Revenons au choix, essentiel, des problèmes qui seront mis en œuvre suivant la trame présentée ci-dessus, afin d'énumérer des critères qui peuvent conduire le choix d'un problème pertinent. Nous proposons cette liste en annexe 1, complétée par des incontournables de la trame de mise en œuvre.

## 3 Un tableau de progression qui permet à l'enseignant de se situer

Ce tableau (voir annexe 2) est destiné à l'enseignant qui souhaite réévaluer sa propre conception C3, avant, pendant et après la mise en œuvre de la recherche de chaque problème, particulièrement certains invariants opératoires et éléments de contrôle, en les comparant à ceux qui correspondent à la conception C3 *visée*. Ce tableau a été coconstruit – ceci est un point essentiel – par les enseignants et l'équipe de recherche, en fonction de l'évolution des expérimentations, problème après problème, et après apport théorique concernant les stratégies d'évaluation formative. Celles-ci se repèrent par les numéros dans les formulations négociées qui figurent dans ce tableau.

Les *opérateurs* choisis, un ou deux par ligne, consistent en : 1) la désignation des connaissances en jeu dans le problème et l'explicitation des objectifs visés, 2) l'observation des actions des élèves, 3) la pratique du débat scientifique et la validation, 4) la conclusion sur le problème et l'institutionnalisation. Par ligne, le tableau donne quatre descriptions qui indiquent quatre niveaux différents de mise en œuvre de ces opérateurs, le niveau visé se situant dans la dernière colonne à droite. Ces quatre indicateurs sont arbitraires et doivent être considérés comme quatre repères sur un axe continu. L'enseignant peut également utiliser ce tableau pour décider ce qu'il souhaite améliorer dans sa pratique.

Le *contrôle* s'exerce par rapport à chacun de ces points et sur plusieurs niveaux, comme, par exemple, celui où l'enseignant juge sa pratique en utilisant les indicateurs fournis dans ce tableau et celui où l'enseignant, par exemple, repère dans une action d'élève une idée pertinente à renvoyer à toute la classe, ce qui figure dans la description de certains indicateurs. Outre des éléments qui relèvent du *contrôle*, les descriptions des indicateurs contiennent explicitement les cinq stratégies d'évaluation formative données dans le paragraphe précédent.

Les enseignants utilisent volontiers ce tableau pour évaluer leur pratique, à un moment donné de l'année, et aussi pour se fixer un objectif d'amélioration de cette pratique. Par exemple, dans son cahier de recherche, un des enseignants reprend chacun des opérateurs de la colonne de gauche du tableau de l'annexe 1 et se positionne dans deux colonnes, intitulées « Positionnement actuel » et « Objectif fixé pour cette séquence ». Enfin l'usage de ce tableau de progression est aussi apprécié par les enseignants qui souhaitent améliorer leur pratique dans les autres disciplines que les mathématiques. Ils sont en effet unanimes pour constater que cette évolution du contrat didactique relatif à la résolution de problèmes a des répercussions importantes dans leurs pratiques et dans le comportement des élèves dans les autres disciplines que les mathématiques.

## V - EN GUISE DE CONCLUSION

Nous venons de présenter trois outils coconstruits par l'équipe de recherche et les enseignants. D'autres pourront faire l'objet d'une présentation ultérieure. Le projet de recherche se poursuit encore pendant au moins deux ans. Les effets produits sur les pratiques enseignantes sont certains : les conceptions C3 des enseignants ont évolué, se rapprochant de la conception C3 *visée*. La présence de l'équipe de recherche dans les séances de résolution de problèmes en classe permet d'arriver à cette conclusion, qui reste néanmoins à prouver. Le suivi, par Laurence Mossuz, dans le cadre de son mémoire de master, d'une des enseignantes aboutit à une description de l'évolution de la conception C3 de cette enseignante.

Par ailleurs, la question concernant le projet, adressée aux enseignants, « Que mettez-vous en valeur ? », aboutit à des réponses qui confirment les avancées positives que nous percevons. Voici quelques-unes de leurs réponses : « le tableau d'auto-positionnement », « la progression des problèmes, avec les connaissances d'ordre I et d'ordre II », « des gestes professionnels : ne pas montrer toutes les productions des élèves, gérer la résolution du problème avec l'ensemble de la classe, garder des traces, même, en maternelle, parler moins, lâcher prise, laisser aux élèves la possibilité de ne pas trouver… », « la motivation des élèves : peu importe le moment de la journée pour la résolution de problème », « la place à la créativité », «  le rejaillissement sur les autres disciplines : capacité à sortir du cadre, émettre des hypothèses, partie « débat » transposable dans les autres disciplines, écouter les arguments des autres… ».

Et les élèves ? Pour montrer que la résolution de problème concerne bien la maternelle aussi, nous choisissons de rapporter un fait issu de la mise en œuvre en cycle 1 (grande section, élèves de 5 ans), du problème du *Carrelage de la salle de bains*. Il est demandé aux élèves de carreler une salle de bain quadrillée, carrée de côté 3, avec des dominos (qui occupent deux cases consécutives), sachant qu'une des cases est occupée par un lavabo. Dans le cas où le lavabo occupe le centre de la salle de bain, différentes manières de carreler la salle de bain ont été trouvées par les élèves (figure 4).

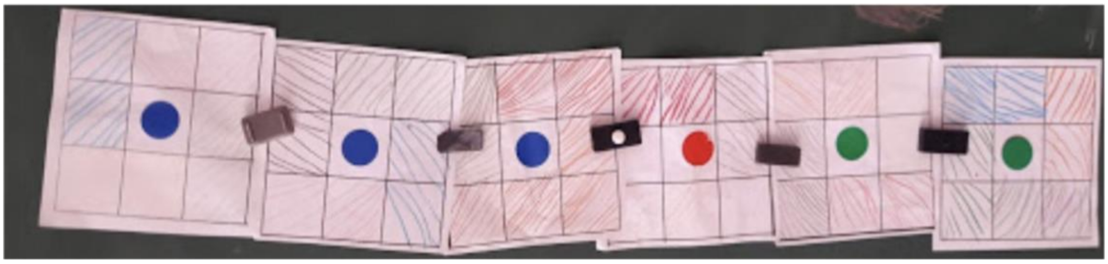


*Figure 4. Les élèves trouvent différentes solutions dans le cas où le lavabo occupe le centre.*

Mais lorsque le lavabo occupe le centre d'un côté, beaucoup d'élèves ne parviennent pas à carreler la salle de bain. L'argument donné par ces élèves est que, dans tous leurs essais, il reste des carrés « tout seuls », c'est-à-dire, des carrés non adjacents par un côté (figure 5).

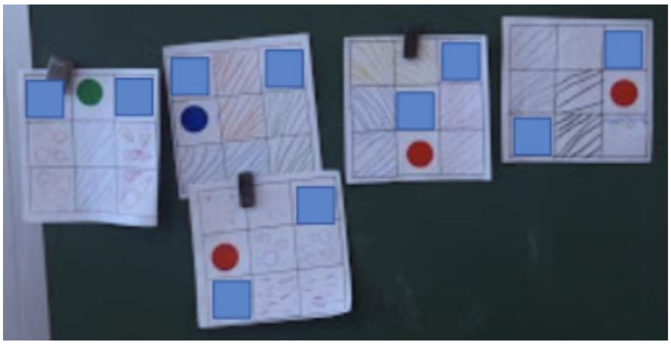


*Figure 5. Les élèves disent qu'il est impossible de paver la salle de bain si le lavabo est au centre du côté, parce qu'il reste des carrés « tout seuls » représentés en bleu.*

Deux élèves de la classe montrent alors que l'argument donné ci-dessus, « il reste deux carrés tout seuls » ne prouve pas que le pavage est impossible. Elles reprennent un cas déjà étudié par la classe, celui où le lavabo est situé dans un coin. La classe avait auparavant conclu qu'on pouvait paver la salle de bain si le lavabo était situé dans le coin. Elles exhibent alors un pavage de la salle de bains dans lequel il reste bien deux carrés « tout seuls » (figure 6), ce qui ne peut pas prouver que le pavage est impossible, puisqu'on sait qu'il est possible.

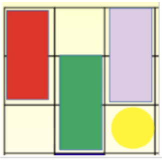


*Figure 6. Les deux élèves fabriquent un pavage laissant deux carreaux « tout seuls » pour mettre en défaut le raisonnement de la majorité de la classe.*

Pour finir, en réponse aux questions « As-tu aimé le problème de *la Grille* ? » et « As-tu appris quelque chose avec ce problème ? », quelques citations d'élèves de cycle 3 : « J'ai aimé le problème de grille, mais j'ai préféré le problème des diagonales car celui-ci s'est terminé trop vite. J'ai appris à trouver de bons arguments. » ; « Oui, je l'ai bien aimé car j'aime bien chercher et on à chercher. J'ai appris à chercher des contres-exemples. » ; « Non [Je n'ai pas aimé] parce que s'était très complexe et assé stratégique. Oui [J'ai appris quelque chose] parce qu'on appri à creuser plus plus profondément. »…

## VI - BIBLIOGRAPHIE


Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9(3)*, 247-280.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier], Grenoble. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/document

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cKc Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactique. Dans C. Margolinas & A. Mercier (dir.), *École d'été de didactique des mathématiques, Corps*. (1-32). Grenoble : la Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (2011). cK¢ un modèle pour relier connaissance et preuve en didactique des mathématiques. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept : Preuve* (9-20). Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble. Hal 01567192

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M. & Moulin, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. Dans S. Coppé & E. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, XIXème école d'été de didactique des mathématiques, Paris.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères-IREM, 121,* 77-108.

Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z. & Da Ronch, M. (2020). *Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement.* Third conference of the national Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM), 12-19 septembre 2020.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7(2)*, 5-31.

Dudeney, H.E. (1970). *Amusements in mathematics*. Courier Dover Publications.

Gandit, M. & Massé-Demongeot, M.-C. (1996, rééd. 2001). Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée. IREM de Grenoble. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR96044.htm

Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en Education, 21*, 67-80. http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no21.pdf (cons. 10/10/2022).

Gandit, M., Modeste, S., Gravier, S., Balicco, M.-P. (2013). Les caisses de dynamite. Un atelier de recherche Maths à modeler. *Jouer ou apprendre, May 2013, Chamonix, France*. halshs-02021307

Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. Dans M. Grangeat (dir.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (38 – 51). Lyon : École Normale Supérieure.

Grenier, D. & Payan, C. (2002). Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (189 – 204). Paris : IREM Paris 7 et ARDM.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en* mathématiques. Mémoire complémentaire à l'HDR. Université de Nantes. DOI : 10.13140/RG.2.2.35465.77928

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux *problèmes pour chercher*. Dans C. Margolinas (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, Actes de la XVéme école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand, 16 au 23 août 2009* (305-325). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM, 10,* 123 – 159.

Lepareur, C., Gandit, M., Grangeat, M. (2018). *Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas*. Education et Didactique, 11-3. URL : http://journals.openedition.org/ educationdidactique/2857 ; DOI : 10.4000/educationdidactique.2857

Pastori. M. (2013). *Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe de mathématiques : un exemple de coopération entre enseignants et chercheurs.* Dans M. Grangeat (dir.) Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Presses universitaires de Grenoble.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *25(1)*, 57-90.

Venet, M., Correa Molina, E. & Saussez, F. (2016). Pédagogie universitaire et accompagnement dans la zone proximale de développement des enseignants et enseignantes en formation initiale et continue. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *19*(1), 1–10. https://doi.org/10.7202/1040660ar

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10(2.3)*, 133-170.

Wiliam, D. & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? Dans C. A. Dwyer (dir.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (p. 53–82). Mahwah, NJ : Erlbaum.

## VII - ANNEXE 1 : UNE LISTE DE CRITERES POUR LE CHOIX DES PROBLEMES ET LEUR MISE EN ŒUVRE

Outre des critères pour le choix des problèmes de la progression, cette liste comporte également des critères de vigilance par rapport à la trame de mise en œuvre en classe. Certains sont déjà énoncés dans Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et *al.*, 2011).

*Critère 1* – Le problème est riche sur le plan épistémologique ; autant que possible, en lien avec des problèmes de la recherche actuelle en mathématiques discrètes. Il peut donc comporter plusieurs solutions ou aucune solution…, contrairement à la majorité des problèmes proposés à l'école, qui, bien souvent, comportent une, et une seule, solution. Ce problème, dans toute sa généralité comporte des variables, dont différentes valeurs vont conduire à des sous-problèmes, ce sont les *variables de recherche*.

Ce critère n'est pas rempli par les premiers problèmes choisis pour la progression proposée.

*Critère 2* – Les méthodes de résolution ne sont pas désignées, plusieurs pistes peuvent être suivies, aussi bien dans la résolution que dans le choix des sous-problèmes.

Les variantes des problèmes dont il est question dans le texte peuvent être aussi des sous-problèmes.

*Critère 3* – La question présentée au départ, même si elle est générale, est compréhensible par les élèves du niveau choisi. Le domaine conceptuel dans lequel se situe le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile, qui permet aisément de s'engager dans la résolution. Les connaissances scolaires nécessaires pour comprendre la question posée au départ sont disponibles ou seront construites assez naturellement au cours de la résolution.

Par exemple, ce qu'est une diagonale d'un polygone, ce qu'est un nombre pair, ce que sont des points alignés. Ce critère 3 est favorable au processus de *dévolution* du problème (Brousseau, 1998), qui est renforcé par la mise à disposition (ou non) de matériel à manipuler. Ce matériel est très proche des objets théoriques en jeu dans le problème, sans habillage superflu.

*Critère 4* – Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. La résolution pourrait se poursuivre, elle s'arrête au moment décidé, sans que nécessairement le problème ne soit résolu. C'est l'enseignant qui prend cette décision.

*Critère 5* – Les apprentissages visés relèvent de connaissances d'ordre II (Sackur et *al.*, 2005), c'est-à- dire de méthodes de recherche, de raisonnements, de connaissances de logique, sur le fonctionnement en mathématiques…

*Critère 6* – La résolution du problème est collaborative, les élèves ne travaillent pas seuls, et la communication des résultats se réalise dans le cadre d'un séminaire à l'extérieur de la classe (Pastori, 2013) ou dans le cadre d'un débat scientifique (Legrand, 1993).

*Critère 7* – Une phase de conclusion et d'institutionnalisation a lieu à partir de la recherche du problème. L'institutionnalisation porte sur les connaissances d'ordre II en jeu. Elle est précédée d'une phase de conclusion portant sur les résultats trouvés.

## VIII - ANNEXE 2 : LE TABLEAU DE PROGRESSION

**Quatre indicateurs de niveau de mise en œuvre par l'enseignant, au cours de la résolution en classe d'un problème, concernant les quatre éléments de pratique qui figurent dans la colonne de gauche. La colonne de droite correspond à la pratique visée. (*P* désigne l'enseignant).**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés** | P a pour seul objectif que le problème soit résolu | P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, mais n'en tient pas particulièrement compte dans la mise en œuvre. | P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, Il conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves. (1) | P conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves et le formalise dans une trace écrite. (1) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Observation des actions des élèves** | P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe) et intervient sur le problème, en guidant vers sa résolution. | P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe). Il met en place un étayage, fixe ou adapté, influençant les représentations qu'ont les élèves du problème. | P relève dans les actions des élèves des indicateurs pour anticiper une mise au point collective ou un étayage adapté ou le démarrage du débat. (3)<br>P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs. (5) | P relève dans les actions des élèves des indicateurs pour anticiper le démarrage du débat. (3)<br>P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs : il renvoie le questionnement à l'élève ou à la classe. (4)<br>P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs. (5) |
| **Pratique du débat scientifique - validation** | Tous les élèves présentent leurs productions. P valide ou invalide.<br>Aucune rétroaction la part des élèves. | P anticipe la mise en commun par un classement des productions des élèves suivant les stratégies de résolution ou leur validité.<br>Les élèves présentent leurs productions, que P aide ou invalide.<br>Aucune rétroaction la part des élèves. | P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures. (2)<br>P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. (3)<br>P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. (4)<br>Mais c'est P qui, finalement, valide ou rejette les conjectures. | P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves **pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures.** (2)<br>**P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies.** (3)<br>**P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs.** (4)<br>**P incite les élèves à être responsables de leurs propositions.** (5)<br>**Les conjectures, avec leurs preuves, acquièrent le statut de résultats mathématiques.** |
| **Conclusion sur le problème et Institutionnalisation** | Aucune institutionnalisation n'est prévue. P conclut la recherche autour du ressenti des élèves. | P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème. | P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème.<br>P réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve (Qu'a-t-on appris ?) (1) & (3) | P organise lune présentation par les élèves des résultats sur le problème.<br>P réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve (Qu'a-t-on appris ?) (1) & (3)<br>L'institutionnalisation fait l'objet d'une trace écrite. (1)<br>P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en développant l'autoévaluation. (5) |

# QUAND LES « PETITS » AIDENT LES « GRANDS », OU QUAND DES ETUDIANTS DE LICENCE ANIMENT DES ATELIERS D'AIDE EN MATHEMATIQUES EN MASTER MEEF 1ER DEGRE

**Françoise JORE**
Maître de Conférences, UCO ANGERS
LIRFE
jore@uco.fr

**Résumé**
Une expérience de terrain menée depuis six ans à l'Université Catholique de l'Ouest (UCO), implique des étudiants de licence et de master MEEF : l'aide en mathématiques des étudiants de troisième année (L3) de licence MIASHS aux étudiants de master 1 et 2 MEEF 1er degré, fondée sur le volontariat pour tous. Les étudiants de licence, qui se destinent à l'enseignement, y développent des compétences professionnelles et les valident dans le cadre d'une unité d'enseignement optionnelle. Les étudiants de master avec un niveau faible, qui sont motivés et volontaires mais qui peinent vraiment, apprécient l'aide que les L3 leur apportent.
Après avoir décrit le dispositif mis en place, ses différentes évolutions au cours du temps, ses effets et ses limites, ainsi que les ressentis des étudiants engagés, nous l'analyserons au regard de deux articles de recherche. L'un porte sur le tutorat (Gerbier & Sauvaître, 2003, p. 17-27), l'autre sur l'accompagnement (De Ketele, 2014, p. 73-85). Nous pourrons alors, en nous appuyant également sur les suggestions qui ont émergé lors des échanges qui ont suivi la communication, proposer quelques améliorations et adaptations du dispositif.

## I - HISTOIRE ET DESCRIPTION DU DISPOSITIF

Le cœur du dispositif est simple : des étudiants de troisième année de licence MIASHS (Mathématiques, Informatique et Applications aux Sciences Humaines et Sociales) viennent aider des étudiants de master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation) lors de séances d'aide en mathématiques.

### 1 Une opportunité

Le démarrage de ce dispositif est le résultat du croisement de trois éléments.

#### *1.1 Du côté des L3 MIASHS*

La troisième année de licence (L3) MIASHS de l'Université Catholique de l'Ouest (UCO), aux semestres 5 et 6, propose, pour une des unités d'enseignement, un choix d'options parmi lesquelles une « initiative étudiante ». Elle permet aux étudiants de mettre en œuvre des actions en dehors de leur parcours de formation. La contrainte est que l'action concernée permette de développer des compétences en lien avec le référentiel de compétences du diplôme et/ou du métier envisagé. L'étudiant doit, en début de semestre, présenter son projet à un enseignant référent, qui valide ou non le projet ; il le met en œuvre et doit à la fin faire un court dossier pour décrire ce qu'il a fait puis mettre en évidence les compétences qu'il a pu développer au cours d'une soutenance.

La licence MIASHS propose par ailleurs un parcours Entreprise et un parcours Enseignement, dans lequel les sciences humaines et sociales sont les sciences de l'éducation. Ce parcours rassemble des étudiants qui souhaitent devenir professeur des écoles ou de collège et lycée. Les compétences spécifiques au parcours qui doivent y être développées sont en lien avec le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation.

Jusqu'en 2016, l'initiative étudiante est très peu choisie par les étudiants du Parcours Enseignement.

### 1.2 Du côté des M1 et M2 MEEF

Le master MEEF de l'UCO est mis en œuvre par les ISFEC (Instituts Supérieurs de Formation de l'Enseignement Catholique), qui jouent le rôle des INSPE (Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education) de l'Enseignement Public. Celui d'Angers, historiquement implanté à une douzaine de kilomètres de l'UCO, déménage à la rentrée 2016 dans les locaux de la faculté d'éducation de l'UCO.

Le profil des étudiants engagés dans ce master est classique, avec surtout de grandes faiblesses pour certains en mathématiques. Le volume horaire de cours est largement insuffisant pour permettre à tous d'acquérir un niveau suffisant en mathématiques pour enseigner et passer les épreuves du concours. Par ailleurs, tous ne sont pas en difficulté en mathématiques. Ces promotions présentent en effet une très grande hétérogénéité. Il est dès lors parfois difficile de proposer en cours les séances d'entraînement ou de faire les rappels dont certains auraient besoin, mais qui sont des évidences pour d'autres, au risque de faire perdre tout intérêt au cours de mathématiques pour ceux qui y ont quelques compétences. Le volume horaire disponible doit par ailleurs permettre de former les étudiants à enseigner à l'école. Il est donc nécessaire de consacrer du temps à la didactique des mathématiques.

Au stress du concours qui se déroule à l'époque en fin de première année de master s'ajoute celui du master, dans lequel le poids des écrits de mathématiques sur chacun des deux premiers semestres est important. Toute aide en mathématiques pour ces étudiants est donc la bienvenue.

### 1.3 Un trait d'union

Les ingrédients de la recette sont là, il n'y a plus qu'à les mettre en lien.

Dans un premier temps, une soirée quelques temps avant les vacances de Noël 2016 rassemble à la faculté d'éducation les étudiants du master MEEF 1er degré qui viennent d'arriver sur le campus, ceux du 2nd degré, qui y ont toujours été, et les enseignants. La discussion s'engage et les étudiants de mathématiques du parcours 2nd degré proposent une soirée de révision aux étudiants du 1er degré. Cette initiative est une réussite et les étudiants du 1er degré souhaitent une suite.

Le calendrier des stages et du concours du CAPES alors en fin de l'année de M1 rendent les choses trop compliquées. Intervenant à la fois en master MEEF 1er et 2nd degré, mais aussi en mathématiques et en didactique à cette époque dans la licence MIASHS, je connais bien les deux populations, leurs besoins et leurs possibilités. Je propose que cette suite se mette en place, avec les étudiants de troisième année de licence. Très vite, je prends les contacts nécessaires, tant du côté des responsables de la licence que de ceux du master MEEF 1er degré de sorte que dès janvier suivant, une aide régulière puisse se mettre en place.

Finalement, 35 étudiants de master sur 90, dont 29 M1 et 6 M2 qui repassent le concours, et 7 étudiants de L3 MIASHS s'inscrivent sur les 11 dates proposées entre janvier et fin mars 2017

## 2 Les règles du jeu

### 2.1 Les principes de départ

Quelques règles de fonctionnement sont posées dès le départ :

- Les étudiants de L3 qui s'investissent dans ce dispositif peuvent choisir l'option « initiative étudiant » au semestre 6.

- Les étudiants de master comme ceux de licence s'engagent à être présents à au moins 10 des 11 séances planifiées, de sorte que le dispositif aille au bout du semestre et que les étudiants de L3 aient suffisamment de matière pour valider leur option.

- Le dispositif est destiné à aider les étudiants de master, de première année ou de seconde année qui repassent le CRPE (Concours de Recrutement de Professeurs des Ecoles), et qui ont des difficultés en mathématiques. Ce critère de difficulté est laissé à l'appréciation de chacun des étudiants de master. L'objectif est de limiter raisonnablement l'effectif de sorte qu'il soit adapté aux 7 étudiants de licence qui sont intéressés.

- Ce sont les étudiants de master qui choisissent sur quoi ils veulent travailler à chaque séance et qui amènent le matériau en conséquence, que ce soit leur cours ou des exercices. Il s'agit dans les faits, le plus souvent, des séries d'exercices avec les corrigés qui sont donnés à faire en travail personnel par les enseignants de mathématiques en master.

- Seul l'aspect notionnel des mathématiques est concerné. Les L3 ont moins de compétences en didactique que les étudiants de master et c'est sur le contenu mathématique lui-même qu'ils peuvent vraiment aider les étudiants de master parce que c'est là que, en théorie du moins, ils ont des compétences.

- Les étudiants sont répartis en trois groupes fixes, afin qu'ils apprennent à se connaître et à travailler ensemble.

- Je suis présente la plupart du temps, pour aider les étudiants de L3 mais pas les étudiants de master. Il s'agit en effet de ne pas transformer ces séances en travaux dirigés assurés par un enseignant de master.

### 2.2 Evolution du dispositif au cours du temps.

Tous les participants sont satisfaits de cette première expérience. L'enthousiasme des étudiants, tant de licence que de master, nous invite à la reproduire les années suivantes avec quelques aménagements.

Les séances sont étalées non plus sur un semestre, mais sur l'année entière, à raison d'environ une séance tous les 15 jours, soit une quinzaine de séances par an, compte tenu des périodes de stages des uns et des autres. Cela permet un accompagnement dans la durée sur l'ensemble des thèmes au programme.

Les étudiants de licence s'engagent sur l'année mais ne peuvent valider cette option que sur un seul semestre, au choix en semestre 5 ou en semestre 6. Du point de vue universitaire, on ne peut en effet délivrer deux unités d'enseignement qui correspondent aux mêmes activités et aux mêmes compétences.

Une période de test de deux séances en début d'année permet aux étudiants de master de venir essayer les séances avant de s'engager définitivement pour toutes les séances restantes. Ceci a été mis en place à la demande des étudiants de master qui hésitaient à s'engager avant de savoir comment les séances allaient se dérouler. Dans la pratique, très peu d'étudiants se désistent après ces deux séances d'essai.

Pour faciliter l'organisation du planning des étudiants de licence qui doivent être libérés pour assurer ces séances, un créneau fixe est choisi, en l'occurrence le jeudi de 17 h 15 à 19 h (les étudiants de master terminent toujours à 17 h et ont souvent cours de mathématiques le vendredi). Cela permet également d'assurer une régularité facilitatrice de l'engagement des étudiants dans le travail.

Les séries d'exercices distribuées aux étudiants de master sont données en amont des séances aux étudiants de licence, avec leurs corrigés, afin qu'ils puissent les préparer. Ils se sont en effet rendus compte très vite que sur certains thèmes, ils n'arrivaient pas à résoudre les exercices, ou en tous cas, pas plus vite que les étudiants de master. Si les exercices de calcul numérique ou algébrique, ou de résolution d'équation, ne leur posent aucune difficulté, les calculs de prix hors taxe, de numération dans une base autre que la base 10, ou encore certains problèmes de géométrie dans l'espace par exemple restent très compliqués s'ils n'y ont pas réfléchi avant. Ils ne savent pas les résoudre, voire ils font des erreurs (dans les calculs de prix avant réduction par exemple …).

Pour les mêmes raisons, je propose maintenant aux étudiants de L3 de petits temps de cours de mathématiques de temps en temps pour leur expliquer rapidement comment résoudre tel ou tel type de problème, afin qu'ils soient à leur tour capables d'aider les étudiants de master sur ces points de difficulté. Ces temps ont pu, selon les années, être proposés pendant les séances d'aide, parce que je venais de voir des erreurs ou des hésitations, ou en amont de ces séances lorsque je les avais anticipées.

De micro séances de didactique sont aussi régulièrement improvisées, pour faire remarquer aux étudiants, tant L3 que M1 ou M2, ce qui vient de se passer, lors d'une explication, ou d'une difficulté, que ce soit du point de vue de l'enseignement pour l'étudiant de licence, ou du point de vue de l'apprentissage pour l'étudiant de master. Il s'agit pour moi d'analyser avec eux les raisons d'une incompréhension, des effets de contrat didactique, etc., en utilisant des concepts qui ont pu être introduits en didactique des mathématiques, que ce soit en licence ou en master.

Petit à petit, je suis de moins en moins présente à ces séances, l'objectif n'étant pas de faire des cours de mathématiques supplémentaires mais de rendre les étudiants autonomes dans ce dispositif. Je suis très présente la première séance, pour mettre le dispositif en place, puis je passe au milieu des séances suivantes pour voir si tout va bien, pour finalement ne plus venir du tout.

## II - EFFETS ATTENDUS ET INATTENDUS

Cette expérience perdure parce qu'elle répond à un besoin. Les effets attendus sont autant d'arguments chaque année pour inciter les étudiants, tant de L3 que de Master, à s'investir dans le dispositif.

### 1 Pour les étudiants de licence

Comme effets attendus pour les étudiants de licence, nous pouvons citer :

- La découverte des difficultés des élèves de collège en mathématiques, très intéressante pour les futurs professeurs de collège-lycée, à court terme en vue de leur stage en collège ou lycée de second semestre de licence et à plus long terme pour la préparation du concours du CAPES et surtout de leur métier.

- La découverte du programme et du niveau du concours pour les futurs professeurs des écoles, utile pour leur mise en projet d'entrée en master MEEF 1er degré et du programme de collège pour les futurs professeurs de collège-lycée.

- Pour tous les étudiants de licence, le développement de compétences dans la recherche et la formulation d'explications à donner aux étudiants de master, ou mieux, de pistes de réflexion, d'éléments permettant aux étudiants de master de s'engager dans la résolution sans pour autant leur donner la solution, compétences au cœur du métier d'enseignant.

Pour tous ces étudiants, d'autres effets sont très vite apparus, qui n'avaient pas été anticipés. Ils ont pu être repérés par mes échanges pendant les séances avec les étudiants, mais aussi dans leur dossier de validation de l'option ou dans sa soutenance.

Ils prennent tout d'abord conscience de la ***nécessité pour l'enseignant de maîtriser le contenu*** quand il est face aux élèves, et que leurs études de mathématiques à l'université ne garantissent en rien cette maîtrise. Cette découverte est bien plus efficace que les éventuels discours des formateurs de master sur le sujet. Il ne s'agit pas seulement de savoir résoudre un exercice et appliquer une technique, mais aussi de comprendre d'où provient cette technique pour pouvoir plus facilement aider les élèves. Nous avons précédemment cité des exemples de problèmes qu'ils ne savent pas résoudre, soit parce qu'ils ont oublié (problèmes de proportionnalité par exemple), ou parce qu'ils n'ont jamais eu l'occasion de travailler le sujet (numération dans une autre base que la base 10). D'autres situations mettent en évidence que certaines notions ne sont pas maîtrisées : ils savent appliquer certaines techniques, sans du tout être capables de justifier ces dernières, c'est le cas de la division euclidienne par exemple. En effet, en général mais pas toujours, ils savent effectuer une division, mais ils sont totalement incapables d'expliquer pourquoi cet algorithme produit le résultat attendu. Cela les met en difficulté lorsqu'ils doivent répondre à certaines questions des étudiants de master.

Cette difficulté à résoudre un problème, ou encore à expliquer comment le résoudre, les amène à ***collaborer***. La répartition de l'ensemble des étudiants dans trois salles au départ est uniquement faite pour limiter le bruit et rendre le travail plus confortable, et seulement trois salles sont disponibles. De ce fait, les étudiants de licence sont en général deux ou trois par salle. Ils vont alors tout naturellement s'appuyer les uns sur les autres. Dès que l'un est en difficulté pour résoudre un exercice, trouver une erreur ou expliquer une méthode, il va demander de l'aide.

Cette entraide va être très appréciée et surtout va leur permettre de dépasser leurs craintes initiales, de ***prendre confiance en eux***. En effet, au départ, ils craignent de s'engager dans ce dispositif : « *au début, je ne croyais pas que je pourrai les aider* » m'ont-ils souvent exprimé. Cette crainte est notamment liée au fait qu'ils ne sont qu'en licence et que les étudiants qu'ils doivent aider sont plus âgés et plus avancés dans leurs études puisqu'en master.

D'autres compétences professionnelles vont être développées au cours de ces séances. Les étudiants de licence vont par exemple citer : apprendre à parler à des élèves, s'adapter à chaque élève, être patient ou avoir de l'empathie. Ce début de ***développement professionnel***, en parallèle du développement de leur confiance en eux, va dans la grande majorité des cas ***renforcer leur projet professionnel*** d'être enseignant. La découverte de la vie en master MEEF et du rythme de travail, va quant à elle les mettre en projet pour leur entrée en master, tout particulièrement pour les futurs professeurs des écoles.

Analysons maintenant les effets sur les étudiants de master.

## 2 Pour les étudiants de master

Certains effets sont attendus à la mise en place du dispositif, d'autres vont être découverts au fil du temps, là encore au cours d'échanges pendant ou en dehors des séances, mais aussi par l'intermédiaire d'un questionnaire de fin d'année destiné à recueillir les impressions, commentaires, suggestions, pour l'année suivante.

L'idée fondatrice de ce dispositif est d'aider les étudiants de master en mathématiques et de faire progresser leurs compétences en mathématiques. Il s'agit d'être à leurs côtés pour comprendre une erreur ou démarrer un exercice.

### *2.1 Difficulté à commencer seul un exercice*

Ce dernier aspect avait largement été sous-estimé et il revient dans beaucoup de commentaires. A la question « *qu'est-ce que cette aide vous a apporté ?* », l'un d'eux va par exemple écrire : « *une aide plus personnelle face à des exercices infaisables pour moi ».* Ils mettent ainsi en évidence cette incapacité dans certains cas à commencer un exercice, parfois simplement parce qu'ils ne comprennent pas la consigne. Dès lors, le travail personnel important demandé en mathématiques devient impossible, malgré leur bonne volonté.

### 2.2 Un temps régulier d'aide, fixé dans l'emploi du temps

De ce fait, ce temps de travail régulier le jeudi soir pour travailler les mathématiques va devenir essentiel pour certains. Les commentaires dans ce sens sont nombreux. Ils mettent en évidence leurs difficultés à se mettre au travail chez eux pour faire des mathématiques,

> *« Ce temps m'a permis de travailler les mathématiques, chose que je n'arrivais pas à faire à la maison »*

leurs difficultés à gérer leur emploi du temps

> *« De la discipline, le fait de ne pas se laisser de choix : le jeudi soir nous faisions des mathématiques et rien d'autre »*

> *« Le fait d'avoir un temps banalisé pour travailler les mathématiques »*

> *« Le fait d'avoir un temps dans la semaine, consacré aux mathématiques en dehors des cours »*

> *« Ce temps était uniquement dédié aux mathématiques et m'a permis de me concentrer uniquement sur cette matière »*

et la nécessité pour eux d'être aidés

> *« Avoir un moment précis pour travailler les maths, avec de l'aide ».*

### 2.3 Déculpabilisation, normalisation des difficultés

Pendant les cours de mathématiques, il est parfois difficile pour l'enseignant de beaucoup interroger les élèves en difficulté. Le professeur pose une question, puis interroge ceux qui souhaitent répondre et qui sont sûrs en général de leur réponse, celle-ci étant *in fine* très souvent exacte. Ce comportement peut avoir un effet négatif pour certains. A force de n'interroger que les étudiants qui ont la réponse correcte, ceux qui sont en difficulté ont l'impression que tous les autres étudiants savent répondre et qu'ils sont seuls dans cette situation. Ce phénomène est renforcé par le fait que le programme annoncé est celui de collège (il n'y a que depuis un an qu'une petite partie du programme de seconde est ajoutée à ce programme), tout étudiant de master est alors considéré comme devant maîtriser ce contenu. Dans les séances d'aide au contraire, ils comprennent vite que leurs collègues ont les mêmes difficultés qu'eux et qu'ils sont loin d'être les seuls dans leur situation, en particulier parce que tous ceux qui sont à l'aise en mathématiques ont été invités à ne pas participer à ces séances.

Par ailleurs, non seulement beaucoup d'autres étudiants de master MEEF 1$^{er}$ degré ont les mêmes problèmes qu'eux, mais ceux de master MEEF 2$^{nd}$ degré rencontrent eux-mêmes des difficultés sur certains exercices proposés. Ils prennent conscience qu'ils ne réussissent pas, non pas parce qu'ils sont « *nuls* », mais parce que ce qui leur est demandé est parfois « *difficile* ». Cette observation les déculpabilise de ne pas tout savoir faire et cela devient normal.

### 2.4 Oser demander de l'aide

Confrontés en cours à des collègues à l'aise en mathématiques, ils n'osent pas poser des questions, parfois par peur du regard des autres, parfois simplement par peur de déranger. Pendant les séances d'aide, la règle du jeu est différente. Ces temps sont justement mis en place pour qu'ils puissent poser toutes les questions qu'ils souhaitent et avancer à leur rythme. *« Le fait d'avoir pu demander de l'aide sans avoir l'impression de déranger ou d'aller moins vite que d'autres »* est clairement exprimé par certains.

### 2.5 Des formulations différentes, complémentaires

D'autres mettent en évidence l'intérêt d'avoir un autre interlocuteur que l'enseignant de mathématiques. *« […] que ce soit d'autres étudiants qui nous expliquent ce que je ne comprenais pas car ils ont un vocabulaire et une façon différente d'expliquer les choses que l'enseignant ».* Même si ce que disent les étudiants de licence peut paraître moins rigoureux à l'enseignant et qu'il a envie de le compléter ou de le rectifier, il est parfois néanmoins plus efficace que son propre discours.

Parmi les étudiants de licence, certains ont eu plus de mal à mémoriser les connaissances mathématiques que d'autres, et ont développé des règles mnémotechniques un peu pour tout. C'est un outil que je n'ai absolument pas l'habitude d'utiliser en cours, et là encore, l'intervention des étudiants de licence est efficace.

### 2.6 Travail de groupe

Tout naturellement, certains étudiants s'isolent pour travailler, tandis que d'autres se regroupent, et prennent l'habitude de travailler les mêmes exercices au même moment en collaborant, réussissant ensemble ce qu'ils ne savaient pas faire seuls. Ils développent ainsi une certaine autonomie et ont de moins en moins besoin des étudiants de L3. Ils apprécient ce travail de groupe : *« Par ailleurs, nous pouvions nous mettre par groupes et échanger ensemble sur les exercices, et méthodes de maths ».*

## 3 Pour l'enseignant de mathématiques de master

Des effets se font sentir également pour l'enseignant de mathématiques en master MEEF 1er degré. Les séances d'aide ont lieu le jeudi soir et les cours de mathématiques en master le vendredi. Travaillés pendant les séances d'aide, certains exercices assez simples n'ont plus besoin d'être repris en cours. Cela libère du temps pour se consacrer à d'autres, plus difficiles. Il est également plus facile d'anticiper les exercices qu'il faut reprendre en cours quand ils ont systématiquement posé problème à tous les étudiants en aide.

# III - QUELQUES PHENOMENES OBSERVES

Les ***modalités de travail*** observées sont très ***variables***. Beaucoup d'étudiants de master profitent de ce temps pour faire leurs exercices mais d'autres se concentrent d'abord sur leur cours, posant des questions sur ce qu'ils n'ont pas compris. Souvent les étudiants travaillent sur leurs feuilles mais le tableau est également spontanément utilisé, tant par les étudiants de licence que de master, pour expliquer quelque chose à plusieurs étudiants en même temps par exemple. Parfois, les étudiants de licence préparent pour la séance suivante un petit cours sur un point ou un autre qui pose problème à plusieurs étudiants de master. Ce n'était pas dans le contrat de départ mais cela s'est fait tout naturellement et avec plaisir pour les étudiants de licence.

Les ***ambiances de salles*** sont très différentes d'une salle à l'autre ou d'une année à l'autre, en particulier du point de vue du volume sonore. Certaines salles sont très calmes, d'autres plutôt bruyantes, tout en étant tout aussi studieuses. Cela tient souvent à peu de choses, notamment à la personnalité des L3, ceux qui sont moins à l'aise pour prendre la parole étant plus facilement à même de chuchoter, ce qui est théoriquement la consigne donnée, quand les plus extravertis parlent souvent plus forts. Cela dépend également du mode de fonctionnement des étudiants de master, selon qu'ils travaillent plutôt seuls ou en groupes. Les étudiants ne se plaignent jamais du calme, même quand il a été imposé de manière un peu appuyée, ce qui a été le cas une fois par un étudiant de L3 qui avait peur au début d'année de se faire déborder, mais peuvent se plaindre du bruit :

> *« Le groupe s'est mis à se rassembler et discuter énormément. Je m'explique : dans mon groupe nous étions 7 étudiants et 3 accompagnateurs. Vers le milieu de l'année, les étudiants passaient l'intégralité du temps de mathématiques à discuter, dans une salle avec de l'écho et je n'arrivais plus*

*à travailler. Quand tu es seule parmi 7 élèves à ne pas discuter, demander aux autres de se taire c'est difficile. Donc j'ai arrêté de venir car je ne pouvais plus travailler ».*

Dans cette salle, les étudiants de master ont rapidement pris l'habitude de regrouper leurs tables pour faire un grand groupe et travaillaient les mathématiques toute la séance, mais en parlant à voix haute tout le temps, pénalisant ainsi sans s'en rendre compte une étudiante qui voulait travailler de manière plus autonome dans le calme.

Ces séances vont bien au-delà d'une collaboration entre étudiants de licence et étudiants de master de 17 h 15 à 19 h le jeudi soir. Bien souvent, en quittant la faculté plus tard, je rencontre des étudiants de licence et de master discutant dehors bien après 19 h. Des ***relations*** se créent vraiment à l'intérieur de chacun des groupes. Allant au-delà du dispositif mis en place, certains se sont organisés pour des cours particuliers des étudiants de licence à ceux de master, notamment à l'approche du concours. Dans le même esprit de relations amicales, une année, le temps de 17 h 15 à 17 h 30 était systématiquement réservé au goûter préparé par les étudiants de master. Nous pouvons citer aussi l'exemple des étudiants de licence qui se sont organisés pour obtenir les résultats au concours des étudiants qui avaient suivi l'aide, alors que les séances étaient terminées depuis un certain temps déjà.

Mais quelle que soit l'ambiance de la salle, il y a toujours une intensité de travail importante les soirs d'aide au second étage de la faculté d'éducation.

## IV - EFFICACITE ET LIMITES

Il est cependant difficile d'évaluer l'efficacité du dispositif. On peut penser que si les étudiants continuent toute l'année, ce n'est pas seulement parce qu'ils se sont engagés, mais aussi parce qu'ils y trouvent un intérêt personnel. Une étudiante de seconde année de master m'indique par exemple lors de son inscription au dispositif en M2 :

*« L'aide en maths m'a vraiment beaucoup aidée l'année dernière. Cela m'a permis de maintenir un rythme régulier et surtout de ne pas rester bloquée sur certaines notions. Avant ces séances, je ne pouvais pas évoluer sur certains thèmes toute seule (même en ayant à disposition mes cours) ».*

Je peux citer également le cas d'une autre qui, déjà titulaire d'un master, a présenté et obtenu le concours du CRPE en M1. En reconversion professionnelle, cette étudiante était loin du monde scolaire et des mathématiques, en particulier en début d'année. Elle a participé au dispositif et a beaucoup travaillé toute l'année. Il est bien sûr difficile de mesurer la part du dispositif dans sa réussite.

A côté des multiples exemples de retours positifs, il faut néanmoins pointer les échecs : telle étudiante qui arrête parce qu'il y a trop de bruit, telle autre parce que « *le fait que cette aide soit proposée souvent lorsqu'on avait des journées bien chargées donc nous étions fatigués et parfois démotivés d'y aller* ». Le planning des jeudis est fait en choisissant les jeudis où les étudiants de master ont cours jusqu'à 17 h pour leur éviter d'attendre sans cours ou de revenir exprès en fin d'après-midi. L'inconvénient est alors qu'ils ont généralement eu six heures de cours dans leur journée avant l'aide.

Une autre étudiante, en grande difficulté en mathématiques, a pu écrire dans ses réponses au questionnaire : « *Mon niveau en maths m'a incité à ne plus venir* ». Elle m'a expliqué qu'il y avait trop d'écart entre ce qu'elle était capable de faire seule et ce qu'on attendait d'elle. De ce fait, elle aurait dû mobiliser un étudiant de L3 quasiment en permanence et n'a pas osé. Je ne me suis rendue compte de cela qu'au moment du bilan en fin d'année scolaire. C'est d'autant plus dommage que cette année-là, les effectifs de L3 auraient permis d'affecter un L3 pour elle seule.

Quelques limites au bon déroulement de ce dispositif doivent par ailleurs être mentionnées. La première concerne le difficile équilibre à trouver entre l'effectif des étudiants de licence et celui des étudiants de master. L'expérience semble indiquer que 2 étudiants de licence pour 12 étudiants de master est un bon ratio mais de nombreux facteurs peuvent le rendre inadéquat : l'abandon de certains étudiants de master en cours d'année, même si ce n'est pas dans le contrat de départ, la grande autonomie acquise parfois par les étudiants de master (un groupe finissait pas s'entraider de telle sorte qu'ils ne faisaient presque plus appel aux étudiants de licence) ou encore la trop grande difficulté de certains étudiants de master qui auraient tendance à monopoliser les étudiants de licence.

Une seconde limite est la capacité des étudiants de licence à résoudre certains exercices, à comprendre et expliquer aux étudiants de master leurs éventuelles erreurs, à se mettre au niveau des étudiants ou à prendre le temps de comprendre quelles méthodes de résolution peuvent être attendues à ce niveau, etc.

Mais la plus grande limite est peut-être la manière dont les étudiants de L3 « aident » ceux de master et dont finalement on ne sait pas grand-chose. Pour reprendre des commentaires d'un relecteur de cet article, est-ce que « les L3 donnent directement la solution aux M1 en indiquant certes tous les détails mais sans laisser un espace de liberté aux M1 pour chercher après avoir reçu d'un L3 une simple indication » ou bien est-ce que cet espace de liberté pour chercher est systématiquement mis en place par les L3 ? « Une réelle aide ne consisterait-elle pas à soulever un seul angle du voile voire deux et que le M1/2 soulève les deux ou trois restants ? Expliquer ce n'est pas forcément tout dévoiler et enseigner non plus. Cela peut aussi faire partie des compétences à acquérir pour n'importe quel enseignant de savoir ne soulever qu'un coin du voile ». Les observations effectuées ne permettent pas actuellement de répondre à cette question de manière objective. Quelques remarques ont été faites en ce sens pendant les séances, mais pas de façon systématique, de sorte qu'à ce stade, nous ne pouvons qu'espérer que le travail soit bien mené dans cet esprit par les L3. C'est certainement une piste d'amélioration du dispositif à travailler.

# V - ANALYSE AU REGARD DE DEUX ARTICLES DE RECHERCHE

Ce dispositif présenté, il est intéressant de le mettre en lien avec des dispositifs proches qui ont pu être analysés par ailleurs au travers d'articles de recherche. L'objectif est de relire les choix effectués et ceux qui pourraient être faits afin d'améliorer les séances d'aide.

## 1 Tutorat

### 1.1 Un manque à envisager : la méthodologie disciplinaire ?

Notre dispositif peut être comparé au tutorat qui a pu être mis en place dans les universités, notamment auprès des étudiants de première année. Je m'appuierai dans cette partie sur (Gerbier & Sauvaître, 2003, p. 17-27), où ils effectuent « *une classification des tutorats* ». Ils développent notamment comment le tutorat peut « *permettre de combler un certain nombre de manques* ». Ils définissent quatre grandes « *familles de manques* », dont « *le manque de connaissances et compétences disciplinaires* ». C'est dans cette famille que se situe notre organisation, les autres types de manques concernant plutôt les étudiants à l'entrée en première année d'université qu'à l'entrée en master : « *les méthodes et les outils de travail, l'adaptation à la vie universitaire, le projet personnel et professionnel* ».

Le tableau qui suit présente les différents aspects du « *manque de connaissances et compétences disciplinaires* » et met en parallèle un exemple de commentaire des étudiants de master sur ce sujet. Il met en évidence qu'une grande partie de ces manques est prise en charge par l'aide mise en place.

| Extrait de Gerbier & Sauvaître, 2003, p. 21 | Extrait des commentaires des étudiants de master dans le questionnaire d'évaluation du dispositif de fin d'année en réponse à la question : « *Qu'avez-vous particulièrement apprécié ?* » |
|---|---|
| *Nous allons séparer en cinq entités ce qui concerne plus spécifiquement un champ disciplinaire. Nous distinguerons donc :* | |
| *– II.1. La méthodologie disciplinaire* | *« Qu'il y ait quelqu'un disponible pour nous montrer une méthode de résolution de l'exercice »* |
| *– II.2. L'accroissement des horaires disciplinaires* | *« L'organisation des cours ne me convenait pas forcément, trop de documents sans même d'explicitations, de révisions mais l'aide en maths a largement rattrapé cela »* |
| *– II.3. La distanciation disciplinaire* | |
| *– II.4. Le renforcement disciplinaire* | *« Ce temps m'a permis de mieux comprendre certaines notions vues en cours »* |
| *– II.5. Le rattrapage disciplinaire* | *« Revoir certaines notions »* |

*Tableau 1. Les différents apports du tutorat disciplinaire*

Le renforcement et le rattrapage en mathématiques sont clairement présentés comme les objectifs de l'activité. De même, l'accroissement des horaires disciplinaires est un objectif à l'origine du dispositif : si les volumes horaires de mathématiques en Master MEEF étaient plus importants, il serait plus facile de prendre du temps avec chacun, et en particulier avec ceux qui sont en difficulté. Il n'est donc pas surprenant de trouver des commentaires sur ce sujet.

*A contrario*, prendre de la distance sur la discipline n'a jamais été envisagé comme un objectif de l'activité dans la mise en place de ce dispositif, et n'apparaît jamais dans les commentaires des étudiants de master. Il n'est pas certain d'ailleurs que les étudiants de licence aient vraiment la possibilité d'aider les étudiants de master sur ce point. En effet, ils accumulent des connaissances et des compétences techniques en licence mais un gros travail de prise de recul sur leurs connaissances doit être mis en place en master MEEF second degré pour les futurs professeurs de collège et lycée. Cet aspect n'est donc pas pris en charge par l'aide et il nous paraît difficile de faire évoluer le dispositif en ce sens, même si ce serait certainement très utile, pour tous les étudiants, de L3 comme de master.

La méthodologie disciplinaire n'a pas non plus été envisagée comme un objectif. Mais la question de savoir si ça ne pourrait pas, ou ne devrait pas être ajouté semble légitime. En effet, certains étudiants de master n'ont pas fait de mathématiques depuis leur classe de première au lycée. S'ils ont théoriquement développé des compétences méthodologiques dans les disciplines de leur parcours de licence, elles ne sont en général pas directement transférables aux mathématiques. Au contraire, pour réussir leur licence, les étudiants de MIASHS ont dû développer des compétences en mathématiques et cela ne se fait pas sans un minimum de méthodologie. De nombreux étudiants de première année mettent souvent un semestre à comprendre comment travailler les mathématiques pour être efficaces et développent petit à petit leur propre mode de fonctionnement. Cette piste mérite d'être explorée, en proposant par exemple aux étudiants de master et de licence de réfléchir ensemble sur la manière de s'organiser pour travailler les mathématiques.

Gerbier & Sauvaître (2003, p. 22-23) mettent également en avant dans la méthodologie disciplinaire les méthodes pour résoudre des problèmes. Cet aspect est explicitement pris en charge en cours en M1. Par exemple, on va poser la question des différentes méthodes pour comparer des nombres rationnels à partir de leur écriture fractionnaire, ou encore des différentes pistes qui permettent de déterminer des longueurs dans un problème de géométrie. Néanmoins, c'est une question qu'il est pertinent de se poser de façon récurrente face à un problème de mathématiques. Elle n'est pas systématiquement perçue par les étudiants de licence. Il peut donc être intéressant d'attirer leur attention sur ce point, de sorte qu'ils essaient de façon régulière d'expliciter, voire mieux, de faire expliciter aux étudiants de master la méthode qui a été employée dans tel exercice quand celui-ci a été résolu, ou à quelles méthodes on peut penser pour résoudre tel autre, avant sa résolution, ou encore sur quel(s) indice(s) on peut s'appuyer pour démarrer une résolution, de sorte que ces méthodes puissent être mieux repérées et réinvesties lors de la résolution d'un autre exercice.

### *1.2 Renforcement et rattrapage disciplinaires : une image négative ou positive ?*

Gerbier & Sauvaître (2003, p. 23-24) expliquent par ailleurs que renforcement et rattrapage disciplinaires ont très majoritairement une image négative pour les étudiants. Pour le renforcement, « *le public privilégié est constitué de ceux « qui n'ont pas compris du premier coup »* ». Pour le rattrapage,

> *« par contre, il se peut que certains élèves maîtrisent très mal un prérequis. Des séances de rattrapage peuvent permettre de combler cet handicap ponctuel, la principale difficulté étant d'arriver à détecter ceux à qui cela serait utile, et à les persuader d'y participer. Car ce type d'activité est très fortement connoté négativement et la plupart des étudiants concernés préféreront nier le problème plutôt que « d'avouer » de tels manques ».*

Cette connotation négative ne s'exprime quasiment pas dans le cadre de notre dispositif. Au contraire, les étudiants de master s'inscrivent volontiers ; certains même choisissent ce centre de formation parce qu'ils ont été informés de l'existence de cette aide lors des portes ouvertes par exemple et souhaitent y participer. La grande majorité exprime sa reconnaissance pour la mise en place de ces séances. Il est probable que l'enjeu est plus fort que leurs éventuelles réticences face aux mathématiques : ils veulent obtenir le CRPE et se savent en difficulté ou parfois simplement en faiblesse en mathématiques et veulent mettre toutes les chances de leur côté pour atteindre cet objectif.

Nous retiendrons de cet article sur le tutorat une piste de travail pour améliorer le dispositif : faire travailler les étudiants sur la méthodologie mathématique, tant du point de vue de la manière de travailler les mathématiques que de la manière de résoudre tel ou tel type de problème.

## 2 Accompagnement

Un autre regard nous semble adapté à notre dispositif, celui de l'accompagnement. Nous allons nous appuyer sur (De Ketele, 2014, p. 73-85) pour approfondir ce point de vue. Il montre en particulier en quoi l'accompagnement contribue à développer, tant chez l'étudiant accompagné que chez l'accompagnateur, une « *professionnalité émergente* ».

### *2.1 Une modélisation*

Sa modélisation distingue quatre situations :

| Partir du déjà là | | | |
|---|---|---|---|
| **Référentiel** | *Situation A*<br>«ramener dans le chemin»<br>Difficultés académiques<br>→ remise à niveau<br>Accompagnateur<br>= un maître compagnon réviseur<br>Accompagnement= remise à niveau | *Situation C*<br>«faire découvrir un chemin oublié ou non reconnu»<br>Problématique identitaire → construction identitaire<br>Accompagnateur= un maître compagnon accoucheur<br>Accompagnement= révélation, reconnaissance | **Référentiel** |
| **… fixé** | | | **… ouvert** |
| | *Situation B*<br>«faire découvrir un nouveau chemin»<br>Problème académique nouveau → résolution créative<br>Accompagnateur= un maître compagnon artisan<br>Accompagnement= initiation | *Situation D*<br>«s'aventurer ensemble dans de nouveaux chemins»<br>Un inédit à problématiser → récit d'une problématisation nouvelle<br>Accompagnateur= un maître compagnon partenaire<br>Accompagnement= co-construction | |
| **Vivre du nouveau** | | | |

*Tableau 2. Une tentative de modélisation de quatre formes d'accompagnement. (De Ketele, 2014, p. 77)*

Notre dispositif relève de la situation A.

> *Un étudiant (ou un groupe restreint d'étudiants) éprouve une difficulté particulière de nature académique, ce qui nécessite un « accompagnement » pour lever cette difficulté. C'est par exemple le cas lorsqu'une partie de la matière transmise (dans un cours magistral ou un MOOC) n'a pas été comprise, ou lorsque des techniques ou des applications vues antérieurement sont exécutées incorrectement. (De Ketele, 2014, 74)*

Les deux aspects précédemment pris en compte, renforcement et rattrapage disciplinaires, caractérisent cette situation. Notre dispositif peut ainsi être considéré comme un dispositif d'accompagnement.

### 2.2 L'accompagnement : une rencontre

De Ketele (2014, p. 75) met par ailleurs l'accent sur le fait que

> *« l'accompagnement est une rencontre entre deux personnes (éventuellement plusieurs, mais peu nombreuses comme l'exige l'idée de rencontre), ou l'accompagnateur jouit d'un statut particulier aux yeux de l'accompagné (Vial et Caparros-Mencacci, 2007) »*

> *« dans cette rencontre, accompagnateur et accompagné(s) partagent des préoccupations communes […] tout en ayant des parcours différents, des expériences diverses, des motivations différenciées ; c'est ce qui fait la richesse de la rencontre ».*

Nous avons explicité précédemment comment cette rencontre se manifeste dans les séances d'aide, notamment par des relations amicales qui vont bien au-delà du dispositif lui-même, renforçant notre idée que le modèle de l'accompagnement est adapté à notre analyse.

### 2.3 L'autonomie des acteurs

Il est par contre un aspect sur lequel notre dispositif ne suit pas tout à fait les caractéristiques mises en avant par (De Ketele, 2014, p. 76) : l'autonomie des protagonistes. Pour lui, dans la situation A qui nous concerne, « *l'accompagné est en position de « faible » autonomie et l'accompagnateur est « devant »* ». Dans notre aide, l'accompagné a au contraire une totale autonomie sur ce qu'il va faire pendant la séance. C'est lui qui choisit s'il veut travailler son cours ou ses exercices, tel chapitre ou tel autre. Cette autonomie donnée aux étudiants de master est probablement un des éléments qui favorise la réussite du dispositif et le ressenti positif des étudiants de master. Un autre point de vue peut néanmoins être pris sur cette autonomie, dont nous avons parlé précédemment : l'autonomie dans la résolution des problèmes. Il est possible que certains L3 guident énormément lors de la résolution d'un exercice. Les amener à réfléchir aux indications à donner sans donner toute la solution pour permettre aux étudiants de master de s'engager dans la résolution et résoudre eux-mêmes une partie significative du problème est sans aucun doute une piste de travail pour augmenter encore cette autonomie de l'accompagné.

L'accompagnateur, quant à lui, se contente de répondre aux questions, d'intervenir à la demande, mais sans nécessairement la solliciter. Il doit seulement s'assurer d'être capable de résoudre et d'expliquer les exercices proposés. Mais pourquoi ne pas favoriser également l'autonomie des accompagnants ? L'utilisation de l'option « initiative étudiante » pour cela n'en serait que plus légitime. Afin de leur permettre d'être plus acteurs de ces séances, on peut suggérer aux étudiants de licence de réfléchir à la manière dont ils peuvent au mieux aider ceux de master, aux ***propositions*** qu'ils peuvent leur faire pour améliorer encore l'efficacité de ces séances.

### 2.4 Une professionnalité émergente

De Ketele considère que même la situation A permet le

> « *développement d'une professionnalité émergente chez l'accompagné […] dans la mesure où la remise à niveau n'est considérée que comme une étape parmi d'autres du développement d'une professionnalité émergente chez l'accompagné* ». (De Ketele, 2014, p. 81)

Mais c'est pour l'accompagnateur dans notre situation que ce développement est le plus manifeste : « *Celui-ci capitalise des savoirs expérientiels sur les démarches les plus efficaces face à des étudiants en difficulté et selon les difficultés académiques identifiées* ». C'est un des arguments d'ailleurs qui convainc les étudiants de licence de s'investir dans le dispositif. Ce développement pourrait être encore plus manifeste en travaillant explicitement avec les L3 la manière d'aider les Master comme nous l'avons souligné précédemment. Mais cela va bien au-delà. Nous avons développé au paragraphe II. 1 tous les effets produits par ce dispositif sur les étudiants de licence, qui participent à ce développement d'une professionnalité émergente chez l'accompagnateur, en particulier pour ceux qui se dirigent vers le second degré :

- Découvrir le programme de collège
- Découvrir les difficultés des élèves de collège
- Développer des compétences d'analyse des difficultés des élèves et d'explication aux élèves
- Prendre conscience de la nécessité pour l'enseignant de maîtriser les contenus enseignés
- Collaborer
- Prendre confiance en soi
- Apprendre à parler à des élèves, à s'adapter à chaque élève, à être patient, avoir de l'empathie, …

Cette liste pourrait certainement être encore allongée. Mais ce développement professionnel pour l'accompagnateur peut néanmoins être amélioré. Une idée a en effet émergé lors du débat à la suite de la communication : exploiter ces séances d'aide dans le cadre de la formation en didactique, en licence, des futurs professeurs de collège-lycée. Il s'agit de s'appuyer sur les situations vécues, les difficultés rencontrées, pour les analyser et s'en servir d'exemples pour nourrir certains aspects développés dans le cours de didactique des mathématiques. Cela serait certainement un bon moyen de développer encore cette « *professionnalité émergente* ».

## VI - CONCLUSION : DES ADAPTATIONS POSSIBLES

La discussion qui s'est déroulée suite à la présentation de la communication lors du colloque et l'analyse des deux articles sur le tutorat et l'accompagnement nous invitent à envisager des améliorations du dispositif. Je remercie vivement les participants de leurs suggestions.

L'ambiance des salles est différente, et certains peuvent ne pas se sentir bien dans celle où ils sont, parce qu'ils voudraient travailler plus en groupes, ou au contraire être plus au calme. Par ailleurs, l'autonomie des étudiants de licence est peu développée. Faire un bilan au bout de 3 ou 4 séances avec l'ensemble des étudiants engagés dans l'aide, tant de licence que de master, pourra en partie diminuer ces deux difficultés. Le débat entre eux pourra permettre d'affiner le dispositif en fonction des demandes des uns et des autres, de permettre à certains de changer de salle ou d'inviter les étudiants de licence à proposer des scénarios pédagogiques pour répondre à telle ou telle difficulté des étudiants de master.

Le travail de méthodologie mathématique peut s'inscrire dans ces séances d'aide et est actuellement sous-exploité. Il sera donc intéressant de faire réfléchir les étudiants de licence sur les aides qu'ils peuvent apporter spécifiquement de ce point de vue. Un autre aspect a été soulevé dans les lignes précédentes : inviter les formateurs de didactique de licence à exploiter le travail effectué et les difficultés rencontrées par les étudiants de licence en cours de didactique. Dans le même ordre d'idée, un travail spécifique avec les L3 sur le développement de l'autonomie des étudiants de master dans la recherche de la résolution d'un problème peut être fait, en cours de didactique ou en parallèle de ces séances d'aide, de sorte d'éviter d'être dans l'ostension (montrer comment il faut faire) mais plus dans l'accompagnement (permettre de trouver le chemin pour faire).

D'autres adaptations ont été discutées lors des échanges pendant la communication, en particulier au sujet de la population des accompagnateurs. Il n'est en effet pas toujours possible de faire interagir les étudiants de licence scientifiques et ceux de master MEEF premier degré. Les étudiants de master MEEF second degré, ou encore les étudiants de master MEEF premier degré scientifiques peuvent également y trouver un intérêt pour eux-mêmes et être des ressources pertinentes dans le cadre de la mise en place d'un tel dispositif. Une autre piste a été l'objet d'une discussion : faire vivre ce dispositif, non pas de manière facultative en dehors des cours, mais pendant les cours en master MEEF premier degré, en s'appuyant sur les quelques étudiants qui ont une formation plus scientifique.

## VII - BIBLIOGRAPHIE

Gerbier, Y., Sauvaître, H. (2003). Une classification des tutorats. *Recherche & Formation, N°43, Entrer à l'université. Le Tutorat méthodologique.* pp. 17-27.

De Ketele, J.-M. (2014). L'accompagnement des étudiants dans l'enseignement supérieur : une tentative de modélisation. *Recherche & Formation, N°77. La posture d'accompagnement dans l'enseignement supérieur.* pp. 73-85.

# COMPARAISON DE DEUX SÉANCES D'UN DISPOSITIF PRÉVENTIF VISANT LA PRÉPARATION A LA MODELISATION D'UNE SITUATION-PROBLEME

**Christophe DRACOS**
Conseiller pédagogique départemental mathématiques
Zone Marseille
Laboratoire ADEF
Christophe.dracos@ac-aix-marseille.fr

**Karine MILLON-FAURÉ**
MCF, AMU
Laboratoire ADEF
karine.millon-faure@univ-amu.fr

**Claire GUILLE-BIEL WINDER**
MCF, AMU
Laboratoire ADEF
claire.winder@univ-amu.fr

**TERESA ASSUDE**
PU,
AMU
Laboratoire ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Résumé
Notre communication présente l'analyse comparée de deux séances d'APC (Activités pédagogiques complémentaires) mises en œuvre par deux enseignantes de CM1 dans le cadre *d'un dispositif préventif* (Assude et al., 2016 a et b ; Millon-Fauré et al., 2018a et b) : contrairement aux séances de soutien habituelles qui consistent à mettre en place une remédiation par rapport à des difficultés constatées, il s'agit ici de préparer, avant la séance en classe, un groupe d'élèves qui, d'après les enseignantes, risquent de rencontrer des difficultés lors de la résolution du problème en classe entière. Les deux enseignantes observées ont participé avant cela à une même formation concernant ce dispositif préventif et la situation-problème qui sera traitée en classe est par ailleurs identique. Pourtant des différences apparaissent dans les choix effectués par chacune d'elles, notamment en ce qui concerne la préparation des élèves à la modélisation de la situation. Nous cherchons à analyser ces variations et à étudier les répercussions qu'elles pourraient avoir sur l'activité mathématique des élèves.

## I - INTRODUCTION

Les programmes d'enseignement soulignent le rôle central de la résolution de problèmes comme étant « au cœur de l'activité mathématique des élèves tout au long de la scolarité obligatoire. ». (MEN, 2018, p.15), en lien avec de nombreuses autres disciplines. De plus, le guide sur la résolution de problèmes mathématiques au cours moyen indique « quatre phases fondamentales pour la résolution de problèmes : comprendre, modéliser, calculer et répondre. ». (MENJS, 2022, p.42). La modélisation apparaît ainsi comme un élément incontournable pour résoudre un problème. Pourtant, son enseignement s'avère parfois difficile à organiser pour les enseignants autant dans la mise en œuvre que dans les aides à apporter aux élèves. Par exemple au moment de la séance en classe entière, l'enseignant essaie d'aider les élèves face aux difficultés qui peuvent émerger : compréhension de la consigne, difficultés organisationnelles de planification, mobilisation d'objets anciens, utilisation défaillante d'un matériel, etc. Or ces aides sont parfois peu efficaces compte tenu de leurs origines diverses et du manque de temps que peut accorder l'enseignant à une aide individualisée au moment d'une séance en classe entière. Notre recherche porte sur l'étude de l'aide qui peut être apportée aux élèves en difficultés en mathématiques, dans le cadre de la résolution de problèmes et plus exactement la modélisation d'un problème, au cours de séances d'activités pédagogiques complémentaires (APC). Habituellement ces séances en petits groupes, qui viennent s'ajouter aux 24 heures hebdomadaires d'enseignement, constituent une forme de remédiation suite à des difficultés constatées lors de la séance avec le groupe classe. Elles interviennent a posteriori par rapport à la séance de classe et amènent par conséquent l'élève à travailler sur des situations et des objets de savoir qui ne sont pas nécessairement repris dans les séances suivantes. Nous cherchons au contraire à préparer un groupe restreint d'élèves à la séance de classe qui va suivre, en mettant en place, lors des APC, des « dispositifs préventifs ». Pour cela nous menons un travail collaboratif avec des enseignantes d'une même école.

Nous présentons ici le travail proposé par deux de ces enseignantes pour préparer à une séance de résolution de problèmes additifs. Ces enseignantes ont suivi la même formation concernant le dispositif préventif et elles ont choisi ensemble la situation qu'elles allaient présenter en classe entière. Pourtant des différences sont apparues, notamment au cours de la préparation des élèves dans la séance d'APC. Après avoir présenté nos appuis théoriques et notre méthodologie, nous cherchons dans cet article à analyser ces variations et à étudier les répercussions qu'elles pourraient avoir sur l'activité mathématique des élèves.

## II - CONTEXTE THEORIQUE

### 1 Les systèmes didactiques

Notre recherche se place dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998). Notre dispositif d'aide s'organise autour d'un Système Didactique Principal (SDP), et de Systèmes Didactiques Auxiliaires (SDA). Le SDP comprend un enseignant, le groupe classe et des enjeux de savoir tandis que les SDA sont composés d'un intervenant (généralement l'enseignant de la classe), d'un groupe d'élèves et de certains des savoirs identifiés. Les SDA sont au service du SDP et dépendent de ce dernier, tant au niveau de l'enjeu de savoir que du temps didactique. En effet, l'avancée du temps didactique (Chevallard et Mercier, 1987, p.3) correspond à celle du savoir enseigné qui progresse par l'introduction successive de nouveaux objets d'enseignements et celle-ci ne peut s'effectuer qu'en classe entière, dans le SDP. Nous mesurons les avancées dans le SDA en étudiant la progression du temps praxéologique (Assude et al., 2016b) qui rend compte du travail effectué sur l'une au moins des composantes de la praxéologie (Chevallard, 1999) : le type de tâches, les techniques, les technologies ou la théorie.

Notre dispositif préventif se compose d'un SDP et de deux SDA (figure 1) : un SDA pré, en amont de la séance de classe qui permet de préparer les élèves à la séance qui va suivre en classe entière et un SDA post, après la séance de classe, afin de s'assurer que les savoirs rencontrés ont bien été assimilés et peuvent être transférés dans une autre situation. Dans notre étude, les SDA sont mis en œuvre lors des temps d'activités pédagogiques complémentaires, dont l'objectif est d'organiser un accompagnement différencié pour un groupe restreint d'élèves identifiés par l'enseignant de la classe comme susceptibles de rencontrer des difficultés lors de la rencontre avec la situation-problème en classe entière. Par ailleurs, pour cet article, nous nous focaliserons exclusivement sur le SDA pré et le SDP.

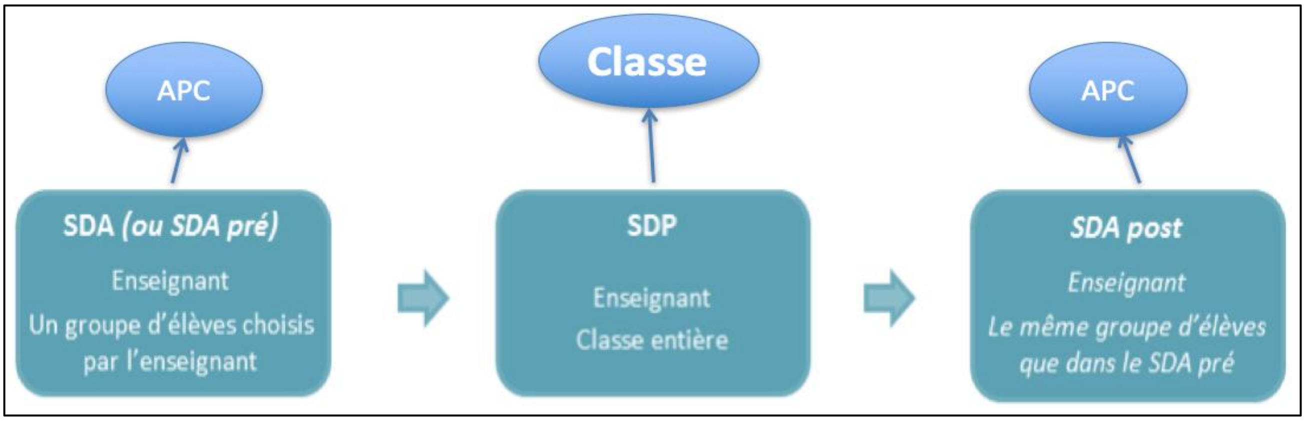



*Figure.1 : Organisation globale des dispositifs préventifs.*

## 2 Les fonctions du SDA pré

Notre dispositif remplit plusieurs fonctions (Theis et al., 2014 et 2016 ; Assude et al., 2016a et b ; Millon-Fauré et al., 2018a et b) que nous décrivons en nous appuyant sur le triplet de genèse (Sensevy et al., 2000). Pour le SDA pré, nous distinguons notamment trois fonctions : mésogénétique, chronogénétique et topogénétique. Nous les présentons dans ce qui suit.

**Fonction mésogénétique**. Durant le SDA pré, les élèves travaillent sur les objets du milieu qui vont apparaitre dans la séance avec le groupe classe, notamment la consigne : « De quoi s'agit-il ? Que doit-on faire ? » Les élèves ne « font » pas encore mais ils commencent à réfléchir aux diverses techniques possibles. Les objets de savoirs anciens peuvent être réactivés pour être mobilisables lors du SDP. En effet, même si ces savoirs devraient être maitrisés par les élèves pour servir de points d'appui, ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, le travail effectué lors du SDA peut permettre aux élèves en difficulté de disposer de ces savoirs anciens nécessaires à la résolution des problèmes.

**Fonction chronogénétique.** L'un des objectifs du SDA pré est de donner plus de capital-temps (Assude, 2005) aux élèves en difficulté pour qui le rythme du SDP est trop rapide, mais la spécificité du dispositif préventif réside dans le fait que ce temps est donné en amont de la séance de classe afin de leur donner un peu d'avance par rapport à leurs camarades. La rencontre « avant » avec les problèmes peut leur permettre de s'engager en classe dans la résolution des problèmes, comme les autres. Cependant, le temps didactique ne doit pas avancer durant la séance d'APC, sinon la séance de classe aurait peu d'intérêt pour les élèves du SDA. Pour ce faire, il ne doit pas y avoir de rétroactions, ni du milieu, ni de l'enseignant, pas plus que d'institutionnalisation des objets de savoir qui sont en jeu lors du SDP. À l'inverse, le temps praxéologique doit progresser pour les élèves du groupe restreint : durant l'APC, les élèves présents vont découvrir la situation, réfléchir aux techniques associées à ce type de tâches, ce qui leur permet de mieux appréhender la praxéologie visée dans le SDP.

**Fonction topogénétique.** Ce dispositif aide les élèves à (re)prendre « une place d'élève » non seulement dans le SDA en amont de la séance de classe mais surtout dans le SDP. Les élèves passent d'une attitude passive et attentiste à un comportement actif. Ils prennent une position dans le groupe classe, en proposant, par exemple, des techniques possibles. Tout ceci semble contribuer à redonner à l'élève en difficulté de la « valeur sociale… dans le cadre de la classe ». (Tambone, 2014, p.54), en étant synchrone avec le temps didactique de la classe, voire en le faisant progresser.

## 3 Modéliser

Dans le cadre des enseignements mathématiques, le verbe « modéliser » peut se définir de différentes manières. Nous présentons ici notre acceptation de ce terme et nous tentons de mieux cerner les différences qui peuvent exister entre modélisation et représentation lors des résolutions de problèmes.

Nous reprenons à notre compte la définition de Laborde qui explicite qu'« Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en en retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. ». (Laborde, 1992, p. 3). De cette citation, nous retenons l'idée d'identification de certains objets et surtout des relations entre ces objets. En ce sens, Chevallard (1989) pointe schématiquement trois étapes dans le processus de modélisation :

1. Identification des variables pertinentes.
2. Construction d'un modèle en établissant les relations entre ces variables.
3. Production de connaissances sur le système en « travaillant » sur le modèle (phase mathématique).

Ainsi, à partir de ces deux auteurs, nous définissons le terme modéliser comme l'identification des *variables pertinentes* pour l'étude du problème et l'établissement des *relations* (mathématiques ou autres) entre ces variables qui permettront ensuite de résoudre le problème.

# III - METHODOLOGIE

## 1 Organisation générale

Notre travail collaboratif avec quatre enseignantes de cycle 3, s'est déroulé durant l'année scolaire 2021 – 2022, et il a été décidé de se centrer sur la résolution de problèmes. L'échantillon est constitué de quatre classes avec des élèves de CM1 et CM2, soit 80 élèves au total. Un pré-test a tout d'abord été proposé afin de mieux cerner les difficultés des élèves concernant la résolution de problèmes. Les enseignantes ont suivi la même formation d'une durée de trois heures concernant le dispositif préventif dans le cadre d'une constellation[1]du plan mathématique. Cette dernière est une modalité de formation continue d'une durée de 30 heures sur une année scolaire dont 18 heures hors temps de classe pour des apports didactiques et pédagogiques, de l'analyse de pratiques, etc. Ce temps de formation a été pris en charge par les chercheurs avec l'appui d'un support visuel. Les chercheurs ont répondu à l'ensemble des questions sur les problèmes mathématiques (types de problèmes, difficultés des élèves, etc.), sur la modélisation et sur les dispositifs préventifs. Des exemples de ce type de dispositif ont quelquefois été donnés pour aider à la compréhension. Suite à cette formation, les enseignantes ont alors choisi les situations qu'elles voulaient mettre en place dans le SDP et le travail qu'elles voulaient proposer dans le SDA afin de préparer certains élèves à cette séance de résolution de problème. Deux d'entre elles (exerçant en classes de CM1 et CM2) ont accepté que leurs séances de classes et les séances d'APC correspondantes soient enregistrées et ces films ont été analysés. Les productions des élèves ont également été recueillies, ce qui a permis de compléter les données étudiées pour cette communication.

## 2 Les pré-tests comme indicateur des difficultés

Pour mettre en place des dispositifs préventifs centrés sur la résolution de problèmes, deux questions se posent : quels problèmes numériques proposer en classe ? Quel contenu proposer en APC pour aider les élèves en difficultés sans résoudre le problème lui-même ? Le choix a donc été fait de proposer aux élèves un pré-test afin de mieux cerner les difficultés et ainsi pouvoir les préparer en APC à la séance de résolution de problèmes en groupe classe. Les pré-tests portent dans un premier temps sur des problèmes du champ additif puis, dans un second temps, sur des problèmes du champ multiplicatif. En effet, les classes se situent en REP et il semblait utile de revenir sur des problèmes du champ additif en début d'année. Ces tests se basent sur les catégories de problèmes définies par Vergnaud (1990) en déclinant toutes les situations possibles : composition de mesures (ou partie et tout), transformation d'état, comparaison d'état, composition de transformation (Annexe 1).

## 3 Résultats des pré-tests

Le tableau ci-dessous (Figure 2) illustre les résultats obtenus en présentant trois exemples de problèmes proposés avec le taux de réussite moyen obtenu par l'ensemble des élèves.

[1] Ce dispositif émanant du rapport de Cédric Villani et Charles Torossian « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » (2018) permet de proposer un accompagnement des pratiques d'un groupe d'enseignants de l'école primaire en mathématiques et en français à l'échelle d'une année scolaire.

| Type de problème | Recherche de … | Énoncé | Taux réussite |
|---|---|---|---|
| Transformation d'état | État final | P3 : Le compteur de la photocopieuse marque 132. La maîtresse tire 16 photocopies. Maintenant, que marque le compteur ? | 12,4 % |
| Comparaison d'état | Un des états | P11 : Au cycle 2 de mon école, il y a 12 élèves de moins qu'au cycle 3. Il y a 59 élèves au cycle 2. Combien y en a-t-il au cycle 3 ? | 20,2 % |
| Composition de transformation | Transformation composée | P16 : Pierre a gagné 27 billes en deux parties. Il en a gagné 15 dans une des parties. Que s'est-il passé à la deuxième partie ? | 36,4 % |

*Figure 2. Résultats obtenus sur trois exercices du pré-test.*

Ces résultats montrent des difficultés particulièrement marquées lors des situations de transformations d'un état et c'est la raison pour laquelle le collectif (enseignantes et chercheurs) a décidé de mettre la focale sur cette catégorie de problèmes.

### 4 La situation choisie pour le SDP

Les deux enseignantes observées ont choisi la même situation pour la séance de classe, à savoir un problème de transformation d'état où des passagers montent ou descendent d'un bus. Plusieurs problèmes sont ensuite déclinés à partir de cette situation avec recherche de l'état final, initial ou de la transformation. La ligne de bus est composée de noms d'arrêts familiers des élèves. Les formulations des énoncés ne sont pas identiques mais sont très proches. Les variables numériques sont toujours des nombres inférieurs à 100. Nous considérons donc que ce qui est proposé aux élèves dans le SDP est équivalent dans les deux classes observées. Les SDA, par contre, ont été construits par les enseignantes seules, séparément et sans intervention des chercheurs et nous avons pu constater qu'alors de grandes différences apparaissaient dans les choix effectués pour préparer les élèves à la même séance de classe.

## IV - COMPARAISON DES CLASSES 1 ET 2

### 1 La classe 1

Regardons tout d'abord les choix effectués par la première enseignante.

#### *1.1 Les choix du SDA de la classe 1*

Cette séance d'APC concerne quatre élèves et a été menée trois jours avant la séance du SDP.

L'enseignante fait le choix de proposer le problème 1 (figure 3).

Représente le nombre cherché

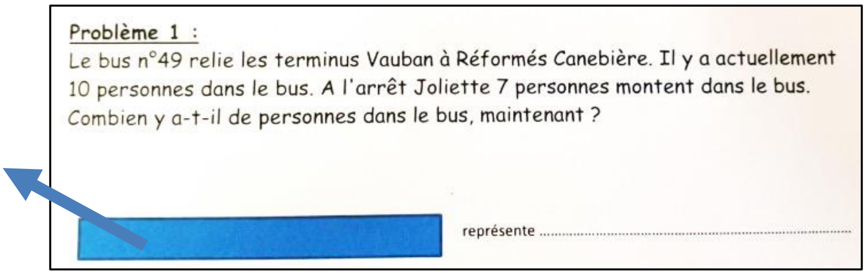

Problème 1 :
Le bus n°49 relie les terminus Vauban à Réformés Canebière. Il y a actuellement 10 personnes dans le bus. A l'arrêt Joliette 7 personnes montent dans le bus. Combien y a-t-il de personnes dans le bus, maintenant ?


*Figure 3. Problème 1 du SDA (classe 1).*

Les élèves ont déjà eu une première séance en APC durant lequel le nombre cherché était représenté par une bande bleue. C'est donc la deuxième séance dans laquelle les élèves utilisent une telle représentation. Pour ce premier problème, l'enseignante travaille tout d'abord, lors d'une première phase orale, sur la compréhension de la situation avec diverses reformulations : à cette occasion, tous les éléments de l'histoire du problème sont mis en évidence ainsi que leurs relations. Puis dans une deuxième phase de recherche, il y a tout un travail autour du schéma en barres. Ces derniers ont déjà été présentés mais uniquement aux élèves du SDA lors d'une séance précédente d'APC. Dans ces schémas, une bande est identifiée en particulier par une couleur bleue. Lors du SDA, elle est présentée aux élèves comme représentant ce que l'on cherche. L'enseignante s'appuie sur deux bandes imprimées l'une au-dessus de l'autre sur la feuille des élèves mais également disponibles en papier : une bande bleue et une bande blanche. Lors de ce travail, nous pouvons noter un guidage fort de l'enseignante pour représenter le schéma en barres mais sans aller jusqu'à la résolution. (Figure 4)

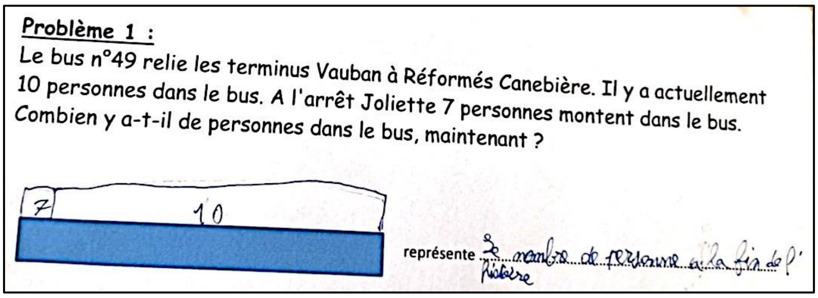



*Figure 4. Écrit d'un élève pour le problème 1 du SDA (classe 1).*

Par une série de questions, elle amène les élèves à compléter la bande bleue et les bandes blanches pour obtenir un schéma en barres représentant les situations de chaque énoncé de problème.

> Enseignante (PE) : « Elle représente quoi cette bande bleue alors ? » (Silence de quelques secondes), « On a dit que c'est ce que l'on cherche et ce que l'on cherche c'est ? »
>
> Élève (E) : Le total »
>
> PE : « Le total de quoi ? » (Réponse inaudible d'un élève)
>
> PE : « C'est des billes ? »
>
> E : « Non »
>
> PE : « C'est des bonbons ? »
>
> E : « Non
>
> PE :« Alors c'est quoi ? »
>
> E : « C'est des personnes. »
>
> PE : « C'est des personnes qui sont ? »
>
> E : « Dans le bus »
>
> PE : « Au début, au milieu ou à la fin de l'histoire ? …. Dans la question, on cherche à quel moment ? »
>
> E : « On cherche à la fin de l'histoire »
>
> PE : « Alors cette bande elle représente »
>
> E : « Le total. »
>
> PE : « Le total de »
>
> E : « de personnes. »
>
> PE : « qui sont »
>
> E : « qui sont dans le bus »
>
> PE et E : « à la fin de l'histoire. »
>
> Les élèves écrivent sur la bande ou sur leur feuille, la phrase dictée par l'enseignante. « Le nombre de personnes dans le bus à la fin de l'histoire. ».

Pour le deuxième problème, l'enseignante propose un modèle à recopier par les élèves. Ce problème est similaire au premier avec la recherche de l'état final lors d'une transformation positive. Cette fois, les élèves complètent seuls le schéma avec réussite mais, dans le problème 3, la transformation est négative. Les élèves sont en difficulté car ils essaient de reproduire un schéma similaire aux deux précédents en ajoutant deux petites bandes blanches au-dessus de la bande bleue, sans réaliser que cette fois, une des bandes blanches doit être positionnée à côté de la bande bleue (figure 5). L'enseignante reprend et guide les élèves vers la réalisation d'un schéma en barres correspondant au nouvel énoncé en prenant à sa charge le dessin des bandes. Sur la figure 5, nous pouvons voir le premier tracé de cet élève (à moitié effacé) où il a tenté d'utiliser la bande bleue en positionnant les nombres de l'énoncé comme dans le problème 1.

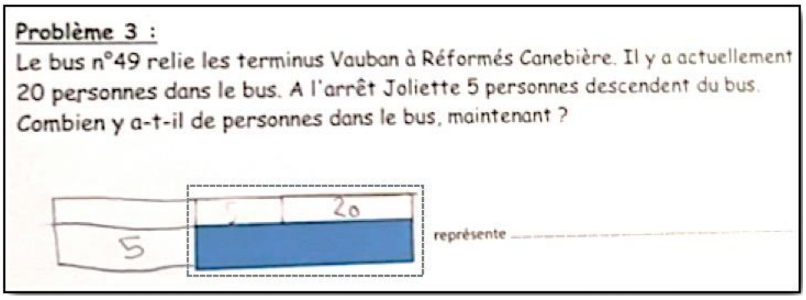



*Figure 5. Feuille d'un élève pour le problème 3 du SDA (classe 1).*

Tous les problèmes présentés lors du SDA pré correspondent à la recherche de l'état final. Pour chaque problème, une bande bleue est dessinée sur les feuilles pour aider l'élève à représenter la situation. Lorsque la transformation est positive, l'enseignante dessine sur l'énoncé une grande bande bleue, lorsque la transformation est négative, la bande bleue est petite (figure 6). Ainsi l'état final est représenté par des bandes bleues différentes selon la transformation. La bande bleue étant donnée à l'élève, il pourrait associer la longueur de cette bande avec l'opération à effectuer sans une réelle compréhension de la situation : une addition lorsque la bande est longue et une soustraction lorsqu'elle est courte. Ce schéma semble difficilement accessible, lors de cette séance, pour ces élèves en difficultés avec des problèmes de transformation.

Transformation positive Transformation négative

*Figure 6. Schémas en barres proposés par l'enseignante pour les problèmes de recherche de l'état final.*

Notons que dans cette première classe, les élèves représentent les problèmes avec des schémas en barres lors du SDA pré mais ne les résolvent pas, conformément aux modalités du dispositif préventif.

### 1.2 Les choix du SDP de la classe 1

Dans le SDP, tous les élèves ont les mêmes énoncés de problèmes. Cependant, les élèves du SDA ont en plus des bandes bleues dessinées. Ils sont donc incités à faire un schéma en barres pour résoudre les problèmes. Nous observons que les élèves du SDA produisent un travail comparable à celui des autres élèves. Ils entrent dans la résolution des problèmes et leurs productions sont similaires à celles de l'ensemble du groupe classe. Nous pouvons noter un temps de résolution des problèmes similaire également au reste de la classe. Sur les quatre élèves du SDA, seuls deux utilisent les bandes pour réaliser des schémas en barres. Le premier les trace systématiquement pour les quatre problèmes qu'il résout (sur les huit proposés), le second les trace seulement pour les deux premiers problèmes. Une analyse plus fine du film de la séance montre que ce deuxième élève résout tout d'abord le problème en trouvant le résultat exact et en écrivant la phrase réponse ; il ne complète le schéma en barres qu'à la fin (effet de contrat). Les deux autres élèves du SDA n'utilisent pas de schéma en barres et n'essaient pas de les construire à partir de la bande bleue donnée. Ils résolvent directement les problèmes. L'un d'eux a d'ailleurs résolu correctement la totalité des problèmes.

### 1.3 Les témoignages des élèves

Après la séance de classe, l'enseignante demande aux élèves leur ressenti. Les élèves expriment le fait que la préparation avant la séance de classe les a aidés. Les observations des élèves montrent qu'ils sont entrés dans la situation contrairement aux séances habituelles où ils sont passifs, peu concentrés lors des phases collectives de début de séance et n'osent pas se risquer à donner une réponse erronée. Or la plupart des élèves disent ne pas avoir utilisé de schéma en barres et le seul qui affirme qu'ils lui ont été utiles, ne les a tracés qu'après avoir résolu les problèmes. Il semble donc que ce soit plutôt la rencontre avec le milieu en amont de la séance de classe que le travail sur les schémas en barres qui a permis à ces élèves de mieux comprendre le contexte du problème et de rentrer plus facilement dans la situation lors du SDP.

## 2 La classe 2

Regardons à présent les choix effectués dans la deuxième classe.

### 2.1 Les choix du SDA de la classe 2

L'enseignante fait le choix de proposer le problème 1 (figure 7). Les énoncés utilisés ont tous le même contexte et sont composés de deux parties : le texte du problème et une partie « Calcul ». Nous pouvons noter quelques implicites du texte qui peuvent être source de difficultés pour certains élèves. Tout d'abord l'utilisation de termes différents pour désigner le même lieu : « arrêt » / « départ », « terminus » / « arrêt Réformés-Canebière ».

Problème 1

Le bus n°49 relie les terminus Vauban à Réformés Canebière en passant par l'arrêt Joliette. 46 personnes montent dans le bus à l'arrêt Vauban, 16 personnes descendent à l'arrêt Joliette. Combien de personnes descendent du bus au terminus ?

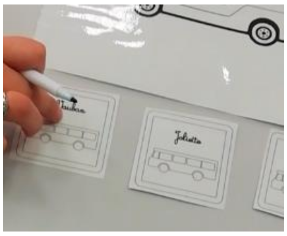
Calcul :

*Figure 7. Problème 1 du SDA (classe 2).*

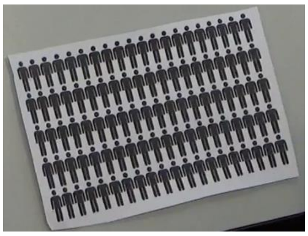
Par une série de questions ouvertes, l'enseignante interroge les cinq élèves du SDA sur la situation, les amène à reformuler les informations données par l'énoncé, à raconter l'histoire du problème mais sans les résoudre : « De quoi parle cette histoire ? », « Qu'est-ce qui se passe avec ce bus ? », « Il va y avoir des personnes qui descendent, qui descendent où ? Quel est le trajet de ce bus ? », « Il part, il part d'où ? », « Quel est le premier arrêt ? ».

Lors des échanges, elle associe également une descente du bus à une soustraction et une montée à une addition. Elle introduit par ailleurs du matériel tangible dans le milieu matériel des élèves du SDA (figure 8). La durée de traitement du premier problème est d'environ 9 min, et approximativement 7 min pour les deux problèmes suivants.


Un bus




Des arrêts



Des passagers

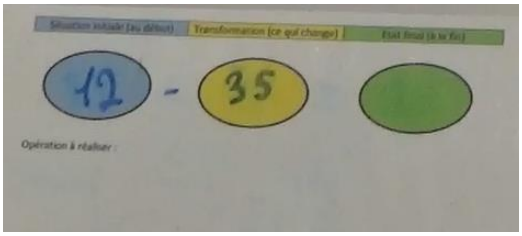



Schéma avec des bulles associées à des rectangles de couleur : situation initiale (au début), transformation (ce qui change), état final (à la fin) et une ligne « Opération à réaliser »

*Figure 8. Matériel tangible introduit dans le milieu du SDA (classe 2).*

Le matériel est uniquement pris en charge par l'enseignante qui découpe les personnages, les place dans le bus et effectue les transformations après déplacement du bus jusqu'au terminus. Elle questionne les élèves sur le déroulé de l'histoire. Le procédé prend du temps (passage par le dénombrement, recomptage…), mais il permet à tous les élèves d'entrer dans l'activité et de comprendre la situation. Le schéma (situation initiale, transformation, état final) a été choisi par l'enseignante car il est plus compréhensible pour elle que le schéma en barres. D'après elle, il permet de représenter la situation afin que l'élève soit capable d'identifier l'opération permettant de résoudre le problème. De plus, elle explique que ce schéma permet « de reprendre le problème à l'envers » : il conserve la chronologie des événements (début, milieu, fin) et représente les différents états de la situation ainsi que la transformation. Cependant, son utilisation du schéma est plus complexe. Rappelons que c'est la première fois que les élèves rencontrent ce type de schéma. Ils éprouvent des difficultés à positionner les nombres, identifier le calcul puis l'effectuer. Contrairement à ce qui avait été observé dans la classe précédente, les élèves doivent, dans le SDA, réfléchir à l'opération à faire pour résoudre le problème, même s'ils n'effectuent pas véritablement le calcul. Le lien entre la ligne du temps représenté en haut de la feuille, la chronologie de ce problème de transformation et le schéma « état initial – transformation - état final » est difficile pour une première utilisation mais les élèves s'y essaient tout de même. Même s'ils n'ont pas manipulé le matériel (bus, arrêts et personnages), ils déclarent, à la fin du SDA, qu'ils en auront besoin lors de la séance en classe entière. Celui-ci sera donc à leur disposition lors du SDP.

### 2.2 Les choix du SDP de la classe 2

Nous observons que les élèves du SDA ont des résultats sensiblement identiques au reste du groupe classe qui en devient alors plus homogène. Ils entrent tous dans la tâche de résolution. Le dispositif préventif leur a permis de se rapprocher des élèves qui n'ont pas besoin de l'APC, de se rassurer, de connaître la situation. Contrairement à ce que nous aurions pu penser, le matériel proposé ne s'est pas révélé d'une grande aide pour les élèves. Au lieu d'utiliser des procédures de dénombrement, tous recourent à des calculs. L'utilisation du matériel perturbe même certains élèves et crée des hésitations. À titre d'exemple, un élève pose la soustraction attendue puis revient au matériel en cours de calcul et hésite de longues minutes, comme nous pouvons le voir dans les différentes étapes détaillées figure 9 concernant la résolution du problème « 34 passagers qui montent dans le bus, 16 qui en descendent » (transformation négative d'état, recherche de l'état final). Après la résolution du problème, cet élève reprend le matériel, soit pour comprendre comment l'utiliser et faire le lien avec la réponse trouvée par le calcul, soit par effet de contrat didactique (l'élève doit utiliser tout ce que l'enseignant lui donne) puis, au bout de quelques minutes d'hésitation, il complète la fiche du problème (figure 10). Ainsi, le matériel que les élèves avaient observé, mais sans pouvoir véritablement le manipuler durant le SDA, s'est révélé difficile à utiliser et n'a pas apporté une réelle aide pour cet élève.

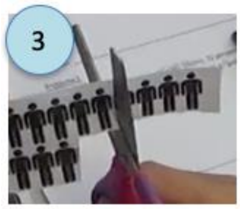
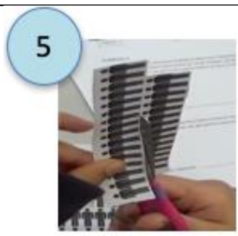
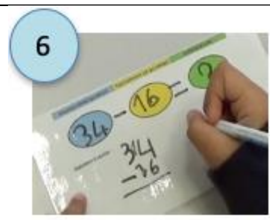
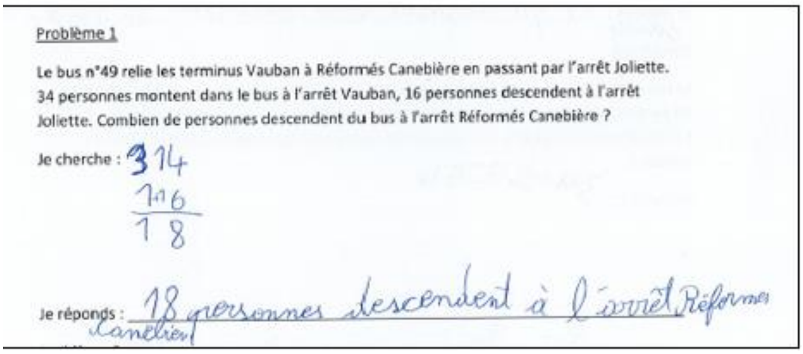
| | | |
|---|---|---|
| <br>L'élève complète le schéma-bulles et pose la soustraction : 34 – 16 | <br>L'élève découpe les 34 personnages en recomptant deux fois. | <br>Puisque 16 personnes descendent, l'élève découpe 4 personnages. |
| <br>L'élève ne sait que faire des 4 personnages découpés et essaie de les mettre avec la deuxième ligne. | <br>L'élève sépare les deux bandes. | <br>Puis l'élève délaisse le matériel pour résoudre correctement la soustraction posée en colonnes. |

*Figure 9. Procédure de l'élève E1 au problème 1 du SDP (classe 2).*


Problème 1

Le bus n°49 relie les terminus Vauban à Réformés Canebière en passant par l'arrêt Joliette. 34 personnes montent dans le bus à l'arrêt Vauban, 16 personnes descendent à l'arrêt Joliette. Combien de personnes descendent du bus à l'arrêt Réformés Canebière ?

Je cherche : 34
16
18

Je réponds : 18 personnes descendent à l'arrêt Réformes Canebière

*Figure 10. Réponse de l'élève E1 au problème 1 du SDP (classe 2).*

Nous notons également qu'un élève (E2) découpe ces lignes de 20 personnages en bandes plus petites avec des nombres de personnages différents pour éviter de recompter à plusieurs reprises les personnages découpés. Cet élève a ainsi créé des bandes proportionnées de valeurs différentes (figure 11), proche de schémas en barres utilisés dans l'autre classe. Cette adaptation du matériel aurait pu être reprise par l'enseignante pour d'autres types de problèmes additifs.

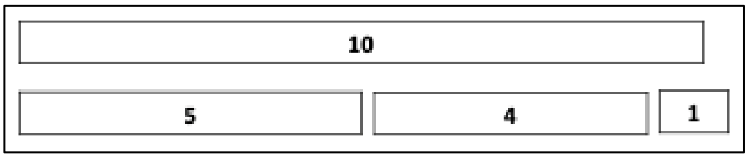
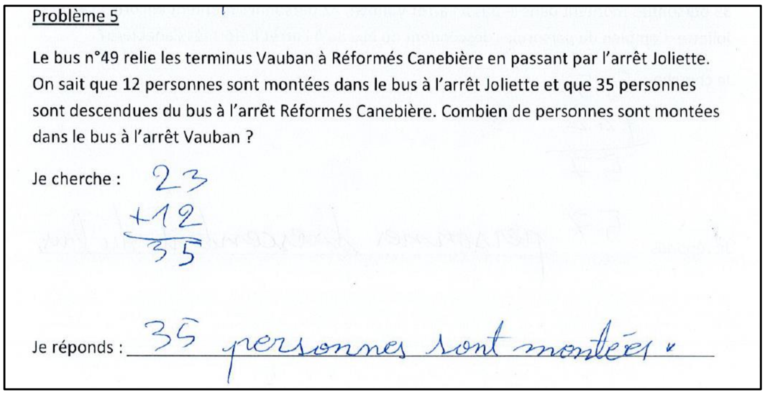



*Figure 11. Bandes créées par l'élève E2 lors du SDP (classe 2).*

Par ailleurs, alors qu'ils disposent du matériel nécessaire pour résoudre ce problème par dénombrement, tous les élèves se lancent dans des calculs. Certainement pouvons-nous voir ici l'effet de l'enseignement de la résolution de problèmes qui a souvent tendance à associer problèmes et opérations (effet de contrat). Enfin un élève (E3) écrit une addition à trous pour calculer le résultat d'une transformation, trouve le nombre manquant mais conclut que la réponse au problème est le résultat de l'addition. Tout était réuni pour qu'il résolve le problème mais il se trompe (figure 12). Peut-être est-ce le reflet d'une habitude donnée aux élèves, à savoir que le résultat recherché se trouve systématiquement après le signe égal.


Problème 5

Le bus n°49 relie les terminus Vauban à Réformés Canebière en passant par l'arrêt Joliette. On sait que 12 personnes sont montées dans le bus à l'arrêt Joliette et que 35 personnes sont descendues du bus à l'arrêt Réformés Canebière. Combien de personnes sont montées dans le bus à l'arrêt Vauban ?

Je cherche : 23
+12
35

Je réponds : 35 personnes sont montées.

*Figure 12. Réponse de l'élève E3 au problème 5 du SDP (classe 2).*

### 2.3 Les témoignages des élèves

Lorsque l'enseignante leur pose la question de l'utilité du matériel distribué, certains élèves du SDA affirment l'avoir utilisé alors qu'un autre explique que « c'était dur avec les bonhommes parce que, en fait, il fallait encore recompter et après recompter ». L'élève explique que cela l'a aidé mais lui a demandé beaucoup de temps dans le comptage du nombre de passagers. On peut s'étonner de constater que ces affirmations ne correspondent pas à ce que nous avons pu observer durant le SDP. Il est possible que les élèves aient cherché à donner à l'enseignante la réponse qu'elle attendait d'eux. Par la suite, l'enseignante pose des questions afin de faire émerger le fait que le matériel aide à se représenter la situation mais n'est pas une nécessité pour trouver le nombre de passagers recherché. Un nouvel énoncé est donné avec le même matériel. Par un jeu sur les valeurs des variables didactiques, le dénombrement des passagers est rendu fastidieux et donc l'utilisation du matériel devient inadéquate. Les élèves utilisent alors efficacement le schéma avec les bulles, guidés par un fort étayage de l'enseignante.

## V - ÉLEMENTS DE CONCLUSION

### 1 Bilan pour les classes 1 et 2

En plus du matériel et du type de modélisation choisi, nous pouvons noter une dernière différence entre les deux classes : dans la classe 1, le texte indique le nombre de passagers présents avant l'arrêt ainsi que la transformation qui s'effectue à ce moment-là ; la question porte alors sur le nombre de passagers présents dans le bus après l'arrêt. Les terminus ne sont pas évoqués. Alors que, dans la classe 2, l'énoncé du problème indique le nombre de personnes au départ du bus puis la transformation lors de l'arrêt et la recherche porte sur le nombre de passagers qui descendent du bus au terminus. Cette différence peut être source de difficultés pour des élèves fragiles en mathématiques qui pourraient se demander ce qu'il se passe entre le point de départ et le terminus de la ligne (N'y-a-t-il pas d'autres arrêts où les passagers peuvent monter ou descendre ?). À cela s'ajoute un implicite dans les énoncés où rien n'indique que le bus est vide avant la montée des passagers au départ, ni que tous les passagers soient obligés de descendre au terminus.

Dans les deux classes, la rencontre avec le milieu en amont du SDP paraît avoir permis aux élèves en difficulté de rentrer plus facilement dans la situation lors de la séance de classe et de se retrouver finalement synchronisés avec leurs camarades, ce qui s'avère déjà un point essentiel. Regardons à présent si la préparation proposée a facilité la modélisation en elle-même. Dans la classe 1, nous pouvons dire que le modèle en barres est peu utilisé spontanément par les élèves et ne paraît pas être un réel appui à la résolution dans cette mise en œuvre. L'enseignante a pris à sa charge une partie importante de la modélisation en proposant une grande bande bleue lorsque l'opération attendue est une addition et une petite bande bleue lorsque c'est une soustraction. L'aide apportée pour la modélisation des problèmes ne semble pas vraiment concluante. Pour la classe 2, l'utilisation des personnages a permis aux élèves d'entrer dans la situation. Les manipulations faites, d'abord par l'enseignante puis par les élèves dans le SDP, les ont aidés à se représenter le problème, à mieux comprendre l'histoire de problème mais ils en ont vite éprouvé les limites, notamment lors des multiples (re)comptages. Les élèves n'utilisent pas vraiment le matériel pour résoudre le problème. Lors du SDA post, des nombres plus grands ont été utilisés. Les élèves ont été dans l'incapacité d'utiliser les personnages et ont exploité davantage le schéma avec les bulles de couleur. D'ailleurs, nous pouvons remarquer que, dès le SDP, quelques élèves paraissent s'appuyer dessus pour résoudre les problèmes. Pour ceux-ci, le schéma *état initial – transformation – état final* nous a paru pertinent. Toutefois, son appropriation est difficile et demande du temps. Cette deuxième préparation à la modélisation n'a donc pas été convaincante non plus.

### 2 Des modélisations à l'initiative des élèves

Dans les pré-tests, nous avons trouvé des schématisations spontanées conçues par les élèves qui nous paraissent dignes d'intérêt (deux exemples sont présentés figure 13). Ces schémas sont basés sur le dénombrement mais sont pertinents par rapport à la situation et ils ont permis aux élèves de trouver la solution du problème. Certes, ces schémas se révèleraient insuffisants pour résoudre le problème si les nombres étaient plus grands. Cependant, ces modélisations « spontanées » auraient pu être discutées en classe dans l'objectif d'être améliorées. En effet, en agissant sur des variables didactiques de temps ou de quantité, l'enseignante aurait par exemple pu amener les élèves à éprouver les limites de leurs représentations.

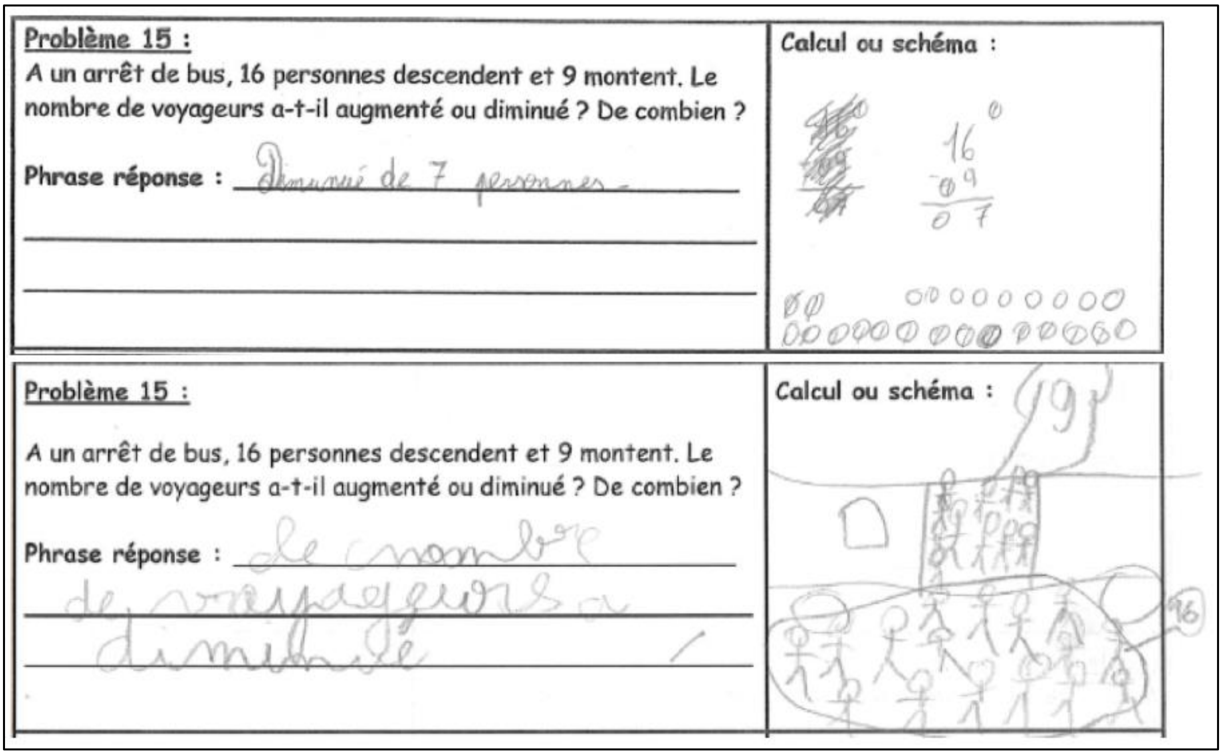



*Figure 13. Représentations spontanées issues des pré-tests.*

## 3 Que retirer de cette expérimentation ?

### *3.1 Du point de vue de l'enseignement*

Cette étude de cas montre à quel point il est difficile de préparer les élèves à la résolution de problèmes de transformation d'un état, même en s'appuyant sur des dispositifs tel que le dispositif préventif qui avait pourtant produit des résultats intéressants lors de précédentes mises en œuvre sur d'autres objets d'étude (Millon-Fauré, 2018a, 2018b). Le travail réalisé dans les deux classes a aidé les élèves à entrer plus facilement dans la situation, donc a joué un rôle dans la résolution de problèmes, mais les outils proposés (schémas, matériel) n'ont pas constitué une réelle aide à la modélisation. Ceci illustre toutes les difficultés que peuvent rencontrer les enseignants pour accompagner ce processus. Même si cela ne constitue pas une réponse exhaustive, il nous semble que cette expérimentation nous apporte certaines pistes de réflexion susceptibles d'améliorer les pratiques en classe. Il nous semble notamment que cet apprentissage du processus de modélisation doit s'inscrire sur un temps long et qu'il doit concerner l'ensemble des élèves : il ne peut donc être cantonné à quelques séances d'APC avec un groupe restreint d'élèves. Le travail sur l'intérêt de la modélisation et le type de représentation choisi pour un type de problèmes donné doit s'effectuer en classe entière et ne peut donc faire l'objet du travail mené lors du dispositif préventif (même si, une fois que ces outils ont été introduits en classe entière, ils peuvent ensuite être retravaillés en APC avec les élèves qui en ont besoin). Par ailleurs, pour réellement éprouver les limites des techniques de dénombrement et l'intérêt de recourir à une modélisation plus efficiente, les élèves ont besoin de manipuler le matériel, de dessiner les éléments de la situation et cette première étape peut prendre du temps. Enfin, il nous paraît plus intéressant de partir des représentations spontanées des élèves pour réfléchir en classe entière à un ou plusieurs types de schémas qui pourraient s'avérer efficaces pour une classe de problèmes donnée. Ainsi, les élèves pourraient choisir un type de modélisation sans qu'un modèle ne soit imposé. Un exemple d'expérimentation de ce type est d'ailleurs proposé par Girmens (2003) dès la classe de CP.

### *3.2 Du point de vue de la recherche*

Ce travail collaboratif s'est révélé fructueux, dans la mesure où il a permis aux enseignantes de réfléchir à l'accompagnement de la modélisation chez leurs élèves et d'affiner leur catégorisation des problèmes. Quant aux chercheurs, ils ont étudié les difficultés rencontrées par les enseignants lors de l'enseignement de la résolution de problèmes. Cette étude montre également que pour une même situation en classe entière plusieurs dispositifs préventifs s'avèrent possibles (les deux enseignantes observées ont réalisé des choix très différents durant la séance d'APC alors qu'elles avaient pourtant choisi ensemble la tâche qui allait être proposée dans le SDP). Nous avons ainsi pu repérer plusieurs différences entre ces deux mises en œuvre : le type de modélisation choisi, le matériel (ou l'absence de matériel), certains implicites des énoncés. Ceci montre que même si le SDP contrôle en grande partie ce qui peut se jouer dans le SDA (notamment au niveau du temps didactique), il reste encore une marge de décision concernant le travail qui sera effectué dans le dispositif préventif.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study : integration of CABRI in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 183-203.

Assude, T., Koudogbo, J., Millon-Fauré, K., Morin, M.-P., Tambone, J. & Theis, L. (2016 a.). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficultés en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 16(1), 1-35.

Assude, T., Millon-Faure, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J. & Theis, L. (2016 b.). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 36(2), 197-226.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été*, 4 – 11 juillet 1998, La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand,
91-120.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. et Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Éditions de l'IREM d'Aix-Marseille.

Girmens, Y. (2003). Dis, fais-moi un dessin. *Carnets de route de la COPIRELEM.* T.1, 115-120.

Laborde, C. (1992). Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, *conférence plénière au 7e congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7,* Québec, Canada, août 1992.

Millon-Fauré, K., Theis, L., Assude, T., Koudogbo, J., Tambone, J. & Morin, M.-P. (2018a). Comparaison des mises en œuvre d'un même dispositif d'aide dans des contextes différents. *Éducation et didactique*, 12(3), 43-64.

Millon-Fauré, K., Theis, L., Tambone, J., Koudogbo, J., Assude, T. & Hamel, V. (2018b). Appropriation par un enseignant d'un dispositif d'aide pour l'enseignement des mathématiques. *Spirale, revue de recherches en Éducation.* Supplément électronique au N°61, 41-56.

Ministère de l'Éducation nationale, de la jeunesse et des Sports. (2018). *Bulletin officiel spécial n°3 du 26 avril 2018.*

Ministère de l'Éducation nationale, de la jeunesse et des Sports. (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. *Les guides fondamentaux pour enseigner*.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20(3), 263-304.

Tambone, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les sciences de l'Éducation – pour l'ère nouvelle*, 47(2), 51-71.

Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, J. & Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et Francophonie*, 42(2), 160-174.

Theis, L., Morin, M.-P., Tambone J., Assude T., Koudogbo J., & Millon-Fauré, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation- problème mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives. Revue Internationale de Didactique des Mathématiques*, 21, 9-38.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170.

## VII - ANNEXE 1 : PRE-TESTS POUR LES PROBLEMES ADDITIFS

**Élaboration de l'épreuve d'évaluation sur les problèmes additifs (typologie de Vergnaud)**

| Types de problèmes | Recherche | | Problèmes |
|---|---|---|---|
| Composition de mesures (ou partie et tout) | Le tout | P1 | Dans une école, il y a 68 filles et 52 garçons. Combien y a-t-il d'enfants dans cette école ? |
| | Une partie | P2 | Dans une classe, il y a 28 enfants. Le maître a compté 12 garçons. Combien y a-t-il de filles dans la classe ? |
| Transformation d'un état | État final (transformation positive) | P3 | Le compteur de la photocopieuse marque 132. La maîtresse tire 16 photocopies. Maintenant, que marque le compteur ? |
| | État initial (transformation positive) | P4 | Jean avait des billes. Anne lui en a donné 3 autres. Jean a maintenant 8 billes. Combien Jean avait-il de billes au début ? |
| | Transformation (positive) | P5 | La maîtresse a 42 cahiers dans l'armoire. Le directeur lui apporte un carton de cahiers. La maîtresse a maintenant en tout 67 cahiers. Combien le directeur a-t-il apporté de cahiers ? |
| | État final (transformation négative) | P6 | Corinne a 37 images dans une boîte. Elle en colle 12 dans son album. Combien y en a-t-il dans la boîte maintenant ? |
| | État initial (transformation négative) | P7 | Pierre avait des billes. Il a joué et perdu 5 billes. Il a maintenant 16 billes. Combien avait-il de billes avant d'avoir joué ? |
| | Transformation négative | P8 | Pierre avait 18 billes avant de jouer et maintenant il y en a 11. Combien de billes a-t-il perdu ? |

| Types de problèmes | Recherche | | Problèmes |
|---|---|---|---|
| **Comparaison d'états** | Un des états 1 | P9 | Dans ma classe, il y a 27 élèves. Dans la classe de CP, il y a en 5 de moins. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe de CP ? |
| | Un des états 2 | P10 | Marie a 39 ans, elle a 23 ans de plus que son fils Thomas.<br>Quel est l'âge de Thomas ? |
| | Un des états 3 | P10 bis | Jean a 8 billes. Il en a 3 de plus qu'Anne.<br>Combien Anne a-t-elle de billes ? |
| | Un des états 4 | P11 | Au cycle 2 de mon école, il y a 12 élèves de moins qu'au cycle 3. Il y a 59 élèves au cycle 2. Combien y en a-t-il au cycle 3 ? |
| | Un des états 5 | P11 bis | Jean a 5 billes. Il en a 3 de moins qu'Anne.<br>Combien Anne a-t-elle de billes ? |
| | Comparaison | P12 | Marc a 38 billes. Pierre a 25 billes. Marc a plus de billes que Pierre.<br>Combien en a-t-il de plus ? |
| **Composition de transformations** | État final | P13 | Dans mon porte-monnaie, j'avais 45 euros. J'ai dépensé 5 euros pour un livre et 8 euros en nourriture. Quelle somme d'argent y a-t-il maintenant dans mon porte-monnaie ? |
| | État initial | P14 | Dans un sac de jetons, j'en enlève d'abord 17 puis j'en remets 6. Il reste alors 45 jetons dans le sac. Combien y en avait-il au départ ? |
| | Transformation composée | P15 | À un arrêt de bus, 16 personnes descendent et 9 montent. Le nombre de voyageurs a-t-il augmenté ou diminué ? De combien ? |
| | Transformation composée | P16 | Pierre a gagné 27 billes en deux parties. Il en a gagné 15 dans une des parties. Que s'est-il passé à la deuxième partie ? |

# UN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ANCRÉ DANS LA VIE QUOTIDIENNE À TRAVERS L'ÉTUDE DES GRANDEURS : REPRÉSENTATION ET MODÉLISATION À L'ŒUVRE

**Jérôme Coillot**
Professeur de mathématiques
Collège Léon Huet, La Roche Posay (86)
Coordonateur d'un laboratoire de mathématiques
IREM&S de Poitiers
jeromecoillot@hotmail.com

Résumé
Nous avons présenté, lors du colloque de Lausanne, un enseignement des mathématiques à partir de grandeurs (populations, masses, angles, longueurs, prix, aires, durées, volumes) qui est expérimenté dans des classes de CM depuis 4 ans. Nos supports d'étude (situations et exercices) sont donc essentiellement issus de la vie quotidienne. Les manipulations et expérimentations y sont nombreuses, ainsi que la résolution de problèmes. C'est dire que représentation et modélisation sont sans cesse sollicitées, et donc les compétences qui leur sont associées sont sans cesse travaillées (de façon implicite ou explicite).
Après avoir rappelé notre démarche, nous montrerons à partir d'exemples concrets de situations ou de séances comment les notions, techniques et méthodes nouvelles sont élaborées, et comment les savoirs acquis, ou en cours d'acquisition, sont réinvestis et travaillés dans d'autres contextes, favorisant ainsi leur transfert dans des cadres nouveaux.
Nous pourrons témoigner de nos interventions en formation et dans les classes. Cette démarche didactique s'appuie principalement sur les travaux d'Yves Chevallard et de l'IREM de Poitiers pour les cycles 3 et 4.

Depuis 2004 l'IREM&S de Poitiers « travaille » sur un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs au collège. La liaison écoles/collège, les échanges sur les pratiques et les observations d'enseignement dans les classes qui en ont découlé, ont amené à l'expérimentation de cette approche des mathématiques dans plusieurs écoles puis 2017 en classe de CM1 et CM2. Cette communication vise à présenter notre démarche et la façon dont elle travaille la modélisation et la représentation.

## I - PRÉSENTATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À PARTIR DES GRANDEURS DÉVELOPPÉ PAR L'IREM&S[1] DE POITIERS

### 1 Un point sur les grandeurs et ce qu'elles impliquent

Plusieurs manuels correspondant aux programmes de 1947, proposent une définition qui, bien que simple, est particulièrement compréhensible : **une grandeur est ce qui peut se mesurer ou se compter**. Dans notre approche des mathématiques en classe de CM1 et CM2, on distingue alors la grandeur discrète *Populations* qui « se compte », des grandeurs continues *Angles, Masses, Longueurs, Prix, Aires, Durées, Volumes* qui « se mesurent ». Et si l'on dit d'une grandeur qu'elle « peut » se mesurer, cela signifie que **la grandeur vit sans la mesure**. On peut partager une longueur, comparer des volumes, dire d'une surface qu'elle a une aire 3 fois plus grande qu'une autre, sans qu'il soit question de mesure ou de comptage.

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques & Sciences.

La grandeur est toujours associée à un objet d'étude. On ne parle pas de masse dans l'absolu. Il est question de la masse de quelque chose, d'un objet, d'une personne. Lorsqu'on parle d'aire, c'est l'aire d'une surface (plane ou courbe)… Objet d'étude, grandeur et mesure sont interconnectés.

La terminologie a une influence sur la complexité de l'enseignement des différentes grandeurs : surface (l'objet mathématique), aire (la grandeur) et superficie (la mesure) sont souvent confondues ; le même mot « angle » est lui utilisé à la fois pour exprimer l'objet, la grandeur et sa mesure. Si l'enseignant doit être au clair sur ce qui est travaillé en classe et s'exprimer de manière adéquate, on pourra accepter quelques abus de langage chez l'élève qui simplifient parfois les choses (« la longueur du segment est… » ou « le segment mesure… » est préférable à « la mesure de la longueur du segment en cm est … »).

### 2 L'origine de l'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs

En 2004, la commission inter IREM Didactique en partenariat avec l'INRP[2] initie une recherche intitulée : *Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire par la mise en place d'Activités ou de Parcours d'Étude et de Recherche*. Cette recherche a pour but de redonner du sens aux mathématiques enseignées. L'IREM de Poitiers s'engage dans cette démarche. Influencé par les travaux d'Yves Chevallard, le groupe Collège se centre sur deux questions :

- Où se sont développées, historiquement, les mathématiques ?
- Où vivent les « notions élémentaires » de mathématiques ?

Les grandeurs sont la réponse à chacune de ces deux questions. On peut retrouver le bilan de l'étude de ces deux questions dans l'annexe 1 de chacune des brochures de la série *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs* publiées par l'IREM de Poitiers de 2009 à 2012, par exemple dans celle sur les longueurs (Groupe collège, 2012, p. 113-118). L'idée de la démarche est donc de faire des mathématiques là où elles vivent, avec des situations concrètes et qui ont du sens (Groupe collège, 2016). C'est à travers l'étude des durées, des angles, des populations (de leur dénombrement), des températures, des aires, des prix, des volumes, des longueurs, des masses, des chances que nous travaillons l'ensemble des notions et savoir-faire mathématiques.

Cet enseignement est mis en œuvre depuis plus de quinze ans dans de nombreuses classes de collège et expérimenté depuis quelques années dans plusieurs écoles.

## II - QUELLE ORGANISATION DE L'ETUDE EN CLASSE DE CM1/CM2 ?

### 1 Comment organiser ? Quelles grandeurs étudier et dans quel ordre ?

Voici la progression proposée en classes de CM1 et CM2 :


Notre choix s'est porté sur des grandeurs dont l'étude couvre le programme et sur un ordre qui permet un fort travail spiralaire et donc d'assurer ainsi un apprentissage progressif et consolidé. Cela suppose d'aborder l'ensemble du programme de mathématiques, les compétences numériques (notamment les nombres décimaux) ainsi que les compétences géométriques, tôt dans l'année.

La première grandeur *Populations*[3] est le lieu du dénombrement et donc du nombre entier. Cette grandeur permet de revoir et d'approfondir le système décimal, de travailler sur les grands nombres, les techniques de comparaison et de calcul. Plus généralement on se réapproprie, on consolide l'ensemble des notions,

[2] Institut National de la Recherche Pédagogique, devenu IFÉ (Institut Français de l'Éducation) en 2010.

[3] On considère la grandeur *Population* au sens statistique comme grandeur d'un ensemble d'éléments homogènes.

compétences et techniques numériques du cycle 2, on en travaille de nouvelles et on prépare aux nombres décimaux qui seront abordés avec la grandeur *Masses* puis travaillés dans les grandeurs *Longueurs*, *Prix* et *Durées.*

Pour ce qui est de la grandeur *Angles*, au-delà des notions qui lui sont fondamentalement associées, on y travaille une grande partie des savoirs géométriques du cycle 3, notamment la symétrie et les propriétés des polygones. Ceci permet de mettre en place également des habitudes de travail de cet enseignement (découverte, manipulation, stratégies de recherche).

Le travail sur les autres grandeurs pourra alors s'appuyer sur les notions déjà vues et les approfondir. Un aperçu de l'aspect spiralaire sur quelques notions mathématiques en classe de CM1 est présenté tableau 1

| | Populations | Angles | Masses | Longueurs | Prix | Aires | Durées | Volumes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fractions | × | | × | × | × | × | × | × |
| Polygones | | × | | × | | × | | × |
| Parallélisme | | | | × | | | | × |
| Symétrie | | × | | × | | × | | |

*Tableau 1 : Aperçu des notions mathématiques travaillées via les grandeurs*

## 2 Comment organise-t-on l'étude de chaque grandeur ?

Nous proposons une étude de chaque grandeur à partir de situations concrètes organisées à travers l'étude de grandes questions qui font travailler les notions et savoir-faire mathématiques (Guichard & Peyrot, 2011) : comment définir, dénombrer, comparer, partager, mesurer, calculer ? Ces questions en entraînent d'autres : comment multiplier, diviser, construire… ? Certaines correspondent davantage au domaine numérique et d'autres au domaine géométrique, mais toutes renvoient à de grands types de tâches mathématiques que l'on retrouve dans les compétences explicitées par les programmes. La mise en place de l'étude de chaque grandeur se fait en gardant à l'idée qu'il faut favoriser au maximum la manipulation, l'expérimentation et les activités mentales.

Les notions et savoir-faire mathématiques sont alors des réponses à des situations proposées.

## 3 Un exemple de mise en œuvre avec les Longueurs en CM1

La grandeur *Longueur* a une place primordiale dans la progression annuelle. C'est la grandeur qui facilite le plus la représentation du système décimal. Elle est à la fois géométrique et numérique et aide à schématiser de nombreux problèmes autres que ceux sur les longueurs (par exemple avec les schémas en barres).

Nous présentons, pour chaque temps fort du parcours, quelques situations balisant l'étude de la grandeur. Pour en avoir une présentation plus détaillée comportant les exercices et activités mentales associés, temps de bilan, ainsi qu'une programmation sur 23 séances, on pourra se reporter à Coillot (2019).

Plus de la moitié des séances sont consacrées au travail sur la grandeur, indépendamment de la mesure, principalement autour des questions de comparaison et de partage. Le but de ce travail est de renforcer la représentation de la notion de longueur

### 3.1 Comment comparer ? (1)

***Situation 1***

Comme un bouliste amateur, indiquer (sans instrument de mesure) quelle équipe remportera la manche et combien de points elle marquera en s'appuyant sur la fig. 1 ou en expérimentant.

*Fig. 1 : Le jeu de boules*

On définit dans cette situation, le report de distances pour la comparaison. L'un des autres objectifs de cette première situation est de se réapproprier le compas comme outil conduisant à la conception du cercle comme ensemble des points à la même distance du centre.

### *Situations 2 et 3*

Lequel des champs A ou B (fig.2) nécessitera la plus grande clôture ?

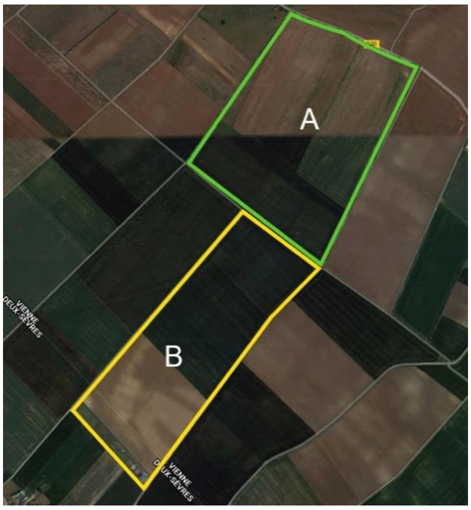



*Fig. 2 : Les deux champs*

Lequel de ces laçages (fig.3) utilisera le moins de longueur de lacet ?

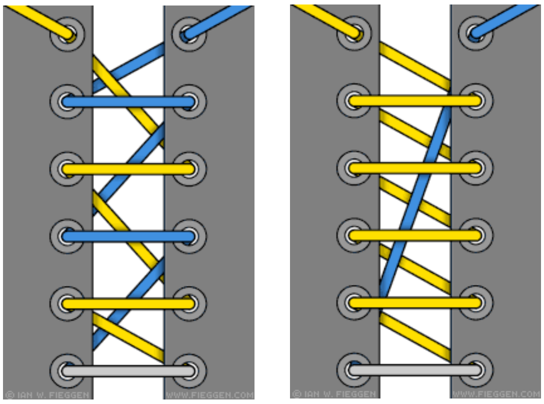


*Fig. 3 : Le laçage*

On travaille toujours sans mesure. On définit ici l'addition de longueurs par reports successifs de longueurs sur une demi-droite. Et cette méthode va permettre de comparer la longueur de lignes brisées (situation 3) pouvant se refermer (situation 2, notion de périmètre).

On peut alors proposer de comparer des longueurs dans le méso espace (largeur de la salle de classe, longueur d'une rangée de tables) pour retrouver la méthode fondatrice de la mesure : utiliser son pied, ou un carreau au sol, ou une plaque d'isolation au plafond, et dénombrer.

### 3.2 Comment construire ? (1)

#### Situation 1

Construisez avec les lattes en plastique[4] à votre disposition un quadrilatère qui a deux paires de côtés de même longueur…

Il est question ici de revisiter les triangles et les quadrilatères (que l'on a déjà étudiés dans les angles – travail spiralé) à travers les longueurs. On manipule les polygones, on éprouve leurs degrés de liberté, on retrouve les bras du compas avec les côtés consécutifs de même longueur… Les égalités de longueurs permettent de définir triangles et quadrilatères. Des réalisations sont présentées en figure 4.

*Fig. 4 : Réalisation avec des lattes (Matériel IREM&S de Poitiers)*

#### Situation 2

Faire construire une allée le long d'un bâtiment de l'école, un couloir de course supplémentaire dans la cour.

On fait construire des droites parallèles en recherchant la méthode de construction. On expérimente, on manipule et on se confronte au matériel disponible. La situation est vécue. On définit les droites parallèles comme des droites avec un écart constant, définition en adéquation avec les méthodes de constructions mises en œuvre lors de l'activité proposée. Et c'est l'occasion de réactiver la notion de perpendicularité, ou de se l'approprier pour certains élèves encore en difficulté. On saisit sur cet exemple l'intérêt de notre démarche dans laquelle peut se vivre effectivement un enseignement spiralaire des notions de base. La figure 5 présente des élèves au travail.

*Fig. 5 : Les parallèles*

[4] On peut aussi utiliser des allumettes de tailles différentes ou les éléments du jeu Kapla

### 3.3 Comment comparer ? (2)

A partir de photographies (fig.6) : Combien de fois plus ? Combien de fois moins ?

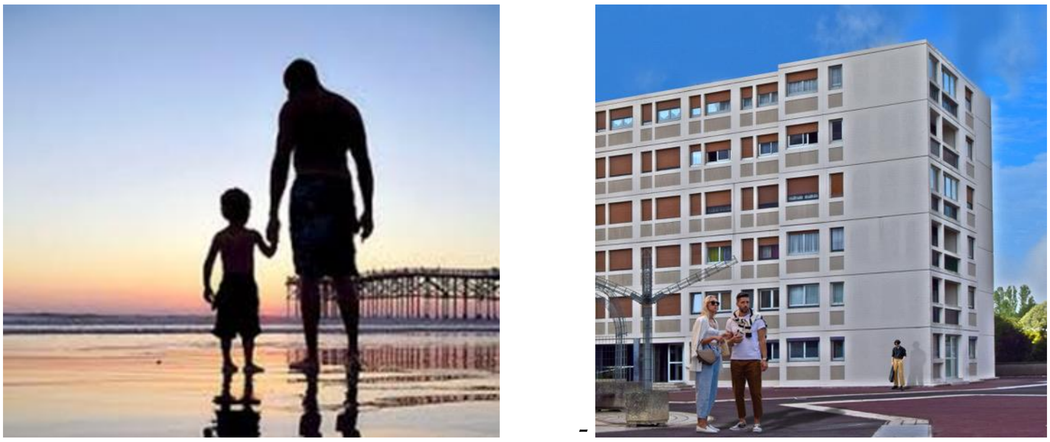


*Fig. 6 : Comparaison relative*

On travaille sur la comparaison multiplicative, le report de longueurs et on prépare à la mesure des longueurs et à la compréhension de son principe. Le nombre de fois (le rapport) est la mesure du grand quand on prend le petit pour unité. On réactive, en même temps, les notions de double et de moitié, de tiers et de quart, de multiples et d'inverses simples.

### 3.4 Comment multiplier/partager ?

**Situation 1**

Henri constate que sa maison a une taille qui est cinq fois la sienne. Représenter Henri et sa maison.

Le report de longueurs, vu dans 3.1, permet ici la construction d'un segment de longueur multiple de celle d'un segment donné.

On travaille ensuite sur le partage des longueurs et les techniques associées (ficelle, pliage, technique du losange : fig 7(a)) à partir de situations de la vie (fig. 8). C'est l'occasion également de présenter des instruments dont c'est la fonction : le diviseur point2point (fig. 7(b), le guide-âne (fig.7(c)).

Les différentes procédures, le fonctionnement des instruments sont justifiés mathématiquement : longueur partagée en 2 parties égales en traçant un losange et son deuxième axe de symétrie (fig 7 (a)), en 2, 3, …, 7 parties égales avec le diviseur point2point, système articulé conservant des écarts constants grâce à ses losanges articulés, en n parties égales avec le guide-âne qui utilise la propriété des parallèles équidistantes de découper sur n'importe quelle droite des longueurs égales. C'est l'occasion de retravailler les propriétés des figures articulés étudiées en 3.2.


*a* *b* *c*

*Fig. 7 : Procédures et instruments*

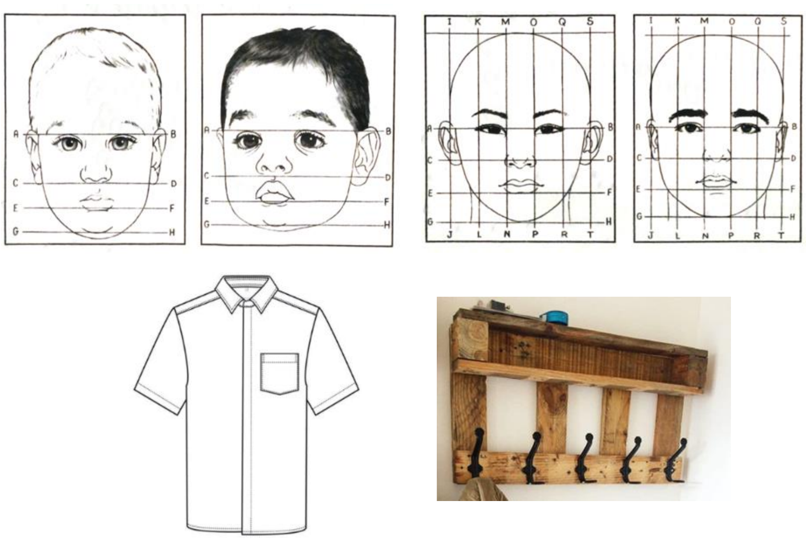


*Fig. 8 : Situations de la vie utilisées pour motiver le partage : dessiner le visage d'un bébé (a) et (b), d'un adolescent (c) et (d) ; placer cinq boutons régulièrement sur une chemise (e) ; construire un porte manteau (f)*

### 3.5 Comment mesurer ?

#### Situation 1

Mesurez, sans instruments, la distance entre deux arbres de la cour.

Le plus souvent les élèves, comme cela était fait dans l'histoire, utilisent une partie du corps. Pour alimenter le débat consécutif à cette activité, la coudée égyptienne (fig.9) ainsi que la pige du bâtisseur (fig. 10) sont présentées aux élèves.

*Fig. 9 : La coudée égyptienne*


*Fig. 10 : La pige du bâtisseur*

On amène progressivement les élèves, par le problème des mesures qui « ne tombent pas juste », au système décimal. On retrouve les instruments de mesure de longueur usuels et le tableau des longueurs avec le mètre, ses multiples et ses sous unités. L'estimation et la mesure des longueurs dans le micro espace permettent un premier travail sur les ordres de grandeur du mm au m. Mais comment faire pour mesurer les plus grandes distances, par exemple celle de l'école à la mairie, ou du terrain de foot ? Les périmètres ou les diamètres de deux cercles ? C'est l'occasion de découvrir d'autres instruments de mesure (odomètre, mètre de couturière, pied à coulisse standard ou du forestier), et de compléter un tableau avec des objets illustrant les divers ordres de grandeur.

### 3.6 Comment construire ? (2)

#### Situations

Construire un drapeau (exemples fig.11), un logo donné (avec une longueur ou un rapport imposé) (exemples fig. 12).

Construisez le plan de la classe au 1/100.

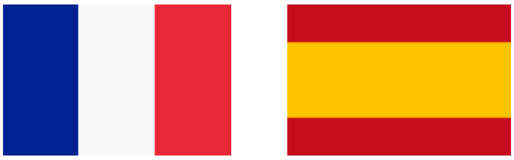


*Fig. 11 : Les drapeaux français et espagnol de format 2/3*

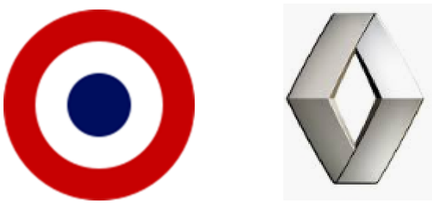


*Fig. 12 : Une cocarde, un logo*

On réinvestit les méthodes de partage mais cette fois en utilisant les mesures de longueurs. On parle de fractions simples. On prépare ou on approfondit la technique de la division. On réfléchit à la notion de format pour un rectangle.

### 3.7 Comment calculer ?

#### Situations

1- Quelle est la longueur de baguette nécessaire pour construire le squelette d'un cube d'arête 80 cm (fig. 13(a)) ?

2- Calcule le périmètre d'un champ (à partir d'un plan et d'une échelle simple).

3- Les supports de caténaires sont en moyenne distants de 63 m (fig.13 (b)).

Combien en a-t-il fallu lors de la construction de la LGV Tours-Bordeaux de 302 km ?

4- Calcule la taille en m et cm correspondant à 5 pieds 6 pouces (fig.13(c)).

5- Calcule le rapport entre la plus grande et la plus petite voiture (fig. 13 (d) et (e)).

*a*

*b*


*c*

d

e

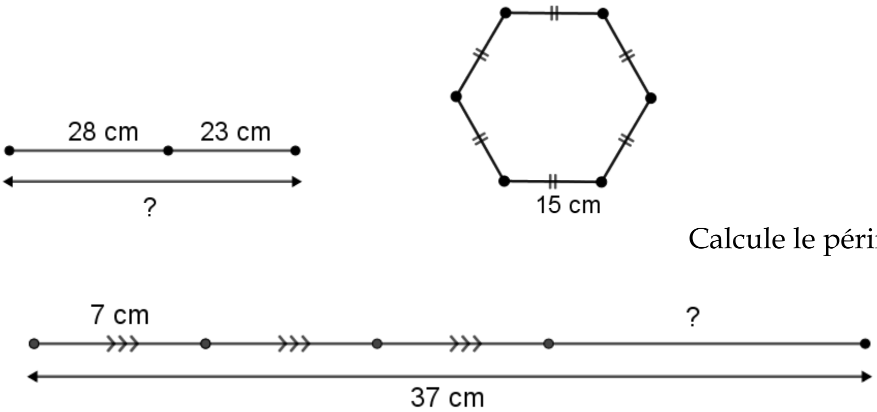
*Fig. 13 : Supports des différentes situations*

On étudie ainsi des situations additives, multiplicatives et de partage (nombre de parts ou longueur d'une part), dans le cadre de la résolution de problèmes de la vie. Les élèves sont confrontés de façon naturelle au problème de la conversion des longueurs. Le travail fait sur les ordres de grandeur permet en outre un contrôle des résultats.

## 4 Activités mentales

Les activités mentales, englobant le calcul mental, visent à participer à la construction de la grandeur et à sa meilleure représentation, tout en faisant travailler les élèves sur le calcul numérique. En voici quelques exemples pour les longueurs :

- Comparaison de longueurs d'objets (absolue, relative) ;
- Estimations (Estime la longueur du crayon avec lequel tu écris) ;
- Conversions (7 cm = …. m) ;
- Calcul mental :
  - purement numérique : 29 cm + 15 cm, 8 cm – 5 mm, 100 × 15 m ;
  - avec un support géométrique (fig.14) ;
  - Sous forme de dictée géométrique : un rectangle de longueur 10 cm a pour périmètre 35 cm. Quelle est sa largeur ?

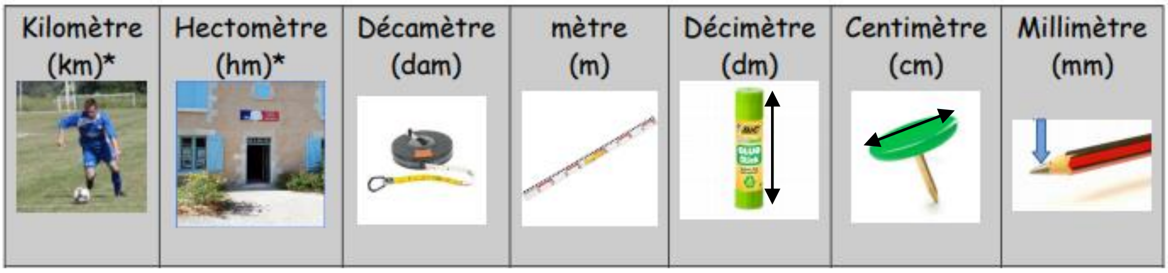



Calcule le périmètre de l'hexagone.

*Fig. 14 : Exemple de supports géométriques pour le calcul mental de longueurs*

## 5 La leçon

À l'issue de chaque notion abordée est proposé un bilan qui est aussi une aide pour les exercices d'entrainement qui suivent. Tous ces bilans, faits pour chaque grande question, font l'objet d'une leçon finale. Ils exposent des repères (exemple fig. 15), des définitions (fig.16) ou encore des techniques (fig. 17). Le choix a été fait, le plus souvent, d'exposer les connaissances sous une forme contextualisée faisant référence à des activités en classe. On trouvera le cours complet dans Coillot (2019).




*1 km : distance entre l'école et le stade de foot
*1 hm : distance entre l'école et la mairie

*Fig. 15 : Repères : unités, bilan de la classe de CM1 de l'école de Vicq-sur-Gartempe (86)*

Le cercle de centre A et de rayon 3 cm : l'ensemble des points à 3 cm de A.

Deux droites parallèles sont deux droites qui sont toujours à la même distance l'une de l'autre.

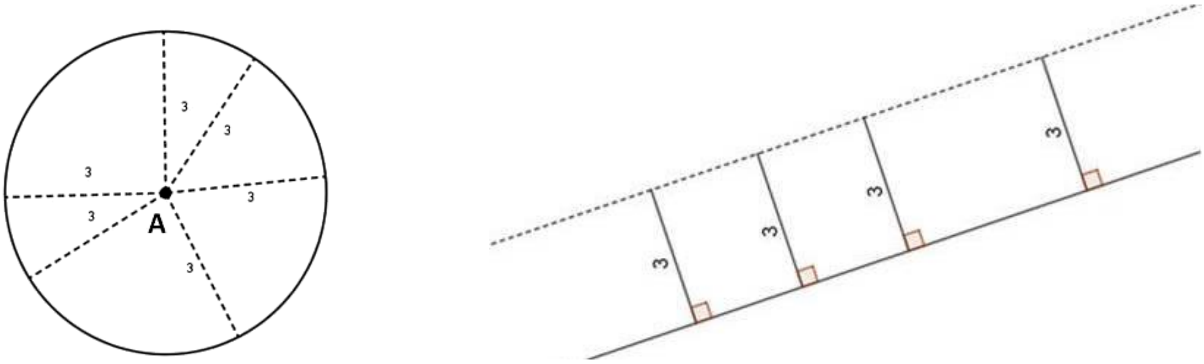



*Fig. 16 : Des exemples de définition*

On peut comparer des longueurs par estimation visuelle, par superposition, avec un compas, une ficelle, en utilisant une demi-droite sur laquelle on reporte, en mesurant.

On peut partager :

- En 2, 4, 8 par pliage, avec la règle et le compas (technique du losange).
- Par n'importe quel nombre : le guide âne, la division de la mesure.

Pour construire, à l'aide d'un compas, un triangle dont on connaît les longueurs des côtés :

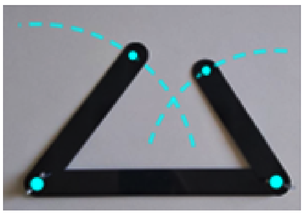


*Fig. 17 : Exemples de techniques présentées*

## III - LA MODELISATION : CONSTAT, PRECONISATIONS ET PROPOSITIONS

La notion de modèle recouvre un champ allant de la représentation plus ou moins fidèle (image, dessin, figure) à la construction abstraite, produit d'un corpus de concepts plus ou moins spécialisés (théorie). D'une façon générale, **modéliser une situation** (un problème), c'est la traduire dans des termes (formules, schémas…) qui permettront d'avoir un cadre connu pour l'interpréter et trouver une solution au problème posé. La notion de représentation, autre thème du colloque, est donc incluse dans celle de modélisation.

En psychologie, le modèle est intimement lié à la connaissance d'éléments et des interactions entre ces éléments. Ce lien entre les éléments est fondamental. Cela peut être la relation entre les données d'un énoncé et ce qui est recherché ou les relations entre les longueurs et/ou les angles d'une figure.

Un constat est fait par beaucoup d'enseignants, de formateurs ou dans les analyses des évaluations nationales ou internationales : la difficulté à transférer, à appliquer ses connaissances dans un problème. En réponse à cette difficulté de transférabilité, nous trouvons plusieurs propositions/préconisations institutionnelles telles que différentes formations (sur la modélisation en barres par exemple), différentes recommandations (un nombre minimal de problèmes à faire par semaine …), des guides (*La résolution de problèmes au cours moyen*, …).

L'IREM de Paris (Kusniak et Vivier, 2011) a distingué trois approches différentes pour apprendre à modéliser que l'on a interprété ainsi :

- ***Mettre l'accent sur la modélisation et en faire l'objet d'un apprentissage.*** Dans cette approche, modéliser devient l' « important » pour résoudre les problèmes. Il s'agit alors d'apprendre des techniques de modélisation puis de les faire travailler.
- ***Les mathématiques sont un outil pour modéliser.*** Dans cette approche, on apprend des mathématiques puis on les applique à d'autre domaines. Cette approche qu'on pourrait qualifier d'« applicationnisme » est celle de la quasi-totalité des manuels.
- ***Les mathématiques ne s'élaborent qu'à partir d'un travail de mathématisation, à partir de la réalité***. Cette approche est liée à la Théorie Anthropologique du Didactique : petit à petit, en se posant des questions sur la réalité, l'élève élabore des moyens pour répondre, des moyens de plus en plus efficaces (il va modéliser). Les connaissances (notions, savoir-faire mais aussi méthodes et donc modèles) sont dégagées puis ancrées. Pour Chevallard, la modélisation, c'est le travail normal de tout apprenant mathématique.

Nous nous inscrivons clairement dans cette dernière approche :

- les techniques s'élaborent au sein de la classe devant les problèmes ;

- le professeur dirige l'étude, il peut mettre en pratique tous les outils pédagogiques dont il dispose (soulignement, schématisation, rappel des séries de techniques) ;

- la progression, réellement spiralée, laisse le temps à chaque élève d'intégrer les concepts et de maitriser la technique experte ;

- l'enseignant prend le temps de la construction et surtout on n'impose pas une méthode « experte » trop vite ;

- des techniques sont dégagées pour une série d'exercices de même type.

La modélisation prend du sens : elle permet de simplifier le problème, de le rattacher à un problème connu, de faciliter sa résolution.

## IV - LE TRAVAIL DE LA MODELISATION A TRAVERS NOTRE APPROCHE DES MATHEMATIQUES

### 1 L'importance du choix des situations travaillées pour favoriser la modélisation

Lorsque qu'on se penche sur ce que disent les sciences de l'apprentissage on a tout de suite une bonne nouvelle : l'être humain est programmé pour apprendre ! Nous apprenons pour réduire l'incertitude qu'on a sur le monde. Nous répondons ainsi au besoin de sécurité (pyramide de Maslow). Mais cette perspective optimiste est vite douchée : les connaissances académiques, non nécessaires, ne font pas partie de ces connaissances très faciles à apprendre qualifiées, elles, de primaires. Au contraire, ces connaissances secondaires, les connaissances académiques, nécessitent une grande attention et de la motivation. Inconsciemment, l'humain évalue en permanence le ratio utilité perçue / temps effort fourni. Il faut donc trouver les leviers pour instaurer la confiance, justifier l'acquisition de ces connaissances en dégageant un besoin, une utilité. En favorisant le sentiment d'utilité et donc le processus motivationnel, on favorise l'engagement dans la tâche.

*L'être humain est plus apte à apprendre à partir de situations concrètes, il y est plus performant.*
*Lorsque les apprentissages se situent dans des contextes issus du monde réel, leur transfert est facilité.*

(Schneider et Stern, 2010)

C'est aussi une des conclusions des recherches de Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou,( 2001) ainsi que celles de Pass, van Merrienboer & van Gog(2011).

Le travail sur des situations complexes (au sens où elles mobilisent plusieurs compétences) est important. Ces situations forcent à analyser et donc à acquérir des compétences ayant un certain degré de généralité. Ces situations complexes ont une valeur formatrice. A contrario, les « situations élémentaires » visent à faire acquérir des techniques très spécifiques qui sont difficiles à utiliser dans un contexte plus riche (comme celui des situations complexes) : c'est le problème du transfert des connaissances qui, dans un tel contexte, a du mal à s'opérer. Mais la difficulté peut amener à la surcharge cognitive et être alors contreproductive. Des chercheurs australiens ont défini trois catégories de charges cognitives (Sweller, 1994) :

- la charge cognitive intrinsèque (liée à la difficulté du matériel) ;
- la charge cognitive extrinsèque (on y trouve notamment la présentation de la situation de travail et de ce qui est demandé) ;
- la charge essentielle (les ressources qui vont permettre l'apprentissage).

Sans dénaturer la notion à apprendre en diminuant sa difficulté, il faut laisser à l'élève suffisamment de ressources cognitives pour l'apprentissage. Pour éviter la surcharge cognitive, il faut donc limiter la charge extrinsèque. Les situations de travail abstraites, uniquement numériques, sans contexte par exemple, plus coûteuses cognitivement pour nombre d'élèves puisqu'elles leur apparaissent comme moins motivantes, doivent donc être utilisées avec parcimonie. Ces éléments appuient nos choix de situations travaillées en classe, concrètes et contextualisées, au cours desquelles s'opère constamment un travail de modélisation.

## 2 Exemple de modélisation dans notre enseignement

Voici une situation de travail expérimentée en classe de CM1. Cette situation fait partie de l'étude de la grandeur volume, la dernière de l'année. Elle correspond au quatrième exercice de la troisième séquence (sur 7) portant sur cette grandeur. Son objectif est la multiplication et le partage de volumes.

**4 Pack de lait**


Voici un pack de 6 briques de lait de 1L.

a) **Complète** :
La forme de la brique de lait est ………………..

La forme du pack est ……………………………

Le volume d'une brique de lait est $\frac{\dots}{\dots}$ du volume du pack.

b) Une brique a pour dimensions 9 cm x 5,9 cm x 19,2 cm.
**Calcule** puis **écris** les dimensions du pack.

……...cm ×……...cm ×……...cm

c) **Trace** en rouge, sur la photo, le pavé correspondant au pack en perspective.

d) **Reproduis** une perspective ressemblante ci-dessous.

Cette situation fait travailler la modélisation à chaque étape du questionnement.

Dans la question a), l'élève doit trouver la figure géométrique (forme spatiale) qui est la représentation mathématique (abstraite) de l'objet réel (pack ou brique). C'est la première étape du schéma classique du processus de modélisation. La figure géométrique (le pavé) est le modèle de l'objet. On dégage le modèle abstrait de l'objet concret. L'identification de la forme à partir d'un objet concret est facilitée par le fait qu'on peut imaginer (voire manipuler) cet objet dans différentes positions et donc savoir qu'il a 6 faces qui ont toutes la forme d'un rectangle. Donc la définition du pavé peut être « expérimentée ». Il est à noter que si on met le dessin en perspective cavalière d'un pavé (partagé en 6) à la place du pack, il n'y a pas de travail de modélisation. C'est seulement la reconnaissance d'une forme parmi des représentations (mathématiques) de formes standardisées (avec les problèmes inhérents à ces représentations qui risquent de faire obstacle à leur reconnaissance, comme pour le carré en « position de losange »). Pour la dernière question, on travaille sur le modèle mathématique du pack (un pavé divisé en 6 pavés de même volume) pour trouver la fraction 1/6, dans le cadre de la géométrie euclidienne, modèle du monde où se trouve le pack, dont le pavé est un objet (abstrait).

Dans la question b), on continue en travaillant dans le modèle mathématique : les calculs sont faits sur un pavé partagé en 6 pavés identiques. Mais la réponse est donnée dans le cadre de la situation concrète : les dimensions sont celles de l'objet réel (le pack).

Dans la question c), on essaie de retrouver la représentation en perspective du pavé dans la représentation plane de l'objet réel (sa photo). On schématise la représentation de l'objet concret à l'aide d'un dessin géométrique qui sera une vue en perspective du pavé. La perspective du pavé a été obtenue par un travail de modélisation de la photo, et pas comme une représentation conventionnelle soumise à des règles à suivre. C'est l'analyse du schéma de modélisation de la photo qui va permettre de réaliser la vue en perspective du pavé demandée dans la question c), et de dégager des règles de construction.

Cet exemple montre bien le va et vient incessant de l'objet au modèle et du modèle à l'objet, en lien avec le processus de modélisation.

### 3 La modélisation en barre et les grandeurs

L'utilisation de schémas sous forme de barres ou de segments pour aider à la résolution de problèmes additifs, de problèmes de partage, de problèmes sur les fractions, se retrouve dans des manuels anciens (par exemple Marijon, 1937). La représentation des nombres par des segments se trouve chez Euclide. Par contre faire de ces outils de représentation, l'outil unique pour l'apprentissage des nombres et la résolution de problèmes, peut interroger :

« Force est de constater qu'il y a pénuries de recherches sur son efficacité et que dans les rares recherches qui existent, les processus ne sont pas vraiment solides : il n'y a pas eu de comparaison, pas de respect du design expérimental. » (Annick Fagnant, conférence au colloque de la COPIRELEM de Toulouse, 2022)

En ce qui nous concerne, nous avons mentionné, dans notre paragraphe sur les longueurs en CM1, que les longueurs permettaient de schématiser de nombreux problèmes. C'est bien sûr un outil de modélisation que nous faisons utiliser à nos élèves. Mais il nous semble que pour bien comprendre une modélisation en barre, il est indispensable d'avoir compris que la somme des longueurs de deux barres est égale à la longueur des deux barres mises bout à bout ainsi que toutes les autres relations associées. Il est donc primordial d'avoir fait avant, avec les élèves, le travail d'arithmétisation de la grandeur Longueur, c'est-à-dire d'avoir travaillé l'addition, la comparaison additive et multiplicative, et le partage des longueurs, sans référence à leurs mesures. L'utilisation du modèle des longueurs pour résoudre des problèmes relevant d'autres grandeurs est facilitée dans notre démarche par le fait que ce travail d'arithmétisation est repris dans chaque grandeur étudiée.

## V - EN CONCLUSION

L'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs accorde un temps important au travail de la grandeur en tant que telle. Les concepts sont construits sans aller trop rapidement vers la mesure et les calculs. En agissant ainsi et en utilisant de nombreux leviers (manipulation, expérimentation, situations concrètes, travail très « spiralaire », activités mentales contextualisées, …), nous visons à travailler à une meilleure assimilation des notions et savoir-faire, tout en développant de très nombreuses compétences (pas pour elles-mêmes, mais en situation), en particulier les compétences de représentation et de modélisation. Il n'y a pas encore de recherche rigoureuse sur l'efficacité de l'enseignement que nous proposons, néanmoins un nombre d'indicateurs nous confortent dans notre démarche :

- la progression des résultats de nos élèves à l'évaluation nationale de 6ème (entre +5% et +14% de réussite de mieux qu'avant l'expérimentation et plus aucun élève au dernier niveau de maitrise dans l'ensemble des compétences évaluées) ;

- l'implication grandissante des familles (discussions montrant l'intérêt pour la matière à la sortie des classes, prêt d'instrument utilisé au travail, ou dans la sphère privée : fausse équerre de l'ébéniste, mètre laser pour les travaux, curvimètre pour les courses d'orientation) ;

- les retours très positifs des professeurs des écoles expérimentant cette approche des mathématiques (sur leur plaisir à enseigner, sur les automatismes des élèves qu'ils voient se mettre en place et sur la disparition des blocages liés à la discipline).

## VI - BIBLIOGRAPHIE

Coillot J. & alii (2019) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : MATÉRIAUX pour expérimenter*, IREM de Poitiers.

Coillot J., Guichard J-P. & alii (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les populations*, IREM de Poitiers.

Groupe collège de l'IREM de Poitiers (2016) La vie des hommes comme sujet d'étude, *Les Cahiers pédagogiques* **529**, 53-54.

Groupe collège (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les ANGLES*, IREM de Poitiers.

Groupe collège (2012) *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les LONGUEURS*, IREM de Poitiers.

Guichard J-P. & Peyrot S. (2011) *Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens*, Bulletin de l'APMEP **492**, 67-72 (accessible en ligne).

Kuzniak,, Vivier (2011) *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique*. IREM de Paris

Marijon A (1937), *Le Calcul à l'École Primaire, Hatier*

Schneider et Stern (2010) *L'apprentissage dans une perspective cognitive*.

Sweller (1994) *Cognitive Load Theory, learning difficulty, and instructional design*

Tricot (2017) *L'innovation pédagogique*

Villani C. & Torossian C. (2018) *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, Ministère de l'éducation nationale, (accessible en ligne).

Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou (2001) *Designing learning environments to promote conceptual change in science.*

# REPRESENTER, MODELISER, QUELLES CONSEQUENCES SUR LES RESULTATS D'ELEVES EN RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS ?

**Annie CAMENISCH**
Maitre de conférences en Sciences du langage
INSPE, Université de Strasbourg
LiLPa UR 1339
annie.camenisch@unistra.fr

**Serge PETIT**
Professeur de mathématiques honoraire
IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg
serge.labaroche@sfr.fr

Cette communication rend compte d'une recherche réalisée en 2021-2022, portant sur les problèmes additifs à énoncés verbaux, et à laquelle 224 enseignants se sont inscrits, dont la grande majorité travaillaient en REP et REP+. Des classes de sixièmes de trois collèges, dont l'un en REP+, se sont jointes à ce travail. En tout, près de 4 900 élèves étaient initialement inscrits. Mais les conditions encore difficiles dues au Covid ont fait chuter le nombre de classes ayant suivi ce travail jusqu'à son terme.
Cette recherche proposait aux enseignants concernés un protocole strict d'apprentissage de certains écrits intermédiaires (J. Goody, 2006) au sens large (écrits, graphiques, schémas, etc.) et trouve ses fondements dans les travaux de Duval (1995), notamment pour ce qui concerne les difficultés inhérentes aux changements de registres de représentations proposés en résolution de problèmes.

## I - INTRODUCTION

Cette recherche s'est inscrite dans la suite d'une recherche menée en 2020-2021, sur un autre public d'élèves et d'enseignants (aucun professeur n'est commun aux deux recherches). Contrairement à l'année précédente (Petit & Camenisch, 2022) un seul et même protocole a été proposé à différents niveaux d'enseignement (CE2, CM1, CM2, sixième). Tous les problèmes donnés étaient en effet des problèmes ne combinant que des compétences élémentaires faisant partie des attendus de fin de cycle 2.

Il s'agit de problèmes à deux (donc à trois) comparaisons et des problèmes à une ou deux transformations dont les données peuvent apparaitre sous la forme de comparaison.

Notre travail se situe à la croisée de deux cadres théoriques, celui des écrits dits « intermédiaires », faisant référence aux travaux de Goody (2006), l'autre étant celui de la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (1995), notamment les opérations de « formation des représentations », de « traitement » et surtout l'opération appelée « conversion » entre deux registres, associée au concept de « congruence » sémiotique (Petit & Camenisch, 2019).

## II - CONSTATS : DIFFICULTES DES ELEVES

Les expérimentations menées depuis 2020 ont permis de repérer et de confirmer un certain nombre de difficultés récurrentes chez les élèves, relevées dans les tests initiaux proposés avant tout travail explicite dans ces classes. Sans entrer à ce stade dans des données chiffrées, qui seront précisées plus loin pour la nouvelle étude réalisée, nous proposons un repérage des erreurs fréquentes des élèves portant sur le langage, les calculs ou les différentes représentations mobilisées. Ces difficultés apparaissent essentiellement dans des problèmes complexes enchainant trois comparaisons ou deux transformations.

En effet, les difficultés de résolution n'apparaissent guère dans les problèmes triviaux (« congruents »), mais surgissent dès que les situations sont plus implicites, comme par exemple la définition d'une transformation définie par une comparaison.

## 1 Deux types de problèmes complexes

Les problèmes portant sur trois comparaisons utilisaient tous les mêmes formulations, quel que soit l'habillage proposé. Par exemple :

> *Pol a 18 billes de moins que Karim. Pol a 4 billes de plus que Sarah. Compare le nombre de billes de Karim et de Sarah.*

Les problèmes de ce type cumulent plusieurs difficultés. Ainsi ils ne comportent pas d'état connu sur lequel s'appuyer, mais décrivent des comparaisons. Du point de vue langagier, le sujet des phrases de la partie informative des problèmes ne correspond pas à ce qui est recherché. La question porte en effet sur le second terme de chaque comparaison. Enfin la phrase injonctive « compare » nécessite de savoir exprimer cette comparaison par une des deux phrases reprenant la même structure que les phrases de la partie informative :

> *Karim a 22 billes de plus que Sarah.*
> *Sarah a 22 billes de moins que Karim.*

Les problèmes à deux transformations, type de problème où intervient une temporalité, comportent aussi la difficulté de ne pas respecter l'ordre chronologique, mais d'énoncer les états et les transformations dans un ordre différent, la question portant sur l'état initial de la première transformation :

> *Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième. Elle en a gagné 5 à la première.*
> *Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?*

Les désordres temporels nuisent à la représentation claire de la situation et demandent une reconstitution mentale des évènements. La réponse attendue devait aussi comporter suffisamment d'informations précises pour que l'on puisse la situer temporellement.

> *Léa avait 8 billes au début de la récréation.*

## 2 Des difficultés langagières

Bien des élèves de cycle 3 peinent à formuler une phrase sémantiquement et syntaxiquement correcte en réponse à la consigne. Pour chaque problème, il était explicitement attendu de rédiger une *phrase-réponse*. Pour les énoncés à comparaison, la consigne était même plus précise : *Ecris une phrase qui exprime cette comparaison*.
Malgré le modèle des deux phrases présentes dans la partie informative, de nombreux élèves n'ont pas exprimé de comparaison, mais ont exprimé des états : « *Karim a 22 billes.* », « *Sarah a 14 billes.* », voire même : « *Pol a 22 billes.* », alors que la question portait sur la comparaison des nombres de billes de Karim et de Sarah. Les élèves rencontrent-ils des difficultés à comprendre l'injonction, la situation et à se la représenter, ou est-ce plutôt une difficulté liée à l'expression de la comparaison ? Les élèves auraient-ils réussi s'ils avaient disposé d'une phrase modèle ou phrase à trou plus explicite ? On pourrait attendre d'élèves de CM qu'ils puissent à la fois comprendre la situation comparative et utiliser une expression adéquate pour l'exprimer. Or ce type d'expression n'est guère mobilisé spontanément, ni par la formulation attendue, ni par une autre formulation, comme si les élèves ne comprenaient pas à quel type de situation renvoie la consigne « compare ».

## 3 Des difficultés de représentation

Les productions des élèves ne comportent pas seulement les réponses mais un espace était laissé libre pour qu'ils puissent utiliser des écrits intermédiaires – calcul ou représentation – pour parvenir à la réponse. L'analyse des traces écrites dans les productions des élèves montrent de nombreux calculs, en ligne ou posés. Les réponses erronées montrent souvent que l'élève a réalisé les calculs dans l'ordre d'apparition des données, tant pour les problèmes comparatifs, que pour ceux enchainant des transformations. Parfois ils s'appuient sur des mots inducteurs d'opération pour le choix de l'opération, le mot « perdu » entrainant une soustraction, « gagné » une addition. Certains élèves utilisent encore des dessins, représentant les personnages, pour tenter de se représenter la situation. Plus rarement, des élèves essaient des représentations diverses sous forme de bâtons, de ronds, en barrant certains éléments (figure 1).

Les élèves tâtonnent en cherchant à représenter, mais n'utilisent aucun outil qui aurait été

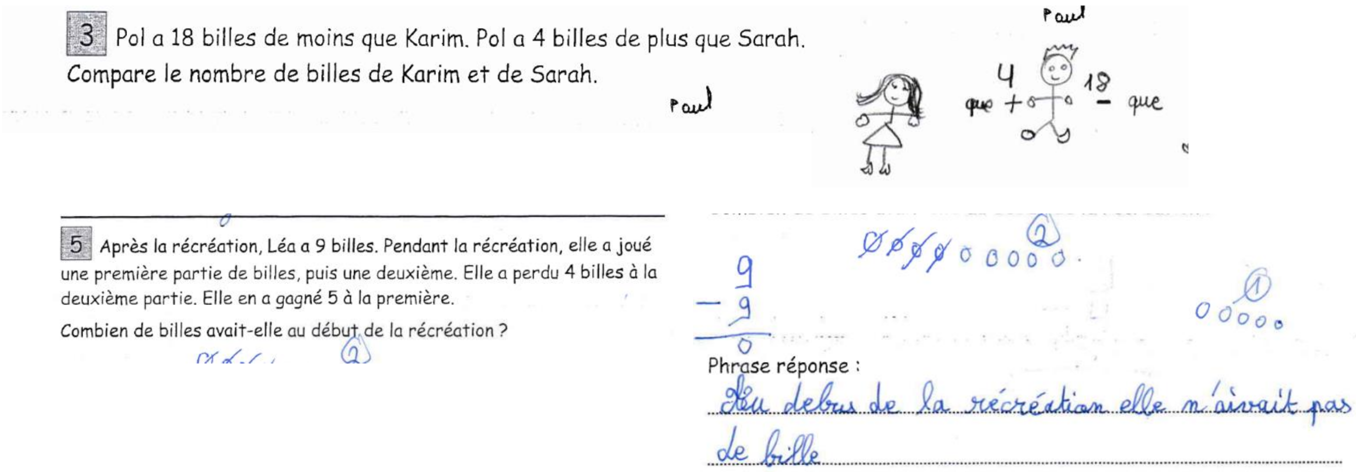



*Figure 1.Tentatives de représentation. Classe de CM1.*

systématiquement enseigné. Il est remarquable de constater que dans aucune des productions examinées, les élèves n'utilisent de diagramme en barres, pourtant souvent objet d'un enseignement explicite.

L'analyse des productions des élèves montre donc que les élèves sont encore souvent guidés par des automatismes de traitement des données ou des automatismes sémantiques et que les rares représentations mobilisées restent inopérantes ou inadéquates. Elle révèle aussi une quasi absence de vérification des réponses, même si cela arrive occasionnellement.

Nous appuyant sur les concepts théoriques définis précédemment (Petit & Camenisch, 2019, 2022), les dispositifs mis en place visent donc à lever ces difficultés rencontrées par les élèves du cycle 3 par un travail explicite sur des écrits intermédiaires (Chabanne & Bucheton, 2002). Ces écrits intermédiaires peuvent être textuels ou langagiers mais aussi être des graphiques ou des schémas (Goody, 2006), nécessitant des changements de registres de représentation (Duval, 1995). Rappelons que représenter, en mathématiques, c'est rendre pleinement présent une situation ou un concept par des signes en fonction d'une tâche donnée.

Nos hypothèses sont de deux ordres : d'une part nous supposons que des représentations intermédiaires, par essence éphémères, peuvent aider les élèves en difficulté à mieux comprendre les énoncés, d'autre part que ces représentations conduisent à la mobilisation de modèles pertinents, explicitement enseignés et mobilisés, pour la résolution de certains problèmes complexes.

# III - PROTOCOLE DE TRAVAIL 2021-2022

## 1 Principe

La même méthodologie mise en œuvre dans l'étude portant sur les classes de CM en 2020-2021 a été reproduite pour les classes de cycle 3, comportant des classes de CM et de 6e, hors REP, en REP ou REP+, qu'il s'agisse de classes à simple ou multiples niveaux. Des enseignants volontaires répartis sur tout le territoire national ont été destinataires d'un protocole strict de travail, composé de deux séquences d'enseignement, encadrées par un test initial et un test final de huit problèmes (pour le détail, voir Petit & Camenisch, 2022).

La séquence 1, dont les résultats ont été explicités lors du colloque COPIRELEM de Grenoble (Petit & Camenisch, 2022), avait pour objectif d'apprendre à « représenter pour résoudre des problèmes à deux comparaisons ». Elle comporte dix séances. La séquence 2, sur six séances, a pour objectif d'enseigner aux élèves à représenter pour résoudre des problèmes à deux transformations. Le même dispositif a été proposé à tous les élèves du cycle 3 inscrits – CM1 (1 109 élèves), CM2 (1 083 élèves) et sixième (404 élèves) – et qui ont tous participé au test initial.

## 2 Test initial, descriptif sommaire

Le test initial comporte deux séries d'énoncés (figure 2). Les quatre premiers problèmes relèvent des problèmes de comparaison. Les problèmes P1 et P4 sont « simples », non congruents (Duval, 1995), et ne comportent qu'une comparaison[1]. Ils sont destinés à permettre aux élèves de se remémorer des situations comparatives explicites, avec les expressions comparatives adéquates. Les problèmes P2 et P3 sont des problèmes à deux comparaisons. Il s'agit de trouver la troisième, objet d'apprentissage de la séquence.

| | |
|---|---|
| **P2**. Karim a 18 billes de plus que Pol. Sarah a 22 billes de moins que Karim. Compare le nombre de billes de Sarah et de Pol. | **P3**. Pol a 18 billes de moins que Karim. Pol a 4 billes de plus que Sarah. Compare le nombre de billes de Karim et de Sarah. |
| **P5**. Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première.<br>Combien de billes avait-elle au début de la récréation ? | **P7**. Ce matin, Karima a dépensé 6 euros. Puis son papa lui a donné 8 euros. Après ce cadeau, elle a 17 euros. Combien d'argent avait-elle ce matin avant son achat ? |

*Figure 2. Enoncés des problèmes 2, 3, 5, 7. Test initial*

Les problèmes P5 à P8 sont des problèmes additifs à deux transformations, dits « complexes » car ils composent des problèmes élémentaires (problèmes à une transformation ou une comparaison). Les problèmes à deux transformations les plus faciles sont ceux où il est possible de dérouler les calculs en suivant l'ordre d'énonciation qui est, dans ce cas, l'ordre chronologique. Aucun énoncé de ce type n'a été proposé aux élèves, ils devaient résoudre des problèmes non-congruents du point de vue de l'ordre chronologique. Seuls les problèmes à deux transformations P5 et P7 du test portent sur l'objet explicite de l'apprentissage de la séquence 2.

| | Problèmes | Nature du problème[2] |
|---|---|---|
| Problèmes de comparaison | P1 | Une comparaison |
| | P2 | Deux comparaisons sans état connu |
| | P3 | Deux comparaisons sans état connu |
| | P4 | Une comparaison (idem CE) |
| Problèmes de transformation et mixtes | P5 | Deux transformations : Ef, T1, T2, (Ei ?) |
| | P6 | Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, (T2 ?) |
| | P7 | Deux transformations : T1, T2, Ef, (Ei ?) |
| | P8 | Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, (T2 ?) |

*Figure 3. Types d'énoncés de problèmes. Test initial*

Les deux autres problèmes P6 et P8, considérés comme « mixtes », mêlent situation comparative et deux transformations. Ces derniers problèmes, particulièrement difficiles, constituent des « distracteurs » mais

[1] Les problèmes de non-congruence qu'ils posent ont été explicités dans les actes du colloque COPIRELEM 2021 à Grenoble (Petit & Camenisch, 2022).

[2] Ei ou Ef : Etat initial ou Etat final, T1 : première transformation dans l'ordre chronologique, T2 : la deuxième, Comp.Ef-Ei : Comparaison entre l'Etat final et l'Etat initial. L'objet de la question et sa place dans l'énoncé sont indiqués entre parenthèses.

permettent aussi de vérifier s'il y a éventuellement un transfert de compétence et d'outils vers des problèmes qui n'ont pas été l'objet d'un travail explicite.

Les énoncés des problèmes des tests sont donc composés de deux séries de problèmes à comparaisons et de problèmes à deux transformations, de deux natures différentes (figure 3).

## 3 Résultats au test initial

Les tableaux de la figure 4 présentent les résultats, en pourcentage de réussite, aux énoncés de problèmes en mathématiques en cycle 3 aux huit problèmes du test initial[3].

| | | CM1 / 1109 | CM2 / 1083 | 6e /404 |
|---|---|---|---|---|
| Comparaisons | P1 | 70,5 % | 73,5 % | 83,8 % |
| | P2 | 11,4 % | 11,7 % | 17,2 % |
| | P3 | 8,9 % | 9,2 % | 13,9 % |
| | P4 | 60,3 % | 70,3 % | 73,6 % |

| | | CM1 / 1109 | CM2 / 1083 | 6e / 404 |
|---|---|---|---|---|
| Transformations et « mixtes » | P5 | 17,4 % | 22,0 % | 31,4 % |
| | P6 | 7,7 % | 10,7 % | 11,8 % |
| | P7 | 13,2 % | 21,0 % | 30,6 % |
| | P8 | 9,8 % | 6,3 % | 3,4 % |

*Figure 4. Résultats en mathématiques. Test initial*

Les problèmes P1 et P4, problèmes simples mais non-congruents, même s'ils sont les mieux réussis, posent des difficultés, globalement, pour plus d'un quart des élèves en CM. Les problèmes P2 et P3, qui relèvent du cycle 2, renvoient un taux de réussite très faible. Cet échec massif peut s'interpréter comme une difficulté pour l'élève à définir ce qu'il doit faire. L'injonction de faire (« compare »), qui se distingue ici d'une question, nécessite de l'élève qu'il mobilise à la fois les éléments lexicaux et syntaxiques de la réponse. On ne peut se contenter d'une réponse numérique, contrairement à d'autres problèmes dont la question commence par « combien ». Les problèmes à deux transformations P5 et P7 sont majoritairement échoués par les élèves, quel que soit le niveau. On peut cependant remarquer que les élèves rencontrent moins de difficultés que pour les problèmes comparatifs, qui pourraient pourtant sembler plus élémentaires. Enfin les problèmes « mixtes » P6 et P8 sont massivement échoués, pour des raisons notamment inhérentes à la définition d'une transformation par une comparaison.

La réussite des élèves en français (figure 4) concerne la qualité sémantique et syntaxique des réponses des élèves de cycle 3 aux huit énoncés de problèmes en mathématiques du test initial.

| | | CM1 / 1109 | CM2 / 1083 | 6e /404 |
|---|---|---|---|---|
| Comparaisons | P1 | 84,6 % | 87,0 % | 93,7 % |
| | P2 | 22,3 % | 21,1 % | 27,5 % |
| | P3 | 23,8 % | 25,8 % | 22,7 % |
| | P4 | 77,2 % | 82,6 % | 85,0 % |

| | | CM1 / 1109 | CM2 / 1083 | 6e / 404 |
|---|---|---|---|---|
| Transformations et « mixtes » | P5 | 72,9 % | 73,4 % | 80,6 % |
| | P6 | 47,7 % | 47,8 % | 56,4 % |
| | P7 | 69,9 % | 76,9 % | 76,8 % |
| | P8 | 67,2 % | 69,8 % | 75,9 % |

*Figure 4. Résultats en français, qualité syntaxique et sémantique de la phrase réponse, Test initial*

Les résultats en français montrent que les élèves ne parviennent pas toujours à construire une phrase syntaxiquement et sémantiquement correcte. Le tableau ci-dessus montre que les élèves parviennent à écrire une phrase réponse sémantiquement et syntaxiquement correcte lorsque la question est explicite, et

[3] Les couleurs varient en fonction des taux de réussite des élèves (vert : réussite supérieure à 75 % ; jaune : réussite entre 50 et 75 % ; orange : réussite entre 25 et 50 % ; rouge : réussite inférieure à 25 %).

qu'à tous les niveaux, ils échouent massivement à formuler une telle phrase en réponse à l'injonction « compare ».

Si l'on compare la réussite des élèves en fonction de la classe, on peut remarquer (figure 5) que la croissance « naturelle » liée à l'âge des élèves et au niveau de la classe est très lente. P8 est un cas particulier qui échappe aux statistiques.

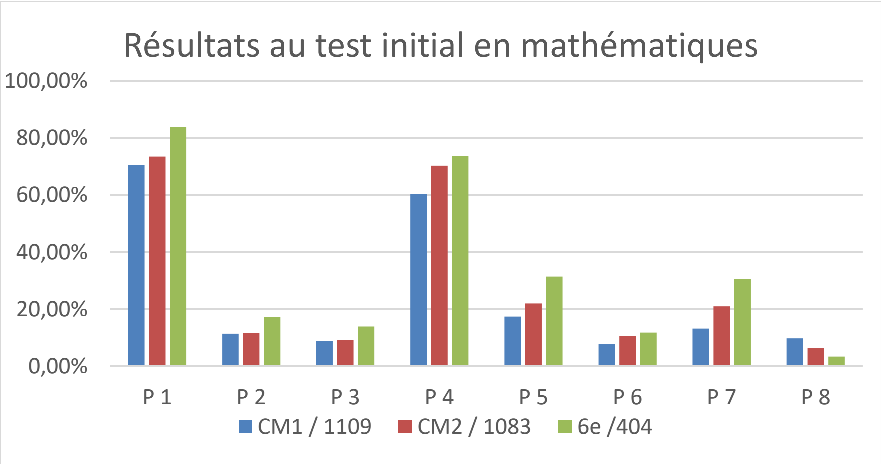



*Figure 8. Comparaison des résultats en mathématiques par niveau. Test initial.*

## 4 Rappel de la séquence 1

Le protocole mis en place tient compte des constats ci-dessus. Il vise la mobilisation d'outils linguistiques, la rédaction de phrases réponses et la construction d'outils graphiques pertinents (diagrammes et schémas notamment), outils intermédiaires au sens de Goudy (2006), conversions de registres au sens de Duval (1995) et la vérification systématique des résultats par les élèves eux-mêmes.

La séquence 1 précède obligatoirement la séquence 2 et on ne saurait s'en dispenser puisque les outils qu'elle construit sont nécessaires à la maîtrise des outils qui seront élaborés dans la séquence 2. Certains enseignants ayant cru pouvoir se passer de cette séquence n'ont pas pu poursuivre l'expérimentation. Les dix premières séance (séquence 1) ont permis aux élèves de maitriser des outils de base pour la résolution de problèmes de comparaison (une ou deux comparaisons).

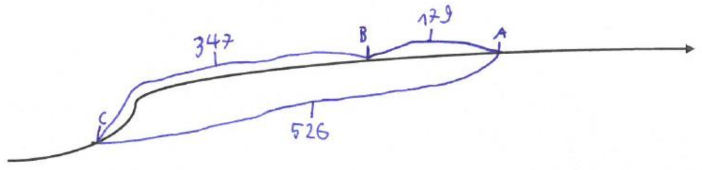
Les élèves ont ainsi appris à réaliser des traitements en langue en reformulant des parties d'énoncés. La production d'une phrase « à trou » à partir de la phrase interrogative de l'énoncé conduit à une autre formulation, plus explicite de ce qui est attendu, sous forme de phrase déclarative, forcément incomplète. Un autre traitement consiste à reformuler les phrases comparatives, transposant une phrase avec « de plus que » en une phrase de même sens comportant « de moins que », en opérant les modifications nécessaires sur le sujet et le comparé. Les élèves ont aussi appris à réaliser des représentations graphiques, qui constituent une conversion du registre de la langue naturelle vers celui des « diagrammes ».

Cet apprentissage sur la représentation sous forme de graphiques est construit progressivement à partir de manipulations pour finalement se structurer, sous forme d'un outil pour les élèves (Petit & Camenisch, 2015). Il est consolidé par de nombreux entrainements où les élèves sont habitués à représenter des situations sous forme de diagrammes. Cet outil atteint cependant ses limites avec des grands nombres ou des nombres à la fois petits et très grands. Il est donc remplacé par un schéma dit « à main levée », schéma ne respectant que l'ordre des valeurs, à défaut de représenter proportionnellement celles-ci.

Un tel schéma est constitué d'une ligne (pas nécessairement bien droite), orientée (par une flèche) afin de pouvoir respecter l'ordre des valeurs données, les proportions entre les différentes valeurs n'ayant alors aucun intérêt ne sont pas respectées, ce qui permet de représenter sur une même ligne à la fois de très grandes et de très petites valeurs, ce qui devient illisible, voire impossible à faire en respectant les proportions (figure 6).

Un train A transporte 179 voyageurs de plus qu'un train B. Le train B transporte 347 voyageurs de plus qu'un train C. Compare le nombre de voyageurs transportés par les trains A et C.

**1.** Place les points A, B et C dans le bon ordre sur la ligne orientée ci-dessous. Indique les différences du nombre de passager que tu connais.
**2.** Représente comme au tableau les deux comparaisons de l'énoncé.




On appelle cette représentation **« un schéma à main levée »**

**3. Calcul :** 347+179 = 526

**4. Ma réponse :** Le train A a 526 passagers de plus que le train C.

*Figure 6. Apprentissage de représentation sous forme de schéma. Séquence 1.*

Tous ces outils, systématiquement découverts et structurés comme tels par les élèves, qu'il s'agisse de reformulations, de diagrammes ou de schémas, peuvent être mobilisés par les élèves pour mieux se représenter les situations comparatives. Ces outils doivent rester explicitement à disposition des élèves, pour qu'ils puissent les mobiliser selon leurs besoins ou difficultés en résolution de problèmes. Certains sont voués à rester éphémères, comme le diagramme, d'autres peuvent perdurer comme le schéma. Après apprentissage, il revient à l'élève de mobiliser tel ou tel autre type d'outil. Son utilisation n'est pas suggérée par l'enseignant.

## 5 Description de la séquence 2

La séquence 2 (les six dernières séances) a pour objectif de permettre aux élèves de maitriser, après l'avoir pour partie construit ensemble, un outil fondamental pour résoudre les problèmes additifs à une ou deux transformations, voire davantage, quelle que soit la donnée manquante, qu'il s'agisse d'un état (initial, intermédiaire ou final) ou d'une transformation, quelle que soit sa position, ou d'une composition de transformations, et de schématiser ces différents outils. Ceux-ci constituent des écrits intermédiaires (Chabanne & Bucheton, 2002) qui accordent une place importante à la représentation de l'axe temporel ainsi qu'à la visualisation des variations de la variable de l'énoncé (Petit, 2018).

Les représentations graphiques vont donc s'enrichir d'un axe temporel, caractéristique de ce type d'énoncés à transformation. Les élèves vont d'abord apprendre à représenter des problèmes à une transformation dans un graphique idiosyncrasique (figure 7). L'utilisation d'un graphique orienté temporellement nécessite de rétablir l'ordre chronologique des évènements, en indiquant les marqueurs temporels explicites (lundi, mardi, etc.) ou implicites (temps des verbes par exemple). Les états sont représentés dans des diagrammes comme pour les comparaisons, mais les transformations ne peuvent être indiquées que sous forme de phrase (Petit & Camenisch, 2007).

On peut se demander dans quelle mesure cet outil sert de modèle pour faciliter la représentation de la situation et en quoi il peut être utile pour résoudre les problèmes à transformations. Une fois que les élèves ont été habitués à résoudre avec les diagrammes les problèmes de comparaison, ils sont capables de formuler la comparaison entre deux états représentés dans une telle représentation. Toutes les données étant représentées, la donnée cherchée se lit sur la représentation ou se calcule à partir de la lecture de la représentation, devenue alors un outil d'investigation. Cet outil permet ainsi de représenter les différentes données du problème, filtrant de ce fait les données inutiles, d'indiquer les variables, et de reconstituer la chronologie. Ce modèle est construit avec les élèves qui doivent aussi s'entrainer massivement à réaliser cette conversion du texte vers le graphique mais aussi à écrire un énoncé d'après un graphique (en faisant varier l'ordre d'énonciation par rapport à l'ordre chronologique) ou décrire une situation d'après un tel graphique.

Ce graphique permet d'éviter les classements des problèmes additifs à transformation selon que l'on cherche l'état initial, l'état final ou la transformation, ou que l'on compare des états puisqu'il sert à résoudre tous ces types de problèmes.

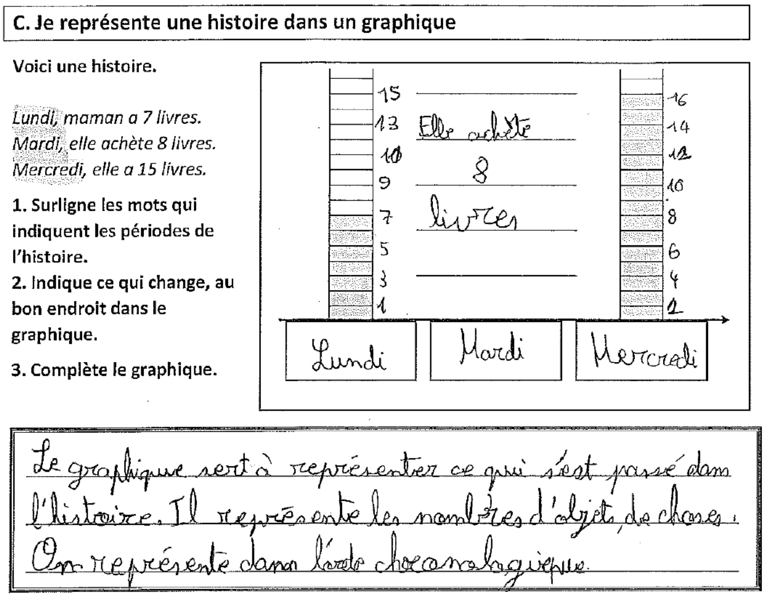



*Figure 7. Apprentissage de représentation sous forme de graphique. Séquence 2*

Avant de devenir un outil pour la résolution du problème, cet outil va permettre de repérer, dans le texte de l'énoncé, les éléments essentiels à la compréhension. Dans une phase de découverte, les élèves vont suivre de manière très guidée une stratégie explicite : entourer la question ou consigne, anticiper une phrase réponse à trou (elle guide la recherche), l'écrire, surligner les mots ou les indications liées aux temps des verbes, indices des périodes, et reporter ces informations dans le graphique. Le graphique facilite la lecture de l'énoncé et libère l'élève du poids de la compréhension textuelle pour se concentrer sur la résolution du problème, à l'aide de l'outil. Cet apprentissage fait explicitement partie des attentes du programme de français du cycle 3, dans la compétence « Comprendre des textes » : « Lire et comprendre des textes et des documents (textes, tableaux, graphiques, schémas, diagrammes, images) pour apprendre dans les différentes disciplines ». Enfin après résolution du problème, les élèves complètent la phrase réponse à trou et surtout peuvent vérifier l'exactitude des calculs en relisant le graphique dans l'ordre chronologique. Cette phase de vérification, souvent absente que ce soit chez les élèves ou les adultes, est facilitée par le graphique qu'on lit alors de gauche à droite, comme une histoire, en vérifiant la cohérence des données.

Ce travail préalable établit les conditions nécessaires pour résoudre des problèmes à deux transformations, considéré comme une composition de transformations. Les graphiques peuvent ainsi s'enchainer pour représenter un problème à deux transformations, l'état final issu de la première transformation devenant l'état initial de la seconde transformation (figure 8).

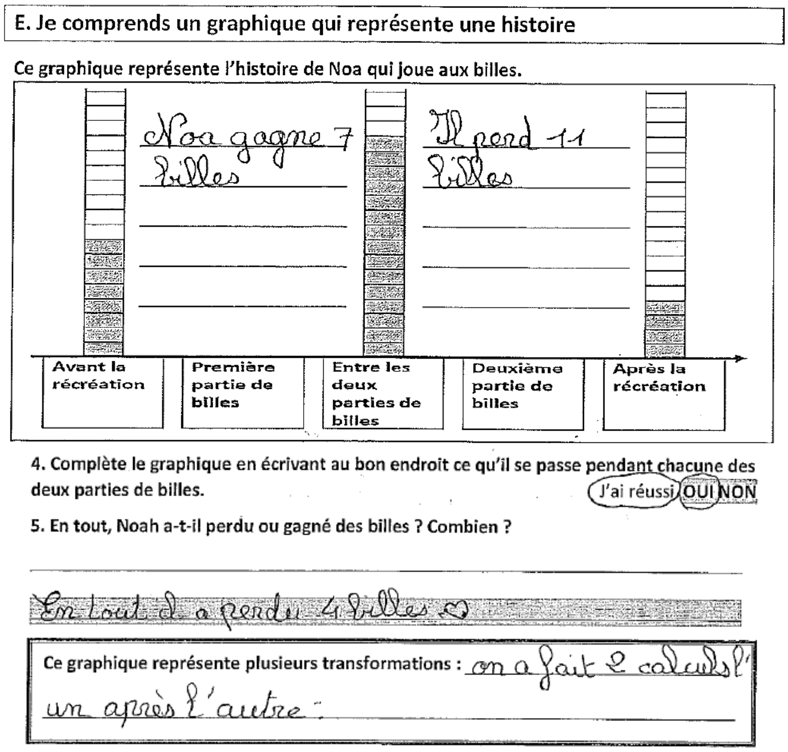



*Figure 8. Graphique pour la résolution d'un problème à deux transformations. Séquence 2*

En suivant la même stratégie que pour les énoncés à une transformation, explicitement proposée sous forme de guidage dans une première phase d'entrainement, les élèves vont apprendre à mieux lire et comprendre ces énoncés souvent complexes, surtout lorsque s'ils sont non-congruents au niveau de leur temporalité. Ils vont apprendre à repérer les verbes qui indiquent les transformations et à reconstituer les informations implicites, en particulier les périodes qui ne sont pas indiquées. Cet outil rencontre les mêmes limites que celui relatif aux problèmes comparatifs avec les grands nombres ou les nombres de grandeurs très différentes. Les mêmes adaptations valent, *mutatis mutandis.*

La séquence 2 a permis aux élèves d'apprendre à mieux lire les données d'un problème présenté sous forme textuelle, en passant par un premier écrit intermédiaire sous forme d'un graphique, pour parvenir à un écrit intermédiaire plus durable et plus performant qui est le schéma. L'outil demande à être patiemment construit avec les élèves, en faisant expliciter toutes les étapes. S'en suit une seconde phase d'entrainement, afin que tous les élèves puissent s'approprier l'outil.

## IV - RESULTATS AU TEST FINAL

Le nombre d'élèves ayant participé à l'ensemble du protocole et dont les résultats ont été communiqués est faible en regard du nombre d'élèves qui ont réalisé le test initial, soit 185 élèves en CM1, 129 en CM2 et 104 en 6$^{e}$. Les élèves de sixième ayant passé le test final sont tous des élèves d'un seul et même collège classé en REP+, où la séquence 2, portant sur les problèmes à deux transformations n'a pas été l'objet du travail prévu par le protocole, voire pas du tout travaillée avant la passation du test.

### 1 Résultats en mathématiques en classe de CM1 et CM2

Les résultats au test initial et au test final des CM1, exprimés en pourcentage, concernent donc les 185 élèves qui ont suivi l'ensemble du travail (figure 9).

Bien que reposant sur un effectif réduit, ces résultats semblent montrer la pertinence d'un tel dispositif, en particulier pour les problèmes les plus difficiles. On peut constater que les élèves progressent aussi, mais de manière moins spectaculaire, pour les problèmes « mixtes » (P6 et P8) qui n'ont pas été l'objet d'un travail explicite d'apprentissage, mais qui demandent de combiner les connaissances acquises sur la résolution des problèmes comparatifs sans état connu et des problèmes à deux transformations.

Afin de nous faire une idée de la progression constatée sur le tableau ci-dessus, nous considérons comme groupe témoin le groupe formé des élèves de sixièmes ayant participé au test initial (404 élèves). Le test du Khi² fait ressortir les résultats suivants. Les résultats aux problèmes initialement assez réussis (P1 et P4) ne font pas ressortir de différence significative. Par contre, les problèmes P2, P3 et P5 sont significativement mieux réussis, au seuil de 1 % (Khi² resp. 43,18 ; 51,06 ; 8,00) par les élèves de CM1 après apprentissage que par les élèves de sixièmes avant apprentissage. Le problème P7 est significativement mieux réussi par les CM1 après apprentissage que par les élèves de sixième avant apprentissage au seuil de 2 % (Khi² = 5,545) et le problème P5 l'est également, au seuil de 5 % (Khi² = 4,543).

| | | | CM1 (185 élèves) | | CM2 (129 élèves) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Problèmes | Nature du problème | Test Initial | Test final | Test initial | Test final |
| Problèmes de comparaison | P1/P9[4] | Une comparaison | 72,0 | 77,5 | 74,4 | 85,5 |
| | P2/P10 | Deux comparaisons sans état connu | 5,5 | 56,2 | 11,2 | 63,2 |
| | P3/P11 | Deux comparaisons sans état connu | 9,5 | 53,8 | 6,6 | 64,9 |
| | P4/P12 | Une comparaison | 63,1 | 76,3 | 74,6 | 82,5 |
| Problèmes de transformation et mixtes | P5/P13 | Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?) | 17,9 | 45,8 | 26,4 | 59,5 |
| | P6/P14 | Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?) | 6,7 | 23,2 | 13,6 | 40,5 |
| | P7/P15 | Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?) | 7,5 | 46,5 | 21,1 | 64,3 |
| | P8/P16 | Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 (?) | 4,6 | 8,4 | 6,5 | 13,9 |

*Figure 9. Résultats en mathématiques en CM1 et CM2*

Il semble donc possible de déduire que le protocole proposé a un effet très net sur les apprentissages des élèves en résolution de problèmes et qu'en conséquence un travail explicite sur la langue et les outils graphiques intermédiaires, même réalisé de manière un peu artificielle, c'est-à-dire non intégré à l'enseignement régulier et de manière massée, trouve toute sa pertinence.

Les résultats au test initial et au test final des CM2, exprimés en pourcentage, concernent les 129 élèves qui ont suivi le protocole. Leur progression est similaire à celle de la classe de CM1 et appelle les mêmes commentaires.

## 2 Résultats en mathématiques en classe de 6e

Les résultats au test initial et au test final, exprimés en pourcentage, donnés dans le tableau ci-dessous (figure 10) concernent donc les 104 élèves de 6e qui ont suivi le protocole de la séquence 1. En effet, en

[4] Lors du test final, les problèmes présentent exactement les mêmes structures, mais diffèrent au niveau des prénoms des personnages et des données numériques.

raison d'heures de mathématiques plus restreintes, les classes de 6e n'ont pas entamé la séquence 2. Les résultats pour les problèmes à transformation et mixtes sont donc réalisés sans apprentissage explicite.

| | Problèmes | Nature du problème | Test Initial | Test final | Variation |
|---|---|---|---|---|---|
| Problèmes de comparaison | P1/P9 | Une comparaison | 85,3 | 84,4 | - 1 % |
| | P2/P10 | Deux comparaisons sans état connu | 34,4 | 66,7 | + 93 % |
| | P3/P11 | Deux comparaisons sans état connu | 41,7 | 63,3 | + 52 % |
| | P4/P12 | Une comparaison | 68,4 | 71,1 | + 4 % |
| Problèmes de transformation et mixtes | P5/P13 | Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?) | 37,5 | 46,7 | + 24 % |
| | P6/P14 | Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?) | 21,9 | 34,4 | + 57 % |
| | P7/P15 | Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?) | 41,7 | 57,8 | + 39 % |
| | P8/P16 | Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 ( ?) | 25,0 | 42,2 | + 69 % |

*Figure 10. Résultats en mathématiques en sixième portant sur 104 élèves d'un même collège en REP+*

N'ayant pas de groupe témoin pour les classes de sixième, nous nous contenterons de constater les progressions que fait apparaitre le tableau ci-dessus, en pensant qu'elles sont pour partie la résultante du protocole de travail mis en place, tout en sachant que seule la séquence 1 a été réellement travaillée par les élèves concernés.

Pour les problèmes P5 et P7, pour lesquels le protocole d'apprentissage n'a pas été mis en place, on peut constater que les élèves ont progressé, certes de manière moindre comparativement aux autres classes du cycle, mais il est loisible d'émettre la conjecture qu'ils ont peut-être réalisé un transfert de compétences ou de stratégie avec les démarches utilisées pour les problèmes de comparaison, malgré l'absence d'un apprentissage spécifique portant sur des outils adaptés.

Pour le P8, ces élèves multiplient par 7 le taux de réussite de plus d'un millier de professeurs des écoles testés (Petit & Camenisch, 2022). Est-ce un hasard ou un effet induit par les apprentissages explicites connexes ? Nous ne saurions conclure. L'expérimentation mériterait d'être confirmée.

## 3 Résultats en français dans les classes de CM

Les résultats des tests en français (figure 11) montrent de meilleures compétences d'écriture d'une phrase réponse syntaxiquement et sémantiquement correcte.

| | | CM1 / 185 | CM2 / 129 |
|---|---|---|---|
| Comparaisons | P 1 | 79,8 | 89,7 |
| | P 2 | 63,3 | 79,5 |
| | P 3 | 69,2 | 77,2 |
| | P 4 | 74 | 88,6 |

| | | CM1 / 185 | CM2 / 129 |
|---|---|---|---|
| Transformations et « mixtes » | P 5 | 76,8 | 83,5 |
| | P 6 | 47,7 | 69,0 |
| | P 7 | 81,3 | 91,2 |
| | P 8 | 63,9 | 77,0 |

*Figure 11. Réussite en français. Qualité syntaxique et sémantique de la phrase. Test final.*

Les élèves n'échouent plus massivement lorsque la consigne n'est pas une phrase interrogative, comme c'était le cas avec les problèmes 2 et 3 avec la consigne injonctive « compare ».

## 4 Conclusion provisoire

Si l'on compare les résultats au test final de l'ensemble des classes du cycle 3 en mathématiques on peut constater que les niveaux des élèves ont tendance à se lisser.

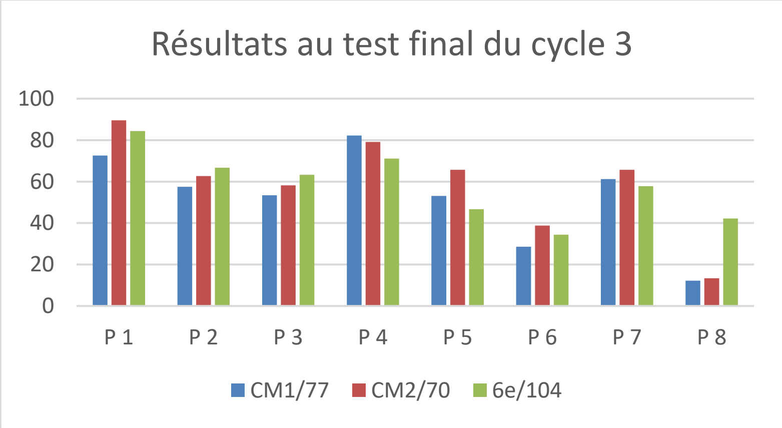



*Figure 20. Résultats en mathématiques au test final tous niveaux.*

Si la progression des réussites aux différents problèmes indique que le travail explicite sur ces problèmes difficiles améliore les performances des élèves, il ne suffit cependant pas pour discriminer ce qui, dans la réussite, peut être attribué à la mobilisation d'un outil graphique. Un regard plus précis sur leurs productions permet d'observer les traces écrites qu'ils mobilisent. Etudions le cas d'une classe.

## V - L'UTILISATION DES SCHEMAS DANS UNE CLASSE

Certains enseignants participant au dispositif ont envoyé les productions de leurs élèves lors des tests. Nous allons donc observer les résultats et les productions dans une classe de CM1 de 29 élèves, située hors REP (figure 12). Les résultats au test initial et final de cette classe sont globalement meilleurs que ceux des autres classes de CM1 qui ont participé au protocole, sauf pour P8 où l'ensemble de la classe a échoué au test initial (différence cependant non significative).

| | Problèmes | Nature du problème | Test Initial | Test final |
|---|---|---|---|---|
| Problèmes de comparaison | P1/P9 | Une comparaison | 65,5 | 78,6 |
| | P2/P10 | Deux comparaisons sans état connu | 3,4 | 64,3 |
| | P3/P11 | Deux comparaisons sans état connu | 3,4 | 60,7 |
| | P4/P12 | Une comparaison | 65,5 | 85,7 |
| Problèmes de transformation et mixtes | P5/P13 | Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?) | 20,7 | 64,3 |
| | P6/P14 | Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?) | 6,9 | 35,7 |
| | P7/P15 | Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?) | 3,4 | 64,3 |
| | P8/P16 | Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 ( ?) | 0,0 | 14,3 |

*Figure 12. Résultats en mathématiques dans une classe de CM1 de 29 élèves.*

La comparaison des productions des élèves au test initial et au test final est réalisée respectivement sur P5 et P13. Le problème 13 est le pendant du problème 5 dans le test final (figure 13).

| | |
|---|---|
| **P 5**. Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première.<br>Combien de billes avait-elle au début de la récréation ? | **P 13**. Après la récréation, Lila a 8 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 5 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 4 à la première.<br>Combien de billes avait-elle au début de la récréation ? |

*Figure 13. Enoncés des problèmes 5 du test initial et 13 du test final.*

On peut constater que seuls trois élèves ont mobilisé des schémas dans le test initial, alors qu'ils sont dix-sept dans le test final. Cet outil a donc été mobilisé par une majorité d'élèves. Si l'on croise avec la réussite des élèves, on peut aussi remarquer une corrélation entre l'utilisation d'un schéma et la réussite en mathématiques (figure 14).

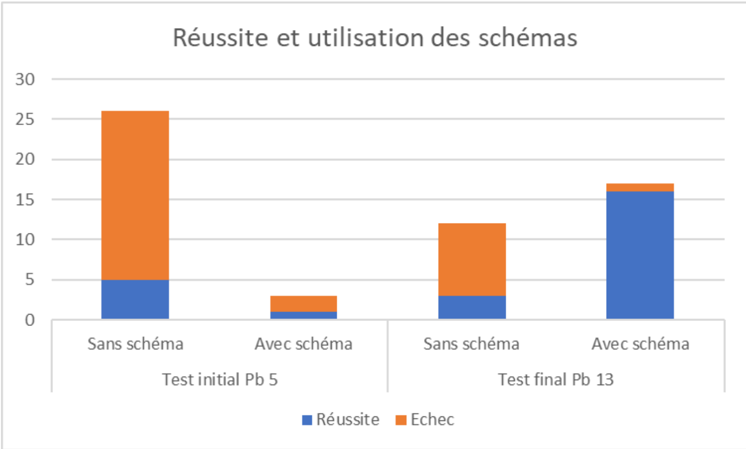
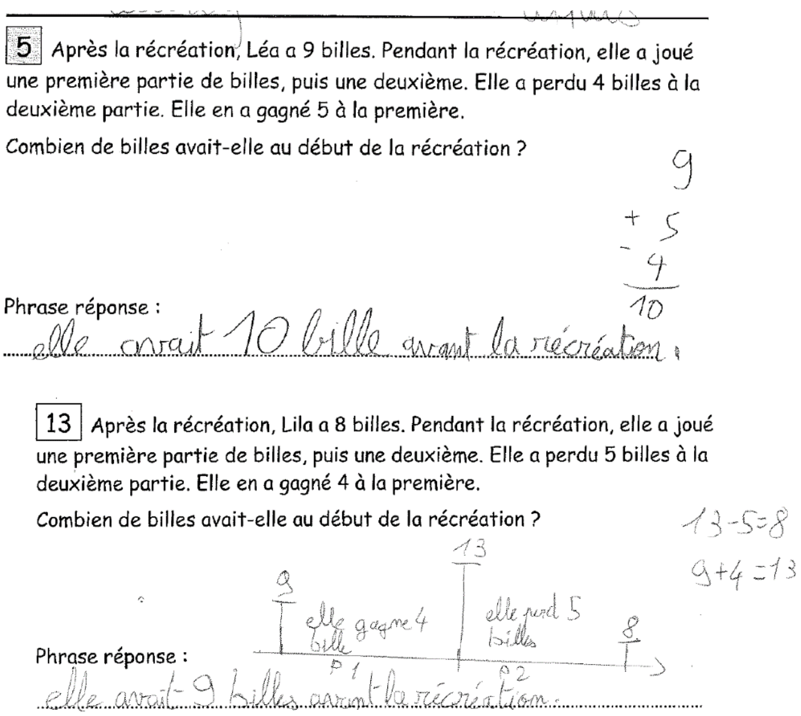



*Figure 14. Réussite et utilisation des schémas dans une classe de CM1.*

Les schémas mobilisés par les élèves correspondent bien à ceux qui ont été explicitement enseignés. La figure 15 présente les productions d'un même élève au test initial (P5) et au test final (P13).


5 Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation, elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première.

Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

9
+ 5
− 4
10

Phrase réponse :
elle avait 10 bille avant la récréation.

13 Après la récréation, Lila a 8 billes. Pendant la récréation, elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 5 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 4 à la première.

Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

13-5=8
9+4=13

9 elle gagne 4 bille P1 13 elle perd 5 billes P2 8

Phrase réponse :
elle avait 9 billes avant la récréation.

*Figure 15. Mobilisation du schéma par un même élève de la classe de CM1.*

Les productions des élèves de cette classe montrent de manière évidente d'une part que les élèves se sont appropriés les différents modes de représentation et notamment le mode plus expurgé, le schéma, qui fonctionne quelles que soient les valeurs en jeu. Les résultats semblent montrer une très forte corrélation entre l'utilisation d'un schéma tel que celui proposé par les auteurs de cette communication, comportant explicitement un axe temporel, et la réussite des élèves.

## VI - CONCLUSION

L'expérimentation menée montre qu'un enseignement explicite de représentations intermédiaires est accessible aux élèves de cycle 3. Elle leur permet une meilleure représentation des problèmes et favorise la mobilisation de schémas pertinents comportant explicitement un axe temporel pour résoudre des problèmes à deux transformations. Ce dispositif semble aussi provoquer des effets de transfert vers d'autres types de problèmes, par l'utilisation d'un type de schéma enseigné, par un travail explicite, ciblé, sur la langue, et surtout par le réinvestissement des stratégies réflexives mises en place.

Le cas des élèves de CE2 interroge. En effet, les travaux proposés en 2019-2020 ont semblé « faciles », c'est-à-dire résolus d'une manière qui semblait satisfaire les enseignants au test initial. Ces derniers ont alors, pour une bonne partie, manqué de motivation pour mener le travail proposé en classes. Ce qui était loin d'être le cas des CE1 auxquels le même travail, portant essentiellement sur la langue, avait été proposé. Lors de la session de recherche de 2021-2022, nous avons donc testé l'intégration des CE2 à un protocole unique (du CE2 à la sixième). Les résultats au test initial ont été encore plus massivement échoués que les autres niveaux et les quelques enseignants qui ont décidé de poursuivre ont estimé le travail trop difficile pour leurs classes. Nous interprétons cette difficulté par la nature des outils proposés d'emblée. Si des élèves de cycle 3 pouvaient s'approprier les outils proposés, moyennant une phase d'apprentissage courte, il n'en était pas de même des élèves de CE2. Ce qui nous semble montrer que la construction des différentes représentations avec les élèves, véritables outils d'investigation, doit être un objet explicite d'enseignement et devrait s'effectuer au fur et à mesure que leur nécessité se fait sentir, notamment en résolution de problèmes.

Ces travaux permettent de plus d'envisager qu'il n'y a que deux classes de problèmes dans le champ additif, ceux dans lesquels le temps n'intervient pas et ceux dans lesquels le temps intervient. Dans ce dernier cas, les représentations intermédiaires, telles que proposées dans le protocole, semblent permettre de résoudre tous les problèmes, sans passer par des sous-classes (recherche de l'état initial, de la transformation, de l'état final). Un tel classement rencontre en effet vite ses limites par la multiplicité des cas possibles dès lors que plusieurs transformations s'enchainent, intégrant ou non des comparaisons. Le modèle proposé dans ce protocole est de fait un outil d'investigation unique, utilisable dans tous les cas où la temporalité intervient.

## VII - BIBLIOGRAPHIE


Chabanne J.-C., Bucheton D. (2002). *Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire. L'écrit et l'oral réflexif*. PUF.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Goody J. (2006). La littératie, un chantier toujours ouvert, *Pratiques* (131-132), 69-75.

Petit S., Camenisch A. (2007). Des projets d'écriture en mathématiques pour mieux comprendre les énoncés de problème, in *Actes du 33e colloque de la COPIRELEM*, Dourdan, 295-328.

Petit S., Camenisch A. (2015). *J'apprends à résoudre des problèmes*, *Cahier 2, Cycle 2*. Nathan.

Petit S., Camenisch A. (2019). Congruence et résolution de problèmes de comparaison, in *Actes du 45e colloque de la COPIRELEM*, Blois, 557-570.

Petit S., Camenisch A. (2022). Quelles pratiques enseignantes pour quelle formation des élèves en résolution de problèmes ? in *Actes du 47e colloque de la COPIRELEM*, Grenoble, 828-843.

Petit S. (2018). *Résolution de problèmes et représentations sémiotiques,* in colloque Académie des sciences, La main à la pâte, Irem. https://public.weconext.eu/academie-sciences/2018-12-12/video_id_004/index.htmlParis

# QUE FONT LES ELEVES SUR LEURS BROUILLONS LORSQU'ILS CHERCHENT ?

**Chantal MOUSSY**
Prag docteure/Formatrice, INSPE Créteil, UPEC
chantal.moussy@u-pec.fr

**Cécile ALLARD**
MCF, LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

Résumé
Nous présentons dans cette communication quelques résultats issus d'un travail mené dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) consacré à la résolution de problèmes complexes (Houdement, 2013), qui a débuté en 2018-2019 et qui engage plusieurs écoles situées sur deux territoires socialement contrastés, avec 7 classes ordinaires de l'académie de Versailles, et 8 classes de REP + situées dans l'académie de Créteil.
Nous décrivons l'environnement spécifique co-construit avec les enseignants pour repérer les signes graphiques naturellement utilisés par les élèves pour connecter les données et inconnues en amont des calculs. Puis à travers la comparaison des écrits d'une cohorte d'élèves suivis pendant deux ans sur deux territoires socialement contrastés et auxquels nous avons proposé le même problème, nous montrons comment le dispositif a favorisé, grâce à la représentation sémiotique, la construction d'une représentation mentale du problème (Julo, 1995) sans toutefois la réduire à une représentation graphique codifiée.

## I - INTRODUCTION

Résoudre des problèmes reste « un problème » pour les enseignants de l'école comme pour les élèves. Les enseignants déclarent en effet avoir des difficultés à motiver leurs élèves et à trouver une "bonne méthode" pour les aider dans cette activité. Seuls 20% d'entre eux (Roditi et al., 2022) trouvent facile d'enseigner la résolution de problèmes. Du côté des élèves l'activité de résolution d'un problème numérique se limite souvent à la recherche de la bonne opération. Dans le cadre du LéA 2 TEM, nous avons cherché quels étaient les points d'appuis qui favorisent la mise en relation des données, pour des élèves de 9-10 ans lors de la résolution de problèmes dits complexes selon la typologie de Houdement (2013). Nous avons donc envisagé un environnement spécifique au sens de Julo (1995), qui soutient la construction d'une représentation du problème, et qui nous permet en mettant une focale sur les écrits des élèves de repérer des connaissances cachées (Houdement, 2011) en lien avec le registre graphique. Il s'agit dans cette communication de répondre plus précisément aux questions suivantes :

- Quels sont les signes du registre graphique que les élèves mobilisent spontanément pour mettre en relation les informations d'un problème numérique ?
- Comment saisir ces représentations sémiotiques ?
- Comment le registre graphique s'enrichit-il sur deux ans ?

Nous présentons dans un premier temps le problème donné aux élèves. Après avoir rappelé nos appuis théoriques, nous décrivons notre dispositif, puis nous énonçons nos résultats.

# II - PRESENTATION DU PROBLEME

Dans la suite de la communication nous nous intéressons au problème suivant :

*Dans l'école Jacques Prévert, il y a deux classes de CM2. Dans la première classe il y a 13 filles et 15 garçons. Dans la deuxième classe, il y a 29 élèves. Il y a 32 garçons en tout en CM2. Quel est le nombre de filles dans la deuxième classe de CM2 ?*

Ce problème relève du champ additif et est constitué de problèmes de réunion avec recherche d'un tout, ou recherche d'une partie d'un tout. L'utilisation de certaines réunions dépend de la procédure utilisée.

Nous appelons « première réunion » celle correspondant aux nombres de garçons et de filles de la première classe, « deuxième réunion » celle correspondant à la somme de deux inconnues et qui concerne le nombre d'élèves « 29 élèves » de la seconde classe sans indication sur la répartition entre les filles et les garçons. Et nous nommons « troisième réunion » la somme du nombre de garçons de la première classe et du nombre inconnu de garçons de la seconde classe. Il s'agit dans cette troisième réunion de déterminer une partie d'un tout. Cette troisième réunion nous semble la plus difficile à identifier pour les élèves car elle a la particularité d'être à l'intersection des deux autres réunions. En effet, l'expression "32 garçons en tout" constitue les 15 garçons de la première classe et les garçons de la deuxième classe.

Résoudre ce problème complexe (Houdement, 2013) nécessite des connaissances en calcul mais surtout la construction d'une représentation au sens de Julo (1995), et pour laquelle le recours à l'écrit peut être considéré comme un outil pour structurer la pensée (Alcorta, 2001, 2002). Nous allons préciser dans la suite nos appuis théoriques.

# III - APPUIS THEORIQUES

## 1 Des problèmes et des intentions

On s'intéresse dans notre LéA à la résolution de problèmes complexes présents dans la typologie de Houdement (2017), qui classe les problèmes en fonction des intentions avec lesquels ils sont donnés et également par rapport au niveau scolaire de la classe. Dans cette classification trois grandes catégories se dessinent.

Les **problèmes basiques** se présentent sous la forme d'énoncé court, dont la syntaxe est simple et ne comporte aucune information superflue. Ils se résolvent en utilisant deux données pour en produire une troisième. Les problèmes basiques sont inclus dans la typologie de Vergnaud. Ces problèmes sont proposés en cycle 3 dans l'objectif d'automatiser les structures.

Les **problèmes atypiques** sont ceux qui nécessitent d'enchainer plusieurs déductions. Ils relèvent d'un modèle mathématique non enseigné ou non encore enseigné dans les classes, et sont proposés pour construire de nouvelles notions ou pour confronter les élèves au plaisir de chercher. Les problèmes de types rallyes, les problèmes ouverts et les situations-problèmes au sens de la théorie des situations (Brousseau, 1997) se retrouvent dans cette catégorie. Pour résoudre ces problèmes les élèves ne disposent pas de stratégies connues, ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances et notamment leur mémoire des problèmes.

**Les problèmes complexes,** décrits comme étant des agrégats de problèmes basiques, qui ne sont pas uniquement juxtaposés, nécessitent la réorganisation des informations, la reconnaissance et la planification en sous-problèmes basiques. Ils sont proposés pour mobiliser des connaissances et faire du lien entre elles. La complexité de ce type de problèmes peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées mais aussi de la distance avec des connaissances entrainées bien plus tôt dans la scolarité.

Cette troisième catégorie nous intéresse plus particulièrement car la résolution de ce type de problème ne se réduit pas à l'application d'une opération mais nécessite la construction d'une représentation du problème, de connecter les informations du problème, et notamment de prendre en considération les différentes inconnues, de savoir les qualifier et les désigner. Les problèmes complexes nous semblent être de bons candidats pour étudier comment l'écrit est mobilisé par les élèves de cycle 3.

## 2 Se construire une représentation du problème et l'usage de l'écrit

Se représenter le problème ne signifie pas seulement « comprendre l'énoncé » ni le traduire en un ensemble structuré de symboles (Julo, 1995). En effet, même si la connaissance des outils mathématiques est nécessaire à la résolution de problème elle n'est pas à l'origine de la représentation du problème ni à la source de la compréhension du problème (Julo, 1995).

Le processus représentationnel est un processus complexe que Julo (1995) analyse en 3 processus qui interagissent, et pour lesquels l'investissement personnel est déterminant.

- *Le processus d'interprétation et de sélection d'informations*

Ce processus intervient dès la rencontre avec le problème et est fortement dépendant de nos connaissances du monde. Certaines informations non pertinentes peuvent être à ce moment-là prises en compte dans la représentation. Par exemple le « deux » de deux classes peut être considéré comme une donnée à intégrer aux calculs, alors que d'autres informations pourtant essentielles à la résolution peuvent être ignorées, ou mal interprétées comme l'expression "32 garçons en tout", compris comme "32 garçons de la seconde classe".

- *Le processus de structuration*

Ce processus consiste en une organisation de ces interprétations en un tout cohérent et relativement stable. La mémoire que nous avons des problèmes déjà rencontrés a un rôle décisif dans la manière dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre, et participe ainsi à la construction et à la structuration de la représentation. Cependant certaines analogies entre les problèmes déjà rencontrés et celui à résoudre peuvent nous enfermer dans une représentation dont la stabilité sera alors un obstacle au changement de point de vue. Et pourtant il sera nécessaire pour les élèves de repenser le problème pour arriver à la solution. Cela nécessite chez les élèves d'avoir la capacité de mobiliser des connaissances et de les adapter au contexte du problème (Robert & al., 2012).

- *Le processus d'opérationnalisation*

Ce processus consiste à passer à l'action effective : calculer, tracer, écrire, raturer... ou à l'action mentale comme émettre des hypothèses ou faire des déductions. Il vise à mettre en œuvre une stratégie et mobilise entre autres des connaissances opératoires conditionnées par la représentation mentale construite. Lorsque l'écrit est mobilisé, ce processus d'opérationnalisation est la partie la plus visible de la construction d'une représentation sur laquelle peuvent s'appuyer les enseignants pour aider les élèves. Ce processus d'opérationnalisation peut ne pas être atteint selon la manière dont la représentation mentale s'est construite et selon la disponibilité chez les élèves des structures de base. Ainsi, en cycle 3, pour le problème Jacques Prévert, certaines relations additives devraient être vite reconnues comme la première réunion. La formulation, qu'elle soit graphique ou usant du langage naturel, de la deuxième réunion est plus délicate : en effet, cette dernière est constituée de deux inconnues dont on connait la somme. Enfin la troisième réunion nous semble être la plus difficile à percevoir.

Dans les processus de représentation décrits par Julo, la représentation mentale (cognitive) et la représentation graphique (sémiotique) sont imbriquées. Atteindre les processus cognitifs décrits par Julo est une tâche difficile pour le chercheur. Il ne s'agit donc pas de réduire la représentation cognitive à la représentation sémiotique mais plutôt de chercher à comprendre comment cela fait système. Or l'écrit est généralement utilisé comme un simple moyen d'extérioriser les représentations mentales à des fins de communications, c'est à dire les rendre visible à autrui. Cependant pour Duval (1993) l'écrit est essentiel pour l'activité cognitive de la pensée, et joue un rôle important dans le développement des représentations mentales.

C'est pourquoi les traces écrites laissées par les élèves sont des matériaux de recherche sur lesquels nous allons pouvoir nous appuyer pour mieux comprendre ce qui se joue lorsque les élèves cherchent en situation d'enseignement-apprentissage. Mais pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de prendre en considération la spécificité du brouillon, et de ne pas le considérer uniquement comme :

> *un produit fini, mais bien comme un espace de construction, privé et intermédiaire précédant le produit final, qui offre aux élèves la possibilité de se fabriquer ses propres outils de pensée*. (Alcorta, 2001, p. 102).

Le recours à l'écrit pour résoudre les problèmes complexes nous semble donc pertinent pour soutenir les processus de représentation.

Alors comment l'écrit est-il mobilisé en résolution de problème dans les classes ? Que font les élèves sur leur brouillon ?

# IV - DES EXEMPLES D'ECRITS-DES BROUILLONS QUI QUESTIONNENT

## 1 Des brouillons sans dispositif spécifique

Le problème « Jacques Prévert » a été proposé dans une classe de cycle 3 en zone favorisée sans dispositif spécifique avec uniquement une lecture de l'énoncé, un retour rapide sur les mots incompris et avec la consigne : « vous avez le droit de faire un schéma et un dessin, n'oubliez pas la phrase réponse ». La figure ci-dessous présente des productions d'élèves.

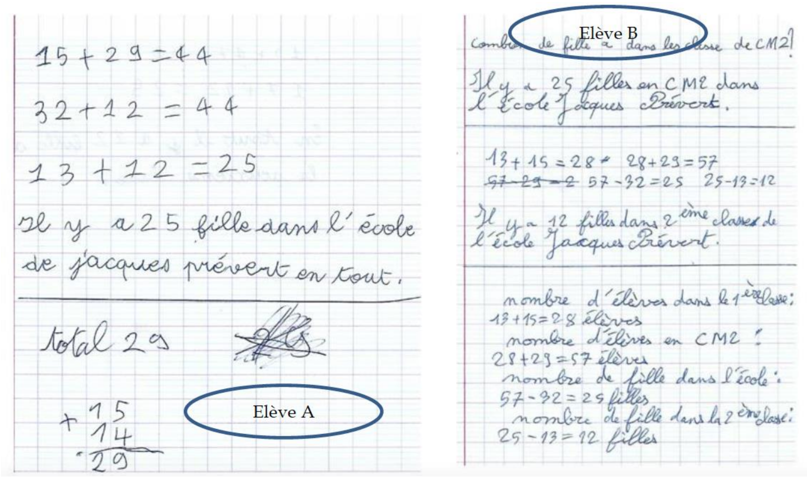



*Figure 1. Des brouillons d 'élèves en cycle 3 en zone favorisée (Allard et Moussy, 2022)*

Ces productions présentent peu de signes graphiques autre que des signes opératoires, des calculs en ligne ou en colonne, quelques essais et des erreurs, peu de qualifications voire pas de qualification dans les résultats intermédiaires. Une phrase réponse est présente sur chaque brouillon. Le support quadrillé « feuille seyès » utilisé dans d'autres disciplines peut dans la résolution de problème renforcer l'idée chez les élèves que l'écrit doit respecter certaines règles et contraintes d'usage. Ces productions illustrent le fait que l'écrit est considéré comme un outil pour faire des calculs et surtout pour communiquer la réponse. Par ailleurs, ces écrits ne montrent ni dessins ni schéma. Mais peut-on vraiment s'en étonner, alors qu'il n'y a pas dans les classes d'apprentissages de représentations montrant les relations entre les données ?

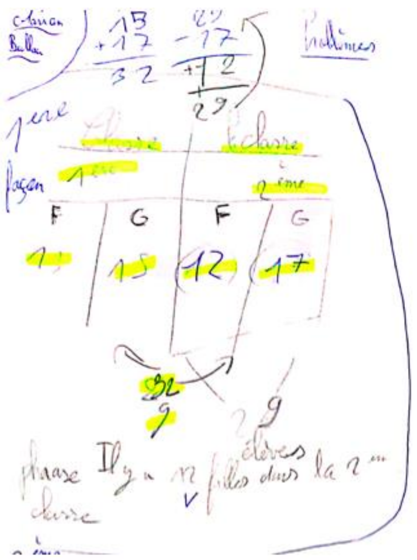
## 2 Imbrication des représentations cognitives et sémiotiques

Les productions suivantes sont des écrits d'élèves soumis à notre dispositif que nous détaillerons par la suite. Ces productions montrent des représentations graphiques d'élèves qui, dès la première lecture de l'énoncé, avaient une bonne représentation mentale du problème.

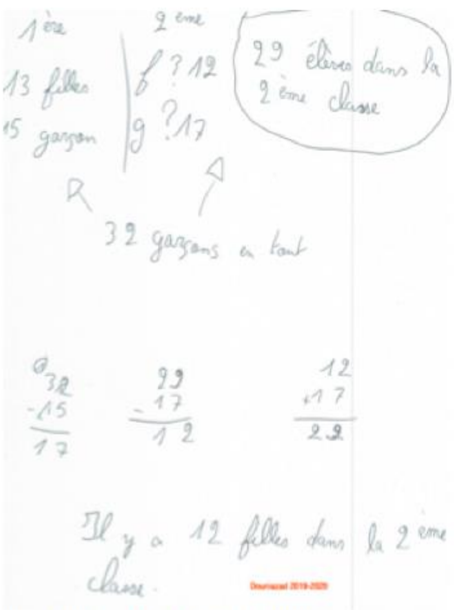
Dès la première année, Marion organise de manière tabulaire les données, pour ranger les filles et les garçons. Elle utilise des signes comme des parenthèses et des « … » pour matérialiser les inconnues, des flèches pour traduire des réunions. Au fur et à mesure de la résolution, Marion complète son tableau à double entrée et remplace les « … » par les réponses trouvées.

Douniazad fréquente le problème pour la deuxième fois. Elle mobilise la deuxième année tous les signes graphiques rencontrés l'année passée et pour lesquels elle a donné du sens. Elle matérialise les inconnues par des « ? » et complète son dessin au fur et à mesure de la résolution.

Dans les deux cas, les inconnues sont identifiées et qualifiées et la 3ème réunion est matérialisée soit par une ligne courbe fléchée ou deux petites flèches obliques. Ces deux productions illustrent l'imbrication entre représentation mentale et représentation graphique, et dans les deux cas, nous notons l'absence de dessins ou de schémas qui résulteraient d'un apprentissage spécifique.



Brouillon de Marion Hors Rep
Première année




Brouillon de Douniazad en REP +
Deuxième année

*Figure 2. Des signes graphiques en lien avec la représentation mentale*

## 3 Dessin - Dessin MER - Schéma

Les élèves ne produisent pas spontanément des schémas en barre. La plupart du temps les représentations montrent souvent des calculs voir des signes spontanément utilisés par les élèves et qui ne relèvent pas d'un apprentissage spécifique. Nous distinguons trois grandes catégories de brouillons.

<u>Un dessin figuratif représente</u> des objets du contexte sans mise en relation des données. Par exemple une classe, une coupe de fruit, une table, une fille, un lapin… Nous les qualifierons de bas niveau pour des CM1/CM2.

Un dessin MER est un dessin qui présente une Mise En Relation des informations de l'énoncé, mettant en jeu des signes personnels et utilisés de manière spontanée par les élèves. La figure 2 présente deux dessins que nous qualifions de dessins MER.

Nous nommons schéma un dessin MER plus conventionnel qui nécessite un apprentissage en termes de compréhension du codage (sens des accolades, de la juxtaposition des segments). Les schémas en barre font partie de cette catégorie. La figure 3 présente un schéma qui pourrait convenir pour le "problème de Jacques Prévert".

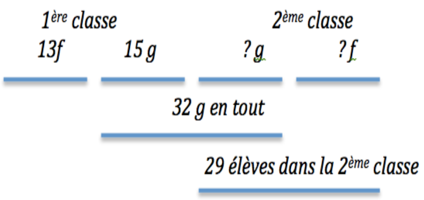



*Figure 3. Un exemple de schéma en barre*

Cependant, pour obtenir un tel schéma il est nécessaire de réorganiser les informations. En effet, les données concernant les garçons de la première classe et les garçons de la deuxième classe dans le schéma ne sont pas congruentes au texte de l'énoncé. Par conséquent, sans réorganisation des données, il aurait certainement été nécessaire d'utiliser d'autres signes graphiques comme des flèches pour indiquer la troisième réunion.

Notons que ce schéma est une représentation graphique qui ne peut être produite que lorsque la représentation mentale du problème est bien structurée et que le problème est mentalement résolu. Est-il souhaitable d'avoir ce niveau d'exigence graphique avec les élèves ? A quel moment dans la résolution ? Et quel apprentissage cela nécessite-t-il ?

Plutôt que de favoriser un apprentissage de ce type de schéma à valeur plus conventionnelle, nous avançons des questions.

- Comment peut-on enrichir le catalogue de signes sans figer les représentations et amener l'élève à utiliser l'écrit pour structurer sa pensée ?
- Est-ce qu'une « bonne » représentation graphique conduit à une « juste » opérationnalisation ?

## V - PRESENTATION DU DISPOSITIF

### 1 Les contraintes

Pour répondre aux questions précédentes, nous avions quelques contraintes :

- Recueillir les représentations graphiques spontanées qui se distinguent des calculs
- Faciliter la comparaison des brouillons des élèves des 15 classes la première année, et le suivi sur deux ans d'une cohorte d'élèves.

Dans le but de retarder le moment où les élèves produisent des calculs et afin de réduire les variabilités de déroulement entre les classes, nous avons co-construit avec les enseignants du LéA un environnement spécifique commun (Julo, 1995) acceptable par les 15 classes engagées dans le projet LéA et pour tous les problèmes complexes (Allard et Cavelier, 2020) présentés aux élèves lors de l'année 2018 et de l'année 2019. Tout au long de notre expérimentation, les élèves résolvent donc les mêmes problèmes complexes dans les deux territoires et les séances suivent le même scénario. À la fin de chaque période, nous récupérons l'ensemble des brouillons des élèves avec leur autorisation.

Notre corpus est constitué des brouillons recueillis pendant 4 ans sur les 15 classes composées en moyenne de 22 élèves. Pour les résultats exposés dans cette communication, nous avons exploité 140 brouillons recueillis la première année 2018-2019, à savoir les brouillons de 8 classes dont 5 en REP+. Ces 8 classes nous semblaient pouvoir constituer un ensemble représentatif des signes spontanément produits par les élèves. Pour comparer les signes mobilisés par les mêmes élèves sur deux ans, nous avons gardé les classes à double niveau CM1/CM2 dont les enseignants sont restés les deux années dans le projet, et ce afin d'éviter les effets de contrat dû au changement de maître. Puis nous avons conservé les brouillons des élèves qui étaient présents lors des deux problèmes sur les deux ans. Cependant la première année, même si nous avions pu récupérer tous les brouillons, beaucoup d'entre eux n'indiquaient pas de nom d'élève. Par conséquent, toutes ces contraintes ont réduit la cohorte à suivre à 20 élèves répartis de la manière suivante : 8 élèves hors REP et 12 élèves en REP +.

Nous allons présenter dans le paragraphe suivant le dispositif mis en oeuvre. Ce n'est pas le seul possible, mais ce dernier nous semblait pouvoir favoriser la construction d'une représentation mentale et amener les élèves à mobiliser l'écrit en amont de la résolution du problème.

## 2 Le dispositif

Le scénario se développe en plusieurs phases alternant des phases d'oral et d'écrit, de travail collectif et de travail individuel. Il est entièrement décrit dans Allard et Cavelier (2020).

1ère phase collective orale. Les élèves sont déchargés du déchiffrage de la lecture de l'énoncé qui est effectuée par l'enseignant. Par ailleurs, à ce moment-là les élèves ne disposent d'aucun support écrit ni de stylo ce qui permet de retarder le moment de la recherche où les élèves se jettent sur les calculs avec les nombres de l'énoncé, et de favoriser l'immersion dans le contexte et la création d'images mentales.

2ème phase collective orale. Il s'agit pour les élèves de raconter l'histoire sans résoudre le problème. Cette phase permet de lever des implicites liés au vocabulaire ou à la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème et qui peuvent être un frein à la construction d'une représentation. Ce temps de reformulation aide à se faire un film dans sa tête, contribue à garder en mémoire des éléments du contexte et à identifier les premières mises en relation des données.

3ème phase individuelle Après une 2ème lecture de l'énoncé du problème par l'enseignant les élèves ont pour tâche de prendre sur une feuille blanche (brouillon) des notes de l'énoncé qui pourraient permettre de raconter l'histoire. Il ne s'agit pas de copier l'énoncé comme une dictée, ni d'effectuer des calculs ni de communiquer la réponse au problème qui aurait pu être résolu mentalement par certains. Cette prise de notes nous permet d'attraper l'usage de l'écrit spontané des élèves. Et notre étude portera sur l'analyse des signes mobilisés lors de cette 3ème phase.

4ème phase collective Il s'agit de discuter sur quelques écrits choisis par l'enseignant. Les écrits choisis présentent des oublis de nombres ou de qualification, ou montrent des relations entre les données du problème qui peuvent prêter à confusion. Par exemple le "32 garçons" est souvent mis dans la deuxième classe. Cette phase de confrontation des écrits a pour objectif de consolider ou modifier la première représentation que les élèves ont pu construire et en même temps de montrer l'usage de certains signes pour mettre en relation les données et inconnues du problème. Aucune représentation n'est validée, mais les productions sont toutes enrichies soit par des signes proposés par les élèves, soit des signes suggérés par les enseignants.

5ème phase individuelle Les élèves reprennent leur écrit et avec une autre couleur le complètent en fonction du sens qu'ils ont pu donner à certains signes lors de la phase précédente, puis ils résolvent d'abord seul le problème, puis en groupe. Le choix d'une autre couleur nous permet d'identifier ce qui relève de la 3ème étape, c'est-à-dire d'identifier les signes mobilisés spontanément par les élèves en amont de la résolution du problème, et avant la discussion de certains écrits. Les groupes les plus rapides réalisent une affiche sur laquelle les enseignants s'appuient pour l'exposition de connaissances qui peut être axée sur :

- Usage du support (brouillon) : à quelle condition le support et l'écrit servent-ils à outiller la pensée (ne pas effacer par exemple, conserver les essais…)
- Usage du l'écrit : enrichir le catalogue de signes pour matérialiser les relations…
- Un point mathématique : les relations entre une opération et son opération inverse.

Quels sont les signes que les élèves mobilisent spontanément pour mettre en relation les données après deux lectures du problème par l'enseignante et une discussion collective de l'énoncé ?

## VI - RESULTATS

### 1 Résultat sur un an

Sur 140 brouillons, nous avons pu identifier et quantifier les signes mobilisés et associer des fonctions à chacun de ces signes (Annexe 1). Par exemple la flèche peut être utilisée pour désigner une valeur, mais aussi pour mettre en relation les données de la troisième réunion. Des traits peuvent être utilisés pour isoler des données ou pour mettre en relation des nombres dans des diagrammes de calculs. Les signes « ? » ou « … » ne sont utilisés que par 3 élèves sur 140 pour matérialiser les inconnues, et seuls 20 brouillons sur les 140 mentionnent la question avec des mots.

Nous avons également constaté la première année que les élèves étaient déstabilisés par la nouvelle tâche qui ne consistait pas à résoudre le problème, mais à prendre des informations qui permettaient de raconter l'histoire. Par conséquent bon nombre d'entre eux se contentaient de prélever les informations de manière congruente au texte sans réorganisation. Et l'information concernant « 32 garçons en tout » intervenant dans la troisième réunion était souvent juxtaposée au « 29 élèves » de la deuxième classe.

L'utilisation de l'espace pour mettre en relation les données nous est alors apparue comme l'un des moyens mobilisés par les élèves pour isoler des données et faire apparaitre certaines relations. L'emplacement du nombre « 32 » correspondant au total de la troisième réunion est assez significative de la difficulté pour les élèves à se représenter et à matérialiser la relation. Nous avons alors focalisé notre regard sur cette troisième relation, et identifié plusieurs cas d'utilisation de l'espace pour la matérialiser. La figure 4 illustre les cas 1 à 4 sans MER prenant en compte des tendances horizontales et verticales d'utilisation de l'espace pour isoler les informations avec des difficultés à placer le "32 garçons des deux classes" correspondant à la troisième réunion. Dans chacun de ces cas, les informations sont prélevées de manière congruente au texte sans réorganisation. Ce qui ne laisse pas entrevoir une construction mentale des relations entre les informations du problème. La figure 5 illustre les cas 5 à 9 avec MER qui montrent une prise en compte spatiale de la troisième réunion. Dans chacun de ces cas, l'information concernant les "32 garçons en tout" est décalée par rapport au contenu de chacune des deux classes.

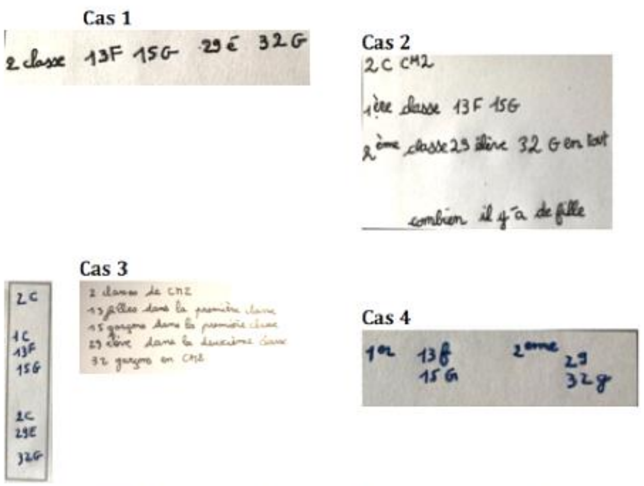



*Figure 4. Cas 1 à 4 productions d'élèves sans MER*

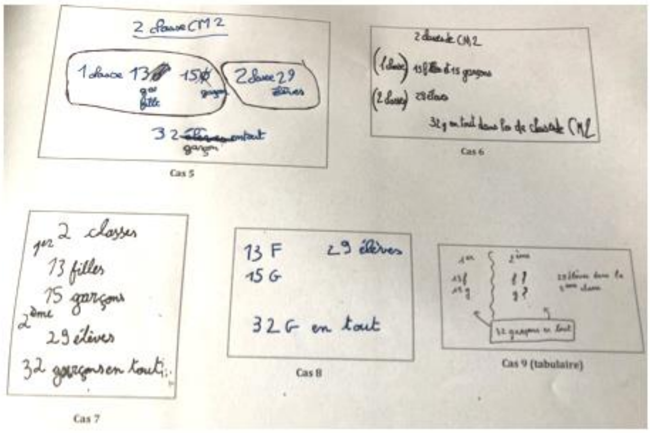



*Figure 5. Cas 5 à 9 productions d'élèves avec MER*

La fréquence d'utilisation de ces différents cas est représentée ci-dessous. 40 brouillons sur 140 présentent spatialement une mise en relation de la 3ème réunion, 72 brouillons ne montrent pas de mise en relation autre qu'une juxtaposition de toutes les données, et sur 28 brouillons nous notons l'absence d'une ou plusieurs données numériques.

| Sans MER | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 | Données numériques manquantes |
|---|---|---|---|---|---|
| 2018-2019 | 30 | 17 | 8 | 17 | 28 |

| Avec MER | Cas 5 | Cas 6 | Cas 7 | Cas 8 | Cas 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2018-2019 | 10 | 13 | 2 | 15 | 0 |

*Figure 6. Fréquence de mise en relation de la troisième réunion*

Cependant ces résultats sont à prendre avec précaution. En effet, le brouillon suivant montre que la 3ème réunion n'a pas été graphiquement représentée et relève d'un cas "données numériques manquantes".

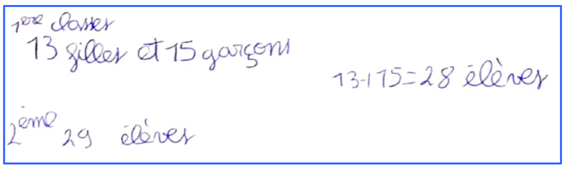



*Figure 7. Brouillon avec données manquantes*

Il est possible que l'élève ne sachant ni comment ni où écrire cette information, l'ait conservée dans sa tête. Et ce n'est qu'en regardant la suite de son brouillon et son résultat que nous pourrions dire si sa représentation mentale était suffisamment structurée pour lui permettre d'atteindre la solution.

Cela ne nous étonne donc pas que les élèves n'étant pas suffisamment outillés de signes graphiques hésitent à écrire des informations. Par contre, ce qui nous étonne c'est que certains brouillons présentent de indices graphiques pertinents et pour autant l'interprétation que l'élève en fait le conduit à réaliser des relations erronées.

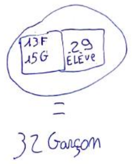
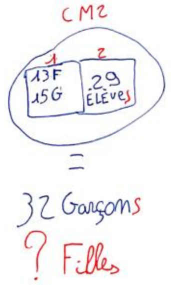
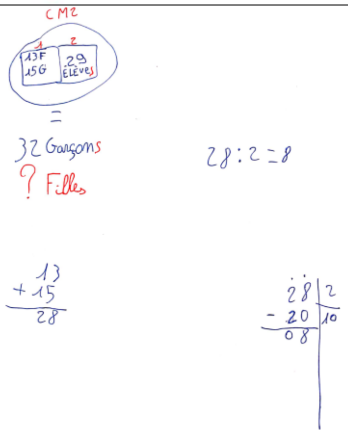
| | |
|---|---|
| Phase 3<br>du dispositif<br>(Prise de notes) |   |
| Phase 5<br>du dispositif<br>(Modification de la prise de notes) |   |
| Phase 6<br>du dispositif<br>(Résolution en individuel) |   |

*Figure 8. Brouillon de Sabine*

Le brouillon de Sabine relève du cas 8.

Le premier encerclement représente les classes de CM2 de l'école et les deux rectangles juxtaposés les deux classes de CM2. Dans les rectangles, l'élève écrit les données correspondantes à la première et à la deuxième classe de CM2. Sabine ne matérialise pas les inconnues (filles et garçons de la deuxième classe), mais le signe "= 32", nous laisse supposer que l'élève a bien compris que les 32 garçons correspondent au nombre de garçons en tout. Cette représentation graphique pourrait laisser penser que la 3ème réunion est bien interprétée comme la réunion des garçons de la 1ère et de la 2ème classe. Lors de la phase 5 Sabine identifie l'inconnue et la matérialise par le signe « ? ». Pour autant son opérationnalisation n'est pas correcte.

Une représentation graphique correcte selon nos critères n'est donc pas à interpréter comme le reflet d'une représentation mentale aboutie.

Par conséquent, nous avons fait le choix de suivre une cohorte d'élèves pour percevoir, après la fréquentation de 4 à 5 problèmes complexes l'année 1 suivant le scénario précédent, comment les élèves modifient ou non leur rapport aux écrits heuristiques et à la résolution de problème en général.

## 2 Résultats d'un suivi de cohorte sur deux années

Les élèves ont fréquenté et résolu 4 à 5 problèmes complexes lors de l'année 2018-2019. Après un enrichissement des signes disponibles et une meilleure compréhension des règles du contrat par les élèves, nous confrontons les élèves au même problème avec le même déroulement en 2019-2020. L'année 2, aucun élève de CM2 ne se manifeste sur le fait qu'il a déjà rencontré ce problème l'année précédente. Nous nous intéressons alors toujours sur les brouillons à la représentation de la 3ème réunion. La comparaison des brouillons des mêmes élèves montre une diminution significative des cas "sans Mer" pour la troisième réunion (de 18 à 6 brouillons) et une augmentation des cas "Mer" (de 2 à 14 brouillons).

| Sans MER | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 | Données numériques manquantes | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2018-2019 | 5 | 4 | 0 | 4 | 5 | 18 |
| 2019-2020 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 6 |

| Avec MER | Cas 5 | Cas 6 | Cas 7 | Cas 8 | Cas 9 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2018-2019 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 2019-2020 | 4 | 3 | 1 | 5 | 1 | 14 |

*Figure 9. Comparaison sur deux ans des fréquences de mise en relation (MER) de la troisième réunion*

## 3 Présentation de quelques brouillons sur deux ans

Les parties encadrées en bleu constituent la prise de notes initiale des élèves sur chacune des deux années.

### 3.1 Cas de Charlotte

La *figure 10* montre le brouillon de Charlotte élève hors REP dont le résultat était faux la première année et juste la deuxième année. Le critère reposant sur la validité de la réponse ne peut être retenu pour distinguer les productions, puisque les élèves avaient à résoudre le problème en groupe après l'avoir résolu individuellement. La première année, Charlotte ne sait pas ni comment ni où écrire l'information « 32 garçons ». Par conséquent son brouillon relève d'un cas « données manquantes". Mais suite à la mise en commun des brouillons et à la discussion collective, elle semble s'approprier une manière de représenter cette relation et l'indique par un signe graphique (traits obliques). Pour autant cela ne lui permet pas de trouver le résultat. La deuxième année, elle identifie bien le « 32 garçons » comme réunion des données deux classes. Elle utilise uniquement l'espace pour matérialiser la troisième relation sans autre signe graphique. Son brouillon relève d'un cas 7. Après la mise en commun elle utilise des lignes fermées pour isoler les données, des lignes courbes et des flèches pour indiquer la 3ème relation, et elle matérialise les 2 inconnues de la 2ème classe. Elle s'appuie sur cette représentation graphique pour faire ses calculs et son résultat est juste.

Année 1 Année 2

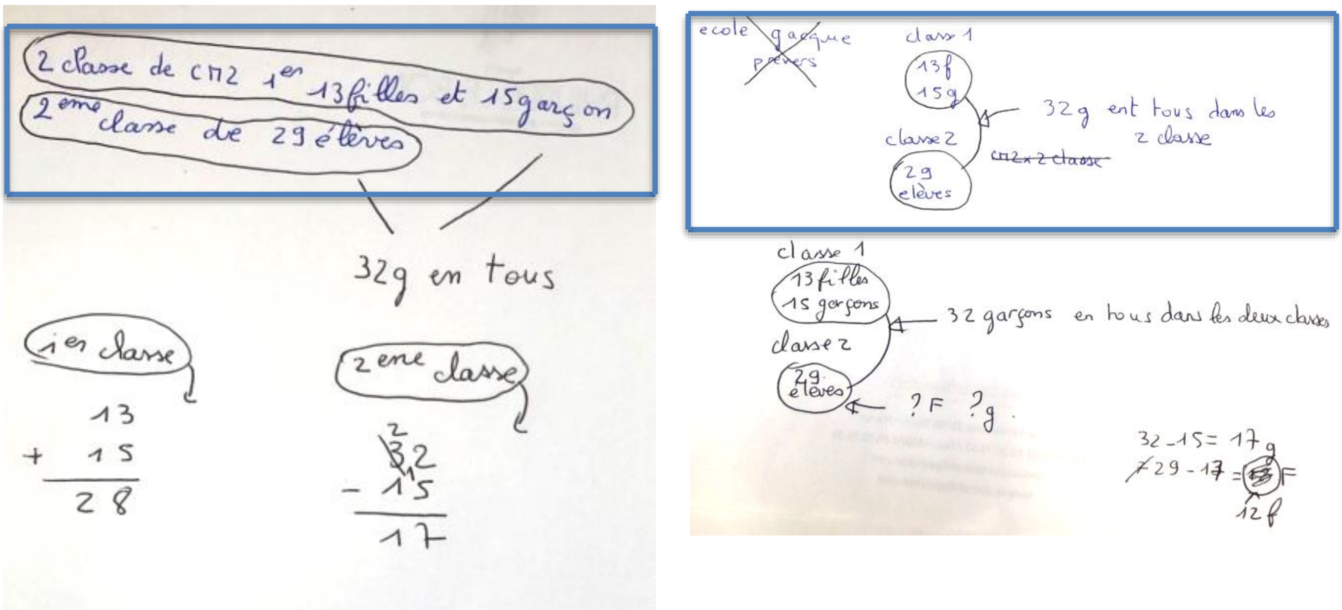



*Figure 10. Production de Charlotte, élève hors REP cas « données manquantes » à cas 7, réponse fausse puis juste*

### 3.2 Cas de Farouk

Le brouillon de Farouk (*Figure 11)* élève en Rep+ présente la première année une organisation linéaire : il semble noter les informations au fur et à mesure qu'elles apparaissent. Mais la 3ème réunion est mal interprétée puisque le "32 garçons en tout" se trouve dans la classe de 29 élèves. Ce brouillon relève d'un cas 2. Farouk effectue par la suite un calcul, peut-être une opération à trou, ou une opération recopiée ou entendue. La réponse est juste mais on n'en connait pas la provenance, peut-être que le travail de groupe lui a permis d'obtenir la réponse. Le brouillon semble être la première année pour Farouk un outil pour communiquer la réponse

La deuxième année, Farouk utilise l'espace de la feuille pour produire un dessin figuratif représentant les deux classes avec une porte et des cubes représentant les filles et garçons. Il manque l'information « 32 garçons en tout » qu'il rajoutera après la mise en commun en écrivant « 30 garçons » au lieu de « 32 garçons ». Son brouillon relève d'un cas « données manquantes». Avant la mise en commun, alors qu'aucun calcul n'était demandé, Farouk effectue un calcul en soustrayant le nombre de garçons de la première classe au nombre d'élèves de la deuxième classe pour trouver le nombre de filles de la deuxième classe. Il lui semble à ce moment avoir résolu le problème. Cependant sa réponse est fausse. Après avoir rajouté l'information 32 garçons en tout (il écrit en fait « 30 garçons ») au bon endroit suite à la phase 4 du dispositif, il modifie sa représentation mentale et effectue d'autres calculs. Mais sa réponse reste fausse. La deuxième année, son brouillon montre un engagement de Farouk à accepter de se tromper, et à ne pas utiliser le brouillon uniquement comme un outil de communication.

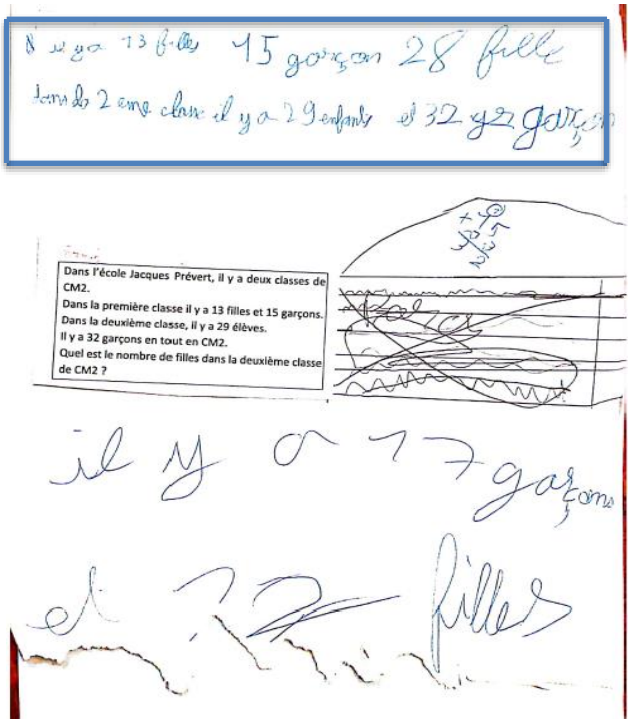
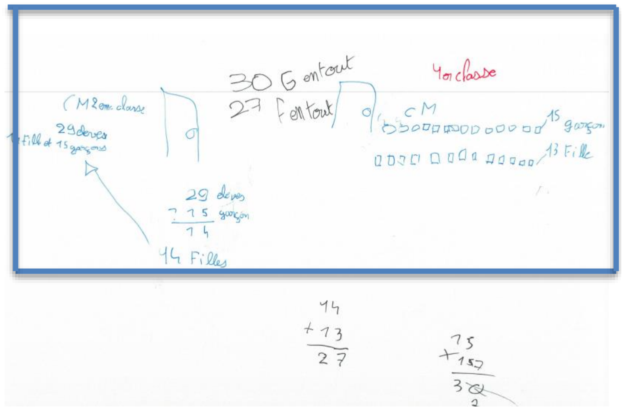
| Année 1 | Année 2 |
|---|---|
|  |  |



*Figure 11. Production de Farouk, élève en REP +, cas 2 à cas 4, réponse juste puis fausse*

### 3.3 Cas de Lina

Lina, élève hors Rep, présente les données de l'énoncé de manière congruente au texte la première année, avec une identification et une matérialisation des inconnues. Ce qui est rare la première année. Son brouillon relève d'un cas "données manquantes". Lors de la modification de sa prise de notes, elle prend un modèle avec des bulles (pour isoler les données) et des flèches (pour matérialiser la 3ème réunion). Ce modèle lui semble pertinent, puisqu'elle le remobilise l'année suivante, en se l'appropriant de manière très personnelle. Sa représentation graphique relève d'un cas 5 dans une version très personnelle la deuxième année.

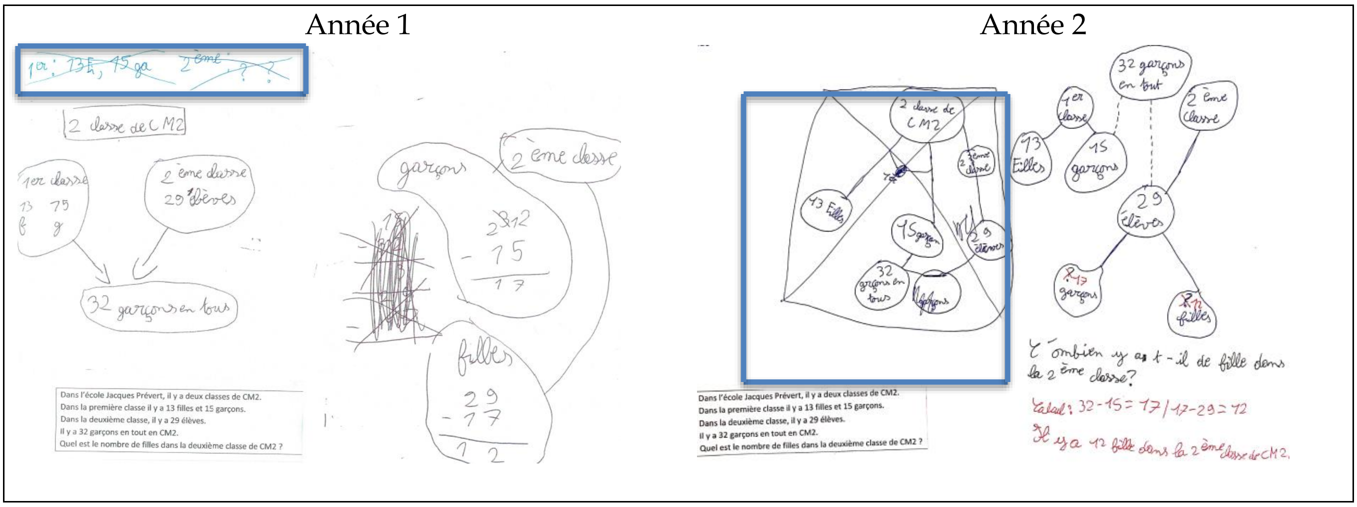



*Figure 12. Production de Lina, élève hors REP cas « données manquantes " à cas 5, réponse juste, puis juste*

### 3.4 Cas de Douniazad

Le brouillon de Douniazad, élève de Rep + présente une réponse juste sur les deux années. La première année, Douniazad utilise l'espace pour organiser ses données et présenter les deux réunions. Elle utilise des traits pour isoler les deux réunions. Son brouillon relève d'un cas 4. Le "32 garçons en CM2" semble être dans la deuxième classe, mais cette représentation graphique lui suffit pour résoudre le problème jusqu'au bout. La deuxième année son brouillon est beaucoup plus élaboré que la première année. Douniazad remobilise tous les signes graphiques qu'elle a rencontrés la première année et son brouillon relève d'un cas 9. Douniazad ne modifie pas sa prise de notes suite à la phase 4 du dispositif. Par ailleurs, ses procédures de calculs ont évolué, d'addition à trou à des soustractions posées en colonne.

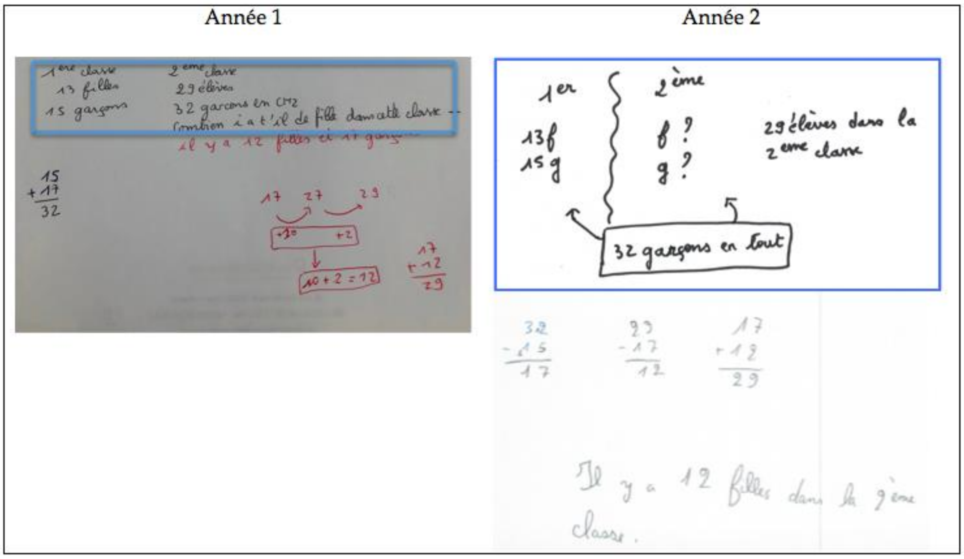



*Figure 13. Production de Douniazad, élève en REP +, cas 4 à cas 9, réponse juste, puis juste*

### 3.5 Cas de Mathieu

La production de Mathieu (*Figure 14)* élève hors rep montre un résultat faux sur les deux années. La première année, la prise de note est lacunaire et laisse penser que Mathieu prend des notes comme une dictée. Son brouillon relève d'un cas « données manquantes ». A l'issue de la phase de présentation et d'enrichissement collectif de différents brouillons du tableau, Mathieu reproduit un dessin MER en bulle. Cependant il ne semble pas s'appuyer dessus pour remettre en question la construction de sa représentation mentale du problème. La qualification partielle de ces données l'amène à soustraire des filles (de la première classe) aux élèves de la deuxième classe. Son brouillon lui sert à effectuer un calcul et surtout à communiquer une réponse.

La deuxième année, Mathieu réorganise les données, et emprunte des signes graphiques comme des lignes fermées et des flèches. Ce modèle "ressemble à celui qu'il avait écrit lors de la reprise de son brouillon la première année. Pour autant le « 32 garçons » est toujours mal placé puisqu'il apparait dans la deuxième classe. La présence du point d'interrogation avant la mise en commun indique que Mathieu est en train d'utiliser des signes graphiques dont il se souvient certainement. Mais il ne semble pas donner de sens à tous ces signes. Après la mise en commun, le "32 garçons" est bien placé, et pour autant Mathieu n'arrive pas au résultat. La deuxième année sa production relève d'un cas 2.

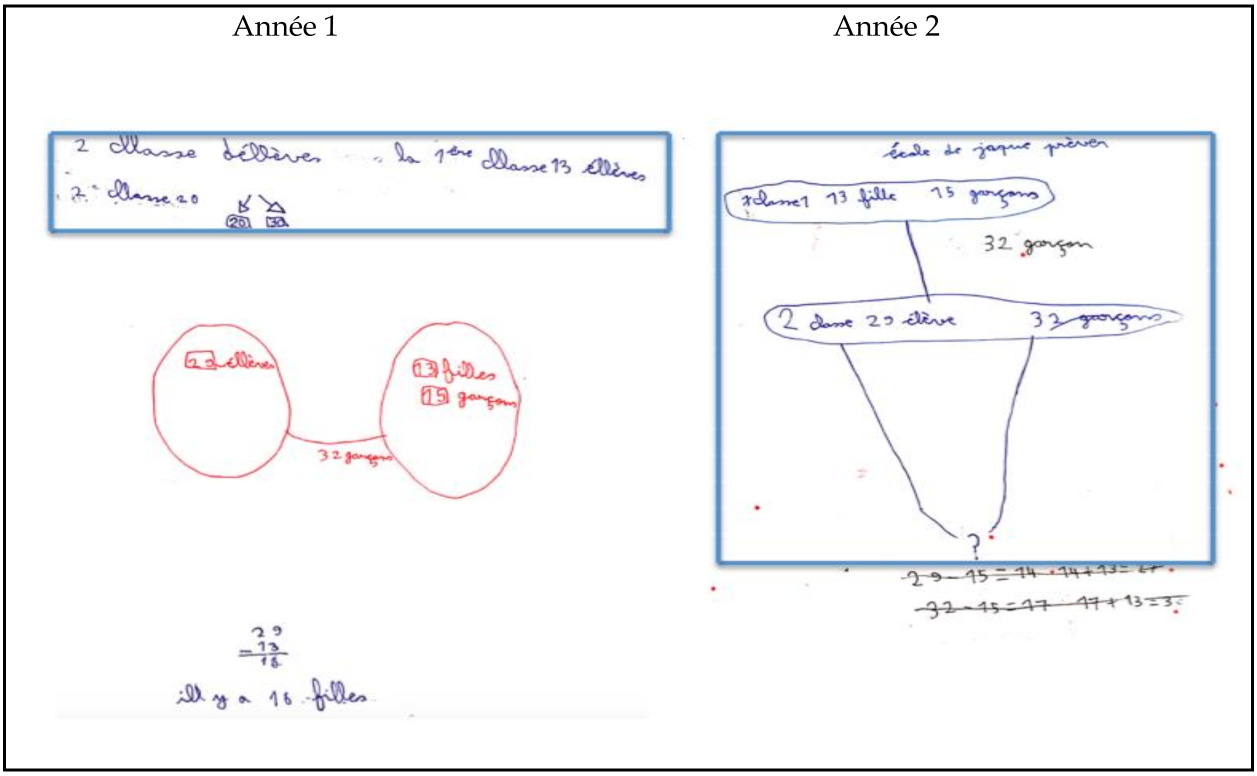



*Figure 14. Production Mathieu élève hors rep, cas « données manquantes » à cas 2, réponse fausse, puis fausse*

Ces quelques études de cas montrent que sur deux années les écrits se structurent. Les signes graphiques se sont enrichis et participent pour les élèves relevant des cas 5 à 9, à la mise en relation des éléments de la troisième réunion avec les deux autres réunions.

## VII - CONCLUSION

Nous pouvons conclure de ces résultats que

- La prise en compte dans le dispositif de différentes modalités (alternance phase collective et individuelle et de phase oral / écrit) favorise la mise en mémoire du contexte, en renvoyant à plus tard le processus opérationnel.
- Le dispositif a permis un enrichissement du catalogue des signes et symboles sur les deux territoires sans figer une représentation graphique en particulier.
- La comparaison des brouillons montre un enrichissement du chemin cognitif des élèves, mais les représentations graphiques d'un élève restent très souvent très proches d'une année sur l'autre.

- Il semble que les obstacles, comme « résoudre un problème » c'est « faire une opération ou utiliser les nombres de l'énoncé ou produire une phrase réponse » aient été dépassés. Les élèves ont une meilleure compréhension de la différence entre un écrit pour chercher et un écrit pour communiquer. L'écrit semble être devenu un outil pour l'élève pour structurer sa pensée, et constitue un espace intermédiaire précédent le produit final. Cependant, chez certains élèves les difficultés demeurent. Et pour ceux-là l'activité de résolution d'un problème ne signifie plus « effectuer des opérations », mais s'est transformée en une activité consistant à « faire des flèches et des dessins sur une feuille ».
- Par ailleurs, lorsque que les problèmes sont à résoudre seuls, les difficultés persistent surtout en Rep+ où les élèves ne remobilisent pas toujours ce qu'ils ont vu lors de ces séances.

Le brouillon constitue certes la trace de ce que l'élève a construit, il n'est pas pour autant conçu comme un miroir de ce qui se passe dans la tête des élèves mais au contraire comme un outil que les élèves peuvent utiliser pour construire ce qu'ils ont dans la tête (Alcorta, 2001, p. 98). L'imbrication des représentations mentales et des représentations graphiques peut être erronée : une bonne représentation graphique peut ne pas être opérationnelle, alors qu'une représentation graphique incomplète peut être suffisante pour certains élèves. Ce qui permet questionner l'apprentissage des schémas plus conventionnels.

## VIII - BIBLIOGRAPHIE

Alcorta, M. (2001). Utilisation du brouillon et développement des capacités d'écrit. *Revue française de pédagogie, volume 137*, 2001. La pédagogie et les savoirs : éléments de débat, 95-103. https://doi.org/10.3406/rfp.2001.2850

Alcorta, M. (2002). Une approche Vygotskienne du développement de l'écrit : Le brouillon : un outil pour écrire. Dans M. Brossard et J. Fijalkow (dir.), *Apprendre à l'école : perspectives Piagetiennes et Vygotskiennes* (x^e^ éd., vol. x, pp. 123-151). Pessac : Presses Universitaires de Bordeaux. DOI : https://doi.org/10.4000/books.pub.48452.

Allard, C., Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes en CM1/CM2,* Paris, France : Nathan.

Allard, C., Moussy, C. (2022). Travail collaboratif entre enseignants, formateurs et chercheurs sur la résolution de problèmes numériques en cycle 3. *In actes du XLVII Colloque Copirelem. Grenoble, 2021.*

Brousseau, G. (1997). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16***,** 67-96.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* (HDR, Université Paris Diderot, Paris). Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

Robert, A., Penninck, J., Luttuati, M. (2012). Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté. DOI :10.4000/books.pufc.9978

Roditi, E., Allard, C., Tempier, F., Masselot, P., Peltier, M.-L. (2022). Ce que nous disent les professeurs de CM2 de leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. Actes du 47e colloque de la COPIRELEM, Grenoble : ARPEME.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques, 10 (2.3), 133-170.

# IX - ANNEXE 1 : FREQUENCE DES SIGNES ET DES FONCTIONS SUR 140 BROUILLONS

| **Fonction : désigner** | **Signes et symboles** | **Sur 140** |
|---|---|---|
| **Flèches** | Verticales, horizontales, obliques | 2 |
| **Traits** | Verticaux, horizontaux, obliques | 1 |
| **Accolades** | | 1 |

***Tableau 1.*** *- Fonction « désigner » : associer une valeur à une donnée, annoncer un résultat*

| **Fonction isoler des données:** | **Signes et Symboles** | **sur 140** |
|---|---|---|
| **Lignes fermées** | Ligne qui entoure ou encadre (distingue les données de la 1ère et la 2ème classe) | 22 |
| **Lignes non fermées** | | 4 |
| **Traits** | | 9 |

***Tableau 2.*** *– Fonction : Isoler des données*

| **Fonction isoler : mémoriser des éléments de contexte, qualifier** | **Signes et Symboles** | **Sur 140** |
|---|---|---|
| Nombre | Écriture chiffrée « 1 » et « 2 » ou en lettres comme: 1ère classe, 2ème classe, 1 école | 113 |
| Texte/mots | Mots entiers et abréviations : classe ou c, école « Jacques Prévert » | 78 mots de contexte (classe, école) |

***Tableau 3.*** *Fonction : mémoriser des éléments de contextes*

| Fonction : mettre en relation | Signes et Symboles | Sur 140 |
|---|---|---|
| Flèches | Verticales, horizontales, obliques | 5 |
| Accolades | | 1 |
| Traits | | 5 |
| Lignes fermées | | 0 |
| Lignes non fermées : Arcs de cercle | | 4 |

***Tableau 4.*** *- Fonction : mettre en relation*

# QUEL RÔLE POUR LA MODELISATION EN MATHEMATIQUES AU COURS MOYEN ?

**Jacques DOUAIRE**
Équipe ERMEL, Ifé
Jacques.douaire@wanadoo.fr

**Fabien EMPRIN**
Université de REIMS, CEREP EA 4692 – équipe ERMEL
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Quel rôle peut jouer la modélisation dans les apprentissages mathématiques ? Nous abordons cette question sous l'angle de la construction de connaissances ou de méthodes dans deux domaines : celui de la résolution des problèmes complexes et celui de la proportionnalité. Nous nous appuierons sur les problèmes que nous avons expérimentés dans le cadre des recherches de l'équipe ERMEL sur l'élaboration d'ingénieries didactiques au Cours Moyen (9-10 ans).
Ces apprentissages conduisent donc à s'interroger sur les processus de modélisation proposés dans des situations didactiques et à leur mise en œuvre par les enseignants.

## I - PRESENTATION

### 1 Questions de modélisation

Cette communication de l'équipe ERMEL a pour buts de s'interroger sur la signification de la notion de modélisation et en particulier d'analyser les raisonnements que développent des élèves du Cours Moyen lors de la résolution de problèmes complexes ou de situations relevant de la proportionnalité ainsi que la contribution de ces raisonnements aux apprentissages. Notre intention est de partager des outils d'analyse portant sur des situations et des progressions pour pouvoir débattre de leur validité ainsi que de nos choix d'enseignement.

Les deux notions abordées dans cette intervention : la proportionnalité et la résolution de problèmes complexes, constituent à la fois des enjeux pour les apprentissages mathématiques des élèves du CM et des sources d'interrogations sur les choix d'enseignement à privilégier pour les enseignants. De plus elles ont fait l'objet d'approches diverses dans les programmes successifs, souvent en privilégiant un aspect particulier de la notion, et parfois en sous-estimant la nécessité d'une analyse didactique des connaissances déjà présentes chez les élèves et de leur évolution. Aussi la modélisation au CM, relative à ces notions, peut être abordée tant sous l'angle des savoirs, bien que ce terme soit assez impropre concernant l'apprentissage de la résolution de problèmes complexes, qui relève plutôt d'une pratique sociale, que celui du processus de mathématisation par l'élève dans les situations proposées. Les expérimentations que nous avons menées nous conduisent à décrire, pour les enseignants et les formateurs, une approche où les élèves font intervenir un ensemble de connaissances sur le calcul tant pour produire des solutions que pour les valider.

### 2 Des problématiques différentes

L'inscription des deux notions à l'école élémentaire est différente : l'une, la proportionnalité, est en relation avec des savoirs mathématiques et présente une utilité non seulement pour des études futures au collège, mais aussi pour la vie sociale ou professionnelle des futurs citoyens. L'autre, la résolution de problèmes complexes est un objet essentiellement scolaire relevant davantage d'une organisation méthodologique en relation avec des énoncés dont l'importance parmi les problèmes mathématiques qui seront traités par les élèves sera moindre au fur et à mesure de leur scolarité.

Toutefois ces deux thèmes constituent des « questions vives » parce qu'il n'y pas réellement de consensus dans les propositions d'enseignement les concernant. De plus, ce qui n'est pas sans rapport avec le point précédent, il n'y a pas de paradigme au niveau des recherches sur ces questions, certaines d'entre elles pouvant même mettre en valeur des propositions susceptibles de conduire les enseignants à s'interroger sur leur enseignement, mais sans pour autant qu'ils aient la garantie de leur efficacité à long terme. L'absence de paradigme reconnu, ayant fait l'objet de débats scientifiques au sein de la communauté didactique, peut avoir pour conséquence que les enseignants du 1er degré, par ailleurs non spécialistes des mathématiques en général, risquent de se trouver relativement dépourvus.

C'est pour cela que la question de la modélisation nous permet d'aborder ces notions avec des questions communes : quels raisonnements des élèves sont-ils conduits à élaborer ? Quelles difficultés cette élaboration présente-t-elle ? De quels moyens de contrôle de leurs productions disposent les élèves ? Qu'est-ce qui est institutionnalisable au cours de ces processus d'enseignement ? Cette dernière question suppose bien entendu de disposer de progressions, dont les caractéristiques puissent être soumises à débat.

### 3 Les recherches de l'équipe ERMEL

Cette réflexion sur l'enseignement de ces deux notions nous est apparue nécessaire dans le cadre d'un des travaux actuels de notre équipe concernant l'élaboration de nouvelles ressources sur les apprentissages numériques. En effet, nos recherches poursuivent plusieurs buts : d'une part expliciter les problématiques d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, élaborer des situations et des progressions qui visent à y répondre, et mettre à l'épreuve ces dispositifs au moyen d'expérimentations durant plusieurs années dans différents milieux sociaux ; d'autre part, produire des ressources pour les enseignants et les formateurs ; ces recherches élaborent donc des ingénieries didactiques (Artigue 2002). Or l'évolution de la formation du 1er degré, tant initiale que continue, nécessite de rendre plus directement accessibles aux enseignants les résultats de ces recherches. Aussi, dans nos publications récentes nous décrivons précisément les gestes professionnels nécessaires à la mise en œuvre de situations d'apprentissage ; ces gestes sont parfois délicats notamment pour des enseignants débutants, comme lancer la recherche des élèves sans les guider, conduire des mises en commun sans valider soi-même les réponses, ou prendre en compte les différences de connaissances de ses élèves.

Nos publications « *Les Essentielles* ERMEL » (CP (2016), CE1 (2017), CE2 (2019), CM1 (2021), CM2 (2022)), s'appuient sur des ouvrages plus anciens relatifs à ces niveaux (ERMEL 2005), mais refondent partiellement les progressions alors décrites, compte tenu d'expérimentations ou de résultats de recherches plus récents, portant sur des notions comme la résolution de problèmes complexes ou la proportionnalité. Nous avons également choisi, dans ces publications destinées aux enseignants et aux formateurs, une entrée par les situations et non par des parties théoriques, ainsi qu'une description plus précise des situations qui privilégient les sauts qualitatifs de connaissances. Ces choix sont aussi partagés pour les publications faisant suite à notre recherche plus récente sur les apprentissages spatiaux et géométriques de la GS au CE1 : ERMEL Géométrie CP CE1 (2020) et ERMEL GS (2023), cette dernière publication intégrant aussi les apprentissages numériques.

# II - LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

Nous appelons « problèmes complexes » (cf. aussi Houdement 2017), des problèmes pour lesquels les outils mathématiques nécessaire à leur résolution, et notamment le calcul arithmétique, sont connus de l'élève : il s'agit notamment d'opérations qu'il maîtrise, enseignées pour certaines depuis plusieurs années, mais dont les énoncés supposent que l'élève élabore une mise en relation des données et des questions. Au CM c'est le cas d'énoncés dépourvus de questions successives qui le guideraient, ou de toute autre indication sur la succession de calculs intermédiaires (par exemple procéder comme souvent en cherchant quel calcul effectuer avec les deux premières données de l'énoncé).

## 1 Des problèmes qui ne constituent qu'une composante pour « Apprendre à chercher »

Les problèmes complexes ne constituent qu'un des types de problèmes permettant aux élèves de développer leurs capacités à résoudre des problèmes. Le tableau ci-dessous résume la catégorisation, issue de nos recherches, entre les différents problèmes que nous proposons pour le Cours Moyen selon deux critères : l'apprentissage visé, résumé avec chaque type de problème, et l'existence ou non d'un modèle de résolution préalablement enseigné.

| Connaissances / Apprentissage visé | Méthode de résolution disponible | Pas de méthode de résolution disponible |
|---|---|---|
| **Acquisition de connaissances** | PROBLÈMES DE SYNTHÈSE<br>Réinvestir des connaissances | SITUATION PROBLÈME<br>Développer des connaissances |
| **Apprendre à chercher** | PROBLÈMES COMPLEXES<br>Planifier une solution<br>Apprendre à rédiger une solution | PROBLÈMES OUVERTS<br>Gérer des essais de calcul, formuler des hypothèses, élaborer des preuves |

*Tableau 1 : les fonctions des différents types de problèmes*

Une question importante est donc de savoir si l'apprentissage à la résolution de problèmes complexes peut être traitée de façon indépendante des autres types de problèmes cités dans le tableau ci-dessus. Or des composantes communes à la résolution de problèmes sont à développer chez les élèves pour pouvoir les rendre autonomes dans leurs recherches : par exemple la nécessité d'élaborer une solution personnelle ou de contrôler par soi-même ses productions.

Notre analyse, résultat de nombreuses expérimentations, est que ces compétences indispensables se développent de façon privilégiée avec des problèmes ouverts où l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution expert et dont l'énoncé ne comporte que les données nécessaires à sa résolution : il peut gérer des essais de calcul successifs, émettre des hypothèses, produire des procédures de contrôle… sans se croire obligé d'appliquer, de façon plus ou moins appropriée, un modèle de résolution qui lui aurait été enseigné auparavant.

Centrer cet apprentissage principalement sur des problèmes complexes, ne permet pas aux enseignants d'analyser ces difficultés, ni à plus forte raison, de disposer de moyens pour faire évoluer, de façon stable, le rapport des élèves à la résolution de problèmes.

## 2 Quelques tentatives actuelles ou passées

La résolution de problèmes complexes constitue une difficulté reconnue de l'enseignement des mathématiques au niveau du primaire. Diverses tentatives plus ou moins anciennes ont essayé d'apporter des propositions comme :

1. Privilégier des problèmes de la vie courante, en visant ainsi la finalité sociale de l'école primaire, mais en sous-entendant qu'ils constitueraient une motivation bienvenue.
2. Proposer des problèmes types, choix à la fois privilégié avant la réforme des mathématiques modernes, puis exprimé par d'autres dans des typologies plus récentes.
3. Privilégier les problèmes arithmétiques simples, en espérant un transfert à des problèmes plus complexes, traduisant parfois un désarroi face à cet apprentissage.
4. Proposer le recours à une représentation universelle avec le risque d'un dédoublement des buts : par exemple faire un schéma et résoudre le problème.
5. Ou au contraire associer de fait une représentation à une notion (exemple : tableau et proportionnalité).
6. Proposer un traitement préalable, non mathématique, de l'énoncé, conception à l'origine centrée sur la lecture des énoncés.
7. Apporter des aides multiples sur la prise d'information dans l'énoncé (souligner les termes importants, les valeurs numériques, transformer un texte en énoncé…)

Mais ces propositions se confrontent en général à une certaine résistance. Il serait d'ailleurs utile de s'interroger sur les raisons pour lesquelles certaines se sont succédées sans plus d'analyse des conceptions de l'apprentissage qui les fondent, ou des limites de celles qui les ont précédées, au-delà de la nouveauté qu'elles ont pu représenter à un moment et de l'attrait qu'elles sont pu avoir auprès de l'institution ou de certains enseignants ou formateurs. Aussi, dans nos recherches sur la résolution de problèmes nous privilégions une analyse du travail mathématique de l'élève.

## 3 Présentation du problème :

La situation LE MOBILIER DE L'ÉCOLE propose au milieu du CM2 (*Les Essentielles* ERMEL CM2*)* un problème dont l'énoncé présente des données dans un ordre différent de celui de leur traitement, sans que celui-ci ne soit étayé par la présence de question intermédiaire. Sa résolution nécessite aussi le recours à plusieurs opérations, et dans ce sens, il constitue un problème de synthèse relatif à leur usage. Cette situation contribue aussi à l'apprentissage de la rédaction de la solution.

L'énoncé : « *Une entreprise expédie trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école : le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises ; le deuxième contient 25 tables ; le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise ? une table ? une armoire ?* » L'énoncé se réfère à une situation concrète dont l'élève peut facilement se représenter le but (déterminer la masse de chaque type de mobilier) ainsi que les contraintes (les trois chargements ont la même masse de 300 kg). Il a une forme assez classique, dépourvue d'information inutile. Les calculs, qui sollicitent les quatre opérations, portent sur des multiples de 5 ou de 10 pour ne pas présenter un obstacle à la résolution. La difficulté de cet énoncé, qui ne comporte pas de question intermédiaire, provient que l'information sur ce qui doit être cherché en premier ne figure que dans le 2ème chargement.

## 4 Les difficultés et leur résolution

Certains élèves effectuent un traitement des données dans l'ordre de leur présentation dans l'énoncé, cherchant à déterminer la valeur d'une des inconnues à partir de la première information (« *le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises* »). Plusieurs types de procédures erronées sont alors produites. Par exemple, ces élèves ajoutent les quantités (le nombre de tables et celui des chaises) 15 + 30 = 45, puis divisent 300 par 45 et en déduisent ou non une conclusion sur la masse d'une table ou d'une chaise. Dans d'autres procédures une valeur arbitraire est affectée à l'une des masses ou bien une seule catégorie de mobilier est prise en compte pour ce premier chargement, par exemple « 300 kg = 30 chaises ». Des élèves produisent des enchaînements de calculs, parfois sans signification, avec les nombres obtenus avec, pour certains, une absence de réponse. Certains élèves qui obtiennent un résultat différent pour la masse d'une chaise lorsqu'ils abordent la deuxième information, ne remettent pas en cause la valeur obtenue lors de leurs calculs précédents.

De plus des élèves qui prennent en compte les données appropriées, en partant d'abord de la deuxième information et obtiennent alors un résultat correct ne savent pas l'exploiter en repartant de la première information et s'organiser dans la suite de leur calcul.

Ces constats montrent que face à la charge de travail constituée par les nouveautés de l'énoncé, beaucoup d'élèves ne savent plus interpréter une valeur numérique produite ; sur leur brouillon, le résultat d'un calcul n'est pas, en général, affecté explicitement à une des inconnues cherchées. Même dans le cas où un raisonnement est correct, l'accumulation éventuelle des calculs, fait que des élèves disent qu'ils sont perdus, qu'ils ne savent plus à quoi correspond ce qu'ils ont trouvé ni ce qu'il leur reste à chercher.

### 5 Les apprentissages visés

Il s'agit donc pour l'élève d'abord de comprendre que les données ne sont pas toujours à traiter dans l'ordre de leur présentation et que, si une première série d'informations ne permet pas de produire un résultat, il est nécessaire de ne pas choisir de façon arbitraire certaines valeurs recherchées. Plus généralement cette situation contribue à ce que l'élève prenne conscience que, comme il doit lui-même élaborer un ordre dans les calculs successifs, il lui est utile d'indiquer au fur et à mesure sur quoi portent les résultats qu'il obtient, et ainsi d'en conserver une trace interprétable.

Le but n'est pas que l'élève planifie préalablement la résolution ce qui lui serait alors impossible pour ce problème, mais que face à ces difficultés, la plupart du temps nouvelles, il puisse élaborer des moyens d'interpréter ce qu'il produit. C'est ce dernier aspect qui nous semble l'objet central d'un apprentissage portant non pas sur une méthodologie générale – une sorte de check-list que l'élève aurait à connaître – mais sur la possibilité d'annoter ses résultats et de réinterpréter un ordre pour ses calculs.

L'interrogation, suite à ces constats prévisibles est donc : « Comment permettre aux élèves de devenir plus autonomes pour la résolution de ces problèmes ? » Notre choix, développé dans les phases suivantes de la situation, pour leur permettre de reprendre le contrôle sur leurs productions est d'inciter les élèves à annoter les résultats de leurs calculs à des moments divers de leur résolution pour pouvoir ensuite les interpréter et repartir d'un résultat identifié ; puis, à partir de leur analyse collective lors d'une première mise en commun, où ce sont les élèves qui ont à formuler des critiques et questions, de rédiger leur solution afin de prendre conscience des étapes de la résolution. Plus tard dans l'année, les élèves auront à rédiger de façon autonome la solution de tels problèmes ; ces rédactions elles-mêmes étant l'objet d'une analyse collective.

L'apprentissage de la résolution de ce type de problème complexe est amorcé au CE2, et développé à partir du CM1 où les élèves ont d'abord à organiser leurs calculs successifs pour des problèmes dépourvus de question intermédiaire. Cet apprentissage se poursuit donc au CM2 et évolue, grâce à l'interaction avec la rédaction des solutions, vers la planification de la résolution.

## III - LA PROPROTIONNALITE

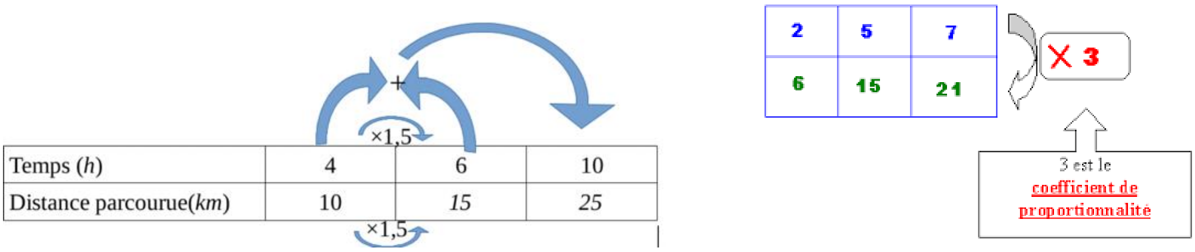
### 1 Une diversité de modèles

La proportionnalité intervient tant dans la modélisation de phénomènes physiques, que dans celle d'activités de la vie courante (relations entre quantités et prix, pourcentages…). Des modèles mathématiques différents (théorie des proportions, fonctions numériques…) ont successivement été privilégiés par les programmes ; ils ont conduit à des approches centrées notamment sur la recherche de la quatrième proportionnelle, l'étude de suites proportionnelles, ou de fonctions linéaires. Ces approches pouvant privilégier des relations entre des grandeurs ou entre des nombres, chacune valorisant différents raisonnements, techniques de calcul ou représentations.

Certains des aspects privilégiés dans le passé se retrouvent dans des pratiques ou des dispositifs d'enseignement (Hersant 2005). Dans les programmes actuels il est indiqué au chapitre « Modéliser » : « Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité. » et aussi « Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation. Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs. » L'école primaire propose donc une première approche de la proportionnalité : les élèves doivent établir, à partir de deux nombres, ou de deux séries de nombres, l'existence ou non d'une relation multiplicative entre ces données pour pouvoir les comparer ou en produire de nouvelles.

## 2. Des choix risqués

Les ressources pour les enseignants proposent parfois de mettre les élèves « sur la voie » à partir de schématisations ou de tableau, pouvant créer des automatismes issus non de la compréhension de la situation mais de son association avec un support. Quelques exemples :




| | | | |
|---|---|---|---|
| Temps (*h*) | 4 | 6 | 10 |
| Distance parcourue(*km*) | 10 | *15* | *25* |

*Figure 1 : illustration des schématisations présentes dans les ressources (tableau de gauche : incitation à utiliser les scalaires et dans le tableau de droite, incitation à utiliser un coefficient de proportionnalité.)*

## 3. Une question

Le développement de raisonnements proportionnels sollicite la mise en œuvre des propriétés de la multiplication dans des contextes variés ; en ce sens la proportionnalité fait partie du champ des structures multiplicatives : celui des problèmes multiplicatifs et de division. Mais une question importante est « comment un élève peut-il reconnaître (ou identifier) une situation de proportionnalité ? »

Notre questionnement porte donc aussi sur l'élaboration progressive de raisonnements proportionnels au CM. Nous souhaitons amener les élèves à induire la relation entre deux nombres pour l'appliquer à un troisième et obtenir un quatrième et aussi à contrôler cette induction en lien avec un phénomène physique, des données sociales, des aspects matériels, des relations entre les nombres… Nous présentons certaines des situations que nous proposons au CM1 pour éclairer ces interrogations (*Les Essentielles* ERMEL CM1).

## 4. Bandes colorées

### *4.1 L'énoncé*

« *J'ai réalisé une bande avec 25 bleues. Combien faut-il de bandes rouges pour faire la même longueur ?* ». Les élèves ont constaté précédemment qu'il faut 10 bandes bleues ou 4 bandes rouges pour faire une bande blanche.

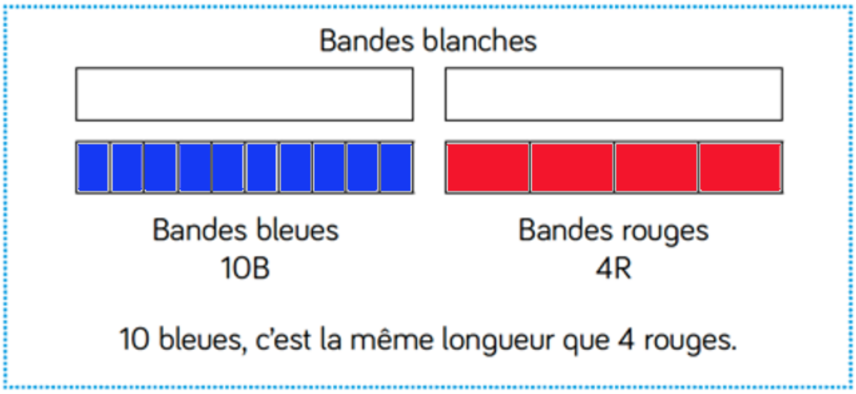



*Figure 2 : affichage au tableau*

Le contexte matériel est évoqué dans la consigne : 10 bandes bleues (B) font 4 bandes rouges (R). Les élèves n'ont pas les bandes pour faire des essais, ils travaillent sur les nombres. Le matériel collectif sera utilisé, pour vérifier, après que la mise en commun ait permis la critique des procédures.

### 4.2 Procédures et difficultés

Les procédures erronées sont principalement d'une part l'addition du même nombre aux deux types de bandes *(« 25 bleues c'est 10 bleues et 15 bleues »)*, l'élève ajoute 15 rouges à 4 rouges, et, d'autre part des procédures mixtes avec l'utilisation partielle de la multiplication (« *25 bleues c'est 2 × 10 bleues et 5 bleues* »), l'élève propose « *2 × 4 rouges* », ce qui est correct, mais ajoute 5 rouges. La confrontation aux bandes réelles, à la fin d'une première recherche, leur permet de se rendre compte que cette opération n'est pas valide dans ce contexte et de chercher d'autres relations : 25 c'est 10 et 10 et moitié de 10 donc en bandes rouges c'est 4 et 4 et moitié de 4 (donc 2).

### 4.3 Les caractéristiques du problème

**Le contexte est connu** (ajouter et comparer des longueurs). Les raisonnements sont facilités dans la première phase par la décomposition possible en deux problèmes : le premier multiplicatif (trouver la longueur totale de *X* bandes bleues) et l'autre de division (rechercher le nombre de bandes rouges pour égaliser une longueur produite avec des bandes bleues).

**Les relations numériques sont simples ;** elles portent sur les échanges entre les nombres (5 bleues « contre » 2 rouges). De plus les valeurs des données facilitent les calculs portant sur des doubles et des moitiés : par exemple, chercher pour 25 bandes bleues, connaissant la règle d'échange pour 10, permet de s'appuyer sur 10 + 10 + 5.

**La validation des solutions explicite les erreurs « additives »** des procédures de linéarité en mettant en évidence des raisonnements corrects *(« Pour 5 c'est la moitié de ce que l'on a trouvé pour 10. »)*. Le recours à la **validation pratique** est toujours possible.

## 5. Le prix des morilles

### 5.1 L'énoncé

*« Dans un supermarché, il y a des cartons de morilles. La masse est indiquée mais il faut maintenant mettre le prix. L'étiquetage du paquet de 100 g est déjà fait. Je l'ai affiché au tableau »* (ci-dessous). « *Vous devez mettre les étiquettes prix sur les cartons.* »

## Le prix des morilles

100 g de morilles pour 8 euros

| | |
|---|---|
| Masse : 300 g<br>Prix : | Masse : 250 g<br>Prix : |
| Masse : 150 g<br>Prix : | Masse : 104 g<br>Prix : |
| Masse : 50 g<br>Prix : | |

| | | |
|---|---|---|
| 24 € | 20 € | 12 € |
| 58 € | 30 € | |

Étiquettes

*Figure 3 : feuille consigne de la situation « le prix des morilles »*

### 5.2 Procédures et difficultés

Les élèves ont à déterminer des prix, mais certaines étiquettes ne conviennent pas et d'autres manquent. Pour 104 g des élèves hésitent. D'autres peuvent argumenter qu'aucune étiquette ne convient : « *Celle de 12 € correspond à 150 g et ne peut être aussi pour 104g* » ou « *4 euros en plus pour 4 g en plus, c'est comme si c'était 1 euro pour 1 gramme* ». Les élèves peuvent conclure que le prix devrait être proche de 8 €.

L'interprétation de problèmes utilisant ce contexte dépend de la connaissance que l'on a de la convention sociale utilisée. Les erreurs dans la résolution de ce type de problème peuvent être davantage liées à une méconnaissance des conventions et des usages sociaux qu'à une erreur de compréhension du concept mathématique de proportionnalité.

### 5.3 Les caractéristiques du problème

**Le contexte est connu** (prix d'achat en fonction de la masse). Cela favorise l'établissement des relations entre les données. Le coefficient de proportionnalité est implicitement présent, le prix pour 100 g étant donné, mais sans qu'il y ait une incitation à l'utiliser.

**Les raisonnements s'appuient sur la linéarité** : le prix pour 300 g est le triple de celui pour 100 g… ; celui pour 400 g peut être obtenu à partir des relations additives entre les nombres 150 + 100 pour 250 puis 250 + 150 pour 400.

La **validation des solutions,** comme le contexte est non perceptif c'est à dire sans que l'on puisse valider par les sens ou par la mesure, nécessite de la part des élèves qu'ils trouvent des arguments sur les nombres. La mise en commun permet de traiter les raisonnements erronés du type « *ajouter le même nombre aux deux nombres* » ; par exemple, pour trouver le prix pour 104 g connaissant le prix pour 100 g (8 €), certains élèves peuvent ajouter 4 à 8 comme on a ajouté 4 à 100.

Compte tenu des résultats manquants dans l'une ou l'autre des deux listes, la mise en correspondance des masses et des prix ne peut se faire en les remettant simplement dans l'ordre, il est nécessaire de justifier leurs relations. Le contrôle des résultats et des procédures s'effectue donc par la cohérence avec le contexte et sur le calcul.

## 6. Sirop

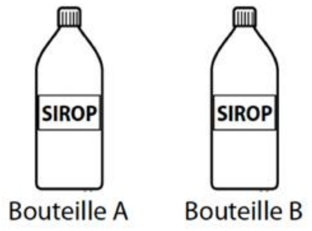
### 6.1 L'énoncé

Je prépare du sirop dans les deux bouteilles A et B.

Problème 1

Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre.
Dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 10 morceaux de sucre.

Caroline dit : « C'est le sirop de la bouteille A qui est le plus sucré ! »
Sophie dit : « C'est le sirop de la bouteille B qui est le plus sucré ! »
Pierre dit : « Les deux sirops sont pareils ! »




**Qui a raison ?** ....................... **Explique pourquoi :** ....................................................

.................................................................................................................

### 6.2 Procédures et difficultés

Des procédures additives erronées sont produites : par exemple ajouter 25 (différence entre 30 et 5) et obtenir 29, ou retrancher 1 pour conserver l'écart entre le nombre de verres d'eau et le nombre de morceaux de sucre. Mais aussi des procédures correctes : additions de multiples de 5 avec mise en correspondance des additions de multiples de 4 (« *Pour 10 verres d'eau, 8 sucres ; pour 20 verres 16 sucres…* »), ou recours direct à un raisonnement sur les multiples (« *30 verres c'est 6 fois plus…* »)

Lors de la mise en commun des arguments erronés peuvent être traités : « *La bouteille B est la plus sucrée car il y a plus de sucre.* » (10 morceaux contre 2) ou « *La bouteille A est la plus sucrée car il y a le moins d'eau.* » (4 verres contre 12) ou « *C'est pareil car la A n'a pas beaucoup d'eau et pas beaucoup de sucre, et la B a beaucoup d'eau et beaucoup de sucre.* »

Des raisonnements corrects sont aussi formulés s'appuyant sur l'égalisation des quantités d'eau des deux bouteilles : « *Je dois ajouter 2 fois 4 verres dans la A et aussi 2 fois 2 morceaux de sucre pour faire 12 verres. Donc la A aura 6 morceaux de sucre, et la B, 10.* » ou « *12 c'est trois fois plus que 4, mais 10 ce n'est pas trois fois plus que 2.* »

### 6.3 Les caractéristiques du problème

**Le contexte est connu** (boisson plus ou moins sucrée), mais la notion de concentration, qui est abordée ici sous l'angle de la comparaison, puis d'égalisation de mélanges, n'est pas modélisée mathématiquement. Les solutions pratiques de la vie courante consistant à ajouter du sucre ou du liquide selon le gout recherché peuvent ainsi faire obstacle et sont traitées par le recours à des raisonnements.

**La validation des solutions** s'appuie sur la cohérence des raisonnements et des calculs, sans qu'une validation pratique ne soit possible.

## 7. Récipients

Deux problèmes sont successivement proposés avec un verre qui sert à remplir en plusieurs fois des récipients d'environ un litre. Le premier dans un récipient évasé en forme de tronc de cône ou de pyramide. Le second avec un récipient cylindrique ou parallélépipédique. Les élèves ont à prévoir, en fonction du nombre de verres versés, la hauteur d'eau dans le récipient.


*Figure 4 : exemple de récipients utilisables dans la situation « récipients »*

Un tableau est proposé pour noter les résultats.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de verres | | | | | | | | | | | |
| Hauteur | | | | | | | | | | | |

*Figure 5 : le tableau à remplir dans la situation « récipients »*

**Le contexte est nouveau :** la relation entre la quantité d'eau ajoutée dans un récipient et la hauteur mesurée est inédite.

Dans les deux problèmes, un tableau est utilisé comme un outil de présentation des résultats qui permet d'en anticiper d'autres en utilisant la linéarité, puis de constater par les mesures ou en mesurant si ces résultats sont vérifiés. Mais **le tableau est d'abord introduit dans une situation de non proportionnalité** pour mettre en forme les séries de données, évitant ainsi que le tableau ne soit uniquement associé à la proportionnalité.

**Le vocabulaire** peut être introduit par l'enseignant : « *Dans la situation avec le deuxième récipient (cylindrique ou parallélépipédique), <u>on dit que la hauteur de l'eau est proportionnelle</u> au nombre de verres ; et dans le cas du premier récipient (évasé), elle n'est pas proportionnelle… Parfois les grandeurs évoluent de façon proportionnelle, parfois non.* »

## 8. Éléments de progression

### *8.1 Choix pour les CM1 et le CM2*

Au CM1, nous cherchons à favoriser le développement de raisonnements proportionnels, et donc l'appréhension de situations de proportionnalité par la **variété de problèmes**, la **diversité des contextes**, la **complexité très progressive des relations entre les données**, le recours à des données numériques propices à des procédures de calcul mental, l'usage des propriétés additives et multiplicatives de la linéarité et la validation des raisonnements lors des mises en commun. Au CM2, tout en poursuivant ce développement de raisonnements proportionnels, nous visons des problèmes concernant simultanément plusieurs grandeurs dont longueurs, aires, masses et capacités, l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité, l'interprétation des données d'un graphique et la mise en relation entre un tableau de valeurs et un graphique.

**La prise en compte nécessaire des processus de modélisation par les élèves eux-mêmes** nous ont conduit à aborder progressivement la relation à induire; celle-ci est **décrite** de façon explicite dans l'énoncé sous forme d'une règle (BANDES COLORÉES,), **présente** dans l'énoncé, mais sans incitation à devoir l'utiliser (LE PRIX DES MORILLES), **construite** expérimentalement au cours de la situation, comme celle entre le nombre de verres versés et la hauteur d'eau (RÉCIPIENTS), **élaborée** seulement par un raisonnement comme la concentration (SIROP)

Nous avons aussi été conduits à **expliciter la nature des problème proposés.** Ce sont des problèmes **d'égalisation** (BANDES COLORÉES, SIROP), **de comparaison** (SIROP), **de mise en relation de deux listes** (LE PRIX DES MORILLES), **de modélisation d'un phénomène physique** (RÉCIPENTS), **d'agrandissement** (PUZZLE).

### *8.2 - Ensemble des situations proposées au CM*

| Situation ou activité | Niveau | Période | Objectif principal | Grandeurs |
|---|---|---|---|---|
| **BANDES COLORÉES** | CM1 | 3 | Développer des procédures multiplicatives | Égalisation de longueurs |
| **LE PRIX DES MORILLES** | CM1 | 3 | Associer par une relation multiplicative deux séries de grandeurs | Association de masses et de prix |
| LES FEUILLES A3 | CM1 | 4 | Déterminer des masses en fonction de surfaces | Association d'aires exprimées en fractions et de masses en nombre décimal |
| **SIROP** | CM1 | 3 | Développer des raisonnements utilisant la proportionnalité | Comparaison de concentrations |
| **RÉCIPIENTS** | CM1 | 5 | Appréhender une situation de non proportionnalité<br>Mettre en œuvre un tableau de données | Mise en relation de longueurs (hauteurs) et de volumes |
| PUZZLE | CM2 | 2 | Appréhender la proportionnalité : mettre en échec des raisonnements additifs. Mise en évidence des raisonnements proportionnels | Agrandissement de surfaces rectangulaires |
| RECETTES | CM2 | 3 | Utiliser la proportionnalité<br>Développer des raisonnements proportionnels | Mise en relation de données diverses : masses, capacités, quantités discrètes |
| PROFIL DE LA LOIRE | CM2 | 3 | Compléter un tableau<br>Produire et utiliser un graphique | Mise en relation de longueurs (altitudes, distances) |
| SOLDES ET PRIX RÉDUITS | CM2 | 4 | Identifier des réductions proportionnelles ou non<br>Utiliser des pourcentages | Comparaison de réductions exprimées sous différentes formes |

*Tableau 2 : tableau récapitulatif des situations du CM sur la proportionnalité (En gras situations abordées dans cette communication)*

## IV - CONCLUSION SUR LA MODELISATION

Celle-ci peut être succinctement envisagée du côté des apprentissages, pour lesquels nous essayons d'analyser systématiquement, dans nos recherches, les connaissances initiales des élèves, ainsi que les évolutions dans leurs raisonnements, c'est-à-dire leur propre processus de modélisation en constitution.

Mais aussi dans les choix, plus discutables, de notre ressource, où nous visons, à partir des éléments précédents et de la description de situations, à permettre à l'enseignant de faire évoluer ses propres modélisations de l'enseignement des mathématiques en lui permettant d'analyser sa pratique.

## V - BIBBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, n°8, 59-72.

Douaire J, Argaud H.-C, Douaire J., Emprin F., Frémin M. (2021) *Les essentielles ERMEL CM1.* Hatier.

Douaire J, Argaud H.-C, Douaire J., Emprin F., Frémin M. (2022) *Les essentielles ERMEL CM2.* Hatier.

Hersant M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France d'hier à aujourd'hui. *Repères- IREM* n° 59, 5-41.

Houdement C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école . *Grand N n°100* , 59- 78, IREM de Grenoble.

# DE L'ENSEIGNEMENT EN CLASSE A LA FORMATION D'ENSEIGNANTS : PRESENTATION D'UN DISPOSITIF DE FORMATION DE FORMATEURS

**Julie CERIA**
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
julie.ceria@hepl.ch

**Audrey DAINA**
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
audrey.daina@hepl.ch

**Ludivine HANSSEN**
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
ludivine.hanssen@hepl.ch

**Céline HUGLI**
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
celine.hugli@hepl.ch

**Stéphanie JAVET SCHLEGEL**
Chargée d'enseignement, HEP VAUD
stephanie.javet@hepl.ch

**Marie-Line GARDES**
Professeure ordinaire, HEP VAUD
marie-line.gardes@hepl.ch

Résumé
L'objectif de cette communication est de présenter un dispositif de formation de formateurs d'enseignants que nous avons eu l'occasion de mettre en place depuis 2020 à la Haute Ecole Pédagogique (HEP) du Canton de Vaud. En effet, la HEP doit former tous les enseignants de l'école primaire du canton aux nouveaux moyens d'enseignement qui entrent progressivement en vigueur (Dias, 2019). Pour cela, elle a recruté près de quinze enseignants. Pour construire ces formations de deux jours, nous avons mis un place un dispositif, s'appuyant sur plusieurs Lesson Studies (Clivaz, 2015), d'une part pour former ces nouveaux enseignants recrutés à devenir formateurs, et d'autre part pour élaborer les contenus de formations et des ressources. Nous présenterons ce dispositif, c'est-à-dire l'organisation de la formation et les ressources élaborées. Nous ferons un focus sur les questions posées par l'enseignement du nombre à l'école maternelle, en particulier celles liées aux différentes représentations du nombre (Gardes et al., 2021).

## I - INTRODUCTION

Dans cet article, nous présentons un dispositif de formation de formateurs[1] mis en place à la Haute Ecole Pédagogique (HEP) du Canton de Vaud en 2020. Ce dispositif visait à former des enseignants afin qu'ils puissent donner des formations continues portant sur le nouveau moyen d'enseignement (unique manuel scolaire officiel) en 1-2H (école maternelle, élèves de 4 à 6 ans).

[1] Afin de faciliter la lecture, nous n'utilisons pas l'écriture inclusive dans ce texte. En aucun cas cette décision révèle un quelconque rapport de genres, tous les termes rédigés par défaut au masculin concernent les deux genres.

Commençons tout d'abord par expliciter quelques éléments de contexte afin de comprendre la particularité de la Suisse en matière d'enseignement. En Suisse, il existe 26 cantons et autant de systèmes scolaires différents. En effet, chaque canton est souverain en matière d'éducation et dispose de ses propres lois sur l'enseignement. Il existe cependant une volonté d'harmonisation de ces législations. Pour la Suisse romande, c'est la Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique (CIIP) qui est l'institution de coordination. La coordination passe par un plan d'étude romand (PER) et des moyens d'enseignement romands (MER) qui sont communs aux cantons romands (CIIP, 2010). Le plan d'étude « recense un ensemble de connaissances et de compétences dont le développement est attendu chez tous les élèves de la scolarité obligatoire »[2], les MER proposent des activités répondant aux objectifs du plan d'étude romand. Pour l'enseignement des mathématiques, les moyens d'enseignement sont conçus sous le mandat de la CIIP. Le processus de conception est très long car tous les cantons doivent se mettre d'accord et approuver les moyens d'enseignement. De plus, une fois édités, ils entrent en vigueur selon les directives de chaque canton. Depuis 2019, de nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques, sous format numérique (plateforme ESPER), ont été introduits progressivement dans les cantons romands. Pour le Canton de Vaud, ce déploiement a débuté en 2020 avec l'introduction des moyens d'enseignement pour les degrés 1-2H. La HEP Vaud a été mandatée pour accompagner ce déploiement par l'organisation de deux journées de formation continue pour l'ensemble des enseignants du canton. Pour cela, des formateurs supplémentaires ont dû être engagés. Ainsi, une dizaine d'enseignants de l'école primaire a été recrutée pour participer à ces formations. C'est dans ce contexte que nous avons mis en place un dispositif de formation de formateurs.

Ce dispositif a été conçu avec plusieurs objectifs :

- un **objectif de constitution d'une équipe de formateurs** : l'équipe de formateurs s'étant considérablement agrandie et regroupant des personnes avec des profils divers (enseignants du primaire, enseignants du secondaire, enseignants spécialisés, formateurs d'enseignants, chercheurs en didactique des mathématiques), il y avait un enjeu important d'apprendre à se connaître et à travailler ensemble ;
- un **objectif de co-formation** : l'équipe de formateurs regroupant des personnes avec des expériences professionnelles différentes et pour certains non spécialiste du préscolaire, il y avait un enjeu, d'une part à former les enseignants à devenir formateurs, et d'autre part à partager les réalités de la classe vaudoise en 1-2H ;
- un **objectif d'élaboration des contenus de formations** : deux jours de formation devaient être construits, notamment pour mettre en évidence les changements didactiques et pédagogiques de ces nouveaux moyens d'enseignement ;
- un **objectif de productions de ressources pour les enseignants** pour accompagner l'introduction des moyens d'enseignement.

Afin d'atteindre ces objectifs, ce dispositif a été élaboré en appui sur plusieurs Lesson Studies (Clivaz, 2015). Le groupe de formateurs a été scindé en deux et chaque groupe a suivi parallèlement deux Lesson Studies (LS) dans les domaines mathématiques du plan d'étude romand, c'est-à-dire dans les domaines « Nombres », « Espace », « Grandeurs & Mesures » et « Opérations ».

Le contexte et l'organisation du dispositif de formation de formateurs ayant été présenté dans cette introduction, nous détaillons, dans la partie I, comment nous sommes passés des LS à la création d'un site de ressources public pour les enseignants. Dans la partie II, nous présentons comment nous sommes

[2] https://www.ciip.ch/Plans-detudes-romands/Plan-detudes-romand-scolarite-obligatoire-PER/Plan-detudes-romand-PER

passés des LS à l'élaboration des contenus des journées de formation continue. En conclusion, nous rapportons les avantages et inconvénients de ce dispositif de formation de formateurs.

# II - DE LA LESSON STUDY A LA CREATION D'UN SITE DE RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS

Dans cette partie, nous détaillons, à partir d'un exemple dans le domaine « Opérations », le processus qui a permis de passer d'une LS qui s'est déroulée entre formateurs à la création d'un site ressource pour les enseignants. Notre présentation s'organise selon les différentes phases de la LS.

## 1 Première phase de la LS : choix de l'activité

Pour choisir l'activité[3] à expérimenter sous forme de LS, plusieurs critères entrent en compte. Premièrement, le contexte d'enseignement restreint considérablement le nombre d'activités des MER à disposition. Dans notre cas, les critères de contexte étaient les suivants :

- Utilisation du nouveau moyen d'enseignement romand officiel
- Degré scolaire : 1P-2P au cycle I (MS-GS)
- Domaine mathématique : Opérations
- Chapitre : Résolution de problèmes additifs
- Type d'activité[4] : un problème

Deuxièmement, nous avions ciblé des difficultés liées à l'enseignement des mathématiques en 1-2P sur lesquelles nous voulions travailler :

- Choix et préparation du matériel par l'enseignant
- Explicitation des consignes et introduction du matériel pour les élèves (sans dévoiler les procédures attendues en faisant un exemple)
- Reconnaissance des procédures attendues pour résoudre un problème additif en 1-2P (par recomptage, éventuellement par surcomptage)

L'activité « But » (Figure 1) a donc été retenue pour observer une situation d'enseignement et d'apprentissage portant sur la « résolution des problèmes additifs avec des nombres inférieurs à dix ». L'enjeu mathématique mentionné par le moyen d'enseignement est « utiliser le recomptage et le dénombrement entre 1 et 10. Comparer des collections. » Nous avons ajouté, pour la LS, l'enjeu suivant : faire apparaitre explicitement la collection finale comme la réunion de trois collections.

[3] Le terme "activité" est celui utilisé dans les moyens d'enseignement suisses romands, dans le sens générique du terme. Nous l'emploierons dans la suite de ce texte étant donnée notre appartenance institutionnelle.

[4] Dans les MER, les activités proposées sont catégorisées de la manière suivante : des activités de tuilage, des activités d'introduction, des activités d'entraînement et des problèmes.

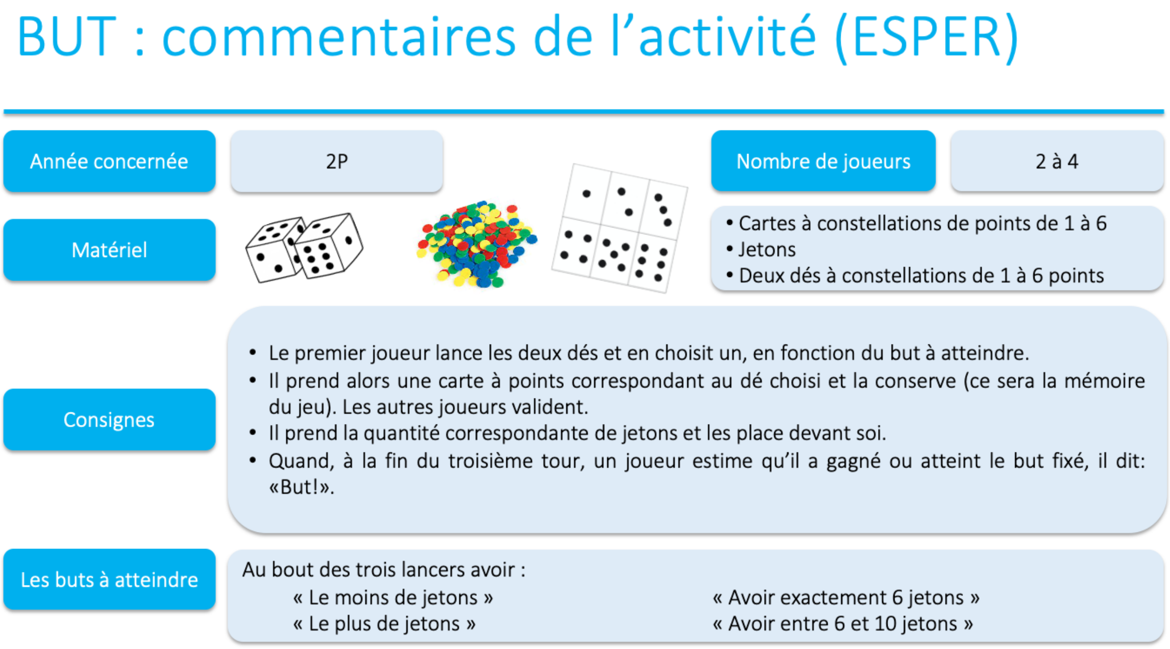



*Figure 1 – Extrait des commentaires de l'activité BUT (source : ESPER, plateforme numérique PER-MER)*

Pour en savoir plus, nous invitons les lecteurs et lectrices à consulter notre site Internet (Figure 7).

## 2 Seconde phase de la LS : analyse de l'activité

L'équipe de formateurs a ensuite effectué une analyse de l'activité. Ce travail d'analyse permet à l'équipe de réfléchir collectivement aux questionnements didactiques et à chacun d'intervenir selon les compétences liées à son domaine d'expertise. Dans cet exemple, nous avons particulièrement analysé les différents buts à atteindre, qui sont des variables didactiques importantes pour l'apprentissage de procédures additives (Figure 2).

| **Variables didactiques** | **Valeurs des variables** | **Effets sur les procédures des élèves** |
|---|---|---|
| But du jeu | Le plus de jetons | Sélectionner le dé avec la plus grande quantité de points |
| | Le moins de jetons | Sélectionner le dé avec la plus petite quantité de points |
| | Un nombre précis de jetons ou un intervalle entre deux nombres | Sélectionner le dé qui permet de s'approcher plus ou moins du nombre-cible par estimation<br>Sélectionner le dé qui permet d'atteindre le nombre-cible par complément |

*Figure 2. Tableau d'analyse des valeurs des variables didactiques en lien avec les buts du jeu et des effets sur les procédures*

Ensuite, nous avons effectué le même type d'analyse concernant le matériel (Figure 3).

| Variables didactiques | Valeurs des variables | Effets sur les procédures des élèves |
|---|---|---|
| Nombre de lancers | 1 lancer<br>2 lancers<br>3 lancers ou plus | L'élève ne peut pas réunir deux collections.<br>L'élève ne peut pas ou anticipe peu ses choix selon les buts à atteindre.<br>L'élève peut anticiper ses choix selon les buts à atteindre |
| Types de dés | 1 à 3 points<br>1 à 6 points | Utilisation de la comptine jusqu'à 9<br>Utilisation de la comptine jusqu'à 18 |
| Matériel à disposition des élèves | Boîte<br><br>Support plat (type plateau) | Il n'y a pas ou peu de chance que l'élève réunisse les différentes collections à la fin de la partie, car il se peut qu'il y ait seulement une seule collection.<br><br>L'élève peut organiser plus facilement et distinctement les différentes collections à réunir. |

*Figure 3. Tableau d'analyse des valeurs des variables didactiques en lien avec le matériel et des effets sur les procédures*

Enfin, l'analyse nous a permis de réfléchir à la présentation de l'activité et à la consigne à donner, selon les buts du jeu. Nous avons choisi de jouer les premières phases de jeu avec un élève, devant l'ensemble de la classe, mais sans expliciter au début le but à atteindre. Ainsi, la consigne, énoncée par l'enseignante, est la suivante : "Je lance deux dés, je choisis un dé et je prends les jetons correspondants." Après avoir fait répéter cette opération par une élève, l'enseignante rejoue et ainsi de suite à trois reprises. A la fin, l'enseignante annonce : "pour gagner à ce jeu, il faut avoir le plus de jetons à la fin des trois tours". Ainsi, l'élève n'est pas influencé par cette présentation pour l'apprentissage visé, notamment ici pour comprendre comment sélectionner le dé pour anticiper le but à atteindre (i.e. le plus de jetons).

## 3 Troisième phase de la LS : expérimentation de l'activité en classe

L'expérimentation de l'activité s'est déroulée dans la classe de l'une des formatrices, enseignantes en 1-2P. Le plan de leçon de la LS a été rédigé par l'équipe de formateurs en prenant appui sur les analyses didactiques de l'activité effectuées dans la phase 2 ainsi que sur les connaissances de l'enseignante sur la classe et ses élèves. Pour la variable didactique « but du jeu » (Figure 2), nous avons choisi de tester chacune des valeurs, en les répartissant sur les différents groupes d'élèves. Pour les autres variables didactiques (Figure 3), nous avons fixé les valeurs suivantes : 3 lancers, dés de 1 à 6 points et un plateau à disposition des élèves. Pour ce dernier choix de valeur de variable (matériel à disposition des élèves), le moyen d'enseignement propose d'utiliser une boîte pour que l'élève y dépose les jetons gagnés. Nous avons décidé de ne pas la proposer, afin de favoriser la réunion des collections issues des trois tours de jeu en une seule collection finale (qui sera à dénombrer ensuite). Il est également suggéré de mettre à disposition des élèves un plateau pour l'organisation des parties de jeu. Pour aider l'élève à organiser ses trois tours de jeu, nous avons préparé le plateau ci-dessous (Figure 4). Avec ce support, l'élève peut visualiser l'ensemble des parties de jeu, savoir où il en est et déposer au fur et à mesure les cartes choisies et les jetons correspondants. De plus, cela permettait d'inciter au geste de réunion des trois collections à la fin des trois tours pour construire la collection finale et décider du gagnant.

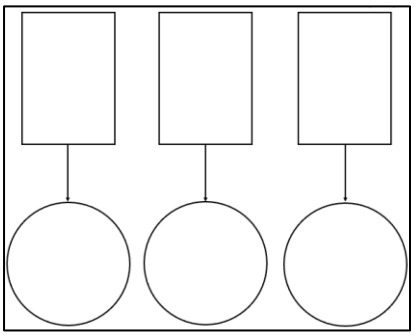


*Figure 4. Plateau de jeu créé pendant la phase 2 de la LS*

Des éléments précis à observer durant la leçon ont également été explicités, par exemple, les gestes des élèves pour organiser les jetons, choisir un dé ou dénombrer, les mots énoncés par l'enseignante au moment de l'exemple, de la consigne, les mises en commun sur les différentes procédures des élèves au regard des apprentissages visés, etc. Lors de la leçon, l'enseignante s'est appuyée sur quelques notes pour suivre au plus près le plan de leçon ; les observateurs (c'est-à-dire tous les autres formateurs) avaient le plan de leçon avec les éléments précis à observer. La séance a été filmée.

## 4 Quatrième phase de la LS : retours sur l'expérimentation

Ce temps d'échanges au sein de l'équipe de formateurs suit immédiatement la LS menée en classe. Il débute par un retour de l'enseignante qui a effectué la leçon : elle explicite son ressenti, ses impressions, les modifications opérées et ses propres observations par rapport au plan de leçon prévu. Ensuite, les observateurs prennent la parole et présentent tour à tour des faits observés, jugés pertinents en regard du plan de leçon. Enfin, ce moment d'échanges se termine par une synthèse des éléments du plan de leçon à conserver et ceux à modifier. Par exemple, ces échanges ont mis en évidence la pertinence du choix de la présentation de l'activité et de la consigne, la pertinence de l'activité pour travailler l'anticipation, l'intérêt de faire des mises en commun sur les différentes procédures des élèves pour mettre en évidence des procédures de recomptage ou de comparaison et l'inadéquation du plateau de jeu proposé pour travailler l'addition comme réunion de collections.

## 5 Cinquième phase de la LS : modifications et améliorations des ressources

Cette cinquième phase permet d'apporter les modifications au plan de leçon et d'élaborer des ressources pour les enseignants. Le plan de leçon a été modifié et réécrit de façon à pouvoir le diffuser. Le plateau de jeu a été amélioré (Figure 5) pour davantage susciter des procédures s'appuyant sur la réunion de collections (recomptage, surcomptage, calcul). En effet, le plateau (Figure 4) prévu pour aider les élèves à organiser les trois tours de jeu, a empêché certains élèves à utiliser ces procédures. Les gestes observés ont montré qu'ils n'osaient pas sortir les collections de leur cercle et les regrouper pour les dénombrer.

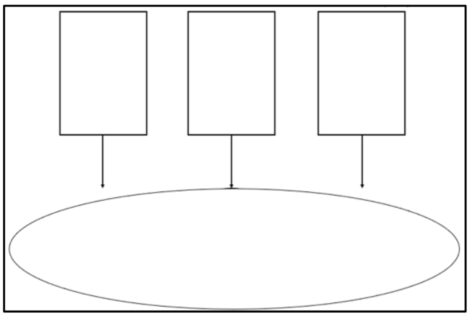


*Figure 5. Plateau de jeu modifié pendant la phase 5 de la LS*

Enfin, nous avons créé des consignes visuelles, d'une part pour aider les élèves allophones et d'autre part pour rendre les élèves plus autonomes avec les différentes variantes de jeu (Figure 6).

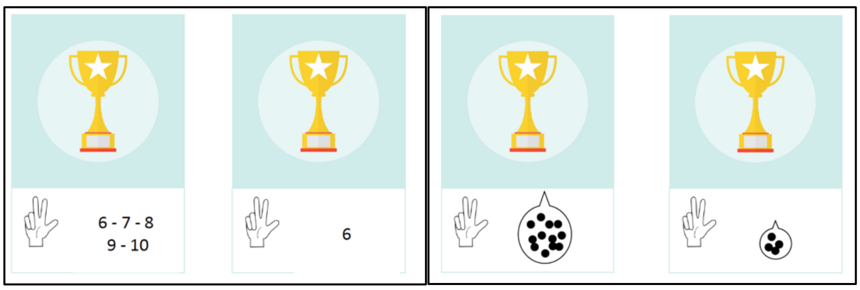



*Figure 6. Consignes visuelles créées lors de la phase 5 de la LS. La coupe dit que pour gagner, il faut : effectuer un nombre de tours (représenté par le nombre de doigts levés) et réunir x jetons (entre 6 et 10 pour la carte 1, exactement 6 pour la carte 2, le plus de jetons pour la carte 3 et le moins de jetons pour la carte 4).*

### 6 Sixième phase de la LS : partage des connaissances & diffusion des ressources

Au terme de ce processus, nous avons souhaité diffuser l'ensemble des activités expérimentées et analysées sous forme de LS, par le biais d'un site internet : http://fcmermaths.hepl.ch.

Chaque page du site est dédiée à une activité des moyens d'enseignement que nous avons expérimentée lors des différentes LS mises en place dans le dispositif de formations de formateurs. Elles sont structurées de la même manière avec les onglets suivants :

- *enjeu des connaissances mathématiques*, qui s'appuie sur les analyses didactiques effectuées lors de la phase 2 de la LS;
- *vers une séquence d'enseignement*, qui situe l'activité proposée au sein d'une séquence sur l'apprentissage visé ;
- *tâche sous la loupe* (lancement, gestion de l'activité, variables didactiques et différenciations, procédures et relances, mises en commun, éléments à retenir), qui reprend une partie du plan de leçon rédigé pendant les phases 2 à 5 de la LS ;
- *lexique*, qui propose des définitions des notions mathématiques en jeu dans chaque activité.

Un QR code (Figure 7) permet d'accéder facilement à la page d'accueil du site, ce qui simplifie également sa diffusion :

*Figure 7. QR code qui renvoie au site de ressources créés par l'équipe de formateurs de la HEP Vaud*

## III - D'UNE LESSON STUDY AUX CONTENUS DE LA FORMATION CONTINUE

Dans cette partie, nous explicitons comment à partir des LS mises en place entre formateurs et des ressources créées, nous avons élaboré les contenus de la formation continue pour les enseignants.

Suite aux quatre LS menées en deux groupes de formateurs, nous avons fait de nouveaux groupes de travail pour élaborer les contenus de la formation continue. Nous avons identifié quatre éléments essentiels à proposer aux enseignants :

- faire des apports théoriques (mathématiques et didactiques) sur la construction du nombre en 1-2P, sur la manipulation pour apprendre des mathématiques et sur les mises en commun et relances;
- présenter et faire utiliser la plateforme ESPER hébergeant ces nouveaux moyens d'enseignement ;
- présenter de nouvelles activités présentes dans les moyens d'enseignement ;
- faire expérimenter une nouvelle activité aux enseignants dans leur classe, entre les deux jours de formation.

Les modalités de travail des deux journées de formation devaient aussi être variées pour, d'une part maintenir l'attention des enseignants, et d'autre part, être en adéquation avec nos apports. Nous avons ainsi prévu des temps en ateliers (petits groupes), ex-cathedra (collectif) et d'échanges (collectif). Enfin, nous voulons inciter les enseignants d'un même établissement à collaborer, notamment en leur proposant de préparer et expérimenter la même activité, chacun dans leur classe, en s'observant mutuellement si possible. La figure 7 présente le programme de deux jours de formation continue.

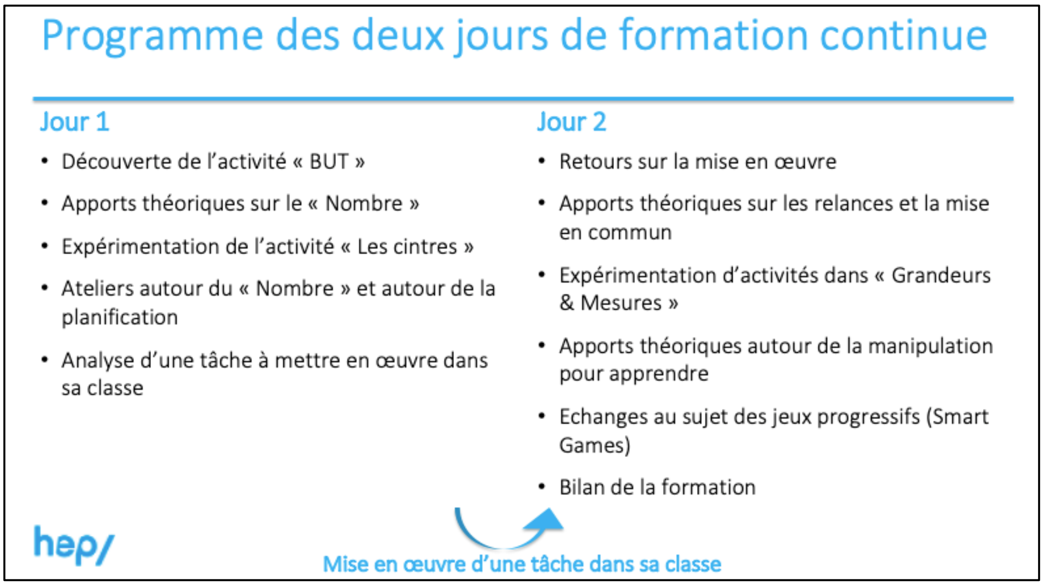



*Figure 7. Programme des deux journées de formation continue*

Dans la suite de cet article, nous détaillons les contenus proposés lors des ateliers autour du « Nombre » et de la planification. Ces ateliers ont été élaboré dans l'objectif de faciliter l'appropriation des apports théoriques proposés en début de formation sur la construction du nombre en 1-2P. Nous avons fait le choix, d'une part de proposer des apports théoriques provenant de différents champs de recherche autour de la construction du nombre chez le jeune enfant, et d'autre part de proposer des outils pour analyser des activités, des jeux et pour préparer leurs mises en œuvre en classe.

Les apports théoriques se sont appuyés sur différentes recherches en neurosciences (Dehaene & Cohen, 1995), en psychologie cognitive (Fayol, 2012), mathématiques (Deruaz & Clivaz, 2018) et en didactique des mathématiques (Margolinas & Wozniak, 2012 ; Croset & Gardes, 2019) et se sont focalisés sur :

- la distinction entre chiffre et nombre ;
- la distinction entre aspect cardinal et aspect ordinal du nombre ;
- le triple code ;
- les procédures de dénombrement (subitizing, comptage, calcul) ;
- les difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage du nombre chez les jeunes enfants.

## 1 Premier atelier autour du « Nombre »

Nous avons d'abord illustré les apports théoriques avec des exemples de routines de classe connues des enseignants tels que les comptines, les constellations de dés, l'appel et le dénombrement des élèves présents/absents, le positionnement dans un rang, etc. Ensuite, nous avons repris les éléments théoriques essentiels en présentant un outil : la carte des connaissances sur la construction du nombre, élaborée par Croset & Gardes (2020) (Figure 8). A noter que l'équipe de formateurs avaient vécu ce moment de présentation de manière identique en lien avec une LS.

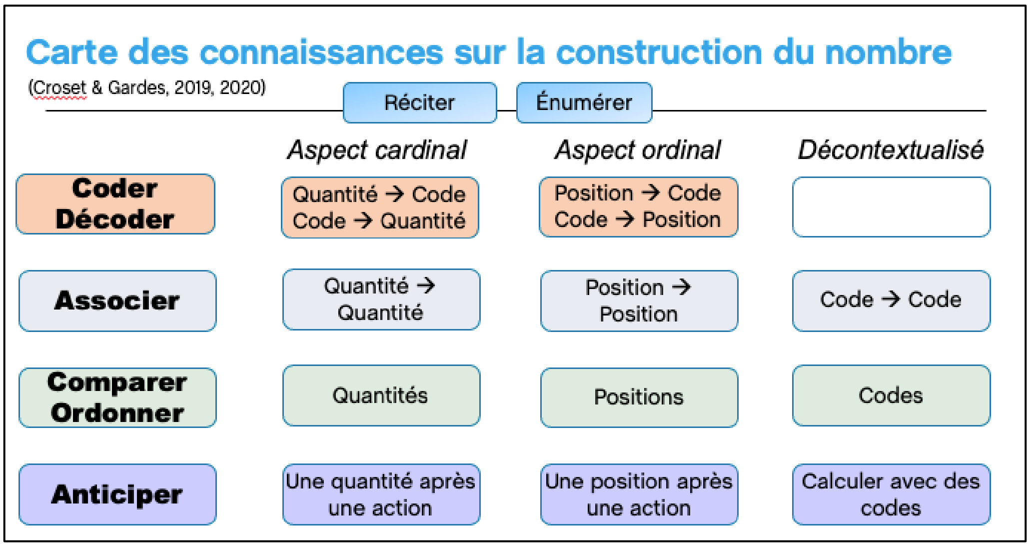



*Figure 8. Carte des connaissances sur la construction du nombre (Croset & Gardes, 2020)*

Ensuite, la carte des connaissances adaptée (Figure 9) aux objectifs mathématiques de l'enseignement romand a été présenté (Gardes et al., 2021). Cela a permis aux enseignants de constater la prise en compte, au sein de cet outil, de l'ensemble des objectifs du domaine « Nombre ».

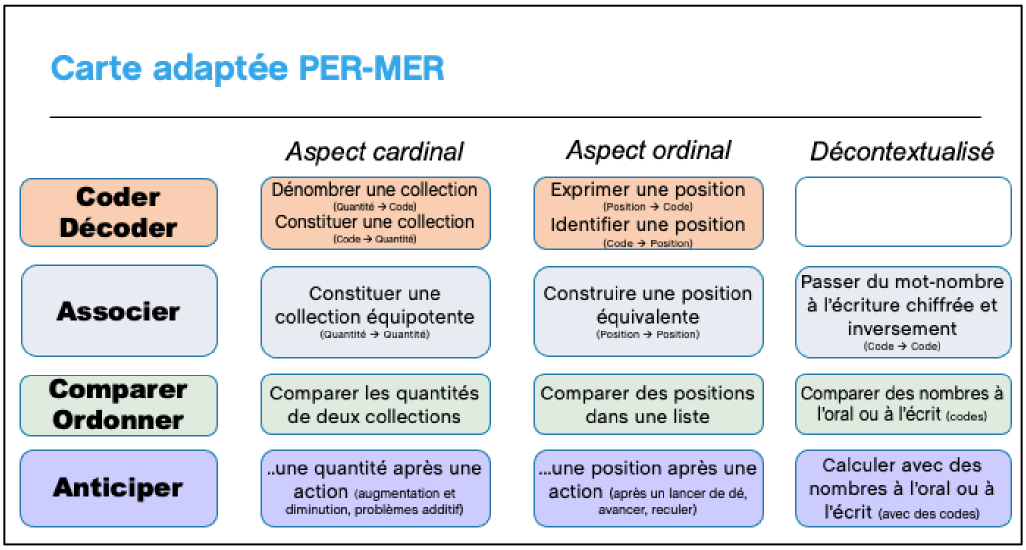



*Figure 9. Carte des connaissances sur la construction du nombre, adaptée PER-MER*

Pour illustrer et s'approprier les intitulés de la carte des connaissances, nous avons demandé aux enseignants de positionner l'activité « But » en regard des enjeux mathématiques. L'objectif visé se situe dans la case « Anticiper…une quantité après une action ».

Nous leur avons ensuite demandé d'effectuer un travail similaire pour huit activités choisies dans les moyens d'enseignement : « Le tambourin », « Autant de pions que de gommettes », « Balles folles », « Grelin-Grelin », « Lapins et carottes », « Bande de smarties », « Bestiaire », « Qui va le plus loin ». Par groupe, les enseignants ont recherché deux activités sur la plateforme numérique ESPER, les ont analysées, les ont positionnées sur la carte des connaissances (Figure 10) et les ont présentées aux autres groupes. Cette activité a permis aux enseignants de découvrir de nouvelles activités et de s'approprier la carte comme un outil d'analyse des activités, du point de vue des apprentissages mathématiques. Pour en savoir davantage sur cette partie de l'atelier, nous renvoyons à un article rédigé par le groupe de formateurs en charge de l'élaboration de ce contenu de formation (Gardes et al., 2021).

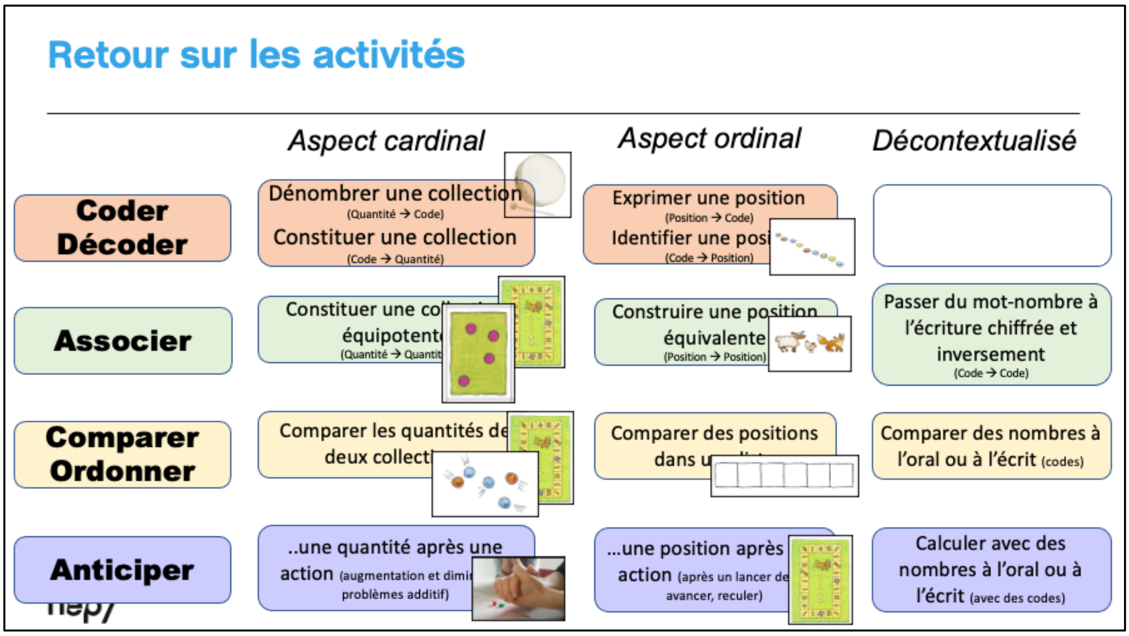



*Figure 10. Utilisation de la carte des connaissances pour analyser l'apprentissage visé d'une activité. Chaque image représente une activité. Par exemple, l'image de tambourin renvoie à l'activité du même nom dont l'objectif est le dénombrement d'une collection (de sons) ; l'image des balles renvoie à l'activité « Balles folles » dont l'objectif est la comparaison de quantités (de deux collections de balles).*

## 2 Second atelier autour du « nombre » et de la planification

Le second atelier avait pour objectif d'aborder la question de la planification des apprentissages en mathématiques. Il faut savoir que le plan d'étude et les moyens d'enseignement ne proposent pas de planification des apprentissages, ni de planification des activités mathématiques proposées. Or c'est une question vive de la part des enseignants en 1-2P. Ainsi, nous avons demandé aux enseignants de proposer une articulation des huit activités étudiées sur le « Nombre », à partir des analyses effectuées dans le premier atelier (Figure 11 pour un exemple).

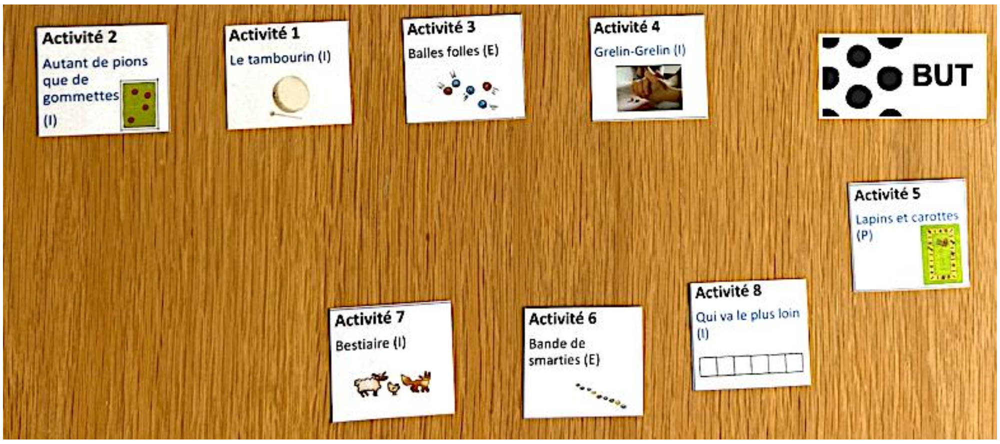



*Figure 11. Exemple d'une articulation des activités « Nombre »*

Pour élaborer et justifier une articulation, les discussions au sein des groupes d'enseignants ont porté sur les contenus théoriques et les apprentissages visés des différentes activités, les variantes et les différentes étapes proposées au sein d'une activité. Une discussion collective sur les différentes propositions d'articulation de ces activités a permis de mettre en évidence l'importance et l'intérêt des analyses didactiques pour identifier les savoirs mathématiques en jeu et penser leur planification, la nécessité de faire des choix, pour des raisons d'ordre didactique et pédagogique, mais également d'ordre organisationnel et institutionnel, et la dimension personnelle d'une planification (adaptation à sa manière d'enseigner et à ses élèves). Cette réflexion pourra permettre aux enseignants de questionner ou s'approprier des planifications déjà construites, voire d'élaborer une planification commune, en équipe pédagogique, au sein d'un établissement.

## IV - CONCLUSION

Pour conclure, nous présentons les retours des enseignants et des formateurs, puis nous faisons la synthèse des avantages et limites de ce dispositif de formation de formateurs.

### *Retours des enseignants*

Les enseignants ont apprécié le temps accordé à la découverte de nouvelles activités ou la redécouverte d'activités anciennes des moyens d'enseignement, les temps d'échanges de pratiques et l'apport de ressources concrètes. Les contenus théoriques ont été bien ciblés au regard de leurs difficultés d'enseignement ou de leurs questionnements. Enfin, les enseignants ont tout particulièrement apprécié que ce soit un binôme de formateurs, dont un enseignant du terrain, qui les forme. Le discours leur a semblé particulièrement adapté et ils ont eu le sentiment d'être reconnus dans leur travail.

### *Retour des formateurs*

Le dispositif de formations de formateurs en appui sur les LS a été à l'origine de la bonne cohésion d'équipe, d'une bonne connaissance et maîtrise des contenus de formation par chaque formateur et formatrice ainsi que du développement professionnel de chacun. Concernant les ressources utilisées lors de la formation, les vidéos et traces recueillies lors de la mise en œuvre des LS ont permis de rendre la formation authentique et proche de la réalité du terrain. L'ensemble des formateurs, notamment les nouveaux enseignants recrutés, se sont sentis légitimes à dispenser ces formations continues.

### *Avantages et limites du dispositif de formation de formateurs*

Ce dispositif de formation de formateurs demande un temps conséquent pour mettre en place tout le processus : mise en place de LS en parallèle, production de sites de ressources puis élaboration des contenus de formation. Nous avons eu la chance d'obtenir ce temps conséquent (un semestre a été consacré aux LS et à la création des sites de ressources et un semestre à la préparation des contenus de formation, à raison de trois heures par semaine) et nous avons constaté que ce temps octroyé est largement rentabilisé sur plusieurs points. Tout d'abord, comme les formateurs nouvellement recrutés interviennent aussi en formation initiale, les contenus et ressources travaillés et élaborés au sein de ce dispositif ont été réutilisés en formation initiale. Cela a permis de réactualiser les contenus des formations initiales. Ensuite, les enseignants recrutés pour ces formations deviennent des personnes ressources dans leurs établissements pour l'enseignement des mathématiques. La sensibilisation au travail collaboratif, via les LS, permet par exemple de favoriser ou d'engager un travail d'équipe au sein des établissements. D'autre part, ce processus va être reproduit pour élaborer d'autres formations continues, notamment celles pour l'introduction des nouveaux moyens d'enseignement pour les degrés suivants (3-4P, 5-6P et 7-8P). Enfin, et c'est probablement le plus important, ce dispositif de formation de formateurs a permis de construire des contenus de formation articulant didactique et pratique, rencontre trop souvent négligée.

Les conditions d'engagement des enseignants (pour devenir formateurs) demeurent le point faible de notre dispositif puisque leurs contrats ne sont pas pérennes. Le renouvellement de l'équipe de formation nécessite des réadaptations et des ajustements. Toutefois, cette difficulté nous force à rester vigilant sur la co-formation et la cohésion d'équipe qui sont des forces non négligeables auprès du public enseignants. En effet, l'hétérogénéité de l'équipe de formateurs (enseignants du primaire, du secondaire, spécialisés, formateurs et chercheurs) est un réel atout, d'une part pour la mise en œuvre des LS, et d'autre part face à la diversité d'enseignants en formation.

## V - BIBLIOGRAPHIE


CIIP (2010). Plan d'études romand. Repéré à http://www.plandetudes.ch/

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-École, 224*, 23-26. https://www.revue-mathematiques.ch/files/2614/6288/8786/ME224_Clivaz.pdf

Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2019). Une comparaison praxéologique pour interroger l'enseignement du nombre dans l'institution Montessori. *Recherches en didactique des mathématiques, 39(1)*, 51-96.

Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2020). Une carte des connaissances pour la construction du nombre à l'école maternelle. *Revue de Mathématiques pour l'école, 233*, 117-127. https://www.revue-mathematiques.ch/files/4315/9195/2640/RMe-233-Croset.pdf

Dias, T. (2019). Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le caton de Vaud. *Rapport du groupe de travail*.

Dehaene, S. et Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition, 1*, 83–120.

Deruaz, M. et Clivaz. S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. EPFL Press.

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Presse universitaire de France.

Gardes, M.-L, Déglon, A., Javet-Schlegel, S., Turcotte, C. et Croset, M.-C. (2021). Analyse des activités proposées dans « Nombres & Opérations » des MER 1-2H. *Revue de mathématiques pour l'école, 235*, 39-49. https://www.rme.swiss/article/view/1725/1487

Margolinas, C. et Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle : une approche didactique*. De Boeck (Pédagogie et Formation).

# QUELLES CONCEPTIONS SUR LES NOMBRES DECIMAUX EN PREMIERE ANNEE DE MASTER MEEF 1ER DEGRE APRES FORMATION EN INSPÉ ?

**Macarena FLORES GONZÁLEZ**
MCF, INSPE de Versailles
CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, UNIROUEN, Univ. Lille, LDAR, 95000 Cergy, France
macarena.flores-gonzalez@cyu.fr

**Elann LESNES**
ATER, INSPÉ Normandie Rouen - Le Havre
UNIROUEN, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France
elann.cuisiniez@univ-rouen.fr

Résumé
Notre recherche porte sur les conceptions des enseignant·e·s du 1er degré en formation initiale (en master MEEF 1er degré) concernant les nombres décimaux, afin de repérer et prendre en compte leurs conceptions en début de formation. Ainsi, nous nous demandons : quelles sont les conceptions des enseignant·e·s en formation initiale concernant les décimaux après une formation en INSPÉ (1 CM et 1 TD) se rapprochant du deuxième scénario de formation de Taveau et Zucchetta (2016) ?
Lors d'un questionnaire mis en œuvre début 2022 qui interrogeait à la fois les aspects objet et outil des nombres décimaux, et s'appuyait sur de précédents travaux en didactique des mathématiques sur le sujet et en particulier la recherche d'Abrougui (2003), nous montrons que la plupart des conceptions sur les décimaux relevées dans ces recherches se retrouvent chez les étudiant·e·s de master MEEF 1er degré, même 20 ans plus tard.

## I - INTRODUCTION

Les nombres décimaux font partie des notions présentant le plus de difficultés pour les élèves à l'école primaire. Plusieurs recherches en didactique des mathématiques se sont donc intéressées à cette question depuis une quarantaine d'années (Comiti et Neyret, 1979 ; Brousseau 1980, 1981, 1983 ; Perrin-Glorian, 1986 ; entre autres) dont des travaux pour la formation des enseignants (Bronner, 2003 ; Frémin, 2003). Malgré les avancées du côté de la recherche dans la compréhension de ces difficultés et malgré une évolution des programmes scolaires intégrant en partie ces travaux, notamment les propositions de Comiti et Neyret (1979), des études récentes montrent que les difficultés chez les élèves persistent. Ainsi, une note de 2022 du CSEN[1] signale que "*78% des élèves en début de sixième n'ont pas su placer correctement la fraction ½ au milieu de l'intervalle [0,1]*" (Dehaene et al., 2022, p. 1). L'analyse montre également la confusion entre le nombre ½ et les entiers 1 ou 2, ou encore la confusion avec l'écriture décimale 1,2. Nous reviendrons sur ces difficultés et d'autres dans la partie II.

On pourrait penser que les difficultés qui persistent quant aux nombres décimaux sont le seul fait des élèves, néanmoins plusieurs aspects ont été identifiés comme des obstacles épistémologiques et didactiques (Brousseau, 1983). La recherche montre également qu'il existe des conceptions erronées de cet ensemble numérique chez les enseignants comme nous le verrons dans la partie II. Ainsi, la formation initiale des enseignant·e·s nous semble un terrain propice pour étudier l'activité mathématique des

[1] Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale.

futur·e·s enseignant·e·s, de façon à s'attaquer au problème des conceptions erronées assez tôt dans la formation. Ce travail en formation initiale est d'autant plus important que ce sont ces enseignant·e·s qui devront pouvoir repérer et faire dépasser ces mauvaises conceptions chez les élèves plus tard.

Afin de construire une formation sur les nombres qui prenne en compte les difficultés des élèves, mais surtout des enseignant·e·s (en activité ou en formation initiale), nous étudions dans cette recherche leurs conceptions sur les nombres décimaux en première année de master au sein de deux INSPÉ. Ce travail nous permet également de comparer les résultats obtenus avec ceux déjà repérés il y a vingt ans dans d'autres recherches.

# II - CE QUE DISENT LES RECHERCHES EN DIDACTIQUE SUR LES CONCEPTIONS DES NOMBRES DECIMAUX

## 1 Conceptions et difficultés des élèves

Beaucoup de recherches s'intéressent aux difficultés des élèves dans la résolution de tâches mettant en jeu les nombres décimaux et en particulier les tâches de comparaison de deux, ou plus, nombres décimaux. Ainsi, Grisvard et Leonard (1983) notent qu'en 4e, 40% des élèves ne savent pas comparer deux nombres décimaux. Deux règles implicites expliquent 80% des réponses erronées concernant la comparaison de deux nombres décimaux ayant la même partie entière[2] :

- R1 (*whole-number* ou *longer-is-larger rule*) : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite.
- R2 (*fraction* ou *shorter-is-larger rule*) : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale a le plus de chiffres.

À ces deux règles, s'ajoute une troisième plus difficile à repérer car elle donne forcément la bonne réponse lorsqu'on ne compare que deux nombres décimaux :

- R3 (*zero rule*) : si la partie décimale d'un des nombres a pour premier chiffre 0, c'est le plus petit.

Ces trois règles implicites ont par la suite été repérées et affinées lors de plusieurs recherches menées depuis les années 80 avec des élèves allant du CM2 au lycée, en France et à l'international (Perrin-Glorian, 1986 ; Steinle & Stacey, 1998, 2003 ; Roditi, 2007 ; Mehmetlioğlu, 2014 ; Lai & Wong, 2017). Plusieurs de ces recherches s'attachent à repérer la prévalence de ces règles selon le niveau scolaire des élèves. Steinle & Stacey (2003) montrent ainsi qu'en CM1 (*grade 4*), en Australie, les élèves appliquent beaucoup la règle R1. L'application de cette règle correspond à l'extension des règles sur les nombres entiers aux nombres décimaux. Cette règle erronée est de moins en moins utilisée au fur et à mesure des années (environ 75% des copies analysées en CM1, 30% en 6e, 5% en 2nde) contrairement à la règle R2 qui reste appliquée par environ 10% à 20% des élèves du CM1 à la 2nde (*grade 10*). Cette règle relève d'une confusion entre les règles sur les décimaux et celles sur les fractions : les numérateurs étant égaux, c'est la fraction dont le dénominateur est le plus long qui est la plus petite. Cette règle peut également s'appliquer sur des nombres décimaux de même longueur, les élèves écrivant "0,3 > 0,4" en se référant à l'inégalité correcte ⅓ > ¼ (Steinle & Stacey, 1998, pp. 549-550).

La représentation des nombres décimaux provoque également des difficultés chez les élèves, que ce soit sur une droite graduée ou sous la forme d'un schéma. Ainsi, Perrin-Glorian (1986) note que les élèves de CM2 et 6e interrogé·e·s dans son étude représentent essentiellement les rationnels ⅓ ou ¾ en termes de partage de tartes, gâteaux ou disques qu'elle regroupe sous le terme *galette*. Les représentations sous forme de rectangles ou à partir de longueurs sont minoritaires. Pour représenter le nombre décimal 2,3, elle remarque que les élèves resté·e·s sur une représentation *galette* donnent une réponse incorrecte. Seules les représentations en termes de longueurs sont correctes. Ainsi, pour beaucoup d'élèves, 2,3 est vu comme la juxtaposition de deux entiers. Pour représenter ce nombre, on découpera donc une galette en 5 parts égales et on en coloriera 2. La chercheuse note également que cette juxtaposition peut être "*améliorée*" : "*on*

[2] Nous reprenons la formulation des règles de Roditi en français (2007, p. 14) et le nom de la règle comme on peut le trouver dans des recherches anglophones.

*voit 2,3 comme deux grosses unités et trois petites (exemple : 2 grosses boîtes de thon et 3 petites boîtes)*" (Perrin-Glorian, 1986, p. 15). Concernant la représentation des nombres décimaux sur une droite graduée, moins de 8% des élèves des deux classes de CM2 et trois classes de 6e interrogées dans l'étude de Perrin-Glorian (1986) sont capables de placer les nombres décimaux {2,5 ; 0,8 ; 1,45 ; 1,7 ; 0,62 ; 2,87 ; 1,08} sur une droite graduée avec les nombres entiers de 0 à 3 (1 unité = 5 cm). Cet exercice demande un travail à la fois sur la comparaison de nombres décimaux (y compris entiers) et sur la graduation d'un axe, ce qui explique les très faibles résultats obtenus au vu des difficultés que nous avons déjà mises en avant.

Enfin, la conception du nombre décimal comme une juxtaposition de deux entiers provoque également des difficultés dans la résolution d'opérations. Brousseau note par exemple des erreurs du type 2,3 x 2,3 = 4,9 (Brousseau, 1980, p. 21). Les opérations sur les nombres décimaux continuent de poser problème, même au début du collège. Ainsi, Bolon (1996) remarque qu'environ 43% des élèves de 6e et 5e qu'elle interroge ne savent pas calculer le résultat de la soustraction *6,48 - 4,6*. Les multiplications et divisions par des puissances de dix sont également sources de difficultés puisqu'en 5e, à peine la moitié des élèves interrogés parvient à calculer le résultat de la division *937,6 : 100*.

Au-delà des difficultés liées à la comparaison, à la représentation ou aux opérations sur les nombres décimaux, plusieurs recherches pointent des difficultés liées à la numération, y compris des difficultés liées à la numération des entiers qui persistent avec l'introduction des décimaux (Baturo, 1998 ; Chambris, 2012). Ainsi, les élèves peuvent avoir du mal à percevoir les rapports entre les unités de numération. Bolon (1996) montre par exemple que moins de 30% des élèves de 6e et 5e qu'elle interroge sont capables de déterminer qui de 6,9 ou 7,08 est le plus proche de 7. Nous ne développerons pas cet aspect dans cet article mais la numération (y compris des entiers) semble indispensable à prendre en compte dans la perspective de développer une formation sur les nombres décimaux.

Nous avons donc vu que les nombres décimaux sont sources de difficultés pour beaucoup d'élèves, de l'école élémentaire au lycée. Cependant, comme le montre Roditi (2007), les élèves plus âgé·e·s (en ce qui le concerne, des élèves de lycées professionnels) réussissent en moyenne mieux que des élèves plus jeunes (CM2, 6e, 5e) à comparer des nombres décimaux. Ainsi, même sans un (re)travail spécifique sur ces notions, les élèves rencontrant certaines des difficultés que nous venons d'évoquer peuvent évoluer favorablement par la rencontre avec d'autres notions et l'utilisation des nombres décimaux dans de nouveaux contextes. Néanmoins, "*il reste des élèves en difficulté, même parmi les plus âgés, qui ne pourront pas progresser sans une aide spécifique*" (Roditi, 2007, p. 24). Dans leurs études, Steinle & Stacey (1998, 2003) estiment ce taux d'élèves de lycée (*grade 10*) maîtrisant encore mal la comparaison de nombres décimaux entre 30% à 40%.

Ajoutons à cela que les étudiant·e·s de master MEEF 1er degré sont très largement issu·e·s de licences de lettres, langues ou sciences humaines (74,6% en 2021-2022 (Marlat & Perraud-Ussel, 2022)). Le rapport de Ronzeau et Saint-Girons (2019) explique ainsi que "*la plupart des candidats au CRPE ont donc, en entrant à l'ESPE, une connaissance lointaine de certaines disciplines, en particulier les disciplines scientifiques, voire expriment une certaine réticence à leur égard*" (Ronzeau & Saint-Girons, p. 23). Les enseignant·e·s du premier degré ont donc souvent été des élèves en difficulté en mathématiques. Dans le paragraphe suivant, nous nous interrogeons sur ce que sont devenues ces difficultés alors que c'est à leur tour d'enseigner les nombres décimaux.

## 2 Conceptions et difficultés des enseignant·e·s

En ce qui concerne les enseignant·e·s du premier degré en formation initiale, Neyret (1995) identifie de nombreuses difficultés quant aux conceptions sur les nombres décimaux. Lors de la passation d'un questionnaire à destination d'étudiant·e·s en début de formation, il observe notamment une difficulté à identifier les nombres décimaux parmi d'autres nombres. Ainsi, un tiers des étudiant·e·s identifie les nombres décimaux par leur écriture à virgule et plus de la moitié des étudiant·e·s confond les nombres rationnels et décimaux (tout en excluant les nombres entiers de ces ensembles) (Neyret, 1995, p. 138).

Par ailleurs, Abrougui (2003) repère que les enseignant·e·s de l'école primaire en Tunisie ont également des conceptions erronées sur les nombres décimaux et rationnels. Dans son étude, la chercheuse remarque que sous certaines conditions, les enseignant·e·s mobilisent des conceptions sur les nombres décimaux qui se construisent non seulement en lien avec la pratique professionnelle, mais aussi avec leur expérience personnelle (la façon de les représenter, leur utilisation, leur formation initiale, etc.). Pour repérer ces conceptions, Abrougui propose un questionnaire visant à mobiliser une définition du nombre décimal, à questionner l'existence du successeur et/ou prédécesseur, à mobiliser différentes écritures/représentations, à effectuer des calculs et des conversions de décimaux. Elle remarque ainsi que sur les 81 enseignant·e·s interrogé·e·s, presque un quart considère les décimaux comme des nombres à virgule. Un autre quart considère qu'il s'agit des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme a/10^n (avec a entier, entier relatif ou réel selon les enseignant·e·s). Un autre quart pense qu'il s'agit soit d'un nombre que l'on peut diviser par 10, soit d'un nombre rationnel (conception fraction) et le dernier quart donne des réponses disparates (nombres plus petits que 1, nombres, nombres non entiers, etc.), incomprises ou pas de réponse. Par ailleurs, la chercheuse montre qu'un grand nombre d'enseignant·e·s égalise un nombre rationnel et son écriture décimale approchée. Enfin, cette étude permet surtout de repérer les défaillances des connaissances mathématiques mobilisées par les enseignant·e·s concernant la structure de l'ensemble des décimaux.

Une des questions posées par Abrougui (2003) met en jeu la propriété de densité de l'ensemble décimal. Elle est mal réussie par les enseignant·e·s interrogé·e·s. D'autres recherches comme celles de Menon (2004) ou Tsao (2005) vont également dans ce sens et montrent que les enseignant·e·s en formation initiale ont des problèmes avec la compréhension de la propriété de densité. Widjaja et al. (2008) montrent ainsi qu'elle n'est pas reconnue par environ la moitié des enseignant·e·s en formation initiale (en Indonésie) qui appliquent de manière incorrecte la "discrétisation" des nombres entiers à l'ensemble des nombres décimaux.

Enfin, Alatorre et Sáiz (2008) étudient les conceptions de 52 enseignant·e·s à l'école primaire en formation continue et en formation initiale. La première partie de leur expérimentation, celle qui nous intéresse, s'est concentrée sur un diagnostic mettant en jeu la comparaison de nombres décimaux (il était suivi d'un enseignement sur les notions de décimaux et de fractions). 45% des erreurs repérées sont dues à l'application de la règle R2, 18% à l'application de la règle R1. Nous retrouvons donc ici des difficultés déjà repérées chez les élèves et qui semblent persister malgré la formation reçue et/ou l'expérience en tant qu'enseignant·e.

Après ce premier état de l'art sur les difficultés et conceptions sur les nombres décimaux, nous nous demandons dans un premier temps si nous retrouvons ces mêmes difficultés et conceptions chez les étudiant·e·s en M1 MEEF 1er degré aujourd'hui en France et dans quelles proportions.

## III - ÉLEMENTS DU CADRE THEORIQUE

Pour comprendre les conceptions et les difficultés qu'ont les enseignant·e·s en formation initiale avec les nombres décimaux, il est indispensable de définir en premier lieu ce que nous entendons par *conception*. Les premières utilisations dans les recherches en didactique ou en éducation, ne font pas référence à une définition spécifique, néanmoins le mot *conception* a ensuite été utilisé par les didacticien·ne·s en lien avec le paradigme de l'erreur et de la problématique des obstacles (Balacheff, 1995). Ainsi, selon Balacheff (1995), un concept est un ensemble de connaissances, une connaissance étant elle-même un ensemble de conceptions. Pour définir la notion de conception, il faut donc d'abord revenir à celle de concept.

Vergnaud (1990), dans sa théorie des champs conceptuels, définit le concept comme un triplet : un ensemble de situations donnant du sens au concept (la référence), un ensemble d'invariants opératoires (le signifié), un ensemble de formes langagières et non langagières pour représenter le concept (le signifiant).

Par la suite, les travaux de Balacheff et Margolinas (2005) utilisent la définition de *concept* de Vergnaud (1990) pour définir une conception[3] comme "*une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue*

[3] Le mot *conception* est utilisé ici par les auteurs pour introduire le cadre du modèle de connaissances cK¢, mais nous n'utilisons pas ce cadre dans cet article.

*par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, et [...] dont la porté est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire)*" (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 5).

Pour pouvoir analyser les conceptions des étudiant·e·s sur les nombres décimaux, il faut donc s'intéresser au concept. Pour cela, nous mobilisons également les aspects *outil* et *objet* définis par Douady (1986). Dans ce cadre, la *dialectique outil-objet* est un processus au cours duquel les concepts mathématiques jouent une fonction, d'une part dans la résolution d'un problème, et, d'autre part dans la construction d'un savoir :

"*nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté a plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement*" (Ibid., p. 9).

D'une part, l'*objet* se réfère à un concept qui est défini indépendamment d'un contexte donné, en lien avec ses propriétés mathématiques. D'autre part, l'*outil* se réfère au fonctionnement du concept selon un (ou plusieurs) problème(s) dans un contexte donné (Douady, 2003).

Nos outils d'analyse sont résumés dans la figure 1 ci-dessous[4] :

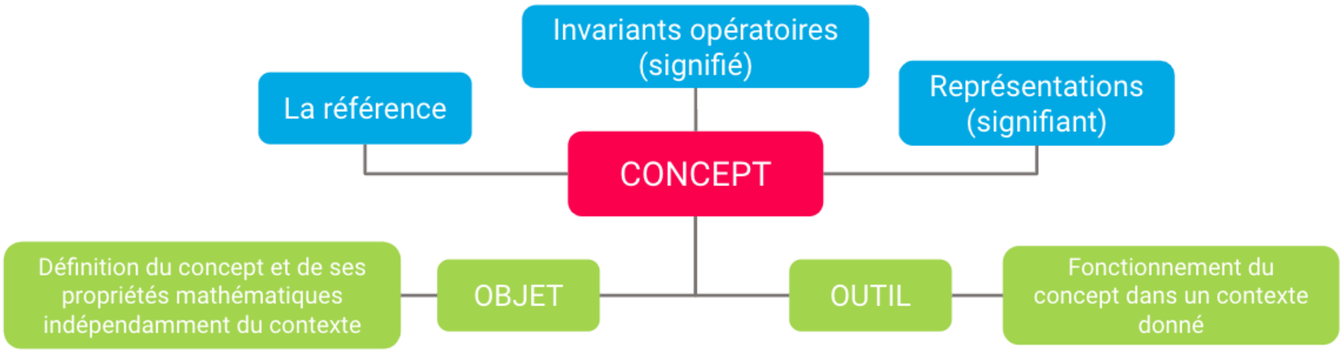



*Figure 1. Éléments du cadre théorique pour l'étude des conceptions.*

En revenant aux nombres décimaux, différentes conceptions peuvent être observées sur des tâches mettant en avant la dimension objet ou la dimension outil. D'une part, les tâches nécessitant de définir la notion ou ses propriétés mathématiques (notamment celle de densité), et de donner des exemples de nombres décimaux et non décimaux mobilisent, selon nous, la dimension objet. Celles-ci permettent d'analyser le concept indépendamment d'un contexte particulier : elles peuvent constituer une référence pour le sujet, et font appel au signifiant (représentations en écriture fractionnaire, écriture sous forme d'expansion décimale finie, écriture sous la forme d'une multiplication d'un nombre entier entre 0 et 9 et d'une puissance de 10 avec l'exposant entier négatif, etc.) et au signifié que le sujet s'est construit (théorèmes et concepts-en-acte). D'autre part, nous pouvons identifier des tâches qui mettent en fonctionnement la conception dans un contexte donné, mobilisant la dimension outil, en particulier des tâches de "*dénombrement, de mesure ou de comparaison, ou encore des situations plus complexes conduisant par exemple à composer ou à comparer des mesures de grandeurs et nécessitant d'effectuer des calculs*" (Roditi, 2007, p. 3).

# IV - QUESTION DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

## 1 Question de recherche et méthode

Étant connues les conceptions des élèves et des enseignant·e·s sur les nombres décimaux, vue son importance au niveau de l'enseignement, et dans l'objectif de construire une formation prenant appui sur les conceptions des enseignant·e·s en formation initiale, nous nous demandons : *quelles conceptions ont les enseignant·e·s en formation initiale sur les nombres décimaux face à des questions qui font mobiliser leur aspect objet ?*

[4] Dans cet article, nous ne nous intéressons pas aux articulations fines entre les éléments du triplet de Vergnaud (1990) et le couple outil-objet de Douady (1986) bien que cela pourrait être étudié.

Pour répondre à cette question et afin de comparer nos résultats avec des recherches plus anciennes, nous reprenons la plupart des questions posées dans le questionnaire élaboré par Abrougui (2003). Celui-ci interroge à la fois l'aspect objet et l'aspect outil des nombres décimaux et revient sur plusieurs des difficultés déjà relevées dans l'état de l'art : comparaison de nombres décimaux, représentation sur une droite graduée, écritures fractionnaires et sous forme d'expansion décimale finie, densité de l'ensemble des décimaux, etc. Dans cet article, nous nous intéresserons uniquement à l'aspect objet, les questions relatives à l'aspect outil feront l'objet de travaux ultérieurs.

Le questionnaire a été soumis pendant le deuxième semestre de l'année académique (janvier-mars 2022) à 30 étudiant·e·s de l'INSPÉ de Normandie Rouen - Le Havre (site de Mont-Saint-Aignan que l'on abrégera MSA par la suite) et 34 étudiant·e·s de l'INSPÉ de l'Académie de Versailles (site d'Antony). Toutes et tous ont déjà suivi une formation sur les nombres décimaux et rationnels à l'INSPÉ.

## 2 Méthodologie d'analyse

Comme nous l'avons signalé, il est de notre intérêt d'analyser la conception des enseignant·e·s en formation initiale en nous centrant sur la dimension objet des nombres décimaux, et en identifiant les différentes composantes du concept lorsque cela est possible. Le tableau 1 ci-dessous précise les questions posées[5] ainsi que les différents indicateurs auxquels nous serons sensibles dans l'analyse des réponses.

| Question | Analyse de l'instance de la connaissance |
|---|---|
| *1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?* | - La définition mobilisée.<br>* Les mots "pour vous" donnent la possibilité de mobiliser une définition non formelle ("nombre à virgule", par exemple). |
| *2. Donner deux nombres décimaux.* | - Nature des nombres choisis : uniquement nombres entiers, présence de nombres rationnels non décimaux, décimaux, etc.<br>- Représentations utilisées et type d'écriture du nombre : fractionnaire ou expansion décimale. |
| *3. Y a-t-il des nombres qui ne sont pas décimaux ? Si oui, en donner des exemples.* | - Nature des nombres choisis : nombres entiers considérés comme non décimaux, statut des nombres rationnels décimaux versus les nombres rationnels non décimaux, considération des nombres réels non rationnels, etc.<br>- Représentations utilisées et type d'écriture du nombre : fractionnaire ou expansion décimale. |
| *4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.* | - Nature de l'explication : justification par les propriétés, exemples particuliers, etc.<br>- Représentation du concept : nombres en écriture fractionnaire ou expansion décimale, langue naturelle, droite graduée, etc. |

*Tableau 1. Analyse des questions mobilisant la dimension objet.*

La nature des exemples de nombres décimaux et non décimaux (questions 2 et 3) et la nature de l'explication (question 4) choisies par les étudiant·e·s montrent des aspects du *signifié* de leur conception de nombre décimal. De la même manière, les représentations mobilisées dans l'ensemble des questions montrent des aspects du *signifiant* de leur conception. Enfin, à ce stade, les questions analysées ne nous donnent pas d'éléments sur la *référence* des conceptions des étudiant·e·s, ces aspects pourront être étudiés ultérieurement.

[5] Les quatre questions sont les mêmes que celles que l'on peut trouver dans le questionnaire d'Abrougui (2003).

# V - PREMIERE ANALYSE DES CONCEPTIONS

Pour chacune des questions posées, nous préciserons d'abord les éléments de la formation suivie par les étudiant·e·s qui permettraient d'y répondre. En effet, la passation du questionnaire a été faite environ un mois après des enseignements au format CM (1,5h en présentiel à Antony et 1h de capsules vidéos à MSA) et des enseignements au format TD (3h à Antony et 2h à MSA)[6]. Nous n'analyserons pas le scénario de formation à l'œuvre ici mais celui-ci se rapproche du deuxième scénario de formation répertorié par Taveau et Zucchetta (2016).

## 1 Définition d'un nombre décimal

Un nombre décimal peut être défini de différentes façons. Le document d'accompagnement des programmes scolaires de 2020 "Fractions et nombres décimaux au cycle 3" le présente ainsi : "*un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale*" (MEN, 2016, p. 3). Une fraction décimale est définie auparavant à partir de la notion de fraction : "*lorsque le partage de l'unité se fait en un nombre de parts égal à une puissance de 10 (comme 10, 100, 1000,…), la fraction obtenue est appelée fraction décimale*" (MEN, 2016, p. 1).

C'est également la définition adoptée dans les formations à Antony et à MSA. À Antony, un approfondissement est aussi proposé en TD : un nombre décimal peut alors s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible du type : $a/(2^p \times 5^q)$, $a$ étant un nombre entier relatif, et $p$ et $q$ des nombres naturels.

Concernant les réponses des étudiant·e·s à la première question "pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?", nous remarquons immédiatement que le vocabulaire "fraction décimale" est très peu employé. Seul·e·s 4 étudiant·e·s à MSA (et aucun·e à Antony) l'emploient. 8 étudiant·e·s (7 à MSA, 1 à Antony) proposent néanmoins une définition de la forme "une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix" sans préciser l'ensemble de définition du numérateur[7]. Nous ne savons pas si ces étudiant·e·s font le rapprochement avec la notion de fraction décimale ou non.

Environ un tiers des étudiant·e·s à MSA (11) et deux tiers des étudiant·e·s à Antony (23) définissent un nombre décimal comme un nombre à virgule, dont 7 (3 à MSA, 4 à Antony) précisent (plus ou moins mathématiquement) que le nombre a une écriture avec une expansion décimale finie. Des exemples de réponses d'étudiant·e·s sont donnés en annexe (cf. Annexe A). Ainsi, toutes les réponses de la forme "nombre à virgule" ne sont pas erronées mathématiquement. En revanche, pour certain·e·s étudiant·e·s, nous remarquons que la virgule fait office d'un véritable séparateur entre deux nombres entiers, celui de gauche peut être appelé partie entière et celui de droite partie décimale mais ils fonctionnent de la même façon. Nous considérons cette réponse comme relevant en plus d'une conception "juxtaposition de deux nombres entiers".

Les autres étudiant·e·s (8 à MSA, 10 à Antony) ont des réponses qui apparaissent moins fréquemment, parlant d'un nombre décimal comme d'une fraction, d'une part d'unité, d'un nombre compris entre deux entiers, etc. Nous les avons regroupées dans la colonne "Autre" du tableau 2 tout en ayant conscience que ces réponses minoritaires sont à étudier plus en avant dans l'objectif de construire une formation les prenant en compte.

| Groupe | Fraction décimale | Dénominateur puissance de 10 | Nombre à virgule | Autre | Total |
|---|---|---|---|---|---|

[6] À Antony, nous prenons en compte le CM et le TD et seulement le CM à MSA car les étudiant·e·s ont suivi différents TD selon leur groupe sans que l'on puisse savoir lequel. De plus, il est à noter que nous n'avons pas le moyen de vérifier que l'ensemble des étudiant·e·s ayant répondu à notre questionnaire a complètement visionné les capsules vidéos à MSA ou assisté au CM à Antony.

[7] Nous pouvons faire l'hypothèse que les étudiant·e·s connaissent la définition d'une fraction comme quotient de deux nombres entiers et ne ressentent donc pas le besoin de définir l'ensemble de définition du numérateur et du dénominateur. Cependant, nous n'avons pas posé de questions permettant de s'en assurer.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Antony | 0 | 1 | 23 (dont 4 écriture finie) | 10 | 34 |
| | **0%** | **3%** | **68% (12%)** | **29%** | **100%** |
| MSA | 4 | 7 | 11 (dont 3 écriture finie) | 8 | 30 |
| | **13%** | **23%** | **37% (10%)** | **27%** | **100%** |

*Tableau 2. Résumé des réponses à la question "définition d'un nombre décimal"*

Nous pouvons comparer ces résultats à ceux obtenus par Abrougui (2003) dans sa recherche auprès d'enseignant·e·s du premier degré en Tunisie. Dans son cas, 27% des enseignant·e·s considèrent qu'un nombre décimal est un nombre à virgule et 26% que c'est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Si ces résultats se rapprochent de ceux obtenus à MSA, ce n'est pas le cas de ceux d'Antony.

## 2 Exemples de nombres décimaux et non décimaux

La deuxième question demandait aux étudiant·e·s de "donner deux nombres décimaux". En ce qui concerne les formations, que ce soit à Antony ou à MSA, beaucoup d'exemples de nombres décimaux sont donnés dans une écriture sous forme d'expansion décimale finie ou fractionnaire.

Nous nous intéressons maintenant aux représentations mobilisées par les étudiants pour exprimer les nombres décimaux et non décimaux. Sur les 129 nombres donnés par les étudiant·e·s, 104 sont des nombres décimaux sous forme d'expansion décimale finie (81%) dont 9 sont entiers (5% des nombres donnés). 19 sont des nombres décimaux sous forme fractionnaire (15%). À noter qu'une étudiante d'Antony a donné les deux formes, par exemple "$2{,}1 = \frac{21}{10}$". Les 6 derniers nombres donnés ne sont pas des nombres décimaux (3 rationnels, 3 réels dont une fois $\pi$ à MSA). Cette question est sans surprise majoritairement bien réussie, y compris par les étudiant·e·s qui n'ont pas réussi à définir les nombres décimaux à la question 1. Ces résultats sont assez comparables à ceux obtenus par Abrougui (2003) même si on remarque une préférence plus importante pour l'écriture sous forme d'expansion décimale finie dans notre recherche (81% contre 71% dans la recherche d'Abrougui).

La troisième question était "y a-t-il des nombres qui ne sont pas décimaux ? Si oui, en donner des exemples". Cette question permet d'aller plus loin que la précédente et en particulier de tester l'idée reçue parmi les élèves et étudiant·e·s selon laquelle les nombres entiers ne sont pas des nombres décimaux. Concernant la formation, à Antony comme à MSA, nous remarquons qu'assez peu d'exemples ont été donnés lors des CM. Il s'agit principalement de $\pi$ à MSA (ce qui rend d'autant plus surprenante la réponse de l'étudiante donnant 1,25 et pi comme exemples de nombres décimaux). À Antony, quelques exemples de nombres rationnels non décimaux ont également été évoqués.

Même si pour 49 étudiant·e·s sur les 61 ayant répondu, la réponse est "oui", cette question est inégalement réussie selon les groupes. Ainsi, à MSA, un peu plus de la moitié des étudiant·e·s ayant répondu (14 sur 27) donne des exemples de nombres non décimaux (dont 8 fois $\pi$, et 4 fois $\sqrt{2}$), 1 étudiante ne donne pas d'exemple et 7 donnent des exemples de nombres décimaux (6 entiers et 1 nombre à virgule négatif). À Antony, plus des deux tiers des étudiant·e·s (23) donnent des exemples entiers. Seuls 4 étudiant·e·s ne donnent que des exemples de nombres effectivement non décimaux.

| **Groupe** | **Nombres effectivement non décimaux** | **Nombres décimaux** | **Il n'existe pas de nombres non décimaux** | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| Antony | 4 | 23 | 7 | 34 |
| | **12%** | **68%** | **20%** | **100%** |
| MSA | 14 | 7 | 5 | 26 |
| | **54%** | **27%** | **19%** | **100%** |

*Tableau 3. Résumé des réponses à la question "donner des exemples de nombres non décimaux".*

Dans la recherche d'Abrougui, environ 26% des enseignant·e·s pensent qu'il n'existe pas de nombres non décimaux. Cependant, seul·e·s 19% des enseignant·e·s donnent des contre-exemples qui sont en fait décimaux, très loin du score de 68% des étudiant·e·s à Antony.

### 3 Propriété de densité des nombres décimaux

Comme nous l'avons vu dans la partie II de cet article, la propriété de densité de l'ensemble des nombres décimaux est souvent mal comprise des enseignant·e·s. C'était l'objet de la quatrième question reprise de la recherche d'Abrougui (2003) : "dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi."

À Antony comme à MSA, un travail sur la droite graduée de plus en plus "zoomée" a été effectué, amenant les étudiant·e·s à comprendre qu'il est toujours possible d'intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux donnés. À MSA, la conception erronée d'élève liée au "successeur d'un nombre décimal" a été explicitement présentée comme telle et au moins un exemple a été donné : "après 2,37, je peux avoir 2,371 ou 2,3700001".

Cette question est celle pour laquelle nous avons récolté le moins de réponses. Seul·e·s 36 étudiant·e·s sur 64 ont proposé une réponse (22 à Antony, 14 à MSA) dont 6 pensent qu'il existe effectivement un plus petit entier décimal positif non nul. À Antony, les 4 étudiant·e·s dans cette situation ajoutent une justification qui correspondrait plutôt à la réponse "non" pour une grande partie des autres étudiant·e·s. Par exemple : "oui il y a toujours un plus petit élément, ex : 0,0001 < 0,00001"[8] ou "oui [...] car on peut rajouter des chiffres après". Une étudiante propose ainsi cette écriture de ce plus petit décimal positif non nul :

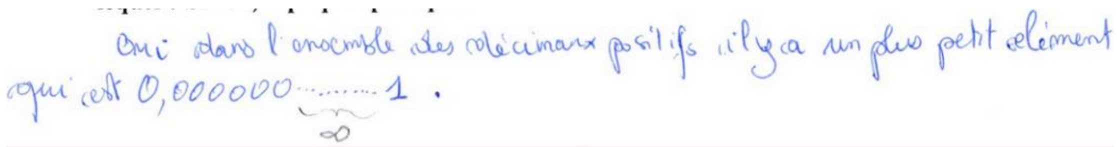



*Figure 2. Réponse d'une étudiante d'Antony à la question 4 du questionnaire.*

Au contraire, 11 autres étudiant·e·s (5 à MSA et 6 à Antony) utilisent une écriture du même type ou expliquent qu'on peut ajouter une infinité de nombres après la virgule avant le 1 pour justifier que ce nombre n'existe pas. Cette écriture que Margolinas (1988) qualifie d'"infinitésimale" traduit une vision de l'infini selon l'Analyse non Standard (Ely, 2010).

Seule 1 étudiante de MSA dit explicitement qu'on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux. 2 autres étudiant·e·s (1 à MSA et 1 à Antony) expliquent qu'il y a une infinité de nombres entre 0 et 1 ou entre 0 et 0,1. De nombreuses justifications sont fausses ou sans rapport direct avec la question, plusieurs étudiant·e·s expliquant ainsi qu'il n'y a pas de plus petit élément car l'ensemble des décimaux est infini. Des exemples de réponses d'étudiant·e·s sont donnés en annexe (cf. Annexe A).

Comme dans la recherche d'Abrougui (2003), nous remarquons que cette question génère beaucoup de confusions et que des justifications semblables sont utilisées à la fois pour appuyer la réponse "oui" et la réponse "non". Cela est sûrement en partie dû à l'énoncé dont le niveau mathématique est plus exigeant que pour les autres questions mais aussi à la propriété de densité de l'ensemble des décimaux mal maîtrisée comme le montrent de précédentes recherches (cf. partie II.2).

## VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que les réponses aux questions 1, 2 et 4 du questionnaire suivent les mêmes tendances à Antony et à MSA, même si les proportions peuvent différer. Pour la question 3, en revanche, les résultats sont plus contrastés. Il semblerait que la formation suivie en master MEEF ne suffise pas à expliquer cette différence car nous avons repéré plus de contre-exemples de nombres décimaux dans la formation à Antony alors que ce sont ces étudiant·e·s qui donnent en majorité

[8] On peut remarquer l'utilisation de la règle R1 ici : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite.

des exemples décimaux et en particulier entiers. Nous pouvons faire d'autres hypothèses sur les différences entre les publics des deux INSPÉ notamment mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.

En effet, au-delà de la comparaison des résultats obtenus dans les deux INSPÉ, nous remarquons que les conceptions les plus présentes dans la recherche d'Abrougui (2003) sont aussi celles qui se retrouvent le plus chez les étudiant·e·s interrogé·e·s en 2022 : le nombre décimal comme nombre à virgule ou comme "puissance de 10 barre". De la même façon, nous retrouvons dans les réponses des étudiant·e·s des difficultés déjà repérées dans l'état de l'art. De plus, il semble que la formation telle qu'elle existe dans ces deux INSPÉ à l'heure actuelle ne soit pas suffisante pour dépasser les difficultés que les étudiant·e·s rencontraient déjà probablement en tant qu'élèves. Lors de notre présentation au colloque de la COPIRELEM, d'autres formateurs et formatrices nous ont ainsi confirmé que les étudiant·e·s de leur INSPÉ ont beaucoup de mal à dépasser leurs conceptions erronées et difficultés avant de devoir construire à leur tour une séquence sur cette notion.

Du point de vue théorique, nous avons relevé des invariants opératoires dans l'état de l'art que nous avons également repérés dans les réponses aux questionnaires. Notons en particulier trois concepts-en-acte : "nombre à virgule", "juxtaposition de deux entiers" et "dénominateur puissance de 10". En analysant la partie "outil" du questionnaire dans la suite de notre recherche, nous chercherons également à vérifier si nous retrouvons les théorèmes-en-acte correspondant aux règles R1 et R2. En ce qui concerne les représentations utilisées, les quatre questions étudiées sont particulièrement riches. Ainsi, les questions 1 et 4 sont propices à une représentation en langue naturelle. La dernière question a fait aussi apparaître des représentations issues de l'Analyse non Standard que nous pourrons interroger par la suite. Les écritures fractionnaires et sous forme d'expansion décimale sont aussi mobilisées mais pas forcément par l'ensemble des étudiant·e·s. De plus, nous remarquons une confusion entre les représentations et les ensembles de nombres (l'écriture décimale n'est pas l'apanage des nombres décimaux, par exemple).

Enfin, pour conclure, l'analyse de la partie "outil" du questionnaire et sa mise en rapport avec la partie "objet" constituent des perspectives à court terme. Sur le long terme, comme nous l'avons déjà dit, notre objectif est de concevoir une formation partant des conceptions des étudiant·e·s que nous avons commencé à repérer ici. Au vu des réponses aux questions du questionnaire, nous nous interrogeons en particulier sur l'importance de l'activité de définition en formation.

## VII - BIBLIOGRAPHIE


Abrougui, H. (2003). Conceptions d'enseignants de l'école de base sur les nombres décimaux. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 13*, 7–31.

Alatorre, S., & Sáiz, M. (2008). Mexican primary school teachers' misconceptions on decimal numbers. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of PME 32* (Vol. 2, p. 25–32).

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans D. Grenier (Dir.), *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier, & C. Margolinas (Dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1–32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Baturo, A. R. (1998). Year 5 students' available and accessible knowledge of decimal number numeration. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Proceedings 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia : Teaching Mathematics in New Times* (p. 90–97).

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. [Thèse de doctorat, Université René Descartes Paris V.]

Bronner, A. (2003). Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2* (p. 333–354).

Brousseau G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(1), 11–59.

Brousseau G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37–125.

Brousseau G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165–198.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N, 89*, 39–69.

Comiti, C., & Neyret, R. (1979), À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N, 18*, 5–20.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., He, C.-X., & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31.

Douady, R. (2003). Enseignement de la dialectique OUTIL-OBJET et des JEUX de CADRES en formation mathématique des professeurs des écoles. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2.* (p. 317–332).

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117-146.

Frémin, M. (2003). Décimaux et autres nombres. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2.* (p. 317–332).

Grisvard, C., & Leonard, F. (1983). Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin de l'APMEP, 340*, 450–459.

Lai, M. Y., & Wong, J. P. (2017). Revisiting decimal misconceptions from a new perspective: The significance of whole number bias in the Chinese culture. *Journal of Mathematical Behavior, 47*, 96–108.

Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x, 16*, 51-66.

Marlat, D., & Perraud-Ussel, C. (2022). Stabilité des effectifs en Inspe en 2021-2022. *Notes flash du SiES, 14*.

Mehmetlioğlu, D. (2014). Misconceptions of elementary school students about comparing decimal numbers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 152*, 569–574.

Menon, R. (2004). Preservice teachers' number sense. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(2), 49-61.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016). Fractions et nombres décimaux au cycle 3. *Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques de 2020 (cycle 3)*.

Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I.]

Perrin-Glorian, M.-J. (1986), Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x, 10*, 5–29.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 12*, 55–81.

Ronzeau, M., & Saint-Girons, B. (2018). *Quelles évolutions pour les concours de recrutement des enseignants ?* (rapport du 18 février 2019). Ministère français de l'Éducation nationale. Paris

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Proceedings 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia : Teaching Mathematics in New Times* (p. 548–555).

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, p. 259–266).

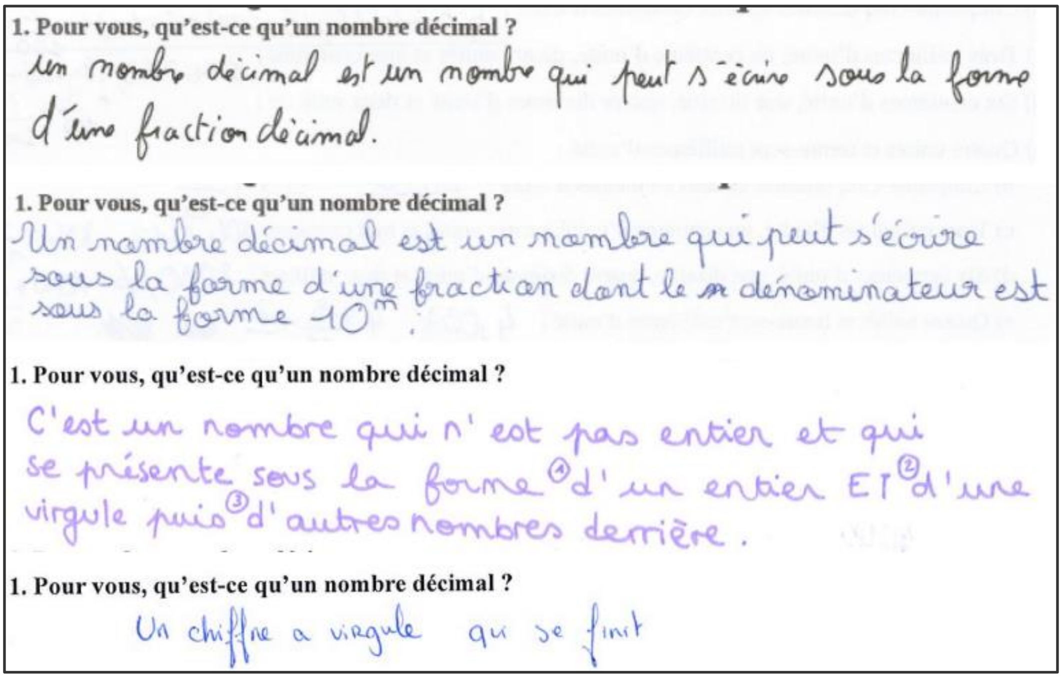
Taveau, C., & Zucchetta, H. (2016). Quels scénarios possibles pour une formation des M1 aux mathématiques de l'école primaire ? Dans *Actes du 43e colloque COPIRELEM* (p. 135–158). Le Puy-en-Velay.

Tsao, Y.-L. (2005). The number sense of pre-service elementary school teachers. *College Student Journal 39*(4), 647-679.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133–170.

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. In Z. Zulkardi (Ed.), *Proceedings of the Konferensi Nasional Matematika XIV*.

## VIII - ANNEXE A : REPONSES D'ETUDIANT·E·S



**1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?**

un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimal.

**1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?**

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est sous la forme $10^n$.

**1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?**

C'est un nombre qui n'est pas entier et qui se présente sous la forme ① d'un entier ET ② d'une virgule puis ③ d'autres nombres derrière.

**1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?**

Un chiffre a virgule qui se finit

*Figure 3. Quatre réponses à la question "pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?" (les deux premières proviennent d'étudiant·e·s de MSA, les deux dernières d'étudiant·e·s d'Antony).*

**4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.**

Oui il y a toujours un plus petit élément

par exemple 0,0001 < 0,00001

**4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.**

Oui, 0,01. On peut même réduire ce nombre avec plus de 0 après la virgule.

**4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.**

Non car c'est infini.

0, 00 . . . . . . . . . . . . 1

∞

**4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.**

Non, il y a une infinité de nombre positif ou négatif.

*Figure 4. Quatre réponses à la question "dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi." (la première et la dernière réponses proviennent d'étudiant·e·s d'Antony, la deuxième et la troisième d'étudiant·e·s de MSA).*

Titre : Actes du 48e Colloque de la COPIRELEM
Toulouse les 14, 15 et 16 juin 2022

**Représenter et modéliser en mathématiques**
**De l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles**

Auteurs : Conférenciers, orateurs de communication et animateurs d'atelier du Colloque, COPIRELEM

Mots-Clefs : Formation des enseignants, didactique des mathématiques, dispositif de formation

Dépôt légal : Juin 2023

Nombre de pages : 558 pages A4

Editeur : ARPEME

ISBN : 978-2-917294-38-3

EAN : 9782917294383

Public Concerné : Formateurs de mathématiques chargés de la formation des professeurs des écoles

Résumé : Cette brochure contient les textes complets des conférences de Berta BARQUERO, Annick FAGNANT, Thomas de VITTORI, Richard CABASSUT ainsi que l'intégralité des textes des ateliers et communications du colloque.

Prix : 15 euros