Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUD

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

- Sečtěte $\sum_{k=1}^{n^n} k$.
- S použitím věty o dvou policajtech spočtěte limitu posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna, kde

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^{n^n} k}{\sum_{k=1}^{2n} k^k}}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztah

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 = 10xyzw$$

je v okolí bodu $[1, 1, 1, 1]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $f(x, z, w)$ $(f(x, z, w) = y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1, 1) = 1$.

- Spočtěte parciální derivaci složené funkce $T(x, z, w) = f(f(x, z, w), f(x, z, w), f(x, z, w))$ podle z v bodě $[1, 1, 1]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Příklad 3 (25 bodů)

Mongeovo promítání: $O = [10, 16]$, pravotočivá soustava souřadnic

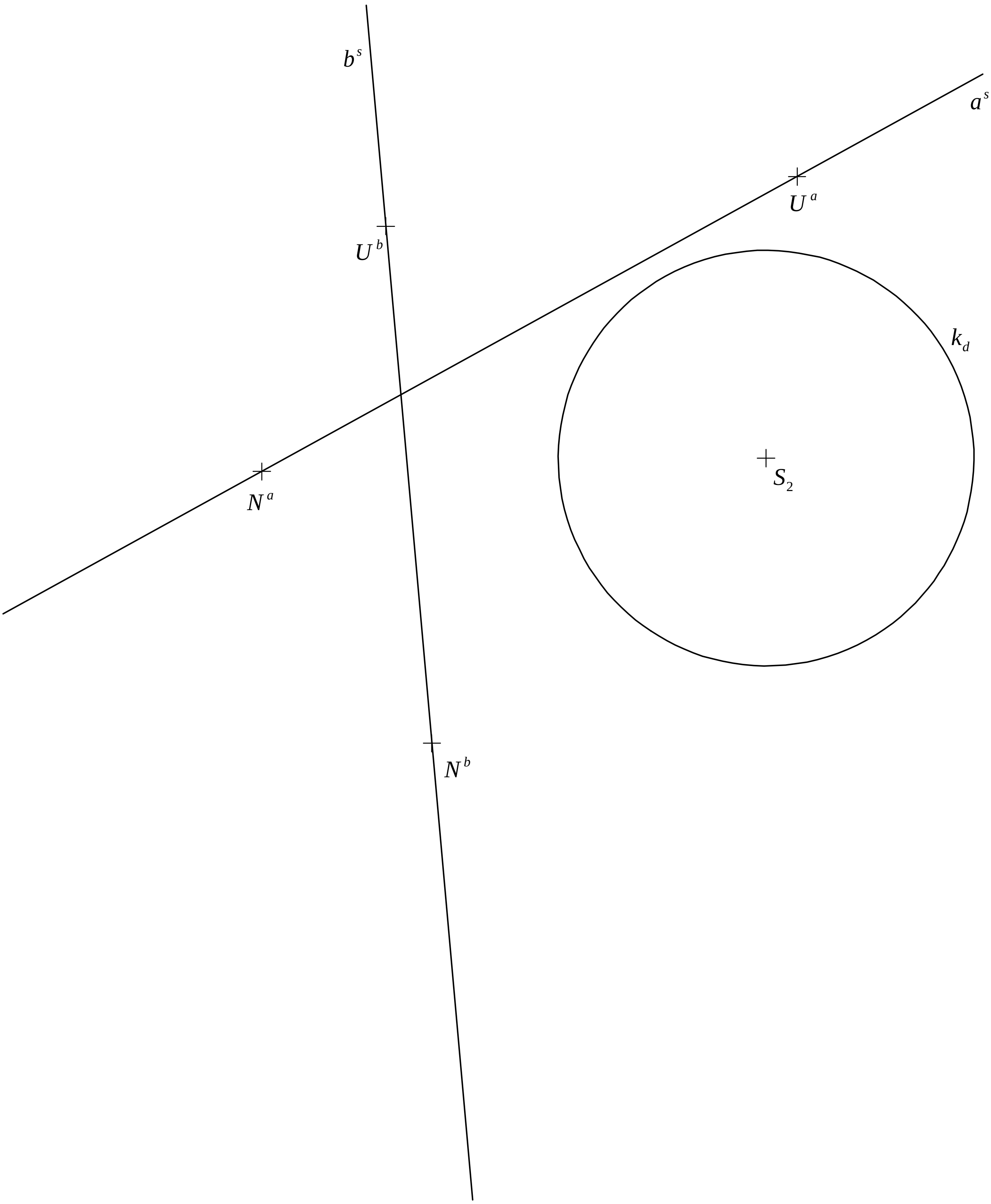
Zploštělý rotační elipsoid je dán:

1. rotačním pohybem: osa $o \perp \pi$,
2. tvořicí elipsou e v rovině rovnoběžné s nárysnou, bod $S = [0; 5,5; 3,5]$ je střed elipsy, velikosti poloos jsou $a = 5$, $b = 3,5$.

Sestrojte průměty elipsoidu. Zobrazte řez elipsoidu rovinou $\rho(9; 11; 4,5)$. Určete přesně body řezu na obrysech, sestrojte osy průmětu řezu, stanovte viditelnost křivky řezu v půdoryse i náryse. (Rýsujte na nový list papíru).

Příklad 4 (25 bodů)

Středové promítání: S_2 - pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d - distanční kružnice
Sestrojte nejkratší příčku mimoběžek a a b, jsou-li středové průměty přímek určeny stopníkem (N^a resp. N^b) a úběžníkem (U^a resp. U^b).



b^s
a^s
U^a
U^b
k_d
N^a
S_2
N^b

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MMUD

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

- Jedná se o součet aritmetické posloupnosti. Tedy

$$\sum_{k=1}^{n^n} k = \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n.$$

- Budeme používat větu o dvou policajtech. Využijeme následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$

$$(2n)^{2n} \leq \sum_{k=1}^{2n} k^k \leq 2n(2n)^{2n},$$

$$\frac{1}{2}n^{2n} \leq \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n \leq n^{2n}.$$

Tedy

$$\frac{1}{4}\sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{2}n^{2n}}{2n(2n)^{2n}}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}} = \frac{1}{4}.$$

Víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = 1.$$

Z věty o dvou policajtech a výše zmíněných odhadů a výpočtů plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$F(x,y,z,w) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 - 10xyzw = 0$$

a bod $[1,1,1,1]$.

- F je polynom, tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$.
- $F(1,1,1,1) = 0$.
- $F_y(1,1,1,1) = -6 \neq 0$, tedy f existuje a je C^1.

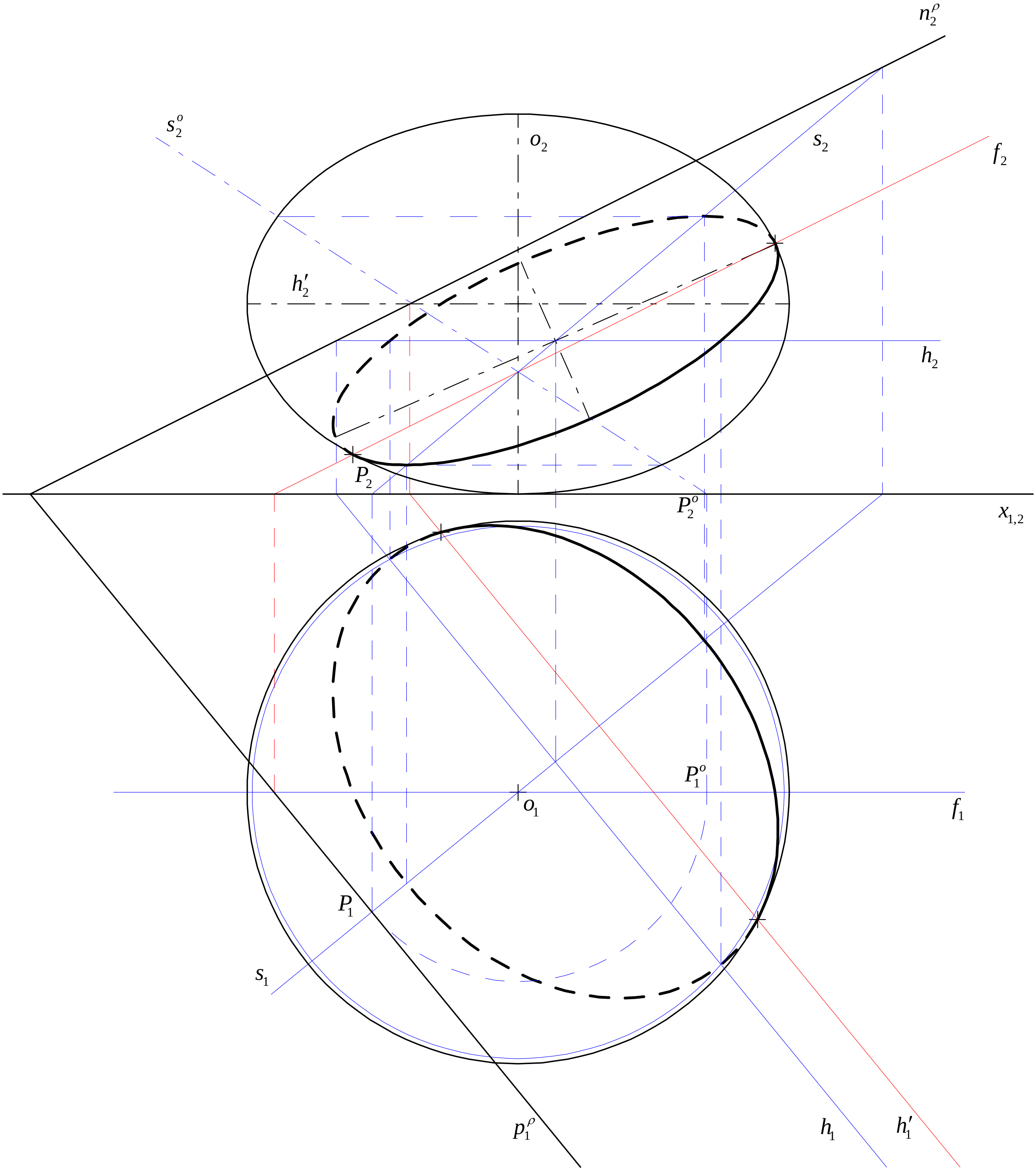
(2)

$$f_x(1,1,1) = -\frac{F_x(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{4}{3},$$
$$f_z(1,1,1) = -\frac{F_z(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{2}{3},$$
$$f_w(1,1,1) = -\frac{F_w(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{1}{3}.$$

Použitím řetízkového pravidla dostáváme

$$T_z(1,1,1) = ((f_x + f_z + f_w)f_z)(1,1,1) = \frac{14}{9}.$$

Příklad 3 (25 bodů)



Příklad 4 (25 bodů)