Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUI

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Určete, kolikrát napíšete číslici 0, jestliže zapíšete za sebou prvních 2000 kladných celých čísel.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A2016;
var A, B, P: integer;
begin
read(A, B);
P := 1;
while A mod 2 = B mod 2 do
  begin
  A := A div 2;
  B := B div 2;
  P := P + 1;
  end;
write(P)
end.
```

```
main()  /* A2016 */
{
  int a, b, p;
  scanf("%i", &a);
  scanf("%i", &b);
  p = 1;
  while (a % 2 == b % 2)
  {
     a /= 2;
     b /= 2;
     p++;
  }
  printf("%i", p);
}
```

a) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupními hodnotami A $= 3072$, B $= 2048$.
b) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupními hodnotami A $= 30000$, B $= 30000$.
c) Vstupní hodnota A bude rovna 721. Určete, jakou nejmenší kladnou vstupní hodnotu B musíme zadat, abychom obdrželi výsledek výpočtu 8.

Příklad 3 (25 bodů)

- Sečtěte $\sum_{k=1}^{n^n} k$.
- S použitím věty o dvou policajtech spočtěte limitu posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna, kde

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^{n^n} k}{\sum_{k=1}^{2n} k^k}}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztah

  $$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 = 10xyzw$$

  je v okolí bodu $[1, 1, 1, 1]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $f(x, z, w)$ ($f(x, z, w) = y$) definované na jistém okolí bodu $[1, 1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1, 1) = 1$.

- Spočtěte parciální derivaci složené funkce $T(x, z, w) = f(f(x, z, w), f(x, z, w), f(x, z, w))$ podle z v bodě $[1, 1, 1]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUI

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Z uvažovaných dvou tisíc čísel $1, 2, \ldots, 1999, 2000$ má každé desáté číslo nulu v řádu jednotek. Čísla $100 - 109, 200 - 209, \ldots 1900 - 1909$ a 2000 mají nulu v řádu desítek, což je celkem 191 nul zapsaných na pozici desítek. Čísla $1000 - 1099$ a 2000 mají nulu na pozici stovek, je jich 101. Celkem tedy napíšeme $200 + 191 + 101 = 492$ číslic 0.

Příklad 2 (25 bodů)

Výsledná hodnota P určuje, v kolikáté cifře počítáno zprava se poprvé odliší dvojkové zápisy vstupních hodnot A, B.

a) Obě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$A = 110000000000$$
$$B = 100000000000$$

Výsledkem je tedy 11.

b) Dvojkové zápisy čísel $A = B$ jsou shodné, výpočet v cyklu nikdy neskončí (případně skončí běhovou chybou při přetečení hodnoty proměnné P).

c) Číslo $A = 721$ má dvojkový zápis 1011010001. Dvojkový zápis čísla B se má shodovat s dvojkovým zápisem čísla A v posledních sedmi cifrách, musí mít odlišnou osmou dvojkovou cifru zprava a žádné další cifry, aby B bylo co nejmenší. Výsledkem je proto $B = 1010001$, tzn. číslo 81.

Příklad 3 (25 bodů)

- Jedná se o součet aritmetické posloupnosti. Tedy

$$\sum_{k=1}^{n^n} k = \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n.$$

- Budeme používat větu o dvou policajtech. Využijeme následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$

$$(2n)^{2n} \leq \sum_{k=1}^{2n} k^k \leq 2n(2n)^{2n},$$

$$\frac{1}{2}n^{2n} \leq \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n \leq n^{2n}.$$

Tedy

$$\frac{1}{4}\sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{2}n^{2n}}{2n(2n)^{2n}}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}} = \frac{1}{4}.$$

Víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = 1.$$

Z věty o dvou policajtech a výše zmíněných odhadů a výpočtů plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$F(x,y,z,w) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 - 10xyzw = 0$$

a bod $[1,1,1,1]$.

- F je polynom, tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$.
- $F(1,1,1,1) = 0$.
- $F_y(1,1,1,1) = -6 \neq 0$, tedy f existuje a je C^1.

(2)

$$f_x(1,1,1) = -\frac{F_x(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{4}{3},$$

$$f_z(1,1,1) = -\frac{F_z(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{2}{3},$$

$$f_w(1,1,1) = -\frac{F_w(1,1,1,1)}{F_y(1,1,1,1)} = -\frac{1}{3}.$$

Použitím řetízkového pravidla dostáváme

$$T_z(1,1,1) = ((f_x + f_z + f_w)f_z)(1,1,1) = \frac{14}{9}.$$