Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUI

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova liché délky, která začínají a končí stejným znakem. Například slova 0, 111, 10001 automat přijme, zatímco slova 00, 110, 1000 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program AAA;
var a, b, k:  integer;
begin
b := 0;
read(k);
while b <= 1000 do
  begin
  a := 0;
  while a <= b do a := a + k;
  b := a;
  end;
writeln(b)
end.
```

```
main()  /* AAA */
{
  int a, b, k;
  b = 0;
  scanf("%d", &k);
  while (b <= 1000)
  {
     a = 0;
     while (a <= b) a += k;
     b = a;
  }
  printf("%d", b);
}
```

a) Určete, jaký výsledek `b` obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou `k` = 5.

b) Určete, jaký výsledek `b` obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou `k` = 17.

c) Určete jednu vstupní hodnotu `k`, pro kterou výpočet skončí s výsledkem `b` = 1007.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x)}{x^4} && : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} && : n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(a) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(b) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 4 (25 bodů)

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

(a) Spočtěte $f'(0)$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $a > 0$ takové, že f je monotóní na intervalu $(-a, a)$.

(c) Rozhodněte, zda existuje $b < 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, b)$.

Své odpovědi zdůvodněte.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2017

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MMUI

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Pomocí stavů automatu si musíme evidovat první přečtený znak a dosavadní paritu délky vstupního slova. Ve stavech B, C byl přečten lichý počet znaků a poslední z nich se shoduje s prvním, ve stavech D, E byl přečten sudý počet znaků, ve stavech F, G byl přečten lichý počet znaků a poslední z nich je rozdílný od prvního. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\rightarrow A$	B	C	A = počáteční stav
$\leftarrow B$	D	D	B = začíná 0, končí 0, lichá délka
$\leftarrow C$	E	E	C = začíná 1, končí 1, lichá délka
D	B	F	D = začíná 0, sudá délka
E	G	C	E = začíná 1, sudá délka
F	D	D	F = začíná 0, končí 1, lichá délka
G	E	E	G = začíná 1, končí 0, lichá délka

Příklad 2 (25 bodů)

Při každé iteraci vnějšího while-cyklu se hodnota proměnné `b` zvýší o `k`, takže po i-té iteraci bude mít proměnná `b` hodnotu $i.$`k`. Výsledkem výpočtu pro zadané `k` proto bude nejnižší hodnota $i.$`k`, která překročí 1000.

a) Spočítáme $1000/5 = 200$ přesně, takže pro `k` $= 5$ se vykoná 201 iterací a výslednou hodnotou je 1005.

b) Spočítáme $1000/17 = 58$ zb. 14, takže pro `k` $= 17$ se vykoná 59 iterací a výslednou hodnotou je 1003.

c) Obecně lze některé výsledné hodnoty získat pro více různých vstupních hodnot, ale to zde nemusíme řešit, úkolem je nalézt jednu vyhovující vstupní hodnotu. Takovou vstupní hodnotou je zřejmě 1007. Pro ni výpočet skončí hned po první iteraci vnějšího while-cyklu s výsledkem 1007.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Použijeme větu o dvou policistech. Víme, že

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \; k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pak

$$0 \leq x_n \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(b) Použijeme Taylorovy polynomy funkcí $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\cos(x)$ a $f(x)$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4), \\ f(x) &= \tfrac{1}{12} + o(1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{12}.$$

(c) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (a) a (b) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{12}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

(a)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že cos je omezená funkce a h konverguje k 0.

(b) Ne. Dokážeme to sporem. Nechť $a > 0$ je takové, že f je monotóní na $(-a, a)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2n\pi > \frac{1}{a}$. Položme $y = \frac{1}{2n\pi}$ a $z = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Očividně, $-a < 0 < z < y < a$ a $f(z) = -z^2 < f(0) = 0 < f(y) = y^2$. Tedy, f není monotóní na $(-a, a)$.

(c) Ano. Zřejmě,

$$f''(x) = 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Protože cos je spojitý v 0 a $\cos(0) = 1$, snadno dostaneme, že

$$\lim_{x\to -\infty} f''(x) = 2 > 0.$$

Tedy existuje $b < 0$ takové, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, b)$. Z toho již snadno plyne, že f je konvexní na $(-\infty, b)$.