Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUD

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a splňují

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)}, \tag{1}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0) \ \& \ (\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g).)$$

(a) Rozhodněte, zda taková posloupnost $\{x_n\}$ existuje.

(b) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(d) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 2 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M 2y\cos^2(x)\,dxdy,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}(x) < y < 1\}$.

Příklad 3 (25 bodů)

Mongeovo promítání: $O = [10, 14]$, levotočivá soustava souřadnic
Rotační kuželová plocha je dána:

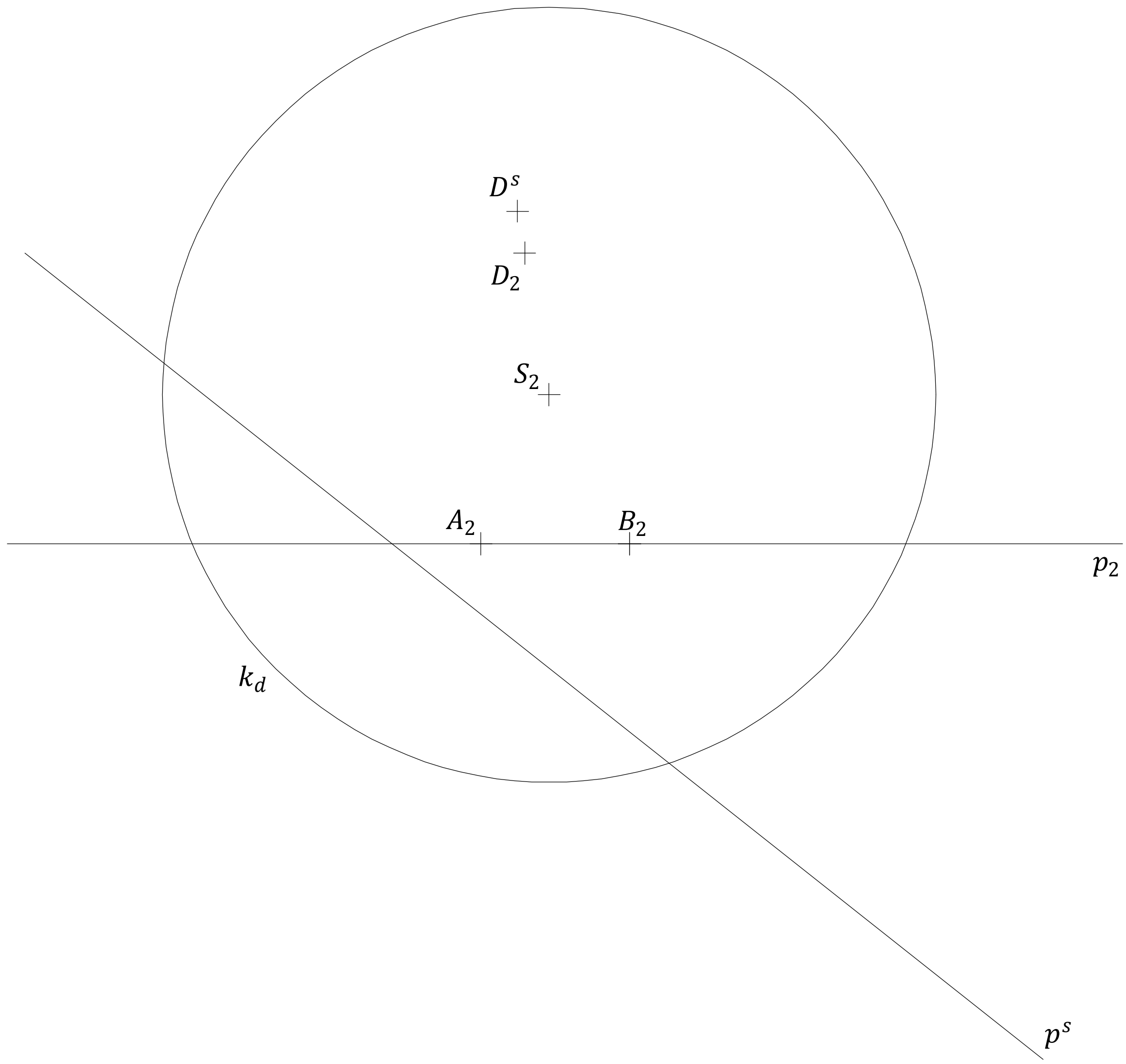
1. osou rotace: $o \perp \pi$, $M \in o$, $M = [0; 6; 0]$,
2. tvořicí přímkou p, $P, Q \in p$, $P = [4; 3; 0]$, $Q = [0; 6; 10]$.

Sestrojte průměty části kuželové plochy ležící mezi půdorysnou a rovinou rovnoběžnou s půdorysnou procházející vrcholem kuželové plochy. Dále zobrazte řez kuželové plochy rovinou $\rho(3{,}5; 4{,}5; 12)$. Určete přesně body řezu na obrysech, sestrojte osy průmětů řezu (v případě hyperbolického řezu i asymptoty), stanovte viditelnost křivky řezu v půdoryse i nárysu. (Rýsujte na nový list papíru).

Příklad 4 (25 bodů)

Středové promítání: S_2 – pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d – distanční kružnice.

Sestrojte rovinu souměrnosti úsečky AB, jsou-li dány druhé průměty bodů A, B a druhý a středový průmět přímky p, na níž úsečka leží. Sestrojte dále obraz bodu D v rovinové souměrnosti podle sestrojené roviny.


D^s
D_2
S_2
A_2
B_2
p_2
k_d
p^s

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUD

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

(a) Posloupnost $\operatorname{arccotg}(n)$ splňuje

$$\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g). \tag{1}$$

pro $\epsilon = g$.

(b) Z (1), z kladnosti funkce $\operatorname{arccotg}(x)$ a z $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Použijeme Taylorův polynom funkce $\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ a substituci $\sin(x) = y$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\sin(y)) - y}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^3} = -\frac{1}{3}.$$

V první rovnosti jsme využili větu o limitě složené funkce, prostotu funkce $\sin(x)$ na okolí 0 (např.$(-1, 1)$) a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.

(d) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (b) a (c) pak plyne, že

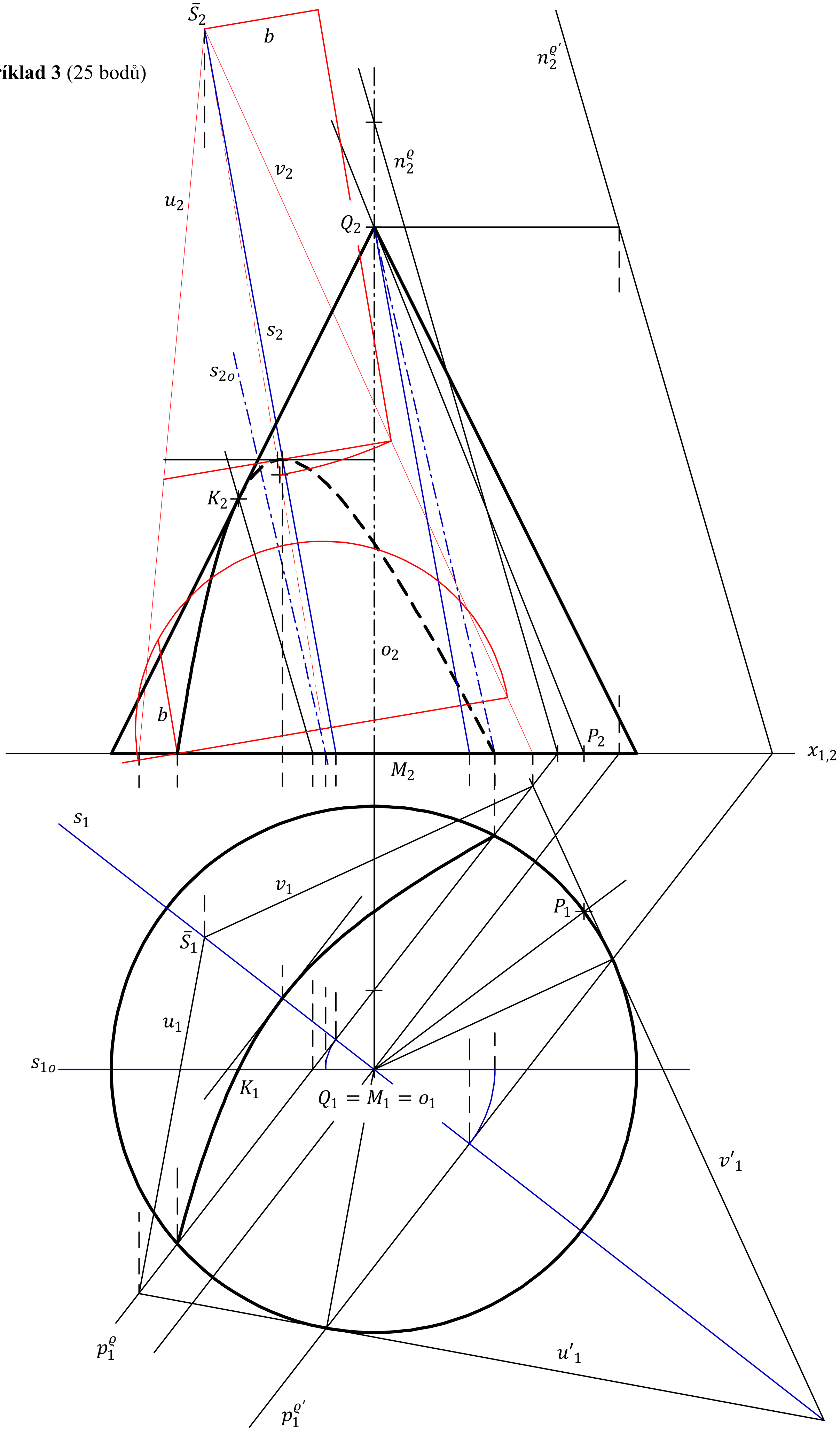
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\frac{1}{3}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Protože $\mathrm{tg}(x) < 1$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ a $\mathrm{tg}(x) \geq 1$ pro $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, díky Fubiniho větě máme

$$\begin{aligned}\int_M 2y\cos^2(x)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\mathrm{tg}(x)}^1 2y\cos^2(x)\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y^2]_{\mathrm{tg}(x)}^1 \cos^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) - \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \Big[\frac{\sin(2x)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 3 (25 bodů)



Příklad 4 (25 bodů)