Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a splňují

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)}, \tag{1}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0) \;\&\; (\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g).)$$

(a) Rozhodněte, zda taková posloupnost $\{x_n\}$ existuje.

(b) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(d) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+1).$$

(i) Určete definiční obor funkce f.

(ii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.

(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

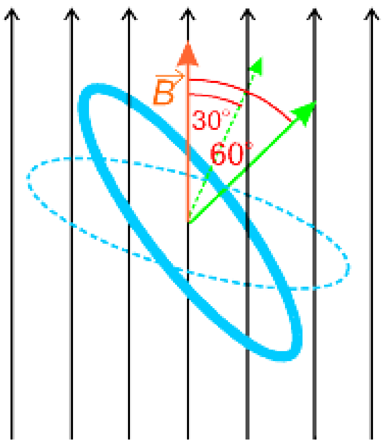
(iv) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.

(v) Určete asymptoty funkce f.

(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Magnetická indukce homogenního magnetického pole je 0,5 T. Rovina kruhové smyčky o poloměru 5 cm svírá se směrem indukce úhel 60°. Tento úhel se za 0,02 s změní na 30°.



a) Určete průběh velikosti indukovaného napětí.

b) Určete průměrné indukované napětí.

Příklad 4 (25 bodů)

Auto o hmotnosti m jede rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti v_0 po vodorovné silnici. V čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ proti němu začala působit celková brzdná síla $\vec{F}_\mathrm{b}$ (zahrnující již odpor vzduchu, valivý odpor vozovky apod.), jejíž velikost je přímo úměrná velikosti rychlosti auta:

$$F_\mathrm{b} = kv,$$

kde k je kladná konstanta. Kladný směr osy x uvažujte ve směru pohybu, v čase t_0 je auto v počátku souřadného systému.

1. Určete, jak se s časem mění velikost rychlosti auta $v = v(t)$.
2. Určete, za jak dlouho klesne rychlost auta na poloviční hodnotu oproti času t_0.
3. Určete, jak se s časem mění souřadnice auta $x = x(t)$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta B

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Spočítejte integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{4 + 9\cos^2 x} dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, u, v] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2(u+v)y &= 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

  je v okolí bodu $[1, 2, 0, 0]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $[g, h](x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($[g, h](x, y) = [u, v]$) definované na jistém okolí bodu $[1, 2]$, pro kterou je $g(1, 2) = h(1, 2) = 0$.

- Spočtěte parciální derivaci funkce g podle y v bodě $[1, 2]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Příklad 3 (25 bodů)

Část A

Dívka táhne naložené sáňky o hmotnosti $m = 20$ kg po vodorovném zasněženém chodníku. Rychlost saní je konstantní. Koeficient dynamického tření mezi skluznicí a chodníkem μ_k je 0,1 a úhel φ, který svírá provaz s chodníkem, je 30°.

Určete:

a) zrychlení sáněk,

b) velikost tažné síly, kterou dívka působí na sáňky,

c) velikost tlakové síly, kterou působí sáňky na chodník,

d) velikost třecí síly působící na sáňky.

Část B

Chlapec táhne sáňky vzhůru po zasněženém svahu se stoupáním β za provázek, který svírá s rovinou svahu úhel α. Najděte takovou velikost úhlu α, při kterém bude síla vynaložená na tažení saní nejmenší. Koeficient smykového tření mezi saněmi a sněhem je $f = 0{,}1$ a rychlost saní zůstává stálá.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvnitř koule o poloměru R je nerovnoměrně rozmístěn náboj, a to s objemovou hustotou přímo úměrnou vzdálenosti od středu koule r:

$$\varrho(r) = Ar,$$

kde A je konstanta.

1. Spočítejte celkový náboj koule Q.
2. Najděte závislost velikosti intenzity elektrického pole v okolí koule na vzdálenosti od jejího středu, tj. závislost $E = E(r)$ pro $r > R$.
3. Najděte závislost velikosti intenzity elektrického pole uvnitř koule na vzdálenosti od jejího středu, tj. závislost $E = E(r)$ pro $r \leq R$.
4. Do grafu načrtněte průběh $E = E(r)$ pro $r \geq 0$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Fyzika

Studijní obory: FFUM

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

(a) Posloupnost $\operatorname{arccotg}(n)$ splňuje

$$\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g). \tag{1}$$

pro $\epsilon = g$.

(b) Z (1), z kladnosti funkce $\operatorname{arccotg}(x)$ a z $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Použijeme Taylorův polynom funkce $\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ a substituci $\sin(x) = y$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\sin(y)) - y}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^3} = -\frac{1}{3}.$$

V první rovnosti jsme využili větu o limitě složené funkce, prostotu funkce $\sin(x)$ na okolí 0 (např.$(-1,1)$) a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.

(d) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (b) a (c) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\frac{1}{3}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je
$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} = \infty$.

(iii) Snadno vypočteme
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{x^2}.$$

Ze znaménka derivace dostaneme

– $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$.
– $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.
– $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$.
– $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

Funkce f má lokální maximum v bodě $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ a lokální minimum v bodě $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

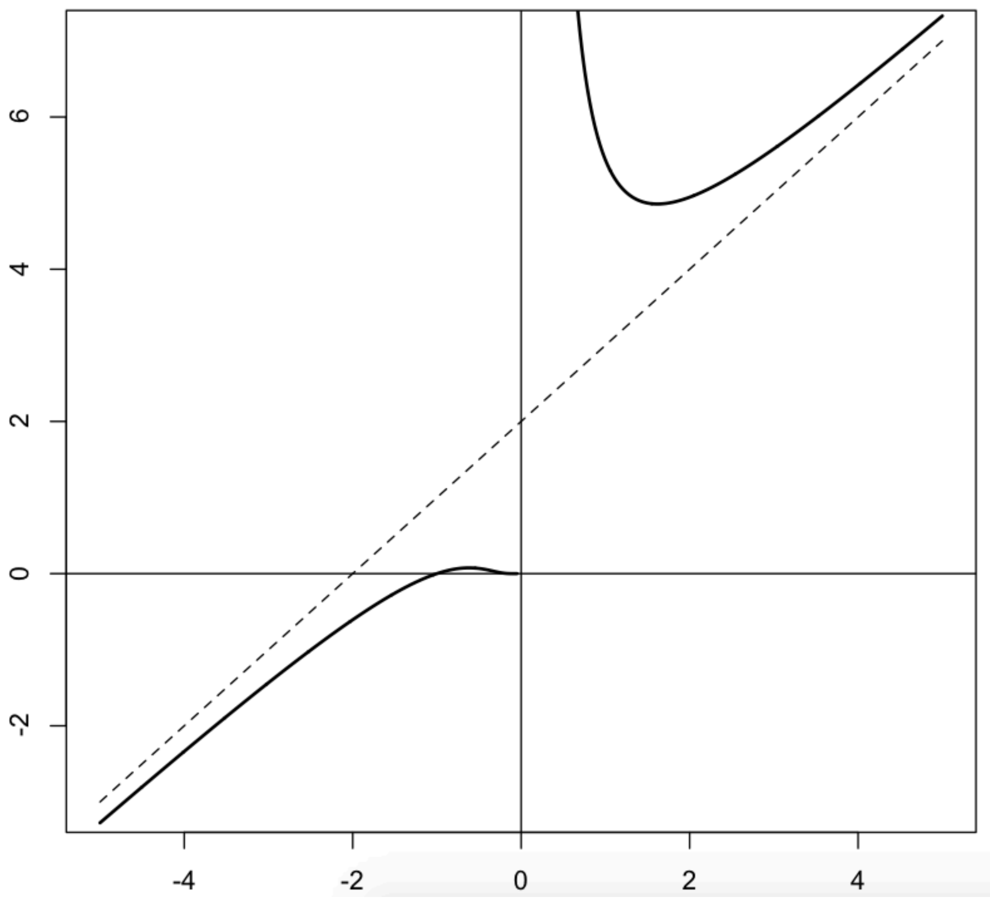
(iv) Vypočteme druhou derivaci
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x + 1}{x^4}.$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

– $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{3})$.
– $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{1}{3}, 0)$.
– $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(v) Funkce f má v bodech $-\infty$ a ∞ asymptotu $v(x) = x + 2$.

(vi) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



6
4
2
0
-2
-4
-2
0
2
4

Příklad 3 (25 bodů)

a) Průběh velikosti indukovaného napětí při rovnoměrném otáčení závitu

Budeme předpokládat, že se cívka rovnoměrně otáčí z polohy 1 do polohy 2. Naším cílem bude určit průběh indukovaného napětí, nikoli pouze jeho průměrnou hodnotu.

Úhel mezi kolmicí k ploše a indukčními čarami α se mění s časem t podle vztahu

$$\alpha = \varphi_o - \omega t,$$

kde pro počáteční úhel otočení platí:

$$\varphi_o = \frac{\pi}{3}.$$

Úhlovou rychlost ω musíme zvolit tak, aby pro čas $t = 0{,}02$ s platilo

$$\alpha = \varphi_o - \omega t = \frac{\pi}{6}.$$

Vyjádříme velikost úhlové rychlosti ω

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - 0,02\,\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{\pi}{6 \cdot 0,02}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Pro magnetický indukční tok platí vztah

$$\Phi = BS\cos(\varphi_o - \omega t).$$

Velikost elektromotorického napětí indukovaného ve vodivé smyčce je rovna rychlosti změny magnetického indukčního toku procházející plochou smyčky, tj.:

$$|U_i| = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|.$$

Protože nás zajímá pouze velikost indukovaného napětí, vystupují ve vztahu absolutní hodnoty.

Do tohoto vztahu dosadíme výraz pro magnetický indukční tok

$$U_i = \left|\frac{\mathrm{d}(BS\cos{(\varphi_o - \omega t)})}{\mathrm{d}t}\right|,$$

Po derivování dostaneme vztah:

$$U_i = BS\omega\sin{(\varphi_o - \omega t)}.$$

b) Rozbor situace

Elektromotorické napětí se ve smyčce indukuje tehdy, když se mění magnetický indukční tok plochou smyčky. Magnetický indukční tok si můžeme představit jako “počet magnetických indukčních čar, které protnou plochu smyčky". Úhel, který svírá magnetická indukce a smyčka, určujeme mezi směrem magnetické indukce a kolmicí k ploše smyčky. V našem případě svírá smyčka se směrem indukce úhel 60°. To znamená, že indukčních čar projde plochou smyčky méně, než kdyby smyčka svírala se směrem indukce nulový úhel.

Úhel mezi kolmicí k ploše smyčky a směrem indukce se změní z 60° na 30°. Tím se vlastně efektivně změní (zvětší) počet magnetických indukčních čár protínajících plochu. Ve smyčce se bude indukovat napětí.

Velikost elektromotorického napětí indukovaného ve vodivé smyčce je rovna změně magnetického indukčního toku za čas. Vypočítáme si tedy magnetické toky pro obě polohy smyčky, velikost jejich rozdílu a vydělíme je časem, za který se poloha smyčky změnila. Tím získáme průměrné indukované napětí.

Pro výpočet velikosti indukovaného napětí platí vztah:

$$|U_i| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|,$$

kde za $\Delta\Phi$ dosadíme velikost rozdílu toků v obou polohách.
Rozdíl hodnot píšeme do absolutních hodnot, protože nás zajímá pouze velikost indukovaného napětí:

$$|\Delta\Phi| = |\Phi_2 - \Phi_1|$$

Pro toky v jednotlivých polohách platí vztahy:

$$\Phi_1 = BS\,\cos\alpha_1 = B\pi r^2\,\cos\alpha_1$$

$$\Phi_2 = BS\,\cos\alpha_2 = B\pi r^2\,\cos\alpha_2.$$

Vztah dosadíme do vzorce pro elektromotorické napětí:

$$|U_i| = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{\Delta t} = \frac{B\pi r^2|\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1|}{\Delta t}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme pro průměrné indukované napětí:

$$U_i = \frac{B\pi r^2\,|\cos 60° - \cos 30°|}{\Delta t} = \frac{0{,}5\,\cdot\,\pi\,\cdot\,0,05^2\,\cdot\,\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{0,02}\,\mathrm{V} = 0{,}07\,\mathrm{V}$$

Příklad 4 (25 bodů)

1. Pro řešení první části úlohy je pro nás zásadní znát ty síly, které mají složku do směru osy x. V této situaci je taková síla jediná, a to brzdná síla $\vec{F}_\mathrm{b}$. Pro zrychlení auta $\vec{a}$ tak podle 2. Newtonova zákona platí:

$$\vec{F}_\mathrm{b} = m\vec{a}.$$

   Protože nás zajímá průběh velikosti rychlosti, přejdeme od vektorového zápisu ke skalárnímu. Vzhledem k tomu, že brzdná síla působí proti směru osy x, uvažujeme ji se záporným znaménkem:

$$-kv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

   Jednoduchou úpravou dostáváme pro velikost rychlosti obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v = 0,$$

   jejíž řešení nalezneme separací proměnných následovně:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int \frac{k}{m}\mathrm{d}t.$$

   Po zintegrování tak získáváme:

$$\ln|v| = -\frac{k}{m}t + C,$$

   kde C je integrační konstanta. Odlogaritmujeme:

$$|v| = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t+C} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{e}^{C}.$$

   Protože rychlost nabývá kladných hodnot, nemusíme dále psát absolutní hodnotu. Konstantu e^C označíme jako C':

$$v = C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

   Konstantu C' zjistíme z počátečních podmínek. V čase t_0 platí:

$$v_0 = C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \Rightarrow v_0 = C'.$$

   Pro závislost rychlosti na čase tak nakonec dostáváme:

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

2. S pomocí výše získaného vztahu snadno zodpovíme druhou část úkolu – hledáme nyní čas τ, pro který platí $v(\tau) = v_0/2$, čímž dostáváme rovnici:

$$\frac{v_0}{2} = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\tau}.$$

   Triviální úpravou docházíme k výsledku:

$$\tau = \frac{m}{k}\ln 2.$$

3. Průběh x-ové souřadnice na čase získáme jednoduchou integrací průběhu rychlosti:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = -\frac{m}{k}v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + D,$$

kde D je integrační konstanta, kterou opět určíme z počátečních podmínek, konkrétně z informace, že v čase t_0 je $x = 0$, tedy:

$$0 = -\frac{m}{k}v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\cdot 0} + D \Rightarrow D = \frac{m}{k}v_0.$$

Pro závislost souřadnice x na čase tak nakonec dostáváme:

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Integrační obor je kompaktní, integrand je na něm spojitý, integrál tudíž existuje. Přepišme ho do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{4+9\cos^2 x} dx,$$

který nás vybízí k substituci

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi'(x) = -\sin x.$$

Tato substituce je korektní, neboť φ je zřejmě spojitě diferencovatelná a prostá na $[0, \pi/2]$. Integrál je tedy roven

$$\int_1^0 \frac{1-y^2}{4+9y^2}(-1)dy = -\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy + \int_1^0 \frac{y^2}{4+9y^2}dy =$$
$$= -\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy + \int_1^0 \left(\frac{1}{9}\cdot\frac{4+9y^2}{4+9y^2} - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4+9y^2}\right) dy.$$

Spočítejme si zvlášť dvakrát se objevující integrál:

$$\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy = \frac{1}{4}\int_1^0 \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}y\right)^2}dy = \frac{1}{4}\int_{3/2}^0 \frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{2}{3}dz = -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2},$$

kde jsou použili snadno odůvodnitelnou substituci $z = \frac{3}{2}x$. Celkovým výsledkem tedy je

$$-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\cdot(-1-\frac{4}{9}) + \frac{1}{9}\,[y]_1^0 = \frac{13}{54}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{1}{9}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$[G,H](x,y,u,v) = \left(xe^{u+v} + 2(u+v)y - 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x\right) = [0,0]$$

a bod $[1,2,0,0]$.

- Funkce G a $ye^{u-v} - 2x$ jsou triviálně spojitě diferencovatelné na $\mathbb{R}^4$. Funkce $-\frac{u}{1+v}$ je spojitě diferencovatelná všude kromě bodů, kde $v = -1$. Tedy $[G,H] \in C^1(B([1,2,0,0],1))$.
- $[G,H](1,2,0,0) = [0,0]$,
-
$$\begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix}(1,2,0,0) = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -15 \neq 0,$$

  tedy g a h existují a jsou C^1.

(2) Vektor $\begin{pmatrix} g_y \\ h_y \end{pmatrix}(1,2)$ je řešením soustavy lineárních rovnic s pravou stranou

$$\left(\begin{array}{cc|c} G_u & G_v & -G_y \\ H_u & H_v & -H_y \end{array}\right)(1,2,0,0) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Tedy $g_y = -\frac{1}{3}$.

Příklad 3 (25 bodů)

Část A

a) Pokud je rychlost sáněk konstantní, jejich rychlost se s časem nemění a zrychlení sáněk je tedy rovno nule ($\vec{a} = 0$)

b) Pohybová rovnice pro sáňky:

$$\vec{F}_G + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_t = m\vec{a} = 0$$

kde (po řadě): tíhová síla; síla, kterou tlačí chodník na saně; hledaná tahová síla; třecí síla; hmotnost saní; zrychlení saní.

Rovnici rozepíšeme do souřadnic:

x: $T\cos\varphi - F_t = 0.$

y: $N + T\sin\varphi - F_G = 0.$

Dosazením a úpravou dostaneme:

$$T = \frac{mgf_d}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}.$$

Po číselném dosazení:

$$T = \frac{20 \cdot 9,81 \cdot 0,1}{\cos 30^\circ + 0,1 \cdot \sin 30^\circ}\,\mathrm{N} = \frac{19,62}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0,1 \cdot 0,5}\,\mathrm{N},$$

$$T = 21,4\,\mathrm{N}.$$

c) Síla, kterou tlačí saně na chodník

Síla, kterou tlačí sáňky na chodník, je podle 3. Newtonova zákona stejně velká, jako síla, kterou tlačí chodník na sáňky. Síla N, kterou tlačí chodník na sáně, je daná vztahem

$$N = mg - T\sin\varphi.$$

Po dosazení:

$$N = mg - \frac{mgf_d}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\sin\varphi = mg\left(1 - \frac{f_d\sin\varphi}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\right) =$$

$$= mg\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\right) = mg\left(\frac{1}{1 + f_d\tan\varphi}\right).$$

Číselně:

$$N \;=\; 20\cdot 9,81\left(\frac{1}{1+0,1\tan 30^\circ}\right)\,\mathrm{N} \;=\; 196,2\left(\frac{1}{1+0,1\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\,\mathrm{N},$$

$$N \;=\; 185,5\,\mathrm{N}.$$

d) Třecí síla

$$F_t \;=\; N f_d.$$

$$F_t \;=\; mg\left(\frac{1}{1+f_d\tan\varphi}\right) f_d.$$

Po číselném dosazení:

$$F_t \;=\; 20\cdot 9,81\left(\frac{1}{1+0,1\;\tan 30^\circ}\right)0,1\,\mathrm{N} \;=\; 19,62\;\left(\frac{1}{1+0,1\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\,\mathrm{N} = 18,6\,\mathrm{N}.$$

Část B

Pohybová rovnice pro sáňky:

$$\vec{F_G}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F_t} = m\vec{a} = 0.$$

Průmět do osy x:

$$T\cos\alpha \;-\; F_G\sin\beta \;-\; F_t \;=\; 0$$

Průmět do osy y:

$$T\sin\alpha \;+\; N \;-\; F_G\cos\beta \;=\; 0.$$

Pro třecí sílu platí:

$$F_t \;=\; f\left(F_G\cos\beta \;-\; T\sin\alpha\right).$$

Tahová síla:

$$T \;=\; \frac{F_G(\sin\beta \;+\; f\cos\beta)}{f\sin\alpha \;+\; \cos\alpha}.$$

Minimum funkce $T(\alpha)$:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha} = F_G(\sin\beta + f\cos\beta)\frac{-(f\cos\alpha - \sin\alpha)}{(f\sin\alpha + \cos\alpha)^2}.$$

Položíme rovno nule a získáme:

$$\alpha = \mathrm{arctg} f.$$

Číselně:

$$\alpha = \mathrm{arctg} 0,1 = 5°43'.$$

(Opětovným derivováním podle α ještě ověříme, že jde o minimum: $\frac{d^2T}{d\alpha^2} > 0$)

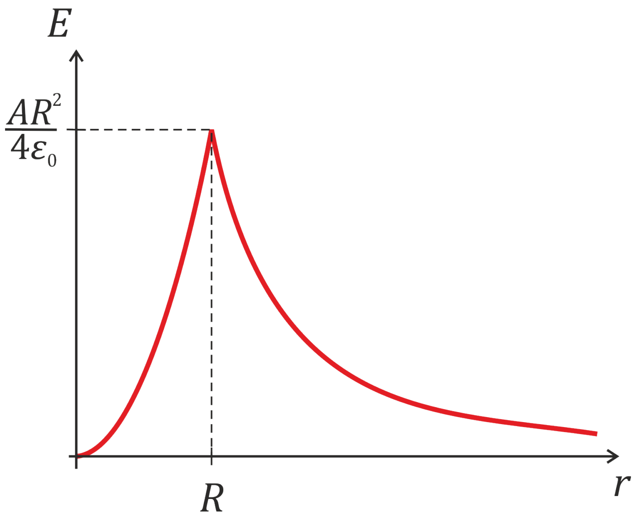
Příklad 4 (25 bodů)

1. Protože koule je nabita nehomogenně, její celkový náboj Q určíme integrací – tu lze provést různými způsoby. Můžeme si například představit, že koule je složena z velkého množství infinitezimálně tenkých slupek o objemu $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Celkový náboj získáme integrací přes proměnnou r:
$$Q = \int_V \varrho \mathrm{d}V = \int_0^R 4\pi\varrho(r)r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^R 4\pi A r^3\,\mathrm{d}r = A\pi R^4.$$
Jiným způsobem je integrace ve sférických souřadnicích, která vede také přímočaře k výsledku:
$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r)r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R Ar^3\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = A\pi R^4.$$

2. Nejjednodušším způsobem nalezení intenzity elektrického pole $\vec{E}$ v okolí koule je využití Gaussovy věty elektrostatiky, která vyjadřuje vztah mezi tokem elektrické intenzity uzavřenou plochou a celkovým nábojem Q, který se nachází uvnitř této plochy:
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$
Za uzavřenou plochu zvolíme sféru se středem ve středu nabité koule – na celé této ploše má vektor elektrické intenzity stejnou velikost a je na ni kolmý, čímž se Gaussova věta elektrostatiky redukuje na tvar:
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E,$$
kde r je vzdálenost od středu koule. Protože pro $r > R$ je veškerý elektrický náboj uzavřen uvnitř sféry, můžeme za náboj dosadit výsledek z předcházející části a získáváme závislost
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{A}{4\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^2}.$$

3. Také pro výpočet průběhu elektrické intenzity uvnitř koule využijeme Gaussovu větu elektrostatiky, jako uzavřenou plochu zvolíme opět sféru a dojdeme tak znovu ke vztahu
$$\frac{Q'}{\varepsilon_0} = E\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E.$$
Na rozdíl od předcházejícího výpočtu ale musíme zohlednit, že ve vzdálenosti $r \leq R$ se na toku elektrické intenzity plochou podílí pouze náboj Q' vymezený sférou o poloměru r, nikoliv celkový náboj koule. Velikost tohoto náboje vyjádříme integrací, která je analogická postupu v první části úlohy:
$$Q' = \int_0^r 4\pi\varrho(r)r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^r 4\pi A r^3\,\mathrm{d}r = A\pi r^4.$$
Dosazením do Gaussovy věty elektrostatiky dostáváme:
$$\frac{A\pi r^4}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E.$$
Pro $r \leq R$ tedy získáme vztah:
$$E(r) = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2.$$

4. Na základě výše uvedených vztahů je zřejmé, že pro $r \leq R$ intenzita kvadraticky roste až na hodnotu $\frac{AR^2}{4\varepsilon_0}$, pro $r > R$ pak dále klesá s kvadrátem vzdálenosti – viz obrázek níže.


E
$\frac{AR^2}{4\varepsilon_0}$
R
r