Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M 8xy\,dxdy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < \pi, 0 < y < \sin(x)\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy^2$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z Rayleighova rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathcal{I}\{x > 0\}, \quad \theta > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\theta > 0$.

(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr θ.

(c) Sestavte

  (i) test poměrem věrohodnosti,

  (ii) Raoův skórový test,

  (iii) Waldův test

  pro nulovou hypotézu $H_0 : \theta = 1$ oproti alternativě $H_1 : \theta \neq 1$.

Příklad 4 (25 bodů)

Kuponová obligace v nominální hodnotě $F = 10$ s roční kuponovou sazbou $C = 1$ splatná přesně za dva roky (tj. zcela jistě po datu exkuponu) se prodává za (tržní) cenu $P = 399/44$ (všechny hodnoty v tisících Kč).

1. Vyjádřete obecně současnou hodnotu uvedené obligace při hodnotící úrokové míře i.
2. Formulujte vztah pro výnos do splatnosti (YTM).
3. Vypočtětě výnos do splatnosti s výše uvedenými konkrétními hodnotami.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta B

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + 5\cos x} dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině $M : x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0$.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z Weibullova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}\mathcal{I}\{x > 0\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

přičemž hodnota parametru α je známá.

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\beta > 0$.

(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr β.

(c) Sestavte

  (i) test poměrem věrohodnosti,
  (ii) Raoův skórový test,
  (iii) Waldův test

  pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte aktiva 0, 1, 2. Aktivum 0 je bezrizikové s výnosem $r_0 = 6$, výnosy aktiv 1, 2 jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $r_1 = 10$ a $r_2 = 8$ (vše v procentech), s rozptyly $\sigma_1^2 = 4$ a $\sigma_2^2 = 2$. Kovariance mezi výnosy je $\sigma_{12} = 1$. Předpokládejme, že investor investuje bohatství ve výši $W = 1$.

(i) Najděte portfolio P skládající se pouze z rizikových aktiv (tj. aktiv 1, 2) a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$.

(ii) Najděte portfolio P skládající se ze všech tří aktiv minimalizující riziko a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$. (Rizikem se zde rozumí směrodatná odchylka výnosu portfolia.)

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme Fubiniho větu, vzorec

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

a integraci per partes. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_M 8xy\,dxdy &= \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} 8xy\,dydx = \int_0^\pi 8x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin(x)} dx \\
&= \int_0^\pi 4x\sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi 2x - 2x\cos(2x)\,dx \\
&= [x^2]_0^\pi - [x\sin(2x)]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(2x)\,dx \\
&= \pi^2 - 0 + \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = \pi^2.
\end{aligned}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je spojitá a množina M kompaktní, tedy funkce f nabývá na M svého minima a maxima. Označíme-li $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + y^2 - 1$, je $\nabla g \neq 0$ na M. Navíc $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Označme

$$L(x, y, z) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

pak všechny body podezřelé z extrému najdeme jako řešení následujících rovnic

$$\begin{aligned} L_x &= y^2 + 2\lambda x = 0, \\ L_y &= 2xy + 2\lambda y = 0, \\ L_z &= 2\lambda z = 0, \end{aligned}$$

a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Z rovnosti $2\lambda z = 0$ dostáváme, že $\lambda = 0$ nebo $z = 0$.

1) Pro $\lambda = 0$ dostáváme rovnice $y^2 = 0$ a $2xy = 0$, tedy $y = 0$ a $x^2 + z^2 = 1$. Stacionární body jsou ve tvaru $[\sin t, 0, \cos t]$ pro $t \in [0, 2\pi)$.

2) Pro $z = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} y^3 + 2\lambda xy &= 0 \\ 2x^2 y + 2\lambda xy &= 0, \end{aligned}$$

tedy $y^2 = 2x^2$ a proto

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x^2 = 1,$$

tedy $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dostaneme stacionární body $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$.

Jelikož

$$\begin{aligned} f(\sin t, 0, \cos t) &= 0, \forall t \in [0, 2\pi), \\ f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

tak má funkce f na množině M maximum $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$ a minimum $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\theta; \mathbf{X}) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{\theta^{2n}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\theta^2}\right\}, \quad X_i > 0, \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\theta; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \log X_i - 2n \log \theta - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\theta; \mathbf{X}) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial l_n(\theta; \mathbf{X})/\partial\theta = 0$ vzhledem k neznámému parametru θ, tj.

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\theta; \mathbf{X}) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\theta; \mathbf{X})}{\partial\theta} = -\frac{2}{\theta^2} + \frac{3}{n\theta^4} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\theta}; \mathbf{X}) = 8n \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-1} > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\theta) = \mathsf{E} I_n(\theta; \mathbf{X}) = \frac{4}{\theta^2},$$

protože

$$\mathsf{E} X_i^2 = \int_0^\infty \frac{x^3}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathrm{d}x = 2\theta^2 \int_0^\infty y e^{-y} \mathrm{d}y = 2\theta^2.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right), \quad n \to \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \theta = 1$ oproti alternativě $H_1 : \theta \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\theta}; \mathbf{X})}{L_n(1; \mathbf{X})} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n - 2n \log\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \theta = 1$ oproti alternativě $H_1 : \theta \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1; \mathbf{X})]^2}{nI(1)} = n \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1 \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \theta = 1$ oproti alternativě $H_1 : \theta \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\theta} - 1\right)^2 I\left(\hat{\theta}\right) = 4n \left(1 - \sqrt{\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 4 (25 bodů)

1. Současnou hodnotu označíme PV. Pro uvedenou situaci platí

$$PV = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}.$$

2. Je-li obligace na trhu koupena za hodnotu P, je výnos do splatnosti (označme Y) vlastně vnitřní míra výnosnosti (vnitřní výnosové procento) peněžního toku $(-P, C, C+F)$. Výnos do splatnosti v tomto případě je řešením rovnice

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}$$

vzhledem k proměnné i. Z toho plynoucí kvadratická rovnice má dva kořeny, z nichž pouze ten větší má ekonomický smysl:

$$Y = \frac{C - 2P + \sqrt{C^2 + 4CP + 4FP}}{2P}.$$

Alternativně po substituci úroková míra $\to$ diskontní faktor, tj. $v = \frac{1}{1+i}$ je možné získat řešení pro odpovídající diskontní faktor v řešením rovnice pro neznámý diskontní faktor v:

$$P = Cv + (C+F)v^2.$$

3. Postup výpočtu pro konkrétní numerické hodnoty:

$$\text{diskriminant} = C^2 + 4\,CP + 4\,FP = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \tfrac{399}{44} + 4 \cdot 10 \cdot \tfrac{399}{44} = \frac{11 + 399 + 3990}{11} = 400,$$

odmocnina z diskriminantu je tudíž 20 a výsledná hodnota Y je

$$Y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{399}{44} + 20}{2 \cdot \frac{399}{44}} = \frac{3}{19}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg}\, x$, pak $\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ a $dx = \frac{1}{t^2+1}dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + 5\cos x}dx = |t = \operatorname{tg}\, x| = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{3}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{5}{\sqrt{t^2+1}}} \cdot \frac{1}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{2t-3}{(t+5)(t^2+1)}dt,$$

$$\begin{aligned}
\frac{2t-3}{(t+5)(t^2+1)} &= \frac{A}{t+5} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)(t+5)}{(t+5)(t^2+1)} \Rightarrow \\
(A+B)t^2 &= 0t^2 \\
(5B+C)t &= 2t \\
A + 5C &= -3,
\end{aligned}$$

tedy $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t-3}{(t+5)(t^2+1)}dt &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{2(t+5)} + \frac{t-1}{2(t^2+1)}\right)dt = \left[-\frac{1}{2}\ln|t+5| + \frac{1}{4}\ln|t^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\, t\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\ln 6 + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\, 1 = \ln\sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{6}} - \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Označme
$$L(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+a),$$
pak
$$\begin{aligned} L_x &= yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,\\ L_y &= xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,\\ L_z &= xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0, \end{aligned}$$

tedy

$$2\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = 2\lambda_1 y^2 + \lambda_2 y = 2\lambda_1 z^2 + \lambda_2 z = xyz.$$

Jelikož je x, y i z řešením stejné kvadratické rovnice, tak nemůže nastat situace $x \neq y \neq z$. Pro $x = y$ dostaneme $z = -2x$ a tedy stacionární body $[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]$. Stejným způsobem dostaneme stacionární body $[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$ a $[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$.

Jelikož
$$f([\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = f(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{2}{6\sqrt{6}}$$
a
$$f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = f(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{6\sqrt{6}},$$
má funkce f na množině M maximum $\frac{2}{6\sqrt{6}}$ v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$ a $[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$ a minimum $-\frac{2}{6\sqrt{6}}$ v bodech $[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\beta;\mathbf{X}) = \alpha^n \beta^{-\alpha n} \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}, \quad X_i > 0, \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\beta;\mathbf{X}) = n\log\alpha - \alpha n \log\beta + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\beta;\mathbf{X}) = -\frac{\alpha n}{\beta} + \alpha\beta^{-\alpha-1}\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial l_n(\beta;\mathbf{X})/\partial\beta = 0$ vzhledem k neznámému parametru β, tj.

$$\hat{\beta} = \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}}{n}}.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\beta;\mathbf{X}) = -\frac{1}{n}\frac{\partial U_n(\beta;\mathbf{X})}{\partial\beta} = -\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n\beta^{\alpha+2}}\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\beta};\mathbf{X}) = \alpha^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}}{n}\right)^{-2/\alpha} > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\beta) = \mathsf{E} I_n(\beta;\mathbf{X}) = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

protože

$$\mathsf{E} X_i^{\alpha} = \int_0^{\infty} \alpha\beta^{-\alpha} x^{2\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \mathrm{d}x = \beta^{\alpha}\int_0^{\infty} y e^{-y}\mathrm{d}y = \beta^{\alpha}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \quad n\to\infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0: \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1: \beta \neq \beta_0$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2\log\frac{L_n(\hat{\beta};\mathbf{X})}{L_n(\beta_0;\mathbf{X})} = 2\alpha n\log\beta_0 + 2\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i}{\beta_0}\right)^{\alpha} - 2n - 2n\log\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha} + 2n\log n$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\gamma)$, kde $\chi_1^2(1-\gamma)$ je $(1-\gamma)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(\beta_0; \mathbf{X})]^2}{nI(\beta_0)} = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\beta_0} \right)^{\alpha} - 1 \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi^2_1(1-\gamma)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\beta} - \beta_0 \right)^2 I\left(\hat{\beta} \right) = n\alpha^2 \left(1 - \beta_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}}{n} \right)^{-1/\alpha} \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi^2_1(1-\gamma)$.

Příklad 4 (25 bodů)

Portfolio je soubor finančních aktiv. Je reprezentováno podíly (alokací, diverzifikací), které investor investuje do jednotlivých aktiv. Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^\mathsf{T}$ tyto podíly, pak při investovaném bohatství ve výši 1 musí platit $x_1 + \dots + x_N = 1$.

(i) Označme váhy v porfoliu x_1 a x_2. Musí platit $x_1 + x_2 = 1$. Z toho vyplývá, že pro očekávaný výnos portfolia platí

$$r_P = 10x_1 + 8x_2 = 10x_1 + 8(1 - x_1) = 2x_1 + 8 = 9,$$

a tedy $x_1 = x_2 = 1/2$.

(ii) Označme váhy v porfoliu x_0, x_1 a x_2. Musí platit $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Očekávaný výnos portfolia je tedy

$$r_P = 6x_0 + 10x_1 + 8x_2 = 6 + 4x_1 + 2x_2.$$

Požadujeme očekávaný výnos portfolia $r_P = 9$, takže z poslední rovnice dostaneme

$$x_2 = \tfrac{1}{2}(3 - 4x_1).$$

Jsou-li výnosy rizikových aktiv R_1 a R_2, je rozptyl výnosu portfolia (po dosazení za x_2)

$$\operatorname{var}(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1^2 \operatorname{var}(R_1) + 2x_1x_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) + x_2^2 \operatorname{var}(R_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \tfrac{9}{2} - 9x_1 + 8x_1^2.$$

To je konvexní funkce, minimum získáme tak, že položíme první derivaci rovnu nule. Derivací posledního výrazu je $16x_1 - 9$, takže $x_1 = 9/16$. Zpětnými substitucemi do předchozích rovnic dostaneme $x_2 = 3/8$, $x_0 = 1/16$.