Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a splňují

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)}, \tag{1}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0) \ \& \ (\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g).)$$

(a) Rozhodněte, zda taková posloupnost $\{x_n\}$ existuje.

(b) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(d) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 2 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M 2y \cos^2(x)\, dxdy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}(x) < y < 1\}$.

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x + 1).$$

(i) Určete definiční obor funkce f.

(ii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.

(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(iv) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.

(v) Určete asymptoty funkce f.

(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujme následující soustavu lineárních rovnic s neznámými $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ a parametrem $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 4x + y - z + 3w &= 0 \\ (a+1)x + 3y + 2z + (a+1)w &= 1 \\ -x + 2y + 2z - w &= 0 \\ ax + 2y + 2z + aw &= 0 \end{aligned}$$

- Spočítejte determinant matice soustavy.
- Rozhodněte, pro která a má daná soustava právě jedno řešení.
- Pro tato a vypočítejte neznámou z pomocí Cramerova pravidla.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta B

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

- Nalezněte posloupnost b_n splňující následující nerovnost:

$$[\log(n)]! \leq e^{b_n}.$$

- Spočtěte limitu posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna, kde

$$a_n = \frac{[\log(n)]!}{(3+\sin(n))^n}\cos(n).$$

Symbol $[x]$ značí dolní celou část x.

Příklad 2 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, u, v] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2(u+v)y &= 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

je v okolí bodu $[1, 2, 0, 0]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $[g, h](x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($[g, h](x, y) = [u, v]$) definované na jistém okolí bodu $[1, 2]$, pro kterou je $g(1, 2) = h(1, 2) = 0$.

- Spočtěte parciální derivaci funkce g podle y v bodě $[1, 2]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Příklad 3 (25 bodů)

Spočítejte integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{4 + 9\cos^2 x} dx.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažujme vektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a+2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} b \\ 3a-b \\ 2b+4 \\ 2b+9 \end{pmatrix}.$$

(i) Najděte všechny dvojice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pro které je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineárně závislá.

(ii) V případech kdy to jde, vyjádřete každý z vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jako lineární kombinaci ostatních dvou.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

(a) Posloupnost $\operatorname{arccotg}(n)$ splňuje

$$\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g). \tag{1}$$

pro $\epsilon = g$.

(b) Z (1), z kladnosti funkce $\operatorname{arccotg}(x)$ a z $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Použijeme Taylorův polynom funkce $\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ a substituci $\sin(x) = y$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\sin(y)) - y}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^3} = -\frac{1}{3}.$$

V první rovnosti jsme využili větu o limitě složené funkce, prostotu funkce $\sin(x)$ na okolí 0 (např.$(-1, 1)$) a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.

(d) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (b) a (c) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\frac{1}{3}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Protože $\mathrm{tg}(x) < 1$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ a $\mathrm{tg}(x) \geq 1$ pro $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, díky Fubiniho větě máme

$$\begin{aligned}\int_M 2y\cos^2(x)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\mathrm{tg}(x)}^1 2y\cos^2(x)\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y^2]_{\mathrm{tg}(x)}^1 \cos^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) - \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 3 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je
$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} = \infty$.

(iii) Snadno vypočteme
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{x^2}.$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$.
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

Funkce f má lokální maximum v bodě $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ a lokální minimum v bodě $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

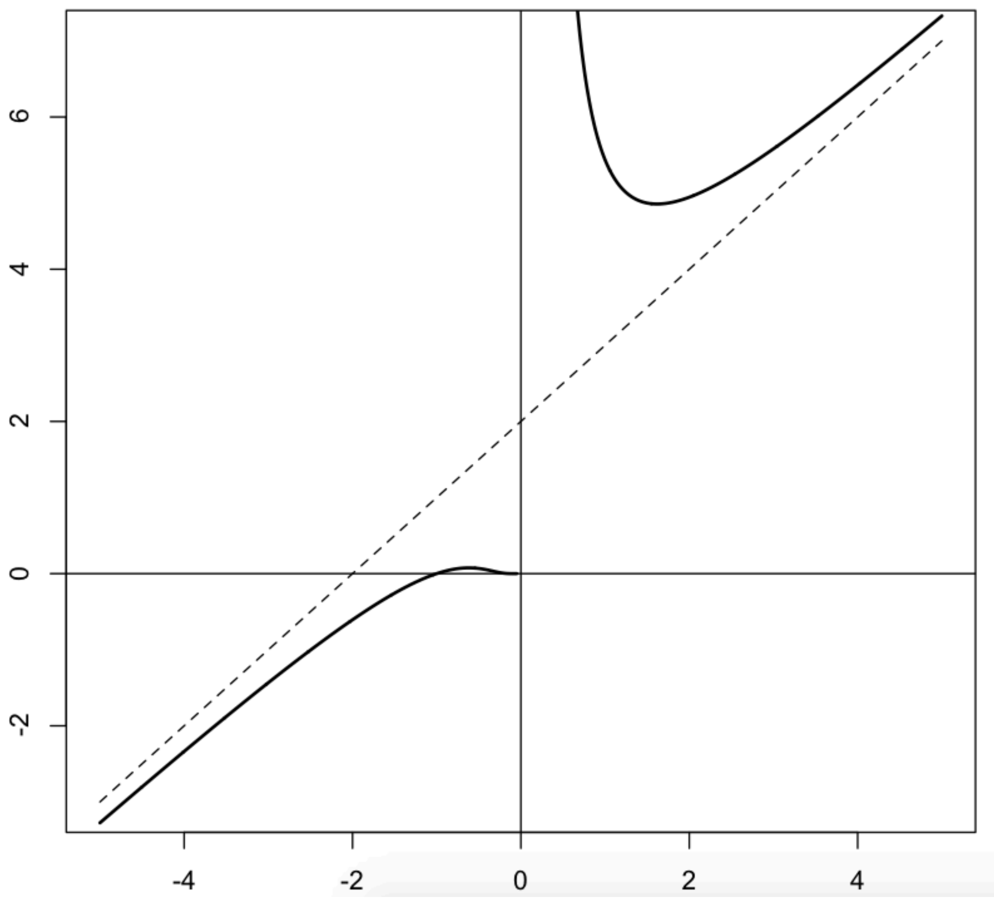
(iv) Vypočteme druhou derivaci
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x + 1}{x^4}.$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{3})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{1}{3}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(v) Funkce f má v bodech $-\infty$ a ∞ asymptotu $v(x) = x + 2$.

(vi) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:


-4
-2
0
2
4
-2
0
2
4
6

Příklad 4 (25 bodů)

- Determinant počítáme užitím elementárních úprav a rozvoje.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 \\ a+1 & 3 & 2 & a+1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ a & 2 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2(a+1)$$

  Determinant matice soustavy je $2(a+1)$.

- Soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když má matice soustavy nenulový determinant, tj. právě tehdy, když $a \neq -1$.

- Spočítáme determinant matice vzniklé nahrazením třetího sloupce sloupcem pravých stran.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ a+1 & 3 & 1 & a+1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ a & 2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -2(a+1)$$

  Podle Cramerova pravidla máme

$$z = \frac{-2(a+1)}{2(a+1)} = -1.$$

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2018

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

- Je zřejmé, že $k! \leq k^k$. Pak
$$[\log(n)]! \leq (\log(n))^{\log(n)} = e^{\log(\log(n))\log(n)}$$
a tedy $b_n = \log(\log(n))\log(n)$ splňuje požadovanou nerovnost.

- Budeme používat větu o dvou policajtech. Využijeme následující odhady a výpočty:
$$2 \leq 3 + \sin(n),$$
$$2^n \leq (3 + \sin(n))^n.$$
Tedy
$$0 \leq \frac{[\log(n)]!}{(3+\sin(n))^n} \leq \frac{e^{\log(\log(n))\log(n)}}{2^n} = e^{\log(\log(n))\log(n) - n\log(2)}.$$
Víme, že
$$\lim_{n\to\infty} \log(\log(n))\log(n) - n\log(2) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$
Z věty o dvou policajtech, Heineho věty a věty o limitě složené funkce a výše zmíněných odhadů a výpočtů plyne, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\log(n)]!}{(3+\sin(n))^n} = 0.$$
Protože $\cos(n)$ je omezená posloupnost, je
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$[G,H](x,y,u,v)=\left(xe^{u+v}+2(u+v)y-1, ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x\right)=[0,0]$$

a bod $[1,2,0,0]$.

- Funkce G a $ye^{u-v}-2x$ jsou triviálně spojitě diferencovatelné na $\mathbb{R}^4$. Funkce $-\frac{u}{1+v}$ je spojitě diferencovatelná všude kromě bodů, kde $v=-1$. Tedy $[G,H]\in C^1(B([1,2,0,0],1))$.
- $[G,H](1,2,0,0)=[0,0]$,
- $$\begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix}(1,2,0,0)=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-15\neq 0,$$

  tedy g a h existují a jsou C^1.

(2) Vektor $\begin{pmatrix} g_y \\ h_y \end{pmatrix}(1,2)$ je řešením soustavy lineárních rovnic s pravou stranou

$$\left(\begin{array}{cc|c} G_u & G_v & -G_y \\ H_u & H_v & -H_y \end{array}\right)(1,2,0,0)=\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Tedy $g_y=-\frac{1}{3}$.

Příklad 3 (25 bodů)

Integrační obor je kompaktní, integrand je na něm spojitý, integrál tudíž existuje. Přepišme ho do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{4+9\cos^2 x}dx,$$

který nás vybízí k substituci

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi'(x) = -\sin x.$$

Tato substituce je korektní, neboť φ je zřejmě spojitě diferencovatelná a prostá na $[0, \pi/2]$. Integrál je tedy roven

$$\begin{aligned}
&\int_1^0 \frac{1-y^2}{4+9y^2}(-1)dy = -\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy + \int_1^0 \frac{y^2}{4+9y^2}dy = \\
&= -\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy + \int_1^0 \left(\frac{1}{9}\cdot\frac{4+9y^2}{4+9y^2} - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4+9y^2}\right)dy.
\end{aligned}$$

Spočítejme si zvlášť dvakrát se objevující integrál:

$$\int_1^0 \frac{1}{4+9y^2}dy = \frac{1}{4}\int_1^0 \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}y\right)^2}dy = \frac{1}{4}\int_{3/2}^0 \frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{2}{3}dz = -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2},$$

kde jsou použili snadno odůvodnitelnou substituci $z = \frac{3}{2}x$. Celkovým výsledkem tedy je

$$-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\cdot(-1-\frac{4}{9}) + \frac{1}{9}\,[y]_1^0 = \frac{13}{54}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{1}{9}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

K vyřešení obou úkolů nejprve upravíme rovnost $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$. Pro pevné parametry a, b je tato rovnost ekvivalentní soustavě lineárních rovnic, kterou upravíme elementárními řádkovými úpravami.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 0 \\ -1 & a+2 & 3a-b & 0 \\ 2 & -3 & 2b+4 & 0 \\ 1 & 1 & 2b+9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 0 \\ 0 & a & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & b+9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & 0 \end{array}\right)$$

(i) Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je lineárně závislá právě tehdy, když má rovnice $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ netriviální řešení $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Z upravené soustavy vidíme, že to nastane právě tehdy, když $a = 0$ a $b = 3$. Jediná dvojice, pro které je daná posloupnost lineárně závislá je tedy $(a, b) = (0, 3)$.

(ii) Je-li jeden z daných vektorů lineární kombinací ostatních, pak je nutně posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineárně závislá. Hledané vyjádření tedy neexistuje, pokud $(a, b) \neq (0, 3)$. V případě $(a, b) = (0, 3)$ je jedním z řešení soustavy trojice $(x, y, z) = (-11, -4, 1)$, čili platí $-11\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$. Z toho dostáváme

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{4}{11}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{11}\mathbf{v}_3, \ \mathbf{v}_2 = -\frac{11}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_3, \ \mathbf{v}_3 = 11\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2.$$