Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUI

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky alespoň 3 znaky, která začínají a končí stejným znakem. Například slova 101, 0100, 111111 automat přijme, zatímco slova 00, 110, 0010001 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program AAA;
var a, b, k:  integer;
begin
  a := 0;
  b := 0;
  k := 1;
  while b <= 100 do
     begin
     while a <= b do a := a + k;
     b := a;
     k := k + 1;
     end;
  writeln(b)
end.
```

```
main()  /* AAA */
{
  int a, b, k;
  a = 0;
  b = 0;
  k = 1;
  while (b <= 100)
  {
     while (a <= b) a += k;
     b = a;
     k++;
  }
  printf("%d", b);
}
```

a) Určete, kolikrát se vykoná tělo vnějšího while-cyklu.

b) Určete výslednou hodnotu proměnné `b`.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a splňují

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)}, \tag{1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0) \ \&\ (\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g).)$$

(a) Rozhodněte, zda taková posloupnost $\{x_n\}$ existuje.

(b) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(d) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 4 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+1).$$

(i) Určete definiční obor funkce f.

(ii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.

(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(iv) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.

(v) Určete asymptoty funkce f.

(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2018

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MMUI

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Pomocí stavů automatu si musíme evidovat první přečtený znak a dosavadní délku vstupního slova. Ve stavech B, C byl přečten jeden znak, ve stavech D, E byly přečteny dva znaky nebo je poslední přečtený znak rozdílný od prvního, ve stavech F, G byly přečteny alespoň tři znaky a poslední z nich je shodný s prvním. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\rightarrow A$	B	C	A = počáteční stav
B	D	D	B = začíná 0, délka 1
C	E	E	C = začíná 1, délka 1
D	F	D	D = začíná 0, (délka 2 nebo končí 1)
E	E	G	E = začíná 1, (délka 2 nebo končí 0)
$\leftarrow F$	F	D	F = začíná 0, délka aspoň 3, končí 0
$\leftarrow G$	E	G	G = začíná 1, délka aspoň 3, končí 1

Příklad 2 (25 bodů)

Hodnota proměnné k se zvyšuje vždy o 1, takže určuje pořadové číslo iterace vnějšího while-cyklu. Na začátku každé iterace tohoto cyklu platí $a = b$, a proto se vnitřní while-cyklus vykoná vždy jenom jednou a hodnota proměnné a se v něm zvýší o k. V proměnné a se tedy počítá součet $1+2+3+\cdots+k$. Po k-té iteraci mají obě proměnné a, b hodnotu $k.(k+1)/2$. Zajímá nás, kdy tato hodnota poprvé přesáhne 100. Příslušné k získáme buď řešením kvadratické rovnice, nebo jednoduše odhadem. Zjistíme, že pro $k = 13$ bude $b = 91$, pro $k = 14$ bude $b = 105$.

a) 14

b) 105

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Posloupnost arccotg(n) splňuje

$$\forall g \in \mathbb{N}, \exists \epsilon \in \mathbb{N}, \forall \delta \in \mathbb{N} : \delta > \epsilon \Rightarrow |x_\delta| < \operatorname{arccotg}(g). \tag{1}$$

pro $\epsilon = g$.

(b) Z (1), z kladnosti funkce arccotg(x) a z $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Použijeme Taylorův polynom funkce $\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ a substituci $\sin(x) = y$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x))) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\sin(y)) - y}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^3} = -\frac{1}{3}.$$

V první rovnosti jsme využili větu o limitě složené funkce, prostotu funkce $\sin(x)$ na okolí 0 (např.$(-1,1)$) a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.

(d) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (b) a (c) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\frac{1}{3}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} = \infty$.

(iii) Snadno vypočteme

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{x^2}.$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$.
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

Funkce f má lokální maximum v bodě $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ a lokální minimum v bodě $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

(iv) Vypočteme druhou derivaci

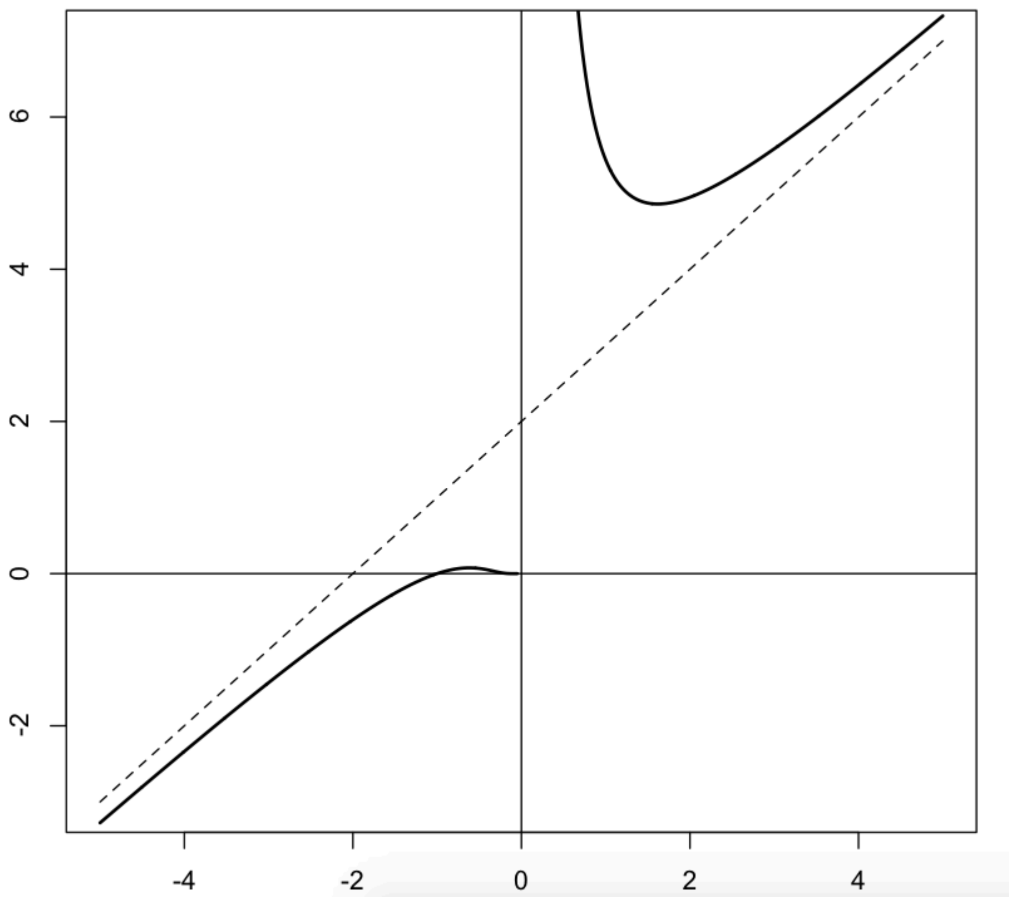
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x + 1}{x^4}.$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{3})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{1}{3}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(v) Funkce f má v bodech $-\infty$ a ∞ asymptotu $v(x) = x + 2$.

(vi) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



6
4
2
0
-2
-4
-2
0
2
4