Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obor: MMUD

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \log(n+k),$$

$$y_n = \log\left(\sum_{k=1}^{n} k^k\right).$$

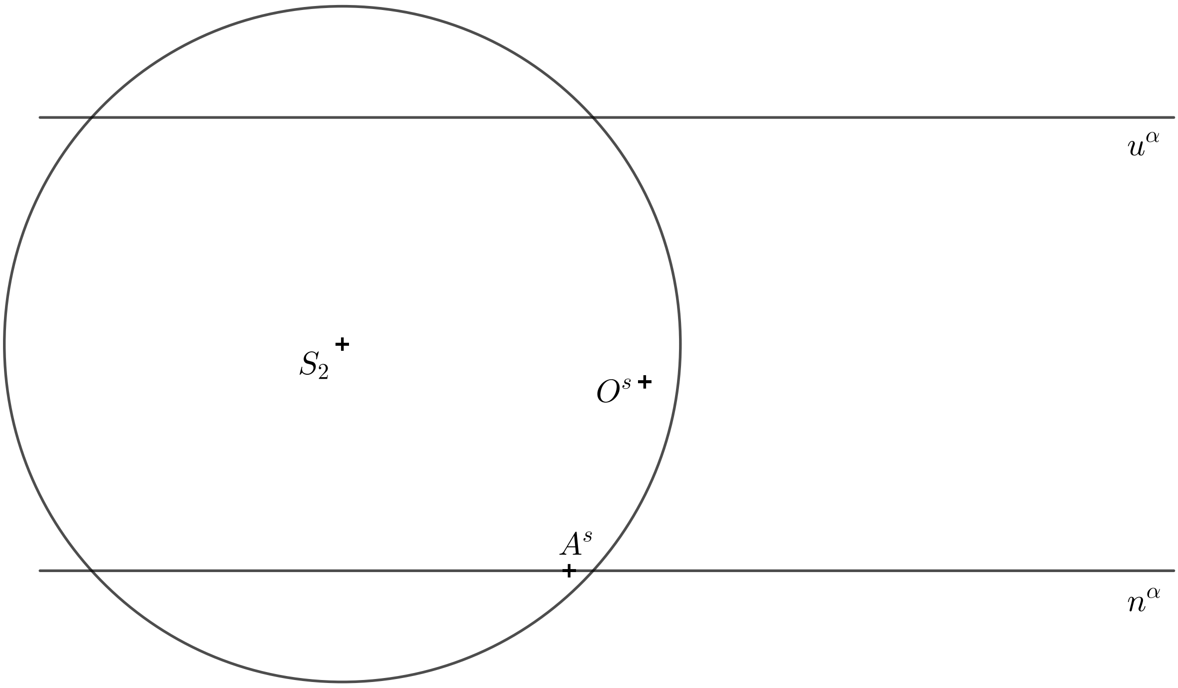
Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.
Vysvětlete své řešení.

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1, y \ge (x-1)^2\}$. Spočtěte

$$\int_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Mongeovo promítání: $O = [8; 15]$, levotočivá soustava souřadnic
Rotační kuželová plocha je dána svým vrcholem V a řídicí kružnicí $k(S, r = 4{,}5)$ v půdorysně. Sestrojte řez kuželové plochy rovinou α, procházející body P, Q, R. Určete přesně body řezu na obrysech, sestrojte osy a vrcholy průmětů řezu, stanovte viditelnost křivky řezu v půdorysu i nárysu. (Rýsujte na nový list papíru.)
V=[0; 6; 9], S=[0; 6; 0], P=[1; 0; 7], Q=[-3; 6; 7], R=[6; 6; 0]

Úloha 4 (25 bodů)
Středové promítání: S_2 – pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d – distanční kružnice.
Sestrojte obraz pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ s podstavou $ABCDEF$ v rovině α, znáte-li středové průměty vrcholu A a středu podstavy O. Výška jehlanu je 7 cm.


u^α
S_2
O^s
A^s
n^α

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obor: MMUD

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť

$$\begin{aligned} a_n &= n\log n, \\ b_n &= n\log(2n), \\ c_n &= \log(n^n), \\ d_n &= \log(n^{n+1}). \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} 0 \le a_n \le x_n \le b_n, \\ 0 \le c_n \le y_n \le d_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{a_n}{d_n} \le \frac{x_n}{y_n} \le \frac{b_n}{c_n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

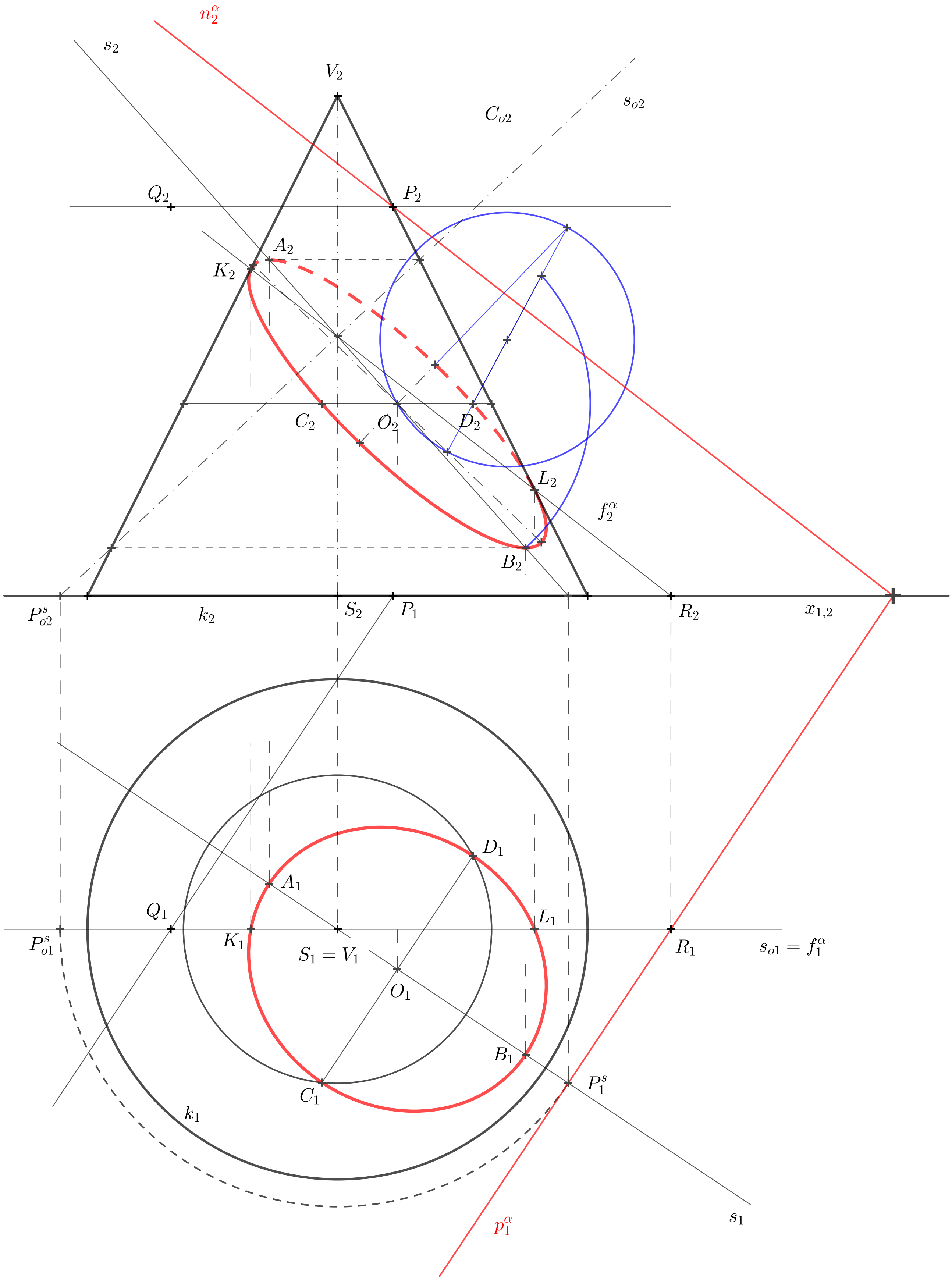
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2 + \log n}{\log n} = 1.$$

Použijeme větu o dvou strážnících a obdržíme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Úloha 2 (25 bodů)
Snadno zjistíme, že pro $(x, y) \in M$ je $x \in [0, 1]$ a $y \le \sqrt{1-x^2}$. Z Fubiniovy věty dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x+2y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + y^2 \right]_{y=(x-1)^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) - x(x-1)^2 - (x-1)^4 \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{43}{60}. \end{aligned}$$

Příklad 3 (25 bodů)



Příklad 4 (25 bodů)