

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2022, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď -2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
Bodů:		10		0		2		2		

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Mějme funkci $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$. (Symbol „ln“ značí přirozený logaritmus.) Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$e^{4 \ln(\sin x)} = \sin^2 |x|$$

v oboru reálných čísel. (Symbol „ln“ značí přirozený logaritmus.) Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.

3. Necht' M je množina všech reálných řešení nerovnice $4x - x^2 \geq 3$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina M obsahuje výhradně kladná čísla.
- (b) Všechna řešení jsou záporná.
- (c) Všechna řešení jsou větší než $\sqrt{2}$.
- (d) M je obsažena v intervalu $\left\langle \frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{22}{7} \right\rangle$.
- (e) $M \cap \langle 1, \sqrt{3} \rangle \neq \emptyset$.

4. Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 210. Součet následujících deseti členů této posloupnosti je 610. Určete první člen posloupnosti a_1 a diferenci d a rozhodněte, zda platí:

- (a) $d = 2$
- (b) $a_1 = 12$
- (c) $a_{11} = 32$
- (d) $a_{20} = 80$
- (e) Součet 8. až 13. členu posloupnosti je 246.

5. Řešte nerovnici s neznámou x z \mathbb{R} :

$$\frac{|x + 3|}{x + 1} \geq 2.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina všech řešení nerovnice je polouzavřený interval.
- (b) Řešením nerovnice je $x = \sqrt{2}$.
- (c) Řešením nerovnice je $x = 1/\pi$.
- (d) Řešením nerovnice je $x = -1/\pi$.
- (e) Řešením nerovnice je $x = -\sqrt{5}$.

6. V kartézské soustavě souřadnic jsou zadány přímky p a q parametrickými předpisy:

$$p = \{[1 + 2t, 2 - 3t] : t \in \mathbb{R}\}$$

$$q = \{[-2 + 6t, 5 + 4t] : t \in \mathbb{R}\}$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Přímka p protíná osu x v bodě $11/3$.
- (b) Přímka q protíná osu y v bodě $19/3$.
- (c) Přímka p prochází bodem $[5, -4]$.
- (d) Přímka q prochází bodem $[6, 4]$.
- (e) Přímky p a q jsou na sebe kolmé.

7. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$|e^x - 1| = 6e^{-|x|}$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina M je tříprvková.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (c) Množina $M \cap (0, \infty)$ je jednoprvková.
- (d) $M \cap (-\infty, 0) = \emptyset$.
- (e) Množina M je dvouprvková.

8. Parabola p_1 a přímka p_2 jsou zadány předpisy:

$$p_1 : y = 2x^2 + x - 1$$

$$p_2 : y = -2x + 1$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Přímka protíná parabolu ve dvou bodech.
- (b) Všechny průsečíky přímky a paraboly mají souřadnici $x > 0$.
- (c) Všechny průsečíky přímky a paraboly mají souřadnici $y > 0$.
- (d) Všechny průsečíky přímky a paraboly mají souřadnici y celé číslo.
- (e) Minimum paraboly p_1 leží v bodě $[-1/2, -1]$.

9. Trojúhelník ABC je zadán následujícími údaji:

- Strana a má délku 10 cm.
- Strana c má délku 21 cm.
- Pata výšky v_c leží na straně c ve vzdálenosti 15 cm od vrcholu A .

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Strana b má délku 18 cm.
- (b) Výška v_c má délku 8 cm.
- (c) Těžnice t_a má délku $2\sqrt{85}$ cm.
- (d) Těžnice t_c je delší než 9 cm.
- (e) Trojúhelník ABC je ostroúhlý.

10. Na kostce je každá plocha obarvená jinou barvou. Víte, že červená sousedí se zelenou, zelená se žlutou, žlutá s modrou, modrá s bílou. Poslední stěna je fialová. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud červená sousedí se žlutou, potom zelená sousedí s modrou.
- (b) Pokud zelená je proti modré, potom žlutá je proti bílé.
- (c) Červená může být proti fialové, pokud je zelená proti modré.
- (d) Současně může být zelená proti modré a žlutá sousedit s bílou.
- (e) Zelená může sousedit s libovolnou barvou.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2022, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď -2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (-2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> (0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (-2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> (-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> (+2)
Bodů:		10		0		2		2	

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Mějme funkci $f(x) = |\sin |x||$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{\sin x}$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.

3. Necht' M je množina všech reálných řešení nerovnice $2x - x^2 \geq 2 - x$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Všechna řešení jsou nezáporná.
- (b) Množina M obsahuje nějaká záporná čísla.
- (c) Všechna řešení jsou větší než $\sqrt{2}/2$.
- (d) M je obsažena v intervalu $\langle -1, \sqrt{2} \rangle$.
- (e) $M \cap \langle \frac{\pi}{2}, \sqrt[3]{8} \rangle \neq \emptyset$.

4. Deset čísel a_1, a_2, \dots, a_{10} tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 3$. První, třetí a sedmé číslo tvoří tři následující členy geometrické posloupnosti. Rozhodněte, zda platí:

- (a) $a_2 = 6$
- (b) $a_5 = 18$
- (c) $a_7 = 26$
- (d) $a_1 + a_{10} = 39$
- (e) $a_9/a_4 = 2$

5. Řešte nerovnici s neznámou x z \mathbb{R} :

$$x^2 - 3|x + 1| - x \leq 0.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina všech řešení nerovnice je uzavřený interval.
- (b) Řešením nerovnice je i $x = \pi$.
- (c) Řešením nerovnice je i $x = -1/\pi$.
- (d) Řešením nerovnice je i $x = 2 - \sqrt{7}$.
- (e) Součin nejmenšího a největšího řešení nerovnice je celé číslo.

6. V kartézské soustavě souřadnic jsou zadány úsečky p a q parametrickými předpisy:

$$p = \{[1 + 2t, 2 - t] : t \in \langle -2, 1 \rangle\}$$

$$q = \{[-1 + t, 2t] : t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Úsečka p prochází bodem $[-1, 3]$.
- (b) Úsečka q prochází bodem $[1, 4]$.
- (c) Úsečka p protíná osu x i osu y .
- (d) Úsečky p a q se protínají v bodě $[1/4, 9/4]$.
- (e) Úsečky p a q jsou na sebe kolmé.

7. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$\ln x + |\ln x| = \ln(4x - 3)$$

v oboru reálných čísel. (Symbol „ \ln “ značí přirozený logaritmus.) Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina M je tříprvková.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (c) Množina $M \cap (1, \infty)$ je jednoprvková.
- (d) $M \cap (-\infty, 0) = \emptyset$.
- (e) Množina M je dvouprvková.

8. Dvě paraboly p_1 a p_2 jsou zadány předpisy:

$$p_1 : y = 3x^2 + x - 1$$

$$p_2 : y = x^2 - 3x + 1$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Paraboly se protínají ve dvou různých bodech.
- (b) Všechny průsečíky parabol mají souřadnici $x > 0$.
- (c) Všechny průsečíky parabol mají souřadnici $y > 0$.
- (d) Všechny průsečíky parabol mají souřadnici x iracionální číslo.
- (e) Minimum paraboly p_2 leží v bodě $[3/2, -5/4]$.

9. Trojúhelník ABC je zadán následujícími údaji:

- Těžnice t_a má délku 4 cm.
- Úhel, který svírá těžnice t_a se stranou c , má velikost 30° a je stejný jako úhel β .

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Strana a má délku 8 cm.
- (b) Strana b má délku 5 cm.
- (c) Strana c je delší než 7 cm.
- (d) Trojúhelník ABC je pravouhlý.
- (e) Plocha trojúhelníka ABC je $8\sqrt{3}$ cm².

10. Na kostce je každá plocha obarvená jinou barvou. Víte, že červená sousedí se zelenou a modrou, červená je proti žluté a modrá sousedí s bílou. Poslední stěna je fialová. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud zelená sousedí s modrou, potom bílá je proti fialové.
- (b) Červená sousedí s bílou.
- (c) Pokud je zelená proti bílé, potom je modrá proti fialové.
- (d) Fialová sousedí s modrou nebo zelenou.
- (e) Pokud zelená sousedí s modrou, potom žlutá sousedí s bílou.

Řešení A

- (1) N A N A A
- (2) N N A N N
- (3) A N N A A
- (4) N N N N A
- (5) A N A A N
- (6) N A A N A
- (7) N N A N A
- (8) A N N A N
- (9) N A A A N
- (10) N N A A A

Řešení B

- (1) A N A N N
- (2) N N A N A
- (3) A N A N A
- (4) N A N A A
- (5) A A A A A
- (6) A N N N A
- (7) N N A A A
- (8) A N N A A
- (9) A N N A A
- (10) N A A A A