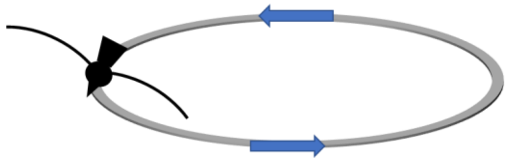
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2022
Oblast vzdělávání Fyzika, kromě Učitelství fyziky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství matematiky pro střední školy (FMUPN), Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

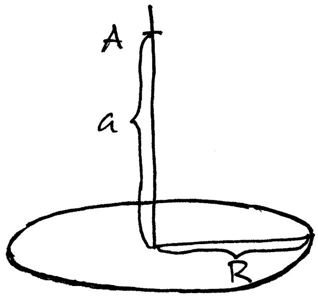
Racek plachtí po vodorovné kruhové trajektorii. Úhel sklonu jeho křídel vzhledem k vodorovné rovině je 25 stupňů. Pták obletí celou kružnici za 13 s. Určete



a) rychlost jeho letu a
b) poloměr jeho trajektorie.

Příklad 2 (25 bodů)

Kruhový disk o zanedbatelné tloušťce a poloměru R je rovnoměrně nabit nábojem s plošnou hustotou $\sigma > 0$.



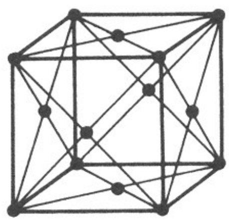
a) Vypočtěte elektrostatický potenciál φ v bodě A ležícím na ose disku ve vzdálenosti $a > 0$ od roviny disku
b) Vypočtěte intenzitu elektrostatického pole $\vec{E}$ v bodě A a určete její směr.
c) Vypočtěte velikost a směr síly $\vec{F}$ působí na náboj o velikosti $Q > 0$, který je umístěn v bodě A;
d) Vypočtěte práci, kterou je potřeba vykonat k přenesení náboje Q z bodu A na povrch disku.
U částí a) a b) je výhodné využít symetrie problému a řešit v polárních souřadnicích.

Příklad 3 (25 bodů)

Slunoměr je tvořen skleněnou koulí o průměru $d = 10$ cm. Sklo má index lomu $n_2 = 1{,}5$ a okolní vzduch $n_1 = 1$. Řešte i číselně.
a) Vypočtěte, do jaké vzdálenosti za koulí se zobrazí Slunce po zobrazení oběma lámavými plochami.
b) Spočtěte velikost obrazu Slunce po zobrazení oběma lámavými plochami. Vzdálenost Slunce je 150×10^9 m a jeho průměr $1{,}4 \times 10^9$ m.

Příklad 4 (25 bodů)

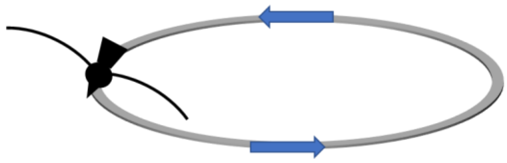
Neznámá látka krystalizuje v kubické plošně centrované mřížce s mřížovým parametrem $a = 7{,}34$ Å. Její hustota byla stanovena na $\rho = 3550$ kg.m^{-3}. (a^3 uvažujte = 400 Å^3)
a) Jedná se o sloučeninu NbC nebo CoO nebo RbI?



b) Mikroskopickou strukturu lze stanovit pomocí rozptylu záření (např. neutronů), jehož vlnová délka je srovnatelná s meziatomovými vzdálenostmi. Na jakou rychlost a energii je třeba naladit neutron, aby jeho vlnová délka byla rovna vzdálenosti nejbližších sousedů (nejbližších atomů stejného typu)?
(Užitečné konstanty:
Ar : Nb ... 92,9 ; C ... 12,0 ; Co ... 58,9 ; O ... 16,0 ; Rb ... 85,5 ; I ... 126,9
$m_u \cong m_n = 1{,}66 \,.\, 10^{-27}$ kg
$h = 6{,}6 \,.\, 10^{-34}$ J.s
Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)

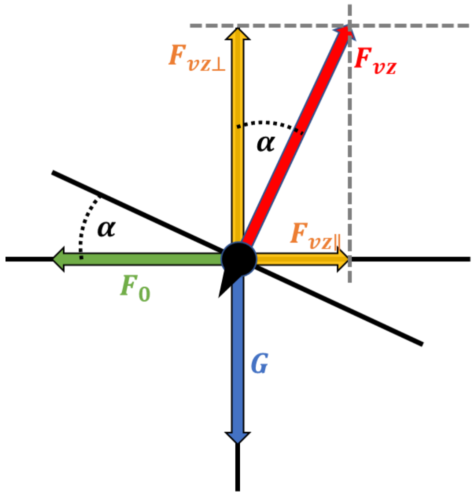
Příklad 1 (25 bodů)

Racek plachtí po vodorovné kruhové trajektorii. Úhel sklonu jeho křídel vzhledem k vodorovné rovině je 25 stupňů. Pták obletí celou kružnici za 13 s. Určete
a) rychlost jeho letu a
b) poloměr jeho trajektorie.



Řešení:

Na racka působí tíhová síla **G**. Dále na něj působí vztlaková síla $\mathbf{F_{vz}}$, která je kolmá na rovinu jeho křídel. Aby racek nespadl, musí se velikost složky vztlakové síly kolmé k horizontu rovnat velikosti tíhové síly působící na racka. Aby racek vykonával kruhový pohyb, musí se též velikost složky vztlakové síly rovnoběžné s horizontem rovnat velikosti odstředivé síly indukované kruhovým pohybem. Schematicky jsou obě podmínky znázorněny na obrázku.



Kolmou složku vztlakové síly vyjádříme jako

(1) $F_{vz\perp} = F_{vz} \cdot \cos(\alpha) = G$ **(5 bodů)**

Rovnoběžná složka vztlakové síly má předpis

(2) $$F_{vz\parallel} = F_{vz} \cdot \sin(\alpha) = F_0$$ **(5 bodů)**

Porovnáním dostaneme podmínku rovnosti sil

(3) $$\frac{G}{\cos(\alpha)} = \frac{F_0}{\sin(\alpha)}$$

v upravené formě

(4) $$G \cdot \tan(\alpha) = F_0$$

Dosazením za tíhovou sílu a odstředivou sílu dostaneme

(5) $$mg \cdot \tan(\alpha) = \frac{mv^2}{R}$$ **(5 bodů)**

Pokud známe čas, za který pták obletí kružnici, můžeme určit frekvenci obletu a úhlovou frekvenci pomocí

(6) $$f = \frac{1}{13}[Hz]$$

(7) $$\omega = 2\pi f$$

Za využití vztahu pro úhlovou rychlost a rychlost

(8) $$v = \omega R$$ **(5 bodů)**

Pro výpočet rychlosti tedy musíme znát poloměr trajektorie letu a její hodnotu získáme později. Dosazením (8) do (5) získáme podmínku pro poloměr R

(9) $$g \cdot \tan(\alpha) = \omega^2 R$$

Z čeho vypočítáme poloměr

(10) $$R = \frac{g}{\omega^2}\tan(\alpha) \approx 19.96_{při\ g=10} \wedge 19.58_{při\ g=9.81} \approx 20$$ **(5 bodů)**

Zpětně můžeme vypočítat rychlost pomocí (8)

$$v = 2\pi f R \approx 9.64_{g=10} \wedge 9.46_{g=9.81} \approx 9.5$$

Příklad 2 (25 bodů)

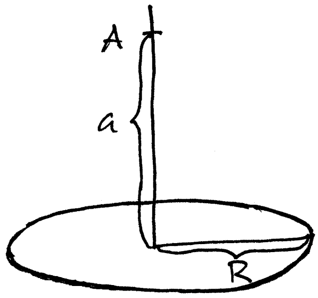
Kruhový disk o zanedbatelné tloušťce a poloměru R je rovnoměrně nabit nábojem s plošnou hustotou $\sigma > 0$.

a) Vypočtěte elektrostatický potenciál φ v bodě A ležícím na ose disku ve vzdálenosti $a > 0$ od roviny disku

b) Vypočtěte intenzitu elektrostatického pole $\vec{E}$ v bodě A a určete její směr.

c) Vypočtěte velikost a směr síly $\vec{F}$ působí na náboj o velikosti $Q > 0$, který je umístěn v bodě A;

d) Vypočtěte práci, kterou je potřeba vykonat k přenesení náboje Q z bodu A na povrch disku.



U částí a) a b) je výhodné využít symetrie problému a řešit v polárních souřadnicích.

Řešení:

a) Potenciál vypočteme z výrazu pro plošné rozložení náboje

$$\varphi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma}{r}\,dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\sigma}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$ **(3 body)**

kde ρ a θ jsou polární souřadnice v rovině disku a r označuje velikost vektoru vedoucího z bodu na ploše kruhového disku do bodu A.

Výpočet vede na výraz, který lze vyřešit pomocí substituce $a^2+\rho^2 = x$; $2\rho\,d\rho = dx$

$$\varphi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\sigma}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R} \frac{\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\,d\rho = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{a^2}^{a^2+R^2} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+R^2}-a\right)$$

(5 bodů)

b) Intenzitu můžeme spočíst buď z potenciálu pomocí vztahy $E = -\frac{d\varphi}{dz}$ nebo z definice (viz použitý postup níže). V obou případech využijeme symetrie problému. Z té vyplývá, že intenzita bude mít nenulovou složku pouze ve směru osy disku, kterou můžeme ztotožnit např. s osou z a její kladný směr bude od disku. **(2 body)**

$$E_z(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma r_z}{r^3}\,dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma a}{r^3}\,dS = \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{1}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$ **(5 bodů)**

Výpočet vede na výraz, který lze opět vyřešit pomocí substituce $a^2+\rho^2 = x$; $2\rho\,d\rho = dx$

$$E_z(a) = \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{1}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_0^{R} \frac{\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\rho = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_{a^2}^{a^2+R^2} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

(5 bodů)

c) Na náboj Q působí síla ve směru osy z jejíž kladný směr je od disku. Její směr a velikost určíme ze vztahu

$$\vec{F} = Q\vec{E} = QE_z = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$ **(2 body)**

d) Práci spočteme ze vztahu $W = -Q[\varphi(a)-\varphi(0)] = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R+a-\sqrt{a^2+R^2}\right)$ **(3 body)**

Příklad 3 (25 bodů)
Slunoměr je tvořen skleněnou koulí o průměru d = 10 cm. Sklo má index lomu n_2 = 1,5 a okolní vzduch n_1 = 1. Řešte i číselně.
a) Vypočtěte, do jaké vzdálenosti za koulí se zobrazí Slunce po zobrazení oběma lámavými plochami.
b) Spočtěte velikost obrazu Slunce po zobrazení oběma lámavými plochami. Vzdálenost Slunce je 150×10^9 m a jeho průměr $1{,}4 \times 10^9$ m.

Řešení:
a) Zobrazovací rovnice pro kulové rozhraní je

$$n_1\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{R_1}\right)=n_2\left(\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{R_1}\right). \qquad \textbf{(4 body)}$$

Po dosazení $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$, $R_1 = 5$ cm, $s_1 >> R_1$ dostaneme

$$s'_1=\frac{n_2R_1}{n_2-1}=15\ cm. \qquad \textbf{(3 body)}$$

Vzdálenost předmětu (tj. obrazu po zobrazení první lámavou plochou) pro zobrazení druhým rozhraním je

$$s_2=-d+s'_1=5\ cm. \qquad \textbf{(3 body)}$$

Provedeme zobrazení druhým rozhraním

$$n_2\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{R_2}\right)=n_1\left(\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{R_2}\right)$$

a dostaneme

$$s'_2=\frac{R_2s_2}{n_2R_2-(n_2-1)s_2}. \qquad \textbf{(2 body)}$$

Numericky ($n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$ a $R_2 = -5$ cm)

$$s'_2=\frac{R_2s_2}{n_2R_2-(n_2-1)s_2}=2{,}5\ cm. \qquad \textbf{(3 body)}$$

Slunce se zobrazí 2,5 cm za koulí.
b) Zvětšení první lámavou plochou je dáno

$$z_1=\frac{y'_1}{y_1}=\frac{n_1}{n_2}\frac{s'_1}{s_1}. \qquad \textbf{(4 body)}$$

Zvětšení druhou lámavou plochou je

$$z_2=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{n_2}{n_1}\frac{s'_2}{s_2}.$$

Celkové zvětšení je pak $z = z_1 . z_2$. Výsledná velikost obrazu slunce je tak rovna

$$y'_2=y_1z_1z_2=y_1\frac{s'_1}{s_1}\frac{s'_2}{s_2} \qquad \textbf{(3 body)}$$

Numericky

$$y'_2=1{,}4.10^9\,\frac{15.10^{-2}\,.2{,}5.10^{-2}}{150.10^9\,.5.10^{-2}}=7.10^{-4}\ m=0{,}7\ mm. \qquad \textbf{(3 body)}$$

Obraz Slunce má velikost 0,7 mm.

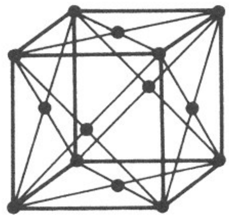
Pozn. Znaménka ve vzorcích a u dosazovaných hodnot se mohou lišit při užití jiné konvence.

Příklad 4 (25 bodů)

Neznámá látka krystalizuje v kubické plošně centrované mřížce s mřížovým parametrem a = 7,34 Å. Její hustota byla stanovena na ρ = 3550 kg.m^{-3}. (a^3 uvažujte = 400 Å^3)

a) Jedná se o sloučeninu NbC nebo CoO nebo RbI?

b) Mikroskopickou strukturu lze stanovit pomocí rozptylu záření (např. neutronů), jehož vlnová délka je srovnatelná s meziatomovými vzdálenostmi. Na jakou rychlost a energii je třeba naladit neutron, aby jeho vlnová délka byla rovna vzdálenosti nejbližších sousedů (nejbližších atomů stejného typu)?



(Užitečné konstanty:

Ar : Nb ... 92,9 ; C ... 12,0 ; Co ... 58,9 ; O ... 16,0 ; Rb ... 85,5 ; I ... 126,9

$m_u \cong m_n$ = 1,66 . 10^{-27} kg

h = 6,6 . 10^{-34} J.s

Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)

Řešení

Známé a neznámé:

Kubická mříž FCC ⇒ počet strukturních jednotek v elementární buňce N = 4 **(2 body)**

a = 7,34 Å = 7,34 . 10^{-10}m

ρ = 3550 kg.m^{-3}

a) NbC / CoO / RbI ?

b) Pro n^0 .. **v** , **E** (λ = d_{NN}) = ?

---

a) Pro rozhodnutí ohledně složení je třeba stanovit hmotnost (ev. relativní) jedné strukturní jednotky m(f.u.) jednotlivých navržených sloučenin

i) Ze známé hustoty a typu mříže

ii) Z chemického složení navržených sloučenin

i) hustota $\rho = \frac{N \cdot m(\text{f.u.})}{a^3}$ odtud $m(\text{f.u.}) = \frac{\rho \,.\, a^3}{N}$ **(4 body)**

tedy (s využitím nápovědy)

$$m\,(\text{f.u.}) = \frac{3550 \;.\; 7{,}34^3 \,.\, 10^{-30}}{4}\text{kg} = \frac{355 \;.\; 400 \,.\, 10^{-29}}{4}\text{kg} = 355\,.\,10^{-27}\text{kg}$$ **(2 body)**

ii) m (f.u.) = (Ar(X) + Ar(Y)) . m_u (pro XY = NbC, CoO, RbI) **(2 body)**

číselně:

m (NbC) = 105 . 1,66 . 10^{-27} kg ≅ 170 . 10^{-27} kg

m (CoO) = 75 . 1,66 . 10^{-27} kg ≅ 120 . 10^{-27} kg

m (RbI) = 212 . 1,66 . 10^{-27} kg ≅ 350 . 10^{-27} kg **(2 body)**

Porovnáním výsledků i) a ii) je zřejmé, že se jedná o RbI. **(1 bod)**

---

b) nejkratší vzdálenost mezi atomy stejného typu v FCC mříži je polovina stěnové úhlopříčky krychle o hraně délky a.

Tedy λ = d_{NN} = $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ≅ 5 Å **(2 body)**

Pro výpočet rychlosti a energie neutronu využijeme de-Broglieho vztah

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n v} = \frac{h}{\sqrt{2Em_n}}$ **(4 body)**

tedy $v = \frac{h}{m_n \lambda}$ a $E = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_n}$ (nebo také $E = \frac{1}{2} m_n v^2$ ☺) **(2 body)**

číselně:

$v = \frac{6{,}6 \;.\; 10^{-34}}{1{,}66 \,.\, 10^{-27} \,.\, 5 \,.\, 10^{-10}}$ m.s^{-1} $= \frac{4 \,.\, 10^{-34}}{5 \,.\, 10^{-37}}$ m.s^{-1} $= \frac{4}{5} \,.\, 10^3$ m.s^{-1} = 800 m.s^{-1} **(2 body)**

$E = \frac{6{,}6^2 \,.\, 10^{-68}}{2 \,.\, 5^2 \,.\, 10^{-20} \,.\, 1{,}66 \,.\, 10^{-27}}$ J $= \frac{40 \,.\, 10^{-68}}{50 \,.\, 1{,}66 \,.\, 10^{-47}}$ J $= \frac{40 \,.\, 10^{-68}}{80 \,.\, 10^{-47}}$ J $= \frac{40 \,.\, 10^{-68}}{80 \,.\, 10^{-47}}$ J

= 5.10^{-22} J (≅ 3 meV) **(2 body)**