PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSP

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť $a, b \in (0, +\infty)$. Definujme funkci

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Spočtěte:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Vysvětlete svá řešení.

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| \leq \sin z, z \in (0, \pi)\}$. Spočtěte

$$\int_M (5x + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací a případně limit derivací v krajních bodech), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \log\left(5 - \left|x^2 - 4x\right|\right).$$

Úloha 4 (25 bodů)
V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, -1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, -6, 3, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (0, -2, 5, 4).$$

(i) Najděte ortonormální bázi lineárního obalu vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.
(ii) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
(iii) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2022

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSP

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{\arcsin^2 x}{2}} - \cos(\arcsin x)}{x^4}, \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\},$$
$$x_n^k = \Big((n+1)^{2k} - (n^2+2n)^k\Big) \cdot \Big(\sqrt[3k]{n^{3k} - 3n^{2k}} - \sqrt[k]{n^k - 1}\Big), \quad n,k \in \mathbb{N}.$$

(a) V závislosti na $k \in \mathbb{N}$ spočtěte $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n^k$.
(b) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) V závislosti na $k \in \mathbb{N}$ spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n^k)$.

Vysvětlete svá řešení.

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = [0,+\infty)^2 \setminus \{(0,0)\}$ a pro $(x,y) \in M$ nechť

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x^2+xy+y^2}.$$

a) Určete supremum funkce f.
b) Dokažte, že funkce f nabývá na množině M svého minima.
c) Najděte minimum funkce f.

Úloha 3 (25 bodů)
Spočtěte

$$\int (1+|x|)\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x$$

na maximálních možných intervalech a tyto intervaly určete.

Úloha 4 (25 bodů)
Uvažujme následující reálnou matici A_p (která závisí na reálném parametru $p \in \mathbb{R}$) a vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & p \\ 2 & 4 & -5 & 2 & p+7 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ p+3 \\ p+4 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2p \\ 2p+7 \end{pmatrix}$$

Pro každé $p \in \mathbb{R}$

(i) najděte nějakou bázi jádra matice A_p,
(ii) najděte nějakou bázi obrazu matice A_p a
(iii) určete množiny všech řešení soustav lineárních rovnic $A_p\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $A_p\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2022

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSP

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Pro $x > 0$ platí:

$$\max\{a, b\} 2^{-\frac{1}{x}} \leq f(x) \leq \max\{a, b\}.$$

Z věty o dvou policistech a $\lim_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$ plyne, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \max\{a, b\}.$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{-x=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^y + \left(\frac{1}{b}\right)^y}{2}\right)^{\frac{1}{y}}} \overset{(a)}{=}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\}} = \min\{a, b\}.$$

(c) Ze spojitosti exponenciely a věty o limitě složené funkce plyne, že $\lim_{x\to 0} f(x) = e^A = \sqrt{ab}$, kde

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} \overset{\text{l'Hospital } \frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Úloha 2 (25 bodů)

Využitím symetrie množiny M dostáváme

$$\int_M (5x + |y|) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_M 5x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \int_M |y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0 + \int_M |y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z =$$
$$= 4 \int_N y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde $N = M \cap \{(x, y, z) : y \geq 0, x \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty a následnou substitucí dostáváme

$$4 \int_N y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 4 \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z} \left(\int_0^{\sin z - y} y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$
$$= 4 \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z} (\sin z - y) y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$
$$= 4 \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} y^2 \sin z - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=\sin z} \mathrm{d}z = 4 \int_0^\pi \left(\frac{1}{6} \sin^3 z \right) \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^\pi \left(\sin z (1 - \cos^2 z) \right) \mathrm{d}z = -\frac{2}{3} \int_1^{-1} \left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{2}{3} \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_1^{-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{9}.$$

Úloha 3 (25 bodů)

Pro vyšetření definičního oboru si nejdřív připomeneme, že $D_{\log} = (0, \infty)$. Protože $x^2 - 4x < 0$ právě tehdy, když $x \in (0, 4)$ a

$$5 + (x^2 - 4x) = 1 + (x-2)^2 \geq 1 > 0, \quad x \in (0,4)$$

je určitě $(0,4) \subset D_f$. Pro $x \notin (0,4)$ potřebujeme $5 - x^2 + 4x > 0$, což dá navíc podmínku $x \in (-1, 5)$ a tedy $D_f = (-1, 5)$.

Asymptoty neexistují.

Pro budoucí výpočty si f napíšeme jako

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(5 + x^2 - 4x\right), & x \in (0,4), \\ \log\left(5 - x^2 + 4x\right), & x \in (-1,5) \setminus (0,4). \end{cases}$$

Podle D_f hned vidíme, že f není sudá, lichá, ani periodická.

Rovněž je f spojitá na D_f (složení spojitých funkcí).

Spočteme ještě

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to 5-} f(x) = -\infty.$$

Dále spočítáme

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 5}, & x \in (0,4), \\ \dfrac{2(x-2)}{x^2 - 4x - 5}, & x \in (-1,0) \cup (4,5). \end{cases}$$

Odtud dostaneme, že

$$f'(x) < 0 \iff x \in (0,2) \cup (4,5)$$

a

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1,0) \cup (2,4).$$

Tedy f je rostoucí na $(-1,0)$ a $(2,4)$ a klesající na $(0,2)$ a $(4,5)$. Bod 2 je bodem lokálního minima a body 0 a 4 jsou body lokálního i globálního maxima (globální minimum neexistuje).

Ze spojitosti a limit v -1 a 5 dostáváme, že obor hodnot je

$$(-\infty, f(0)] = (-\infty, \log(5)]$$

(ve skutečnosti se extrémy i obor hodnot daly uhádnout už z elementárních odhadů, co jsme dělali na začátku).

Dále (s využitím spojitosti v 0 a 4)

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \mp\frac{4}{5} \quad \text{a} \quad f'_{\pm}(4) = \lim_{x \to 4\pm} f'(x) = \mp\frac{4}{5}.$$

Navíc

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \infty \quad \text{a} \lim_{x \to 5-} f'(x) = -\infty.$$

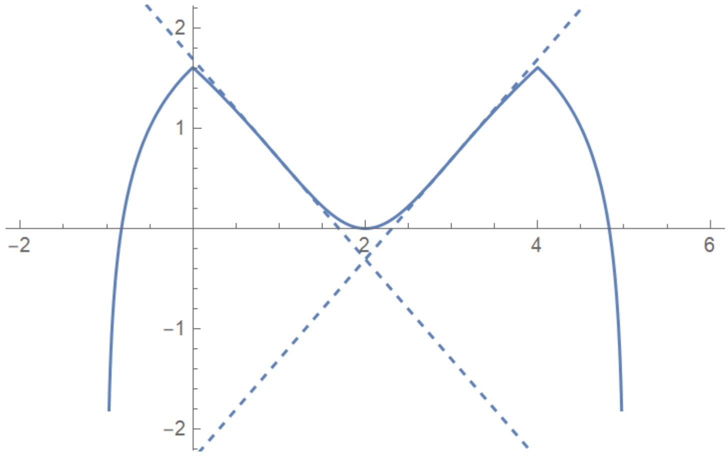
Spočítáme ještě druhou derivaci

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\left(x^2 - 4x + 3\right)}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}, & x \in (0,4) \\ -\dfrac{2\left(x^2 - 4x + 13\right)}{\left(x^2 - 4x - 5\right)^2}, & x \in (-1,0) \cup (4,5) \end{cases}$$

Odtud vidíme, že $f''(x) = 0$ pro $x = 1, 3$ a

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (3,4) \cup (4,5)$$

a
$$f''(x) > 0 \iff x \in (1, 3).$$
Dostáváme tedy, že f je konvexní na $(1, 3)$ (a ze spojitosti na $[1, 3]$). Dále, že f je konkávní na $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$ a $(4, 5)$, a díky jednostranným derivacím v 0 a 4 je f konkávní na $(-1, 1]$ a $[3, 5)$. Inflexní body jsou 1 a 3.



Úloha 4 (25 bodů)
Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces s průběžným normováním.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, -1, 0) = \\
\mathbf{w}_2' &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{w}_1 = (-1, -6, 3, 1) + \frac{22}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, -1, 0) = \\
&= (-1, -6, 3, 1) + 2 \cdot (1, 3, -1, 0) = (1, 0, 1, 1), \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1), \\
\mathbf{w}_3' &= \mathbf{v}_3 - ((\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{w}_2) = \\
&= (0, -2, 5, 4) - \left(-\frac{11}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, -1, 0) + \frac{9}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1)\right) = \\
&= (0, -2, 5, 4) - ((-1, -3, 1, 0) + (3, 0, 3, 3)) = \\
&= (0, -2, 5, 4) - (2, -3, 4, 3) = (-2, 1, 1, 1), \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3'}{\|\mathbf{w}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, 1, 1, 1).
\end{aligned}
$$

(i) Jedna z ortonormálních bází prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je
$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, -1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, 1, 1, 1)\right).$$

(ii) Podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ je roven podprostoru generovanému vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na tento podprostor odečítáme od vektoru $\mathbf{v}_3$ při výpočtu vektoru $\mathbf{w}_3'$, je rovná $(2, -3, 4, 3)$.

(iii) Daný vektor v lineárním obalu vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ leží, jeho ortogonální projekce je tedy rovná $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = (-1, -9, 5, 2)$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSP

Varianta B – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)
(a)

$$\begin{aligned}(n+1)^{2k} &= n^{2k} + 2kn^{2k-1} + k(2k-1)n^{2k-2} + P(n),\\ (n^2+2n)^k &= n^{2k} + 2kn^{2k-1} + 2k(k-1)n^{2k-2} + Q(n),\end{aligned}$$

kde P a Q jsou polynomy stupně menšího než $2k-2$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)^{2k} - (n^2+2n)^k\right)}{n^{2k-2}} = k(2k-1) - 2k(k-1) = k. \tag{1}$$

Označíme $A_n^k = \sqrt[3k]{n^{3k} - 3n^{2k}}$ a $B_n^k = \sqrt[k]{n^k - 1}$. Víme, že můžeme zaměnit limitu a odmocninu a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n^k}{n} = 1. \tag{2}$$

Dále

$$\begin{aligned} A_n^k - B_n^k &= \frac{\left(A_n^k\right)^{3k} - \left(B_n^k\right)^{3k}}{\left(A_n^k\right)^{3k-1} + \left(A_n^k\right)^{3k-2} B_n^k + \cdots + \left(B_n^k\right)^{3k-1}} = \\ &= \frac{n^{3k} - 3n^{2k} - \left(n^{3k} - 3n^{2k} + 3n^k - 1\right)}{\left(A_n^k\right)^{3k-1} + \left(A_n^k\right)^{3k-2} B_n^k + \cdots + \left(B_n^k\right)^{3k-1}} = \\ &= \frac{-3n^k + 1}{\left(A_n^k\right)^{3k-1} + \left(A_n^k\right)^{3k-2} B_n^k + \cdots + \left(B_n^k\right)^{3k-1}}. \end{aligned}$$

Pak z (2) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_n^k - B_n^k\right) n^{2k-1} = -\frac{3}{3k} = -\frac{1}{k}. \tag{3}$$

Z (1) a (3) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)^{2k} - (n^2+2n)^k\right)}{n^{2k-2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(A_n^k - B_n^k\right) n^{2k-1} = -1.$$

(b) Použijeme Taylorovy polynomy funkcí $\exp(y)$ a $\cos y$. Pak dostaneme

$$f(x) = \frac{1 - \frac{\arcsin^2 x}{2} + \frac{\arcsin^4 x}{8} + o(\arcsin^4 x) - \left(1 - \frac{\arcsin^2 x}{2} + \frac{\arcsin^4 x}{24} + o(\arcsin^4 x)\right)}{\arcsin^4 x} \cdot \frac{\arcsin^4 x}{x^4}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

(c) Použijeme Heineovu větu. Z (a) plyne, že $x_n^k \to 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ máme $x_n^k < 0$ a tedy speciálně $x_n^k \neq 0$. Z (b) pak již plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^k) = \frac{1}{12}.$$

Úloha 2 (25 bodů)

(a) Je $f(x,0) = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq x^2$ pro $x > 0$, tedy supremum funkce f na množině M je $+\infty$.

(b) Pro $(x,y) \in M$ splňující $x^2 + y^2 \geq 4$ je

$$f(x,y) \geq x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq 2.$$

Pro $(x,y) \in M$ splňující $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ je

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{2x^2+2y^2} \geq 2.$$

Dále pak $f(1,0) = 2$. Navíc f je spojitá a tedy nabývá minima na kompaktní množině $K = \{(x,y) \in M : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. To je pak již globálním minimem funkce f na množině M.

(c) Pro $x > 0$ je $f(x,0) = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$. Podobně $f(0,y) \geq 2$ pro $y > 0$. Vyšetřujme tedy lokální extrémy na vnitřku množiny M. V takových bodech musí být obě parciální derivace nulové:

$$\begin{aligned} 2x - y - \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2} &= 0 \\ -x + 2y - \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2} &= 0. \end{aligned}$$

První rovnost vynásobíme výrazem $x + 2y$ a druhou výrazem $2x + y$ a takto upravené rovnosti od sebe odečteme:

$$\begin{aligned} (2x-y)(x+2y) - (-x+2y)(2x+y) &= 0 \\ 4x^2 - 4y^2 &= 0 \\ (x-y)(x+y) &= 0. \end{aligned}$$

Případ $x = -y$ nepřichází pro $(x,y) \in M$ v úvahu, tedy $x = y$. Pak ovšem $x - \frac{1}{3x^3} = 0$, tedy $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. $f(x,x) = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$ je tedy minimum funkce f na množině M.

Úloha 3 (25 bodů)

Integrál rozdělíme na dvě části

$$I = \int (|x|+1)\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x = \int |x|\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

Pro výpočet I_1 využijeme substituci $t = x^2 + 1$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ pro $x > 0$ máme

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(9+x^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

a pro $x < 0$ máme analogicky

$$I_1 = -\int x\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{1}{3}(9+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Celkově tedy

$$I_1 = -\int x\sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(x)(9+x^2)^{\frac{3}{2}} = F(x).$$

Protože $\lim_{x\to 0\pm} F(x) = \pm 9$ dostáváme standardním lepením, že pro

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - 9, & x > 0, \\ F(x) + 9, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro výpočet I_2 použijeme substituci $x = 3\sinh t$, $\mathrm{d}x = 3\cosh t \,\mathrm{d}t$. Máme

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sqrt{9 + x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3\cosh t \sqrt{9 + 9\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t = 9\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = 9J. \end{aligned}$$

Pomocí per partes dostáváme

$$\begin{aligned} J &= \sinh t \cosh t - \int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \sinh t \cosh t - \int \cosh^2 t - 1\,\mathrm{d}t \\ &= \sinh t \cosh t + t - J. \end{aligned}$$

Tedy

$$J \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t)$$

a ($t = \operatorname{argsinh} \frac{x}{3}$)

$$\begin{aligned} I_2 &\stackrel{c}{=} \frac{9}{2}(\sinh t \cosh t + t) \\ &= \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cosh(\operatorname{argsinh}\frac{x}{3}) + \operatorname{argsinh}\frac{x}{3}\right) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Celkově

$$I \stackrel{c}{=} G(x) + H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 4 (25 bodů)
Matici $(A_p|\mathbf{bc})$ upravíme elementárními řádkovými úpravami na odstupňovaný tvar.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & p & p+3 & 2p \\ 2 & 4 & -5 & 2 & p+7 & p+4 & 2p+7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p+2 & p+3 & 2p+2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p+3 & p+4 & 2p+3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p+2 & p+3 & 2p+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(i) Volné proměnné jsou druhá a čtvrtá. Bázi jádra matice A_p získáme například volbami $(0,1)$, $(1,0)$ hodnot volných proměnných a dopočtením bázových proměnných. Uvedené volby dávají bázi

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(ii) Obraz matice A_p má dimenzi 3, tj. rovná se $\mathbb{R}^3$. Jeho bází je tedy jakákoliv báze prostoru $\mathbb{R}^3$, například kanonická báze.

(iii) Dopočtením partikulárního řešení (například volbou 0 pro hodnoty volných proměnných) získáme množiny všech řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K, \begin{pmatrix} 3p \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K,\ K = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$