Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2022

Studijní program: MIUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Nechť $a, b \in (0, +\infty)$. Definujme funkci

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Spočtěte:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Vysvětlete svá řešení.

Úloha 2 (20 bodů)
Ať $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| \le \sin z, z \in (0, \pi)\}$. Spočtěte

$$\int_M (5x + |y|)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Úloha 3 (20 bodů)
Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, který přijímá všechna slova představující dekadický zápis kladného celého čísla beze zbytku dělitelného třemi. V zápisu čísla nejsou povoleny vedoucí nuly, každé přijaté slovo musí začínat některým ze znaků 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Například slova 3, 300, 22122 automat přijme, zatímco slova 2, 015, 314 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů zdůvodněte.

Úloha 4 (20 bodů)
Je dán následující program (zadání v Pascalu, v C a v Pythonu jsou ekvivalentní):

```
program AA;
var i, p, n: integer;
begin
  read(n);
  p := 0;
  for i := 1 to n do
     if i mod 2 = 1 then
       p := p + i;
  write(p)
end.
```

```
#include <stdio.h>
void main(void)
{
  int i, p, n;
  scanf("%i", &n);
  p = 0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
     if (i % 2 == 1) p += i;
  printf("%i", p);
}
```

```python
n = int(input())
p = 0
for i in range(1, n+1):
  if i % 2 == 1:
     p += i
print(p)
```

a) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou $n = 399$.
b) Určete všechny takové vstupní hodnoty n, pro které výpočet skončí s výsledkem 1600.
c) Určete nejmenší vstupní hodnotu n, pro kterou je výsledkem výpočtu pěticiferné číslo.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: MIUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Pro $x > 0$ platí:

$$\max\{a,b\}2^{-\frac{1}{x}} \leq f(x) \leq \max\{a,b\}.$$

Z věty o dvou policistech a $\lim_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$ plyne, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \max\{a,b\}.$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{-x=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^y+\left(\frac{1}{b}\right)^y}{2}\right)^{\frac{1}{y}}} \overset{(a)}{=}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}} = \min\{a,b\}.$$

(c) Ze spojitosti exponenciely a věty o limitě složené funkce plyne, že $\lim_{x\to 0} f(x) = e^A = \sqrt{ab}$, kde

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} \overset{\text{l'Hospital } \frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Úloha 2 (20 bodů)

Využitím symetrie množiny M dostáváme

$$\int_M (5x+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_M 5x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $N = M \cap \{(x,y,z) : y \geq 0, x \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty a následnou substitucí dostáváme

$$4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z}\left(\int_0^{\sin z - y} y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z} (\sin z - y)y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int_0^\pi \left[\frac{1}{2}y^2\sin z - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sin z}\mathrm{d}z = 4\int_0^\pi \left(\frac{1}{6}\sin^3 z\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\pi \left(\sin z(1-\cos^2 z)\right)\mathrm{d}z = -\frac{2}{3}\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_1^{-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}.$$

Úloha 3 (20 bodů)

Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Pomocí stavů automatu rozlišíme, jaký zbytek po dělení 3 dává již zpracovaná část vstupního slova (možnosti 0, 1 nebo 2). Koncovým stavem je pouze ten, který odpovídá číslům dělitelným 3 beze zbytku. Samostatné stavy potřebujeme pro prázdné slovo a pro slova začínající vedoucí nulou, ta automat nepřijímá. Automat tedy bude mít pět stavů. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8	
→Z	T	A	B	C	počáteční stav, nic nepřečteno
T	T	T	T	T	vstupní slovo začíná znakem 0
←A	A	A	B	C	číslo je dělitelné 3
B	B	B	C	A	číslo dává při dělení 3 zbytek 1
C	C	C	A	B	číslo dává při dělení 3 zbytek 2

Úloha 4 (20 bodů)

V proměnné p se počítá součet všech lichých čísel ležících v intervalu $\langle 1, n \rangle$. Hodnotu p odvodíme pomocí vzorce pro součet prvních k členů aritmetické posloupnosti: součet $=$ (první $+$ poslední) $*$ počet/2. Rozlišíme dva případy podle toho, zda n je liché nebo sudé. Výsledná hodnota p pro n liché je

$$p = 1 + 3 + 5 + ... + n = (n + 1) \cdot (n + 1)/2/2 = (n + 1)^2/4.$$

Pro n sudé dostaneme stejným postupem jen mírně změněný vztah:

$$p = 1 + 3 + 5 + ... + (n - 1) = n \cdot n/2/2 = n^2/4.$$

a) Úlohu řešíme přímým dosazením vstupní hodnoty 399 do odvozeného vzorce pro lichá n, dostaneme výsledek $p = 40000$.

b) Musíme uvažovat možnost sudého i lichého n. Pro lichá n řešíme rovnici $(n + 1)^2/4 = 1600$, která má jediný kladný kořen $n = 79$. Pro sudá n řešíme rovnici $n^2/4 = 1600$, která má jediný kladný kořen $n = 80$.

Výsledek 1600 tedy získáme pro vstupní hodnoty 79 a 80.

c) Z odvození vztahů pro výslednou hodnotu p je patrné, že vždy pro dvě po sobě jdoucí vstupní hodnoty (lichou a sudou) program dává stejný výsledek. Řešením úlohy c) proto jistě bude liché číslo.

Hledáme nejmenší liché n takové, aby hodnota výrazu $(n + 1)^2/4$ byla pěticiferná. Funkce $(n + 1)^2/4$ je rostoucí, takže musí platit, že

$$(n + 1)^2/4 \geq 10000 \quad \& \quad n^2/4 < 10000.$$

Po úpravě (za předpokladu, že n je kladné) dostáváme $n \geq 199$ a $n < 200$, tedy výsledkem je vstupní hodnota $n = 199$. Dosazením do odvozeného vzorce pro lichá n můžeme ověřit, že pro tento vstup dává program výsledek přesně 10000, tedy nejmenší pěticiferné číslo.