Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2023

Studijní program: FMUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací a případně limit derivací v krajních bodech), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -2023\pi, & x = 0, \\ \operatorname{arctg}(\log(x^2)), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úloha 2 (20 bodů)
Ať $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 3\}$ a $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq 2|x|\}$.
(a) Spočtěte

$$\int_{M \cap N} |x| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

(b) Rozhodněte, zda

$$\int_M e^y \cos x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < +\infty.$$

Úloha 3 (20 bodů)
V trojrozměrném prostoru je ve vakuu umístěn bodový náboj Q.

I. část
Jak zvolíte systém souřadnic xyz, aby bylo elektrické pole popsáno vztahem

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \tag{1}$$

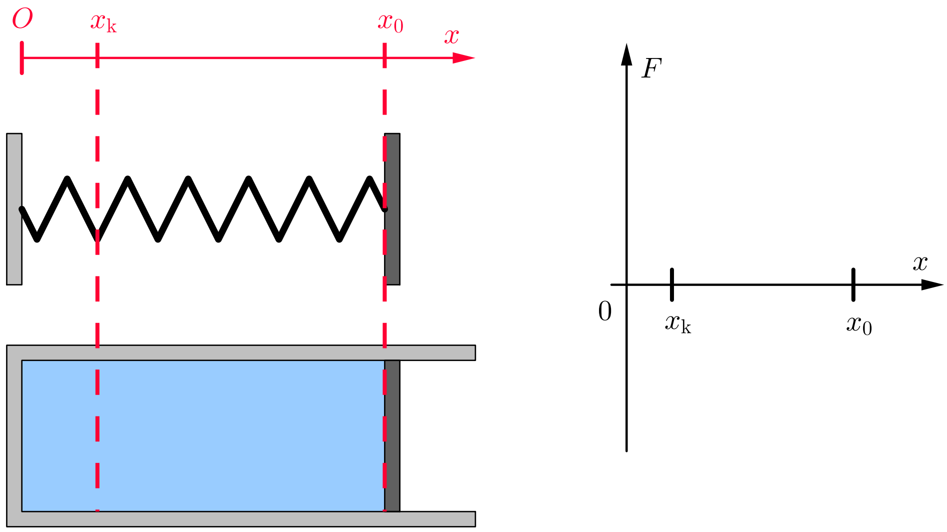
kde ε_0 je permitivita vakua a $\vec{r}$ je polohový vektor? Odpověď ověřte výpočtem $\operatorname{div} \vec{E}$.

II. část
Odvoďte pro elektrické pole popsané rovnicí (1) potenciál φ, jestliže platí vztah $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Úloha 4 (20 bodů)
Máme k dispozici dva tlumiče – jeden pružinový a jeden pneumatický. Na obrázku 1 je jejich schématické znázornění včetně systému souřadnic. Poloha pružiny, jak je znázorněna na obrázku (označena jako x_0), je rovnovážná. Plyn v pneumatickém tlumiči považujte za ideální a je-li píst v poloze jako na obrázku (označena jako x_0), je tlak plynu roven okolnímu atmosférickému tlaku a výslednice sil působících na píst je nulová. Kritická poloha, označená na obrázku jako x_{k}, je hranice, kdy lze plyn v tlumiči považovat za ideální a kdy se pružina deformuje elasticky.

I. část
Jaká rovnice popisuje ve zvoleném systému souřadnic sílu, kterou bude pružina působit při její deformaci na intervalu $(x_{\mathrm{k}},\ x_0)$? Průběh síly znázorněte i do připraveného grafu závislosti F na x.

OBRÁZEK 1. Pružinový a pneumatický tlumič se zvoleným systémem souřadnic a připravený graf závislosti F na x



II. část

Jaká rovnice popisuje ve zvoleném systému souřadnic sílu, kterou bude ideální plyn odporovat stlačení pístem na intervalu $(x_k,\ x_0)$? Uvažujte, že je plyn stlačován adiabaticky. Průběh síly znázorněte i do připraveného grafu závislosti F na x.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2023

Studijní program: FMUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

$D_f = \mathbb{R}$. Protože $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, není f spojitá v 0, tudíž f je spojitá na $D_f \setminus \{0\}$. Snadno rovněž spočteme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, odkud snadno vidíme, že asymptota v $\pm\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}$. Funkce je, sudá protože závisí na x^2 (a není lichá ani periodická).

V dalším kroku si spočítáme

$$f'(x) = \frac{2}{x(\log^2(x^2)+1)}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Odtud hned vidíme, že

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

a

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Funkce je tedy rostoucí na $(0,+\infty)$ (dokonce i na $[0,+\infty)$), a klesající na $(-\infty,0)$ (dokonce i na $(-\infty,0]$). Spočteme ještě $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty$. Pro určení $f'_{\pm}(0)$ nemůžeme použít jednostrannou spojitost v 0, ale z definice snadno vidíme, že $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$ (a speciálně, že derivace f v 0 neexistuje). Bod 0 je tedy bodem lokálního i globálního minima, bod lokálního (ani globálního) maxima neexistuje. Obor hodnot je tedy (využíváme spojitost na $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$, monotonii a limity v krajních bodech těchto intervalů) $\{-2023\pi\} \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dále

$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2\left(x^2\right) + 4\log\left(x^2\right) + 1\right)}{x^2\left(\log^2(x^2)+1\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Platí tedy

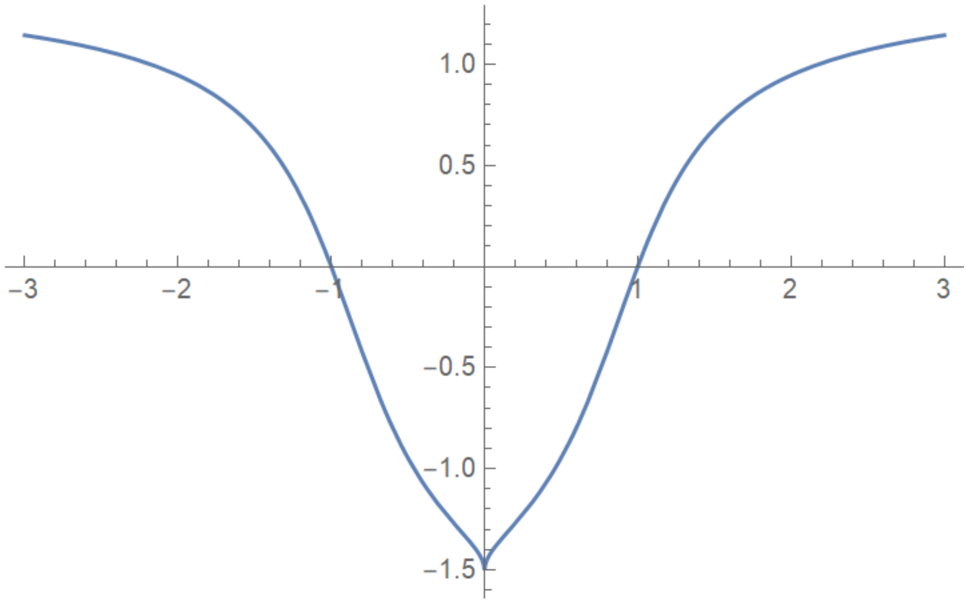
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$f'' > 0 \quad \text{na} \quad (-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}),$$

$$f'' < 0 \quad \text{na} \quad (-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0) \cup (0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty).$$

Funkce je tedy konvexní na $(-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, $(-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0)$, $(0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty)$. Inflexní body jsou $-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ a $e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Na obrázku není pro lepší viditelnost zobrazena hodnota v bodě 0.



Úloha 2 (20 bodů)

(a) Křivky $x^2 + y^2 = 3$ a $y^2 = 2|x|$ se protínají v bodech $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$. Využitím symetrie množiny $M \cap N$ a funkce $|x|$ dostáváme

$$\int_{M\cap N} |x| dx dy = 4 \int_P x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde $P = M \cap N \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty dostáváme

$$4 \int_P x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[x^2\right]_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=\sqrt{3-y^2}} \right) \mathrm{d}y =$$
$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - y^2 - \frac{y^4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - 2y^2 - \frac{y^4}{2}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \left[6y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{y^5}{10}\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(6 - \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

(b) Množina M je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Integrovaná funkce je spojitá na M, a proto je omezená. Celkově je tedy uvedený integrál konečný.

Úloha 3 (20 bodů)

I. část

Upravíme-li rovnici ze zadání na tvar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

získáme známý vztah pro „velikost“ (pro $Q < 0$ bude záporná) elektrické intenzity ve vzdálenosti r od zdroje krát jednotkový vektor ve směru $\vec{r}$. Jelikož je $\vec{r}$ polohový vektor, musí být bodový náboj Q umístěn v počátku systému souřadnic.

Pro výpočet divergence $\vec{E}$ si rozepíšeme polohový vektor pomocí souřadnic x, y a z, tedy $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Elektrickou intenzitu potom zapíšeme jako

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(x,\ y,\ z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

div $\vec{E}$ v kartézských souřadnicích vypočítáme jako

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Pro názornost vypočítáme výraz $\frac{\partial E_x}{\partial x}$. Zbylé výrazy by se počítaly analogicky.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3\,x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Čitatel výrazu $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, resp. $\frac{\partial E_z}{\partial z}$, by končil $-3\,y^2$, resp. $-3\,z^2$. Sečteme-li tedy $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ a $\frac{\partial E_z}{\partial z}$, získáme

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

v celém prostoru, kromě bodu $[0,\ 0,\ 0]$, ve kterém není předpis $\vec{E}$ definován a který je potřeba vyšetřit zvlášť. Vzhledem k tomu, že je ale bod $[0,\ 0,\ 0]$ jediný, kde divergenci neznáme, a ve zbytku prostoru je nulová, musí být bodový náboj Q právě v tomto bodě.

II. část

Rozepíšeme si obě strany rovnice $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ do složek:

$$\vec{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad}\varphi,$$

a φ vypočítáme například z x-ové složky. Je-li $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, potom platí

$$\varphi = -\int E_x\,\mathrm{d}x.$$

S přihlédnutím k rovnici (1) můžeme integrál rozepsat a vypočítat:

$$\varphi = -\int E_x\,\mathrm{d}x = -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ t = x^2 + y^2 + z^2\\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2\,x\\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x\,\mathrm{d}x\end{array}\right| =$$
$$= -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int t^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\partial t}{2} = -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c,$$

kde výraz $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nahradíme r a kde c je integrační konstanta. Protože jsme φ počítali z parciální derivace podle proměnné x, je obecně $c = c(y,\ z)$. Kdybychom ale počítali φ z rovnice $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, resp. $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, vyšlo by nám φ stejně a $c = c(x,\ z)$, resp. $c = c(x,\ y)$. Z toho ale vyplývá, že c musí být konstantou. Platí tedy, že

$$\varphi = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r} + c.$$

Význam konstanty c je patrný pro $r \to \infty$. Potom výraz $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \to 0$ a c je potenciál v nekonečnu. Ten se typicky klade roven 0 nebo ho označíme jako φ_∞. Potenciál elektrického pole popsaného rovnicí ze zadání je tedy

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}$$

nebo

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r} + \varphi_\infty .$$

Úloha 4 (20 bodů)

I. část

Pružina bude na intervalu $(x_\mathrm{k},\ x_0)$ působit silou přímo úměrnou výchylce z rovnovážné polohy x_0 proti směru vychýlení. Tuto závislost můžeme zapsat rovnicí

$$F = -k\,(x - x_0),$$

kde k je tuhost pružiny. V grafu závislosti F na x se jedná o klesající lineární funkci

$$F = k\,x_0 - k\,x .$$

II. část

Síla, kterou bude ideální plyn v tlumiči odporovat stlačení pístem, je přímo úměrná odchylce tlaku plynu oproti atmosférickému, tj.

$$F = (p - p_0)\,S, \tag{2}$$

kde p_0 je označení atmosférického tlaku a S je obsah plochy pístu. Závislost p na výchylce můžeme vyjádřit z rovnice ideálního plynu pro adiabatický děj:

$$p\,V^\kappa = \text{konst},$$

kde p je tlak plynu, V je objem plynu a κ je Poissonova konstanta. Srovnáme-li tedy počáteční stav plynu a stav po stlačení, bude platit rovnice

$$p\,V^\kappa = p_0\,V_0^\kappa .$$

Dalšími úpravami vyjádříme tlak p v závislosti na x:

$$p\,(S\,x)^\kappa = p_0\,(S\,x_0)^\kappa ,$$

$$p = p_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^\kappa . \tag{3}$$

Po dosazení rovnice (3) do rovnice (2) a úpravě, vyjádříme závislost odporující síly na výchylce:

$$F = \left[p_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^\kappa - p_0\right] S = p_0\,S\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^\kappa - 1\right].$$

Grafy závislosti F na x jsou na obrázku 1.

Obrázek 1. Graf závislosti F na x – tečkovaně pro pružinu, plnou čarou pro pneumatický tlumič