Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2023

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Mějme funkci $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(a) Dodefinujte funkci spojitě v počátku.
(b) Ve všech bodech definičního oboru rozhodněte o existenci parciálních derivací dodefinované funkce z bodu (a) a pokud existují, tak je spočtěte.
(c) Rozhodněte o existenci totálního diferenciálu dodefinované funkce z bodu (a) v počátku a případně jej spočtěte.

Své výpočty zdůvodněte.

Úloha 2 (25 bodů)
Nechť T je trojúhelník omezený přímkami $y = 0$, $x = 0$ a $x + y = 1$. Dále nechť $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ a $f(x, y) = (x + y)^2 e^{x+y}$.

(a) Spočtěte $\int_T f$.
(b) Rozhodněte, zda $\int_T f \leq \int_K f$.

Úloha 3 (25 bodů)
Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}\{x > 0\}, \quad \sigma^2 > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\sigma^2 > 0$.
(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr σ^2.
(c) Sestavte
  (i) test poměrem věrohodnosti,
  (ii) Raoův skórový test,
  (iii) Waldův test

  pro nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 1$ oproti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 1$.

Úloha 4 (25 bodů)
Plánujete emitovat 100 dluhopisů s nominální hodnotou N, dobou splatnosti 8 let a ročním (polhůtním) kuponem 2 000,- Kč. Uvažujte roční tržní úrokovou míru ve výši 4% p.a.

(a) Napište vzorec pro tržní hodnotu dluhopisu a použitím součtových vzorců jej zjednodušte.
(b) Odvoďte vzorec pro nominální hodnotu N, chcete-li emisí (prodejem za tržní cenu) dluhopisů získat částku 10 mil. Kč. Jak se změní tato nominální hodnota, pokud roční kupon zvýšíme?
(c) Napište vzorec pro duraci těchto dluhopisů. Co tato hodnota vyjadřuje? Jak se durace změní, pokud roční kupon zvýšíme a náležitě upravíme nominální hodnotu dle kroku (b)? Svou odpověď zdůvodněte.

(d) Potřebnou částku z kroku (b) chcete zdvojnásobit (tj. navýšit na 20 mil. Kč). Napište vzorec vyjadřující kolikrát musíte zvýšit nominální hodnotu (doba splatnosti a výše kuponu zůstanou nezměněné). Bude to více než $2\times$, právě $2\times$, nebo méně než $2\times$?

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2023

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Z nerovnosti $|xy| \le x^2 + y^2$ snadno plyne, že pro $[x, y] \neq [0, 0]$ je f definována a platí

$$0 \le |f(x, y)| \le \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ okamžitě plyne, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Funkci f tedy můžeme dodefinovat v počátku spojitě nulou.

(b) Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ máme triviálně

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jelikož f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, můžeme počítat $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ jako limitu parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ze symetrie funkce f plyne, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(c) Z (b) plyne, že pokud by totální diferenciál existoval, tak by musel být nulový. Z definice tedy plyne, že stačí ověřit, zda následující limita je rovna nule:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Volbou $x = y$ okamžitě vidíme, že tato limita není rovna 0 a totální diferenciál tedy neexistuje.

Úloha 2 (25 bodů)

(a) Z Fubiniovy věty dostáváme

$$\begin{aligned}\int_T f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left((x + y)^2 e^{x+y}\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 e^x \left(\int_0^{1-x} (x + y)^2 e^y \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 e^x \left[(x + y)^2 e^y - 2(x + y)e^y + 2e^y\right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 e^x \left(e^{1-x} - x^2 + 2x - 2\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e - e^x(x^2 - 2x + 2)\right) \mathrm{d}x = \\ &= \left[ex - e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) - 2e^x\right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= e - e - 2e + 2 + 2 + 2 = 6 - 2e.\end{aligned}$$

(b) Zřejmě je $T \subseteq K$ a $f \ge 0$, tedy z monotonie integrálu dostáváme, že $\int_T f \le \int_K f$.

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\sigma^2;\mathbf{X}) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(\sigma^2)^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad X_i > 0,\ \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$\ell_n(\sigma^2;\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \log X_i - n\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\sigma^2;\mathbf{X}) = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice

$$\partial\ell_n(\sigma^2;\mathbf{X})/\partial\sigma^2 = 0$$

vzhledem k neznámému parametru σ^2, tj.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Pozorovaná (výběrová) informační matice je

$$I_n(\sigma^2;\mathbf{X}) = -\frac{1}{n}\frac{\partial U_n(\sigma^2;\mathbf{X})}{\partial\sigma^2} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2} + \frac{1}{n\,(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\sigma}^2;\mathbf{X}) = 4n^2\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-2} > 0 \quad \text{s.j.}$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informační matici spočítáme jako

$$I\left(\sigma^2\right) = \mathsf{E} I_n(\sigma^2;\mathbf{X}) = \frac{1}{(\sigma^2)^2},$$

protože

$$\mathsf{E}X_i^2 = \int_0^\infty \frac{x^3}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x = 2\sigma^2\int_0^\infty y e^{-y}\mathrm{d}y = 2\sigma^2.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \left(\sigma^2\right)^2\right), \quad n \to \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 1$ oproti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2\log\frac{L_n(\hat{\sigma}^2;\mathbf{X})}{L_n(1;\mathbf{X})} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n - 2n\log\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi^2_1(1-\alpha)$, kde $\chi^2_1(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 1$ oproti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1;\mathbf{X})]^2}{nI(1)} = n\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 1$ oproti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n\left(\hat{\sigma}^2 - 1\right)^2 I\left(\hat{\sigma}^2\right) = n\left(1 - \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Úloha 4 (25 bodů)

(a)

$$P = 2000\sum_{t=1}^{8} v^t + Nv^8 = 2000v\frac{1-v^8}{1-v} + Nv^8 = 2000\frac{1-v^8}{r} + Nv^8,$$

kde $r = 0.04$, $v = \frac{1}{1+r}$.

(b)

$$10^7 = 100P = 100\left(2000\frac{1-v^8}{r} + Nv^8\right),$$
$$N = \frac{1}{v^8}\left(10^5 - 2000\frac{1-v^8}{r}\right).$$

Zvýšený roční kupon = **nižší nominální hodnota** N.

(c)

$$D(r) = \frac{\sum_{t=1}^{8} t\,2000v^t + 8Nv^8}{NPV(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{8} t\,2000v^t + 8Nv^8}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{8} t\,2000v^t + 8Nv^8}{10^5}$$

Vyjadřuje střední dobu do splatnosti, popř. také citlivost NPV na změnu úrokové míry r.

Zvýšením ročního kuponu se **durace sníží**. Vysvětlení: Např. zvýší se pravidelné průběžné platby a současně se sníží platba na konci, takže střední doba splatnosti klesne (nebo jakékoliv jiné smysluplné a správné vysvětlení).

(d)

$$\tilde{N} = \frac{1}{v^8}\left(20^5 - 2000\frac{1-v^8}{r}\right),$$
$$\frac{\tilde{N}}{N} = \frac{20^5 - 2000\frac{1-v^8}{r}}{10^5 - 2000\frac{1-v^8}{r}}.$$

Zřejmě $\frac{\tilde{N}}{N} > 2$, takže nominální hodnotu musíme zvýšit více než 2×.