Informatika - navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky - 2023 - Varianta A

Každá skupina úloh (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci sekce nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.
Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.
Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Ze skupiny, kterou tvoří sedm žen a pět mužů, zcela nahodile vyčleníme postupně 4 osoby a řadíme je stranou. Tímto nahodilým výběrem z dané skupiny vzniká posloupnost vybraných osob délky 4. Jaká je pravděpodobnost, že první a zároveň třetí vybraná osoba jsou ženy? Při výpočtu postupujte následovně:

a. Určete, kolik je všech různých posloupností, které mohou uvedeným způsobem vzniknout.

   Poznámka: Dvě posloupnosti považujeme za různé, i když je tvoří stejná množina osob, ale v různém pořadí. Např. 4 konkrétní ženy mohou vytvořit 4! různých posloupností.

b. Určete, kolik je různých posloupností takových, že první a zároveň třetí vybraná osoba jsou ženy.

c. Požadovanou pravděpodobnost určete jako podíl čísel vypočítaných v a. a b.

1.1 Řešení

a. Počet všech různých posloupností je $N = 12 * 11 * 10 * 9$.

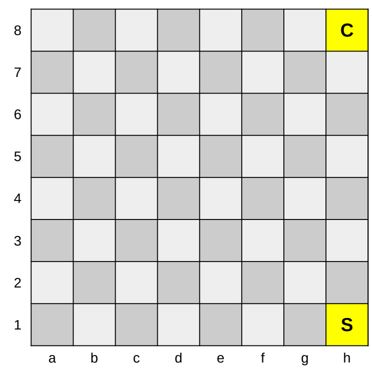
b. Počet různých posloupností, které na prvním a na třetím místě mají ženy, určíme takto:

   - pro obsazení prvního a třetího místa ženou existuje $7 * 6$ možností;
   - poté existuje $10*9$ možností, jak dalšími osobami obsadit druhé a čtvrté místo ve vytvářené posloupnosti;
   - je tudíž $M = 7 * 6 * 10 * 9$.

c. Požadovaná pravděpodobnost, že první a třetí vybraná osoba jsou ženy, je tedy $\frac{M}{N} = (7 * 6 * 10 * 9)/(12 * 11 * 10 * 9) = \frac{7}{22} \approx 31.82\%$.

2 Cesty

Šachový král stojí na startovním políčku se souřadnicemi H1 a cílem je přemístit jej na políčko se souřadnicemi H8, viz obrázek. Jeden tah králem znamená pohyb na sousední políčko, přičemž sousední políčka jsou všechna, která se dotýkají hranou nebo vrcholem (daného čtverce). Tak např. políčko H2 má 5 sousedních: H1, H3, G1, G2, G3.
Je zřejmé, že k přemístění krále z $H1$ na $H8$ stačí 7 tahů, příkladem takové cesty je posloupnost $H1 \to H2 \to H3 \to H4 \to H5 \to H6 \to H7 \to H8$.
Cesta je posloupnost tahů, tah je uspořádaná dvojice sousedních políček.
Kolik je všech způsobů (všech různých cest), jak dojít králem z $H1$ na $H8$ pomocí 7 tahů? Svou odpověď přesně zdůvodněte!



2.1 Řešení

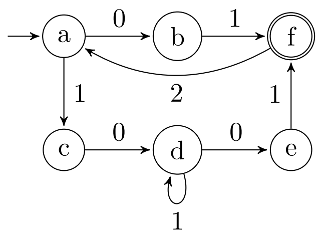
Z požadavku, že cesta krále musí mít délku 7, vyplývá, že

- každým tahem se král musí posunout o jednu řadu výše;
- král může vstoupit pouze na některá políčka pouze ve sloupcích E–H (pro vstup na libovolné políčko ve sloupci D jsou třeba nejméně 4 tahy a pro návrat ze sloupce D do sloupce H další 4 tahy);
- k-tým tahem tedy král musí vždy nutně přejít z řady k do řady k + 1, a to vždy na políčko ve stejném sloupci, nebo na políčko v některém z bezprostředně sousedních sloupců.

8								127
7							76	51
6						25	30	21
5					4	9	12	9
4					1	3	5	4
3						1	2	2
2							1	1
1								S
	a	b	c	d	e	f	g	h

Na následujícím obrázku jsou všechna políčka, na která může král vstoupit, vyznačena číslem vyjadřujícím, kolika způsoby lze na dané políčko dojít. Odpověď na danou otázku je tudíž 127.

3 Automaty

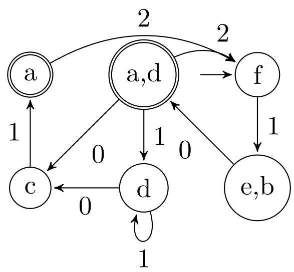


a. Uvažujme konečný automat A na obrázku (stavy $\{a, b, c, d, e, f\}$, počáteční stav a, přijímající stavy $\{f\}$, vstupní abeceda $\{0, 1\}$, přechody viz graf). Napište tři různá slova, která automat přijímá.

b. Navrhněte (deterministický či nedeterministický) automat B, který přijímá právě slova, která by zapsaná pozpátku přijal automat A.

c. Existuje deterministický konečný automat přijímající jazyk příkladu b.?

3.1 Řešení



a. Přijímá například 01, 1001, 1011101, 0120121001, přijímá slova popsaná regulárním výrazem $(\mathbf{01} + \mathbf{101}^*\mathbf{01})\,(\mathbf{2}(\mathbf{01} + \mathbf{101}^*\mathbf{01}))^*$.

b. Nedeterministický automat B dostaneme otočením hran a záměnou počátečního a koncového stavu.

c. Pro každý nedeterministický automat lze najít deterministický, který přijímá stejný jazyk, proto takový existuje. Např. na obrázku, ale konstrukce deterministického není vyžadovaná, stačí nedeterministický popsaný v předchozím bodu.

4 Logika

V tmavé jeskyni tvaru čtvercové mřížky 3×3 se někde skrývá díra, kterou ale není vidět. Na políčkách sousedících s dírou hranou je cítit jemný vánek, jinde je vzduch zcela nehybný. Stojíte na políčku $[1, 2]$ a žádný vánek necítíte.

a. Vyjádřete znalosti pomocí formulí výrokové logiky s vhodně zvolenými výrokovými proměnnými. Stačí formalizovat znalosti potřebné k rozhodnutí o ostatních políčkách.

b. Pro každé políčko rozhodněte, zda víme jistě, že tam je (resp. není) díra, nebo zda nemáme dost informací stav políčka určit. Svou odpověď zdůvodněte.

4.1 Řešení

Použijeme proměnné $d_{i,j}$,$v_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ označující fakt, že na daném políčku je díra, resp. vánek.

a.
- Existuje díra $(d_{1,1} \vee d_{1,2} \vee d_{1,3} \vee d_{2,1} \vee d_{2,2} \vee d_{2,3} \vee d_{3,1} \vee d_{3,2} \vee d_{3,3})$.
- $\neg v_{1,2}$ není vánek na $[1, 2]$.
- Okolo díry je vánek, $d_{i,j} \to \big(v_{(i+1),j} \& v_{i,(j+1)} \& v_{(i-1),j} \& v_{i,(j-1)}\big)$, pro každé i, j s vynecháním v mimo rozměr 3×3.
  - Reálně potřebujeme jen $(\neg v_{1,2} \to \neg d_{1,1})$, $(\neg v_{1,2} \to \neg d_{1,3})$ a $(\neg v_{1,2} \to \neg d_{2,2})$.

b.
- O políčkách $[1, 1]$, $[1, 3]$, a $[2, 2]$ víme, že na nich není díra, protože by způsobovala vánek na $[1, 2]$.

- O žádném políčku nevíme s jistotou, že tam je díra.
- Na ostatních políčkách ($[2, 1]$, $[3, 1]$, $[3, 2]$, $[3, 3]$,$[2, 3]$) nemáme dost informací, díra tam být může a nemusí.