Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2023

Studijní program: MIUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací a případně limit derivací v krajních bodech), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -2023\pi, & x = 0, \\ \operatorname{arctg}(\log(x^2)), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úloha 2 (20 bodů)
Ať $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 3\}$ a $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq 2|x|\}$.
(a) Spočtěte

$$\int_{M \cap N} |x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Rozhodněte, zda

$$\int_M e^y \cos x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < +\infty.$$

Úloha 3 (20 bodů)
V zásuvce je 6 párů rozházených, nespárovaných ponožek. Každý pár má odlišnou barvu, jinak se ponožky navzájem nijak neliší. Ve tmě vybereme ze zásuvky nahodile 5 ponožek. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali alespoň jeden kompletní pár? Při výpočtu postupujte následovně:

(i) Určete, kolika způsoby lze náhodně vybrat 5 ponožek ze šesti párů. Poznámka: levou a pravou ponožku považujeme za různé, výběr tedy provádíme z dvanácti různých ponožek.
(ii) Určete, kolik je různých výběrů takových, že obsahují alespoň jeden kompletní pár.
(iii) Požadovanou pravděpodobnost určete jako podíl čísel vypočítaných v (i) a (ii).

Úloha 4 (20 bodů)
Navrhněte *nedeterministický* konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova obsahující dvojici (po sobě jdoucích) stejných číslic. Například slova 10010, 11, 0101011 automat přijme, zatímco slova 0, 101, 010101 nepřijme. Znázorněte tento automat pomocí přechodového diagramu. Dále tento automat převeďte na deterministický konečný automat, výsledný automat také znázorněte pomocí přechodového diagramu.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2023

Studijní program: MIUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

$D_f = \mathbb{R}$. Protože $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, není f spojitá v 0, tudíž f je spojitá na $D_f \setminus \{0\}$. Snadno rovněž spočteme, že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, odkud snadno vidíme, že asymptota v $\pm\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}$. Funkce je, sudá protože závisí na x^2 (a není lichá ani periodická).

V dalším kroku si spočítáme

$$f'(x) = \frac{2}{x(\log^2(x^2) + 1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Odtud hned vidíme, že

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

a

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Funkce je tedy rostoucí na $(0, +\infty)$ (dokonce i na $[0, +\infty)$), a klesající na $(-\infty, 0)$ (dokonce i na $(-\infty, 0]$). Spočteme ještě $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty$. Pro určení $f'_\pm(0)$ nemůžeme použít jednostrannou spojitost v 0, ale z definice snadno vidíme, že $f'_\pm(0) = \pm\infty$ (a speciálně, že derivace f v 0 neexistuje). Bod 0 je tedy bodem lokálního i globálního minima, bod lokálního (ani globálního) maxima neexistuje. Obor hodnot je tedy (využíváme spojitost na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, monotonii a limity v krajních bodech těchto intervalů) $\{-2023\pi\} \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dále

$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2\left(x^2\right) + 4\log\left(x^2\right) + 1\right)}{x^2\left(\log^2(x^2) + 1\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Platí tedy

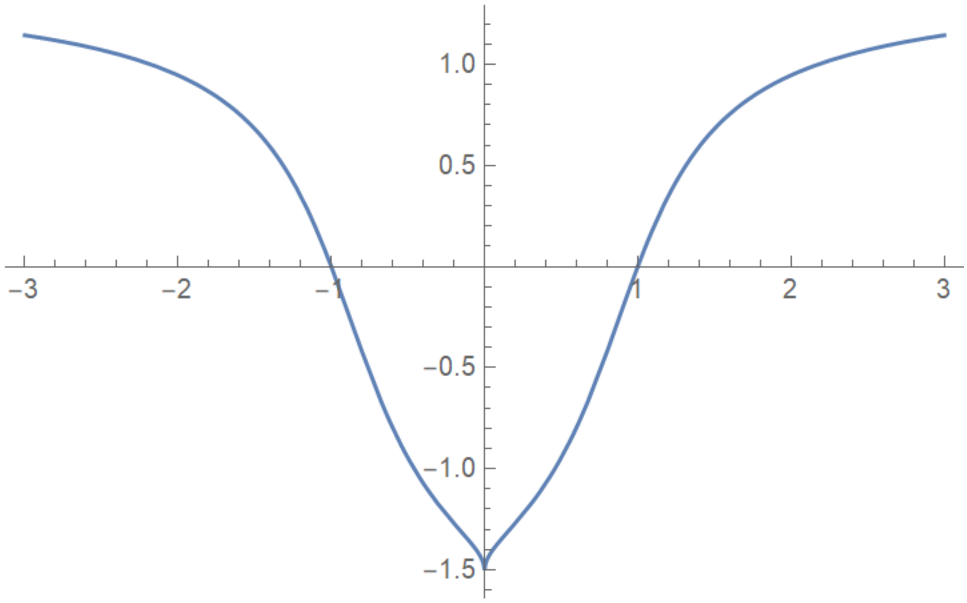
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$f'' > 0 \quad \text{na} \quad (-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}),$$

$$f'' < 0 \quad \text{na} \quad (-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0) \cup (0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty).$$

Funkce je tedy konvexní na $(-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, $(-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0)$, $(0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty)$. Inflexní body jsou $-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ a $e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Na obrázku není pro lepší viditelnost zobrazena hodnota v bodě 0.



Úloha 2 (20 bodů)

(a) Křivky $x^2 + y^2 = 3$ a $y^2 = 2|x|$ se protínají v bodech $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$. Využitím symetrie množiny $M \cap N$ a funkce $|x|$ dostáváme

$$\int_{M\cap N} |x| dxdy = 4 \int_P x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde $P = M \cap N \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty dostáváme

$$4\int_P x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[x^2\right]_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=\sqrt{3-y^2}} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - y^2 - \frac{y^4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - 2y^2 - \frac{y^4}{2}\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[6y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{y^5}{10}\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(6 - \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

(b) Množina M je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Integrovaná funkce je spojitá na M, a proto je omezená. Celkově je tedy uvedený integrál konečný.

Úloha 3 (20 bodů)

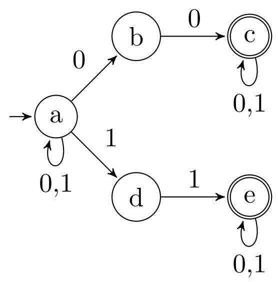
(i) Počet všech různých výběrů je $12 * 11 * 10 * 9 * 8 = 95040$.

(ii) Počet různých výběrů, které neobsahují ani jeden kompletní pár, je $12{*}10{*}8{*}6{*}4 = 23040$. Tudíž počet různých výběrů obsahujících alespoň jeden kompletní pár je $95040 - 23040 = 72000$.

(iii) Požadovaná pravděpodobnost je tedy $\frac{72000}{95040} \approx 75.76\,\%$.

Úloha 4 (20 bodů)

Nedeterministický automat $(\{a, b, c, d, e\}, \{0, 1\}, \delta, a, \{c, e\})$, přechodová funkce δ definovaná přechodovým diagramem:



Deterministický automat $(\{\lambda, 0, 1, e\}, \{0, 1\}, \delta_d, \lambda, \{e\})$ získáme podmnožinovou konstrukcí (lze i intuitivně). Přechodová funkce δ_d definovaná přechodovým diagramem: