Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2024, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou[1] odpověď získáte $+2$ body, za každou špatně označenou odpověď -2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi		
		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Méně než 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Kladné číslo	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Bodů:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = \log \frac{1}{1+x^2}$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Funkce f je prostá.
(b) Funkce f je sudá.
(c) Funkce f je periodická.
(d) Funkce f je rostoucí.
(e) Funkce f je omezená.

Úloha 2. Je dána funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Funkční hodnota je nulová v bodech $x = 1$ a $x = 2$.
(b) Graf funkce f protíná přímku $y = 1$ v právě jednom bodě.
(c) Funkce f není ani sudá, ani lichá.
(d) Oborem hodnot funkce f jsou všechna reálná čísla.
(e) Definiční obor funkce je roven jejímu oboru hodnot.

Úloha 3. Uvažujme nerovnici

$$(x - 3)(x - 2) \leqq 4x - 2.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Množina všech reálných řešení nerovnice má nekonečně mnoho prvků.
(b) Hodnota $x = 1$ není řešením nerovnice.
(c) Interval $(2, 6)$ je podmnožinou množiny všech reálných řešení nerovnice.
(d) Všechna $x \leqq 0$ řeší uvedenou nerovnici.
(e) Pokud znaménko nerovnosti obrátíme, bude mít vzniklá nerovnice kladná i záporná řešení.

Úloha 4. Určete všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}$ tak, aby byla řešením soustavy rovnic

$$|x + y| - |x - y| = 4,$$
$$|x + y| + 2\,|x - y| = 13.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Soustava má více než dvě různá řešení.
(b) Pro všechna řešení jsou obě čísla x i y celá.
(c) Existuje řešení, ve kterém je součin xy liché číslo.
(d) Existuje řešení, pro které platí, že součin $xy < 0$.
(e) Součet hodnot y pro všechna řešení je roven 0.

Úloha 5. Jsou dány body $A = [3, -1]\,, B = [7, 3]\,, C\,[8, -2]\,, D = [2, 4]\,, E = [1, 1]\,, F = [4, 4]$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Přímky $p = AB$ a $q = CD$ jsou různoběžné a protínají se v bodě $R = [5, 1]$.
(b) Přímky $p = AB$ a $q = CD$ jsou rovnoběžné.
(c) Vektory $\overrightarrow{AE}$ a $\overrightarrow{FD}$ svírají úhel $60°$.
(d) Přímky $p = AB$ a $r = EF$ jsou rovnoběžné.
(e) Přímky $q = CD$ a $r = EF$ jsou na sebe kolmé.

Úloha 6. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$\sin|x| = |\cos x|$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

(a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(b) Pokud $x \in M$, pak $x + \pi \in M$.
(c) Pokud $x \in M$, pak $x + 2\pi \in M$.
(d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
(e) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.

Úloha 7. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož boční hrany jsou stejně dlouhé jako hrany podstavné. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení, je-li objem jehlanu $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm^3:

(a) Délka podstavné hrany jehlanu je 9 cm.
(b) Délka podstavné hrany jehlanu je 3 cm.
(c) Obsah pláště (povrch bez obsahu podstavy) jehlanu je $9\sqrt{3}$ cm^2.
(d) Povrch jehlanu je $9\sqrt{3}$ cm^2.
(e) Výška jehlanu je $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

Úloha 8. Nechť je funkce f zadána předpisem

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

Určete reálná čísla a, b, c taková, že platí $f(-2) = 1/3$, $f(-1) = 1/2$, $f(1) = 1/6$, a rozhodněte o platnosti následujících výroků:

(a) Čísla a, b, c jsou nezáporná a racionální.
(b) Funkce f je prostá.
(c) Funkce f je definována ve všech bodech $\mathbb{R}$.
(d) Existuje reálné číslo x takové, že $f(x) < 0$.
(e) Funkce f nabývá v bodě 0 svého maxima.

Úloha 9. Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_2 + a_3 = 9, \qquad a_2 \cdot a_3 = 14.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Existují dvě aritmetické posloupnosti daných vlastností.
(b) Existuje právě jedna aritmetická posloupnost daných vlastností.
(c) Pokud a_1 je kladné, pak a_{10} je záporné.
(d) Pokud a_1 je záporné, pak a_{10} je kladné.
(e) Diference posloupnosti je 3.

Úloha 10. V cukrárně nabízejí zmrzlinu pěti různých druhů.

(a) Pokud si chceme vybrat tři druhy zmrzliny, máme na výběr z méně než 12 možností.
(b) Počet možností výběru tří druhů zmrzliny je stejný, jako počet výběrů dvou druhů.
(c) Tři kopečky různých druhů zmrzliny lze naložit na kornout nejvýše 56 způsoby. (Záleží na pořadí kopečků.)
(d) Když si chce spolužák vybrat tři druhy zmrzliny, které se liší od mnou vybraných tří druhů právě v jednom druhu, má méně než 10 možností výběru.
(e) V minulém případě d) má spolužák nejvýše 6 možností.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2024, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou[1] odpověď získáte $+2$ body, za každou špatně označenou odpověď -2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi		
		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne	
(a)	2	●	○	$(+2)$	●	○	$(+2)$	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	$(+2)$	○	○	(0)	○	●	$(+2)$	~~●~~	●	$(+2)$
(c)	Méně než 12	●	○	$(+2)$	○	●	(-2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Kladné číslo	●	○	$(+2)$	○	○	(0)	○	●	(-2)	~~●~~	●	(-2)
(e)	1	○	●	$(+2)$	●	○	(-2)	○	●	$(+2)$	~~●~~	●	$(+2)$
Bodů:			**10**			**0**			**2**			**2**	

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = (\sin x) \cdot (\sin x^2)$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Funkce f je sudá.
(b) Funkce f je klesající.
(c) Funkce f je periodická.
(d) Funkce f je prostá.
(e) Funkce f je omezená.

Úloha 2. Je dána funkce

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Funkční hodnota je nulová v bodech $x = 3$ a $x = -4$.
(b) Graf funkce f protíná přímku $y = 2$ v právě jednom bodě.
(c) Funkce f není ani sudá, ani lichá.
(d) Oborem hodnot funkce f jsou všechna reálná čísla.
(e) Definiční obor funkce je roven jejímu oboru hodnot.

Úloha 3. Uvažujme nerovnici

$$(x - 4)(x - 1) > 3x - 8.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Množina všech reálných řešení nerovnice má nekonečně mnoho prvků.
(b) Hodnota $x = 6$ není řešením nerovnice.
(c) Interval $(-2, 3)$ je podmnožinou množiny všech reálných řešení nerovnice.
(d) Všechna $x \leqq 0$ řeší uvedenou nerovnici.
(e) Pokud znaménko nerovnosti obrátíme, bude mít vzniklá nerovnice kladná i záporná řešení.

Úloha 4. Určete všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}$ tak, aby byla řešením soustavy rovnic

$$\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 8,$$
$$2\sqrt{x + y} - 3\sqrt{x - y} = 6.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Soustava má dvě různá řešení.
(b) Pro všechna řešení jsou obě čísla x i y celá.
(c) Existuje řešení, ve kterém jsou x i y kladná čísla.
(d) Pro jedno z řešení platí, že součin $(x + y)(x - y) = 128$.
(e) Existuje řešení, pro které je součin $xy < 0$.

Úloha 5. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí $b = 5$ cm (b je odvěsna proti vrcholu B) a $v_c = 4$ cm (v_c je výška na stranu c). Rozhodněte, zda platí:

(a) Délka odvěsny a v trojúhelníku ABC je větší než 6 cm a menší než 7 cm.
(b) Velikost úhlu α (vnitřní úhel při vrcholu A) je větší než $45°$.
(c) Velikost úhlu β (vnitřní úhel při vrcholu B) je větší než $45°$.
(d) Obsah trojúhelníku ABC je menší než 16 cm^2.
(e) Délka přepony c v trojúhelníku ABC je větší než 8 cm a menší než 9 cm.

Úloha 6. Nechť M je množina všech řešení nerovnice

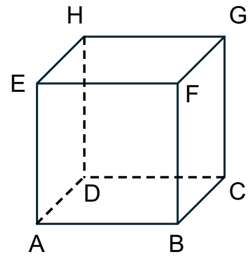
$$\log_x 2 > \log_2 x$$

v oboru reálných čísel splňujících $x > 0$, $x \neq 1$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Množina M je omezená.
(b) Pokud $x \in M$, pak $\frac{1}{x} \notin M$.
(c) M je interval.
(d) M lze zapsat jako sjednocení dvou otevřených intervalů.
(e) M lze zapsat jako průnik tří otevřených intervalů.

Úloha 7. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 4 cm. Rozhodněte, zda platí:

(a) Objem trojbokého jehlanu $ABDH$ je $\frac{32}{3}$ cm^3.
(b) Povrch trojbokého jehlanu $ABDH$ je $16(1+\sqrt{2})$ cm^2.
(c) Délka tělesové úhlopříčky krychle je $4\sqrt{2}$ cm.
(d) Poměr objemu trojbokého jehlanu $ABDH$ ku objemu krychle $ABCDEFGH$ je $\frac{1}{3}$.
(e) Obsah trojúhelníku DBH je $8\sqrt{2}$ cm^2.



Úloha 8. Funkce f je zadána předpisem

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$

Určete reálná čísla a, b, c taková, že platí $f(-3) = 1/6$, $f(-1) = -1/4$, $f(1) = -1/6$, a rozhodněte o platnosti následujících výroků:

(a) Čísla a, b, c jsou nezáporná a racionální.
(b) Funkce f je prostá.
(c) Funkce f je definována ve všech bodech $\mathbb{R}$.
(d) Existuje reálné číslo x takové, že $f(x) < 0$.
(e) Pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = y$.

Úloha 9. Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a zároveň platily následující rovnosti:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2^x, \quad a_3 = 2^{x+2} + 12.$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) Všechny členy posloupnosti jsou kladné.
(b) Kvocient posloupnosti je celé číslo.
(c) Úloha nemá řešení.
(d) Číslo 366 je členem posloupnosti.
(e) Číslo 36^2 je členem posloupnosti.

Úloha 10. Na letišti je 6 bran pro letadla. U jedné brány může být odbavováno 1 letadlo.

(a) Počet možností, které 4 brány vybrat pro odbavení 4 letadel, je větší, než počet možností, které 3 brány vybrat pro odbavení 3 letadel.
(b) Počet možností, které 4 brány vybrat pro odbavení 4 letadel, je stejný jako počet možností, které 2 brány vybrat pro odbavení 2 letadel.
(c) Tři letadla je možno postavit ke konkrétním branám nejvýše 100 způsoby.
(d) Tři letadla je možno postavit ke konkrétním branám aspoň 120 způsoby.
(e) Při třech odbavovaných letadlech lze přeplánování jednoho letadla k jiné bráně uskutečnit 12 způsoby.

Řešení A

(1) N A N N N

(2) N A A N N

(3) A N A N A

(4) A A N N A

(5) A N N A A

(6) A N N N A

(7) N A A N A

(8) A N A N N

(9) A N A A N

(10)A A N A A

Řešení B

(1) N N N N A

(2) N A A N N

(3) A A N A N

(4) N A A N N

(5) A A N N A

(6) A A N A N

(7) A A N N A

(8) N N N A N

(9) A A N N A

(10)N A N A N