Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2024

Studijní program: MDUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Rozhodněte, zda následující posloupnost je omezená:

$$\left\{(\log n)^{\log n} - n^{\log(\log n)}\right\}_{n=2}^{\infty}.$$

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující rovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Spočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (20 bodů)

Ať

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2\sqrt{x^2 + y^2} \le 1\right\},$$
$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \le z\right\}.$$

Je množina $K := M \cap N$ omezená? Určete objem množiny K.

Úloha 3 (20 bodů)

Mongeovo promítání: $O = [10, 15]$, levotočivá soustava souřadnic

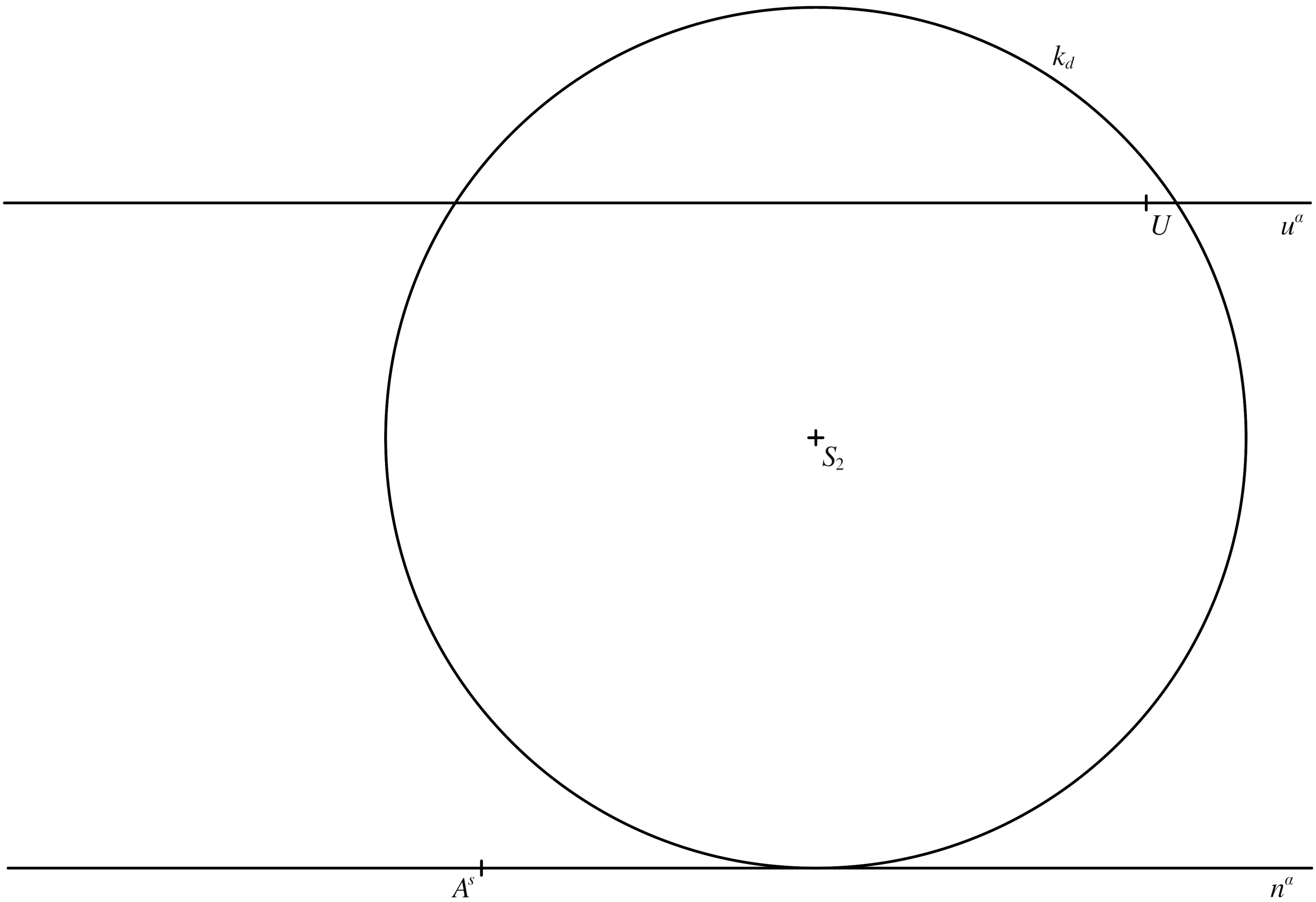
Anuloid vzniká rotací kružnice $k(S, r)$ ležící v rovině rovnoběžné s nárysnou okolo osy o kolmé k půdorysně, procházející bodem O. Sestrojte průměty anuloidu. Zobrazte řez anuloidu bitangenciální rovinou ρ, tj. rovinou dotýkající se anuloidu ve dvou různých bodech, kolmou k nárysně. Stanovte viditelnost průnikové křivky. (Rýsujte na nový list papíru.)

$S = [4; 6; 4]$, $r = 2cm$, $O = [0; 6; 0]$, $x_\rho < 0$.

Úloha 4 (20 bodů)

Středové promítání: S_2 – pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d - distanční kružnice

Sestrojte krychli $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou $ABCD$ v rovině α, znáte-li středový průmět vrcholu A, vrchol B leží na polopřímce AU, kde U je úběžník přímky AB, délka hrany krychle je 6 cm. Body S, A' leží ve stejném poloprostoru určeném rovinou α.



k_d
U
u^a
S_2
A^s
n^a

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní program: MDUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Protože $(\log n)^{\log n} = e^{\log n \log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$, posloupnost je konstantně nulová, a tedy též omezená.

(b) Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je rovnost triviální. Předpokládejme, že rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n+1}{6}\big(6(n+1) + n(2n+1)\big) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

čímž je rovnost dokázána pro $n+1$.

(c) Z růstové škály plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = 0$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} < 1.$$

Z věty o dvou policajtech a známého faktu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ pro libovolné $c > 0$, okamžitě plyne

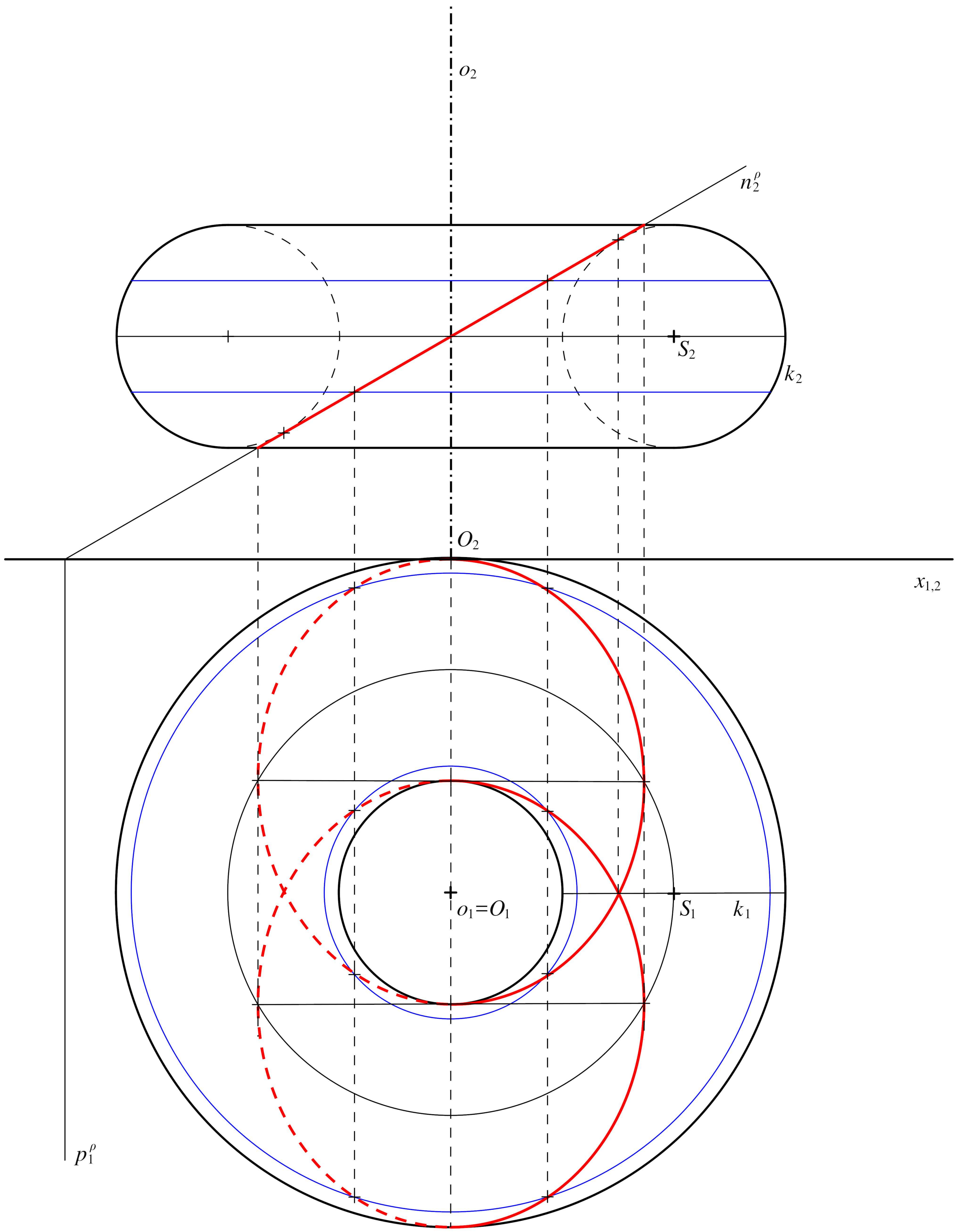
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Úloha 2 (20 bodů)

Množina K není omezená, protože např. $(0,0,z) \in K$ pro libovolné $z \geq 0$. Dále platí, že $(x,y,z) \in K$, právě když $z \geq 0$ a $\sqrt{x^2+y^2} \leq \min\{z, z^{-2}\}$. Navíc $\min\{z, z^{-2}\} = z$ pro $z \leq 1$ a $\min\{z, z^{-2}\} = z^{-2}$ pro $z \geq 1$. Objem množiny K můžeme vyjádřit jako integrál z jedničky přes množinu K. Následně tento integrál počítáme pomocí Fubiniovy věty s použitím vzorce pro obsah kruhu:

$$\int_K 1 \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\right\}} 1 \, \mathrm{d}(x,y) \, \mathrm{d}z +$$
$$+ \int_1^\infty \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^{-2}\right\}} 1 \, \mathrm{d}(x,y) \, \mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \pi z^2 \, \mathrm{d}z + \int_1^\infty \pi z^{-4} \, \mathrm{d}z = \pi \left(\left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} z^{-3}\right]_1^\infty \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Úloha 3 (20 bodů)



Úloha 4 (20 bodů)