PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní program: FMUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Rozhodněte, zda následující posloupnost je omezená:

$$\left\{(\log n)^{\log n} - n^{\log(\log n)}\right\}_{n=2}^{\infty}.$$

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující rovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Spočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (20 bodů)

Ať

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2\sqrt{x^2 + y^2} \le 1\right\},$$
$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \le z\right\}.$$

Je množina $K := M \cap N$ omezená? Určete objem množiny K.

Úloha 3 (20 bodů)

Uvažujme planetu o hmotnosti M a poloměru R umístěnou v počátku systému souřadnic.

I. část

Odvoďte vztah pro potenciální energii tělesa o hmotnosti m, které je v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$, přičemž $r > R$, a působí na něj gravitační síla planety

$$\vec{F}_{\mathrm{G}} = -G\,\frac{M\,m}{r^3}\,\vec{r},$$

kde G je gravitační konstanta.

II. část

Odvoďte vztah pro únikovou rychlost z povrchu planety pomocí zákona zachování energie.

Úloha 4 (20 bodů)

Uvažujte těleso, které má nenulovou počáteční hybnost a které je ve směru pohybu tlumeno pružinou až na $p = 0$.

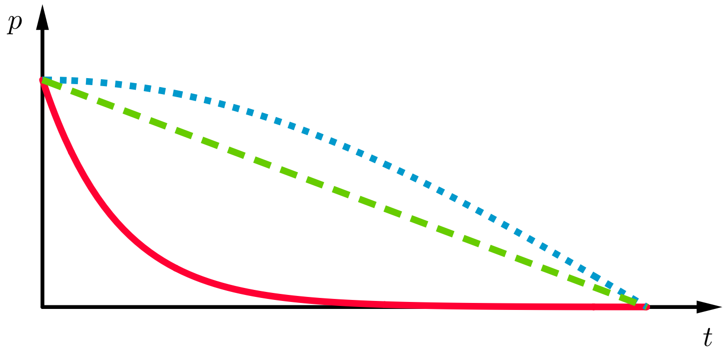
I. část

Který z grafů na obrázku 1 by mohl odpovídat časovému průběhu velikosti hybnosti v popsané situaci? Svůj výběr zdůvodněte.

II. část

Nyní uvažujme, že tělesem, jehož pohyb je tlumen, je člověk o hmotnosti 100 kg. Jeho počáteční velikost hybnosti je $1000\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a nulové hodnoty dosáhne během $0,1$ s. Může tento proces přežít? Svoji odpověď zdůvodněte.

OBRÁZEK 1. Závislost velikosti hybnosti na čase



Jako kritickou hodnotu přetížení, kdy člověk umírá, považujte $20\,g$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2024

Studijní program: FMUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Protože $(\log n)^{\log n} = e^{\log n \log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$, posloupnost je konstantně nulová, a tedy též omezená.

(b) Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je rovnost triviální. Předpokládejme, že rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n+1}{6}\big(6(n+1) + n(2n+1)\big) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

čímž je rovnost dokázána pro $n + 1$.

(c) Z růstové škály plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = 0$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} < 1.$$

Z věty o dvou policajtech a známého faktu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ pro libovolné $c > 0$, okamžitě plyne

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Úloha 2 (20 bodů)

Množina K není omezená, protože např. $(0,0,z) \in K$ pro libovolné $z \geq 0$. Dále platí, že $(x,y,z) \in K$, právě když $z \geq 0$ a $\sqrt{x^2+y^2} \leq \min\{z, z^{-2}\}$. Navíc $\min\{z, z^{-2}\} = z$ pro $z \leq 1$ a $\min\{z, z^{-2}\} = z^{-2}$ pro $z \geq 1$. Objem množiny K můžeme vyjádřit jako integrál z jedničky přes množinu K. Následně tento integrál počítáme pomocí Fubiniovy věty s použitím vzorce pro obsah kruhu:

$$\int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_1^\infty \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^{-2}\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \pi z^2 \,\mathrm{d}z + \int_1^\infty \pi z^{-4}\,\mathrm{d}z = \pi\left(\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}z^{-3}\right]_1^\infty\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Úloha 3 (20 bodů)

$$\vec{F}_\mathrm{G} = -G\,\frac{M\,m}{r^3}\,\vec{r}. \tag{1}$$

I. část

Gravitační síla a potenciální energie souvisí podle vztahu

$$\vec{F}_\mathrm{G} = -\mathrm{grad}\, E_\mathrm{p}. \tag{2}$$

Rozepíšeme si obě strany rovnice (2) do složek:

$$\vec{F}_\mathrm{G} = (F_x,\ F_y,\ F_z) = -\left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x},\ \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y},\ \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\, E_\mathrm{p}$$

a E_p vypočítáme například z x-ové složky. Je-li $F_x = -\partial E_\mathrm{p}/\partial x$, potom platí

$$E_\mathrm{p} = -\int F_x\,\mathrm{d}x.$$

S přihlédnutím k rovnici (1) můžeme integrál rozepsat a vypočítat:

$$E_\mathrm{p} = -\int F_x\,\mathrm{d}x = G\,M\,m \int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{substituce:} \\ t = x^2+y^2+z^2 \\ \frac{\partial t}{\partial x} = 2\,x \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = G\,M\,m \int t^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{G\,M\,m}{2}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= -G\,\frac{M\,m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c,$$

kde výraz $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ nahradíme r a kde c je integrační konstanta. Protože jsme E_p počítali z parciální derivace podle proměnné x, je obecně $c = c(y,\ z)$. Kdybychom ale počítali E_p z rovnice $F_y = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}$, resp. $F_z = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}$, vyšlo by nám E_p stejně a $c = c(x,\ z)$, resp. $c = c(x,\ y)$. Z toho ale vyplývá, že c musí být konstantou. Platí tedy, že

$$E_\mathrm{p} = -G\,\frac{M\,m}{r} + c.$$

Význam konstanty c je patrný pro $r \to \infty$. Potom výraz $-G\,\frac{M\,m}{r} \to 0$ a c je potenciální energie v nekonečnu. Ta se typicky klade rovna 0. Potenciální energie gravitačního pole popsaného rovnicí (1) je tedy

$$E_\mathrm{p} = -G\,\frac{M\,m}{r}.$$

II. část

Těleso, které má uniknout gravitačnímu působení planety, musí teoreticky odletět do „nekonečna“, kde F_G a E_p konvergují k 0. Díky tomu, že tam na něj už gravitační síla „nedosáhne“, stačí, aby mělo těleso na začátku právě takovou rychlost, resp. kinetickou energii E_k, aby během unikání postupně zpomalovalo a „zastavilo se v nekonečnu“. Jinak řečeno, pro $r \to \infty$ platí, že $E_\mathrm{p} \to 0$ a $E_\mathrm{k} \to 0$. Pro $r \to \infty$ tedy celková mechanická energie konverguje k 0. Ze zákona zachování mechanické energie potom vyplývá, že celková mechanická energie musela být rovna 0 i na začátku, tj.

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 0.$$

Dosadíme za vztahy pro jednotlivé energie a položíme $r = R$, jelikož má těleso uniknout z povrchu planety. Získáváme tedy vztah

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\,\frac{M\,m}{R} = 0,$$

z něhož vyjádříme rychlost:

$$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}.$$

Úloha 4 (20 bodů)

I. část

Časový průběh velikosti hybnosti by mohl odpovídat modrému, tečkovanému grafu.

Pružina brzdí těleso silou, která je přímo úměrná výchylce a vhodnou volbou vztažné soustavy může být vyjádřena rovnicí

$$F = -k\,x, \tag{3}$$

kde k je tuhost pružiny a x okamžitá výchylka z rovnovážné polohy. Řešením rovnice (3) je harmonický průběh okamžité výchylky, a proto má harmonický průběh i působící síla.

Síla a hybnost spolu souvisí podle 2. Newtonova zákona rovnicí

$$F = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}t}.$$

Má-li být síla derivací hybnosti a zároveň má harmonický průběh, musí mít harmonický průběh i hybnost. To na obrázku 1 splňuje pouze modrý, tečkovaný graf, který by mohl být částí funkce kosinus.

II. část

Člověk by popsaný proces mohl přežít.

Ze zadání vyplývá, že změna velikosti hybnosti je $\Delta p = 1000\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ a změna času je $\Delta t = 0,1$ s. Můžeme tedy přibližně určit rázovou sílu, která na člověka působí:

$$F \approx \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

což po dosazení dává hodnotu 10000 N. Takováto síla odpovídá u 100kg člověka zrychlení $100\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Budeme-li uvažovat $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, získáme hodnotu přetížení $10\,g$, což je polovina oproti kritické hodnotě $20\,g$.