Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2024

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Mějme

$$f(x,y) = xy \log(4x^2 + 2y^2).$$

(a) Určete D_f (definiční obor funkce f).
(b) Nalezněte body, kde $\nabla f(x,y) = [0,0]$.
(c) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f na D_f.
Jednotlivé kroky řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (25 bodů)
Spočtěte objem množiny

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon |y| \geq x^3,\ x \geq 2y^2 - 1,\ |z| \leq |x|\right\}.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Uvažujme náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, y; \phi) = \phi x \exp\{-\phi x y\}\, \mathcal{I}\{x \in (0,1), y > 0\}, \quad \phi > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\phi > 0$.
(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr ϕ.
(c) Sestavte
 (i) test poměrem věrohodnosti,
 (ii) Raoův skórový test,
 (iii) Waldův test
 pro nulovou hypotézu $H_0 \colon \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 \colon \phi \neq 1$.

Úloha 4 (25 bodů)
Investujeme jednorázově částku $C > 0$ a necháme ji průběžně zhodnocovat.
(a) Určete, za jak dlouho (v letech) se nominální hodnota této investice zdvojnásobí, jestliže uvažujeme:
 (i) spojité úročení s konstantní intenzitou $\delta = 0.06$,
 (ii) spojité úročení s funkcí intenzity $\delta(t) = 0.03t^2$,
 (iii) jednoduché úročení s úrokovou sazbou $r = 6\%$ p.a.,
 (iv) složené půlroční úročení s nominální úrokovou sazbou $r_N = 6\%$ p.a.
(b) Nyní předpokládejte, že doba než se hodnota investice zdvojnásobí je náhodná veličina mající exponenciální rozdělení s hustotou

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočítejte pravděpodobnost, že vnitřní míra výnosnosti (IRR) této investice bude alespoň 5 %.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Polynomy jsou definovány a C^2 na celém $\mathbb{R}^2$. Logaritmus je definován a C^2 na $\mathbb{R}^+$. $4x^2 + 2y^2 > 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Definičním oborem funkce f, na kterém je rovněž C^2, je tedy množina $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$.

(b) Řešíme rovnici $\nabla f(x,y) = [0,0]$. Tedy

$$y \log\left(4x^2 + 2y^2\right) + \frac{8x^2 y}{4x^2 + 2y^2} = 0,$$
$$x \log\left(4x^2 + 2y^2\right) + \frac{4xy^2}{4x^2 + 2y^2} = 0.$$

Podle toho, zda x, y jsou či nejsou rovny 0 mohou nastat 4 možnosti.

$x = y = 0$: Bod $[0,0]$ není v D_f.

$x = 0, y \neq 0$: Z 1. rovnice obdržíme

$$\log\left(2y^2\right) = 0,$$

a tedy $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Řešením jsou tedy body $\left[0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

$y = 0, x \neq 0$: Obdobně jako v předchozím z 2. rovnice obdržíme

$$\log\left(4x^2\right) = 0,$$

a tedy $x = \pm\frac{1}{2}$. Řešením jsou tedy body $\left[\pm\frac{1}{2}, 0\right]$.

$x, y \neq 0$: 1. rovnici podělíme y, 2. rovnici x a odečteme je. Obdržíme $2x^2 = y^2$. Dosazením do podělené 1. rovnice pak obdržíme

$$\log\left(4y^2\right) = -1.$$

Pak $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{e}}$ a $x = \pm\frac{1}{\sqrt{8e}}$. Řešením jsou tedy body $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{8e}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{e}}\right]$.

(c) Nejprve spočítáme matici druhých derivací

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy\frac{2x^2+3y^2}{\left(2x^2+y^2\right)^2} & \log(4x^2+2y^2) + 2\frac{y^4+4x^4}{\left(2x^2+y^2\right)^2} \\ \log(4x^2+2y^2) + 2\frac{y^4+4x^4}{\left(2x^2+y^2\right)^2} & 2xy\frac{6x^2+y^2}{\left(2x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Postupně budeme do $\nabla^2 f(x,y)$ dosazovat body z části (b) a z definitnosti příslušných matic pak určovat, zda se jedná o lokální maxima, minima, či sedlové body.

$$\nabla^2 f\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \nabla^2 f\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je indefinitní (determinant je záporný), body $\left[0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ a $\left[\pm\frac{1}{2}, 0\right]$ jsou tedy sedlové.

$$\nabla^2 f\left(\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right]\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matice je pozitivně definitní, body $\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right]$ jsou tedy body lokálních minim, $f\left(\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right]\right) = \frac{-1}{4\sqrt{2e}}$.

$$\nabla^2 f\left(\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, -\frac{1}{2\sqrt{e}}\right]\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matice je negativně definitní, body $\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, -\frac{1}{2\sqrt{e}}\right]$ jsou tedy body lokálních maxim, $f\left(\pm\left[\frac{1}{\sqrt{8e}}, -\frac{1}{2\sqrt{e}}\right]\right) = \frac{1}{4\sqrt{2e}}$.

Úloha 2 (25 bodů)
Platí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |y|^{\frac{1}{3}} \geq x \geq 2y^2 - 1,\ |z| \leq |x|\right\}.$$

Ze symetrie rovněž platí $\mathrm{Vol}(M) = 4\,\mathrm{Vol}(N)$, kde

$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^{\frac{1}{3}} \geq x \geq 2y^2 - 1,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq |x|\right\}.$$

Pro $y \geq 0$ platí $y^{\frac{1}{3}} \geq 2y^2 - 1$ právě tehdy, když $y \in [0, 1]$, dostáváme tedy

$$\mathrm{Vol}(M) = 4\,\mathrm{Vol}(N) = 4\int_N 1 = 4\int_0^1 \int_{2y^2-1}^{y^{\frac{1}{3}}} \int_0^{|x|} 1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Odtud

$$\mathrm{Vol}(M) = 4\int_0^1 \int_{2y^2-1}^{y^{\frac{1}{3}}} |x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \left[(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2}\right]_{x=2y^2-1}^{x=y^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}y.$$

A dále

$$\mathrm{Vol}(M) = 2\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y - 2\int_0^1 \operatorname{sgn}(2y^2-1)(2y^2-1)^2\,\mathrm{d}y.$$

Spočteme

$$\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{5}.$$

a dále

$$I := \int_0^1 \operatorname{sgn}(2y^2-1)(2y^2-1)^2 = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2y^2-1)^2\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2y^2-1)^2\,\mathrm{d}y.$$

Protože

$$\int (2y^2-1)^2\,\mathrm{d}y = \int 4y^4 - 4y^2 + 1\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}y^5 - \frac{4}{3}y^3 + y + C,$$

dostáváme

$$I = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 1 - 2\left(\frac{4}{5}2^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}2^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Celkem dostaneme $\mathrm{Vol}(M) = 2\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15} + \frac{8\sqrt{2}}{15}\right) = \frac{16\sqrt{2}+4}{15}$.

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \phi^n \prod_{i=1}^{n} X_i \exp\left\{-\phi \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right\},\ X_i \in (0,1),\ Y_i > 0,\ \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$\ell_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = n \log \phi + \sum_{i=1}^{n} \log X_i - \phi \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{n}{\phi} - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

Hledaný maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial \ell_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])/\partial \phi = 0$ vzhledem k neznámému parametru ϕ, tj.

$$\hat{\phi} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{\partial \phi} = \frac{1}{\phi^2},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\phi}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n}\right)^2 > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\phi) = \mathsf{E} I_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{1}{\phi^2}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\phi} - \phi\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \phi^2\right), \quad n \to \infty.$$

(c, i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\phi}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{L_n(1; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])} = 2n \log \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i} - 2\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jediném stupni volnosti.

(c, ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])]^2}{n I(1)} = \frac{1}{n}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c, iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n\left(\hat{\phi} - 1\right)^2 I\left(\hat{\phi}\right) = n\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n}\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Úloha 4 (25 bodů)
(a) Jednotlivé podúlohy:

(i)

$$\begin{aligned} 2C &= e^{\delta t} C \\ t &= \frac{1}{\delta}\log(2) = \frac{1}{0.06}\log(2) \doteq 11.6 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 2C &= e^{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s} C \\ &\text{integrál: } \int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s = \int_0^t 0.03 s^2 \mathrm{d}s = 0.01 t^3. \\ &\text{po dosazení: } 2C = e^{0.01 t^3} C \\ t &= \left(\frac{1}{0.01}\log(2)\right)^{1/3} \doteq 4.1 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 2C &= (1 + t \cdot r)C \\ t &= \frac{1}{r} = \frac{1}{0.06} \doteq 16.7 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} 2C &= \left(1 + \frac{r_N}{2}\right)^{2t} C \\ t &= \frac{1}{2}\frac{\log(2)}{\log(1 + \frac{r_N}{2})} = \frac{1}{2}\frac{\log(2)}{\log(1.03)} \doteq 11.7 \end{aligned}$$

(b) Jednotlivé kroky:

$$\begin{aligned} 2C &= (1 + \mathrm{IRR})^t C \\ \mathrm{IRR} &= 2^{1/t} - 1 \end{aligned}$$

Vyjádření pravděpodobnosti:

$$\mathbb{P}[\mathrm{IRR} \geq 0.05] = \mathbb{P}\left[2^{1/t} - 1 \geq 0.05\right] = \mathbb{P}\left[t \leq \frac{\log(2)}{\log(1.05)}\right]$$

Výpočet pravděpodobnosti z hustoty (případně dosazená do známé distribuční funkce):

$$\mathbb{P}[t \leq T] = \int_0^T \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} \mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{T}{10}},$$

tedy v našem případě:

$$\mathbb{P}\left[t \leq \frac{\log(2)}{\log(1.05)}\right] = 1 - e^{-\frac{1}{10}\frac{\log(2)}{\log(1.05)}} \doteq 0.76.$$