Informatika - navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky - 2024 - Zadání - Varianta A

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.
Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.
Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Uvažujme všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis je osmiciferný a obsahuje právě tři sedmičky. Určete celkový počet čísel s uvedenou vlastností.

2 Algoritmy

Binární halda (binary heap) je specifická stromová datová struktura.

A. Definujte přesně, co je binární halda.

B. Může halda obsahovat dva prvky se stejnou hodnotou?

C. Popište přesně algoritmus pro přidání nového prvku do haldy. Stačí slovní popis, program nepište.

3 Logika Informatika

Víme že:

(A1) Žádný motýl není pták.

(A2) Každý smrtihlav je motýl.

Vaším úkolem bude rozhodnout, zda ze znalostí vyplývá, že

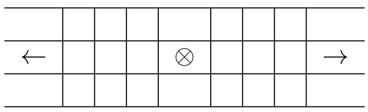
(D) Žádný smrtihlav není pták.

Postup řešení:

a. Tvrzení (A1), (A2) a (D) vyjádřete formulemi predikátové logiky prvního řádu s unárními predikáty $M(x)$, $P(x)$, $S(x)$ s významem po řadě x je motýl, pták, smrtihlav.

b. Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A1) a (A2).

4 Automaty



Mějme do stran nekonečnou čtverčkovanou pásku o třech řádcích. Na jednom políčku v prostředním řádku se nachází agent $\otimes$. Agent se může pohybovat u-nahoru, d-dolů, l-doleva a r-doprava. Například plánem *urddlu* proběhne pět políček vrátí se na původní místo, *uudd* spadne při druhém kroku přes horní okraj, *ulldr* skončí vlevo od počátečního políčka, což pro nás bude přijatelná posloupnost.

Navrhněte konečný automat, který zkontroluje, zda agent nespadne nahoru ani dolů a skončí na prostřední řádce. Tahy vlevo a vpravo mohou být vložené libovolně.
Automat má přijímat řetězce *uddudu* a *ulld*, nemá přijmout *uudd* (spadnul) ani *udd* (skončil na dolním řádku, ne prostředním).

Informatika - navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky - 2024 - Řešení - Varianta A

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.
Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.
Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Uvažujme všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis je osmiciferný a obsahuje právě tři sedmičky. Určete celkový počet čísel s uvedenou vlastností.

1.1 Řešení

Z požadavku osmi cifer vyplývá, že všechna uvažovaná čísla jsou větší než 10000000 a menší než 99999999.

a. Nejprve určíme počet těch, která začínají sedmičkou. Máme $\binom{7}{2}$ možností, kam umístit zbývající dvě sedmičky a 9^5 možností, jak obsadit zbývajících 5 cifer.

b. Čísla, která nezačínají sedmičkou, musejí začít jinou cifrou větší než nula, takových je 8. Potom máme $\binom{7}{3}$ možností, kam umístit tři sedmičky a 9^4 možností, jak obsadit zbývající 4 cifry.

c. Celkový počet všech uvažovaných čísel je tedy $\binom{7}{2} \cdot 9^5 + 8 \cdot \binom{7}{3} \cdot 9^4$.

2 Algoritmy

Binární halda (binary heap) je specifická stromová datová struktura.

A. Definujte přesně, co je binární halda.

B. Může halda obsahovat dva prvky se stejnou hodnotou?

C. Popište přesně algoritmus pro přidání nového prvku do haldy. Stačí slovní popis, program nepište.

2.1 Řešení

A. Binární halda je binární strom, který uchovávané hodnoty obsahuje ve svých vrcholech. Strom musí splňovat následující vlastnosti:

   – Pro každý prvek haldy platí, že žádný jeho následník nemá menší hodnotu
      - tudíž minimální prvek se nachází vždy v kořeni haldy
   – všechny hladiny haldy kromě poslední jsou plně obsazeny
      - tj. k-tá hladina haldy obsahuje právě 2^{k-1} prvků
      – prvky na poslední hladině jsou umístěny „co nejvíce vlevo“ .

B. Ano, může.

C. – Pokud je halda prázdná, nový prvek se stane jejím kořenem.
   – JINAK: Pokud je poslední hladina haldy zaplněná, nový prvek se stane nejlevějším prvkem na nové hladině a je nutno prověřit, zda otec nového prvku nemá větší hodnotu – pokud ano, tyto dva prvky prohodíme a test opakujeme rekurzivně na vyšší hladině, dokud se nedostaneme do kořene.
   – JINAK: Nový prvek se připojí napravo od nejpravějšího prvku na poslední hladině a provede se porovnání s hodnotou jeho otce rekurzivně až do kořene, stejně jako v předchozím bodě.

3 Logika Informatika

Víme že:

(A1) Žádný motýl není pták.

(A2) Každý smrtihlav je motýl.

Vaším úkolem bude rozhodnout, zda ze znalostí vyplývá, že

(D) Žádný smrtihlav není pták.

Postup řešení:

a. Tvrzení (A1), (A2) a (D) vyjádřete formulemi predikátové logiky prvního řádu s unárními predikáty $M(x)$, $P(x)$, $S(x)$ s významem po řadě x je motýl, pták, smrtihlav.

b. Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A1) a (A2).

Řešení

Správné řešení sestává z formulí a důkazu v některé z dokazovacích metod, zde uvádíme rezoluci.

3.1 Formule

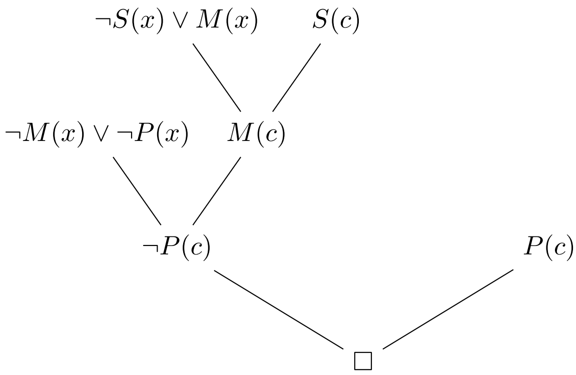
(A1) $\forall x(M(x) \to \neg P(x))$.

(A2) $\forall x(S(x) \to M(x))$.

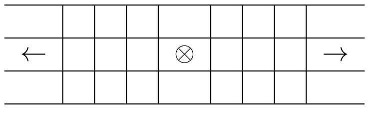
(D) $\forall x(S(x) \to \neg P(x))$.

3.2 Rezoluce

- (A1), (A2) a negaci (D) převedeme na klauzule: $\neg M(x) \vee \neg P(x)$, $\neg S(x) \vee M(x)$, $S(c), P(c)$, kde c je nová skolemovská konstanta.
- Rezoluční odvození je vyjádřeno stromem níže.



4 Automaty

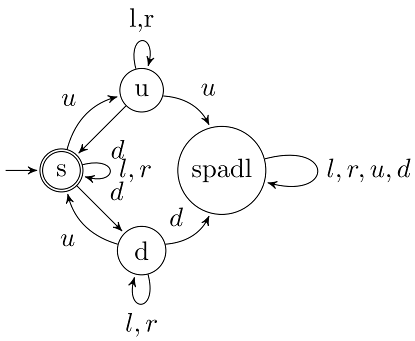


Mějme do stran nekonečnou čtverčkovanou pásku o třech řádcích. Na jednom políčku v prostředním řádku se nachází agent ⊗. Agent se může pohybovat u-nahoru, d-dolů, l-doleva a r-doprava. Například plánem *urddlu* proběhne pět políček vrátí se na původní místo, *uudd* spadne při druhém kroku přes horní okraj, *ulldr* skončí vlevo od počátečního políčka, což pro nás bude přijatelná posloupnost.

Navrhněte konečný automat, který zkontroluje, zda agent nespadne nahoru ani dolů a skončí na prostřední řádce. Tahy vlevo a vpravo mohou být vložené libovolně.
Automat má přijímat řetězce *uddudu* a *ulld*, nemá přijmout *uudd* (spadnul) ani *udd* (skončil na dolním řádku, ne prostředním).

4.1 Řešení

Řešením je automat se čtyřmi stavy $\{s, u, d, spadl\}$, abecedou $\{u, d, l, r\}$, počátečním stavem s, přijímajícím stavem $\{s\}$, přechodový diagram je vyjádřený grafem.



Informatika - navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky - 2024 - Zadání - Varianta B

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.
Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.
Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Hodíme-li 6x hrací kostkou, získáme nahodilou posloupnost šesti čísel. Při každém hodu platí, že každé číslo může padnout s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost, že získaná posloupnost obsahuje nejvýše dvě různá čísla? Při výpočtu postupujte následovně:

A Symbolem P_K označme počet různých posloupností délky 6, které obsahují nejvýše K různých čísel. Vypočítejte P_6 a P_2.

B Požadovanou pravděpodobnost vypočítejte jako podíl $\frac{P_2}{P_6}$.

2 Grafy

Nechť úplný graf K_n na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ má každou hranu $\{i, j\}$ ohodnocenou číslem $\max(i, j)$. Nalezněte minimální kostru a spočtěte její váhu. Svou odpověď zdůvodněte.

3 Logika

Víme že:

(A1) Všechna mláďata jsou pěkná.

(A2) Existuje sloní mládě (=slon, který je zároveň mládě).

Vaším úkolem bude rozhodnout, zda ze znalostí vyplývá, že

(D) Existuje slon, který je pěkný.

Vaše úkoly:

a. Tvrzení (A1), (A2) a (D) vyjádřete formulemi predikátové logiky prvního řádu s unárními predikáty $M(x)$, $P(x)$, $S(x)$ s významem po řadě tvor x je mládě, pěkný, slon.

b. Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A1) a (A2).

4 Automaty a gramatiky

Uvažujme dvě bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 s počátečními symboly S_1 resp. S_2 jakožto jedinými neterminály, s množinami terminálů $T_1 = T_2 = \{1, 2, \oplus, \odot, (,)\}$ a pravidly

- $P_1 = \{S_1 \to 1 \mid 2 \mid (S_1 \oplus S_1) \mid (S_1 \odot S_1)\}$
- $P_2 = \{S_2 \to 1 \mid 2 \mid S_2 \oplus S_2 \mid S_2 \odot S_2\}$.

a. Uveďte příklad slova generovaného první gramatikou, které je delší než 5 znaků, nebo dokažte, že takové slovo neexistuje.

b. Je možné jazyk generovaný gramatikou G_1 přijímat deterministickým konečným automatem? Navrhněte takový automat nebo zdůvodněte, že žádný neexistuje.

c. Je možné jazyk generovaný gramatikou G_2 přijímat deterministickým konečným automatem? Navrhněte takový automat nebo zdůvodněte, že žádný neexistuje.

Informatika - navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky - 2024 - Řešení - Varianta B

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.
Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.
Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Hodíme-li 6x hrací kostkou, získáme nahodilou posloupnost šesti čísel. Při každém hodu platí, že každé číslo může padnout s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost, že získaná posloupnost obsahuje nejvýše dvě různá čísla? Při výpočtu postupujte následovně:

A Symbolem P_K označme počet různých posloupností délky 6, které obsahují nejvýše K různých čísel. Vypočítejte P_6 a P_2.

B Požadovanou pravděpodobnost vypočítejte jako podíl $\frac{P_2}{P_6}$.

1.1 Řešení

A Počty různých posloupností jsou

$$\begin{aligned} P_6 &= 6^6 \\ P_2 &= P_1 + (\text{počet posloupností obsahujících právě dvě různá čísla}) \\ P_1 &= 6 \end{aligned}$$

Počet všech posloupností obsahujících právě dvě různá čísla určíme následovně:

Jestliže posloupnost obsahuje právě dvě různá čísla, pak máme 15 možností, jaká to jsou čísla (to je šest nad dvěma). Pro každou takovou dvojici platí, že menší číslo může být v posloupnosti přítomno

– buď právě jednou – takových je $\binom{6}{1} = 6$,

– nebo právě dvakrát – takových je $\binom{6}{2} = 15$,

– nebo právě třikrát – takových je $\binom{6}{3} = 20$,

– nebo právě čtyřikrát – takových je $\binom{6}{4} = 15$,

– nebo právě pětkrát – takových je $\binom{6}{5} = 6$.

Tudíž $P_2 = P_1 + 15 \cdot (6 + 15 + 20 + 15 + 6) = 6 + 15 \cdot 62 = 936$.

Poznámka: Alternativní výpočet počtu různých posloupností obsahujících právě dvě různá čísla: $15 \cdot (2^6 - 2) = 930$.

B Tedy pravděpodobnost, že náhodná posloupnost obsahuje nejvýše dvě různá čísla je $\frac{936}{6^6} \approx 2.006\%$.

2 Grafy

Nechť úplný graf K_n na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ má každou hranu $\{i, j\}$ ohodnocenou číslem $\max(i, j)$. Nalezněte minimální kostru a spočtěte její váhu. Svou odpověď zdůvodněte.

2.1 Řešení

Ze zadání je zřejmé, že v daném grafu

- pro každé ohodnocení hrany číslem k platí $k \in \{2, 3, \ldots n\}$;
- počet hran ohodnocených číslem k je roven k–1;
- množinu hran s ohodnocením k tvoří hrany $\{j, k\}$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, k\text{–}1\}$.

Aplikujeme-li Kruskalův (hladový) algoritmus pro nalezení minimální kostry, výsledkem může být např. cesta tvořená hranami $\{j, j+1\}$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, n\text{–}1\}$. Váha této minimální kostry je zřejmě $\sum_{i=2}^{n} i = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

3 Logika

Víme že:

(A1) Všechna mláďata jsou pěkná.

(A2) Existuje sloní mládě (=slon, který je zároveň mládě).

Vaším úkolem bude rozhodnout, zda ze znalostí vyplývá, že

(D) Existuje slon, který je pěkný.

Vaše úkoly:

a. Tvrzení (A1), (A2) a (D) vyjádřete formulemi predikátové logiky prvního řádu s unárními predikáty $M(x)$, $P(x)$, $S(x)$ s významem po řadě tvor x je mládě, pěkný, slon.

b. Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A1) a (A2).

Řešení

Správné řešení sestává z formulí a důkazu v některé z dokazovacích metod, zde uvádíme rezoluci.

3.1 Formule

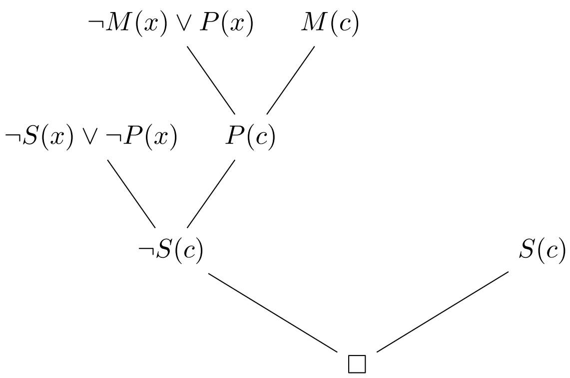
(A1) $\forall x(M(x) \to P(x))$.

(A2) $\exists x(S(x) \,\&\, M(x))$.

(D) $\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$.

3.2 Rezoluce

- (A1), (A2) a negaci (D) převedeme na klauzule: $\neg M(x) \vee P(x)$,$S(c)$, $M(c)$, $\neg S(x) \vee \neg P(x)$, kde c je nová skolemovská konstanta.
- Rezoluční odvození je vyjádřeno stromem níže.



4 Automaty a gramatiky

Uvažujme dvě bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 s počátečními symboly S_1 resp. S_2 jakožto jedinými neterminály, s množinami terminálů $T_1 = T_2 = \{1, 2, \oplus, \odot, (,)\}$ a pravidly

- $P_1 = \{S_1 \to 1 \mid 2 \mid (S_1 \oplus S_1) \mid (S_1 \odot S_1)\}$
- $P_2 = \{S_2 \to 1 \mid 2 \mid S_2 \oplus S_2 \mid S_2 \odot S_2\}$.

a. Uveďte příklad slova generovaného první gramatikou, které je delší než 5 znaků, nebo dokažte, že takové slovo neexistuje.

b. Je možné jazyk generovaný gramatikou G_1 přijímat deterministickým konečným automatem? Navrhněte takový automat nebo zdůvodněte, že žádný neexistuje.

c. Je možné jazyk generovaný gramatikou G_2 přijímat deterministickým konečným automatem? Navrhněte takový automat nebo zdůvodněte, že žádný neexistuje.

4.1 Řešení

a. Takových slov je nekonečně, například $(1 \oplus (1 \odot 1))$.

b. Nelze. Důkaz např. užitím iteračního lemmatu. Nechť máte takový konečný automat, počet jeho stavů označíme n. Uvažujme slovo jazyka začínající $2n$ levými závorkami následované znakem 1 a $2n$ opakováním skupiny $\oplus 1$). Slovo patří do jazyka gramatiky. Konečný automat při čtení levých závorek navštíví některý stav dvakrát. Levé závorky přečtené mezi těmito průchody vynecháme a získáme slovo, které konečný automat přijme, ale do jazyka gramatiky nepatří.

c. Ano. Je přijímaný automatem na obrázku. Lze také poukázat na to, že odpovídá regulárnímu výrazu $(\mathbf{1}+\mathbf{2})\,((\oplus + \odot)(\mathbf{1}+\mathbf{2}))^*$, tj. začneme jedničkou nebo dvojkou, následuje libovolný počet opakování dvojic: znaménko následované číslicí.