PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Rozhodněte, zda následující posloupnost je omezená:

$$\left\{(\log n)^{\log n} - n^{\log(\log n)}\right\}_{n=2}^{\infty}.$$

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující rovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Spočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (25 bodů)

Ať

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2\sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\},$$
$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le z\right\}.$$

Je množina $K := M \cap N$ omezená? Určete objem množiny K.

Úloha 3 (25 bodů)

Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt{|x(x-4)|} - |x|.$$

Úloha 4 (25 bodů)

Uvažujme následující reálnou matici A_p, kde p je reálný parametr.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

V závislosti na p

(a) určete hodnost matice A_p,

(b) najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic $A_p\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a

(c) spočítejte determinant matice A_p.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Protože $(\log n)^{\log n} = e^{\log n \log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$, posloupnost je konstantně nulová, a tedy též omezená.

(b) Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je rovnost triviální. Předpokládejme, že rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n+1}{6}\big(6(n+1) + n(2n+1)\big) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

čímž je rovnost dokázána pro $n+1$.

(c) Z růstové škály plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = 0$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} < 1.$$

Z věty o dvou policajtech a známého faktu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ pro libovolné $c > 0$, okamžitě plyne

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Úloha 2 (25 bodů)

Množina K není omezená, protože např. $(0,0,z) \in K$ pro libovolné $z \geq 0$. Dále platí, že $(x,y,z) \in K$, právě když $z \geq 0$ a $\sqrt{x^2+y^2} \leq \min\{z, z^{-2}\}$. Navíc $\min\{z, z^{-2}\} = z$ pro $z \leq 1$ a $\min\{z, z^{-2}\} = z^{-2}$ pro $z \geq 1$. Objem množiny K můžeme vyjádřit jako integrál z jedničky přes množinu K. Následně tento integrál počítáme pomocí Fubiniovy věty s použitím vzorce pro obsah kruhu:

$$\int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_1^\infty \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^{-2}\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \pi z^2 \,\mathrm{d}z + \int_1^\infty \pi z^{-4} \,\mathrm{d}z = \pi \left(\left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} z^{-3}\right]_1^\infty \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Definiční obor f je $\mathbb{R}$ a f je na něm spojitá.

(b) Funkce není sudá, lichá, ani periodická.

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 2$.

(d) Funkci si napíšeme ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4x}+x, & x \in (-\infty, 0], \\ \sqrt{4x-x^2}-x, & x \in (0,4), \\ \sqrt{x^2-4x}-x, & x \in [4,+\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}+1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}-1, & x \in (0,4), \\ \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}-1, & x \in (4,+\infty). \end{cases}$$

Navíc f je spojitá v bodech 0 a 4, a tedy
- $f'_\pm(0) = \lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty$,
- $f'_\pm(4) = \lim\limits_{x\to 4\pm} f'(x) = \pm\infty$.

Speciálně f' v bodech 0 a 4 neexistuje.

Snadno spočítáme, že $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 2-\sqrt{2}$. Dále vidíme, že
- $f'(x) < 0$ na $(-\infty, 0) \cup (2-\sqrt{2}, 4)$,
- $f'(x) > 0$ na $(0, 2-\sqrt{2}) \cup (4,+\infty)$.

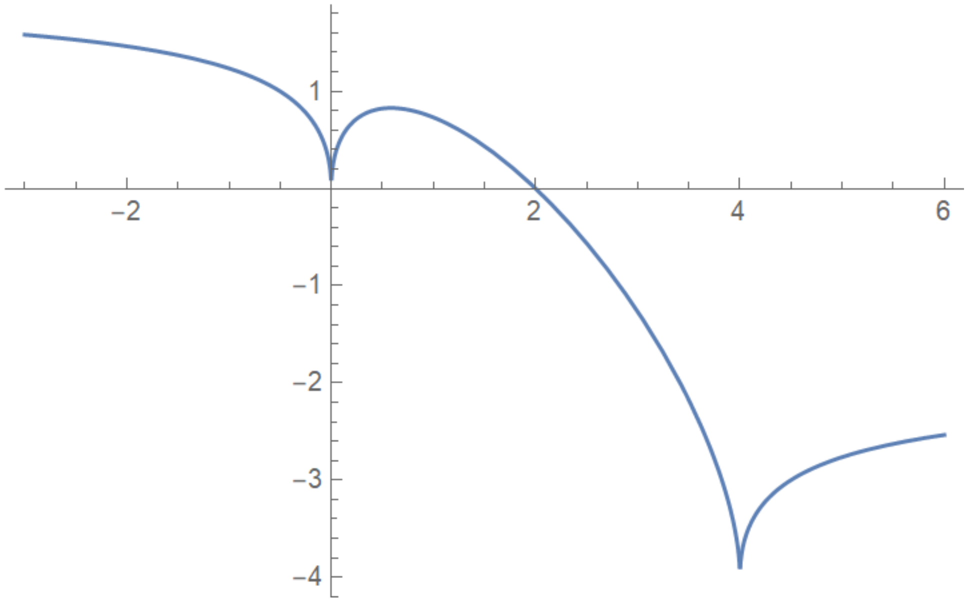
Odtud
- f je klesající na $(-\infty, 0]$ a $[2-\sqrt{2}, 4]$,
- f je rostoucí na $[0, 2-\sqrt{2}]$ a $[4,+\infty)$,
- f má lokální maximum v bodě $2-\sqrt{2}$,
- f má lokální minimum v bodech 0 a 4,
- protože $f(0) = 0 > -4 = f(4)$ vidíme z monotonie, že f má v bodě 4 globální minimum a dále, že f nemá bod globálního maxima ($f(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2 < 2$),
- obor hodnot f je tedy $[-4, 2)$.

Dále

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4}{(x^2-4x)^{3/2}}, & x \in (-\infty, 0), \\ -\frac{4}{(4x-x^2)^{3/2}}, & x \in (0,4), \\ -\frac{4}{(x^2-4x)^{3/2}}, & x \in (4,+\infty). \end{cases}$$

Zřejmě $f'' < 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0,4\}$, a tedy
- f je konkávní na $(-\infty, 0]$, $[0,4]$ a $[4,+\infty)$,
- f nemá inflexní body.

Asymptoty v $\pm\infty$ už víme, jsou to $y = -2$, resp. $y = 2$.



Úloha 4 (25 bodů)
Gaussovou eliminací upravíme matici do řádkově odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & p+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & p-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 \end{pmatrix}$$

(a) Matice je v odstupňovaném tvaru pro každé p. Pro $p \neq -2$ má odstupňovaný tvar 4 nenulové řádky a hodnost matice A_p je proto 4, pro $p = -2$ má matice A_p hodnost 3.
(b) Pro $p \neq -2$ je množina všech řešení $\{\mathbf{o}\}$. Pro $p = -2$ máme jednu volnou proměnnou, a to poslední. Bázi množiny všech řešení tvoří jeden vektor, který získáme libovolnou nenulovou volbou této proměnné a zpětnou substitucí. Množina všech řešení je LO$\{(-4, -1, 9, 6)\}$.
(c) Žádná z provedených úprav nemění determinant a determinant horní trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále. Determinant matice A_p je tedy $-6(p+2)$.