Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2024

Studijní programy: MCUPN, MAUPN, MNUPN, MFUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Rozhodněte, zda následující posloupnost je omezená:

$$\left\{(\log n)^{\log n} - n^{\log(\log n)}\right\}_{n=2}^{\infty}.$$

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující rovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Spočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (20 bodů)

Ať

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2\sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\},$$
$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le z\right\}.$$

Je množina $K := M \cap N$ omezená? Určete objem množiny K.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2024

Studijní programy: MCUPN, MAUPN, MNUPN, MFUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Protože $(\log n)^{\log n} = e^{\log n \log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$, posloupnost je konstantně nulová, a tedy též omezená.

(b) Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je rovnost triviální. Předpokládejme, že rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n+1}{6}\big(6(n+1) + n(2n+1)\big) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

čímž je rovnost dokázána pro $n+1$.

(c) Z růstové škály plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = 0$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} < 1.$$

Z věty o dvou policajtech a známého faktu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ pro libovolné $c > 0$, okamžitě plyne

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - n2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{n2^n}{3^n}} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Úloha 2 (20 bodů)

Množina K není omezená, protože např. $(0,0,z) \in K$ pro libovolné $z \geq 0$. Dále platí, že $(x,y,z) \in K$, právě když $z \geq 0$ a $\sqrt{x^2+y^2} \leq \min\{z, z^{-2}\}$. Navíc $\min\{z, z^{-2}\} = z$ pro $z \leq 1$ a $\min\{z, z^{-2}\} = z^{-2}$ pro $z \geq 1$. Objem množiny K můžeme vyjádřit jako integrál z jedničky přes množinu K. Následně tento integrál počítáme pomocí Fubiniovy věty s použitím vzorce pro obsah kruhu:

$$\int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_1^\infty \int_{\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z^{-2}\right\}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \pi z^2 \,\mathrm{d}z + \int_1^\infty \pi z^{-4} \,\mathrm{d}z = \pi \left(\left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} z^{-3}\right]_1^\infty \right) = \frac{2}{3}\pi.$$