Az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{a}{b}$ egyenlet egész számú megoldásairól.

Írta: *Erdős Pál.*

Az olyan pozitív törteket, melyek számlálója 1, törzstörteknek nevezzük. Ennélfogva a címben szereplő egyenletnek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenekre vonatkozólag összes pozitív egész megoldásait meghatározni más szóval annyit jelent, mint egy adott $\frac{a}{b}$ (pozitív) törtet minden lehetséges módon előállítani törzstörtek összegeként.

Adott törtszámok törzstörtek összegére bontásának problémájával már a ma ismert legrégibb matematikai emlékekben találkozunk. A babiloniak már i. e. 4000 esztendővel foglalkoztak ezzel a kérdéssel. A babiloni matematika legnagyobb kutatója, O. NEUGEBAUER ebben a problémában találta meg a fennmaradt kőtáblák megfejtésének nyitját.[1] A legrégibb ó-egyiptomi emlékek, a moszkvai papyrus és a Rhind-papyrus (i. e. 1800 körül) szövege is ezzel a kérdéssel foglalkozik.[2] Érdemes megjegyezni, hogy tulajdonképpen minden véges tizedes tört is (speciális, t. i. a nevezőkben csak 10 hatványait tartalmazó) törzstörtek összegeként adja meg a számokat. Így pl.

$$3{,}21=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}.$$

Abban az esetben, amikor $a=b$, egyenletünk

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1 \tag{1}$$

alakot ölt. Ez közvetlen általánosítása a lencsék leképezési törvényének (amely (1)-ből $n=2$ esetén adódik), ezért az (1) egyenlet „optikai egyenlet" néven is szerepel az irodalomban. Az említett szempontok mutatják, hogy az

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{a}{b} \tag{2}$$

[1] O. NEUGEBAUER: Vorlesungen über die Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Bd. 1. Vorgriechische Mathematik. — (Berlin, 1934). (*Grundlehren d. Math. Wiss.* Bd. 43.) Lásd a 27., 28., 87. oldalt.

[2] O. NEUGEBAUER, u. o. 87. old.

egyenlet pozitív egész megoldásainak meghatározása klasszikus matematikai probléma, amelynek nyilvánvalóan önálló számelméleti érdekessége is van. Meglepő, hogy mindazonáltal aránylag kevesen foglalkoztak vele.[2]

E dolgozat NASAYOSI NAKAYAMA 10 évvel ezelőtt megjelent dolgozatához kapcsolódik.[3] NAKAYAMA a (2) egyenletet a $0<a<b$ esetben vizsgálja és csak az olyan megoldásokat keresi, amelyekben $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymástól páronként különböző pozitív egész számok, azaz (megfelelő sorrendben jelölve őket) eleget tesznek a

$$(3) \qquad 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

feltételnek. NAKAYAMA $N(a,b)$-vel jelöli az n természetes szám ama legkisebb értékét, mely mellett a (2) egyenletnek van a (3) követelményt kielégítő egész számú megoldása. $N(a, b)$ más szóval azt mutatja, hogy az adott $\frac{a}{b}$ pozitív valódi tört felbontásához legalább hány egymástól páronként különböző törzstört szükséges. Nem magától értetődő dolog, hogy bármely valódi törtnek van ilyen előállítása, tehát hogy $N(a, b)$ egyáltalán mindig definiálva van. Könnyű azonban megmutatni, hogy így van, sőt az is mindig igaz, hogy

$$(4) \qquad N(a, b) \leqq a\,.$$

Ezt a már hosszabb idő óta ismert eredményt igen könnyű bebizonyítani, s teljesség kedvéért mi is bebizonyítjuk az 1. §-ban.

$N(a, b)$ pontos meghatározása bármely $0 < a < b$ esetére igen nehéz probléma és általános megoldásától ma még távol állunk. De azért sok figyelemreméltó részleteredmény ismeretes már $N(a, b)$-re vonatkozólag, s jelen dolgozatunkban is ezek egy részének élesítésével foglalkozunk majd. Mindenekelőtt megemlítjük Nakayama néhány tételét:

Az $N(a, b)$ függvény értéke akkor és csak akkor 2, ha találhatók oly k_1, k_2, k_3 egész számok, melyekre $b = k_1 k_2 (k_3 a - k_2 d)$, ahol $d = (a, b) =$ az a és b legnagyobb közös osztója.

[2] E. L. DICKSON: History of the Theory of Numbers. II. The Diophantine Analysis. — (Washington, 1920). 688—691. old. — Az újabb irodalomból lásd még: G. SANSONE: Su alcuni problemi di analisi indeterminata. *Bolletino di Mat.* (1924), 33—38. — C. CIAMBERLINI: Sulla equazione indeterminata $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$. *Bolletino di Mat.* (1930), 31—32. — G. MIGNOSI: Sulla equazione dell'ottica. *Rendiconti del Seminario della Facolta di Scienze di Cagliari* (1931). — NASAYOSI NAKAYAMA: On the decomposition of a rational number into „Stammbrüche". *The Tohoku Math. Journ.* 46 (1940), 1—21.

Az $N(a, b)$ függvény értéke akkor és csak akkor 3, ha b összes törzstényezője $6k+1$ alakú (azaz tagja a 7, 13, 19, ... számtani haladványnak).

Néhány érdekes, az (1) egyenlet megoldásaira vonatkozó s eddig még meg nem oldott problémát is említek.

Adott n esetén jelöljük $f_1(n)$-nel az (1) egyenlet összes pozitív egész megoldásainak számát, míg $f_2(n)$-nel a (3) feltételnek eleget tevő megoldások számát. Megadandó az $f_1(n)$ és $f_2(n)$ függvény, vagy meghatározandók oly függvények, amelyek ezekkel aszimptotikusan egyenlők.

Kürschák József egy nevezetes tétele szerint egymásután következő egész számok reciprokértékeinek összege sohasem lehet egész szám.[4] Ennélfogva az (1) egyenlet bármely olyan egész számú megoldása esetében, amely a (3) feltételnek eleget tesz, mindig van olyan $x_{i+1}-x_i$ különbség, amelyre $x_{i+1}-x_i \geq 2$. A tapasztalat azt mutatja, hogy mindig van olyan $x_{i+1}-x_i$ különbség is, amely ≥ 3. Ezt a sejtésemet azonban eddig még nem sikerült bebizonyítanom. Hogy általában tovább menni ilyen irányban nem lehet, azt ($n=3$ esetén) az (1) egyenlet $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$ megoldása mutatja. Lehetséges azonban, hogy igaz a következő: Tetszés szerint megadott pozitív c számhoz tartozik olyan n_0 természetes szám, hogy $n>n_0$ mellett az (1) egyenletnek bármely, a (3) feltételnek elegettevő egész számú megoldása esetén az $x_{i+1}-x_i$ különbségek egyike $>c$.

Azt is sejtem, hogy az (1) egyenletnek bármely megoldására, mely a (3) feltételnek eleget tesz, fennáll az

$$\frac{x_n}{x_1} \geq 3$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség jele csak $n=3$, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$ esetén állhat. Valószínűleg igaz az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_1} = \infty.$$

Ez az utóbbi sejtés más szóval annyit jelent, hogy bármely rögzített q pozitív számhoz tartozik olyan n_0 természetes szám, hogy $n>n_0$ esetén az (1)-nek bármely olyan egész számú megoldására, amely (3)-nak eleget tesz, teljesül az $x_n > q\,x_1$ egyenlőtlenség.

[4] Kürschák J.: A harmonikus sorról. *Math. és Phys. Lapok* 27 (1918), 288–300. — Lásd még: Pólya–Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Berlin, (1925), 159. és 381. old. — Obláth R.: Über einen arithmetischen Satz von Kürschák. *Commentarii Math. Helv.* 8 (1936), 186–187.

Érdekes probléma megvizsgálni $N(a, b)$ viselkedését *rögzített* a mellett. Mindenekelőtt az a kérdés vár eldöntésre, hogy mi a pontos maximuma $N(a, b)$-nek rögzített a esetén. Az $a = 2, 3$ esetekben e maximum (4) miatt 2, illetve 3. (T. i. pl. $\frac{3}{7}$ nem bontható fel 3-nál kevesebb különböző törzstört összegére, amint ezt könnyen beláthatjuk.) De már az $a = 4$ esetben komoly nehézségekbe ütközik $N(a, b)$ maximumának meghatározása. STRAUSS-szal együtt az a sejtésünk, hogy $N(4, b) \leq 3$, ha $b > 4$. STRAUSS $4 < b < 5000$ esetére be is bizonyította ezt a sejtést.

Másik hasonlóan érdekes kérdés az, hogy mekkora $N(a, b)$ maximuma *rögzített* b mellett, míg t. i. a értéke (megállapodásunk szerint) 1 és $b - 1$ között változik. Erre vonatkozólag N. G. DE BRUIJN kimutatta, hogy

$$N(a, b) < c \frac{\log b}{\log \log \log b},$$

ahol c határozott állandó, de értéke nem érdekes. Módszerének élesítésével az alábbiakban bebizonyítom a következő tételt:

1. TÉTEL: *Van olyan c_1 állandó, amelyre*

$$N(a, b) < c_1 \frac{\log b}{\log \log b} \tag{5}$$

érvényes bármely $0 < a < b$ esetén.

Valószínűnek tartom, hogy még ez az eredmény is élesíthető, éspedig úgy, hogy esetleg sikerül $N(a, b) < c' \log \log b$ fennállását kimutatni alkalmas c' állandóval. Az másfelől bizonyos, hogy ilyen irányban ezen túlmenő élesítés már nem lehetséges, mert az alábbiakban azt is bebizonyítom, hogy van olyan (b-től független) c_2 állandó, amelyre igaz, hogy $N(1, b)$, $N(2, b)$, . . ., $N(b - 2, b)$ közül „aránylag soknak" az értéke $> c_2 \log \log b$. Pontosabb fogalmazásban érvényes a következő

2. TÉTEL:

$$\frac{1}{b-2}[N(1, b) + N(2, b) + \ldots + N(b-2, b)] > \tag{6}$$

és

$$> \frac{1}{2}(\log \log b - 1)$$

$$N(b-1, b) > \log \log b - 1 \tag{7}$$

érvényes bármely b pozitív egész szám esetén.

A 2. tétel bizonyításához szükségünk lesz egy ismert eredményre, amely azonban önmagában is annyira érdekes, hogy az alábbiakban teljes részletességgel tárgyalni fogom. E probléma a következő kérdéssel kapcsolatban merül fel: *Adott n esetén melyik az a legnagyobb $\frac{a}{b}$ valódi tört $(0 < a < b)$, amelyre $N(a, b) \leq n$?* Másképpen fogalmazva: Legfeljebb n törzstört összegével hogyan lehet 1-et *alulról* legjobban megközelíteni? Világos, hogy $n = 1$, 2 esetén $\frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ a legjobb megközelítés. Ebből az észrevételből kiindulva tekintsük a következő egyenleteket:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{42 . 43} = 1$$

....

Emez egyenletek mindegyikét úgy kaptuk a megelőzőből, hogy annak baloldalán az utolsó törzstörtet

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} \tag{8}$$

szerint két törzstört összegével helyettesítettük. Ebből a képzési szabályból adódik, hogy ha az n-edik egyenlet baloldalán szereplő törzstörtek nevezőit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, (\alpha_{n+1} - 1)$-gyel jelöljük, akkor $\alpha_{n+1} - 1 = \alpha_n(\alpha_n - 1)$, vagyis az α-k sorozata rekurzíve

$$\alpha_1 = 2; \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n(\alpha_n - 1) + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

alapján van definiálva. Ennek ismételt alkalmazásával kapjuk a sorozat

$$\alpha_1 = 2; \quad \alpha_{n+1} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + 1 \tag{10}$$

másik képzési szabályát. Mármost a fenti egyenletek tanulsága szerint az így értelmezett α_i számok kielégítik az

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{\alpha_n - 1} = 1 \tag{11}$$

egyenleteket, azaz más szóval

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \; \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1}, \quad x_n = a_n - 1 \tag{12}$$

megoldása (1)-nek. Ezt a megoldást az alábbiakban az (1) egyenlet *extrémális megoldásának* fogjuk nevezni. Rögtön látni fogjuk, hogy mi indokolja ezt az elnevezést. A fentebbi egyenlet-sorozat képzési szabályára gondolva, amikor az egyenletek baloldalán az utolsó $\frac{1}{k}$ törtet a (8) alapján két tört összegével helyettesítettük, akkor a két új tört közül a másodiknak a nevezője oly nagy mértékben növekedett a pótolt tört nevezőjéhez képest (nagyobb lévén annak négyzeténél), hogy az az érzésünk: x_n értéke a (12) alatti megoldásban a lehető legnagyobb mindazon értékek között, melyeket x_n az (1) egyenlet (3) feltételnek elegettevő egész számú megoldásai között egyáltalán felvehet. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez valóban így van, mert érvényes a

3. TÉTEL: *Az* (1) *egyenlet bármely olyan* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *egészszámú megoldására, amely* (3)*-nak eleget tesz és amely különbözik a* (12) *alatti megoldástól:*

$$x_n < a_n - 1. \tag{13}$$

A fenti egyenletsorozatból azonban kiolvashatjuk a választ az előbb felvetett problémára is. Annak következtében, hogy a (11) baloldalán az utolsó tört nevezője oly nagy a megelőző törtek nevezőjéhez képest, kézenfekvő az a gondolat, hogy az utolsó tört elhagyásával nyert

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} \left(= 1 - \frac{1}{a_n - 1} \right)$$

összeg lesz a legjobb alulról való megközelítése 1-nek $n-1$ számú törzstört összegével. Ezt is be fogjuk bizonyítani, igazolván a következő tételt:]

4. TÉTEL[5]:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \tag{14}$$

[5] E tételre és általában a fenti $a_1, a_2, \ldots$ sorozatra vonatkozólag lásd Enzykl. der Math. Wiss. I, 1,2, (1939.) 24,4. old., ahol az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$ sor másodfajú Engel-sor név alatt szerepel.

a legnagyobb olyan valódi tört, amelyre $N(a, b) \leq n$ és a (14) alatti előállítás az egyetlen lehetséges módon való felírása e számnak legfeljebb n törzstört összegeként.

Megjegyezzük, hogy a 3. és 4. tételt úgy fogjuk bebizonyítani, hogy igazoljuk egy olyan tétel helyességét (lásd alább az 5. tételt), amely önmagában ugyan kevésbbé érdekesnek látszik, de belőle a 3. és 4. tétel helyessége azonnal következik.

1. §.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk (4) helyességét. Mivel (4) nyilvánvalóan igaz $a = 1$-re, bizonyításunkban teljes indukciót alkalmazhatunk a szerint, feltételezvén (4) helyességét bármely a-nál kisebb a' természetes számra az a helyén. Mivel $\frac{a}{b}$ valódi tört, az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ számsorozat két szomszédos tagja közé kell esnie hiszen csak az $a > 1$ esetet kell tekintetbe vennünk. Ennélfogva van olyan (egyértelműen meghatározott) 1-nél nagyobb x_1 egész szám, amelyre

$$\frac{1}{x_1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{x_1 - 1} \qquad (x_1 > 1)\,, \tag{15}$$

azaz

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{x_1} = \frac{a\,x_1 - b}{b\,x_1} = \frac{a'}{b\,x_1} \tag{16}$$

fennáll, ahol (15) miatt $b < a\,x_1 < a + b$, tehát

$$0 < a' = a\,x_1 - b < a \tag{17}$$

is teljesül. Így indukciós feltevésünk szerint $N(a', b\,x_1) \leq a'$, azaz $\frac{a'}{b\,x_1}$ felbontható legfeljebb a' számú, csupa különböző törzstört összegére:

$$\frac{a'}{b\,x_1} = \frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_m}\,,$$

ahol

$$0 < y_1 < \ldots < y_m\,; \quad m \leq a'\,. \tag{18}$$

Ekkor azonban (16) figyelembevételével

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_m} \tag{19}$$

adódik, ami azt mutatja, hogy $\frac{a}{b}$ előállítható $m+1$, vagyis legfeljebb a számú törzstört összegeként, hiszen (18) és (17) szerint $m \leqq a' < a$. E szerint csak azt kell még megmutatnunk, hogy a (19) alatti előállításban csupa különböző törzstörtek szerepelnek. Ehhez viszont (18) miatt elég azt igazolni, hogy $x_1 < y_1$. Ámde (15)-ből azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1(x_1-1)}. \tag{20}$$

Másfelől (19) szerint $\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_m} = \frac{a}{b} - \frac{1}{x_1}$, tehát $\frac{1}{y_1} \leqq \frac{a}{b} - \frac{1}{x_1}$.

Alkalmazzuk 20-at:

$$\frac{1}{y_1} \leqq \frac{a}{b} - \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_1(x_1-1)},$$

$$y_1 > x_1(x_1-1) \geqq x_1.$$

Ezzel a (4) alatti egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Az 1. tétel bizonyítása áttekinthetőbb lesz, ha előrebocsátunk két segédtételt.

1. Segédtétel: *Legyen n tetszőleges pozitív egész szám és $1 < z < n!$. Ekkor z felírható, mint $n!$ legfeljebb n számú különböző osztójának összege:*

$$z = d_1 + \ldots + d_r; \quad (0 < d_1 < \ldots < d_r; \quad r \leqq n; \quad d_i \mid n!). \tag{21}$$

A segédtétel állítása nyilván igaz, ha $n = 2$. Ennélfogva n szerinti teljes indukciót alkalmazhatunk bizonyításában, s feltehetjük, hogy igaz a segédtétel n helyett $(n-1)$-re. Jelöljük z-nek n-nel való osztásakor fellépő hányadost z'-vel s a maradékot d-vel:

$$z = n z' + d \qquad (0 \leqq d < n). \tag{22}$$

Ekkor d (amennyiben $\neq 0$) nyilván osztója $n!$-nak. Másfelől (22) szerint

$$0 \leqq z' < \frac{z}{n} \leqq \frac{n!}{n} = (n-1)!,$$

úgyhogy indukciós feltevésünk szerint z' felírható $(n-1)!$-nak legfeljebb $(n-1)$ számú különböző osztója összegeként:

$$z' = d_1' + \ldots + d_s'; \; (0 < d_1' < \ldots < d_s'; \; s \leqq n-1; \; d_i' \mid (n-1)!). \tag{23}$$

Ebből (22) alapján z-nek

$$z = d + n z' = d + n d'_1 + \ldots + n d'_s = \tag{24}$$
$$= d_1 + d_2 + \ldots + d_{s+1}$$

felbontása adódik, ahol $d_1 = d$, $d_i = n d'_{i-1}$ $(2 \leqq i \leqq s + 1)$. Itt (22) és (23) szerint $d_1 < \ldots < d_{s+1}$, továbbá $d_i \mid n!$, $s + 1 \leqq n$, azaz segédtételünk helyes.

2. Segédtétel: *Ha* $n > 7$, *akkor:*

$$(n - 1)! > n^{\frac{n}{2}} . \tag{25}$$

Mivel $5040 > 4096$, $n = 8$-ra helyes (25). Ezért n szerinti teljes indukciót alkalmazhatunk. Feltételezzük, hogy (25) helyes, s megmutatjuk, hogy akkor (n helyett $(n + 1)$-re)

$$n! > (n + 1)^{\frac{n+1}{2}} \tag{26}$$

is igaz. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy

$$\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n < e < 3 \qquad \text{(minden } n \text{ természetes számra).}$$

Másfelől

$$\frac{n^2}{n + 1} > \frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1 > 3 \qquad (n > 4 \text{ esetén}).$$

E két utóbbi egyenlőtlenségből:

$$\frac{n^2}{n + 1} > \frac{(n + 1)^n}{n^n} ,$$

$$n^2 > \frac{(n + 1)^{n+1}}{n^n} ,$$

$$n > \frac{(n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} ,$$

ha $n > 4$. A legutóbbi egyenlőtlenség és (25) megfelelő oldalainak szorzásával (26) adódik, s így (25)-öt minden 7-nél nagyobb n egész számra bebizonyítottuk.

Már most az 1. tétel bizonyítása céljából határozzuk meg az adott $\frac{a}{b}$ valódi törthöz az n természetes számot úgy, hogy

$$(n-1)! < b \leqq n! \tag{27}$$

fennálljon, majd a z természetes számot úgy, hogy

$$\frac{z}{n!} \leqq \frac{a}{b} < \frac{z+1}{n!} \tag{28}$$

teljesüljön. Ekkor (27)-ből és (28)-ból

$$a\,n! - b\,z < b \leqq n! \tag{29}$$

és

$$z \leqq \frac{a}{b}\,n! < n! \tag{30}$$

adódik. Ennélfogva az 1. segédtétel szerint z is, $a\,n! - b\,z$ is felbontható n!-nak legfeljebb n-számú különböző osztója összegére:

$$z = d_1 + \ldots + d_r\,;\ (0 < d_1 < \ldots < d_r\,;\ r \leqq n\,;\ d_i \mid n!\,), \tag{31}$$

$$a\,n! - b\,z = d_1' + \ldots + d_s'\,;\ (0 < d_1' < \ldots < d_s'\,;\ s \leqq n\,;\ d_j' \mid n!). \tag{32}$$

Itt tehát az

$$u_i = \frac{n!}{d_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{33}$$

és

$$v_j = \frac{n!\,b}{d_j'} \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{34}$$

számok pozitív egész számok. Mivel (32) és (29) miatt $d_s' \leqq a\,n! - - b\,z < b$, (34) figyelembevételével:

$$v_s = \frac{b\,n!}{d_s'} > \frac{b\,n!}{b} = n!\,. \tag{35}$$

Másfelől (33) szerint

$$u_1 = \frac{n!}{d_1} \leqq n!\,.$$

Ennélfogva (35) alapján $v_s > n! \geqq u_1$. Ebből pedig (31), (32), (33), (34) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$v_1 > \ldots > v_s > u_1 > \ldots > u_r\,.$$

Ugyanazokból az egyenletekből:

$$\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_r}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_s}=$$

$$=\frac{1}{n!}(d_1+\ldots+d_r)+\frac{1}{b\,n!}(d_1'+\ldots+d_s')=$$

$$=\frac{z}{n!}+\frac{a\,n!-b\,z}{b\,n!}=\frac{a}{b}.$$

Sikerült tehát $\frac{a}{b}$-t $r+s$ (azaz (31) és (32) miatt legfejlebb $2n$) számú, csupa különböző törzstört összegeként előállítanunk. Ez más szóval annyit jelent, hogy

$$N(a,b)\leqq 2n. \tag{36}$$

Ámde (27) szerint $b>(n-1)!$, úgyhogy a 2. segédtétel alkalmazásával a

$$b>n^{\frac{n}{2}} \qquad (n>7) \tag{37}$$

egyenlőtlenséget nyerünk. Ebből

$$\log b>\frac{n}{2}\log n,$$

$$n<\frac{2\log b}{\log n}. \tag{38}$$

Másfelől ugyancsak (27)-ből $b\leqq n!$, tehát $b<n^n$, azaz

$$\log b<n\log n,$$

$$\log\log b<\log n+\log\log n<2\log n.$$

Ennek alapján (38) ból az

$$n<\frac{4\log b}{2\log n}<\frac{4\log b}{\log\log b}$$

egyenlőtlenséget, majd végül (36) figyelembevételével az

$$N(a,b)\leqq 2\,n<\frac{8\log b}{\log\log b} \tag{39}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk, hiszen megmutattuk, hogy $c_1=8$ olyan állandó, amelyre (5) teljesül. —

Ha egészen pontosak akarunk lenni, mindenesetre meg kell még jegyeznünk, hogy a (37) alatti egyenlőtlenséget csak az $n \geqq 8$ értékekre igazoltuk, amiből az következik, hogy bizonyításunk szerint (39) csak $b > 4096$ esetén érvényes. Ezt a határt c_1 esetleges növelésével könnyű volna lejjebb szorítanunk, de ez már nem érdekes probléma. Az olyanszerű tételeknek, mint az (5) alatti egyenlőtlenség, mindig az a lényege, hogy *van* olyan pozitív értékű c_1 állandó, amelynél a szóbanforgó egyenlőtlenség bármely b-re igaz *egy bizonyos $b = b_0$ értéktől kezdve.* De e határszám és maga a c_1 állandó is érdektelen.

E §-ban még csupán egy megjegyzést akarok tenni az 1. segédtétellel kapcsolatban. SRINIVASAN[6] *praktikus számnak* nevez minden olyan m természetes számot, amelyre igaz az, hogy bármely m-nél kisebb szám felbontható m különböző osztóinak összegére. Az 1. segédtételből következik, hogy $n!$ mindig praktikus szám. Természetesen az 1. tétel fenti bizonyításában $n!$ helyettesíthető bármely b-nél nagyobb praktikus számmal, de $n!$-nak az az előnye is megvan, hogy a szóbanforgó felbontásoknál aránylag kevés (az 1. segédtétel szerint legfeljebb n) összeadandót kell felhasználnunk. Srinivasan megjegyzi, hogy 1 és 200 között összesen 49 praktikus szám van. Sikerült más úton bebizonyítanom, hogy a praktikus számok sűrűsége nulla, vagyis azt, hogy az n-nél kisebb praktikus számok száma n-nel osztva 0-hoz tart, ha n minden határon túl nő.

2. §.

E §-ban a 3. és 4. tétel igazolásával foglalkozunk. Mindkét tétel közvetlen következménye az alábbi tételnek:

5. Tétel: *Ha $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ olyan egész és x_n olyan valós szám, hogy*

(40) $$0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ egész, } x_n \text{ valós})$$

(41) $$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqq 1,$$

(42) $$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} < 1,$$

akkor mindig fennáll az

(43) $$x_n \leqq a_n - 1$$

és

(44) $$x_1 \ldots x_{n-1}(1 + x_n) \leqq a_1 \ldots a_n$$

[6] *Current Sci.* 17 (1948), 179—180.

egyenlőtlenség, továbbá (43)*-ban és* (44)*-ben egyenlőségjel akkor és csak akkor áll, ha*

(45) $$x_1 = \alpha_1, \ldots, \quad x_{n-1} = \alpha_{n-1}, \quad (x_n = \alpha_n - 1),$$

azaz ha $x_1, \ldots, x_n$ *az* (1) *egyenletnek éppen a* (12) *alatti extrémális megoldása.*

Az közvetlenül világos, hogy a 3. tétel az 5. tétel következménye, hiszen ha $x_1, \ldots, x_n$ az (1) egyenlet olyan egész megoldása, amely a (3)-nak eleget tesz, akkor nyilván eleget tesz (40)-, (41)-, (42)-nek is, s ennélfogva az 5. tétel szerint az extrémálistól eltérő megoldás esetén mindig fennáll (13). — De könnyen nyerhető az 5. tételből a 4. tétel is. Tekintsük e célból 1-nek valamely alulról való megközelítését n törzstört összegével, azaz legyenek $z_1, \ldots, z_n$ tetszőleges egész számok, melyekre

(46) $$0 < z_1 \leqq z_2 \leqq \ldots \leqq z_n,$$

(47) $$t = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} < 1.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

(48) $$t \leqq 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}$$

és hogy itt az egyenlőségjel csak

(49) $$z_1 = \alpha_1, \ldots, z_n = \alpha_n$$

esetén állhat. Jelöljük z_{n+1}-gyel azt a (pozitív racionális) számot, melyre

(50) $$\frac{1}{z_1} + \ldots + \frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_{n+1}} = 1$$

teljesül. Ekkor (47) és (50) szerint $z_1, \ldots, z_{n+1}$ oly számok, melyek eleget tesznek az 5. tétel követelményeinek[7] (csak n helyett most $(n+1)$-re alkalmazandó e tétel), úgyhogy az 5. tétel alapján a legnagyobbikuk is $\leqq \alpha_{n+1} - 1$. Ennélfogva

$$z_{n+1} \leqq \alpha_{n+1} - 1,$$

úgyhogy (47) és (50) figyelembevételével

$$t = 1 - \frac{1}{z_{n+1}} \leqq 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1},$$

[7] legfeljebb sorrendjüktől eltekintve.

ami éppen (48) helyességét jelenti. Másfelől ugyancsak az 5. tétel értelmében egyenlőségjel itt csak (49) esetén állhat. Ezzel a 4. tételt is bebizonyítottuk.

Most rátérünk az 5. tétel igazolására. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy $n = 2$-re igaz a tétel. A (40), (41) és (42) feltételek ez esetben azt mondják, hogy

$$0 < x_1 \leqq x_2 ; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geqq 1 ; \quad \frac{1}{x_1} < 1 .$$

Ekkor $x_1 > 1$, s mivel x_1 egész szám, $x_1 \geqq 2$. Ennélfogva $2 \leqq x_1 \leqq x_2$, s így a középső egyenlőtlenség csak $x_1 = x_2 = 2$ esetén állhat. Ekkor viszont

$$x_2 = 3 - 1 = a_2 - 1 \quad \text{és} \quad x_1 (1 + x_2) = 6 = 2 \,.\, 3 = a_1 a_2,$$

azaz (43) és (44) valóban teljesül.

Bizonyításunk további során n szerint haladó teljes indukciót alkalmazunk, azaz feltételezzük az 5. tétel helyességét n helyett $(n - 1)$-re. Tekintsük a (40)—(42) egyenlőtlenségrendszer egy tetszőleges

$$x_1 = y_1, \; \ldots, \; x_n = y_n$$

megoldását, ahol tehát $y_1, \ldots, y_{n-1}$ egészszámok és

$$0 < y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_n , \tag{51}$$

$$\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n} \geqq 1, \tag{52}$$

$$\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_{n-1}} < 1 \tag{53}$$

fennáll. Indukciós feltevésünkre támaszkodva először (43), azaz

$$y_n \leqq a_n - 1 \tag{54}$$

helyességét mutatjuk ki. Mivel itt csak y_n szerepel, közben $y_1, \ldots, y_{n-1}$ értékét meg szabad változtatnunk, de természetesen úgy értve a dolgot, hogy (51)—(53) továbbra is érvényben maradjon. Előfordulhat ugyanis, hogy az $y_1, \ldots, y_{n-1}$ egész számok egyikének értéke csökkenthető 1-gyel úgy, hogy (53) azért még érvényben marad. Ennek az eljárásnak szükségszerinti ismétlésével véges számú lépés után mindenesetre olyan $x_1 = y'_1, \ldots, x_{n-1} = y'_{n-1}$, $x_n = y_n$ számokat kapunk, amelyekre

$$y'_i \leqq y_i \quad (1 \leqq i \leqq n - 1) \tag{55}$$

s amelyek ennélfogva biztosan eleget tesznek (41)-nek:

$$\frac{1}{y'_1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-1}}+\frac{1}{y_n}\geqq 1\,, \tag{56}$$

továbbá ($y'_1, \ldots, y'_{n-1}$ megfelelő sorrendje mellett) (40)-nek:

$$0<y'_1\leqq y'_2\leqq\ldots\leqq y'_{n-1}\leqq y_n\,, \tag{57}$$

de már

$$\frac{1}{y'_1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-1}}<1 \tag{58}$$

úgy teljesül, hogy itt egyetlen y'_i értéke sem csökkenthető 1-gyel, ha azt akarjuk, hogy az egyenlőtlenség érvényben maradjon. Ennélfogva:

$$\frac{1}{y^1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-2}}+\frac{1}{y'_{n-1}-1}\geqq 1. \tag{59}$$

Ez annyit jelent, hogy $x_1=y'_1\,,\ldots, x_{n-2}=y'_{n-2}, x_{n-1}=y'_{n-1}-1$ megoldása a (40)—(42) rendszernek, n helyett $n-1$ mellett, úgyhogy indukciós feltevésünk szerint érvényes rá az 5. tétel, közelebbről ennek (44) alatti állítása, amely most azt mondja, hogy

$$y'_1\ldots y'_{n-2}\cdot y'_{n-1}\leqq \alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\,, \tag{60}$$

és itt az egyenlőségjel csak

$$y'_1=\alpha_1\,,\ldots, y'_{n-2}=\alpha_{n-2} \tag{61}$$

esetén áll. Másfelől (58) szerint

$$1-\left(\frac{1}{y'_1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-1}}\right)$$

pozitív racionális szám, mely (közös nevezőre hozás útján) előállítható $y'_1\ldots y'_{n-1}$ nevezőjű törtként. Ennélfogva:

$$1-\left(\frac{1}{y'_1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-1}}\right)\geqq\frac{1}{y'_1\ldots y'_{n-1}}. \tag{62}$$

Végül (56) és (62) alapján

$$\frac{1}{y_n}\geqq 1-\left(\frac{1}{y'_1}+\ldots+\frac{1}{y'_{n-1}}\right)\geqq\frac{1}{y'_1\ldots y'_{n-1}}\,,$$

azaz (60) és (10) figyelembevételével

$$y_n\leqq y'_1\ldots y'_{n-1}\leqq\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}=\alpha_n-1.$$

Ezzel (54) helyességét megmutattuk. Itt egyenlőségjel csak akkor állhat, ha (60)-ban is az áll, aminek (61) a szükséges és elegendő feltétele; ekkor viszont az egyenlőségjel (60)-ban azt jelenti, hogy $y'_{n-1} = a_{n-1}$.

Ezek után (44)-et bizonyítjuk be, továbbra is fenntartva indukciós feltevésünket. Először is azt mutatjuk meg, hogy ebben az esetben is olyan $x_1 = y'_1, \ldots, x_{n-1} = y'_{n-1}, x_n = y_n$ megoldásaira szorítkozhatunk a (40)—(42) rendszernek, amelyre (58) mellett (59) is fennáll. Ellenkező esetben ugyanis a (44) baloldalán szereplő $x_1 \ldots x_{n-1} (x_n + 1)$ szorzat értékénél nagyobb lesz ugyanennek a szorzatnak az értéke egy, a fenti tulajdonsággal bíró megoldás esetében. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha $y_1, \ldots, y_{n-1}$ olyan egész számok és y_n olyan valós szám, melyek (51)—(53)-nak eleget tesznek és valamely i-re

$$(63) \qquad \frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_i - 1} + \ldots + \frac{1}{y_{n-1}} < 1$$
$$(1 \leqq i \leqq n-1)$$

is teljesül, akkor (8)-at alkalmazva

$$\frac{1}{y_i} = \frac{1}{y_i - 1} - \frac{1}{y_i (y_i - 1)},$$

azaz

$$\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_i - 1} - \frac{1}{y_i (y_i - 1)} + \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_i - 1} + \frac{y_i (y_i - 1) - y_n}{y_n y_i (y_i - 1)}$$

adódik. Az utolsó tört számlálója pozitiv, mert (52) és (63) összevetéséből következik, hogy

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_n} > \frac{1}{y_i - 1}.$$

Ha ennek alapján (52)-be helyettesítünk, továbbá (63)-at is figyelembe vesszük, azt találjuk, hogy ((63) miatt)

$$(64) \qquad x_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_i = y_i - 1, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = y_{n-1},$$
$$x_n = \frac{y_n y_i (y_i - 1)}{y_i (y_i - 1) - y_n}$$

is megoldása a (40)—(42) rendszernek. Könnyen belátjuk, hogy e megoldásra a (44) baloldalán álló szorzat értéke nagyobb, mint az $x_j = y_j$ megoldásra. Ehhez csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$(y_i - 1)\left(\frac{y_n y_i (y_i - 1)}{y_i (y_i - 1) - y_n} + 1\right) > y_i (y_n + 1)$$

helyes egyenlőtlenség, ami következik abból, hogy ekvivalens az egyszerűbb alakra hozott

$$y_i (y_n - y_i)(y_n + 1) + y_n + y_i > 0$$

egyenlőtlenséggel. Utóbbi helyessége (51) alapján nyilvánvaló. Ezzel megmutattuk, hogy (44)-et valóban elegendő a (40)—(42) rendszer olyan $x_1 = y'_1, \ldots, x_{n-1} = y'_{n-1}, x_n = y_n$ megoldásaira bebizonyítanunk, melyekre (59) érvényes. Mármost (59)-ből ugyanúgy, mint előbb, (60) következik. Másfelől (54) szerint, amelynek helyességét már igazoltuk, $y_n + 1 \leq a_n$. Végre tehát ebből és (60)-ból az

$$y'_1 \ldots y'_{n-1} (y_n + 1) \leq a_1 \ldots a_n$$

egyenlőtlenséget nyerjük, amivel (44)-et is bebizonyítottuk. Az egyenlőségjel érvényességi feltétele most is (45). Ezzel az 5. tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés. A 3. tételből nyilvánvaló, hogy az (1) egyenletnek ögzített n mellett csak véges számú olyan megoldása van, amelyben valamennyi x_i a pozitív egész számok 1, 2, 3, . . . sorozatának egyik tagjával egyenlő. Ezt az eredményt sikerült általánosítanom arra az esetre is, amikor e sorozat helyett pozitív valós számok tetszőleges növekvő sorozata van adva.

3. §.

Végül bebizonyítjuk most a 2. tételt. Tekintsük e célból adote b mellett az (1) egyenlet egy olyan egész számú megoldását, melyrt

$$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \quad \text{és} \quad b \leq x_n .$$

Ekkor az 5. tétel szerint

$$b < a_n . \tag{65}$$

Másfelől (9) alapján

$$a_n < a_{n-1}^2 < a_{n-2}^4 < \ldots < a_1^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}},$$

tehát

$$a_n < e^{e^n}$$

és így

$$\log \log a_n < n.$$

Ebből és (65)-ből nyilván következik, hogy

$$\log \log b < n. \tag{66}$$

Tekintsük már most $\frac{a}{b}$-nek és $\frac{b-1-a}{b}$-nek egy. előállítását törzstörtek összegeként:

$$\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_r}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_s}=\frac{b-1-a}{b}.$$

Ezekből:

$$\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_r}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_s}+\frac{1}{b}=1.$$

Ennélfogva $N(a, b)$ definíciója szerint és (66) alapján:

$$N(a, b)+N(b-1-a, b)+1>\log\log b.$$

Ha itt $a=0$-at helyettesítünk, máris az igazolandó (7) egyenlőtlenséget kapjuk. Összegezzük másfelől az utóbbi egyenlőtlenségeket $a=1, 2, \ldots, b-2$ esetén:

$$2[N(1, b)+N(2, b)+\ldots+N(b-2, b)]>$$
$$(b-2)(\log\log b-1).$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$\frac{1}{b-2}[N(1, b)+\ldots+N(b-2, b)]>\frac{1}{2}(\log\log b-1)>$$
$$>c_2\log\log b.$$

Ezzel (6) helyességét is kimutattuk, azáz a 2. tételt bebizonyítottuk.

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИЙ

Пусть $N(a, b)$ наименьшее натуральное число n для которого существуют натуральные числа $x_1<x_2<\ldots<x_n$ так что имеет место $\frac{a}{b}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$, где $a, b,$ — данные атуральные числа. Автор доказывает, что для $1\leq a\leq b$ имеем $a, b)<c_1\frac{\log b}{\log\log b}$ и $\sum_{a=1}^{b-2}N(a, b)>c_2\, b\log\log b$; кроме этого казаны некоторые до сих пор недоказанные предложения.

ON A DIOPHANTINE EQUATION

Denote by $N(a,b)$ the smallest integer n so that

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

is solvable in positive integers x_i. Sharpening previous results of Nakayama, Strauss and de Bruijn, the author proves that for $1 \leq a < b$

$$N(a,\ b) < c_1 \frac{\log b}{\log \log b}$$

and

$$\sum_{a=1}^{b-2} N(a,\ b) > c_2\, b \log \log b.$$

It seems likely that for $1 \leq a \leq b$

$$N(a,\ b) < c_3 \log \log b.$$

Nakayama proved that $N\,(3,\ b) = 3$ if and only if all prime factors of b are of the form $6\,k + 1$. Strauss and the author conjecture that $N\,(4,\ b) < 4$ for every $b \geq 4$, Strauss proved this for $b < 5000$.