

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

Jahrgang 1952

---

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

## Bemerkung zu einem Satz von A. Moessner

Von Hans Salié in Leipzig

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 1. Februar 1952

Geht man von der Reihe beliebiger Zahlen

$$(a) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

aus, streicht jede  $k$ -te Zahl ( $k \geq 2$ ), bildet von der übrigbleibenden Reihe die Summenreihe, streicht dann aus dieser jede  $(k-1)$ -te Zahl, bildet wieder die Summenreihe, streicht dann jede  $(k-2)$ -te Zahl, bildet abermals die Summenreihe und setzt diesen Prozeß fort, bis man schließlich beim  $(k-1)$ -ten Schritt jede zweite Zahl streicht, und bildet schließlich die Summenreihe, so entsteht auf diese Weise aus  $(a)$  die neue Reihe

$$(a^{(k)}) \quad a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots$$

Werden für  $(a)$  die natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \dots$$

genommen, so hat Herr A. Moessner<sup>1</sup> gefunden, daß  $(a^{(k)})$  die Reihe

$$1^k, 2^k, 3^k, \dots$$

ergibt. Herr O. Perron<sup>2</sup> gab einen einfachen Beweis dieses Satzes.

Sind die  $a_v$  Unbestimmte, so sind die  $a_n^{(k)}$  offenbar lineare Polynome von ihnen, und man kann nach dem Bildungsgesetz der Koeffizienten fragen. Im folgenden wird gezeigt:

$$(1) \quad a_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} a_{\rho k + \nu} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}, \quad \begin{array}{l} k \geq 2, \\ n = 1, 2, \dots \end{array}$$

Der Moessnersche Satz ergibt sich hieraus durch die Spezialisierung

<sup>1</sup> Diese Sitzgsber. 1951, Nr. 3, S. 29.

<sup>2</sup> Ebda 1951, Nr. 4, S. 31-34.

$$(A) \quad a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

Man erhält dann aus (1) ohne Rechnung

$$a_n^{(k)} = n^{k-2},$$

und dieses Ergebnis enthält zugleich die Formel

$$(B) \quad b_n^{(k-1)} = n^{k-2} \quad \text{für} \quad b_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und

$$(C) \quad c_n^{(k-2)} = n^{k-2} \quad \text{für} \quad c_n = n,$$

da der eingangs der Note gegebene Prozeß, auf die Folge (A) angewendet, über die Reihen (B) und (C) führt. Mit (C):

$$c_n^{(k)} = n^k$$

ist der Satz von Moessner gewonnen.

Der Beweis von (1) wird durch vollständige Induktion nach  $k$  (Schluß von  $k$  auf  $k+1$ ) geführt. Um  $(a^{(k+1)})$  zu erhalten, streiche man zuerst aus (a) die Glieder

$$a_{k+1}, a_{2(k+1)}, a_{3(k+1)}, \dots$$

In der dann entstehenden Reihe

$$(\alpha) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

ist

$$(2) \quad \alpha_{\rho k + \nu} = \alpha_{\rho(k+1) + \nu}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq \nu \leq k, \\ \rho = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

Bezeichnet

$$(s) \quad s_1, s_2, s_3, \dots$$

die Summenreihe von  $(\alpha)$ , so gilt

$$(3) \quad a_n^{(k+1)} = s_n^{(k)}.$$

Macht man die Voraussetzung, daß Formel (1) für

$$a_n^{(2)}, a_n^{(3)}, \dots, a_n^{(k)} \quad k \geq 2$$

und alle Folgen (a) gültig ist, so darf man in (1)

$$s_m = \sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu$$

an Stelle von  $a_m$  einsetzen. Es entsteht dann aus

$$s_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} s_{\rho k + \nu} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}$$

der Ausdruck

$$(4) \quad a_n^{(k+1)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^k \alpha_{\rho k + \nu} \delta_{\rho \nu}^{(k)},$$

wobei offenbar

$$(5) \quad \delta_{\rho \nu}^{(k)} = \sum_{j=\nu}^{k-1} (n-\rho)^{k-j-1} (n-\rho-1)^{j-1} + \\ + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k-1} (n-i)^{k-j-1} (n-i-1)^{j-1}, \quad 1 \leq \nu \leq k$$

bedeutet. Benutzt man die Zerlegung

$$(n-\rho)^{k-j-1} (n-\rho-1)^{j-1} = (n-\rho)^{k-j} (n-\rho-1)^{j-1} - (n-\rho)^{k-j-1} (n-\rho-1)^j$$

so wird aus der ersten Summe in (5)

$$(6) \quad \sum_{j=\nu}^{k-1} [(n-\rho)^{k-j} (n-\rho-1)^{j-1} - (n-\rho)^{k-(j+1)} (n-\rho-1)^{(j+1)-1}] \\ = (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1} - (n-\rho-1)^{k-1}.$$

Unter Verwendung von (6) erhält man für die Doppelsumme in (5):

$$(7) \quad \sum_{i=\rho+1}^{n-1} [(n-i)^{k-1} - (n-i-1)^{k-1}] = (n-\rho-1)^{k-1}$$

und damit durch (6) und (7) aus (5)

$$(8) \quad \delta_{\rho \nu}^{(k)} = (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1}.$$

Der Ausdruck (4) geht schließlich durch Einsetzen von (2) und (8) über in

$$a_n^{(k+1)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^k \alpha_{\rho(k+1)+\nu} (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1},$$

d. i. Gleichung (1), wenn darin  $k$  durch  $k + 1$  ersetzt wird. Somit ist Gleichung (1) allgemein bewiesen, da sie für  $k = 2$

$$a_n^{(2)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} a_{2\rho+1}$$

richtig ist.

Zum Schluß wird noch ein Beispiel gegeben. Zur Folge

$$(Q) \quad q_n = q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$q$  eine Unbestimmte, gehört nach (1) der Ausdruck

$$q_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\rho k + \nu - 1} (n - \rho)^{k - \nu - 1} (n - \rho - 1)^{\nu - 1},$$

der für  $n \geq 2$  in

$$(9) \quad q_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\nu-1} n^{k-\nu-1} (n-1)^{\nu-1} + \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} (n-\rho-1)^{k-\nu-1} (n-\rho-2)^{\nu-1}$$

übergeht, wenn man den Summationsbuchstaben  $\rho$  durch  $\rho + 1$  ersetzt. Andererseits ist für  $n \geq 2$

$$(10) \quad q^k q_n^{(k)} = q^{nk} + \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}.$$

Durch Subtraktion von (9) und (10) und Division durch  $n^{k-2}$  erhält man:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} (1 - q^k) \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} &= \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\nu-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu-1} - \frac{q^{nk}}{n^{k-2}} - \\ &- \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} \left[ \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{k-\nu-1} \left(1 - \frac{\rho+1}{n}\right)^{\nu-1} - \right. \\ &\left. - \left(1 - \frac{\rho+1}{n}\right)^{k-\nu-1} \left(1 - \frac{\rho+2}{n}\right)^{\nu-1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn  $q$  als Zahl mit  $|q| < 1$  vorausgesetzt wird, ist die Doppelsumme in (11) dem Betrage nach kleiner als

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} |q^k|^{\rho+1} \cdot \sum_{\nu=1}^{k-1} |q|^{\nu-1} \cdot \frac{2(k-2)}{n} < \frac{K}{n}$$

mit von  $n$  unabhängigen Werten  $K = K(q, k)$ , da die eckige Klammer in (11) unterhalb

$$\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{h-2} - \left(1 - \frac{\rho+2}{n}\right)^{h-2} \leq \frac{2(k-2)}{n}$$

liegt. Geht man nun bei festem  $k$  und  $|q| < 1$  zur Grenze  $n \rightarrow \infty$ , so entsteht aus (11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^k) \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} = \sum_{v=1}^{k-1} q^{v-1}, \quad |q| < 1,$$

d. h.

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} = \frac{1 - q^{k-1}}{(1-q)(1-q^k)}, \quad |q| < 1, k \geq 2.$$

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1953

Band/Volume: [1952](#)

Autor(en)/Author(s): Salie [Salié] Hans

Artikel/Article: [Bemerkung zu einem Satz von A. Moessner 7-11](#)