О геометрии в школе [1)]

Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62

Наше среднее образование страдает перегрузкой. Но даже постановления, обязывающие преодолеть эту болезнь, не ведут к радикальным результатам: каждый специалист настаивает на том, что без «его» предмета, без таких-то и таких-то разделов обойтись никак невозможно. Но если спросят: почему? — то последует ответ: это невозможно никак, потому что никак невозможно ибо образование и состоит в наполнении человека знаниями. Однако, по более глубокому пониманию, цель среднего образования состоит в том, чтобы дать человеку основные практически нужные знания и развить его личность, развить духовно — в умственном и нравственном отношении (последнее и есть самое главное). Поэтому вопрос о нужности любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к практической надобности и значению в развитии личности. При этом выясняется, что кое-что, а то и довольно многое можно исключить из программ без сожаления, а кое-что следовало бы и добавить. Только решить этот вопрос для каждого предмета не очень просто; поэтому его решение заменяют уверениями в надобности «своего» предмета.

Понимание того, что практически нужно в данном предмете и что в нем может служить развитию личности, должно определить и содержание предмета, и постановку его преподавания. В конечном счете это понимание должно служить основой для решения всех вопросов преподавания.

Мы рассмотрим в этом плане курс геометрии, особенно стереометрии, прежде всего с точки зрения его роли в развитии личности. Одним из результатов нашего рассмотрения будет вывод, что из программы стереометрии полезно исключить целых два раздела.

[1)] В 1980 г. статья опубликована в журнале «Математика в школе» под названием «О геометрии». Название «О геометрии в школе» дано автором при переиздании статьи в книге: *Александров А. Д.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 75–91. — *Прим. ред.*

1. Противоречивая сущность геометрии

Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Воображение дает непосредственное видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика придает точность воображению и направляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логические связи.

Это, несомненно, так для трехмерной евклидовой геометрии. Но в содержательном основании неевклидовой и многомерной геометрии тоже лежат наглядные представления, хотя бы обобщенные; без них любой раздел геометрии, естественно, перестает быть геометрией. Но здесь мы будем говорить не о всей геометрии, а о той ее части, которая изучается в школе, и при этом специально о стереометрии.

Именно в стереометрии указанная особенность геометрии выступает наиболее ярко. Во-первых, потому что в ней требуется пространственное воображение. Факты изображаются на доске и на бумаге в их подлинном виде (не считая того, что нельзя нарисовать бесконечную прямую без всякой толщины и т. п.). Но факты стереометрии изображаются условно и потому не могут быть верно восприняты без дополнительного пространственного представления, а оно составляет известную трудность, нередко значительную. Во-вторых, стереометрия изучается в последних классах школы, когда учащиеся должны быть достаточно развиты для того, чтобы воспринять логику дедуктивного изложения. Поэтому курс стереометрии можно и следует строить с большей логической последовательностью и доказательностью, чем курс планиметрии.

Таким образом, мы с большим правом можем повторить о курсе стереометрии то, что было сказано о геометрии вообще. Стереометрия и должна быть преподана в соединении наглядности и логики, как живое пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Живое воображение скорее ближе искусству, строгая логика — привилегия науки. Они, можно сказать, совершенные противоположности («лед и пламень не столь различны меж собой»). Однако геометрия их все же соединяет, и задача преподавания — соединить их в одном учебном предмете.

Это есть реальное взаимопроникновение, единство противоположностей, противоречие в самой сущности предмета, которое не может быть устранено иначе, как уничтожением самого предмета, т. е. ликвидацией курса геометрии и заменой его чем-то другим. Это противоречие составляет особую трудность, но вместе с тем и особую прелесть геометрии. Трудно сочетать столь противоположные свойства, как живость воображения и строгость мысли, но зато, когда их единство осуществляется, достигается большая ясность понимания и радость непосредственного «видения» истины.

В курсе геометрии соединяются еще две противоположности: абстрактная математическая геометрия и «реальная геометрия» — пространственные отношения и свойства материальных тел. Это противоречие выступает уже в тот момент, когда на доске «проводят прямую» и говорят: «Проведем прямую через точки A и B». Но на доске нет точек и невозможно провести прямую: геометрические точки и прямые — это идеальные объекты, они не существуют иначе, как в абстрактном мышлении, их, в строгом смысле, нельзя даже представить, а можно только мыслить.

Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах наглядно представимых и применяются к реальным вещам, в которых идеальные объекты геометрии реализуются нередко очень условно. Стереометрия начинается с того, что «через три точки проходит плоскость». Но показать это реально можно лишь с чрезвычайной условностью. Плоскость в реальности — это либо плоский предмет, либо плоская поверхность предмета, т. е. не геометрическая плоскость как таковая, тем более бесконечная.

При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики и применяется в практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать ее с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой (и через приложения, и в иллюстрациях геометрических понятий и утверждений, и в определениях основных понятий).

Например, в действующем курсе геометрии перемещение определяют как отображение всего пространства или (в планиметрии) всей плоскости. Но это нелепо. На самом деле перемещают предметы. Соответственно в курсе геометрии нужно начинать с понятия о перемещении фигур как образе реальных перемещений предметов с одного места на другое [2)], что отвечает наглядному представлению и удобно в геометрии (например, если нужно одновременно переместить две фигуры так, чтобы они покрыли данную точку). При всем этом связь геометрии с реальностью заключает противоречие — несоответствие реальных вещей геометрическим абстракциям.

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам. Этот «треугольник» составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии; воображение ближе к реальности. Задача преподавания геометрии — развить у учащихся соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

[2)] Перемещение материальной точки с одного места на другое — из геометрической точки A в точку B и осуществляет отображение A на B.

Разумеется, одна из задач курса геометрии — дать учащимся основные понятия и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключены в трех указанных элементах, во-первых, ввиду их значения для общего развития, во-вторых, потому что они уже включают основное из тех знаний, которые должен давать курс геометрии. Поэтому остановимся сначала на этих элементах.

2. *Воображение и реальность*

Воображение — это прекрасная и могущественная способность человека. Что являет собой в подавляющей части искусство и техника, как не воплощенное воображение! Научные идеи и теории также оказываются в большей мере его порождениями. Пространственное воображение, развитию которого служит геометрия, составляет важный компонент в общей способности человека к воображению и имеет существенное значение в ряде отношений. Оно, разумеется, вообще необходимо человеку для ориентировки в окружающем мире и в развитой форме существенно для многих видов деятельности. Оно нужно квалифицированному рабочему, инженеру, архитектору, авиатору, скульптору и т. д. Вместе с тем развитие пространственного воображения расширяет видение мира, делает его более пространственно выпуклым и содержательным подобно тому, что делает стереоскоп с плоскими снимками. Развитое воображение обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе и созерцать разнообразные картины.

Словом, развитое пространственное воображение — это важный элемент общей культуры. Геометрия, требуя воображать геометрические образы в их идеальной точности и логической определенности, дает этим пространственному воображению утонченность и точность.

Великий архитектор нашего века Ш. Э. Ж. Ле Корбюзье писал:

«Геометрия есть средство, с помощью которого мы воспринимаем среду и выражаем себя.

Геометрия — это основа.

Кроме того, она является материальным воплощением символов, выражающих все совершенное, возвышенное.

Она доставляет нам высокое удовлетворение своей математической точностью.

Машина идет от геометрии. Следовательно, человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем» [1, с. 25].

Во вдохновенных словах Корбюзье геометрия воспета в ее воплощении в реальных вещах, в единстве геометрического образа и его материального осуществления. «Машина идет от геометрии», вся техника пронизана геометрией и начинается с геометрии, ибо всюду, где нужна малейшая точность размеров и формы, где нужна структурность взаимного расположения частей, вступает в силу геометрия.

Конструктор, рабочий-изобретатель, инженер представляют себе сначала примерный вид создаваемой детали или конструкции, чертят, уточняют, делают модели; наконец, складывается точное представление, делаются рабочие чертежи, и по ним воссоздают пространственный вид предмета, изготовляют его. Так происходит взаимодействие пространственного воображения, изображения на чертеже и реального воплощения в модели или в готовом предмете.

В механике и в физике геометрические представления также играют фундаментальную роль уже потому, что движение, процессы происходят в пространстве. Вспомним хотя бы кинематику и геометрическую оптику. Вспомним еще строение кристаллов, пространственные модели сложных молекул, симметрию живых организмов и др.

О значении пространственных представлений в изобразительном искусстве и архитектуре говорить не приходится — оно очевидно. Отметим, между прочим, что посвященная искусству книга одного из самых выдающихся советских художников К. С. Петрова-Водкина называется «Пространство Евклида».

Ученику нужно показать эти реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами.

Пространственные представления, геометрическая интуиция играют существеннейшую роль вне геометрии и в самой математике. Математический анализ немыслим без геометрических образов, начиная с числовой прямой, графиков функций и т. д. Эта роль геометрии сказалась в нашем веке в создании функционального анализа, занявшего с его основным понятием пространства функций центральное место в современной математике. Чтобы не возбудить подозрений в стремлении автора-геометра расхвалить свою науку, сошлюсь на суждение одного нашего выдающегося математика другой специальности: «Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать и затем применить к ним первоначально развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию оказалось исключительно плодотворным открытием» [2, с. 10].

Этот пример — формирование громадной области науки по указаниям геометрической интуиции — с большой силой показывает нам ту направляющую роль, какую играет геометрическое воображение в его союзе с логикой. Точно так же должно быть и в школьном преподавании.

Изложение любого элемента курса — будь то аксиома, определение, теорема, задача — должно начинаться с наглядной картины, которую учащиеся и должны усвоить в первую очередь. Надо, чтобы ученик представлял себе, допустим, что такое пирамида, мог описать ее, мог решить касающуюся ее простую задачу. А если при этом он не может безошибочно произнести точного ее определения, в этом еще нет большой беды.

Существенно наглядно-оперативное знание предмета, содержащее наглядные представления и умения правильно ими оперировать. Все представляют себе, что такое стул, и умеют им пользоваться, но, наверное, многие затруднятся дать сразу, как на экзамене, определение: «стулом называется…». У математиков XVII–XVIII вв. не было точных определений ни функции, ни предела, ни самого переменного x, но они действовали с замечательным успехом (вспомним хотя бы Л. Эйлера).

Педантичное стремление дать каждому понятию словесное определение может вести к тому, что вместо пояснения и уточнения представлений, которые уже есть у учащихся, вместо формирования у них новых ясных понятий им дается нечто трудно представимое или вовсе невообразимое, а лишь выраженное в словесной оболочке, порой такой, что они не могут ни понять сказанное, ни применить. Например, в действующих учебниках дается определение: «направлением называется множество всех сонаправленных лучей». И так как ученикам уже внушали, что множество — это собрание элементов и оно состоит из своих элементов, то выходит, что направление состоит из всех сонаправленных лучей. Интуитивное понятие направления, свойственное каждому человеку, заменяется чем-то невообразимым и к тому же совершенно бесполезным, поскольку таким понятием направления никто, собственно, не пользуется. Сходное положение обнаруживается с определениями понятий вектора, многогранника и др.

Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного — умственного и морального — развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает и при необходимости руководствуется другими понятиями.

Однако мы свернули на критику существующих учебников, которая сейчас не входит в нашу задачу. О них стоило упомянуть лишь затем, чтобы ярче оттенить важность наглядности и не дать подумать, что, всячески подчеркивая ее значение, мы ломимся в открытые двери. Вовсе нет! Есть все основания четко выдвинуть и подчеркнуть как первый основной принцип преподавания геометрии: каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление, с такого представления надо начинать и им руководствоваться в изложении. Соответственно этому изложение следует начинать с наглядной картины — с рисунка на доске, описания, показа модели, примеров.

20 Заказ № 233

В стереометрии существенно именно рисовать, чтобы вызвать пространственное представление, пользуясь, например, штриховкой, оттеняющей грани многогранника, и т. п. (в этой связи заметим в скобках, что на физико-математических и естественных факультетах педагогических институтов полезно было бы ввести занятия по специальному рисованию).

Вместе с рисунком должно идти разъяснение его пространственного содержания, возбуждающее верное пространственное представление. Одновременно нужно разъяснить также точный геометрический смысл изображаемого — пронизать и организовать наглядное представление точной логикой. Тут же необходимо, если это не сделано ранее, дать реальные примеры из жизни, из техники и т. п. Логически организованное представление дает нужную формулировку определения, теоремы или задачи. За этим вступают в действие логические доказательства.

Геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением; лучше всего, когда доказательство или решение, можно сказать, видно из наглядной картины. В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!». При прочих равных условиях следует предпочесть наглядный вывод вычислительному и ради наглядности можно жертвовать логической точностью и обоснованностью. Так, полезно привлекать наглядные соображения непрерывности, наглядно представляемые движения точек и фигур и другие образы, заимствованные даже из механики и физики (сам Архимед пользовался механическими соображениями в своих геометрических выводах, хотя, конечно, окончательное оформление их совершал со всей строгостью).

К тому же подходу должен быть приучен и ученик — начинать с рисунка, с наброска, наглядного описания — отвечает ли он у доски, учит ли что-нибудь дома, решает ли задачу; рисунку должны сопутствовать пространственное представление, точное понимание и т. д.

Насколько важно сочетание ясного наглядного представления и точного понимания и насколько опасно пренебречь им, можно видеть на примере определения многогранника, данного в учебнике для 9–10-х классов. Это определение так усложнено и запутано, что его рекомендуют и не спрашивать у учеников. И не мудрено: авторы учебника сами запутались в своем определении и оно оказалось неверным! На рисунке учебника по геометрии для 6–8-х классов изображены пять многогранников, два из них не подпадают под определение, данное в учебнике для 9–10-х классов. А произошло это потому, что авторы не смогли соединить должным образом наглядное представление о многограннике с логической точностью формулировок.

Итак, изложение всякого раздела курса начинается с картины, с наглядного представления, обращается к логике формулировок и выводов, а затем полученное знание применяется и закрепляется при рассмотрении примеров

и решении задач. Этот общий порядок изложения можно характеризовать кратко словами В. И. Ленина о пути познания вообще: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности» [3, с. 152–153].

Таким путем, скажем мы, и должно идти познание учащимися геометрии.

3. *Логика и мировоззрение*

Пока мы больше говорили об исходном пункте — о «живом созерцании»; обратимся ко второму — к «абстрактному мышлению», к тому элементу «треугольника», изображающего сущность геометрии, который был обозначен как логика.

С давних пор общепризнано, что курс геометрии должен учить логическому мышлению, и было бы лишним распространяться здесь на эту тему, но все же представляется необходимым обратить внимание на некоторые моменты.

По-видимому, есть серьезная опасность, что многие учащиеся не столько понимают логику формулировок и доказательств, сколько заучивают их. Едва сбившись с заученной формулировки, с заученного хода рассуждений, такой ученик теряется; он следует, собственно, не смыслу формулировки, не рассуждению, а их внешней словесной оболочке.

Одно из первых средств преодоления опасности: уменьшить число формулировок и особенно доказательств, которые ученик должен запомнить. Лучше, чтобы ученик знал доказательства немногих теорем, но знал с действительным пониманием, чем старался вызубрить доказательства десятков утверждений, которые содержатся в курсе геометрии за один класс.

Если мы хотим учить логическому мышлению, то и надо учить ему, а не запоминанию готовых рассуждений. Поэтому излагаемые формулировки и доказательства должны рассматриваться скорее как упражнения в логическом мышлении, чем как то, что надо заучивать.

Отсюда вытекает и следующий вывод: нужно давать возможно больше упражнений в логическом мышлении, как вообще нужно много упражняться, чтобы научиться какому-либо виду деятельности, будь то работа напильником, ходьба на лыжах или логические рассуждения. Поэтому полезно, во-первых, чтобы учащиеся разбирали (с пониманием) много доказательств, но не заучивали их. Во-вторых, следует решать возможно больше задач на доказательство: гораздо полезнее и приятнее сообразить, найти самому хотя бы маленький вывод, чем заучивать чужие рассуждения (кроме тех, которые особенно поучительны, остроумны и красивы).

Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но во всей их системе в целом. Смысл каждого определения, каждой теоремы, каждого доказательства определяется в конечном счете только этой системой, которая и делает геометрию целостной теорией, а не собранием отдельных определений и утверждений. Это заключенное в геометрии понятие о точной науке с ее строго разворачивающейся системой выводов так же существенно, как и точность в каждом выводе.

Геометрия так и должна быть преподана — с возможно большей строгостью всей системы. При этом надо понимать, что абсолютной строгости вообще не существует, и поэтому задача преподавания состоит в том, чтобы, приняв некоторый уровень строгости и определенную систему предпосылок, разворачивать на ее основе последующее изложение. Все существенное в курсе следует доказывать на принятом уровне строгости и не допускать логических перерывов, по крайней мере в основных линиях курса.

Именно так — в полной логической связности — построено изложение в «Началах» Евклида. Так же, в общем, оно построено и в знаменитом учебнике А. П. Киселёва. Он удачно популяризировал Евклида, и его завидный успех обусловлен в значительной мере именно тем, что на нем лежал отсвет гения Евклида, подобно тому как на переложениях для детей «Гулливера» и «Робинзона Крузо» остается след руки их великих создателей.

Требование изложить основные линии курса без логических пропусков вовсе не означает, что ученики должны учить все эти доказательства: такая нагрузка была бы чрезмерной.

Доказательства могут быть разделены на три части: те, которые следует изучить и знать, те, которые надо понять, и, наконец, те, которые можно в ходе обучения пропустить, имея в виду, что они могут быть предъявлены и разобраны по желанию всем классом или отдельными учениками в зависимости от их уровня (они должны быть изложены в учебнике в качестве дополнений).

В изложении геометрии можно исходить из разных основных посылок, из разных систем аксиом, лишь бы в них не было ни противоречий, ни пропусков. Иначе говоря, принятая аксиоматика должна быть непротиворечивой и полной, в остальном ее выбор должен определяться педагогическими соображениями, прежде всего наглядностью и простотой вывода из них основных следствий, за которыми пойдет развертывание собственного содержания курса. Безусловное значение имеет сама стереометрия как система положений, связанных логическими переходами, а система аксиом играет роль отправного пункта, от которого начинается прохождение этой системы.

В последнее время представилось необходимым перейти в школьной геометрии на более глубокий уровень строгости, чем тот, который был у Евклида. Эта большая строгость состоит прежде всего в явном указании и формулировке основных понятий и аксиом, которые в прежних изложениях только подразумевались.

Но, излагая более точно исходные посылки, формулируя принятые аксиомы, необходимо дальше держаться заложенного в них уровня строгости, не

оставляя ни одного существенного пункта без доказательства, соответствующего принятому уровню. Иначе в курсе будет нарушена система, будет смазана логика его изложения и может оказаться, что в нем будет представлена не целостная наука геометрия, а ее фрагменты, чтобы не сказать куски и обрывки, один — на одном уровне логики, другой — на другом, а то и вовсе без логики.

Если принят теоретико-множественный уровень, то нужно его держаться. Например, сформулировав аксиому «прямая есть непустое множество точек», нельзя после этого принять без доказательства, что на каждой прямой есть по крайней мере две точки (как это сделано в пособии по геометрии для 9–10-х классов). Иначе уточнение исходных посылок остается без должного употребления и поэтому лишается смысла. Выходит, сначала произносятся «ученые слова», а потом действуют «по очевидности». Такое преподавание учит тому, что слова могут расходиться с делом.

Нельзя также оставлять без доказательства существенные теоремы курса, говоря «примем без доказательства...». Так почти все в курсе оказывается принятым без доказательства или основанным на принятом без доказательства, и курс приобретает сходство с набором сведений по геометрии, тогда как он, по крайней мере стереометрия, должен дать ученикам не просто сведения по геометрии, а систему в точности деталей и всей структуры. Скрытая здесь глубокая задача курса геометрии состоит в усвоении научного мировоззрения, в формировании его основы. Ее образуют безусловное уважение к установленной истине, требование доказывать то, что выдвигается в качестве истины, отказ от подмены доказательства верой или ссылкой на авторитет. Стремление к истине, поиск доказательства (или опровержения) — это активная, а потому и ведущая сторона в основе научного мировоззрения. Свойственное ему убеждение в фундаментальном значении и могуществе научной истины ярко выражено в знаменитых словах В. И. Ленина: «Учение Маркса всесильно, потому что оно верно» [4, с. 43]. Курс геометрии воспитывает требование доказывать то, что утверждается, если, конечно, это не заменяется в курсе псевдодоказательствами или заявлениями: «примем без доказательства...». Без доказательства можно принять многое, и основанием будет служить ссылка на авторитет: верно потому, что сказано в учебнике (или учителем), а не потому, что доказано.

В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательств, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах. Научная преданность истине и состоит в стремлении основывать свои убеждения в любом вопросе на наблюдениях и выводах настолько объективных, настолько не поддающихся посторонним влияниям и порывам темперамента, насколько это только доступно человеку. Впрочем, у нас нет здесь места развить эту саму по себе чрезвычайно важную тему нравственного содержания в основе научного мировоззрения. Мы только обращаем внимание на то, что курс геометрии в правильной его постановке и ориентации, воспитывая должное отношение к истине, тем самым вносит свой вклад в формирование научного мировоззрения и вместе с этим в нравственное воспитание учащихся.

Конечно, если преподавание полностью замыкается в самой геометрии, то даваемое им развитие логического мышления и элементов научного мировоззрения не выйдет за ее специальные рамки. Поэтому педагог должен привлечь внимание учащихся к общему значению требований доказательности и точности в установлении истины вообще — не в одной лишь геометрии. Но, чтобы к тому была возможность, курс не должен быть перегружен специальным материалом. Тогда учащиеся смогут усвоить то, что действительно необходимо, и в меру сил продумать общие выводы.

Мировоззрение не выучивают, оно формируется человеком на основе его жизненного опыта, культуры и учения.

4. *Знания и умения*

Рассмотрев глубинные задачи преподавания геометрии, обратимся теперь к его явному содержанию — к тем знаниям и умениям, которые оно должно давать и вырабатывать у учащихся.

Можно сразу заметить, что выработка умения решать геометрические задачи и проводить доказательства уже заключена в сочетании геометрического воображения с логическим мышлением. Оно состоит в умении наглядно представить себе задачу, увидеть пути решения и логично провести его. Если же задача касается реальных вещей, то первое, что нужно уметь, — это представить ее как задачу математическую, как задачу геометрии (если это не сделано явно в ее постановке) и затем решать ее, опираясь на наглядное представление и логику. Геометрический метод и есть не что иное, как живое воображение, в котором находят указания для логически проводимого решения.

Вместе с чисто геометрическим методом применяются элементарная и векторная алгебра, тригонометрические функции и анализ. В школьной геометрии приложения алгебры, не считая отдельных задач, связаны с методом координат. Однако метод координат в пространстве как отдельную тему необходимо исключить из школьного курса: его включение создало без особой к тому надобности крайнюю перегрузку и уводит от основного содержания курса. Тема эта принадлежит аналитической геометрии пространства и должна быть оставлена для вузовского курса; в школе на ее настоящую проработку просто нет времени. Полезно дать только наглядное понятие о координатах в пространстве, наглядное, а не формальное, основанное на векторной алгебре, какое дано в действующем курсе. Некоторые же применения координат можно включить в задачи — не больше.

Не следует также загружать учащихся искусственно усложненными задачами. Это касается не только геометрии. Задачи, предлагаемые, скажем, на выпускных экзаменах, бывают часто совершенно надуманными и содержат такие выкрутасы, какие не встречаются ни в практике, ни в самой изысканной науке. Истина, подобно подлинной красоте, проста, как стихи «Тиха украинская ночь. . . ». Выверты придумывают, когда не умеют найти подлинное. Проще задать хитросплетенную задачу, чем вскрыть у ученика степень ясности и точности его наглядного представления и понимания (то же относится к задачам на вступительных экзаменах в вуз). Сила и острота сообразительности упражняется и обнаруживается на решении естественных по постановке, трудных и глубоких задач.

Векторная алгебра, включая скалярное произведение, нужна в физике и уже потому не должна быть исключена из курса геометрии. К тому же она имеет простое наглядное основание (как исчисление «направленных отрезков») и богатые приложения в самой геометрии. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы строить ее действительно на возможно более простых наглядных основаниях и в тесной связи с задачами физики. А то получается такое нелепое положение, когда физики рассказывают о векторах для своих нужд по-своему, а математики — по-своему.

Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии, и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли — из решения треугольников.

Применение анализа в вычислении объемов может быть отнесено к самому анализу в качестве его приложения, как это сделано для площадей криволинейных трапеций и др. Собственно геометрии принадлежат *понятия* площади, объема, площади поверхности и геометрические приемы, связанные с нахождением этих величин для простейших фигур.

В результате данного краткого обзора можно видеть, что в подавляющей своей части те знания и умения, какие должен приобрести учащийся в курсе геометрии, охватываются сочетанием наглядного представления с логикой, о котором мы говорили выше.

Следует откровенно признать, что значительная часть знаний, требуемых от школьника, выучивается и забывается, так как нужна не столько сама по себе в будущем для практической надобности или общего развития, сколько для «успеваемости». Формальные знания в самом деле могут быть забыты. Важнее сохранить в памяти наглядные представления, общие понятия и методы, чем загружать память деталями, которые при надобности выводятся из общих сведений или находятся в учебниках и справочниках. Можно забыть, например, формулу объема шара, как и другие формулы, которые имеются в справочниках.

Следует исключить из программы как особую тему изучение многогранных и специально трехгранных углов, оставив ее только в качестве материала для задач. Тема эта стоит в курсе особняком, и в ней нет надобности.

Зато полезно ввести некоторые наглядные вещи, касающиеся выпуклых тел, многогранников, перемещений, симметрии, ввести затем, чтобы дать дополнительную пищу развитию воображения и расширению кругозора. Рассмотрение симметрии (фактически групп симметрии) правильных многогранников — прекрасное упражнение для развития наглядных представлений (вместе с тем понятие симметрии играет фундаментальную роль в новейших теориях физики).

Понятия, идущие из наглядной геометрии, вообще имеют в современной науке чрезвычайно большое значение, так что не надо думать, будто наглядное — это низшая, а не высшая математика.

Материал курса геометрии, как уже было сказано о доказательствах теорем, полезно разбить на три части: обязательный минимум, который надо знать, потом то, с чем ученики должны быть ознакомлены, и, наконец, дополнения, с которыми учащиеся могут быть ознакомлены. Курс должен заключать в себе возможность выбора в зависимости от тех или иных конкретных условий, таких, например, как уровень класса, склонности учителя и др.

Привести курс геометрии в достаточное соответствие со всеми изложенными в этой статье принципами представляется нелегким, тем более что существующий курс слишком нарушил эти принципы. Но всякая перестройка образования, как бы ни была она радикальна, не должна совершаться в порядке переворота. Переворот, лет десять назад совершенный в преподавании геометрии, немало навредил ей. Нужны не перевороты, а усовершенствования, совершаемые настоятельно, но постепенно (не считая хирургических операций отсечения тех отделов курса, которые признаны ненужными). Конкретно преломить и осуществить глубокие задачи курса с его мировоззренческим значением в гармонии наглядного и логического, добиваясь при этом максимально возможной простоты и ясности, — все это достаточно трудно.

В заключение отметим, что изложенные принципы могут быть полностью отнесены к курсу геометрии ПТУ. В нем должна господствовать та же линия на развитие пространственных представлений и логического мышления в связи с реальными вещами. Разница может быть лишь в том, что наглядный материал больше увязывается с производством и техникой, а некоторый менее нужный материал и некоторые логические тонкости могут быть опущены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ле Корбюзье Ш. Э. Ж.* Градостроительство // В кн. *Ле Корбюзье.* Архитектура XX века. М.: Прогресс, 1977.
2. *Манин Ю. И.* Математика и физика. М.: Знание, 1979.
3. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.
4. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 5-е изд. Т. 23.

О состоянии школьной математики [1)]

При возрастающей роли математики в условиях научно-технического прогресса, при общем росте культуры и образовательного уровня советского общества реформа преподавания математики в средней школе стала лет 15–20 назад совершенно необходимой, требования к содержанию и характеру школьного курса математики существенно возросли. Соответственно в него были включены новые разделы и исключены некоторые устаревшие; особенно настоятельным было включение начал математического анализа, а также и векторной алгебры, составляющих важнейший элемент математического аппарата механики, физики и техники. Были также предприняты шаги к повышению общего уровня курса математики в смысле его логической строгости и введения некторых общих математических понятий, как, например, понятие множества, пронизывающее, можно сказать, всю современную математику.

Однако в проведении реформы школьного математического образования были допущены серьезные, в некоторых отношениях вопиющие, недостатки. Намеченные изменения были произведены поспешно без достаточной подготовки и к тому же в чрезмерном объеме, с чрезмерными претензиями на более глубокое и строгое изложение. В результате программы оказались

[1)] Этот доклад был прочитан А. Д. Александровым на заседании Ученого совета Института математики Сибирского отделения АН СССР (ныне — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН) 25 декабря 1980 г. Несколько десятков машинописных экземпляров было разослано по ведущим математическим учреждениям СССР вместе с резолюцией Ученого совета Института математики СО АН СССР, выражавшей несогласие с основными положениями статьи *Л. С. Понтрягина* «О математике и качестве ее преподавания» (Коммунист. 1980. № 14. С. 99–112) и редакционного комментария журнала «Коммунист» к ней. Попытки публикации в печати не увенчались успехом. Подробнее см. с. 134 в книге «Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы» (Ред. *Г. М. Идлис, О. А. Ладыженская.* М.: Наука, 2002) и статью *С. С. Кутателадзе* «Sic transit» в книге *А. М. Абрамова* «О положении с математическим образованием в средней школе (1978–2003)» (М.: Фазис, 2003. С. 63–72). -- *Прим. ред.*