Линейные неравенства и комбинаторика

М.Н.Вялый

(материалы летней школы «Современная математика»)

Теория линейных неравенств называется линейным программированием. По существу она совпадает с геометрией многогранников в пространстве произвольной конечной размерности.

Здесь мы рассмотрим несколько примеров приложений линейного программирования к доказательству комбинаторных теорем.

Первым примером будут совершенные графы. Граф называется *совершенным*, если минимальное цветов для правильной раскраски любого его подграфа совпадает с максимальным числом попарно соседних вершин. (Подробнее смотри ниже.) Есть много других способов охарактеризовать совершенные графы. Одно из таких утверждений имеет прямое отношение к линейному программированию. С каждым графом можно связать систему линейных неравенств. Оказывается, что множество решений этой системы в случае совершенного графа устроено проще, чем в общем случае. Используя такую характеризацию совершенных графов, можно доказать знаменитую гипотезу Бержа (слабый вариант), которая утверждает, что дополнение совершенного графа тоже совершенный граф.

Второй сюжет, который обсуждается ниже — очень важная теорема линейного порграммирования, так называемая теорема двойственности. У этой теоремы есть много приложений к комбинаторике, здесь будут рассмотрены несколько характерных примеров.

Изложение сопровождается задачами. Часть из них — упражнения, которые читателю рекомендуется обязательно выполнить для проверки понимания прочитанного. Остальные — довольно трудные задачи, лежащие несколько в стороне от основного сюжета. Такие задачи отмечены звёздочками. В заключительном разделе приводятся решения некоторых задач.

1. Совершенные графы

1.1. Графы

Граф состоит из множества *вершин* и соединяющих их *рёбер*. Каждое ребро соединяет ровно две вершины (при этом говорят, что ребро *инцидентно* этим вершинам). Вершины, связанные ребром, называются *смежными*.

Степенью вершины (иногда говорят *валентностью*) графа называется количество инцидентных ей рёбер.

Связным называется граф, в котором любые две вершины соединены путём, проходящим по рёбрам.

Независимым подмножеством графа G называется такое подмножество вершин, между любыми вершинами которого нет ребра. Через $\alpha = \alpha(G)$ будем обозначать максимальное количество вершин в независимом подмножестве графа G.

Кликой называется полный подграф (любые две вершины связаны ребром), который не содержится ни в каком другом полном подграфе. Через $\omega = \omega(G)$ будем обозначать максимальное количество вершин в клике графа G.

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две вершины, соединённые ребром, раскрашены в разные цвета. Через $\chi = \chi(G)$ будем обозначать наименьшее количество цветов в правильной расскраске графа G.

Пусть V — множество вершин некоторого графа G. *Подграф*, порождённый подмножеством вершин $V_0 \subseteq V$, имеет множеством вершин V_0, а его рёбрами являются рёбра G, соединяющие вершины из V_0.

Дополнением $\bar{G}$ графа G называется граф с тем же множеством вершин, у которого рёбра и нерёбра меняются местами: если вершины u, v смежны в G, то они несмежны в $\bar{G}$ и наоборот.

1.1. Проверьте, что (a) $\chi(G) \geqslant \omega(G)$; (b) $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

1.2. Пусть G_1 — подграф G_2. Тогда (a) $\alpha(G_1) \leqslant \alpha(G_2)$; (b) $\omega(G_1) \leqslant \omega(G_2)$; (c) $\chi(G_1) \leqslant \chi(G_2)$.

Полный граф K_n — это граф с n вершинами, каждая пара которых связана ребром.
Цикл[1] C_n — это связный граф, степень каждой вершины которого равна 2.
Дерево — связный граф, в котором нет циклов.
Двудольный граф — это граф, вершины которого можно разбить на два независимых множества. Другими словами, это граф, для которого $\chi = 2$.
Несколько несложных фактов, которые потребуются в дальнейшем, сформулируем в виде задач.

1.3*. В дереве всегда есть по крайней мере две вершины степени 1.

1.4. Граф двудольный тогда и только тогда, когда всякий цикл в нём имеет чётную длину.

1.5. Дерево — двудольный граф.

1.2. Определение и свойства совершенных графов

Граф называется *совершенным*, если в любом его подграфе хроматическое число равно максимальному размеру клики.

Прямо из определения видно, что подграф совершенного графа — совершенный.

1.6. Докажите, что совершенны: полный граф, дерево, двудольный граф.

1.7. Приведите пример графа, в котором $\chi > \omega$.

1.8. Приведите пример несовершенного графа G, для которого $\chi(G) = \omega(G)$.

1.9*. *Хордовый* граф — это граф, в котором нет циклов C_k при $k \geqslant 4$ (как порождённых графов). Докажите, что хордовый граф совершенный.

1.10*. Вершинами *рёберного* графа $L(G)$ графа G являются рёбра G, а рёбра соединяют те вершины, которые как рёбра исходного графа имеют общий конец. Докажите, что рёберный граф двудольного графа совершенный.

Независимой трансверсалью будем называть независимое множество вершин графа, пересекающее все его максимальные по размеру клики.

Лемма 1. *Граф совершенный, если и только если в каждом его подграфе существует независимая трансверсаль.*

Доказательство. Если хроматическое число графа равно максимальному размеру клики, то любой цветовой класс любой минимальной раскраски будет независимой трансверсалью, так как среди вершин клики максимального размера встретится покрашенная в любой цвет.

В обратную сторону утверждение доказывается индуктивно. Для любого подграфа G' будем строить раскраску в $\omega(G')$ цветов следующим образом: выбираем независимую трансверсаль и красим её вершины в такой цвет, который на следующих шагах не используется. С подграфом, порожденным дополнением к этому независимому множеству в подграфе G', проделываем ту же процедуру. На каждом шаге максимальный размер клики уменьшается на 1. Поэтому в конце получим раскраску всех вершин в $\omega(G')$ цветов. □

Совершенные графы замкнуты относительно операции *вставки совершенного графа вместо вершины*. Операция вставки устроена так: одна из вершин графа выбрасывается, вместо неё добавляется множество вершин вставляемого графа. Множество рёбер у полученного графа (будем называть его *раздутым*) состоит из рёбер исходного графа, рёбер вставленного графа и всех рёбер, которые соединяют вершины вставленного графа с теми вершинами исходного графа, которые были соединены с выброшенной вершиной в исходном графе. На рисунке 1 показана вставка графа K_3.

[1] К сожалению, традиционная терминология довольно запутанная. Тем же словом «цикл» принято называть и замкнутый обход по вершинам и рёбрам графа. Здесь мы по возможности избегаем такого употребления слова «цикл».

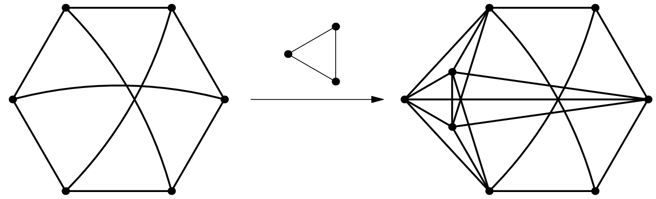

Рис. 1.

Лемма 2 (Лемма Ловаса). *Если вставить вместо некоторых вершин совершенного графа совершенные графы, то полученный граф также будет совершенным.*

Доказательство. Достаточно доказать, что в графе, полученном вставкой вместо одной вершины, обозначим её v, имеется независимая трансверсаль.

Вершина v входит в какой-то цветовой класс раскраски в ω цветов (он же — независимая трансверсаль в исходном графе). Вершины этого цветового класса без вершины v в объединении с вершинами любой независимой трансверсали вставляемого графа H дают независимую трансверсаль в раздутом графе. Действительно, максимальная клика в раздутом графе либо содержит одну из максимальных клик H, либо вообще не пересекается с H. В последнем случае это клика исходного графа, которая не содержит v. □

Теорема 1 (слабая гипотеза Бержа). *Дополнение совершенного графа есть совершенный граф.*

Такое название связано с тем, что это утверждение легко следует из другой, *сильной*, гипотезы Бержа: *в любом несовершенном графе есть цикл нечётной длины* $\geqslant 5$ (*как порождённый подграф*) *или дополнение к циклу нечётной длины* $\geqslant 5$.

Сильную гипотезу Бержа доказать пока никому не удалось.

Сформулируем ещё одну трудную и важную теорему о совершенных графах.

1.11.** Граф G совершенный, если и только если для любого его подграфа G' выполнено $\alpha(G')\omega(G') \geqslant |G'|$, где $|G'|$ — число вершин в G'.

1.3. План доказательства слабой гипотезы Бержа

Будем доказывать равносильное утверждение: *граф совершенный, если и только если в каждом его подграфе есть клика, пересекающая все максимальные по размеру независимые множества.* Другими словами, это условие существования независимой трансверсали в дополнении графа.

В доказательстве будет использован довольно странный трюк. Вершинам графа будем приписывать числа. Рассмотрим, например, произвольное подмножество S вершин графа. Каждая вершина графа либо принадлежит этому подмножеству и тогда ей приписано число 1, либо не принадлежит и тогда ей приписан 0. Такой набор чисел будем обозначать $\mathbf{1}_S$. Но мы будем рассматривать и другие наборы чисел, приписанных вершинам. Отчасти полезно представлять себе это так, как будто некоторые вершины лишь частично входят в некое «виртуальное подмножество». Если вершине приписано число 1/3, то она на треть входит в «множество», описываемое данным набором чисел.

Возьмём n переменных x_v, обозначающих приписанные вершинам некоторого графа G числа, и рассмотрим такую систему линейных неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{v\in K} x_v \leqslant 1, & K \text{ — клика,} \\ \quad x_v \geqslant 0, & v \in V. \end{cases} \tag{1}$$

В эту систему входит по одному неравенству для каждой клики (первая строка) и по одному неравенству для каждой вершины (вторая строка).

Множество решений системы (1) называется *многогранником упаковок*, обозначать его мы будем $\mathcal{P}(G)$.

Условия, записанные в первой строке, обобщают то простое наблюдение, что любая клика пересекается с любым независимым множеством не более чем по одной вершине. Поскольку мы теперь рассматриваем «обобщённые подмножества», т. е. наборы чисел, то можно сказать, что неравенства (1) описывают «обобщённые независимые подмножества». В частности, если S — независимое множество, то набор $\mathbf{1}_S$ входит в $\mathcal{P}(G)$, так как среди переменных, входящих в клику, не более одной принадлежит S.

Рассмотрим линейную функцию $\varphi(x) = \sum_{v\in V} x_v$ (т. е. просто сумму всех переменных). Максимального значения на целочисленных наборах она достигает на наборах $\mathbf{1}_S$, соответствующих независимым множествам S мощности $\alpha(G)$.

С другой стороны, рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \to \max, \qquad x \in \mathcal{P}(G). \tag{2}$$

Оказывается (ниже это будет доказано), что множество решений такой задачи задаётся условиями (1), в которых часть неравенств заменяется на равенства. Среди таких неравенств найдётся хотя бы одно, соответствующее какой-то клике K. Если $\varphi_{\max} = \alpha$, то все наборы $\mathbf{1}_S$, $|S| = \alpha$, входят в решение (2). Но это и означает, что клика K пересекает все максимальные по размеру независимые множества.

Итак, нужно доказать, что $\varphi_{\max} = \alpha$, и что решения задачи (2) могут быть описаны системой, получающейся из (1), заменой части неравенств на равенства.

Для доказательства этих утверждений нужно прежде всего разобраться, как устроены решения систем линейных неравенств.

2. Матрицы, полиэдры, политопы

2.1. Матричные обозначения, действия с матрицами

Для рассуждений с большим количеством переменных и неравенств удобны матричные обозначения.

Матрица — заполненная числами прямоугольная таблица. Матрицу, в которой m строк и n столбцов, будем называть матрицей размера $m\times n$ или $(m\times n)$-матрицей. Если A — матрица, то A_{ij} обозначает элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце.

Матрицы размера $n\times 1$ имеют называются *вектор-столбцами*, а матрицы размера $1\times n$ — *вектор-строками*. Элементы таких матриц указываются одним индексом.

Если A, B — матрицы одинакового размера, то их можно поэлементно сравнивать: $A \leqslant B$ означает, что для всех элементов матриц выполнено неравенство $A_{ij} \leqslant B_{ij}$.

Суммой матриц $A + B$ является матрица, состоящая из поэлементных сумм: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Матричное произведение AB определено для матриц размеров $m\times p$ (первый сомножитель) и $p\times n$ (второй сомножитель). Размер AB равен $m\times n$, а элементы AB задаются соотношением $(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{p} A_{is}B_{sj}$. Приведем пример перемножения матриц 2×2:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Как видим, умножение матриц зависит от порядка сомножителей. Зато оно не зависит от порядка, в котором вычисляются попарные произведения, если порядок сомножителей не меняется.

2.1. Докажите, что матричное умножение ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$.

Транспонированная матрица A^t получается переменой строк и столбцов: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Очевидно, что $(A^t)^t = A$. Вот пример:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ A^t = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ (A^t)^t = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

2.2. Докажите, что $(AB)^t = B^t A^t$.

Приведём основные примеры использования матричных обозначений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Система неравенств записывается в матричных обозначениях так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \quad \text{то же самое, что } Ax \leqslant b,$$

Здесь x обозначает вектор-столбец переменных, b — вектор-столбец ограничений. A — матрицу коэффициентов размера $m \times n$.

Линейная функция записывается как произведение вектор-строки коэффициентов на вектор-столбец переменных:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \text{ то же самое, что } cx.$$

2.2. Полиэдры

Полиэдром называется множество решений системы линейных неравенств. На геометрическом языке полиэдры — это пересечения полупространств (в случае плоскости, т. е. неравенств с двумя переменными, полупространство называется полуплоскостью). Полупространство задаётся одним линейным неравенством

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant b,$$

а ограничивающая его *гиперплоскость* (прямая при $n = 2$, плоскость при $n = 3$) линейным уравнением, получающимся заменой в предыдущей формуле знака неравенства на знак равенства.

Гранью полиэдра $P = \{x : Ax \leqslant b\}$ называется множество решений некоторой задачи *линейного программирования* на этом полиэдре, т. е. задачи

$$\begin{cases} cx \to \max \\ Ax \leqslant b \end{cases}. \tag{3}$$

В дальнейшем будем использовать смешанные системы, состоящие из равенств и из неравенств. Ограничиваясь лишь системами неравенств, мы ничего не теряем:

$$(a = b) \Longleftrightarrow (a \leqslant b)\&(-a \leqslant -b).$$

Грань полиэдра сама по себе является полиэдром. Обозначим максимум в (3) через ℓ. Тогда

$$F = \{x : Ax \leqslant b, cx = \ell\}. \tag{4}$$

Грани полиэдра можно задавать иначе: множеством тех неравенств, входящих в матрицу A, которые обращаются в равенство на данной грани.

Рассмотрим грань F, задаваемую (4). Через a_j обозначим j-ю строку матрицы A. Выберем те строки a_j матрицы, для которых $a_jx = b_j$ для всех $x \in F$. Такие строки назовём *насыщенными*. Множество номеров насыщенных строк обозначим J. Геометрически это означает, что мы выбираем такие полупространства, граница которых целиком содержит грань F.

Для каждой из ненасыщенных строк a_k на грани F найдётся вектор p_k, не насыщающий эту строку, т. е. $a_kp_k < b_k$. Но тогда найдётся и такой вектор $p \in F$, который не насыщает ни одну из ненасыщенных строк. Геометрически это очевидно: нельзя покрыть шар конечным числом (гипер)плоскостей. Алгебраическое доказательство несложно.

Рассмотрим среднее арифметическое точек p_k:

$$p = \frac{1}{s}\sum_{k \notin J} p_k,$$

где s — количество ненасыщенных строк. Для вектора p и любой ненасыщенной строки a_k получаем

$$a_k p \leqslant \frac{1}{s} a_k p_k + \frac{s-1}{s} b_k < b_k. \tag{5}$$

С другой стороны, вектор p является *выпуклой комбинацией* векторов p_k (в общем случае выпуклая комбинация векторов $u_1, \dots, u_r$ равна $u = \sum_i \lambda_i u_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$).

2.3. Докажите, что полиэдр — *выпуклое* множество, т. е. любая выпуклая комбинация векторов полиэдра принадлежит полиэдру.

Из этого упражнения получаем, что p принадлежит грани F.

Обозначим через F' полиэдр, который получается из P заменой неравенств в насыщенных строках на равенства. По построению F' содержит F. Докажем, что на самом деле $F' = F$.

Предположим, что есть $x \in F' \setminus F$, для него $cx < \ell$. Множество векторов вида $p + t(x-p)$, где t — числовой параметр, образуют прямую, проходящую через вектора p и x. Функция cx на этой прямой непостоянна: $cx < cp = \ell$. С другой стороны, при ограничении на прямую неравенства $a_j x \leqslant b_j$ приобретают вид $a'_j t \leqslant b'_j$. При $t = 0$ (на векторе p), они строгие. Значит, при достаточно малых ε вектор $p + \varepsilon(x-p)$ лежит в полиэдре. Получаем, что линейная функция, отличная от постоянной, достигает максимума во внутренней точке отрезка — противоречие.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Грань полиэдра — полиэдр, который задаётся системой неравенств исходного полиэдра, в которой часть неравенств заменена на равенства.*

Если в системе неравенств, задающей полиэдр, заменить часть неравенств на равенства и полученная система совместна, то она задаёт грань полиэдра. Это множество решений задачи ЛП

$$\begin{cases} \left(\sum_{j \in J} a_j\right) x \to \max \\ Ax \leqslant b \end{cases}. \tag{6}$$

2.4. Докажите, что у полиэдра конечное число граней.

2.3. Политопы

Вершиной полиэдра называется грань, состоящая из одного вектора.

2.5. Приведите примеры полиэдров, у которых ровно n вершин.

2.6. Пусть вершина p полиэдра P является выпуклой комбинацией некоторых векторов $p_1, \dots, p_k \in P$. Докажите, что $p_1 = \dots = p_k = p$.

Выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} X$ множества векторов X называется множество всех выпуклых комбинаций векторов из X.

Политопом (или многогранником) называется выпуклая оболочка конечного множества векторов.

Теорема 3. *Ограниченный полиэдр есть выпуклая оболочка своих вершин. В частности, ограниченный полиэдр есть политоп.*

Доказательство. Ограниченный полиэдр P обладает тем свойством, что любая задача $cx \to \max, x \in P$ имеет конечный максимум.

Пусть полиэдр задаётся системой неравенств и равенств, которые мы запишем как $A'x \leqslant b'$, $A''x = b''$. Доказательство теоремы проведём индукцией по числу неравенств в A'.

База индукции. Неравенств 0. Если система уравнений $Ax = b$ имеет хотя бы два различных решения $x_1 \neq x_2$, то множество её решений неограничено, поскольку для любого t вектор $tx_1 + (1-t)x_2$ также является решением. Значит, если множество решений ограничено, то оно состоит из одного вектора.

Индуктивный переход. Рассмотрим ограниченный полиэдр $P = \{x : A'x \leqslant b',\ A''x = b''\}$. Можно полагать, что каждое неравенство не насыщено на всем P. Тогда, как это было сделано выше, можно найти такую точку p, что $a'_j p < b'_j$. Возьмём произвольный вектор Δ и множество $[t_0, t_1] = \{t : p + t\Delta \in P\}$. Это отрезок из-за ограниченности P. Вектора $p_0 = p + t_0\Delta$ и $p_1 = p + t_1\Delta$ принадлежат некоторым граням P, так как какие-то неравенства обращаются на них в равенства. По предположению индукции каждая грань P является выпуклой оболочкой своих вершин, поэтому p_0, p_1 являются выпуклыми комбинациями вершин

$$p_0 = \sum_j \lambda_j v_j, \qquad p_1 = \sum_j \mu_j v_j.$$

Тогда

$$p = \frac{t_1}{t_1 - t_0} p_0 - \frac{t_0}{t_1 - t_0} p_1 = \sum_j \left(\frac{t_1}{t_1 - t_0} \lambda_j - \frac{t_0}{t_1 - t_0} \mu_j \right) v_j = \sum_j \nu_j v_j. \tag{7}$$

Поскольку $t_0 < 0$, $t_1 > 0$, то $\nu_j \geqslant 0$, а

$$\sum_j \nu_j = \frac{t_1}{t_1 - t_0} \sum_j \lambda_j - \frac{t_0}{t_1 - t_0} \sum_j \mu_j = \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_0} = 1. \tag{8}$$

Получили представление p в виде выпуклой комбинации вершин P. $\square$

Лемма 3. *Если A, b состоят только из рациональных чисел, то и любая вершина полиэдра $\{x : Ax \leqslant b\}$ состоит только из рациональных чисел.*

Действительно, из теоремы 2 вытекает, что вершина является решением системы линейных уравнений $A'x = b'$, причём других решений у этой системы нет.

Утверждение леммы теперь получается, если вспомнить любой из способов решения систем линейных уравнений. При вычислениях выполняются только арифметические операции, а значит, в ответе получатся также только рациональные числа.

2.4. Целочисленность многогранника упаковок совершенного графа

Теперь можно вернутся к многограннику упаковок и понять, почему максимальное значение $\mathbf{1}x = \alpha(G)$ (вектор $\mathbf{1}$ состоит из одних единиц).

Многогранник называется *целочисленным*, если все его вершины — вектора из целых чисел.

Теорема 4. *Для совершенных графов, и только для них, многогранник упаковок является целочисленным.*

Доказательство. Любая целочисленная вершина многогранника упаковок является независимым множеством. Действительно, компоненты целочисленного вектора, который является вершиной могут принимать только значения 0 и 1, причём множество вершин, в которых стоят 1, должно быть независимым (иначе нарушится одно из неравенств для клик). Легко предъявить линейную функцию, которая достигает на $\mathcal{P}(G)$ максимума в точности на векторе $\mathbf{1}_S$, где S — независимое множество. Это сумма по S минус сумма по дополнению к S.

Пусть граф G — совершенный, а $v = k^{-1}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{P}(G)$ — вершина, а $k, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ (координаты любой вершины многогранника упаковок рациональны по лемме 3). Переходя если нужно к (порожденному) подграфу, можно считать, что для всех координат выполнено $p_i > 0$.

Перейдём к новому графу $\tilde{G}$, получаемому из G вставкой вместо вершины i полного графа на p_i вершинах (о множестве вершин вставленного графа будем говорить как о раздутии вершины).

По лемме Ловаса граф $\tilde{G}$ — совершенный. Оценим размер клики $\tilde{K}$ в этом графе. Любая группа вставленных вершин либо целиком входит, либо целиком не входит в $\tilde{K}$. Поэтому

$$|\tilde{K}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant k.$$

А поскольку граф $\tilde{G}$ совершенный, то для него существует правильная раскраска в k цветов. Каждому цветовому классу этой раскраски сопоставим характеристический вектор множества тех вершин графа G, раздутия которых пересекаются с этим цветовом классом. Каждый такой вектор v^j является независимым множеством в G, а каждая вершина i входит ровно в p_i цветовых классов. Поэтому получаем представление вершины v в виде выпуклой комбинации независимых множеств:

$$v = k^{-1}(p_1, \ldots, p_n) = k^{-1} \sum_j v^j.$$

Поэтому $k = 1$, $v = v^1$, что и требовалось доказать.

В обратную сторону будем доказывать так. Предъявим вектор, который принадлежит пересечению всех граней многогранника упаковок, задаваемых максимальными кликами. Это вектор $\omega^{-1}\mathbf{1}$, неравенство $\mathbf{1}_K^t x \leqslant 1$ обращается в равенство на таком векторе в точности для любой максимальной клики. Если многогранник упаковок целочисленный, то пересечение граней, задаваемых максимальными кликами, есть выпуклая оболочка независимых множеств. Каждое из таких множеств является независимой трансверсалью. $\square$

Приведём ещё одну характеризацию совершенных графов. и две теоремы, которые легко следуют из изложенного.

2.7. Для произвольного неотрицательного вектора весов w обозначим $\omega_G(w)$ максимальный вес клики в графе G, а $\alpha_G(w)$ — максимальный вес независимого множества в G. Граф G совершенный, если и только если для любой пары весов w_1, w_2 выполнено $\alpha_G(w_1)\omega_G(w_2) \geqslant \langle w_1, w_2 \rangle$.

Линией будем называть строку или столбец матрицы.

2.8. (Теорема Фробениуса.) *Диагональю* квадратной матрицы размера $n \times n$ называется набор из n её элементов, таких что никакие два не лежат на одной линии. Докажите, что каждая диагональ матрицы содержит нулевой элемент тогда, и только тогда, когда матрица содержит нулевую подматрицу размера $s \times t$, где $s + t > n$.

2.9. (Теорема Кёнига.) Максимальное количество ненулевых элементов матрицы, никакие два из которых не лежат на одной линии, равно минимальному количеству линий, покрывающих все ненулевые элементы.

3. Теорема двойственности в линейном программировании

3.1. Двойственные задачи

Рассмотрим две задачи ЛП вида

$$(\mathrm{L}) \begin{cases} cx \to \max \\ Ax \leqslant b \end{cases} \qquad (\mathrm{L}') \begin{cases} \xi b \to \min \\ \xi \geqslant 0 \\ \xi A = c \end{cases}$$

Здесь x обозначает вектор-столбец $n \times 1$, c — вектор-строку $1 \times n$, b — вектор-столбец $m \times 1$, ξ — вектор-строку размера $1 \times m$, A — матрицу размера $m \times n$.

Задача (L') называется *двойственной* к задаче (L). Такое определение двойственной задачи простое, но неудачное. Правильнее было бы иметь определение, устойчивое относительно равносильных преобразований. Более того, слово «двойственность» намекает, что двойственной к (L') должна быть задача (L). Точное определение нам не понадобится (каким бы оно могло быть — вопрос интересный), ограничимся только приведенным выше рецептом. Любую задачу ЛП можно привести к виду (L) (умножая неравенства на -1 и заменяя равенство $a = b$ на пару равносильных неравенств $a \leqslant b, -a \leqslant -b$). Вот два важных случая таких преобразований.

Запишем задачу (L′) в равносильной форме, аналогичной задаче (L) ($y = -\xi^t$):

$$\begin{cases} \xi b \to \min \\ \xi \geqslant 0 \\ \xi A = c \end{cases} \iff \begin{cases} b^t y \to \max \\ y \leqslant 0 \\ A^t y \leqslant c^t \\ -A^t y \leqslant -c^t \end{cases}$$

Теперь запишем двойственную задачу, обозначая переменные, соответствующие первым строкам через u, вторым — через v, третьим — через w

$$\begin{cases} b^t y \to \max \\ y \leqslant 0 \\ A^t y \leqslant -c^t \\ -A^t y \leqslant c^t \end{cases} \iff \begin{cases} (-v + w)c^t \to \min \\ u + vA^t - wA^t = b^t \\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0 \end{cases}$$

Поскольку условие $u+x = b, u \geqslant 0$ равносильно $x \leqslant b$, после замены $x = (v-w)^t$ и транспонирования получаем задачу (L). Поэтому задача, двойственная к (L′) равновильна задаче (L).

В каком виде можно записать задачу, двойственную к

$$\begin{cases} cx \to \max \\ x \geqslant 0 \qquad ? \\ Ax \leqslant b \end{cases} \tag{9}$$

Обозначим переменные, соответствующие первой строке η, второй — ξ. Первую строку перепишем в виде $-x \leqslant 0$. Действуя по рецепту, получаем задачу

$$\begin{cases} \xi b \to \min \\ \eta \geqslant 0,\ \xi \geqslant 0 \\ -\eta + \xi A = c \end{cases} \iff \begin{cases} \xi b \to \min \\ \xi \geqslant 0 \\ \xi A \geqslant c \end{cases}$$

Теперь видно, что задача в форме (9) допускает очень симметричную запись двойственной задачи.

3.2. Теорема двойственности

Обозначим максимальное значение cx для задачи (L) через ℓ, минимальное значение ξb для задачи (L′) через ℓ'.

3.1. Проверьте, что $\ell \leqslant \ell'$.

Теорема 5 (двойственность). $\ell = \ell'$.

Доказательство теоремы 5 сравнительно просто выводится из следующего утверждения.

Лемма 4 (Лемма Фаркаша). *Пусть $a_1, \dots, a_s; c$ — вектор-строки длины n. Если для любого вектор-столбца y, удовлетворяющего условиям $a_i y \geqslant 0$, выполнено $cy \geqslant 0$, то тогда*

$$c = \sum_{i=1}^{s} \xi_i a_i, \quad \xi_i \geqslant 0. \tag{10}$$

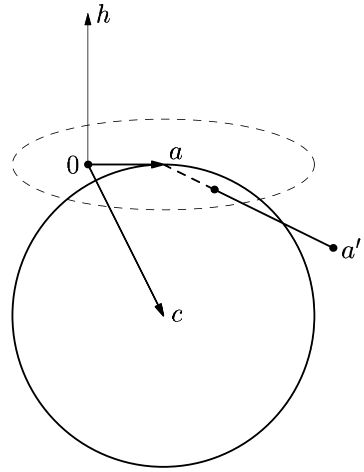

Рис. 2.

Выведем теорему двойственности из леммы Фаркаша. Пусть $cx = \ell$, а I — множество индексов неравенств, которые вектор x обращает в равенство. Как и раньше, обозначаем через a_i строку матрицы A с номером i. Тогда вектор-строки $-a_i$ $(i \in I)$ и $-c$ удовлетворяют условию леммы Фаркаша. Действительно, пусть $a_i y \leqslant 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ вектор $x + \varepsilon y$ допустим в задаче (L). Так как

$$c(x + \varepsilon y) = \ell + \varepsilon c y, \tag{11}$$

то $cy \leqslant 0$.

По лемме Фаркаша $c = \sum_{i \in I} \xi'_i a_i$, $\xi'_i \geqslant 0$. Пусть ξ — такая вектор-строка, что $\xi_i = \xi'_i$, $i \in I$, $\xi_i = 0$, $i \notin I$. Тогда

$$\ell' \leqslant \xi b = \sum_{i \in I} \xi'_i b_i = \sum_{i \in I} \xi'_i a_i x = cx = \ell \leqslant \ell'. \tag{12}$$

3.2. (Условие дополняющей нежёсткости.) Для оптимальных решений x^*, ξ^* прямой и двойственной задач выполнено $\xi^*(b - Ax^*) = 0$. В частности, значения двойственных переменных, соответствующих ненасыщенным строкам $(b_j - Ax^*_j > 0)$ равны 0, а строки, соответствующие ненулевым значениям двойственных переменных, насыщены.

Доказательство леммы Фаркаша.

Оно имеет простой геометрический смысл.

Обозначим C *конус*, натянутый на вектора a_i, т. е. множество тех x, которые представляются в виде $\sum_i \xi_i a_i, \xi_i \geqslant 0$.

Предположим, что $c \notin C$. Тогда функция

$$\rho(c, x) = |c - x|^2 = \sum_i (c_i - x_i)^2 \tag{13}$$

положительна на C.

Эта функция достигает на C наименьшего значения. Доказательство — стандартное упражнение по анализу.

Пусть наименьшее значение ρ достигается на a_0. Обозначим $h = a_0 - c$. Докажем, что $a_0 h^t = 0$, $a_i h^t \geqslant 0$, $i > 0$, $ch^t < 0$. Геометрически это можно увидеть так. Рассмотрим вектора, являющиеся линейными комбинациями a_i, a_0, c. Они образуют трёхмерное пространство, в котором функция ρ задаёт обычное евклидово расстояние. Дальнейшее очевидно из рисунка 2.

Теперь приведём аналитическое доказательство. Для $t \geqslant 0$ вектор $ta \in C$. Обозначим $f(t) = \rho(ta_0, c)$. Имеем

$$f(t) = \sum_i (t(a_0)_i - c)^2 = t^2 \sum_i (a_0)_i^2 - 2t \sum_i (a_0)_i c_i + \sum_i c_i^2 = \alpha(t-1)^2 + \beta, \qquad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{14}$$

Последнее равенство следует из того, что квадратный трёхчлен $f(t)$ достигает минимального значения при $t = 1$. Получаем

$$2\sum_i (a_0)_i^2 - 2\sum_i (a_0)_i c_i = 2a_0 h^t = 0,$$
$$\sum_i c_i^2 - (a_0)_i^2 = \sum_i (c_i - (a_0)_i)(c_i + (a_0)_i) = -ch^t - a_0 h^t = -ch^t > 0. \tag{15}$$

Теперь докажем, что $a_j h^t \geqslant 0$. Прежде всего заметим, что $a_t = (1-t)a_0 + ta_j \in C$ (другими словами, конус — выпуклый). Пусть $g(t) = \rho(a_t, c) - \rho(a_0, c)$. Предположим, что $a_j h^t < 0$. Знак квадратного трёхчлена

$$g(t) = \sum_i (t((a_j)_i - (a_0)_i) + (a_0)_i - c_i)^2 - \sum_i (a_0)_i - c_i)^2 =$$
$$= t^2 (a_j - a_0)(a_j - a_0)^t + 2t(a_j - a_0)(a_0 - c)^t \tag{16}$$

при малых $t > 0$ совпадает со знаком $(a_j - a_0)(a_0 - c)^t = a_j h^t < 0$. Получаем, что при малых $t > 0$ $\rho(a_t, c) < \rho(a_0, c)$ в противоречие с минимальностью $\rho(a_0, c)$.

3.3. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

Здесь мы будем рассматривать *ориентированные взвешенные* графы, т. е. такие графы, в которых для каждого ребра e указано направление (какой из концов ребра является начальной вершиной, а какой — конечной) и некоторое неотрицательное число $w(e)$ (которое называется по-разному в разных случаях: весом, длиной ребра или пропускной способностью; здесь уместно использовать последнее).

Пусть (G, w) — ориентированный взвешенный граф с двумя выделенными вершинами s, t (источником и стоком). *Потоком* из s в t называется такая функция $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$, что для любого ребра e выполнено $0 \leqslant f(e) \leqslant w(e)$, а для любой вершины v, отличной от s, t

$$\Delta(v) = \sum_{(uv) \in E(G)} f(uv) - \sum_{(vu) \in E(G)} f(vu) = 0. \tag{17}$$

Другими словами, сколько в промежуточную вершину «втекает», столько и «вытекает». Число $\Delta(v)$ будем называть дивергенцией потока. *Величиной* потока f назовём дивергенцию в стоке:

$$\vartheta = \sum_{(ut) \in E(G)} f(ut) - \sum_{(tu) \in E(G)} f(tu).$$

Другими словами, величина потока показывает, сколько «вытекает» из стока.

3.3. Докажите, что $\Delta(s) = -\vartheta$.

Разрезом (S, T) называется разбиение множества вершин V на такие непересекающиеся подмножества $V = S \dot\cup T$, что $s \in S$, $t \in T$. *Пропускной способностью разреза* называется сумма пропускных способностей всех его рёбер, направленных из S в T.

3.4. Докажите, что для любого разреза (S, T), $s \in S$, $t \in T$,

$$\vartheta = \sum_{\substack{(u,v) \in E(G) \\ u \in S, v \in T}} f(uv) - \sum_{\substack{(v,u) \in E(G) \\ u \in S, v \in T}} f(vu). \tag{18}$$

Теорема 6. *Максимальная величина потока в ориентированном графе равна минимальной пропускной способности разреза.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из соотношения (18) сразу следует, что пропускная способность любого разреза не меньше, чем величина потока. Поэтому достаточно доказать, что есть разрез, пропускная способность которого равна величине максимального потока.

Задача о максимальном потоке является задачей ЛП. Перепишем её в виде задачи (L′) (ограничения в виде системы равенств на неотрицательные переменные). Для этого введем дополнительное ребро (ts) из стока в источник и продолжим на него функцию f так, чтобы все дивергенции в расширенном графе G' были нулевыми, т. е. $f(ts) = \vartheta$. Пропускную способность этого дополнительного ребра ограничивать не будем. Введем также дополнительные неотрицательные переменные $s(e)$ так, чтобы $f(e) + s(e) = w(e)$. Получаем задачу в виде

$$\begin{cases} -f(ts) \to \min \\ f \geqslant 0, s \geqslant 0 \\ fA = 0, \\ f(uv) + s(uv) = w(uv), \qquad (uv) \text{ ребро в графе.} \end{cases} \tag{19}$$

Здесь матрица A обозначает матрицу инциденций рёбер и вершин расширенного графа G': $A_{ev} = 1$, если v — конец e, $A_{ev} = -1$, если v — начало e, и $A_{ev} = 0$, в остальных случаях.

Запишем двойственную задачу в форме задачи (L). Равенствам из первой группы ($fA = 0$) будут соответствовать переменные z_v, равенствам из второй группы — переменные y_{uv}.

Получаем двойственную задачу в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{(uv)\text{ ребро в } G} w(uv) y_{uv} \to \min \\ z_s - z_t \leqslant -1, \\ y_{uv} + z_v - z_u \leqslant 0, \quad (uv) \text{ — ребро графа } G, \\ y_{uv} \leqslant 0, \quad (uv) \text{ — ребро графа } G. \end{cases} \tag{20}$$

Одновременное прибавление числа ко всем переменным z_v не меняет значение функции, которая максимизируется, так что полагаем $z_t = 1$.

Обозначим (f^*, s^*), (y^*, z^*) оптимальные решения прямой и двойственной задач соответственно, $T = \{v : z_v \geqslant 1\}$, $S = V(G) \setminus T$. Для ребра (uv) разреза (S, T), $v \in T$, $u \in S$, выполнено $y^*_{uv} < 0$, поэтому из условия дополняющей нежёсткости получаем, что $s^*(uv) = 0$, $f^*(uv) = w(uv)$. Для ребра (vu), $v \in T$, $u \in S$, имеем $z_u - z_v > 0$, поэтому неравенство $y_{uv} + z_v - z_u \leqslant 0$ ненасыщено, значит $f^*(vu) = 0$. Применяя соотношение из задачи 3.4, получаем, что величина максимального потока равна пропускной способности разреза (S, T). □

Если пропускные способности рёбер целые, многогранник (19) целочисленный. Это можно усмотреть из вида матрицы A. В каждом столбце этой матрицы есть ровно два ненулевых числа: 1 и −1. При решении системы уравнений, отвечаюшей некоторой вершине многогранника (19), вначале подставим значения для насыщенных ребер ($f(uv) = w(uv)$). После этого получим систему уравнений, в которую каждая переменная входит дважды: один раз с коэффициентом 1, другой — с коэффициентом −1. Такую переменную можно исключить из всех уравнений, кроме одного. При этом для остальных переменных условие сохранится или переменная станет свободной (сократится). В последнем случае решение заведомо неединственное и не может отвечать вершине. Ни в какой момент решения системы делить не придётся, так что решение будет целочисленным.

Из целочисленности многогранника задачи о максимальном потоке следует такая известная теорема из теории графов.

3.5. Теорема Менгера. Пусть S, T — непересекающиеся множества вершин в графе G. Максимальное количество вершинно непересекающихся путей из S в T равно минимальному количеству вершин, накрывающих все пути из S в T.

3.4. Бистохастические матрицы и паросочетания в двудольных графах

Квадратная матрица X размера $n \times n$ называется *бистохастической*, если

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \text{ для любого } j, \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \text{ для любого } i, \qquad X_{ij} \geqslant 0. \tag{21}$$

Из (21) видно, что бистохастические матрицы образуют ограниченный полиэдр. Его вершинами являются *перестановочные матрицы*, т. е. такие матрицы, все элементы которых равны 0 или 1, причём в каждой строке и каждом столбце есть ровно одна единица. Бистохастичность перестановочных матриц очевидна.

3.6. Докажите, что любая перестановочная матрица является вершиной многогранника бистохастических матриц.

Теорема 7. *Любая бистохастическая матрица есть выпуклая комбинация перестановочных.*

Доказательство. Пусть X — бистохастическая матрица. Построим вспомогательный граф G_X, вершинами которого будут строки и столбцы X, а ребро соединяет строку i и столбец j в том, и только в том случае, когда $0 < X_{ij} < 1$.

Из (21) следует, что степень вершины в G_X либо 0, либо не меньше 2. Пусть есть вершины ненулевой степени. Тогда в G_X есть цикл C (в дереве всегда есть вершина степени 1), причём длина этого цикла чётна (граф G_X — двудольный). Расставим на рёбрах C знаки $+$ и $-$ чередующимся образом. Обозначим через M матрицу, у которой $M_{ij} \neq 0$ только если $(ij) \in C$ и $M_{ij} = 1$, если на (ij) стоит $+$, $M_{ij} = -1$, если на (ij) стоит $-$.

Тогда при достаточно малом по модулю ε матрица $X + \varepsilon M$ — бистохастическая. Значит, X не является вершиной многогранника бистохастических матриц.

Если в G_X рёбер нет, то все элементы X равны 0 или 1, поэтому X — перестановочная. □

3.7. Пусть G — регулярный двудольный граф (степени всех вершин одинаковы). Докажите, что в G есть *совершенное паросочетание*, т. е. такой набор рёбер, которые покрывают все вершины ровно по разу.

3.8. Найдите максимальное значение суммы

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i),$$

если при любых i, j $u_i + v_j \leqslant 2^{i+j}$.

4. Решения некоторых задач

1.9. Хордовые графы замкнуты относительно перехода к подграфу. Так что достаточно доказать, что для хордового графа $\chi = \omega$.

Доказательство индукцией по числу вершин. База индукции легко проверяется. Для индуктивного перехода потребуется доказать отдельную лемму.

Лемма 5. *В любом хордовом графе есть вершина, все соседи которой связаны рёбрами.*

Доказательство. Доказательство от противного. Рассмотрим наименьший хордовый граф G, для которого лемма неверна. В любом его подграфе лемма выполняется. Поэтому для каждой вершины v найдётся смежная ей вершина $c(v)$ такая, что множество Γ её соседей за исключением v образует полный подграф, причем в Γ есть и такая вершина $d(v)$, которая с v несмежна.

Отображение $c\colon V \to V$ действует на конечном множестве, поэтому есть такая последовательность вершин $v_0, \dots, v_s$, что $v_1 = c(v_0), v_2 = c(v_1), \dots, v_0 = c(v_s)$. Докажем, что v_i несмежна с v_{i+2}. Поскольку

v_{i+2} и $d(v_i)$ — соседи v_{i+1}, они смежны. Но v_i несмежна с $d(v_i)$, а все соседи v_{i+2} за исключением v_{i+1} должны быть смежны. Так что v_i не входит в число соседей v_{i+2}.

Существование описанного выше цикла противоречит условию хордового графа: будем проводить в этом цикле хорды, пока возможно. Закончим на цикле длины не меньше 4. $\square$

Теперь завершим доказательство. Пусть совершенство установлено для хордовых графов с n вершинами. Рассмотрим граф G с $n+1$ вершиной. Выделим ту из вершин, которая удовлетворяет лемме, обозначим её u. Множество её соседей обозначим Γ_u, через G' обозначим подграф G, порождённый всеми вершинами, кроме u.

По предположению индукции, $\chi(G') = \omega(G')$. Если $\omega(G) = \omega(G')+1$, то правильная $\omega(G')$-раскраска G' продолжается до $\omega(G)$-раскраски G (вершину u покрасим в новый цвет).

Если $\omega(G) = \omega(G')$, то степень вершины u меньше $\omega(G) = \chi(G')$. Поэтому правильная $\omega(G)$-раскраска G получается из правильной $\omega(G)$-раскраски G' выбором для u цвета, отличающегося от цветов всех её соседей.

1.10. Докажем, что многогранник упаковок для рёберного графа двудольного графа целочисленный. Из теоремы 4 будет вытекать совершенство этого графа.

Пусть G — двудольный граф, $L(G)$ — его рёберный граф. Клики в $L(G)$ образованы рёбрами G, инцидентными одной вершине. Поэтому многогранник упаковок $\mathcal{P}$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{e\ni v} y_e \leqslant 1, & \text{суммирование по всем рёбрам, инцидентным вершине } v,\\ y_e \geqslant 0. \end{cases}$$

Прямо из определения следует, что независимым множествам в $L(G)$ соответствуют паросочетания в графе G. Докажем, что других вершин нет. Рассмотрим некоторую вершину y многогранника $\mathcal{P}$. Отметим на исходном графе те рёбра e, для которых $y_e > 0$. Они образуют некоторый граф Y.

Утверждается, что в этом графе степени вершин не превосходят 1. (Этот случай как раз и соотвествует паросочетанию, т. е. целочисленной вершине.)

Для начала проверим, что в Y нет циклических обходов. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ — рёбра, указанные в порядке прохождения некоторого циклического обхода, а $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2k}$ — вектора, у которых ровно одна компонента равна 1 (на месте ребра e_i), а остальные равны 0. Если для всех этих рёбер $y_{e_j} > 0$, то

$$y \pm \varepsilon(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \dots - \vec{e}_{2k}) \in \mathcal{P}$$

(знаки чередуются).

Итак, граф Y есть лес, т. е. граф без циклов. В каждой его связной части (дереве) есть вершина степени 1, Если эта вершина смежна с вершиной степени больше 1, то для ребра e, инцидентного этой вершине $y_e < 1$. Дальше рассуждаем аналогично предыдущему. Теперь $e_1, e_2, \dots, e_s$ — рёбра пути, ведущего из одной вершины степени 1 в другую. Если выше у нас просто не менялась сумма рёбер G, инцидентных любой вершине. то теперь оба конца степени 1 ненасыщенные, и их значения можно немного изменить, не выходя за пределы многогранника $\mathcal{P}$.

2.1. Простые преобразования сумм:

$$((AB)C)_{ij} = \sum_s (AB)_{is} C_{sj} = \sum_{s,t} A_{it} B_{ts} C_{sj} = \sum_t A_{it} (BC)_{tj} = (A(BC))_{ij}.$$

2.2. Так же, как и в предыдущем случае, делаем прямую проверку

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_s A_{js} B_{si} = \sum_s (B^t)_{is} (A^t)_{sj} = (B^t A^t)_{ij}.$$

2.3. Достаточно проверить, что выпуклым является полупространство. Геометрически это очевидно, а алгебраически сразу следует из того, что значение линейной функции от выпуклой комбинации векторов равно выпуклой комбинации значений этой функции:

$$c \sum_i \lambda_i u_i = \sum_i \lambda_i c u_i.$$

2.6. Пусть p — решение задачи $cx \to \max, x \in P$. Тогда для любого $x \in P \setminus \{p\}$ выполнено $cx < cp$. Если хотя бы один $p_j \neq p$, то

$$cp = c\sum_i \lambda_i p_i = \sum_i \lambda_i c p_i < \left(\sum_i \lambda_i\right) cp = cp.$$

2.7. Вектор $\omega_G(w_2)^{-1}w_2$ принадлежит многограннику упаковок, а $\alpha_G(w_1)$ — максимальное значение функционала $\langle w_1, x\rangle$ на этом многограннике.

В обратную сторону используем целочисленность многогранника упаковок как критерий совершенства. Если граф несовершенный, то его многогранник упаковок нецелочисленный и, значит, существует такой (без ограничения общности — неотрицательный) функционал w_1, что его максимальное значение больше чем значения на всех независимых множествах, т. е. больше $\alpha_G(w_1)$. Пусть максимум достигается на w_2, тогда $\omega_G(w_2) = 1$. Получаем

$$\alpha_G(w_1) = \alpha_G(w_1)\omega_G(w_2) < \langle w_1, w_2\rangle.$$

2.8. Рассмотрим двудольный граф, вершины которого — строки и столбцы матрицы A, а ребро (ij) входит в граф, если и только если $a_{ij} \neq 0$. Этот граф совершенный, поэтому есть покрытие его вершин мощности α, где α — максимальный размер независимого множества (α-раскраска дополнения). Если $\alpha = n$, то покрытие вершин n рёбрами даёт ненулевую диагональ в матрице. Если $\alpha > n$, то строки и столбцы матрицы, соответствующие независмому множеству размера α, выделяют нулевую подматрицу, сумма числа строк и столбцов которой больше n.

2.9. Построим по матрице двудольный граф G, вершинами которого будут строки и столбцы матрицы, причём строка смежна столбцу, если в их пересечении стоит ненулевой элемент. Тогда максимальное количество ненулевых элементов матрицы, никакие два из которых не лежат на одной линии, равно размеру максимального независимого множества $\alpha(L(G))$ в рёберном графе $L(G)$, а минимальное количество линий, покрывающих все ненулевые элементы, равно минимальному количеству клик в $L(G)$, покрывающих все вершины, т. е. хроматическому числу дополнения $\chi(\bar{L}(G))$. Но дополнение к $L(G)$ (совершенному, см. задачу 1.10) является совершенным графом. Значит

$$\chi(\bar{L}(G)) = \omega(\bar{L}(G)) = \alpha(L(G)),$$

что и требовалось доказать.

3.1. Прямое вычисление (учитываем, что $\xi \geqslant 0$):

$$\ell = cx = \xi Ax \leqslant \xi b = \ell'.$$

3.2. Лёгкое следствие из теоремы двойственности:

$$\xi^*(b - Ax^*) = \xi^* b - \xi^* Ax^* = \ell' - cx^* = \ell' - \ell = 0.$$

3.3. Частный случай следующей задачи. Рассмотрите разрез $(\{s\}, V \setminus \{s\})$.

3.4. Просуммируем дивергенции по всем вершинам множества T. По определению потока сумма равна величине потока (дивергенции в промежуточных вершинах нулевые). С другой стороны, рёбра с обоими концами в T дают нулевой вклад в сумму (поскольку учитываются дважды с разными знаками), рёбра, у которых конец в T, дают вклад с коэффициентом 1, а рёбра, у которых только начало в T, дают вклад с коэффициентом -1.

3.5. Сводится к теореме о максимальном потоке построением специального графа, в котором каждой вершине v исходного графа G соответствуют две вершины v', v'', связанные ориентированными ребром (v', v'') единичной пропускной способности. Ребру uv исходного графа во вспомогательном графе соответствует ориентированное ребро $(u''v')$ произвольно большой пропускной способности. В множество S ведут ребра большой пропускной способности из источника, а из множества T — ведут рёбра в сток (тоже большой пропускной способности). Теперь применим теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе для вспомогательного графа и учтём целочисленность многогранника задачи о максимальном разрезе.

3.8. Запишем двойственную задачу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} 2^{i+j} x_{ij} \to \min \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{при любом } j \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{при любом } i \\ \qquad\quad x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

Это задача ЛП на многограннике бистохастических матриц, так что минимум достигается на одной из перестановочных матриц.

Заметим, что коэффициенты $c_{ij} = 2^{i+j}$ удовлетворяют условию $c_{ij} = p_i p_j$, где $p_i = 2^i$. Поскольку из $a < b$, $c < d$ следует $ad + bc < ac + bd$, то минимум достигается на перестановочной матрице P, у которой $P_{i,(n-i)} = 1$.

Поэтому оптимальное значение двойственной задачи равно $n2^{n+1}$. Оно же равно максимуму в исходной задаче.

Литература

[1] *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука. 1981.

[2] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука. 1990.

[3] *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.