

И.М. ГЕЛЬФАНД И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А.И. Аптекарев, А.Л. Афендииков, К.В. Брушлинский

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Математическая общественность отмечает в этом году 110-летие Израиля Моисеевича Гельфанда. Также, ровно 70 лет назад был основан институт, в настоящее время носящий имя М.В. Келдыша – Институт прикладной математики РАН. Абстрактные математические исследования и разработка математических методов для решение конкретных прикладных задач были отличительной чертой И.М. Гельфанда. Для творческой реализации его выдающихся способностей судьба привела его в МГУ им. М.В. Ломоносова, МИАН им. В.А. Стеклова, ОПМ МИАН, переименованное затем в ИПМ АН СССР. В этих храмах науки он не только находил постановки достойных его задач, но и формировал понятие о том, что есть современная математика и ее приложения. Вклад И.М. Гельфанда в науку уже составил и еще составит в будущем содержание многих посвященных ему текстов. В настоящем же очерке мы, следуя статье [1], хотим обратить внимание на широту научных интересов И.М. Гельфанда и способность совмещать их в фундаментальных вопросах прикладной математики. Пусть его пример лишней раз послужит напоминанием о том, что наука едина, и разделять ее на фундаментальную и прикладную не всегда уместно. *Ведь понятно, что своей огромной роли в жизни общества математика в первую очередь обязана огромным количеством приложений в различных областях науки и техники.*

В архиве ИПМ им. М.В. Келдыша РАН хранится "Личное дело" И.М. Гельфанда. В автобиографии Израиль Моисеевич о начале своего жизненного пути писал: "Родился в 1913 году в местечке Красные Окны Одесской области. Отец – служащий бухгалтер, сейчас умер. В 1923 году семья переехала в с. Ольгополь, где я окончил среднюю школу. В 1930 году я переехал в Москву. К этому времени я много занимался математикой и начал работать преподавателем математики в инженерном училище. В 1931 году в порядке исключения (не имел высшего образования) был принят на работу ассистентом кафедры математики Вечернего химико-технологического института. С 1932 года принимал участие в работах семинаров МГУ и в сентябре 1932 года был принят в аспирантуру МГУ, которую закончил в 1935 году. В этом же году защитил диссертацию на степень кандидата физ.-мат. наук и был оставлен доцентом МГУ. В 1939 году перешел на основную работу в Математический институт им. Стеклова АН СССР старшим научным сотрудником, продолжая работать по совместительству доцентом МГУ. В 1940 году защитил докторскую диссертацию. С этого времени работаю профессором МГУ (по совместительству), оставаясь, все время на основной работе в Академии наук СССР".

В послевоенные годы И.М. Гельфанд был привлечен к стратегически важным прикладным работам, возникшим в связи со срочной необходимостью решения атомной проблемы, т.е. с созданием ракетно-ядерного щита, обеспечившего нашей Родине долгие годы мирного и независимого существования и развития. В этой области потребовались многочисленные расчеты, которые выполнялись в ряде научно-производственных коллективов под

руководством авторитетных ученых. Один из таких коллективов – созданное в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР (МИАН) Расчетное бюро. И.М. Гельфанд, будучи к тому времени уже известным сложившимся математиком – сотрудником МИАН и профессором Московского Университета, вошел в состав Расчетного бюро, где занимал должность заведующего сектором (с 1950 г.), а фактически был и научным руководителем всего подразделения.

В многотомном издании “Атомный проект СССР. Документы и материалы”, выходявшего с 1998 по 2009 гг. под общей редакцией Л.Д. Рябева, опубликованы рассекреченные архивные материалы, касающиеся создания атомного оружия. Появилась возможность по письмам, протоколам заседаний Научно-технического совета ПГУ, постановлениям Совета министров СССР проследить конкретные задачи, которые решали ученые и конструкторы. А уровень награждения свидетельствует о значимости и объеме выполненной работы ученых. Интересно проследить и упоминание имени Гельфанда в этом издании. Приведем наиболее яркие факты. Первые расчетные задачи в расчетном бюро К.А. Семендяева касались процесса обжата заряда и КПД атомного заряда. После успешного испытания первой атомной бомбы К.А. Семендяев, среди прочих, за выполненные задачи был награжден орденом Ленина. Все участники этих работ в МИАН, в том числе и И.М. Гельфанд были премированы 300000 руб. на всех [2, с. 121].

Как известно, работа над созданием термоядерного шла с самого начала атомного проекта, причем сразу в двух вариантах: РДС-6С (в схеме “слойка” термоядерная “взрывчатка” из дейтерия и урана-238, помещалась чередующимися концентрическими слоями поверх атомного заряда, который играл роль запала для всей конструкции) и РДС-6Т (в конструкции “труба” энергия от взрыва первичного атомного “запала” зажигала термоядерную реакцию в цилиндре с жидким дейтерием).

В плане научно-исследовательских работ по РДС-6Т на 1949–1950 гг. качестве исполнителей расчетов фигурирует Математический институт и исполнители: Петровский, Гельфанд, Семендяев [3, кн. 1, с. 219]. А уже в планах работ на 1952 г [3, кн. 1, с. 478] указывается конкретная задача расчета первой стадии термоядерной реакции и в качестве ответственного исполнителя Гельфанд. Осуществление проекта РДС-6Т было заманчивым и работы над ним продолжались, несмотря на отсутствие результатов.

30 января 1953 г. Ю.Б. Харитон отправил Павлову перечень работ, выполняемых институтами Академии наук в интересах КБ-11. Имя Гельфанда фигурирует как в работах над РДС-6С, так и над РДС-6Т, проводимых в МИАН. Особенно значимым является пункт об освоении методов расчета энерговыделения многослойных зарядов на электронной машине [3, кн. 1, с. 602], выполнение которого поручено Семендяеву, Гельфанду и сотрудникам ИФП. Руководителем работ по проблеме РДС-6Т назван академик М.В. Келдыш. Мы знаем, что именно весной 1953 года было создано ОПМ МИАН, которое он возглавил. В [3, кн. 1, с. 667] опубликовано указание А.П. Завенягина М.В. Келдышу о расчетно-теоретических работах по РДС-6Т от 29 мая 1953 г. Ответственными исполнителями там названы сотрудники ОПМ. Среди множества пунктов выделяется поручение о разработке нестационарного метода расчета двумерных гидродинамических задач, исполнителями которого названы Келдыш, Гельфанд, Семендяев. В 1985 г. в “Избранных трудах” М.В. Келдыша [5] опубликован рассекреченный отчет ОПМ МИАН 1954 г. “Решение задачи об осесимметричном движении газа с ударной волной”. Именно в этой работе предложена первая методика расчета нестационарных двумерных задач газовой динами-

ки. (Авторы – К.И. Бабенко, И.М. Гельфанд, Н.А. Дмитриев, М.В. Келдыш, О.М. Локуцкий, Н.Н. Ченцов).

В 1954 году проект РДС-6Т был закрыт. Это было связано не только с отсутствием доказательств его реализуемости, но и с успешным завершением проекта РДС-6С, а позже переходом к новому принципу – импульсному обжатию заряда (радиационной имплозии).

Успешное испытание РДС-6С прошло 12 августа 1953 года. В постановлении Совета министров от 31 декабря 1953 года “О присуждении Сталинских премий научным и инженерно-техническим работникам . . . за создание водородной бомбы и новых конструкций атомных бомб” премия II степени была присуждена и И.М. Гельфанду за расчетно-теоретические работы по изделиям РДС-6С и РДС-5 [2, кн. 1, с. 108]. Замечание. Свою первую Сталинскую премию второй степени Гельфанд получил в 1951 г. за работы по теории представлений групп и их применениям, см. [4].

После испытания РДС-6С было принято Постановление Совета министров от 20 ноября 1953 года “О разработке нового типа мощной водородной бомбы РДС-6СД”. (Речь о РДС-37) Расчетные работы были возложены на ОПМ МИАН (т.т. Келдыша, Тихонова, Семендяева) [3, кн. 2, с. 99]. Приказ министра Среднего машиностроения Малышева от 17 февраля 1955 года возложил “проведение расчетно-теоретических работ, связанных с созданием нового типа водородной бомбы на Отделение прикладной математики МИАН СССР (т. Келдыша) по заданиям КБ-11” [8, кн. 2, с. 311]. В докладе комиссии от 1 июля 1955 года [8, кн. 2, с. 371] по рассмотрению физических принципов атомного обжатию и расчетов опытного устройства отмечена весьма большая работа, проделанная в ОПМ. По результатам этой работы большая группа сотрудников ОПМ была награждена государственными наградами, И.М. Гельфанд – орденом Ленина.

В 1953 году Расчетное бюро МИАН стало одной из составных частей нового института – Отделения прикладной математики (ОПМ) МИАН, который был создан по решению Правительства для решения математических и вычислительных задач, относящихся к атомной и космической тематике оборонного значения. С 1966 года ОПМ называется Институтом прикладной математики (ИПМ) АН СССР и после кончины М.В. Келдыша в 1978 г. носит его имя. В ОПМ И.М. Гельфанд возглавил один из ключевых отделов. Другие компоненты нового института образовались на базе лаборатории А.Н. Тихонова из Геофизического института АН СССР и небольшого отдела механики МИАН во главе с М.В. Келдышем, работавшего в области ракетодинамики и небесной механики. И.М. Гельфанд работал в ОПМ – ИПМ со дня его основания в 1953 г. до 1990 г., когда перешел в Институт системных исследований РАН. Таким образом, большая часть его богатой творческой жизни связана с прикладными работами первостепенной для народа и государства важности в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН.

В 1953 г. половина коллектива ОПМ состояла из молодых выпускников университетов и других ВУЗов. Среди них выделялись несколько тоже еще молодых кандидатов наук. Другую половину составляли лаборанты, прошедшие специальную подготовку для проведения расчетов имеющимися в ту пору средствами.

Научными руководителями работ были выдающиеся математики М.В. Келдыш, А.Н. Тихонов, И.М. Гельфанд. В постановке задач или, говоря современным языком, выработке математических моделей участвовали выдающиеся физики Ю.Б. Харитон, Я.Б. Зельдович, И.Е. Тамм, Е.И. Забабахин, Д.А. Франк-Каменецкий, А.Д. Сахаров и др., регулярно

приезжавшие в Институт с “объектов”, как тогда называли научные центры в Сарове и Снежинске.

Физико-математическое содержание основной части работ Института сводилось, если говорить формально и кратко, к численному решению нелинейных нестационарных задач газодинамики и теплопроводности. Громоздкие расчеты велись группами вычислителей с помощью настольных электромеханических арифмометров “Мерседес”. Постепенно этот утомительный труд удалось переложить на первые советские электронно-вычислительные машины “БЭСМ-1” и “Стрела”.

Надо отдавать себе отчет, что подобного рода массовые расчеты проводились в стране впервые. Ни адекватных численных методов, ни навыков проведения таких работ просто не существовало. Их пришлось создавать и вырабатывать непосредственно в процессе работы.

По существу, упомянутые работы открывали новую эру в естествознании. Создавалась новая методология научных исследований: наряду с теорией и экспериментами появились и заслужили свое право на существование численные исследования, расчеты. Сейчас эту методологию называют – математическим моделированием исследуемых процессов, в первую очередь физических. Оно требует понимания природы процессов, включает в себя постановку задач и их математическую формулировку, выбор или создание методов их приближенного (численного) решения, проведение многочисленных серий разных вариантов громоздких расчетов, – отсюда необходимость в развитии высокопроизводительной вычислительной техники, – и, наконец, анализ результатов расчетов и получение выводов из них, относящиеся к исходной задаче. Взаимоотношение этой науки с математикой сложны и неоднозначны. Дело в том, что алгоритмы численного решения прикладных задач математической физики практически никогда не бывают строго обоснованы с математической точки зрения. Тем не менее, разработка и оптимизация численных методов, вместе с их эффективной программной реализацией, начатая в 50-е годы и составляют базу современной вычислительной математики.

Одним из научных лидеров Института, сочетавших глубокие знания фундаментальной науки с умением воспользоваться ими в поисках решения абсолютно новых задач, был И.М. Гельфанд. Идеология использования строгих математических результатов, полученных при исследовании модельных задач, для создания и анализа вычислительных алгоритмов ставшая нормой в отделе И.М. Гельфанда и выделившихся из него отделов К.И. Бабенко и С.К. Годунова, требовали высокой математической культуры; умения применять глубокие знания фундаментальной науки для численного решения задач, поставленных директивными органами.

Центральное место в математическом моделировании занимает теория разностных схем, посвященная разностным методам приближенного решения задач с уравнениями математической физики. Она создавалась в процессе интенсивной работы по расчету задач, специфика которых – сжатые сроки и сильные ограничения на публикацию даже чисто методических результатов (хорошо известной схеме Годунова относительно повезло – она опубликована через 5 лет после создания и успешного применения). В институтских секретных отчетах того времени погребены многие результаты, но мы думаем, что важно то, что поставленные Правительством задачи были решены, а вклад ученых ИПМ был отмечен Сталинскими премиями, орденами и медалями.

Систематизировать, изложить основы теории и ее практической реализации с точки зрения руководимого И.М. Гельфандом коллектива впервые удалось в монографии

С.К. Годунова и В.С. Рябенского [6], вышедшей в свет в 1962 г. Два приложения к ней написаны И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским. В одном из них обращено внимание на то, что разностная схема, оптимальная по порядку аппроксимации на решении уравнения, не обязана строиться на основе аппроксимации каждой из входящих в уравнение частных производных. В другом приложении предложен и обоснован ныне хорошо известный метод прогонки для решения разностных уравнений. По-видимому, И.М. Гельфанду принадлежит сам термин “прогонка”, прочно вошедший в научную литературу на русском языке. Им же введено понятие “гибкой” разностной схемы, относящееся к требованию, чтобы аппроксимация дифференциального оператора разностным обеспечивала сходимость к нужному пределу при независимом друг от друга стремлении шагов расчетной сетки к нулю. В той же монографии изложен, предложенный И.М. Гельфандом и К.И. Бабенко способ исследования устойчивости разностных схем для краевых задач в ограниченной области пространства (на отрезке): устойчивость следует из устойчивости трех составляющих ее элементов – задачи Коши на бесконечной прямой и двух задач на полупрямых с одним граничным условием каждая. Эти соображения легли в основу теории спектров семейств разностных операторов С.К. Годунова и В.С. Рябенского.

И.М. Гельфанд раньше многих других начал заниматься расчетами двумерных задач. Основное внимание уделялось экономической эффективности выбора математических моделей и методов, что объясняется ограниченной мощностью ЭВМ того времени, и методике расчетов двумерных задач с уравнением теплопроводности с помощью неявных и явно-неявных разностных схем. Начатые здесь работы впоследствии были успешно развиты К.И. Бабенко, В.В. Русановым, и др. в расчетах задач аэродинамики.

Совокупность интенсивных работ по численному решению актуальных задач математической физики коллективов активной научной молодежи под руководством выдающихся ученых не могла не привести к быстрому развитию смежных фундаментальных областей науки. В первую очередь это относится к теории дифференциальных уравнений и механике сплошных сред. Расчеты нелинейных задач газодинамики с образованием разрывов в решении определили создание теории гиперболических систем квазилинейных дифференциальных уравнений, в которой разрывы получили “прописку” и обоснование. Основы этой теории и свой взгляд на нее сформулированы И.М. Гельфандом в курсе лекций, прочитанном на механико-математическом факультете МГУ в 1957/58 году, собравшем большое число слушателей, причем не только студентов и аспирантов. По материалам лекций им опубликована доступная обзорная статья [7] в УМН (1959 г.). Она и через полвека остается заметной вехой в теории квазилинейных уравнений, хотя отражала подчас излишнюю смелость и оптимизм, свойственный молодости и быстрым успехам в науке того времени. Сложилось впечатление, что доказательства теорем существования и единственности решений гиперболических систем почти готовы в самом общем виде. Развитию и уточнению поставленных в статье вопросов, посвящена серия работ С.К. Годунова, В.Ф. Дьяченко и Н.Д. Введенской, построивших нетривиальные контрпримеры к имевшимся гипотезам.

Среди интересных газодинамических задач, рассмотренных в то время, можно указать задачи о схождении к центру сферических ударной волны в газе и в полости, окруженной газовым объемом. Их нельзя назвать простыми даже в одномерной постановке (симметрия по угловым переменным в сферических координатах) вследствие сильной геометрической и физической особенности в центре, где к моменту схождения радиус кривизны границы стремится к нулю, а скорость неограниченно возрастает. Ограниченные

возможности численного решения задач стандартными методами требуют специального рассмотрения окрестности особенности и знания асимптотических свойств решений в ней. Такое рассмотрение стало возможным благодаря автомодельным решениям асимптотических задач в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. В автомодельных задачах решения зависят только от одной переменной $\xi = \text{tr}^{-k}$. В задачах, о которых идет речь, показатель автомодельности k не определяется изначально их постановкой (обычно из соображений размерности [8]), а находится в процессе их численного решения. Задача о сходящейся сферической ударной волне в воздухе (показатель адиабаты $\gamma = 1.4$) была впервые решена Г. Гудерлеем [9] в 1942 г. Он нашел значение k одновременно с численным интегрированием соответствующей краевой задачи, и это значение оказалось единственным. В 1952–53 гг. И.М. Гельфанд совместно с О.В. Локуциевским, А.И. Жуковым, В.Ф. Дьяченко и Л.А. Гусаровым, занимаясь обеими упомянутыми выше задачами при разных значениях γ , обнаружили, что в некоторых диапазонах значений γ показатель k определяется неоднозначно: существует целый интервал его значений, соответствующих, вообще говоря, неаналитическим (с разрывом производных) решениям. Впоследствии Я.М. Каждан, Г.Б. Алалыкин и Б.З. Оссерович нашли, что в указанном интервале существует целая серия дискретных значений “аналитических” показателей. И.М. Гельфанд выдвинул гипотезу, что роль асимптотики газодинамической задачи в целом должно играть аналитическое автомодельное решение с наименьшим из возможных показателей k . Она до некоторой степени подтверждалась анализом численного решения задач разностными методами. Изложенные результаты исследований нетрадиционного типа автомодельных задач газодинамики опубликованы спустя 10 лет в обзорной статье К.В. Брушлинского и Я.М. Каждана [10] в УМН (1963 г.).

К концу 1950-х годов первоочередные основополагающие работы прикладного назначения вышли на такой уровень, что дальнейшие серийные расчеты могли быть переданы в созданные к тому времени вычислительные подразделения заинтересованных организаций “заказчиков” и в значительной степени продолжаться в них. Приобретенный опыт и квалификация коллектива ИПМ позволили в менее напряженных условиях расширить сферу его научных интересов. В этой связи И.М. Гельфанд уделил много внимания и энергии поискам новых приложений математики в различных областях естественных и даже гуманитарных наук. Удачным примером следует назвать математическое моделирование в задачах физики плазмы, интерес к которым был инициирован проблемой управляемого термоядерного синтеза. Контакты М.В. Келдыша и И.М. Гельфанда с И.В. Курчатовым и М.А. Леонтовичем, установившиеся ранее в работах по атомной проблеме, определили на долгие годы тесное взаимодействие ИПМ с ИАЭ им. И.В. Курчатова (ныне РНЦ–Курчатовский институт) по термоядерной тематике. Опубликованная в 1958 г. статья С.И. Брагинского, И.М. Гельфанда и Р.П. Федоренко [11] о расчете сжатия плазменного шнура магнитным полем (Z-пинч) была одной из первых в мире работ по вычислительной магнитной газодинамике, а Z-пинч – одной из первых идей реализации магнитного удержания плазмы. В 1960 г. по инициативе М.А. Леонтовича и А.И. Морозова в ИПМ предпринята серия работ по расчету геометрии магнитного поля в торе, которую следует рассматривать, как “скелет”, формирующий плазменную конфигурацию в стеллараторах. Высокоточные расчеты магнитных силовых линий позволили определить сложную структуру магнитных поверхностей и ее перестройку при возмущениях с образованием волокнистой структуры. Эти работы возглавил И.М. Гельфанд и принял в них активное личное участие. С ним вместе работали М.И. Граев, Н.М. Зуева, М.С. Михайлова, А.И. Морозов

и Л.С. Соловьев. Результаты изложены в серии журнальных статей 1961–63 гг. и обзорной статье А.И. Морозова и Л.С. Соловьева [12] в 1963 г. Помимо прикладного значения они представляют интерес в фундаментальных проблемах устойчивости движения в классической и небесной механике (см. статью В.И. Арнольда [13] в УМН 1963 г.). Дальнейшее развитие исследований равновесия и устойчивости плазменных конфигураций в магнитных ловушках и магнито-газодинамических моделей течений плазмы в ловушках, в каналах плазменных ускорителей и в некоторых астрофизических исследованиях стало постоянной темой основных работ ИПМ в течение десятилетий. О развитии этого направления и современном состоянии вычислительной магнитной газодинамики можно получить, например, по монографии [14].

И.М. Гельфанду принадлежит идея приложения математических методов к задачам рентгеноструктурного анализа сложных соединений, связанным с определением молекулярных кристаллических структур. Здесь требуется исследовать сложные системы, их организацию и поведение. Математические модели систем приводят к задачам отыскания минимума функций очень большого числа переменных. Для их приближенного решения был предложен и реализован “метод оврагов”, изложенный в книге И.М. Гельфанда, Е.Б. Вул, С.Л. Гинзбург и Ю.Г. Федорова [15] в 1966 г.

Приложения математики к проблемам биологии рассмотрены И.М. Гельфандом сначала на его небольшом теоретическом семинаре, а затем в организованной им совместно с М.Л. Цетлиным, В.С. Гурфинкелем и С.В. Фоминым лаборатории в Институте биологической физики АН СССР, вошедшей впоследствии в Институт проблем передачи информации АН СССР. Здесь выполнен ряд работ по управлению движениями и по физиологии мозжечка. Моделированием поведения клеток И.М. Гельфанд занимался вместе с Ю.М. Васильевым в межфакультетской лаборатории математических методов в биологии МГУ (см. подробнее в юбилейной статье к 60-летию И.М. Гельфанда [16], 1974 г.).

Интерес И.М. Гельфанда к гуманитарным наукам и их взаимодействию с математикой проявились в некоторых совместных работах с психологами. Его ученик В.Ю. Крылов, окончивший мехмат МГУ, стал впоследствии постоянным сотрудником Института психологии РАН в ранге доктора психологических наук.

Прикладные исследования, выполненные И.М. Гельфандом лично или под его руководством, перечисленные (а также и неперечисленные) выше, составляли его служебные обязанности по основной работе в Академии Наук. В то же время они не прерывали его постоянных занятий фундаментальными вопросами «чистой» математики, где им заложены основы новых глав и направлений и получены выдающиеся результаты, изложение которых заслуживает специальных статей. Израиль Моисеевич подчеркивал единство математики как науки и призывал своих учеников и сотрудников заниматься разными вопросами математики, говоря, что, если ей не заниматься сегодня, то завтра нечего будет прилагать к чему бы то ни было. Он не прекращал также педагогической работы профессором МГУ по совместительству, читал лекции, имел учеников и последователей, руководил научным семинаром, широко известным в Москве и за ее пределами, был активным членом, а в 1960–1970 гг. – Президентом Московского математического общества.

Научные и педагогические заслуги И.М. Гельфанда были высоко оценены научной общественностью и советским государством. Он удостоен двух Сталинских (1951 и 1953 гг.) и Ленинской (1961 г.) премий, награжден тремя орденами Ленина, орденами Трудового Красного Знамени, Дружбы народов, “Знак Почета”. Избран членом-корреспондентом

(1953 г.) и действительным членом (1984 г.) Академии Наук СССР, почетным иностранным членом многих академий мира, почетным доктором ряда известных университетов.

Труды И.М. Гельфанда навсегда останутся в золотом фонде мировой науки, а его жизнь и деятельность будет служить ярким примером любви к науке и беззаветного служения ей.

Список литературы

- [1] Афендиков А.Л., Брушлинский К.В. И.М. Гельфанд и прикладная математика// УМН. 2009. т. 64. Вып.6(390), с.181-186.
- [2] Атомный проект СССР. Документы и материалы. В 3-х томах. Том II. Кн. 7. // Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит, 2007.
- [3] Атомный проект СССР. Документы и материалы. В 3-х томах. Том III. Кн. 1. и 2. // Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит, 2008.
- [4] Присуждение Сталинских премий за 1950 г.// УМН, 1951, том 6, выпуск 2, с.184
- [5] Келдыш М.В. Избранные труды. Математика.– М.: Наука, 1985.
- [6] Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. 1962. 340 с.
- [7] Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений// УМН, 1959, т.14, вып.2(86). С.87–158.
- [8] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977, 440 с.
- [9] Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. Der Zylinderachse.// Luftfahrtforschung. 1942, v.19, No.9. S. 302–312.
- [10] Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.// УМН. 1963, т.18, вып.2(110), с.3–23.
- [11] Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде.// Физ. Плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Под ред. М.А.Леонтовича. Изд. АН СССР. 1958. т.4, с.201–221.
- [12] Морозов А.И., Соловьев Л.С. Геометрия магнитного поля.// Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А.Леонтовича. Вып.2. – М.: Госатомиздат. 1963, с.3–91.
- [13] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.// УМН. 1963. т.18. вып.6(114), с.91–192.
- [14] Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 200 с.

- [15] Гельфанд И.М., Вул Е.Б., Гинзбург С.Л., Федоров Ю.Г. Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа. – М.: Наука. 1966. 77 с.
- [16] Израиль Моисеевич Гельфанд (к шестидесятилетию со дня рождения).// УМН. 1974. т. 29. Вып.1(175), с.193–246.