О. В. Локуциевский, Н. Н. Ченцов, О работах И. М. Гельфанда по прикладной и вычислительной математике, *УМН*, 1974, том 29, выпуск 1, 224–232

О РАБОТАХ И. М. ГЕЛЬФАНДА ПО ПРИКЛАДНОЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. В. Локуциевский, Н. Н. Ченцов

Еще двадцать лет назад вычислительная математика была скорее искусством, чем наукой. Теперь она стала обширной научной дисциплиной, не только использующей идеи и результаты самых абстрактных разделов математики, но и стимулирующей своей проблематикой их развитие. В этом превращении выдающуюся роль сыграли идеи и результаты И. М. Гельфанда, его учеников и сотрудников. Успешно проведенные под его руководством рекордные по трудности расчеты на деле доказали перспективность новых подходов в вычислительной практике.

Центральной проблемой, стоявшей перед вычислительной математикой конца 40-х—начала 50-х годов было решение нестационарных задач сплошной среды, в первую очередь квазилинейных уравнений газовой динамики сначала с одной пространственной переменной, а затем и с несколькими. И. М. Гельфанд одним из первых понял, что с появлением ЭВМ наиболее перспективным методом решения таких задач стал разностный метод, и именно здесь концентрировал свои усилия. Уровень, на котором находились в то время разностные методы, не давал возможности непосредственного их использования для решения сколько-нибудь сложных задач. Разностные методы требовали существенного развития, и в блестящем осуществлении такого развития большая заслуга И. М. Гельфанда бесспорна.

Хотя его работа в этой области, как уже говорилось, связана с решением тех или иных конкретных задач, созданные им концепции носят общий характер и широко применяются в современной вычислительной математике.

И. М. Гельфанд первым из советских математиков заметил, что аппроксимация дифференциального оператора L разностным не обязана основываться на аппроксимации входящих в L производных соответствующими разностными отношениями. Это привело его к оказавшемуся весьма плодотворным способу построения разностной схемы, дающей оптимальную по порядку аппроксимацию на решениях исходного дифференциального уравнения. Ряд удобных и часто неожиданных разностных схем был получен им именно таким путем. Описанное выше более широкое, нежели существовавшее ранее, понимание аппроксимации резко расширило круг рассматриваемых разностных схем. Многие из них, как уже говорилось, оказались весьма удобными. Однако некоторые по непонятным первоначально причинам не выдерживали практической проверки. Исследование причин этого привело И. М. Гельфанда к существенному уточнению понятия аппроксимации дифференциального оператора разностным: он потребовал, чтобы нужные пределы существовали при *независимом* друг от друга стремлении шагов сетки к нулю (схемы, удовлетворяющие этому условию, И. М. Гельфанд назвал гибкими).

Аппроксимация дифференциального оператора разностным еще не обеспечивает сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной при измельчении сетки. Сходимость гарантируется лишь для тех схем, которые помимо свойства аппроксимации обладают еще и устойчивостью — свойством, аналогичным корректности исходной задачи, но из этой корректности и аппроксимации не вытекающим.

Таким образом, становится актуальным вопрос об устойчивости той или иной разностной схемы. В случае здачи Коши он решается (в разумных рамках обоснованности) сравнительно просто: при замороженных коэффициентах спектральное исследование устойчивости может быть, как правило, проведено методом Фурье. Более трудна, но разрешима задача спектрального исследования разностной схемы с условием на одном конце (для полупрямой). Существенно более трудным, а для несамосопряженных задач практически неосуществимым, оказывается непосредственное спектральное исследование устойчивости разностной задачи с двумя границами (для отрезка).

И. М. Гельфанд и К. И. Бабенко предложили весьма эффективную процедуру исследования устойчивости таких задач. Эта процедура состоит в том, что сначала исследуется устойчивость задачи Коши, а затем каждой из двух краевых задач, возникающих при удалении одной из границ в бесконечность. Оказалось, что таким способом описывается спектр исходной задачи. (Ввиду наличия у исходной задачи двух независимых параметров, шага по пространству и шага по времени,— само понятие ее спектра нуждается в некоторых уточнениях, касаться которых мы здесь не имеем возможности.) В последующем описанные выше соображения И. М. Гельфанда и К. И. Бабенко получили дальнейшее развитие и вылились в теорию спектров семейств разностных операторов С. К. Годунова и В. С. Рябенького.

Разностные схемы, предназначенные для решения эволюционных задач, распадаются на два резко различающихся между собой класса: явные и неявные. Явные, т. е. описываемые треугольными матрицами, устойчивы лишь при некоторых соотношениях шагов по различным переменным. А именно, если h — шаг по пространству, и τ — шаг по времени, то для гиперболических систем должно выполняться неравенство вида $\tau/h \leqslant C$, а для уравнения теплопроводности — $\tau/h^2 \leqslant C$. Такое ограничение, неизбежно возникающее уже в силу необходимости эффективно учесть область влияния дифференциального оператора в его разностной реализации, приводит при использовании явных схем к расчетам колоссальной трудоемкости. Поэтому вопрос об эффективном использовании неявных схем при решении эволюционных задач математической физики весьма актуален.

Неудобство последних состоит в том, что вследствие нетреугольности их матриц при переходе к следующему слою по времени возникает задача о решении алгебраической системы с большим числом неизвестных. В работе И. М. Гельфанда и О. В. Локуциевского [121] показано, что итерационные методы решения таких систем не могут считаться удовлетворительными: ввиду требования устойчивости, они не могут значительно сократить объем работы сравнительно с явными схемами. Поэтому возникла потребность в разработке достаточно удобного точного метода решения таких систем. Существовавшие к тому времени алгоритмы (например, так называемая «пристрелка») представлялись на первый взгляд вполне приемлемыми. Однако при численной их реализации для сохранения точности требовалось практически недостижимое (пропорциональное порядку системы) число запасных знаков.

В работе И. М. Гельфанда и О. В. Локуциевского [121] предложен точный алгоритм, свободный от этого недостатка. Этот алгоритм, основанный на использовании специфики матриц таких систем, требует при своей реализации числа операций, пропорционального числу уравнений и лишь небольшого числа знаков. Этот алгоритм нашел широкое применение в вычислительной практике. Он известен в настоящее время под названием «прогонка».

В середине 50-х годов И. М. Гельфанд выступает одним из пионеров решения многомерных стационарных и нестационарных задач газовой динамики. В этой работе приняли участие его сотрудники К. И. Бабенко, В. Ф. Дьяченко, О. В. Локуциевский, В. В. Русанов, Р. П. Федоренко, Н. Н. Ченцов и др. Были выяснены основные факты теории многомерных схем и разработаны эффективные методы расчета пространственных течений, использующие схемы явно-неявного типов (т. е. явные по одной пространственной переменной и неявные по другой). Кроме того, была исследована матричная прогонка, предложенная М. В. Келдышем. В последующие годы работа в этом направлении была широко развернута группой под руководством К. И. Бабенко, которая оформилась в самостоятельный отдел и стала ведущим научным коллективом в этой области. Проведенная К. И. Бабенко с сотрудниками работа была удостоена в 1966 г. Государственной премии.

При расчете задач физики сплошной среды изолированные особенности решения удобно рассчитывать отдельно, привлекая какие-либо аналитические или полуаналитические методы. В начале 50-х годов Л. А. Гусаров, В. Ф. Дьяченко, А. И. Жуков и О. В. Локуциевский под руководством И. М. Гельфанда и при его участии построили решение автомодельной задачи о схлопывании сферической полости, а также задачи о сходящейся сферической ударной волне в идеальном газе. В обоих случаях решение автомодельной задачи сводится к интегрированию системы обыкновенных дифферециальных уравнений от независимого переменного $\xi = tr^{-k}$, где t — время, r — расстояние до центра. Обычно показатель автомодельности k определяется из соображений размерности. Здесь же соображения размерности были неприменимы, а надо было находить такое значение k, при котором интегральная кривая $(x(\xi), y(\xi))$, соединяющая две фиксированные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), проходит через заданную особую точку (здесь можно провести аналогию с задачей на собственные значения для линейных уравнений) [1]). И. М. Гельфанд впервые обнаружил, что в некотором интервале значений показателя адиабаты газа показатель автомодельности k решения определяется сформулированными условиями неоднозначно. Он высказал предположение, что устойчивым, а следовательно, физически реализующимся автомодельным решением является только одно определенное из них. В ходе позднейших исследований, продолженных К. В. Брушлинским, Я. М. Кажданом и др. [2]), исследование задач такого типа было сильно продвинуто. Однако гипотеза

---

[1]) В задаче о сходящейся ударной волне это было показано Гудерлеем, Ландау и Станюковичем, поставившими и решившими эту задачу еще в 40-х годах.

[2]) См. работу К. В. Брушлинского и Я. М. Каждана «Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики», УМН 18:2(110) (1963), 3—36.

И. М. Гельфанда до сих пор не проверена, хотя она подтверждалась при разностном интегрировании уравнений газодинамики.

Для квазилинейных уравнений сплошной среды, в частности, уравнений движения сжимаемого газа, пока еще не построено сколько-нибудь полной общей теории. Не удается даже дать достаточно общего определения того, что следует понимать под решением квазилинейной системы уравнений в частных производных. Известно, что гладкое вначале движение газа с течением времени может перестроиться: в нем возникнут разрывы (ударные волны), разрывы производных (слабые разрывы) и т. п. Более того, известны примеры, правда, «нефизичные», когда после определенного момента времени решения вообще не существует. Неизвестно также, когда обобщенное разрывное решение будет единственным. Поэтому, сталкиваясь в ходе расчета поля характеристик газа с непонятным поведением расчетных величин, можно приписывать это поведение какой-то непредвиденной особенности самого течения. (Кстати, именно так был найден при численных расчетах и только затем обнаружен в физических экспериментах ряд важных эффектов течений газа и плазмы.) Но можно думать, что это непонятное поведение чисел вызвано недостатками разностной схемы, иначе говоря, является «счетным эффектом». (Примеры подобного рода встречаются, увы, куда чаще). Кроме того, нельзя исключить возможности, что не имеет решения сама задача для дифференциальных уравнений, и разностная схема «не знает, что ей делать дальше». Наконец, разностная схема может «переходить» с решения на решение ввиду их неединственности. Поскольку физическая интуиция у специалистов по газовой динамике развита достаточно хорошо, последние две воможности при решении поставленных ими задач маловероятны. Заметим, что по их интуиции устойчивые консервативные схемы, обладающие разностными аналогами физических законов сохранения, ведут себя «правильно».

Каков «физичный» класс эволюционных систем квазилинейных уравнений, в котором для естественных задач можно установить существование и единственность обобщенных решений,— этот вопрос в какой-то форме к середине 50-х годов был решен для одного уравнения первого порядка. В 1957/58 учебном году И. М. Гельфанд прочитал в МГУ курс лекций по теории квазилинейных уравнений в частных производных, основные положения которого воспроизведены в [90]. Выдвинутые им идеи заметно стимулировали интерес к этой теории, и в последующие годы его слушатели (в первую очередь С. К. Годунов) установили в этом вопросе много нового. Однако до создания общей теории даже для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(v)}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \psi(u)}{\partial x}=0,$$

пока еще далеко. Отметим лишь, что законы сохранения и условия устойчивости, как выяснили ранее К. И. Бабенко и И. М. Гельфанд, запрещают появление некоторых типов разрывов у решений гиперболических систем квазилинейных уравнений [82].

Накопленный опыт расчета сложных газодинамических течений позволил И. М. Гельфанду и его сотрудникам одними из первых взяться за численное решение задач магнитогидродинамики. В конце 50-х годов под руководством Л. А. Арцимовича и М. А. Леонтовича были разработаны экспериментальные установки, в которых происходило сжатие плазменного шнура под действием мощного электрического разряда. Магнитное поле в таких пинч-установках, стягивая шнур, приводит к возникновению цилиндрической ударной волны, схлопывающейся на оси. В момент схлопывания вблизи оси при достаточно высоком сжатии и большой температуре может начаться реакция термоядерного синтеза. Математическая теория пинча, данная М. А. Леонтовичем, С. М. Осовцом и С. И. Брагинским, приводит к задаче Коши для системы квазилинейных уравнений магнитной гидродинамики с краевыми условиями, замкнутыми электротехническим уравнением. Проведенные И. М. Гельфандом и Р. П. Федоренко численные расчеты [88] были одними из первых в мировой практике расчетов нестационарного магнитогидродинамического течения. В этой совместной работе с физиками проявилось ставшее ныне привычным взаимодействие физического эксперимента на установке и математического расчета на ЭВМ. Хорошее совпадение экспериментальных и расчетных величин укрепляло уверенность в адекватности математической модели и в точности численного метода. В то же время расчеты давали существенно более подробную и полную картину течения, нежели результаты непосредственных измерений, и позволяли глубже понять сущность исследуемого явления. Последние замечания можно целиком отнести и к последующим работам И. М. Гельфанда и его сотрудников по расчету структуры тороидальных магнитных полей. Эта задача возникла в связи с конструированием стеллараторов, где такое магнитное поле должно удерживать горячую плазму. Близ оси стелларатора каждая силовая линия общего положения наматывается эргодически на торообразную магнитную поверхность, так что образуется семейство коаксиальных поверхностей, охватывающих магнитную ось системы. Такая магнитная конфигурация хорошо удерживает заряженные частицы. Первоначально ожидали, что при возмущении поля магнитные поверхности только несколько деформируются. Однако при непосредственном численном интегрировании уравнений силовых линий, проведенных Н. М. Зуевой, получилась совсем иная картина. Именно, уже при слабых возмущениях появились около оси новые семейства вложенных торов, а область замкнутых поверхностей заметно уменьшилась [111], [113], [123]. А при больших возмущениях магнитные поверхности начинают расщепляться с образованием волокнистой структуры по Биркгофу. Подобное поле перестает удерживать плазму. После того как расчеты были проведены и поняты, волокнистую структуру усмотрели и в экспериментах.

Научные интересы И. М. Гельфанда в 60-е годы связаны также с исследованием сложных систем, описываемых большим числом переменных, изучением их организации и поведения. Он первый понял важность создания вычислительных методов для таких систем, для которых привычные локальные методы анализа оказываются неэффективными.

Значительное число задач для больших систем сводится к отысканию абсолютного минимума функции очень многих переменных на соответствующей области их изменения.

Универсальные методы решения таких задач (типа перебора всех значений на ε-сети) оказываются совершенно неэффективными. Поэтому каждый метод решения экспериментальных задач может эффективно работать лишь для определенного класса функций. В начавшие интенсивно развиваться в 50-е годы методы поиска экстремума И. М. Гельфанд внес существенный вклад. Им и М. Л. Цетлиным было введено понятие «хорошо организованных» функций [244], [112]. Именно, при анализе целого ряда математических, физических и биологических проблем они заметили: в «разумно» поставленных задачах на минимум рельеф функции, как правило, имеет характер горной страны, с крутыми склонами горных цепей и узкими долинами, полого нисходящими к точкам минимумов. Поэтому градиентные методы, очень удобные при быстром спуске в котловину, отказывают при движении вдоль дна слабо изогнутой долины, где малы градиенты по многим направлениям, а относительно большой шаг приводит к утыканию в крутой склон. Предложенный в 1959 г. Гельфандом и Цетлиным «метод оврагов», грубо говоря, состоит в следующем. Пусть известны две не очень близкие точки на дне долины. Они задают ее направление. Тогда в этом направлении с большим шагом берется следующая точка, оказывающаяся, как правило, на склоне. Из нее локальным методом (с малым шагом) спускаются в долину. Спуск идет до тех пор, пока градиент не становится малым. Далее процесс повторяется. Были разработаны адаптационные алгоритмы выбора градиентного и овражного шагов, тактика движения, когда «овраг» неодномерен и т. д., см. [112], [151].

Метод оврагов был использован для решения задач фазового анализа протон-протонного рассеяния [108], [109], а затем для рентгеноструктурного анализа сложных соединений. Разработанная И. М. Гельфандом и его сотрудниками Е. Б. Вул, С. Л. Гинзбург, Л. Н. Ивановой, М. Г. Нейгауз и Ю. Г. Федоровым методика определения молекулярных кристаллических структур, описанная в монографии [151], прочно стала в один ряд с другими способами решения этой задачи. С ее помощью расшифровано много структур, в том числе и достаточно сложных. Та же методика с успехом была использована в нейтронном анализе [1]). Метод оврагов оказался полезным и во многих других вопросах — от расчета гетерогенных защит до расчета пузырьковых камер.

Метод оврагов оказался удобным и в общей проблеме узнавания, когда от расшифровки структур И. М. Гельфанд перешел к более широкому кругу задач. В первую очередь его интересовали задачи медицинской диагностики и прогнозирования исхода болезни. Они привлекли его, в частности, потому, что процесс принятия решения врачом достаточно сложен и в нем проявляются общие принципы мышления. С другой стороны, конкретная постановка позволяет ограничить эту деятельность узкими профессиональными рамками и сформулировать четкие критерии качества решения задачи.

Работа по диагностике проводилась и проводится в тесном сотрудничестве с медиками. Для каждой из задач разрабатывается вопросник, по архив-

[1]) R. A. Alikhanov, E. B. Vul, J. G. Fedorov, Structure and magnetisme of solid oxigen, Acta Cristallographika 21:7 (1966), A-92.

ным историям набирают информацию, затем обучающаяся программа строит решающее правило. В этой работе, наряду с чисто математическими вопросами, приходится сталкиваться со следующими моментами. Статистика заболевания, имеющаяся в архиве, обычно невелика. На трактовке симптомов больного в той или иной степени отражается запись врача об исходе болезни. Далее, характеристики, которые врач обычно называет или которые можно найти в литературе, зачастую не соответствуют тем понятиям, которыми опытный врач фактически оперирует у постели больного. А для формального алгоритма ценны именно последние критерии. Поэтому четкая и разумная постановка задачи и адекватный вопросник возникают только в процессе работы и сами являются целями исследования. Окончательная проверка проводится в клинике, когда при обработке результатов обследования больного еще не известен исход болезни. На этой стадии также выясняется, полезен ли врачу оперативно выданный прогноз, или же в ходе работы над задачей ее содержание было выхолощено.

К настоящему времени уже почти три года в Институте неврологии АМН (директор К. В. Шмидт) выдается машинный прогноз исхода геморрагического инсульта с целью определения показаний к хирургическому лечению [197]. Машина предсказывает, проживет ли больной 10 суток: а) при консервативном методе лечения и б) после хирургической операции по удалению гематомы. Прогноз выдается на основе информации, собранной о больном в первые шесть часов его пребывания в клинике. Предварительный анализ показывает, что в 90% случаев прогноз оправдывался.

Совместно с Г. Г. Гельштейном (Институт сердечно-сосудистой хирургии АМН) создан также метод определения степени легочной гипертонии при одном из врожденных пороков по данным ЭКГ и ФКГ без прямого зондирования сердца [210, 216]; построен алгоритм прогноза при инфаркте миокарда (совместно с И. В. Мартыновым, Главный военный госпиталь им. Бурденко) и др. Сейчас еще трудно сформулировать принципы решения задач диагностики в общей форме. Однако во всех проведенных работах результат в бо́льшей степени зависел от адекватности медицинской информации, чем от метода обработки, если последний был достаточно разумен.

Другой большой круг практических задач распознавания, к решению которых И. М. Гельфанд привлек своих сотрудников (Ш. А. Губермана, М. Л. Извекову, И. М. Ротвайн и др.), связан с вопросами геологического и сейсмического прогнозирования. Были построены алгоритмы и по ним составлены прогнозные карты для рудных месторождений, разработаны методы распознавания нефтеносных горизонтов в многопластовых залежах по промыслово-геофизическим данным и др. При этом применялись как алгоритмы, требующие предварительного обучения на примерах, так и алгоритмы, основанные на методе оврагов, которые используют априорную внутреннюю структуру системы прогнозируемых объектов. Практическая ценность этих работ оказалась весьма большой.

В совместных исследованиях Института прикладной математики АН СССР с Институтом физики Земли АН СССР (директор — М. А. Садовский) И. М. Гельфанд, Ш. А. Губерман, В. И. Кейлис-Борок и Е. Я. Ранцман нашли весьма общую закономерность в возникновении сильных землетрясений [227], [235].

Согласно сложившимся представлениям разрушительные землетрясения приурочены к зонам активных разломов земной коры и, особенно, к их пересечению. Этих общих соображений недостаточно для конкретного прогноза, тем более, что некоторые из разломов уверенно выделяются лишь по снимкам из космоса. Поэтому была разработана система признаков, и зоны разлома были упорядочены по рангам. Затем отобрали разломы высших трех рангов. Все они имеют большую протяженность и рассекают земную кору до глубин 15 *км* и более. Оказалось, что эпицентры разрушительных землетрясений с энергией $\geqslant 10^{22}$ *эрг* располагаются только близ пересечений разломов первых трех рангов. (Значительные разрушения в самом эпицентре могут вызвать и более слабые землетрясения, от 10^{18} *эрг*, но их не рассматривали.) Затем был построен обучающийся алгоритм, распознающий те пересечения разломов, где землетрясения возможны, хотя пока не известны. Был рассмотрен ряд регионов (Памир и Тянь-Шань, Анатолия и Армянское нагорье, Балканы, Невада, Калифорния), на материале каждого построен свой критерий и дан конкретный прогноз. Для решающих правил были использованы лишь самые грубые и легко доступные геологические данные. Оказалось, что критерии для разных регионов сходны [232]. Для проверки надежности критериев по данным на 1912 год предсказали места возможных сильных землетрясений на Памире и Тянь-Шане. И за истекшие 60 лет сильные землетрясения действительно произошли только в предсказанных местах. То же имело место и для других регионов. Полученные результаты представляют большой практический интерес.

И. М. Гельфанд был первым, кто отчетливо понял значение и важность предложенных М. Л. Цетлиным моделей целесообразного поведения автоматов в случайных средах для изучения многоуровневых систем с неиндивидуализированным управлением, в первую очередь биологических. В отличие от традиционной формально-логической трактовки автоматных моделей биологических систем, И. М. Гельфанд, В. С. Гурфинкель и М. Л. Цетлин впервые сформулировали в [120] «поведенческий» подход к построению таких моделей. При их подходе система рассматривается состоящей из отдельных подсистем, обладающих высокой степенью автономии и своими «частными интересами». Тогда совокупность остальных подсистем и внешнего мира образуют для каждой подсистемы внешнюю среду, в которой она должна действовать наилучшим образом, т. е. так, чтобы минимизировать неблагоприятное воздействие внешней среды. Поведенческий подход к автоматным моделям оказался плодотворным не только в физиологии движений, где он был первоначально сформулирован в [120] (о применении указанных представлений в физиологии рассказано ниже, при обзоре биологических работ И. М. Гельфанда), но и в этологии, физиологии клетки, социологии, управлении большими системами массового обслуживания [1]).

---

[1]) М. Л. Цетлин, А. В. Бутрименко, С. Л. Гинзбург, Об одном алгоритме управления сетью связи, Проблемы кибернетики, вып. 20 (1968).

Работа [120] заложила основы теории коллективного поведения стохастических автоматов. В ней, в частности, был сформулирован (на языке физиологии) вариационный принцип наименьшего взаимодействия для системы, целесообразно работающей во внешней среде. Общая формулировка принципов организации поведения совокупности автономных объектов, как игры, была дана И. М. Гельфандом, И. И. Пятецким-Шапиро и М. Л. Цетлиным в [133]. Там же были формально определены некоторые классы игр автоматов, наиболее интересных для моделирования поведения сложных систем. Эта работа на много лет определила развитие исследований моделей коллективного поведения.

Созданию вычислительных методов и решению конкретных прикладных задач посвящен еще целый ряд направлений деятельности И. М. Гельфанда. Отметим здесь расчеты задач физики переноса [97], расчеты электростатических колебаний разреженной плазмы [161], расчеты поведения коллективов автоматов [139]. И. М. Гельфанд был инициатором этих работ и принял большое участие в постановке задач и выборе методов расчета. Наконец, упомянем еще одну из его последних работ [230], где путем расчета на ЭВМ он, Д. Б. Фукс и Д. И. Калинин обнаружили новые нетривиальные классы когомологий алгебры Ли гамильтоновых формальных векторных полей в R^2.