Очерк истории теории вероятностей*

Б. В. Гнеденко

Содержание

*Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей: Учебник – Изд. 6-е, перераб и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. – 448 с.

Глава 1. Предыстория понятия вероятности и случайного события

1. Первые данные

Сейчас уже трудно установить, кто впервые поставил вопрос, пусть и в несовершенной форме, о возможности количественного измерения возможности появления случайного события. Ясно одно, что мало-мальски удовлетворительный ответ на этот вопрос потребовал длительного времени и значительных усилий ряда поколений выдающихся исследователей. В течение долгого периода исследователи ограничивались рассмотрением разного рода игр, особенно игр в кости, поскольку их изучение позволяет ограничиваться простыми и прозрачными математическими моделями. Однако следует заметить, что многие отлично понимали то, что позднее было прекрасно сформулировано Христианом Гюйгенсом: «...я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Мы увидим, что при дальнейшем прогрессе теории вероятностей глубокие соображения как естественнонаучного, так и общефилософского характера играли большую роль. Эта тенденция продолжается и в наши дни: мы постоянно наблюдаем, как вопросы практики — научной, производственной, оборонной — выдвигают перед теорией вероятностей новые проблемы и приводят к необходимости расширения арсенала идей, понятий и методов исследования.

На первом этапе изучения случайных явлений внимание ученых было сосредоточен на трех задачах: 1) подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких костей; 2) раздел ставки между игроками, когда игра прекращена где-то посередине; 3) определение числа бросаний двух или нескольких костей, при которых число случаев, благоприятствующих выпадению на всех костях одинаковых граней (например, «шестерок») хотя бы при одном бросании было большим, чем число случаев, когда это событие не появится ни разу.

Число различных исходов при бросании трех игральных костей было определен в 960 г. епископом Виболдом из города Камбрэ. Он считал, что таких исходов 56 (он не принимал во внимание то обстоятельство, что данное число очков может появиться на любой из трех костей). Бросанию трех костей Виболд придал религиозную трактовку — с появлением каждого набора трех чисел он связал одну из 56 добродетелей. Описание правильных подсчетов было дано в XI веке летописцем Балдерикусом, а появилось оно в печати лишь в 1615 г.

Попытка подсчитать число исходов при бросании трех игральных костей, включая и перестановки, имеется в поэме Ричарда де Форниваль (1200–1250) "De vetula", написанной в промежутке от 1220 до 1250 г. В части поэмы, посвященной играм и спорту, имеются следующие рассуждения:

«Одинаковое число очков на трех костях можно получить шестью способами. Если число очков на двух костях совпадает, а на третьей от него отлично, то мы имеем 30 способов, поскольку одна пара моя быть выбрана 6 способами, а третье число лишь пятью. Если очки на всех костях различны, то мы имеем 20 способов, потому что 30 раз по 4 равно 120, но каждая возможность появляется 6 способами. Таким образом, существует всего 56 возможностей.

Одинаковые числа очков на всех костях можно получить только единственным способом; одинаковые числа очков на двух костях, а третье отличное от них — тремя способами».

Хотя в тексте явно указано лишь число случаев по Виболду (56), но фактически Ричард де Форниваль полностью подготовил подсчет общего числа равновероятных случаев при бросании трех костей, а именно $6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$. Далее Форниваль привел таблицу, в которой вычислены числа способов, которыми может быть получена данная сумма очков на всех трех костях. Мы приведем эту таблицу в укороченном виде.

Сумма	Число способов	Сумма	Число способов	Сумма	Число способов
3 18	1	6 15	10	9 12	25
4 17	3	7 14	15	10 11	27
5 16	6	8 13	21		

В первых двух столбцах приведены суммы очков на трех костях, а в третьем столбце — число различных случаев, при которых реализуется эта сумма. Все подсчеты выполнены без ошибок, да и рассуждения, проведенные автором, вполне логичны и даже можно сказать современны в нашем смысле слова. Это обстоятельство заслуживает быть отмеченным, поскольку эти же самые подсчеты через двести с лишним лет были выполнены неправильно. А именно в 1477 г. Бенвенуто Д'Имола издал в Венеции «Божественную комедию» Данте, снабдив ее комментариями. В комментарии к VI части «Чистилища», в которой говорится об игроке в кости, Д'Имола произвел подсчеты шансов. Согласно его рассуждениям сумма очков при бросании трех костей, равная 3, 4, 17 и 18, может получаться одним единственным способом. Ошибка Б. Д'Имола очевидна и ее нет нужды комментировать.

Заслуживает специального упоминания одна из первых математических книг начала эпохи итальянского Возрождения, написанная Лукой Пачоли (ок. 1445–ок. 1514) и носившая наименование «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности». Написана эта книга была в 1487 г., но издана лишь через семь лет в Венеции. Поскольку задачи Луки Пачоли сыграли определенную роль в формировании интереса к теории вероятностей, мы приведем их формулировку. В разделе «необычных задач» в упомянутой книге были помещены две следующие:

1. Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку в 22 дуката. В связи с некоторыми обстоятельствами игра прекращена до ее окончания

причем одна сторона в этот момент имеет 50, другая - 30 очков. Спрашивается, какую часть общей ставки должна получить каждая сторона?

2. Трое соревнуются в стрельбе из арбалета. Кто первым достигнет 6 лучших попаданий, тот выигрывает. Ставка 10 дукатов. Когда первый получил 4 лучших попадания, второй 3, а третий 2, они не хотят продолжать и решают разделить приз справедливо. Спрашивается, какой должна быть доля каждого?

Пачоли предложил решение, которое позднее многократно оспаривалось, поскольку оно было признано ошибочным. А именно, он предложил делить ставку пропорционально числу выигранных партий. Таким образом, в первой задаче решение Пачоли таково: первый должен получить 5/8 ставки, т.е. 13,75 дуката, а второй 3/8 ставки, т.е. 8,25 дуката. Во второй же задаче, согласно Пачоли, первый должен получить 4 и 4/9 дуката, второй 3 и 3/9 дуката и третий 2 и 2/9 дуката.

2. Исследования Дж. Кардано и Н. Тарталья

Несомненно, что существенное продвижение в решении первичных задач теории вероятностей связано с именами итальянских ученых Дж. Кардано (1501–1575) и Н. Тарталья (ок. 1499–1557). В рукописи «Книга об игре в кости», датированной самим Кардано 1526 г., но изданной лишь в 1563 г., были решены многие задачи, связанные с бросанием игральных костей и выпадением на них того или иного числа очков. Он правильно подсчитал числа различных случаев, которые могут произойти при бросании двух и трех костей. Словесные формулировки при этом достаточно сложны, Вот, для примера, что он писал в главе XI «О бросании двух костей»: «При бросании двух костей возможны 6 случаев по два одинаковых числа и 15 случаев выпадения разного числа очков, т.е., считая и двойные, 30. Следовательно, всего возможно 36 случаев». Под двойными выпадениями он понимает выпадение на двух костях очков, получаемых перестановкой. Например, двойным к случаю выпадения на первой кости 2 очков, а на второй 5 будет выпадение 5 очков на первой кости и 2 на второй.

Кардано указал далее число возможных случаев появления хотя бы на одной кости определенного числа очков. Таких случаев оказалось 11. Заслуживают упоминания слова Кардано: «число это меньше, чем число случаев отсутствия данного числа очков. По отношению к общему числу случаев при бросании двух костей оно составляет больше одной шестой и меньше одной четверти». Здесь у Кардано ошибка: нужно было сказать меньше одной трети, поскольку 11/36 не меньше, а больше 1/4.

Это место заслуживает пристального внимания, поскольку Кардано дважды предложил рассматривать отношение, которое теперь мы называем классическим определением вероятности. А именно, 1/6 — это вероятность появления заданного числа очков при бросании одной кости, а 11/36 — вероятность получить хотя бы на одной кости грань с заданным числом очков. Означает ли это, что Кардано решил рассматривать вместо чисел благоприятствующих шансов вероятности случайных событий, т.е. ввел в рассмотрение классическое определение вероятности? Судя по всему, это было озарение только для данного примера. По-видимому, Кардано хотел выяснить вопрос: что чаще происходит — при бросании одной кости выпадение заданного числа очков или же при бросании двух костей выпадение этого числа очков хотя бы на одной кости? Ответ был найден, и на этом Кардано успокоился. Единичное наблюдение он не сделал основой для общего заключения. В результате он не заметил, что стоял на пороге введения важного понятия для всего дальнейшего развития большой главы математики, да и всего количественного естествознания.

Этот вывод подкрепляется тем, что в следующей главе, в которой рассматривается бросание трех костей, Кардано уже не обращается к отношению числа благоприятствующих шансов к числу всех возможных. Все усилия Кардано затратил на подсчет числа возможных случаев.

В тринадцатой главе «О сложных числах, как до шести, так и свыше и как для двух, так и для трех костей», Кардано вновь возвратился к рассмотрению отношений числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев. Однако и здесь Кардано не заметил, что он находился на грани введения важного для науки понятия. Вот его подлинные слова: «Десять очков (в сумме — *Б. Г.*) может получиться из двух пятерок и из шестерки и четверки. Последнее сочетание возможно при этом в двух видах. Таким же образом девять очков может получиться из пятерки и четверки и из шестерки и тройки, так что это составляет $1/9$ всей серии[1] и две девятых ее половины. Восемь же очков получается из двух четверок, из 3 и 5 и из 6 и 2. Всего же 5 возможных случаев составляет приблизительно $1/7$ часть из всей серии ... 7 очков составляется из 6 и 1, из 5 и 2, из 4 и 3. Всего, стало быть, имеется 6 возможных случаев, составляющих $1/6$ всей серии. А 6 получается по такому же расчету, как и 8; 5 — как 9; 4 — как 10; 3 — как 11 и 2 — как 12».

Вновь Кардано оперирует фактически классическим понятием вероятности, но не замечает его значения для изучаемых им задач. Рассматриваемые им отношения воспринимаются им скорее чисто арифметически, как доля случаев, чем как характеристика возможности появления случайного события при испытании.

В главе XI имеется одно предложение, которое рядом автором трактуется весьма широко, хотя, как мы сейчас увидим, его формулировка достаточно неопределенная. Вот эти слова Кардано: «Целая серия игр не дает отклонения, хотя в одной игре это может случиться... при большом числе игр оказывается, что действительность весьма приближается к этому предположению». Ссылаясь на это место, В. В. Бобынин[2] сделал далеко идущий вывод: «этот закон (больших чисел — *Б. Г.*) уже с достаточной ясностью был выражен в XVI столетии Карданом в его статье “De ludo aleae”. Позднее

[1]Под серией Кардано принимал все возможные исходы, т.е. 36 при бросании двух костей и 216 при бросании трех костей.

[2]Бобынин В. В. Яков I Бернулли и теория вероятностей.// Мат. образование. - 1914. № 4.

О. Оре[3] в книге, посвященной Кардано, писал, что этот последний формулировал и использовал закон больших чисел в рудиментарной форме. Вполне возможно, что мнение Оре имеет некоторые основания, но следует заметить, что формулировка Кардано весьма неопределенна.

В той же книге Кардано приблизился к определению безобидной игры, что видно из следующего предложения, заимствованного из этой книги: «Итак, имеется одно общее правило для расчета: необходимо учесть общее число возможных выпадений и число способов, которыми могут появиться данные выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений, приблизительно в такой же пропорции определяются относительные размеры ставок для того, чтобы игра шла на равных условиях». Однако мнение ряда авторов относительно того, что в этом месте Кардано приблизился к классическому определению понятия вероятности, мне представляется ошибочным.

Задача Пачоли о разделе ставки до окончания игры интересовала также и Кардано. В книге «Практика общей арифметики», изданной в 1539 г., Кардано привел ряд критических замечаний в связи с решением Пачоли. Он указал на то, что Пачоли, предлагая делить ставку пропорционально числу уже выигранных партий, никак не учитывает, как много партий еще нужно выиграть каждому из игроков. Согласно мнению Кардано, если s — число партий, которое следует выиграть, а p и q — числа фактически выигранных партий первым и вторым игроками, то ставка должна делиться между игроками в отношении

$$(1+2+\ldots+(s-q)):(1+2+\ldots+(s-p)).$$

Как мы увидим позднее, решение, предложенное Карданом, в общем случае ошибочно и лишь в некоторых весьма частных случаях оно приводит к правильному результату.

К задаче о разделе ставки вновь вернулся Н. Тарталья в книге «Общий трактат о мере и числе», которая была опубликована в 1556 году. Его подход изложен в §20 книги, озаглавленном «Ошибка брата Луки из Борго». Критические замечания Тарталья верны и имеют под собой серьезный здравый смысл. Вот его слова: «Это его правило мне не кажется ни красивым, ни хорошим, потому что если бы одна из этих сторон имела 10, а другая вообще не имела никакого очка, то действуя по такому правилу, получилось бы, что одна сторона, имеющая указанные 10 очков, должна была бы взять все, а другая не получила бы ничего, что было бы совершенно лишено смысла».

Для первой задачи Пачоли (с измененным условием) Тарталья предложил следующее решение: первый игрок, набравший 10 очков, должен получить, во-первых, половину всей ставки и, во-вторых, $(10-0)/60$ всей ставки, или $22/6$ дуката, т.е. всего 14 и $2/3$ дуката, а второй 7 и $1/3$ дуката.

Мы увидим, что решение, предложенное Тарталья, также ошибочно. Но следует согласиться с тем, что трудно было бы требовать от него самого

[3] Ore O. Cardano. The gambling scholer. - Princeton, 1953.

и его предшественников правильного решения, поскольку в науке для этого еще не было выработано необходимых понятий — понятия вероятности и математического ожидания. Следующее замечание Тарталья убедительно показывает, что он и сам не доверял своему решению. Вот эти слова: «Разрешение такого вопроса является скорее делом юриспруденции, чем разума, так что при любом способе решения этой задачи найдутся поводы для споров, но, тем не менее, наименее спорным, как мне кажется, будет следующее...». Далее он предложил делить ставку по такому правилу: отклонение выигрыша от половины ставки должно быть пропорционально разности выигранных партий. В только что приведенном примере, в котором игра шла до шестидесяти очков и ставка равнялась 22 дукатам, первый игрок выиграл 10 партий, а второй — 0, доли игроков согласно предложению Тарталья таковы:

$$14 \text{ и } 2/3 = 11 + (10-0)/60 \cdot 22 \quad \text{ и } 11 + (0-10)/60 \cdot 22 = 7 \text{ и } 1/3.$$

В 1558 г. была опубликована книга Г. Ф. Певероне «Два коротких и легких трактата по началам арифметики и основам геометрии». В этой книге без указания предшественников была рассмотрена задача а разделе ставки. Формулировка задачи такова: два лица A и B играют в мяч до выигрыша одним из них 10 партий. В тот момент, когда игрок A выиграл 7 партий, а игрок B — 9, они решили прекратить игру. Как следует разделить ставку между игроками?

Певероне предложил разделить ставку в отношении 1 к 6, т.е. игроку A отдать $1/7$ ставки, а игроку B — $6/7$ ставки. Это решение неправильно. Легко подсчитать, что A должен получить $1/8$, а игрок B — $7/8$ ставки. В то же время он дал правильное решение в двух случаях, когда игроки A и B выиграли по 9 партий, а также в случае, когда игрок A выиграл 8 партий, а игрок B — 9 партий.

3. Исследования Галилео Галилея

Мы видим, что уже в XVI веке возникли задачи чисто вероятностного характера и упорно разыскивались подходы к их решению. Это неизбежно приводило к необходимости развития, с одной стороны, комбинаторных методов, а с другой стороны — к поиску тех понятий, в терминах которых было бы можно описывать возникающие ситуации. Ошибки, допущенные одними исследователями, подмечались другими, Эти другие предлагали свои способы решения, которые в свою очередь подвергались критическому анализу. Постепенно вырабатывались подходы, которые позднее становились основой новой теории и, во всяком случае, позволяли решать отдельные задачи.

Заслуживает внимания вклад в этот прогресс известного естествоиспытателя, ученого широких интересов и взглядов — Галилео Галилея (1564–1642). Его работа «О выходе очков при игре в кости», увидевшая свет только в 1718 г., была посвящена подсчету числа возможных случаев при бросании трех костей. Число всех возможных случаев Галилей подсчитал самым простым и естественным путем — он возвел 6 (число различных возможностей при бросании одной кости) в третью степень и получил $6^3 = 216$, что неоднократно непосредственным подсчетом получалось и ранее.

Далее Галилей подсчитал число различных способов, которыми может быть получено то или другое значение суммы выпавших на костях очков. Ясно, что эта сумма может принимать любое значение от 3 до 18. При подсчете Галилей пользовался полезной идеей — кости нумеровались (первая, вторая, третья) и возможные исходы записывались в виде троек чисел, причем на соответствующем, месте стояло число очков, выпавшее на кости с данным номером. Эта простая мысль для своего времени была весьма полезной. Приведем теперь подлинные слова Галилея: «...хотя 9 и 12 получаются в результате стольких же комбинаций, как 10 и 11, и вследствие этого должны были бы признаваться равноценными, мы видим, тем не менее, что в результате продолжительных наблюдений игроки все же считают более выигрышными 10 и 11, чем 9 и 12. Совершенно очевидно, что 9 и 10 (мы говорим о них, имея в виду также 12 и 11) получаются из того же числа комбинаций: 9 из 1, 2, 6 – 1, 3, 5 – 1, 4, 4 – 2, 2, 5 – 2, 3, 4 – 3, 3, 3, т.е. из шести троек, а 10 из 1, 3, 6 – 1, 4, 5 – 2, 2, 6 – 2, 3, 5 – 2, 4, 4 – 3, 3, 4 и ни при каких других сочетаниях, кроме этих шести» (G. Galilei, Opera, t. XIV, p. 293, Fiorentina, 1855).

Возникает естественный вопрос, почему же все-таки сумма 10 оказывается более предпочтительной, чем 9? Ответ заключается в следующем: «1. Тройки, или другими словами, числа, получающиеся при выпадении трех костей с тремя одинаковыми очками, не могут получиться иначе, как одним способом; 2. Тройки, образующиеся из двух одинаковых и третьего отличного от них, могут получаться тремя способами; 3. Те же, которые получаются из трех различных очков, могут получаться шестью способами. Из этих положений мы легко выводим, какими способами или, лучше сказать, при каких выходах трех костей могут получаться все числа» (там же, с. 295). В завершающей части работы Галилей привел следующую таблицу.

10		9		8		7		6		5		4		3	
631	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	211	1
622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	221	3				
541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
532	6	441	3	422	3	322	3								
442	3	432	6	332	3										
433	3	333	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

В верхней строке указаны значения суммы чисел выпавших очков. Первые три цифры в каждой клетке указывают как может получиться сумма в соответствующем столбце, четвертая цифра - число возможных различных случаев. Например, против тройки 631 указано 6 случаев; вот они: 631 — 136 — 316 — 613 — 163 — 361. Комбинация 361, для примера, означает, что на первой кости выпали 3 очка, на второй — 6 и на третьей — 1.

В таблице приведены результаты лишь для половины всех возможных сумм. Вторая половина вычисляется в точности таким же образом. В результате оказывается, что сумме 11 благоприятствует 27 различных возможностей, 12 — 25, 13 — 21, 14 — 15, 15 — 10, 16 — 6, 17 — 3 и 18 — 1. С учетом этого сумма всех возможных вариантов выпадения трех костей равна $2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 25 + 27) = 216$.

Заметим, что Галилей, в сущности, повторил результаты, полученные значительно раньше рядом предшественников — епископом Виболдом, Ричардом де Форнивалем и рядом других. Однако эта, теперь такая простая для студента второго курса университета задача, в ту пору была серьезным испытанием и для мыслителя столь высокого ранга как Галилей. Вот что он сам писал по этому поводу: «Чтобы выполнить данное мне поручение, стоившее мне таких трудов, изложу мои соображения в надежде не только разрешить указанное недоразумение, но и указать путь к точнейшему изложению основания, которые позволят осветить все особенности игры» (там же, с. 293).

Заметим, что и у Галилея, как и у его предшественников, рассуждения ведутся не над вероятностями случайных событий, а над числами шансов, которые им благоприятствуют.

Для теории вероятностей и математической статистики большее значение, чем только что рассмотренная работа, имеют его соображения по поводу теории ошибок наблюдений. До него никто этим не занимался. Таким образом, все, что он написал на эту тему, ново для его времени и важно даже в наши дни. Свои мысли и выводы он достаточно подробно изложил в одном из основных своих произведений «Диалог о двух главнейших системах мира птолемеевой и коперниковой» (М.-Л., 1948).

Согласно Галилею, ошибки наблюдений являются неизбежными спутниками каждого измерения, каждого экспериментального исследования. «В каждой комбинации наблюдений будет какая-нибудь ошибка; я думаю, что это неизбежно...» («Диалог...», с. 214). При этом ошибки могут быть двух типов: систематические, связанные прочно со способом измерений и с используемыми инструментами, и случайные, которые меняются непредсказуемым образом от одного измерения к другому. Эта классификация сохранилась до нашего времени и широко используется во всех руководствах по теории ошибок измерений.

Случайные ошибки измерений обладают некоторыми характерными особенностями. Их Галилей старательно выделил и проанализировал. Во-первых, малые ошибки встречаются чаще, чем большие, поэтому, как правило, в результаты измерений следует вносить лишь небольшие поправки. Далее, положительные ошибки встречаются так же часто, как и отрицательные. «Можно одинаково легко ошибаться как тем, так и другим образом» (там же, с. 125). Далее Галилей отметил, что около истинного результата должно группироваться наибольшее число измерений. «Среди возможных мест истинное местонахождение, надо думать, будет то, вокруг которого группируется наибольшее число расстояний» (там же, с. 216).

Эти исследования Галилея имеют принципиальное значение, поскольку они положили начало новой научной дисциплине — теории ошибок наблюдений, Эта теория, несомненно, сыграла важную роль в формировании теории вероятностей, но еще большее значение она имела для развития математической статистики. Это тем более так, что теория случайных ошибок наблюдений в настоящее время рассматривается в качестве естественной задачи математической статистики.

4. Вклад Б. Паскаля и П. Ферма в развитие теории вероятностей

Обычно считают, что теория вероятностей зародилась в переписке двух великих ученых — Б. Паскаля (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665). От этой переписки сохранилось лишь три письма Паскаля (от 29 июля, 24 августа и 27 октября 1654 г.) и четыре письма П. Ферма (одно письмо без даты и письма от 9 августа, 29 августа, 25 сентября 1654 г.) Самое первое письмо Б. Паскаля утрачено и о его содержании можно судить лишь по ответу Ферма.

В 1950–1951 г., в связи с приближавшимся тогда 150-летним юбилеем М. В. Остроградского (1801–1862), мне было поручено изучить архивы этого ученого, хранящиеся в Государственной публичной библиотеке УССР. Среди рукописей нашелся фрагмент (лист 904), явно относившийся к вводной лекции по теории вероятностей. Из литературных источников известно, что в 1858 г. Остроградский прочитал в Михайловском артиллерийском училище двадцать лекций по теории вероятностей с целью развития кругозора слушателей и их научной инициативы. Более того, три из них даже были изданы. Однако ни одной из них мне не удалось найти. Тем интереснее было познакомиться с обнаруженным фрагментом, который я считаю полезным привести здесь полностью.

«Теорию вероятностей должно отнести к наукам нового времени, ибо настоящее ее начало не восходит дальше половины XVII столетия. Правда, некоторые предметы, относящиеся к этой науке, были известны во времена весьма отдаленные и постоянно делались расчеты, основанные на продолжительности средней жизни, известны были морские страхования, знали число случайностей в азартных играх, но только в самых простых, найдены были величины ставок или закладов, безобидных для игроков, но подобные выводы не были подчинены никаким правилам. Однако же теорию вероятностей считают наукой нового времени и ее начало относят к первой половине XVII столетия, ибо прежде этой эпохи вопросы о вероятностях не были подчинены математическому анализу и не имелось никаких точных общих правил для решения их.

Паскаль, а за ним Ферма, геометры XVII столетия, по справедливости считаются основателями науки о вероятностях. Первый вопрос, относящийся к этой науке, и довольно сложный, решен Паскалем. Вопрос, о котором говорим, был предложен Паскалю кавалером де Мере и состоял в следующем условии. Два игрока начали игру, состоящую из данного числа партий, положим 30-ти, розыгрыш каждой партии непременно выигрывается одним из игроков, и тот из них, кто выиграл бы прежде другого тридцать партий, считался окончательно выигравшим и вязл бы обе ставки, внесенные в начале игры. Но игроки согласились прекратить игру, не окончив ее, т.е. одному не хватало до выигрыша тридцати партий некоторого числа, например, трех партий, а другому, положим, пятнадцати партий. Внесенные ставки для безобидности, конечно, должны быть разделены между игроками так, чтобы тот, кому недостает до выигрыша большего числа партий, получил бы меньшую сумму, а противник его большую, именно безобидный раздел требует, чтобы каждый игрок получил часть внесенной суммы, пропорциональную вероятности своего выигрыша. Итак, нужно найти эту вероятность. Паскаль нашел ее, а потом вопрос де Мере предложил Ферма. Последний немедленно нашел решение и даже для случая более сложного, когда игра происходит не между двумя только, а между произвольным числом игроков.

Замечательно, что имя кавалера де Мере, человека светского и не имевшего никакого преуспевания на поприще математических наук, остается навсегда в истории этих наук».

Мы видим теперь, что оценка, данная роли Паскаля и Ферма Остроградским, несколько завышена. Впрочем, такой же точки зрения придерживаются многочисленные историки науки. Однако в переписке Паскаля с Ферма еще отсутствует понятие вероятности, и оба они ограничиваются рассмотрением числа благоприятствующих событию шансов. Конечно, у этих авторов впервые в истории имеется правильное решение задачи о разделе ставки, которая, как мы знаем, отняла много усилий у исследователей в течение длительного времени. Оба они исходили из одной и той же идеи: раздела ставки в отношении, пропорциональном, как мы теперь сказали бы, вероятностям окончательного выигрыша каждого игрока. В предложенных ими решениях можно увидеть зачатки использования математического ожидания и в весьма несовершенной форме теорем о сложении и умножении вероятностей. Точнее сказать не вероятностей, а шансов, благоприятствующих тому или иному событию. Это был серьезный шаг в создании предпосылок и интересов к задачам теоретико-вероятностного характера. Второй шаг был сделан также Паскалем, когда он существенно продвинул развитие комбинаторики и указал на ее значение для зарождающейся теории вероятностей.

Толчком к появлению интересов Паскаля к задачам, приведшим к теории вероятностей, послужили встречи и беседы с одним из придворных французского королевского двора — шевалье де Мере (1607–1648). Де Мере интересовался философией, литературой и одновременно был страстным игроком. В этой страсти были истоки тех задач, которые он предложил Паскалю. Вот эти вопросы:

1. Сколько раз надо подбросить две кости, чтобы число случаев, благоприятствующих выпадению хотя бы раз сразу двух шестерок, было больше, чем число случаев, когда ни при одном бросании не появляются две шестер-

ки одновременно?

2. Как нужно разделить ставку между игроками, когда они прекратили игру, не набрав необходимого для выигрыша числа очков?

Де Мере претендовал, что первую задачу он решил. Однако при ближайшем рассмотрении в его рассуждениях легко обнаружить ошибку. А именно, в одном из писем де Мере Паскалю содержится такая фраза: «Если в одном случае есть один шанс из N_0 в единственной попытке и в другом случае один шанс из N_1, то отношение соответствующих чисел есть $N_0 : N_1$. Таким образом, $n_0 : N_0 = n_1 : N_1$».

Обозначения и смысл этой фразы требуют пояснения. В приведенном письме речь идет о следующем: при бросании одной кости имеется $N_0 = 6$ различных исходов и выпадению шестерки благоприятствует один из них. При бросании двух костей сразу выпадению шестерки на двух костях благоприятствует лишь один исход из $N_1 = 36$ возможных. При бросании одной кости $n_0 = 4$ раз число благоприятствующих исходов для выпадения шестерки превосходит число благоприятствующих случаев ее невыпадения. Символом n_1 обозначим число бросаний двух костей, при котором число благоприятствующих случаев выпадения одновременно двух шестерок превзойдет число благоприятствующих случаев для их невыпадения ни разу. Из правила де Мере вытекает, что уже при 24 бросаниях двух костей наступает интересующее нас событие.

В действительности правило де Мере ошибочно, поскольку вероятность того, что при четырех бросаниях одной кости ни разу не появится шестерка, равна $(5/6)^4 = 625/1296$ и, значит, искомая вероятность равна $1 - 625/1296 = 671/1296$. В этом пункте де Мере оказался прав, но при 24 бросаниях двух костей вероятность ни разу не выбросить сразу две шестерки равна $(35/36)^{24} = 0.509$, а искомая вероятность хотя бы раз выбросить две шестерки сразу есть $1 - (35/36)^{24} = 0.491$. Легко понять, что двадцати четырех бросаний еще недостаточно, а нужно по меньшей мере двадцать пять бросаний двух костей, чтобы вероятность выпадения сразу двух шестерок превосходила 0.5.

При изложении мы воспользовались современным языком и употребляли понятие вероятности. Подход де Мере был обычным для того времени и ограничивался лишь подсчетом числа благоприятствующих тому или иному событию шансов.

Основное содержание писем Паскаля и Ферма посвящено разделу ставки. Решение, предложенное Паскалем, в подробностях изложено в письме от 29 июля:

«Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено по 32 пистоля.

Предположим, что один выиграл две партии, а другой одну. Они играют еще одну партию, и если выигрывает первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля, вложенную в игру; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь по 2 выигранных партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32. Если же игроки не намерены рисковать на эту партию и хотят произвести раздел, то первый должен сказать: «Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами, случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне, кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля».

Далее Паскаль рассмотрел другой случай, когда первый игрок выиграл две партии, а второй ни одной и третий, когда, первый игрок выиграл одну партию, а второй ни одной. В обоих случаях рассуждения при решении подобны тем, которые уже были проведены. Ответы же, предложенные Паскалем, таковы: в первом случае один игрок должен получить 56, а второй — 8 пистолей; во втором же — 44 и 20.

Решение, которое для задачи Паскаля предложил Ферма, дошло до нас только по изложению, которое содержится в письме Паскаля от 24 августа. Письмо же Ферма с оригинальным текстом не сохранилось. Пусть до выигрыша игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Тогда для завершения игры достаточно сыграть еще максимум четыре партии. Их возможные исходы представлены в виде следующей таблицы:

Партии				
1	$AAAA$	$ABAA$	$ABBA$	$BBBA$
2	$AAAB$	$BAAB$	$BABA$	$BBAB$
3	$AABA$	$BAAA$	$BBAA$	$BABB$
4	$AABB$	$ABAB$		$ABBB$
				$BBBB$
игра выиграна игроком	A после двух партий	A после четырех партий	A после трех партий	B после трех или четырех партий

В этой таблице символом A обозначен выигрыш соответствующей партии игроком A, символом B — игроком B. Номера партий идут по строкам. В первых одиннадцати исходах выигрывает игрок A, в последних пяти — игрок B. Таким образом, ставка между игроками A и B должна быть разделена в отношении 11 к 5. Иными словами, игрок A получит $11/16$, а игрок B — $5/16$ ставки. Совершенно очевидно, что Ферма, также как и Паскаль, делит ставку пропорционально вероятностям выигрыша каждым из игроков всей игры. Но этого понятия в их руках еще нет, и они вынуждены искать иные способы выражения своих идей. В результате они сами не замечают, что их исходные позиции одинаковы. Это отчетливо видно из письма Паскаля от 27 октября, в котором он писал: «Сударь, я очень доволен Вашим последним письмом, я любуюсь методом в отношении партий, тем более, что я его хорошо понимаю, он полностью Ваш, ничего общего не имеет с моим и легко приводит к той же самой цели».

В письме от 24 августа Паскаль высказал сомнение в том, что метод Ферма можно распространить на число игроков, большее двух. Однако Ферма показал, что теми же рассуждениями можно решить задачу о разделении ставки и для случая трех игроков. Это решение им было использовано в задаче о трех игроках, когда до окончания игры игроку A недостает одной выигранной партии, а игрокам B и C — по две. Это решение вновь сопровождается таблицей, смысл которой пояснять уже нет необходимости.

AAAAAAAAABBBCCCBC	ABBBC	CCCCB
AAABBBCCCAAAAAACB	BBBCB	CCCBC
ABCABCABCABCABCAA	BACBB	CABCC
AAAAAAAAAAAAAAAAA	BBBBB	CCCCC

В своем письме Паскаль отметил, что Роберваль (1604–1675) спросил его зачем рассматривать продолжение игры до четырех партий в тех случаях, когда уже ясно какой из игроков выигрывает игру? Паскаль явно понимал, что это необходимо для сохранения равновозможности всех перечисляемых случаев. Так в первых четырех исходах первой таблицы игрок A выигрывает всю игру уже после двух партий. Точно также в первых девяти исходах второй таблицы игрок A выигрывает игру после первой партии. Тем не менее Ферма доводит таблицу до конца и рассматривает все возможные случаи исхода четырех партий. Этим самым Паскаль и Ферма избежали ошибки, которую допустил в следующем столетии Даламбер, когда подсчитывал число равновероятных случаев при бросании двух монет.

При рассмотрении второй таблицы Паскаль допустил неточность в рассуждениях. А именно, он считал, что из 27 возможных исходов бесспорно благоприятствуют игроку A лишь 13, а исходы 5, 11, 19 столбцов, также как 9, 15 и 24 благоприятствуют сразу и игроку A и игроку B (как A, так и C), поэтому их следует брать с половинным весом. В результате Паскаль предлагал делить ставку в отношении 16:5, 5:5, 5. Ошибка Паскаля нам теперь очевидна.

Паскаль одновременно с размышлениями над проблемами, составившими содержание его переписки с Ферма, разрабатывал вопросы комбинаторики. Результатом этого явился «Трактат об арифметическом треугольнике», опубликованный в 1665 г. и внесший серьезный вклад в развитие комбинаторики. В этом трактате имеется параграф, в котором изложены правила использования комбинаторных результатов в задаче о разделе ставки. Правило, предложенное Паскалем, состоит в следующем: пусть игроку A до выигрыша всей игры не хватает m партий, а игроку B — n партий, тогда ставка должна делиться между игроками в таком отношении:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{m+n-1}^{i} : \sum_{i=0}^{m-1} C_{m+n-1}^{i}.$$

5. Работа Х. Гюйгенса

Несомненно, что на развитие теории вероятностей значительное влияние оказала работа Х. Гюйгенса (1629–1695). Интерес Гюйгенса к этим вопросам был вызван его поездкой в Париж в 1655 г., где он познакомился с рядом видных ученых и услышал от них сведения относительно задач о разделе ставки в азартных играх, которые разрабатывались Паскалем и Ферма. По-видимому, ему стали известны и идеи, которыми они руководствовались при решении. Задачи Гюйгенса заинтересовали, и он самостоятельно занялся размышлениями над подобными же вопросами. Поскольку, как он позднее писал в трактате «О расчетах в азартных играх», ни Паскаль, ни Ферма не опубликовали разработанных ими методов, ему пришлось самому искать пути решения. Результатом явилась работа Гюйгенса, опубликованная в 1656 г. в виде дополнения к книге его учителя Ф. ван Схоутена «Математические этюды». Схоутен настолько высоко оценил эту работу Гюйгенса, что сам перевел ее на латинский язык.

Работа Гюйгенса состоит из небольшого введения и 14 предложений. Эти предложения весьма различны по своему содержанию. Первые три являются теми принципами, на основе которых Гюйгенс основывал последующие решения. Предложения 4–9 посвящены решению задач, связанных с безобидным делением ставки. Предложения 10–14 содержат различные задачи, связанные с бросанием костей. В конце мемуара помещены 5 задач без решений, которые Гюйгенс предложил читателям для самостоятельных размышлений. Их решения были им даны лишь в 1665 г.

Несомненно, что первые три предложения составляют идейную основу всего сочинения Гюйгенса и поэтому приведем их полностью.

Предложение 1. Если я имею равные шансы получить a или b, то это мне стоит $(a+b)/2$.

Предложение 2. Если я имею равные шансы на получение a, b или c, то это мне стоит столько же, как если бы я имел $(a+b+c)/3$.

Предложение 3. Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p, а число случаев, в которых получается сумма b, равно q, то стоимость моего ожидания равна $(ap+bq)/(p+q)$.

Для нас ясно, что этими предложениями Гюйгенс ввел понятие математического ожидания для случайной величины, принимающей два или три значения. Если использовать современные представления, то в первых двух предложениях значения, принимаемые случайными величинами, равновероятны, а в третьем предложении вероятность значения a равна $p/(p+q)$ и вероятность значения b равна $q/(p+q)$. У Гюйгенса еще понятие вероятности не выделено, и он все время оперирует с числами шансов, благоприятствующих тому или другому событию. Гюйгенс предпочел, так сказать, коммерческую терминологию и говорил о стоимости, за которую он готов уступить свое право на получение выигрыша. Термин «ожидание» был введен в употребление учителем Гюйгенса — Схоутеном — при переводе.

Предложения 1 и 2 представляют собой ничто иное как версию задачи о разделе ставки. Мы приведем текст Гюйгенса с тем, чтобы читатели убедились насколько близки его рассуждения к рассуждениям Паскаля.

«Предположим, что я играю против другого лица на то, кто первым выиграет 3 партии, и что я уже выиграл 2 партии, а он — 1. Я хочу знать какая часть ставки причитается мне, когда мы хотим прервать игру и справедливо разделить ставки... Нужно заметить сначала, что достаточно принять во внимание число партий недостающих той и другой стороне. Так как верно, что если бы мы играли на то, кто выиграет 20 партий, и если бы я выиграл 19 партий, а мой противник 18, то я имел бы такое же самое преимущество, как и в изложенном случае, где при трех партиях я выиграл две, а он только одну, а это потому, что в обоих случаях мне недостает только одной партии, а ему двух[4]. Затем, чтобы вычислить часть причитающуюся каждому из нас, нужно обратить внимание на то, что произошло бы, если бы мы продолжали игру. Верно и то, что выиграв партию, я получил бы полностью сумму ставки, которую обозначу a. Но если первую партию выиграет мой противник, то наши шансы станут равными, принимаю во внимание, что каждому из нас будет недоставать по одной партии; значит, каждый из нас имел бы право на $\frac{a}{2}$, что согласно первому предложению, эквивалентно сумме половин, т.е. $\frac{3}{4}a$, так что моему сопернику остается $\frac{1}{4}a$».

Разделение ставки между тремя игроками Гюйгенс рассмотрел в предложении 8, когда первому игроку недостает до выигрыша всей игры одной партии, а второму и третьему — по две партии. В предложении 9 он рассмотрел вопрос о разделе ставки между тремя игроками, но при произвольном состоянии игроков. Общего выражения для решения этой задачи им дано не было, и он изложил только принципы сведения общей задачи к частным случаям.

Формулировки предложений 10–14 следует признать недостаточно четкими. Их содержание полностью проясняется лишь при рассмотрении предложенных Гюйгенсом вопросов. Приведем некоторые из них.

Предложение 10. Определить при скольких бросаниях можно обязаться выбросить одной костью шесть очков?

Конечно, задача сформулирована весьма неопределенно. Нам ясно, что автору нужно понятие вероятности для точной формулировки его вопроса, а этого понятия еще нет. Речь же идет о вероятности того, что при n бросаниях $(n = 1, 2, \ldots)$ хотя бы раз появится на кости шестерка.

Решение Гюйгенса состоит в следующем: при бросании имеется один шанс выкинуть 6 очков и 5 шансов получить другие грани. Если разыгрывается сумма а, то шанс получить эту сумму, согласно предложению 3, будет стоить $(1 \cdot a + 5 \cdot 0)/6 = a/6$.

«Тому, кто предложил ему бросить кости, остается $5a/6$. Значит, тот, кто играет партию в одно бросание, может ставить только 1 против 5».

При двух бросаниях кости вычисления стоимости игры Гюйгенс проводит следующим путем. «Если 6 очков получается при первом бросании, то бросающий получает а, но на это у него имеется 1 шанс, и имеется 5 шансов, что это не произойдет. Но тогда имеется еще второе бросание, которое

[4] Заметим, что это место выглядит убедительно лишь в предположении равносильности игроков. Однако если из двух партий обе выиграл игрок A, то это наводит на мысль о том, что он играет лучше, чем игрок B. Если же A выиграл 20 партий, а B — 18, то представление об их равносильности становится более убедительным.

Позднее неоднократно рассматривались многочисленные задачи с учетом неравносильности игроков. Такие задачи затем получали интерпретацию на языке физики и инженерного дела.

стоит ему, согласно предшествующему вычислению $a/6$. Отсюда следует, что игра должна стоить играющему $(1 \cdot a + \frac{5}{6} \cdot a)/6 = 11a/36$». Аналогичным путем Гюйгенс получает для трехкратного бросания кости стоимость игры, состоящей в том, что хотя бы раз выпадет грань с числом очков 6, равную $91a/216$. Далее он вычислил стоимость подобной игры при четырехкратном, пяти и шестикратном бросании кости. Результаты получились такими: $671a/1296$, $4651a/7776$, $31031a/46656$.

В предложении 11 Гюйгенс рассматривает такую задачу: «Найти во сколько бросаний можно обязаться выбросить две шестерки?» Для нас эта формулировка неопределенна. Она должна быть сформулирована так: если при бросании двух костей игрок выигрывает сумму a, то какую ставку он должен внести для участия в игре (при безобидной игре) ? Легко подсчитать, что цена игры при одном бросании должна стоить $a/36$, при двух бросаниях $71a/1296$ и так далее. Далее Гюйгенс сделал такое замечание: «Я нахожу, что тот, кто играет при 24 бросаниях, имеет еще легкую невыгоду и что можно принимать с выгодою партию, играя только минимально при 25 бросаниях».

Мы приведем теперь формулировки остальных трех предложений работы Гюйгенса.

Предложение 12. Найти такое число костей, при котором можно обязательно выбросить две шестерки при первом бросании?

Предложение 13. Найти причитающуюся каждому из нас часть общей суммы при предположении, что я бросил две кости один раз с тем условием, что если выпадет 7 очков, то выигрываю я, и что выигрывает мой противник, если выпадает 10 очков. А если выпадает другое число очков, то мы делим общую сумму поровну.

Предложение 14. Другой игрок и я поочередно бросаем две кости при условии, что я выигрываю, как только я выброшу 7 очков, и он выигрывает, как только выбросит 6 очков, и я предоставляю ему бросить первому. Требуется найти отношение моих шансов и его.

Интересно отметить, что в письма к Каркави от 6 июля 1656 г. Гюйгенс писал, что предложение 14 его трактата соответствует одной из шести задач Ферма, которые последний сообщил Каркави.

Для полноты картины мы сформулируем все пять задач, предложенных Гюйгенсом читателям для самостоятельного решения. Их решение он опубликовал лишь в 1665 г.

1. A и B играют двумя костями на следующих условиях: A выигрывает, если он выбросит 6 очков, B выигрывает, если выбросит 7 очков. Первым бросает A один раз, затем B бросает дважды, затем A бросает два раза и т.д., пока кто-нибудь не выиграет. В каком отношении шансы A относятся к шансам B Ответ: как 10355 к 12276.

2. Трое игроков берут 12 фишек, из которых 4 белых и 8 черных, и играют на таких условиях: первый вытянувший белую фишку побеждает. A тянет первым, B вторым, а затем C, потом опять A и т.д. В каком отношении находятся шансы одного против других?

3. A держит пари против B, что из 40 карт (по 10 одинаковой масти) он выберет такие, что каждая будет различной масти.

Здесь величина шансов A против B определяется как 1000 к 8139.

4. Имеем, как во второй задаче, 12 фишек, из которых 4 белых и 8 черных; A держит пари против B, что в выборе 7 фишек вслепую он будет иметь 3 белых. Спрашивается, в каком отношении стоят шансы A против B?

Если Гюйгенс имел в виду, что будут вынуты точно 3 белых фишки, то результат 35:64; если же по меньшей мере 3, то 42:57.

5. A и B, каждый имеющий по 12 монет, играют тремя костями на условиях: если A выбросит 11 очков, то он должен дать B одну монету, но если он выбросит 14, тогда B должен дать одну монету A. Тот игрок выигрывает, который первым получит все монеты.

Здесь шансы A относятся к шансам B как 244 140 625 к 282 429 536 481.

Последняя задача является ничем иным как разновидностью задачи о разорении игрока.

Спустя десять лет после кончины известного философа Б. Спинозы (1632–1677), в Гааге была опубликована анонимная работа, состоящая из двух частей, далеких друг от друга по содержанию. «Исследование о радуге» и «Заметки о математической вероятности». Проведенные исследования подтверждают предположение о том, что эти сочинения были написаны Спинозой. Во второй части работы содержалось решение первой задачи Гюйгенса и были приведены формулировки остальных четырех. Нас должно заинтересовать то обстоятельство, что в названии работы уже говорится о математической вероятности, но хотя в самой работе вероятность не определяется и рассуждения ведутся над числом благоприятствующих событию случаев.

Для дальнейшего нам полезно сделать следующее замечание. В 1692 г. Д. Арбутнот (1667–1735) предпринял издание английского перевода книга Гюйгенса и к этому переводу он добавил ряд новых задач, в том числе задачу иной природы. Формулировка этой задачи такова: на плоскость наудачу бросается прямоугольный параллелепипед с ребрами, находящимися в отношении $a : b : c$. Найти отношение шансов выпадения параллелепипеда гранями ab, bc и ca.

К концу XVII века завершался длительный период накопления первичных сведений о случайных событиях, точно поставленных задач и подходов к их решению. Многие выдающиеся умы занимались этими вопросами и с разных позиций подходили к количественной оценке возможности наступления случайного события. Ферма фактически пользовался понятием математического ожидания, использование которого для решения разнообразных задач было широко развито Гюйгенсом; Паскаль, Ферма и Гюйгенс использовали представления о теоремах сложения и умножения вероятностей и подошли вплотную к понятию вероятности, однако его они не ввели. Казалось бы, что этот шаг — переход от рассмотрения числа возможных исходов, благоприятствующих наступлению события, к рассмотрению отношения этого числа к числу всех возможных исходов — был естественен. Однако никто этого шага не сделал. Рассуждения, благодаря этому, были сложны и формулировки задач не очень точны. И если бы исследователи того времени задали себе вопрос, что возможнее при четырехкратном бросании кости хотя бы раз выбросить шестерку или при двадцатипятикратном бросании двух костей хотя бы раз выбросить на обеих костях шестерки, они были бы вынуждены ввести классическое понятие вероятности и далее его использовать. Однако этого в XVII веке не произошло и введение в науку классического понятия вероятностей принадлежит лишь XVIII столетию. Однако оно было исследованиями XVII века хорошо подготовлено. Период предыстории завершался и начинался период собственно истории теории вероятностей. Для этого уже был создан достаточно прочный фундамент.

6. О первых исследованиях по демографии

В следующей главе мы узнаем, что одним из толчков для развития основных понятий теории вероятностей сыграли исследования Джона Граунта (1620–1675) и Вильяма Петти (1623–1687) по демографии или, как тогда говорили, по политической арифметике. Их работы наглядно продемонстрировали каким мощным орудием могут служить для изучения массовых явлений статистические наблюдения, если их соответствующим образом обработать. Их книги получили большое распространение, старательно изучались учеными самых разнообразных направлений деятельности, в том числе и математиками.

Первой работой, с которой начинается история статистики как области научного знания, следует назвать книгу Д. Граунта, опубликованную в 1662 г. под названием «Естественные и политические наблюдения, перечисленные в прилагаемом оглавлении и сделанные над бюллетенями смертности. По отношению к управлению, религии, торговле, росту, воздуху, болезням и разным изменениям означенного города». Нам нет нужды давать описание всего содержания этой книги, но оттенить отдельные моменты, необходимые для дальнейшего, следует.

Основная задача, которая заинтересовала Граунта, состояла в указании метода, который позволял бы установить с достаточной точностью возрастной состав населения города в результате наблюдений за возрастом умерших. С этой целью им были проанализированы результаты 229 250 регистрации смертей в Лондоне происшедших за 20 лет. Среди этих смертей было отмечено 71 124 смерти детей от 0 до 6 лет. Причины смерти были тщательно перечислены Граунтом. Он специально отметил, что отношение числа смертей детей от 0 до 6 лет к общему числу смертей за тот же период времени, равное $71\,124/229\,250$, приблизительно равняется $1/3$. Иными словами, Граунт ввел представление о частоте события. Для развития теории вероятностей это обстоятельство сыграло огромную роль, как, впрочем, и его замечание: «... мы хотели бы отметить, что некоторые из случайностей имеют постоянное отношение к числу всех похорон» (цитированная книга, с. 32). Здесь Граунт вплотную подошел к представлению о статистической устойчивости средних.

Он установил, что для Лондона число рождений мальчиков к числу рождений девочек относится как 14:13, что в среднем на каждые 11 семейств ежегодно умирают 3 их члена, что одна из 2000 женщин умирает от родов, что в среднем на каждые 63 покойника приходится 52 новорожденных. Тем самым численность населения Лондона пополняется систематически за счет провинции. Он установил на основании таблиц смертности, что в Лондоне на каждые 100 мужчин 34 имеют возраст от 16 до 56 лет. Так что по его данным в ту пору из 199 112 жителей мужского пола 67 694 имели возраст от 16 до 56 лет.

Им была составлена первая таблица смертности, которую мы теперь приведем: из каждых 100 новорожденных доживает до

6 лет	64	36 лет	16	66 лет	3
16 лет	40	46 лет	10	76 лет	1
26 лет	25	56 лет	6	86 лет	0

В этой таблице поражает огромная детская и юношеская смертность: только 64% в ту пору доживали до 6 лет и только 40% — до 16 лет.

Граунт прекрасно понимал, что точность его выводов тем больше, чем больше наблюдений имеется для обработки. Именно в связи с этим он отметил, что недостаточно ограничиваться обработкой бюллетеней смертности только за одну неделю для получения полноценных выводов о составе населения.

Понятие частоты оказалось полезным и его сразу подхватили другие авторы. Так в небольшой книге В. Петти «Два очерка по политической арифметике, относящиеся к людям, зданиям, больницам в Лондоне, Париже», вышедшей в 1682 г. в Лондоне, а через два года во французском переводе в Париже, были даны сравнительные данные о смертности в госпиталях шарите[5] Парижа и Лондона. Так в одном из госпиталей шарите Парижа в течение года из 2647 больных скончались 338, а в двух госпиталях Лондона из 3281 больных ушли из жизни 461. Частоты госпитальной смертности для Парижа и Лондона оказываются соответственно равными 0.136 и 0.140. Петти не использовал десятичных дробей и обе частоты считал приблизительно равными 1/7. Еще больший процент смертности оказался в парижском госпитале «Божий дом» (L'hotel dieu), а именно в нем из 21 591 больных скончалось 5360. Таким образом, для этого госпиталя частота окончательного исцеления от всех болезней и печалей оказалась равной $5360/21\,491 \approx 0.262$. Петти принимал ее за 1/4.

В этой же книге Петти установил, что в Лондоне в среднем умирает один житель из 30, а в сельской местности — один из 37. Среди же членов парламента одна смерть приходится на 50 человек. Он также утверждал, что о численности населения города можно судить по бюллетеням смертности. Так, для примера, в Лондоне было зарегистрировано 22 331 смертей. Значит, поскольку коэффициент смертности для Лондона равен 1/30, число жителей в этом городе должно быть близко к 669 930.

[5] La charité - милосердие. Так назывались больницы, организованные церковью для бедняков.

Несомненно, что работы Граунта, Петти и ряда их последователей представляют собой ничто иное как первые шаги в области математической статистики.

Непосредственным продолжателем исследований, начатых Граунтом и Петти, был знаменитый английский астроном Эдмунт Галлей (1656–1742). В 1693 г. Галлей опубликовал в изданиях Лондонского королевского общества две статьи «Оценка степеней смертности человечества, выведенная на основании любопытных таблиц рождений и погребений города Бреславля, с попыткой установить цену пожизненных рент» и «Несколько дальнейших замечаний по поводу Бреславльских бюллетеней смертности». В основу этих статей были положены данные о движении населения Бреславля за 1687–1691 гг., присланные по просьбе секретаря общества Генриха Жюстелля пастором Каспаром Нейманом. Более Галлей к этим вопросам не возвращался.

Одна из причин интереса Галлея к таблицам смертности состоит в том, что сами Граунт и Петти сознавали недостаточную обоснованность своих выводов, поскольку у них отсутствовали численность населения и возраст умерших (зачастую). Кроме того, в городах, которые они изучали — Лондон и Дублин — был большой приток населения извне. Это обстоятельство делает указанные города «неподходящими в качестве стандарта для этой цели, которая требует, если это возможно, чтобы население, с которым имеют дело, было совершенно закрытым, т.е. таким, где все умирают там, где они родились, где нет никаких эмигрантов и иммигрантов» (Галлей, первый мемуар). По словам Галлея, бреславльские материалы не имеют указанных дефектов.

На основании имевшихся у него данных Галлей составил таблицу смертности, которую он рассматривал одновременно и как таблицу доживающих по возрасту лиц, так и как распределение населения по возрасту. Он ввел в науку понятие о вероятной продолжительности жизни, как о возрасте, которого одинаково можно достигнуть и не достигнуть. На современном языке это медиана длительности жизни. Сам Галлей не вводил ни термина медиана, ни термина вероятная продолжительность жизни. В вычислениях Галлея можно заметить использование им принципов, лежащих в основе теорем сложения и умножения вероятностей, а также рассуждения, близкие к формулировке закона больших чисел.

Работы Галлея имели очень большое значение для развития науки и применений статистических исследований о народонаселении к вопросам страхования.

Глава 2. Период формирования основ теории вероятностей

7. Возникновение классического определения вероятности

Образование основных математических понятий представляет важные этапы в процессе математического развития. Мы видели, что до конца XVII века наука так и не подошла к введению классического определения вероятности, а продолжала оперировать только с числом шансов, благоприятствующих тому или иному интересующему исследователей событию. Отдельные попытки, которые нами были отмечены у Кардано и у позднейших исследователей, не привели к ясному пониманию значения этого нововведения и остались инородным телом в завершенных работах. Однако, в тридцатых годах XVIII столетия классическое понятие вероятности стало общеупотребительным и никто из ученых этих лет не мог бы ограничиться только подсчетом числа благоприятствующих событию шансов. Кто же ввел это понятие и настолько ясно показал его необходимость, чтобы в дальнейшем уже не возникло сомнения в его целесообразности для развития науки? Мы должны заметить, что введение классического определения вероятности произошло не в результате однократного действия, а заняло длительный промежуток времени, на протяжении которого происходило непрерывное совершенствование формулировки, переход от частных задач к общему случаю.

Внимательное изучение, показывает, что еще в книге Х. Гюйгенса «О расчетах в азартных играх» (1657) нет понятия вероятности как числа, заключенного между 0 и 1 и равного отношению числа благоприятствующих событию шансов к числу всех возможных. А в трактате Я. Бернулли «Искусство предположений» (1713)[6] понятие это введено, хотя и в далеко несовершенной форме, но, что особенно важно, широко используется. Что же произошло за те полстолетия, которое прошло между публикациями этих книг? Что заставило Я. Бернулли ввести в научный обиход классическое понятие вероятности?

Несомненно, что формулировка закона больших чисел, осуществленная Я. Бернулли, сама по себе является достаточным для этого основанием. Однако имеется и другое соображение, которое, несомненно, оказало сильное влияние на ход мыслей ряда исследователей, в том числе и Я. Бернулли. Речь идет о работах Граунта и Петти, о которых было сказано в предыдущем параграфе. Эти произведения решающим образом воздействовали на лучшие умы того времени и не было ни одного мало-мальски крупного математика, который не изучал бы их и не находился под их воздействием.

[6]Часть четвертая этой книги переведена на русский язык и с содержательными комментариями: Я. Бернулли, «О законе больших чисел», М., Наука, 1986, редактор Ю. В. Прохоров.

Этого влияния не избежал и Я. Бернулли. Произведения Граунта и Петти убедительно показали преимущества понятия частоты перед понятием численности. Именно понятие частоты, т.е. отношение числа наблюдений, в которых появляется определенное свойство, к числу всех наблюдений, позволяет получить серьезные практические выводы, тогда как рассмотрение численноетей оставляет исследователя в состоянии неопределенности. Отсюда оставался лишь один шаг до введения понятия классической вероятности. Заметим, что выводы Граунта и Петти относительно устойчивости частоты некоторых событий подготовили почву и к формулировке закона больших чисел.

В весьма несовершенной форме классическое определение вероятности у Я. Бернулли появилось в первой главе четвертой части «Искусства предположений». Там он сказал следующие слова: «Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее, как часть от целого». Далее было пояснение сказанного на примере, который отчетливо показывает, что Я. Бернулли в данную им формулировку фактически вкладывал тот же самый смысл, какой мы вкладываем в классическое определение вероятности. Вот это пояснение: «Именно: если полная и безусловная достоверность, обозначаемая нами буквой α или единицей 1, будет, для примера, предположена состоящей из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же неблагоприятствуют, то будет сказано, что это событие имеет $\frac{3}{5}\alpha$ или 3/5 достоверности».

При формулировке главного предложения в пятой главе четвертой части Я. Бернулли вновь писал об отношении числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных. Но при этом он не оговаривал, а предполагал само собой разумеющимся, что эти случаи должны быть равновероятными. Наряду с этим отношением, которое вошло в науку, Бернулли предлагал и другое — число благоприятствующих к числу неблагоприятствующих. В науке привилось только первое из этих отношений, второе же не привилось, быть может по той причине, что оно изменяется от 0 до бесконечности, а может быть по причине неаддитивности этих отношений.

Интересны рассуждения четвертой главы четвертой части сочинения Я. Бернулли. Он задал вопрос: как определить вероятность случайного события, если у нас нет возможности подсчитать числа всех возможных и благоприятствующих ему шансов? Ответ им был сформулирован следующим образом: «Но здесь нам открывается другая дорога для достижения искомого. И то, что не дано вывести a priori, то, по крайней мере, можно получить a posteriori, т.е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах... Ибо, если, например, при наблюдениях, сделанных некогда над тремя сотнями людей того же возраста и сложения, в каких находится теперь Тит, было замечено, что из них двести до истечения десяти лет умерли, а остальные остались в живых и дальше, то можно заключить с достаточным основанием, что имеется вдвое больше случаев Титу умереть в течение ближайшего десятилетия, чем остаться в живых по истечении этого срока... Этот опытный способ определения числа случаев по наблюдениям не нов и не необычен».

Нам важно теперь подчеркнуть, что в высказанных отрывках достаточно четко прослеживается мысль о статистическом определении вероятности. Наверняка при этом Я. Бернулли основывался и на работах Граунта и Петти.

Таким образом в трактате Я. Бернулли присутствуют обе концепции вероятности — классическая и статистическая. Обе они изложены не очень четко, но существенно то, что они уже введены в рассмотрение и использованы. Этим был сделан принципиальный шаг в науке о случае — введено в рассмотрение понятие вероятности случайного события как числа, заключенного между 0 и 1. Достоверному событию при этом приписывается максимально возможное значение вероятности единица, а невозможному — минимальное — ноль. Кроме того, было ясно сказано, что это число может быть определено двумя различными способами: путем подсчета числа равновозможных случаев, которые благоприятствуют событию, и всех возможных случаев и вычисления их отношения или же путем проведения большого числа независимых испытаний и вычисления частоты события. Можно считать, что теория вероятностей с этого момента начала свою историю. До этого же была предыстория, которая подготовляла почву для формирования основных понятий и задач теории вероятностей.

Я. Бернулли обдумывал свое «Искусство предположений» долгие годы, по его словам, по меньшей мере двадцать лет. Но свет оно увидело лишь в 1713 г., восемь лет спустя после смерти автора. Однако содержание этого произведения многие годы до его публикации уже было известно научной общественности по рукописи, которая стала доступна многим. Об этом говорится, в частности, в публикациях Фонтенеля и Сорена, посвященных заслугам покойного и вышедшим в свет соответственно в 1705 и 1706 годах. На эти публикации позднее ссылался П. Монмор (1687–1719) в своей книге «Обзор анализа азартных игр» (1-е изд. – 1706 г.; 2-е изд. – 1713 г.); а также сделал подробный анализ содержания «Искусства предположений». Таким образом, трактат Я. Бернулли оказывал влияние на развитие теории вероятностей задолго до его опубликования. Об этом позднее мы скажем еще по другому поводу.

Монмор в упомянутой книге использовал понятие вероятности и применил его к решению достаточно сложных задач. В частности, Монмор рассмотрел и правильно решил следующую задачу: имеется n предметов, пронумерованных числами от 1 до n. Спрашивается, чему равна вероятность того, что при последовательном вынимании этих предметов наудачу (без возвращения) хотя бы один предмет будет вынут так, что номер вынимания совпадет с присвоенным ему номером. Эта вероятность оказалась равной $1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^n/n!$ Мы знаем, что этой задаче теперь придаются различные формулировки.

А. Муавр воспринял классическое определение вероятности, данное Бернулли, и вероятность события определил почти в точности так, как это делаем мы теперь. Он писал: «Следовательно мы строим дробь, числитель которой будет число случаев появления события, а знаменатель — число всех случаев, при которых оно может появиться или не появиться, такая дробь будет выражать действительную вероятность его появления». После этого определения Муавр привел в точности пример, о котором мы упоминали при рассказе о вкладе Бернулли, а именно: «если какое-то событие имеет 3 благоприятствующих шанса, 2 неблагоприятствующих, дробное выражение $3/5$ будет точно говорить о вероятности его появления и может рассматриваться как ее мера» («Доктрина шансов»). Обратим внимание на то, что Муавр, как и Я. Бернулли, не оттенял то обстоятельство, что шансы должны быть равновероятными. Это замечание впервые было введено в определение классической вероятности лишь П. Лапласом в его «Аналитической теории вероятностей». Лагранж об этом еще не задумывался и давал определение вероятности в точности по Муавру. По-видимому, на Лапласа повлияла дискуссия, начатая Д'Аламбером, который при решении задачи о вероятности выпадения (при бросании двух монет) герба на одной из монет и решки на другой, определил ее равной $1/3$. Это он мотивировал тем, что имеются лишь три возможности: 1) на обоих монетах выпадает герб; 2) на обоих монетах выпадает решка; 3) на одной монете выпадает герб, а на другой — решка.

8. О формировании понятия геометрической вероятности

Уже в первой половине XVIII века выяснилось, что классическое понятие вероятности имеет ограниченную область применений и возникают ситуации, когда оно не действует, а потому необходимо какое-то естественное его расширение. Обычно считают, что таким толчком послужили работы французского естествоиспытателя Ж. Бюффона (1707–1788), в которых он сформулировал знаменитую задачу о бросании иглы на разграфленную плоскость и предложил ее решение. Это утверждение требует поправки, поскольку исторически оно неверно. Дело в том, что задолго до рождения Бюффона появилась работа, в которой фактически уже был поставлен вопрос о нахождении геометрической вероятности. Правда, в ту пору еще не было и определения вероятности. В 1692 г. в Лондоне был опубликован английский перевод книги Х. Гюйгенса «О расчетах в азартных играх», выполненный Д. Арбутнотом (1667–1735). В конце первой части переводчик добавил несколько задач, среди которых была сформулирована задача совсем иной природы, по сравнению с теми, которые были рассмотрены великим автором. Он назвал эту задачу трудной и поместил ее в дополнении «для того, чтобы она была решена теми, кто считает такого рода проблемы достойными внимания». Задача, предложенная Арбутнотом, состоит в следующем: на плоскость наудачу бросается прямоугольный параллелепипед с ребрами, равными a, b, c. Спрашивается, как часто параллелепипед будет выпадать гранью ab? Сам Арбутнот не сделал даже попытки решения придуманной им задачи. Это было осуществлено значительно позднее

Т. Симпсоном (1710–1761) в книге «Природа и законы случая» (1740) , где задача была приведена под номером XXVII. Идея решения, предложенная Симпсоном, состоит в следующем: опишем около параллелепипеда сферу и спроектируем из центра на поверхность ее все ребра, боковые грани и основания. В результате поверхность сферы разобьется на шесть непересекающихся областей, соответствующих граням параллелепипеда. Далее Симпсон написал: «Нетрудно заметить, что определенная часть сферической поверхности, ограниченная траекторией, описанной таким образом радиусом, будет находиться в таком же соотношении к общей площади поверхности, как вероятность появления некоторой грани к единице». В том, что было только что сказано, в полной мере заключены принципы разыскания геометрических вероятностей: вводится мера множества благоприятствующих событию случаев и берется ее отношение к мере множества всех возможных случаев. В нашем случае полная мера сводится к площади поверхности шара. Заметим, что Симпсон ни слова не сказал о физической интерпретации решения. Ведь для того, чтобы параллелепипед упал на плоскость определенной гранью, необходимо, чтобы его центр тяжести находился над ее проекцией на плоскость падения. Однако в решении Симпсона это требование соблюдено.

Введем для дальнейшего обозначения: $R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} — вероятности выпадения на какую-то определенную грань соответственно ab, bc, ca. Вероятности выпадения на какую-то из граней ab (соответственно bc и ca) должны быть увеличены вдвое. Формулы, о которых идет речь, должны быть таковы:

$$P_{ab} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ab}{cR}, \quad P_{bc} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{bc}{aR}, \quad P_{ca} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ca}{bR}.$$

Бюффон дважды публиковал работы, посвященные геометрическим вероятностям. Первая его публикация на эту тему относится к 1733 г., когда он сделал в Парижской академии наук доклад, напечатанный под называнием «Мемуар об игре франк-карро» (Мемуар об игре прямо в клетку) . Позднее, в 1777 г. этот мемуар был целиком включен в «Опыт нравственной арифметики», являвшейся дополнением к тому IV его «Естественной истории». Цель, которую ставил перед собой Бюффон, состояла в том, чтобы показать, что «геометрия может быть использована в качестве аналитического инструмента в области теории вероятностей», в то время как до тех пор «геометрия казалось мало пригодной для этих целей», поскольку для них использовалась только арифметика. Игра франк-карро состоит в следующем: пол разграфлен на одинаковые фигуры. На пол бросается монета, ее диаметр $2r$ меньше каждой из сторон и монета целиком укладывается внутрь фигуры. Чему равна вероятность того, что брошенная наудачу монета пересечет одну или две стороны фигуры?

Для определенности рассмотрим покрытие плоскости прямоугольниками со сторонами a и b, $b > 2r$, $a > 2r$. Легко подсчитать, что площадь полосы между основным прямоугольником со сторонами, параллельными сторонам основного на расстоянии r от каждой из его сторон и целиком расположенного внутри основного, равна $2r(a+b-2r)$. Легко понять, что центр монеты, попав внутрь малого прямоугольника, не только не пересечет, но даже не коснется сторон основного. Значит, вероятность того, что монета пересечет по меньшей мере одну из сторон основного прямоугольника равна $2r\frac{a+b-2r}{ab}$.

Вторая задача, сформулированная и решенная Бюффоном, состоит в следующем: плоскость разграфлена равноотстоящими параллельными прямыми. На плоскость наудачу бросается игла. Один игрок утверждает, что игла пересечет одну из параллельных прямых, другой — что не пересечет. Определить вероятность выигрыша каждого из игроков. Решение этой задачи хорошо известно, и нет необходимости приводить его здесь. Менее известна задача Бюффона об игре, когда игла бросается на плоскость, разграфленную на квадраты. В решении этой задачи Бюффон допустил ошибку, позднее исправленную Лапласом. Именно: Бюффон считал, что искомая вероятность равна $2r\frac{a-r}{\pi a^2}$, тогда как в действительности она равна $4r\frac{2a-r}{\pi a^2}$.

После Бюффона задачи на геометрические вероятности стали систематически включаться в трактаты и учебники по теории вероятностей. Так, в знаменитую книгу Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» были включены и подробно рассмотрены все задачи Бюффона. Но Лаплас не счел нужным отметить, откуда они были заимствованы и кто автор этих задач. Следует отметить, что терминология Лапласа далека от совершенства. Так, для примера, он писал, что «$8r$ равняется сумме всех случаев, в которых игла пересекает одну или другую параллельные линии» и что $2a\pi$ равно «числу всех возможных комбинаций». Здесь $2r$ означает длину иглы, а a — расстояние между параллельными прямыми.

Во второй задаче, рассмотренной Лапласом, плоскость разграфлена двумя системами параллельных прямых, представляющих ничто иное как систему координатных линий на плоскости. Расстояние между линиями первой системы равно a, второй системы — b. На плоскость бросается игла длины $2r$ ($2r < a$, $2r < b$). Чему равна вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну линию? Решение, предложенное Лапласом, предполагает, что дело идет о системах взаимно перпендикулярных прямых. Это Лапласом не оговорено. В результате вычисления — числа благоприятствующих и «числа всех возможных случаев» — Лаплас определил, что вероятность пересечения одной из линий брошенной иглой равна $4r\frac{a+b-r}{\pi ab}$.

В прекрасном для своего времени учебнике «Основания математической теории вероятностей» (1846) В. Я. Буняковского (1804–1889) имеется довольно большой раздел, посвященный геометрической вероятности. В него включена задача Бюффона о бросании иглы и частный случай игры франк-карро, когда плоскость разбита на равнобедренные треугольники. С современных позиций терминология Буняковского далека от совершенства. Пример такого словоупотребления мы сейчас и приведем: «…иногда встречаются такие ситуации, в которых число благоприятствующих статочностей, а равно и всех возможных бывает бесконечное. Искомая вероятность оопределится тогда отношением этих двух бесконечных чисел…». Она будет «числом конечным и совершенно определенным».

Серьезный шаг в развитии геометрических вероятностей связан с именами Ламе (1795–1870), Барбье, Д. Сильвестра (1814–1897), М. Крофтона, которые не только поставили новые задачи, но и привлекли к их решению понятие меры множества (пусть еще и на интуитивном уровне). На базе их рассмотрений позднее возникла новая ветвь геометрии, получившая наименование интегральной геометрии.

В 1860 г. Ламе на факультете наук Парижской нормальной школы прочитал курс лекций по геометрии. В этом курсе он рассмотрел задачу Бюффона о бросании иглы и оприменил ее к тому случаю, когда центр иглы бросается наудачу в центр эллипса или правильного многоугольника. Среди слушателей был Барбье, обобщивший рассуждения Ламе на случай любого выпуклого контура. В сущности Барбье не внес ничего нового в сам метод. Он только заметил, что рассуждения Ламе не связаны жестко ни с рассмотрением эллипса, ни с правильными многоугольниками, а легко обобщаются на любой выпуклый контур.

Сильвестр первым после Бюффона расширил тематику задач на геометрические вероятности. Им была предложена задача о четырех точках или задача Сильвестра. Ее оформулировка такова: четыре точки взяты наудачу внутри выпуклой области. Чему равна вероятность того, что, взяв эти точки в качестве вершин, можно составить выпуклый четырехугольник?

Сильвестр предложил следующее решение: обозначим через A площадь выпуклой области. Бросим в нашу область сначала три точки и построим по этим точкам треугольник. Пусть его средняя площадь равна M. Бросим теперь наудачу четвертую точку. Если она попадет внутрь треугольника, то по этим четырем точкам выпуклого четырехугольника составить нельзя. Но четвертую точку мы можем выбирать четырьмя различными способами, следовательно, при бросании четырех точек вероятность получить невыпуклый четырехугольник равна $p = 4M/A$. Отсюда заключаем, что вероятность получения при этом выпуклого четырехугольника равна $1-4M/A$. Среднее значение M зависит от области, в которую бросают точки. Для некоторых выпуклых фигур значение M вычислено. М. Крофтон в статье «Вероятность», опубликованной в Британской экциклопедии (9-е издание, т. 19, с. 786, Эдинбург, 1885), привел таблицу, сославшись на работу Вольхауза, из которой легко получить значения M для соответствующих выпуклых областей.

вероятность	треугольник	параллелограмм	правильный 6-угольник	окружность
p	$1/3 =$ $= 0.333\ldots$	$11/36 =$ $= 0.3056\ldots$	$289/972 =$ $= 0.2971\ldots$	$35/(12\pi^2) =$ $= 0.2955\ldots$

Сильвестр отчетливо понимал, что при вычислении геометрических вероятностей приходится брать отношение площадей или объемов (общее мер) тех областей, которые благоприятствуют событию и в которых помещаются всевозможные события. Фактически так поступали и раньше. Но при этом произносили другие слова, которые или не имели определенного смысла или же не соответствовали производимым действиям. Сравнив результаты вычислений для различных областей, Сильвестр предложил найти те области, для которых вероятность получения выпуклого четырехугольника достигает максимума и минимума. Первые результаты принадлежат Крофтону и опубликованы в ранее указанной статье. Он доказал, что минимум достигается для круга. Там же он высказал предположение, что минимум достигается и для эллипса, Это предложение было доказано лишь В. Блашке (Vorlesungen über differential Geometrie – Berlin, 1923). Дельтейль показал, что максимальная вероятность формирования выпуклого четырехугольника достигается для треугольной области.

В учебной литературе широко известна задача о встрече. Спрашивается, когда она появилась и кто был ее автором? При изучении многочисленной литературы моей ученице М. Т. Лориньо Перес удалось найти ответ на этот вопрос. В книге Уайтворта «Выбор и шанс» (Choice and chance – London, 1886, Ch. III, p. 242–243) была рассмотрена следующая задача. Лица A и B независимо один от другого отправляются на прием в парке. Лицо A прибывает на прием в наудачу выбранный момент между 3 и 5 часами пополудни, а B — между 4 и 7 часами пополудни. Каждый из них остается на приеме в течение часа. Чему равна вероятность того, что они окажутся на приеме одновременно хотя бы одно мгновение?

Задача была решена Уайтвортом обычным путем, какой используется и в настоящее время. Легко подсчитать, что искомая вероятность равна 1/3. Позднее эта задача перекочевывала из книги в книгу в качестве иллюстративного примера, а также находила применения в задачах организации производства.

Несомненно, что в XIX веке на развитие проблематики геометрических вероятностей особое влияние оказал Крофтон. Он начал изучать пересечение случайными прямыми заданных выпуклых контуров. Мы не станем излагать его результаты, поскольку они вошли в курсы интегральной геометрии и монографии по геометрическим вероятностям, а потому легко доступны.

На необходимость совершенствования понятия геометрической вероятности несомненное влияние оказала книга Ж. Бертрана (1822–1900) (Calcul de probabilité. – Paris, 1899), в которой на хорошо подобранных примерах было показано, что логически понятие геометрической вероятности не выдерживает критики. Играя на неопределенности терминологии, казалось бы для одной и той же задачи, ему удалось получить несколько различных ответов. В качестве основной мишени им была избрана известная задача о проведении наудачу хорды внутри круга. Само собой разумеется, что критика Бертрана привлекла внимание математиков к общим вопросам логического обоснования теории веооятностей.

В XX веке интерес к геометрическим вероятностям не ослабел, а вырос, поскольку, помимо чисто математического интереса, они приобрели и серьезное прикладное значение в физике, биологии, медицине, инженерном деле и др. Этот аспект геометрических вероятностей заслуживает специального рассмотрения.

9. Основные теоремы теории вероятностей

Мы обратимся теперь к следующему естественному вопросу: когда и кто выделил в теории вероятностей основные ее теоремы — сложения и умножения и полной вероятности? В конечном счете на этих простых результатах покоится вся теория вероятностей и ее многочисленные применения. Именно поэтому представляет интерес выяснение процесса их формирования. В книге Л. Е. Майстрова «Теория вероятностей», исторический очерк, 1967 (с. 65) утверждается, что в XVII веке уже «были известны теоремы сложения и умножения вероятностей, которые широко применялись при решении задач». Однако, нам не удалось заметить ни в переписке Ферма с Паскалем, ни в трактате Гюйгенса ни формулировки, этих теорем, ни мало-мальски осознанного их использования. Однако зачатки этих теорем можно проследить буквально с первых шагов теории вероятностей как математической науки.

Так в работах Паскаля можно усмотреть, что он отчетливо понимал как следует подсчитывать число благоприятствующих шансов для события A, если нам известны шансы для несовместимых событий A_j, составляющих событие A. Это, конечно, еще не теорема сложения, но важный шаг на пути ее формулировки. При решении задачи о разделе ставки Паскаль рассуждал следующим образом: пусть игроку A для выигрыша игры недостает трех партий, а игроку B — четырех. Тогда для завершения игры достаточно шести партий. Игрок А выигрывает, если из этих шести партий он выиграет все шесть, пять или четыре, или три партии. Таким образом, число благоприятствующих шансов для выигрыша A игры оказывается равным

$$C_6^6 + C_6^5 + C_6^4 + C_6^3 = 1 + 6 + 15 + 20 = 42.$$

Это рассуждение Паскаль предложил и в общем случае, когда для окончания игры игроку A недостает m партий, а игроку B — n партий. В работах Я. Бернулли и Н. Бернулли дается отчетливая формулировка правила численния вероятности противоположного события, если известна вероятность прямого события.

При выводе формул, получивших наименование формул Бернулли, Я. Бернулли сознательно использовал правила сложения и умножения вероятностей, но самих правил он не сформулировал. Они в его рассуждениях присутствуют как бы неявно.

Одно замечание Я. Бернулли показывает, что он отчетливо понимал особенности теоремы сложения для совместимых событий. Вот это замечание: «Если два человека, достойные смертной казни, принуждаются бросить кости при условии, что тот, кто выбросит меньшее число очков, понесет свое наказание, а другой, который выбросит большее число очков, сохранит свою жизнь, и что оба они сохранят жизнь, если выбросят одинаковое число очков, то мы найдем для ожидания одного $7/12\ldots$ Но из этого нельзя заключить, что ожидание другого равно $5/12$ жизни, так как очевидно, что обе участи одинаковы. Другой также будет ожидать $7/12$, что дает для обоих $7/6$ жизни, т.е. больше целой жизни. Причиной этого является то, что нет ни одного случая, в котором хотя бы один не останется живым, а имеется несколько случаев, когда они оба могут остаться в живых». Нет нужды добавлять к словам Я. Бернулли, что он находился рядом с предложением, которое мы теперь записываем в следующем виде:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

Впрочем, если с современных позиций рассматривать работу Кардано «Книга об игре в кости», то в главе XIV «О соединении очков» можно в частном примере усмотреть этот же результат, но не для вероятностей, а для числа шансов. Он рассматривал число случаев выпадения при бросании двух костей хотя бы на одной кости одного очка. Это число равно 11, поскольку шестью различными способами может появиться 1 на первой кости: (1,1), (1,2), (1,3) (1,4), (1,5), (1,6) и столькими же на второй. Но случай (1,1) при этом мы указываем дважды. Так что различных случаев будет не 12, а лишь 11.

Однако, как ни важны приведенные наблюдения, мы не должны приписывать ни Кардано, ни Паскалю и Ферма, ни Я. Бернулли формулировку теоремы сложения вероятностей, как важнейшего положения теории вероятностей. Первая четкая и окончательная формулировка теоремы сложения вероятностей находится в работе Т. Байеса (1702–1761), носящей длинное название — «Опыт решения задач по теории вероятностей покойного достопочтенного мистера Байеса, члена Королевского общества. Сообщено мистером Прайсом в письме Джону Кентону, магистру искусств, члену королевского общества». Работа Байеса была зачитана на заседании Лондонского королевского общества 27 декабря 1763 г., спустя два года после смерти автора. В определении 1 работы содержится определение несовместимых событий. Байес употребляет другой термин «неплотные события» (inconsistent).Согласно Байесу, «несколько событий являются неплотными, если наступление одного из них исключает наступление других». Формулировка же теоремы сложения дается Байесом в предложении 1, которое состоит в следующем: «Если несколько событий являются неплотными, то вероятность того, что наступит какое-то из них, равно сумме вероятностей каждого из них». В этом предложении мы видим четкую формулировку теоремы сложения вероятностей во вполне современной форме.

Точно так же теорема умножения вероятностей длительный период формировалась на рассмотрении частных примеров и на подсчете числа шансов, благоприятствующих наступлению произведения двух или нескольких событий. Такого рода подсчеты встречаются практически у всех предшественников Я. Бернулли. Я. Бернулли широко использует эти правила при выводе своих знаменитых формул. Широко использовал правила сложения и умножения вероятностей Монмор. Однако формулировки теоремы умножения ни у кого из них не встречается. Четкое выделение теоремы умножения было осуществлено лишь Муавром. Во введении к «Доктрине шансов» в §8 он определил важное понятие независимости случайных событий. А именно, он формулирует следующее положение: «Мы скажем, что два события независимы, когда каждое из них не имеет никакого отношения к другому, а появление одного из них не оказывает никакого влияния на появление другого». Еще более определенно им дано определение зависимых событий. А именно: «два события зависимы, когда они связаны друг с другом и когда вероятность появления одного Из них изменяется при появлении другого».

Эти определения Муавр снабдил простеньким примером. Пусть имеются две кучки карт одной масти, в каждой кучке от двойки до туза. Тогда вероятность того, что из каждой кучки наудачу удается вынуть по тузу будет равна $1/13 \cdot 1/13 = 1/169$. Мы имеем дело с двумя независимыми событиями. Если же мы вынимаем две карты из одной кучки и спрашиваем о вероятности того, что при первом вынимании извлечем туз, а при втором — двойку, то здесь вероятность первого события равна $1/13$, а второго $1/12$. Таким образом вероятность интересующего нас события равна уже $1/13 \cdot 1/12 = 1/156$.

Нам особенно важно привести сейчас следующую формулировку Муавра: «... вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности появления одного из них на вероятность того, что другое должно появиться, если первое из них уже появилось. Это правило может быть обобщено на случай нескольких событий».

Мы видим, таким образом, что формулировку теоремы умножения вероятностей и введение понятия условной вероятности удалось осуществить только Муавру. Это им было сделано уже в 1718 г. в первом издании его «Доктрины шансов».

О вероятности совместного наступления нескольких событий Муавр писал следующее: «... надо обозначить одно из них как первое, другое как второе и т.д. Тогда вероятность появления первого должна рассматриваться как независимая от остальных; вторая - в предположении, что первое произошло, третье - в предположении наступления первого и второго и т.д. Следовательно, вероятность наступления всех событий равна произведению всех только что указанных вероятностей». Далее Муавр отметил, что разыскание условных вероятностей, как правило, представляет собой сложное занятие.

Общее положение Муавр продемонстрировал на решении ряда задач. Вот одна из них. Пусть события A, B и C независимы в совокупности и x, y, z означают вероятности их наступления. Тогда xyz есть вероятность наступления всех трех событий, а $1-(1-x)(1-y)(1-z)$ — вероятность наступления хотя бы одного из событий A, B, C.

В упомянутой ранее работе Байеса содержится формулировка теоремы умножения вероятностей (предложение 3) : «Вероятность того, что наступят оба взаимосвязанные события, есть соотношение, получающееся от перемножения вероятности первого события на вероятность наступления второго в предположении, что первое наступило». Мы уже видели, что это предложение было четко сформулировано Муавром и, поскольку произведение Муавра было широко известно, Байес, несомненно, заимствовал его у своего знаменитого предшественника. Единственно, в чем Байес пошел дальше Муавра — это в формулировке следствия о вычислении вероятности $\mathbb{P}(B \mid A)$ по вероятностям $\mathbb{P}(AB)$ и $\mathbb{P}(A)$. Это предложение дало основание приписывать Байесу формулы, носящие его имя. В действительности у него их нет, поскольку он не знал формулы полной вероятности.

Результат, приписываемый Байесу, по-видимому, впервые получил современную формулировку у Лапласа в его «Опыте философии теории вероятностей». В главе «Общие принципы теории вероятностей» он сформулировал принцип VI, который относится к вероятности гипотез или, как писал Лаплас, вероятности причин. Пусть некоторое событие A может произойти с одним из n несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и только с ними; эти события Лаплас называет причинами. Спрашивается, если известно, что событие наступило, чему равна вероятность того, что осуществилась и причина B_i? Вот формулировка ответа, данного Лапласом: «вероятность существования какого-либо из этих причин равна, следовательно, дроби, числитель которой есть вероятность события, вытекающая из этой причины, а знаменатель есть сумма подобных вероятностей, относящихся ко всем причинам: если эти различные причины, рассматриваемые a priori, не одинаково вероятны, то вместо вероятности обытия, вытекающей из каждой причины, следует взять произведение этой вероятности на вероятность самой причины». Легко понять, что Лаплас словесно сформулировал известное «правило Байеса»

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A \mid B_j)}.$$

Более того, этот принцип Лапласа содержит и формулу полной вероятности, которой с начала XVIII века широко пользовались в своих работах многочисленные математики, работавшие в области теории вероятностей. Они понимали как использовать принцип, заложенный в формуле полной вероятности, но его не формулировали.

Мы видим, таким образом, что основные принципы действия с вероятностями вычленялись длительным путем. Их многократно использовали при решении отдельных задач и использовали правильно, но не формулировали их в качестве особых предложений. И потребовалось почти целое столетие, чтобы после введения в науку понятия вероятности сформулировать для этого понятия систему правил действия с ним. Как постоянно происходит в истории науки, такие правила широко использовались фактически, но потребности в их формулировании не ощущали. Попутно при этом вводились и дополнительные понятия, которые позволяли глубже вникать в природу вещей. В нашем случае этими понятиям являются понятия несовместимости и независимости случайных событий.

10. Задача о разорении игрока

Несомненно, что задача о разорении игрока в развитии теории вероятностей играла серьезную роль — она позволяла оттачивать методы решения сложных вопросов и в какой-то мере является исходным пунктом для развития теории случайных процессов. Действительно, именно в этой задаче впервые начали изучать состояние системы в зависимости от времени. Точнее — положение игроков после заданного числа партий. Задача о разорении игрока была впервые сформулирована Гюйгенсом в книге «О расчетах в азартных играх» (см. §5 первой главы настоящего очерка, задача 5). Этой задачей занимались многие выдающиеся математики прошлого — Я. Бернулли, Н. Бернулли, Муавр, Лаплас и др. Интересно отметить, что Я. Бернулли критиковал Гюйгенса за то, что тот решал и предлагал трудные задачи, но не в буквенной форме, а в числовом виде и тем самым ограничивал возможности выявления общих закономерностей.

Первые подходы к решению задачи о разорении игрока почти одновременно были предложены тремя математиками — П. Монмором (1687–1719), А. Муавром и Н. Бернулли (1687–1759). Их результаты относились к 1710–1711 г. Задачи Гюйгенса в их формулировке слегка преобразилась и приобрела привычный для нас вид: игроки A и B имеют соответственно a и b франков и при каждой партии некоторой игры один из них выигрывает у другого 1 франк. Вероятность выигрыша игрока A для каждой партии равна p, для игрока B вероятность выигрыша равна $q = 1 - p$. Спрашивается, чему равны вероятности p_a и p_b того, что игрок A выиграет (соответственно игрок B) игру (т.е. игрок A выиграет все деньги B раньше, чем B выиграет их у A).

Муавр опубликовал свои результаты в журнале Philosophical Transactions за 1711 г. Он нашел, что

$$p_a = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}, \quad p_b = \frac{(p/q)^b - 1}{(p/q)^{a+b} - 1},$$

и что математическое ожидание числа N необходимых для завершения игры партий равно

$$\mathbb{E}N = \frac{bp_a - ap_b}{p - q}.$$

Ему же удалось найти вероятности $p_{a,n}$ и $p_{b,n}$, что игрок A выиграет игру за n партий (соответственно выиграет игру за n партий игрок B). В современных обозначениях искомая формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{a,n} \quad = \quad & \sum_t \{p^{ts-b} q^{ts} \sum_i C_n^i (p^{n-b-2ts-i} q^i - q^{n-s-2ts-i} p^i)\} - \\ & - \sum_t \{p^{ts-i} q^{ts+i} \sum_i C_n^i (p^{n-b-2ts-2a-i} q^i - q^{n-b-2ts-2a-i} p^i)\}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $s = a + b$; суммирование распространяется на те значения t, при которых все показатели неотрицательны.

Вдобавок им был подробно рассмотрен случай, когда $a = \infty$.

В 1710 г. формулы для $p_{a,n}$, $p_{b,n}$ в случае $p = q$ нашел Монмор. Свои соображения он переслал Иоганну Бернулли, который передал письмо своему племяннику Николаю. Ответное письмо Николая Бернулли от 26 февраля 1711 г. содержало решение и для случая $p \neq q$. Это письмо Монмор опубликовал в 1713 г. в трактате «Опыт анализа азартных игр» (P. Monmort, Essai d'analyse jeux asard).

Я. Бернулли также рассматривал задачу о разорении игрока, как в частных случаях (для $a = b = 2$), так и в общем случае. При ее решении он следовал методу Гюйгенса и получил довольно далеко идущие результаты (для вероятностей p_a и p_b).

Рассмотрение решений, предложенных Я. Бернулли, Н. Бернулли, Монмором и Муавром, ясно показывают, что все они владели приемами оперирования с вероятностями сложных событий. Практически они безукоризненно точно использовали теоремы сложения и умножения вероятностей, а также формулу полной вероятности, хотя в ту пору они еще не получили четкой формулировки. Происходило накопление опыта и выделение тех правил, которые постоянно необходимы при подсчете вероятностей сложных событий.

11. Возникновение предельных теорем теории вероятностей

На последующее развитие теории вероятностей огромное воздействие оказала идея, впервые высказанная и осуществленная Я. Бернулли — рассматривать не только точные решения задач теории вероятностей, но и их асимптотические постановки при неограниченном увеличении некоторого параметра. Конечно, в первую очередь следует указать в этом плане на закон больших чисел в форме Я. Бернулли. Именно он послужил источником для различного рода уточнений как в XVIII, так и в последующие столетия.

Сам Я. Бернулли дал формулировку своей теоремы в отличном от принятого теперь виде. Мы приведем его формулировку несколько позднее. Сейчас же отметим, что и принятая им терминология отлична от современной и связана с демографией. Так, Я. Бернулли использовал для обозначения испытаний, при которых интересующее нас событие происходит, слова «плодовитый», «фертильный», а для противоположных исходов — слово «стерильный». Теперь мы можем перейти к оригинальной формулировке теоремы Я. Бернулли, которую он ценил и вынашивал по его словам свыше двадцати лет.

«Пусть число фертильных случаев к числу стерильных случаев относится точно или приближенно как r/s или же это число относится к числу всех случаев как $r/(r+s)$ или же как r/t. [7] Последнее отношение находится,

[7] Я. Бернулли счел излишним говорить, что $t = r+s$. Заметим также, что r, s, t не фиксированы, а могут принимать любые значения, лишь бы отношение r/t имело заданное

следовательно, между $(r-1)/t$ и $(r+1)/t$. Нужно доказать, что можно произвести столь большое число опытов, что число появившихся фертильных наблюдений к числу всех опытов будет больше, чем $(r-1)/t$, и меньше, чем $(r+1)/t$.

Ясно, что эта формулировка лишь словесно отличается от принятой теперь.

Мы уже говорили, что книга «Искусство предположений» Я. Бернулли была широко известна многим математикам задолго до ее публикации. В частности, она была тщательно изучена его племянником Н. Бернулли, который в 1709 г. защитил диссертацию для получения ученой степени лиценциата прав под названием «О применении искусства предположений в вопросах прав». Во второй главе «О способе установления вероятности человеческой жизни», исходя из таблиц Граунта, он изучал вопрос о вероятности дожития до определенного возраста. Нам сейчас интересно отметить, что он отметил факт, подмеченный из изучения долголетних регистрации рождений, что мальчиков рождается больше, чем девочек. При этом отношение числа рождений мальчиков к числу рождения девочек оказывается, как он считал, равным 18:17. Подробное изучение содержания этой главы показывает, что Н. Бернулли принимал вероятность рождения мальчика равной $p_{\text{М}} = 18/35 \approx 0.514$ и соответственно вероятность рождения девочки равной $p_{\text{Д}} = 17/35 \approx 0.486$.

Далее Н. Бернулли рассмотрел пример, когда имеется 14 000 рождений. Тогда, согласно формулам Я. Бернулли, имеет место равенство (μ означает фактическое число рождений мальчиков)

$$\mathbb{P}(|\mu - 7200| < 163) = \mathbb{P}(7037 < \mu < 7363) = \sum_{i=7038}^{7362} C_{14\,000}^{i} p^{i} q^{14\,000-i}$$

Фактическое число рождений мальчиков зависит от случая. Приведенная формула позволяет вычислять вероятность того, что число рождений мальчиков будет заключено в указанных границах. Однако вычисления, которые, при этом необходимо произвести, сложны.

Интересно, что в точности этот пример рассмотрен Лапласом в «Аналитической теории вероятностей» (1-е изд., с. 281). В качестве искомого значения вероятности неравенства $7037 < \mu < 7363$ Лаплас указал величину 0.994303.

В двух последних изданиях книги Муавра «Доктрина шансов» был помещен перевод его статьи 1733 г. “Approximation ad summum terminonum Binomii $(a+b)^n$ in serien expansis”. Согласно словам самого автора «Я помещаю здесь перевод моей работы, написанной 12 ноября 1733 года и сообщенной некоторым друзьям, но никогда не публиковавшейся» («Доктрина шансов», 1756, с. 242). В кратком введении Муавр отметил, что для решения ряда задач теории вероятностей необходимо подсчитывать суммы $\sum_{m=l}^{k} P_n(m)$ членов биномиального распределения и что вычисления

значение. Отсюда следует, что $1/t$ может быть сделано как угодно малым.

становятся громоздкими при больших значениях числа испытаний n. В результате перед Муавром возник вопрос о разыскании асимптотической формулы. Эта задача им была благополучно решена. Основная трудность, которая при этом возникла, состояла в оценке факториала $m!$ при больших значениях m. Муавру удалось доказать, что имеет место асимптотическое равенство $m! \approx B\sqrt{m}e^{-m}m^m$, где B — постоянное. При этом оказалось, что

$$\ln B = 1 - 1/12 + 1/360 - 1/1260 + 1/1680 - \dots$$

Муавр нашел, что приблизительно $B \approx 2.5074$, однако это его не удовлетворило и ему хотелось связать эту константу с ранее введенными в математику. Он обратился со своей проблемой к Д. Стирлингу (1692–1770). Стирлинг с успехом разрешил вопрос и показал, что $B = \sqrt{2\pi} \approx 2.50662\dots$. В связи со сказанным хотелось бы отметить, что известную формулу Стирлинга для приближенного вычисления факториала в случае больших чисел следовало бы называть точнее формулой Муавра или самое меньшее — формулой Муавра–Стирлинга. Заметим дополнительно, что Муавр впервые вычислил и опубликовал таблицу функции $\ln n!$ для значений n от 10 до 900. Использовав найденную им формулу «Стирлинга», Муавр первоначально выяснил, что в случае $p = q = 0.5$ средний член бинома $(1/2 + 1/2)^n$ асимптотически равен $1/\sqrt{2n\pi pq}$, а затем доказал локальную теорему, носящую теперь его имя («Доктрина шансов», с. 243–244). То, что Муавр начал со случая $p = q = 0.5$ вполне естественно, поскольку именно этот случай играет значительную роль в простейших задачах демографии. Далее Муавр получил локальную теорему для $p \neq 0.5$ фактически в принятом теперь виде.

Имея в руках локальную теорему, Муавр без затруднений сформулировал и интегральную теорему, правда, только для симметричных границ. Впрочем, интегральная теорема, доказанная для симметричных границ, без труда распространяется и на общий случай. Он оценил важность выражения $\sqrt{npq}$ для теории и предложил для него специальное наименование — модуль.

Использовав метод приближенного интегрирования Ньютона–Котса, Муавр вычислил для случая $p = q = 0.5$ вероятность

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}n - \sqrt{n} < \mu < \frac{1}{2}n + \sqrt{n}\right).$$

Согласно его подсчетам, она оказалась равной 0.95428. Теперь, используя таблицы, несложно проверить его расчеты и убедиться в том, что допущенная им ошибка невелика, только в четвертой значащей цифре (табличное значение равно 0.95450). Точно так же он подсчитал вероятность

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\sqrt{n} < \mu < \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\sqrt{n}\right).$$

Его результат — 0.99874. Табличное значение с таким же числом значащих цифр — 0.99731.

Муавр отметил, что интегральную теорему можно использовать и для оценки: неизвестной вероятности p, т.е. для решения обратной задачи — задачи математической статистики.

12. Контроль качества продукции

В связи с переходом промышленности на массовое изготовление изделий, за последние пятьдесят-шестьдесят лет резко увеличился интерес к вопросам проверки качества изделий, входящих в принимаемую партию. Появилась глубокая по содержанию и значительная по своим практическим применениям теория статистических методов приемочного контроля, основанная на широком использовании теории вероятностей.

Первым шагом, относящимся к этому кругу идей, по-видимому, следует считать одну из задач, рассмотренных Т. Симпсоном в книге «Природа и законы случая» (1740). Вот формулировка этой задачи: имеется данное число вещей различного сорта — n_1 вещей первого, n_2 — второго, ... Наудачу берутся n вещей. Найти вероятность того, что при этом будет взято m_1 вещей первого сорта, m_2 вещей второго и т.д. В настоящее время эта задача не представляет труда для студентов, приступающих к изучению основ теории вероятностей. В ту пору она была предметом серьезного научного трактата.

Спустя сто с небольшим лет, к этой задаче вновь вернулся М. В. Остроградский (1801–1862) в работе «Об одном вопросе, касающемся вероятностей» (1846). В математическом отношении это произведение Остроградского не представляет большого интереса, но глубокое понимание самой практической задачи заслуживает нашего внимания. По-видимому, в этом отношении он имеет приоритет перед всеми исследователями. Во всяком случае Симпсон практических следствий из своих подсчетов не делал, а Остроградский вычислил и необходимые для практических применений таблицы. Приведем подлинные слова Остроградского. «В сосуде имеются белые и черные шары, общее количество которых нам известно, но мы не знаем, сколько из них какого цвета. Мы извлекаем некоторое количество шаров, подсчитав, сколько из них белых и сколько черных, снова кладем в сосуд. Требуется определить вероятность того, что общее число белых не выходит из наперед заданных пределов. Или, лучше сказать, мы ищем зависимость между этой вероятностью и пределами, о которых идет речь.

Чтобы понять важность этого вопроса, представим себя на месте того, кто должен получить большое число предметов, причем должны выполняться некоторые условия, и кто, чтобы проверить эти условия, должен на каждый предмет потратить некоторое время. Перед армейскими поставщиками часто стоят такого рода задачи. Для них шары, содержащиеся в сосуде, представляют получаемые предметы, белые, например — предметы приемлемые, как удовлетворяющие определенным условиям, а черные — неприемлемые.

Таким образом, если бы вопрос, который мы перед собой поставили, был решен, поставщик мог бы воспользоваться этим, чтобы свести приблизительно к двадцатой доле часто очень утомительную механическую работу, как, например, проверку большого количества мешков муки или штук сукна».

Общее число шаров в урне известно, но неизвестен ее состав. Его и следует оценить по выборке, взятой из урны наудачу. Для этой цели Остроградский использует формулы Байеса. Однако его рассуждения базируются на одном предположении, которое вызывает серьезные возражения, поскольку в реальной практике не может встретиться. Именно, он предположил, что если n — общее число шаров в урне, то одинаково вероятны все гипотезы о распределении среди них белых и черных шаров, т.е. что одинаково вероятны все следующие $n+1$ предположения о числе белых шаров: $0, 1, 2, \ldots, n$. В действительности ближе к истине предположение, которое используется теперь в задачах приемочного статистического контроля качества. Предполагается, что имеется причина, в силу которой каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью p. Для хорошо организованного производства p должно быть малым и практически неизменным. Если же технологический процесс налажен плохо, то вероятность p зависит от времени и может достигать большой величины. Но очевидно, что в этом случае статистический контроль не может принести пользы. Если же p мало и постоянно, то вероятность среди n изделий встретить m бракованных задается формулой Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Статистические методы приемочного контроля получили особенно бурное развитие в годы Второй мировой войны, поскольку было необходимо принимать огромные партии однородной продукции, а проверять ее сплошь не было возможностей по ряду причин, из которых укажем лишь на следующие: для некоторых видов продукции Проверка равносильна уничтожению рабочих свойств изделия (фотобумага, взрыватели и т.д.); для сплошной проверки требовалось такое количество рабочей силы и рабочего времени, что ни то, ни другое не могло быть обеспечено в условиях военного времени. Нет возможности здесь перечислить даже основные этапы развития теории статистических методов приемочного контроля. Большое число исследователей работали над различными проблемами этой тематики и внесли в ее развитие крупный вклад. Из отечественных ученых заслуживают быть отмеченными А. Н. Колмогоров, В. И. Романовский, С. Х. Сираждинов, Ю. К. Беляев и др. В период Великой Отечественной войны 1941–1945 г. огромное внимание было уделено разработке методов управления качеством продукции в процессе производства. Это весьма важное направление работы, поскольку оно должно не просто разбраковывать изготовленную продукцию, но своевременно вмешиваться в производственный процесс и не допускать изготовления некачественной продукции. Именно к этому и должно стремиться любое производство. Итак, для управления качеством нужно разработать методы, которые позволяли бы поймать тот момент, когда бракованная продукция еще не производится, но возникает повышенная вероятность начала ее производства.

Идея статистического метода управления качеством в процессе производства состоит в том, чтобы время от времени проверять небольшие партии продукции (5–10 штук), только что сошедших со станка. По результатам таких проверок судят о качестве наладки. Эти проверки осуществляются не слишком часто, чтобы не лихорадить переналадками оборудования производственный процесс, и не слишком редко, чтобы не пропустить момент его разладки. Далее результаты наблюдений наносятся на так называемые контрольные карты, которые позволяют судить, что следует предпринимать после каждой серии таких наблюдений - прекращать работу для переналадки оборудования или же продолжить производственный процесс.

Если на ряде производств первичное произведение замеров параметров, определяющих качество продукции, допустимо и теперь оценивать вручную, то на других производствах оно уже требует заметного усовершенствования и перехода к автоматизации замеров и обработки результатов измерений. Дело в том, что во многих случаях приходится иметь дело с огромной скоростью технологических операций. Скорость настолько велика, что пока оператор производит измерение параметров отобранных изделий, автомат успевает изготовить сотни других изделий, а прокатный стан -прокатать сотни метров продукции. В результате при ручном измерении оказывается, что запаздывает информация о наладке процесса, а вместе с ней и управляющее воздействие. Вот почему теперь предложены автоматы, которые замеряют необходимые параметры и сами выполняют математические операции, необходимые для управления качеством.

Методы приемочного контроля и статистические методы управления качеством оказались весьма эффективным средством упорядочения производства и экономии станочного времени, материалов, рабочей силы. Экономический эффект от использования этих методов исчисляется миллиардами рублей (долларов, марок и т.д.). По-настоящему история статистических методов контроля и управления еще недостаточно изучена и нуждается в энтузиастах.

Широта применения теории вероятностей в начале двадцатого века настойчиво требовала глубокого осмысления самих основ этой науки. Наивные представления о случайном событии и его вероятности уже перестали удовлетворять запросы науки. Вот почему ряд ученых — Э. Борель, С. Н. Бернштейн, Р. Мизес и другие предприняли серьезные усилия в пересмотре основ теории вероятностей. В тексте книги мы познакомились с широко распространенным подходом к этой проблеме, предложенным А. Н. Колмогоровым в статье 1927 г. и нашедшем завершение в его монографии «Основные понятия теории вероятностей» (1933).

Глава 3. К истории формирования понятия случайной величины

13. Развитие теории ошибок наблюдений

Мы уже упоминали в первой главе о том, что Галилео Галилей заложил основы теории ошибок измерений и ввел в рассмотрение ряд важных понятий, которые сохранили значение и в наши дни.

Позднее под влиянием в первую очередь астрономических и геодезических наблюдений интерес к ошибкам измерений заметно возрос. Знаменитый астроном-наблюдатель Тихо Браге (1546–1601) обратил внимание на то, что каждое отдельное измерение несет в себе возможную ошибку и точность измерений значительно повышается, если произвести несколько измерений и взять из них среднее арифметическое. Впрочем рекомендация пользоваться средним арифметическим для уточнения размеров была дана задолго до Тихо Браге. Так, согласно литературным данным, в одном древнеиндийском математическом трактате рекомендовалось при подсчете объема земляных работ делать измерения в нескольких местах и затем оперировать со средними арифметическими (см. Л. Е. Майстров «Развитие понятия вероятности», с. 74).

Казалось бы от И. Кеплера (1571–1630), сделавшего так много для формирования законов движения планет, следовало ожидать повышенного внимания к методам обработки результатов наблюдений. Но эти вопросы фактически остались в стороне от его интересов и он заметил только то, что хороший наблюдатель производит измерения с ошибками ограниченной величины. В этом плане интересны его слова, относящиеся к Тихо Браге «благость божья дала нам в лице Тихо столь точного наблюдателя, что ошибка в восемь минут невозможна, поблагодарим бога и воспользуемся этой выгодой. Эти восемь минут, которыми пренебречь нельзя, дадут средство преобразовать всю астрономию».

Первые попытки построить математическую теорию ошибок измерений принадлежат Р. Котсу (1682–1716), Т. Симпсону (1710–1761) и Д. Бернулли (1700–1782).

Предположения, которые были высказаны указанными авторами о закономерностях распределения ошибок измерения, были весьма различны. Котс считал, что ошибки равномерно распределены в некотором отрезке $[-a, a]$. Симпсон исходил из предположения, что малые ошибки допускаются чаще, чем большие и также ограничены по абсолютной величине некоторым числом a. Симпсон считал, что ошибки подчинены треугольному распределению, плотность которого равна 0 в отрезках от $-\infty$ до $-a$ и от a до $+\infty$; в отрезке $[-a, 0]$ ее уравнение будет $x - 2a^2y = -a$ и, наконец, в отрезке $[0, a]$ имеет уравнение $x + 2a^2y = a$. Следует заметить, что как Котс, так и Симпсон не рассматривали в сущности плотности распределения, поскольку они считали, что ошибки укладываются в арифметическую прогрессию с очень малой разностью и неопределенным числом возможных значений.

Симпсон для избранного им распределения доказал, что среднее арифметическое дает лучшую точность, чем каждое отдельное измерение. Этому результату он придавал большое значение и опубликовал его в работе «О преимуществе выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии» (Philos. Trans., 1755).

Значительный интерес представляет работа Д. Бернулли (1700–1782) «Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собой наблюдениям и устанавливаемое отсюда наиболее правдоподобное заключение», опубликованная в 1778 г. в изданиях Петербургской Академии наук. Эта работа интересна тем, что в ней впервые был высказан и использован для оценки неизвестного параметра принцип максимального правдоподобия. Д. Бернулли начал свой мемуар с сомнений о целесообразности применения всеобще принятого принципа среднего арифметического. В качестве плотности распределения он принял функцию, определенную равенством $y = \sqrt{R^2 - (x - \bar{x})^2}$, в котором параметр R известен, а $\bar{x}$ должно быть определено по результатам наблюдений. Заслуживает внимания то, что Д. Бернулли не обратил внимания на следующее обстоятельство: интеграл от принятой им плотности распределения равен $\frac{\pi}{2}R^2$ и, следовательно, только при одном значении R может быть плотностью распределения вероятностей.

К этой работе Д. Бернулли был написан комментарий Л. Эйлером (1707–1783), в котором, во-первых, критиковался метод максимального правдоподобия (конечно, тогда этого термина еще не было и в помине) и, во-вторых, предлагалось отбрасывать наблюдения, далекие от истинного значения параметра, поскольку они мало вероятны.

Следует отметить работы И. Ламберта (1728–1777), который в статьях 1760 и 1765 г. изложил цели теории ошибок измерений (кстати, ему принадлежит и сам этот термин), свойства ошибок, оценку точности наблюдений и правила подбора кривых по наблюденным точкам, содержащим случайные ошибки. Позднее появилась работа Ж. Лагранжа (1736–1813), посвященная выяснению роли среднего арифметического при оценке истинного значения измеряемой величины.

Для П. Лапласа (1749–1827) теория вероятностей была не столько математической, сколько естественно-научной дисциплиной. В связи с его занятиями астрономией, он неизбежно должен был прийти к вопросам теории ошибок наблюдений и вместе с тем заинтересоваться теорией вероятностей. Лаплас получил ряд важных результатов в теории ошибок наблюдений, которые вошли в практику обработки данных наблюдений. Мы не станем здесь вдаваться в подробности его исследований, поскольку для нас описание теории ошибок измерений не является самоцелью. Нас интересует ее связи с развитием теории вероятностей. В этом плане особый интерес представляют две идеи П. Лапласа. Первая из них вызвала к жизни значительное увеличение интереса к предельным теоремам для сумм независимых случайных величин. Именно, согласно Лапласу, наблюденные ошибки измерений являются результатом суммирования очень большого числа элементарных ошибок. Если эти ошибки равномерно малы, то Лаплас предположил, что распределение их суммы должно быть близко к нормальному.

Вторая идея касается оценки измеряемой величины по результатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ измерений. В качестве оценки неизвестного значения a измеряемой величины Лаплас предложил брать то значение $\hat{a} = a(x_1, \ldots, x_n)$, при котором обращается в минимум сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - a|$. Оказывается, что $\hat{a}$ при этом равняется эмпирической медиане, т.е. тому значению x, слева и справа от которого расположено одинаковое число наблюденных значений. Этот прием не получил в ту пору распространения, поскольку вскоре был предложен другой метод, приводящий к более простым результатам. Разработка этого нового метода связана с именами Гаусса (1777–1855), Лежандра (1752–1833) и американского математика Р. Эдрейна (1775–1843). Их работы составили в теории ошибок наблюдений настоящую эпоху. Гауссом и Лежандром был предложен и разработан метод наименьших квадратов. Гаусс предложил его второй книге большого трактата «Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг солнца по коническим сечениям» (1809). Лежандр же изложил свои идеи в работе «Новые методы для определения орбит комет» (1806), к которой было сделано специальное дополнение «О методе наименьших квадратов». Сам Гаусс неоднократно писал, что он пользовался этим методом, начиная с 1795 г. Гауссом и Эдрейном было показано, что при некоторых весьма широких условиях плотность ошибок измерений имеет вид $\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\Delta^2)$.

Необходимо сказать, что влияние Гаусса, Лежандра и Эдрейна на развитие науки оказалось весьма различным. Статья Эдрейна, опубликованная в мало распространенном американском журнале, прошла практически незамеченой. Работы же Гаусса и Лежандра почти мгновенно стали известны научному миру. Ученые восприняли предложенный ими метод и начали систематически использовать его в своей практической работе.

Большой вклад в дальнейшее развитие этой теории внес С. Пуассон (1781–1840). В частности, Пуассон задался вопросом: всегда ли среднее арифметическое дает лучший результат по сравнению с отдельным наблюдением? Ответ оказался отрицательным. Именно: ему удалось указать распределение, для которого этого правило ошибочно. Плотность этого распределения равна $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < \infty$.

Пуассон обнаружил, что сумма двух независимых случайных величин с только что указанной плотностью распределения имеет с точностью до масштаба такое же распределение. Далее он обнаружил, что среднее арифметическое из независимых наблюдений над такой случайной величиной имеет в точности такое же распределение. Через двадцать лет (в 1853 г.) О. Коши (1789–1857) повторил эти результаты, после чего указанное распределение получило наименование распределения Коши. Пуассон же, первооткрыватель этих результатов, был забыт.

Позднее теория ошибок измерений привлекала внимание практически всех видных специалистов в области теории вероятностей. П. Л. Чебышев и А. А. Марков (1856–1922) и многие другие уделяли внимание как методу наименьших квадратов, так и другим вопросам теории ошибок. Теория ошибок оказала серьезное влияние на постановки задач и разработку методов математической статистики. Теперь теория ошибок включается в качестве естественной части в математическую статистику.

14. Формирование понятия случайной величины

Мы неоднократно говорили о том, что формирование научных понятий проходит длительный и сложный путь, прежде чем войти во всеобщее употребление. Как правило, необходимое понятие еще не введено в научный обиход, а фактически им уже пользуются как при решении практических задач, так и при выводе общетеоретических закономерностей. Этот путь характерен и для случайной величины — основного понятия теории вероятностей и современного естествознания. Введение этого понятия связано с именами многих ученых, которые хотя и не использовали этого термина, но фактически исследовали отдельные его свойства.

Действительно, мы уже знаем, что, начиная с Котса, Симпсона и Д. Бернулли, в XVIII веке начала развиваться теория ошибок наблюдений, возникшая в первую очередь под влиянием астрономии. Ошибка измерения в зависимости от случая может принимать различные значения. Эта позиция была высказана Галилеем задолго до работ только что упомянутых ученых. Он же ввел в обиход термин «случайная» и «систематическая ошибка» измерения. Вторая тесно связана с качеством изготовления прибора, мастерством наблюдателя, условиями наблюдений. Первая же зависит от многочисленных причин, влияние которых невозможно учесть и которые изменяются от наблюдения к наблюдению, от измерения к измерению. Теперь мы ясно видим, что ошибка измерения представляет собой случайную величину с каким-то неизвестным нам распределением вероятностей.

Но с понятием случайной величины встречались уже Я. Бернулли, Н. Бернулли, Монмор, Муавр. В самом деле, Я. Бернулли рассмотрел число появлений интересующего его события в n независимых испытаниях. Для нас теперь это случайная величина, способная принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями, задаваемыми формулами Бернулли. Н. Бернулли, Монмор и Муавр, исследуя задачу о разорении игрока, также имели дело со случайной величиной — числом партий, которые необходимы для разорения. Муавр пошел еще дальше — он ввел в рассмотрение нормальное распределение вероятностей. Однако никто из перечисленных ученых не заметил, что в науку властно постучалась необходимость введения нового понятия — случайной величины. Первый из них оставался на уровне схемы последовательности случайных событий, остальные же ограничились той частной задачей, которая перед ними стояла. Для Муавра нормальное распределение было лишь аппроксимирующей функцией, дающей хорошее приближение к точному значению искомых вероятностей.

Мы говорили, что первоначально считалось, что возможные значения ошибок измерений составляют арифметическую прогрессию с неопределенной, но очень малой разностью. Затем постепенно от этого предположения отказались и стали представлять себе, что возможные значения, принимаемые ошибками наблюдений, заполняют целый отрезок, вероятности возможных значений определялись посредством плотности распределения. И если Д. Бернулли в отношении плотности распределения вероятностей допускал еще определенные вольности, то у Лапласа, Гаусса, Лежандра с плотностью распределения было уже все в порядке. Это была неотрицательная функция, интеграл от которой по всей прямой равен единице, а вероятность попадания в тот или иной отрезок равнялся интегралу от плотности, взятому по этому отрезку. Лапласу уже была известна формула для разыскания плотности распределения суммы по плотностям распределения слагаемых. В знаменитой книге «Аналитическая теория вероятностей» Лаплас умело оперирует с плотностями распределения, ставит и решает ряд интересных задач, но нигде не вводит понятия случайной величины. Он либо использует язык теории ошибок измерений, либо язык математического анализа и не ощущает потребности в новом понятии теории вероятностей.

Первая половина XIX века принесла новые задачи, которые нуждаются в понятии случайной величины. Прежде всего — это исследования бельгийского естествоиспытателя А. Кетле (1796–1874), заметившего, что размеры органов животных определенного возраста подчиняются нормальному распределению. Изучение уклонений снаряда от цели явилось предметом исследования многих ученых; они также привели к выводу о нормальном распределении этой величины. С середины XIX века начались замечательные работы Д. К. Максвелла (1831–1879) и ряда других ученых по математической теории молекулярной физики газов. И здесь снова нормальное распределение завоевало почетное место.

Заслуживает внимания постановка еще одной задачи Гауссом. Он сформулировал ее 25 октября 1800 г. (именно за этот день в его дневнеке под №113 сделана соответствующая запись). Через двенадцать лет он сформулировал ее в письме к Лапласу от 30 января 1812 г. Эта задача относится к интересному, начавшему развиваться лишь в XX веке разделу математики — метрической теории чисел; одновременно она имеет самое непосредственное отношение к изучению равномерно распределенных случайных величин. В постановке задачи предоставим слово самому Гауссу. В упомянутом письме к Лапласу он писал: «... я вспоминаю любопытную задачу, которой я занимался уже 12 лет назад, но для которой я не нашел тогда удовлетворяющего меня решения.

Быть может, Вы соблаговолите заняться ею несколько минут: в этом случае, я убежден, Вы найдете более полное решение. Вот она. Пусть M — неизвестная величина, заключенная между пределами 0 и 1, для которой все значения или одинаково вероятны или же более или менее следуют данному закону: предположено, что она разложена в непрерывную дробь $M = 1/a^{(1)} + 1/a^{(2)} + \ldots$. Чему равна вероятность того, что, отбросив в разложении конечное число членов до $a^{(n)}$, следующая дробь $1/a^{(a)}+1/a^{(n+1)}+\ldots$ будет заключена в пределах от 0 до x? Я обозначаю ее через $P(n,x)$ и предполагаю, что для M все значения одинаково вероятны: $P(0,x)=x$».

Гипотеза Гаусса состояла в том, что

$$\lim_{n\to\infty} P(n,x) = \ln(1+x)/\ln 2.$$

Он писал далее, что при решении этой задачи «усилия, которые я делал,... оказались бесплодными». Решение этой задачи появилось лишь в 1928 г., его дал Р. О. Кузьмин (1891–1949). Через год П. Леви (1886–1971) дал для этой задачи чисто вероятностное решение, получив для быстроты сходимости к пределу лучшую, чем у Кузьмина, оценку. Позднее было доказано, что результат сохраняется для любой случайной величины M, для которой $P(0,x)$ имеет ограниченную производную. Это замечание делает более ясными неопределенные слова Гаусса о том, что для величины M «все значения или одинаково вероятны или же более или менее следуют данному закону».

Заслуживает упоминания то обстоятельство, что функция $P(0,x)$, также как и $P(n,x)$, представляет собой функцию распределения.

Мы видим, что многочисленные исследования многих крупных математиков подготовили почву для введения понятия случайной величины. По-видимому, первый шаг был сделан Пуассоном в мемуаре 1832 г. «О вероятности средних результатов наблюдений». Этот факт мне сообщил О. Б. Шейнин. Термина случайная величина у Пуассона еще нет, но он пишет о «некоторой вещи», которая способна принять значения $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$. Он рассмотрел также непрерывные случайные величины и их плотности распределения.

Итак, Пуассоном был сделан важный шаг в науке — он ввел в научный обиход новое понятие — случайную величину. Его первоначальный термин «вещь» не привился и скоро перестал употребляться. Чебышев в своих мемуарах по теории вероятностей уже использует термин «величина» и автоматически считает все случайные величины, с которыми имеет дело, независимыми. В работах же Ляпунова по теории вероятностей систематически используется термин «случайная величина» и всюду, где это необходимо, оговаривается, что автор имеет дело с независимыми случайными величинами.

Отметим еще одно обстоятельство. В самом начале §4 работы «Об одном предложении теории вероятностей» Ляпунов определил функцию распределения точно также, как мы делаем это теперь. Он привел в этой работе широко используемую формулу

$$\mathbb{P}(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a).$$

Полезно заметить, что в трактатах по теории вероятностей А. Пуанкаре (1854–1912) «Исчисление вероятностей», Э. Бертрана «Исчисление вероятностей», Чубера «Теория вероятностей и математическая статистика» понятие функции распределения не вводилось (книги, изданные до 1912 г.)

Определение случайной величины, данное Пуассоном, теперь уже не может считаться математическим. Это скорее описание реального объекта изучения, обращение к интуиции, полученной в результате житейского и научного опыта. Это описание широко используется и в наши дни на начальных ступенях педагогического процесса, связанного с изложением основ теории вероятностей. Даже несложный логический анализ этого определения показывает, что из него совсем не следует правила для действий над случайными величинами — сложения, вычитания, умножения и пр. Для того, чтобы случайная величина приобрела статус полноценного математического понятия, ей необходимо дать строго формализованное определение. Это было сделано в конце двадцатых годов А. Н. Колмогоровым в небольшой статье, посвященной аксиоматике теории вероятностей, а затем в подробностях изложено в его знаменитой книге «Основные понятия теории вероятностей». Подход Колмогорова стал теперь общепринятым, поскольку он полноценно включил теорию вероятностей в общий стиль современного изложения, принятый в математике.

15. Закон больших чисел

Знаменитая теорема Я. Бернулли о сближении при увеличении числа наблюдений вероятности события A с частотой его появления получила первое обобщение лишь в 1837 г. в работе С. Пуассона «Исследования о вероятностях в решении судебных дел уголовных и гражданских». Именно в этом мемуаре он ввел сам термин «закон больших чисел».

Пуассон рассмотрел последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A, но с вероятностью p_k, зависящей от номера испытания. Если через μ_n обозначить число появлений события A в n последовательных испытаниях, то при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение: при $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

По поводу этой теоремы Пуассона в небольшой заметке 1843 г. Чебышев писал: «... как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, он не доставляет предела погрешности, которую пускает этот приближенный анализ, и вследствие такой неизвестности величины погрешности доказательство не имеет надлежащей строгости» (Чебышев П. Л., Собр. соч. – АН СССР, 1947 – Т. II – с. 14). Оценку числа n, для которого при заданных ε и η имеет место неравенство

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \eta,$$

Чебышев указал в этой заметке.

Как ни интересны эти результаты, они не внесли в теорию вероятностей существенного прогресса, поскольку в идейном плане они не выходили за пределы концепции Я. Бернулли. Существенный сдвиг в этом направлении связан с работой П. Л. Чебышева «О средних величинах» (1867), опубликованной одновременно на русском и французском языках. В этой работе он перешел от рассмотрения случайных событий к случайным величинам и тем самым перенес центр тяжести интересов теории вероятностей к изучению случайных величин. Нужно заметить, что Чебышев не упоминал, что он интересуется только независимыми случайными величинами, а, согласно традициям того времени, считал, что других величин не рассматривают. Теорема Чебышева теперь излагается во всех учебниках теории вероятностей. Она неоднократно позднее служила источником обобщений.

В 1909 г. Э. Борель для $p = 0.5$ показал, что в случае схемы Бернулли имеет более сильное предложение, чем закон больших чисел. Именно, он доказал, а в 1917 г. это предложение на произвольное p распространил итальянский математик Кантелли, что

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = p\right) = 1.$$

Это предложение получило наименование усиленного закона больших чисел. Широкое обобщение усиленного закона больших чисел было дано А. Н. Колмогоровым в работе 1930 г., а также в 1934 г. в его монографии «Основные понятия теории вероятностей» (1932 г.).

Необходимые и достаточные условия для усиленного закона больших чисел были найдены в ряде работ Ю. В. Прохорова 1958–1959 г. (см. «Об усиленном законе больших чисел», Изв. АН СССР, сер. матем. 14, 6. 1958; «Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел», Теория вероятностей и ее применения, т. IV, вып. 2, 215–220, 1959).

В 1935 г. А. Я. Хинчин ввел новое понятие относительной устойчивости сумм, которое должно было дать максимально общую форму закона больших чисел для положительных случайных величин. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Про суммы $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ говорят, что они *относительно устойчивы*, если можно найти такие положительные константы $A_n > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{A_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

В случае одинаково распределенных величин ξ_n Хинчину удалось найти необходимое и достаточное условие для относительной устойчивости сумм S_n. Ученик А. Я. Хинчина А. А. Бобров распространил этот результат на случай разнораспределенных слагаемых.

Закон больших чисел рассматривался вплоть до 1939 г. как особая предельная теорема и рассматривался обособленно от остальных предельных теорем для сумм независимых случайных величин. В работе Б. В. Гнеденко, о которой речь пойдет в §17, закон больших чисел был включен в общую теорию предельных теорем, когда предельное распределение имеет единственную точку роста в нуле. Точно также теоремы об относительной устойчивости сумм являются предельными для того случая, когда предельное распределение имеет единственную точку роста при $x = 1$.

Существенное расширение проблематики, связанной с законом больших чисел, было осуществлено В. И. Гливенко в работах, относящихся к 1929–1933 гг., когда он начал рассматривать предельные теоремы для случайных величин со значениями в функциональных пространствах. Пожалуй, вершиной его результатов является замечательная теорема о сходимости эмпирических распределений к истинной функции распределения наблюдаемой случайной величины. Теорема Гливенко, сразу же после ее опубликования, была названа Кантелли основной теоремой математической статистики.

Теорема Гливенко неоднократно обобщалась. В этом направлении работало большое число исследователей, среди которых отметим лишь французских ученых Р. Форте и Э. Мурье.

16. Центральная предельная теорема

Теорема Муавра о сходимости распределений центрированного и нормированного числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A может наступить с одной и той же вероятностью p, к нормальному распределению долгое время служила образцом для последующих обобщений. Пожалуй, первое обобщение принадлежит Лапласу и уже формулируется как предельная теорема для сумм независимых случайных величин ξ_k, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[-h, h]$. Это было сделано в работе “Mémoire sur les approximation des formules qui sont fonctions de trés grands nombres et sur leur application aux probabilités” (1809). Лаплас в нем рассматривал дискретные случайные величины с увеличивающимся числом возможных значений. Этим самым давалась аппроксимация непрерывного распределения дискретным. Лаплас доказал, что для каждого s имеет место такой результат:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(-s \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le s\right) = \frac{2\sqrt{3}}{h\sqrt{2\pi}} \int_0^s e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx,$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \sigma^2 = h^2/3.$$

Заслуживает внимания тот факт, что Лаплас при доказательстве этого результата использовал метод характеристических функций, который, естественно, так тогда еще не назывался.

Существенное продвижение исследований по предельной теореме связано с именем Пуассона. В знаменитом мемуаре 1837 г. “Recherches sur la probabilité des jujements…” он рассмотрел схему последовательности независимых испытаний с разными вероятностями появления события A в каждом из испытаний. Пусть вероятность наступления A при k-м испытании равна p_k. Пуассон доказал для этого случая локальную теорему: Если ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(1-p_k)$ расходится, то вероятность того, что в n испытаниях событие появится m раз равна

$$\mathbb{P}(m = np - \theta c\sqrt{n}) = \frac{1}{c\sqrt{\pi n}} e^{-\theta^2} - \frac{h\theta}{2c^4 n\sqrt{\pi}}(3 + 2\theta^2)e^{-\theta^2},$$

где

$$p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k, \quad c^2 = 2\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k), \quad h = \frac{4}{3n}\sum_{k=1}^{n}(2p_k - 1)p_k(1-p_k).$$

В той же книге Пуассон дал ошибочное обобщение этой теоремы на суммы произвольных независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, при условии их центрирования суммами математических ожиданий и нормирования корнем квадратным из суммы дисперсий слагаемых.

Справедливости ради следует сказать, что в частном случае одинаковой распределенное слагаемых эта теорема верна, однако строгое ее доказательство пришло значительно позднее и связано с именами Линдеберга, Феллера и Хинчина.

Заметим, что как работы Лапласа, так и работы Пуассона и всех последующих исследователей, занимавшихся центральной предельной теоремой, были непосредственно связаны с теорией ошибок измерений. И во всех работах говорилось не о сложении абстрактных случайных величин, а о сложении ошибок. По-видимому, впервые от этой традиции отошел Чебышев.

Интерес к нормальному распределению в начале XIX века возрос в связи с появлением знаменитых исследований Лежандра и Гаусса по формулировке и обоснованию метода наименьших квадратов. Ф. В. Бессель еще в 1818 г. в работе "Fundamenta Astronoraiae pro anno 1755 deducta ex observationibus viri incomportabilis James Bradley in specula Grenovicensi pro annis 1750–1762 institutis" заметил, что наблюдения гринвичского астронома Брэдли прекрасно укладываются в схему нормального распределения. Объяснение, которое он предложил этому факту, совпадает с идеей, которую перед этим в течение тридцати лет вынашивал Лаплас: результирующая большого числа случайных воздействий, каждое из которых оказывается малым по сравнению с суммой остальных, подчиняется общему закону и этот общий закон должен быть нормальным. Эту мысль в совершенно отчетливой форме повторил Бессель также в работе 1838 г. (Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachmngsfehler// Astr. Nachi. – 1838. – p. 231). Справедливости ради следует сказать, что Бессель обратил внимание на то, что это правило не является всеобщим и могут у ошибок наблюдений встречаться другие, отличные от нормального распределения. Так, если при измерении углов один источник ошибок превалирует над всеми остальными, то плотность распределения результирующей ошибки может быть $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$.

Та же концепция обоснования нормального закона, как закона распределения ошибок, дважды встречается в известном учебнике А. Пуанкаре

“Calcul des probabilités” (Paris, 1912). Первый раз в конце §140 он писал, что «ошибка, связанная с инструментом, есть результирующая очень большого числа независимых одна от другой ошибок, таких, что каждая из них приносит лишь слабую долю в результат; результирующая ошибка следует закону Гаусса». Затем в самом начале §144 был подведен следующий итог:

«Резюмируя, предположим, что окончательная ошибка будет результирующей очень большого числа частых погрешностей, независимых друг от друга, и что нет ошибок систематических; предположим также, что эти ошибки будут иметь приблизительно один и тот же порядок величины, внося каждая в общий результат лишь незначительную долю. В этом случае результирующая ошибка следует приблизительно закону Гаусса.

Такой, мне кажется, лучший довод, который можно дать в пользу закона Гаусса».

Следует сказать, что все эти идеи носят лишь качественный характер и нуждаются в математическом оформлении и последующем доказательстве строгих теорем.

Второй толчок, который вызвал дополнительный интерес к предельным теоремам теории вероятностей, была статистическая физика, начала которой были построены в середине XIX века. Первый общий результат в этом направлении был сформулирован в 1887 г. в работе «О двух теоремах относительно вероятностей» П. Л. Чебышева. Сформулированная Чебышевым теорема звучит следующим образом:

Если математические ожидания величин $u_1, u_2, \ldots$ равны 0, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо предела, вероятность того, что сумма $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь пределами t и t' с возрастанием n до ∞ имеет пределом интеграл $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^{t'} e^{-z^2}\,dz$.

Для доказательства этого предложения Чебышевым был разработан весьма сильный метод, получивший наименование метода моментов и являющийся одним из крупнейших достижений науки того времени. Однако в формулировке теоремы и в ее доказательстве был допущен ряд промахов, которые сразу же взялся исправить ученик П. Л. Чебышева А. А. Марков. Критика мемуара Чебышева содержится в письмах Маркова к профессору Казанского университета А. В. Васильеву, который счел необходимым опубликовать ее в 1898 г. («Закон больших чисел и метод наименьших квадратов»). В этих письмах Марковым была совершенно строго доказана несколько исправленная теорема Чебышева:

Если S_n — последовательность сумм $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, и $\Phi_n(x)$ — их функции распределения, то из предположения, что при любом целом положительном k имеют место соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\Phi_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2}\, dx$$

вытекает, что при любых a и b имеет место равенство

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n}{\operatorname{Var} S_n} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,dx.$$

Метод моментов, которым работал Чебышев, торжествовал победу. Была доказана сильная и, казалось бы, окончательная теорема. Некоторую неудовлетворенность приносило только то, что для простого результата требовалось выполнение счетного множества условий. Неожиданно в нескольких публикациях А. М. Ляпунова на протяжении 1900 и 1901 гг. было обнаружено, что окончательный результат имеет место при выполнении только одного очень простого условия, которое, вдобавок, выясняло смысл тех предположений, которые должны приводить к сходимости распределений нормированных и центрированных сумм к нормальному распределению.

Сначала Ляпунов показал, что если величины имеют конечные третьи моменты $c_k = \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^3$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Var} \xi_k$ и отношение C_n/B_n^3 при $n\top\infty$ стремится к нулю, то имеет место сходимость функций распределения сумм S_n к нормальному распределению.

На следующий год Ляпунов же обнаружил, что для окончательного результата не обязательно требовать существования третьих моментов слагаемых. Достаточно, если существуют моменты некоторого порядка $2+\delta$, где $\delta > 0$. Ляпунов показал, что для сходимости нормированных корнем из дисперсии сумм независимых слагаемых к нормальному распределению достаточно выполнения следующего условия: пусть $c_k = \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, отношение $C_n/B_n^{2+\delta}$ должно с ростом n стремиться к 0.

Ляпунов сделал несколько большее: он оценил скорость сходимости к предельному распределению функций распределения сумм. Порядок этой оценки оказался равным $n^{-1/2}\ln n$.

Точно также в упомянутой статье Чебышева, помимо предложения о сходимости к нормальному распределению, было дано асимптотическое разложение по степеням $\sqrt{n^{-1}}$.

Общность результатов Ляпунова произвела огромное впечатление на современников. По-видимому, именно в ту пору и появился термин «центральная предельная теорема» для обозначения условий сходимости функций распределения нормированных и центрированных математическими ожиданиями сумм к нормальному распределению. Марков подошел к результатам Ляпунова с далеко иных позиций. В связи с этим полезно привести подлинные слова Маркова: «Общность выводов в последней работе Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методом математических ожиданий. Достигнуть столь общих выводов методом математических ожиданий казалось даже невозможным, ибо он основан на рассмотрении таких математических ожиданий в неограниченном числе, существование которых в случаях Ляпунова не предполагается.

Для восстановления поколебленного таким образом значения метода математических ожиданий необходимо было выяснить, что вышеупомянутыми работами он не исчерпан до конца». Марков в 1908 г. выступил с замечательной идеей — урезания случайных величин. Этот прием дал возможность доказать предельную теорему в условиях Ляпунова методом моментов или, как говорил Марков, методом математических ожиданий. Идея урезания прочно вошла в жизнь теории вероятностей.

Дальнейшая судьба центральной предельной теоремы такова: в 1922 г. финскому математику Линдебергу удалось пойти дальше Ляпунова и отказаться от предположения существования даже каких-либо моментов, кроме вторых. А именно, он доказал, что если при любом $\tau > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2\, dF_k(x) = 0,$$

то функция распределения сумм центрированных математическими ожиданиями и нормированных корнем квадратным из суммы дисперсий слагаемых сходятся к стандартному нормальному распределению.

Через 12 лет В. Феллер показал, что условие Линдеберга является и необходимым в предположении, что слагаемые равномерно малы.

Ясно, что из теоремы Линдеберга в качестве следствия получается давно ожидавшийся результат: если случайные величины независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, отличную от 0, то к суммам таких величин применима центральная предельная теорема теории вероятностей.

В работе 1927 г. С. Н. Бернштейн рассмотрел несколько более общую задачу: имеется последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ относительно которых не предполагается ни существования дисперсий, ни существования математических ожиданий. Спрашивается: когда можно подыскать такие постоянные $B_n > 0$ и A_n, что функции распределения сумм сходятся к нормальному распределению?

Достаточные условия для этой задачи были найдены Бернштейном в той же работе 1927 г.; через восемь лет Феллер показал, что эти условия не только достаточны, но и необходимы в предположении, что слагаемые равномерно малы в смысле теории вероятностей.

В том же 1935 г. независимо один от другого А. Я. Хинчин и П. Леви в постановке С. Н. Бернштейна нашли необходимое и достаточное условие сходимости к нормальному распределению функций распределения сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Еще в 1926 г. в специальном курсе по предельным теоремам А. Я. Хинчин задал следующий вопрос: имеется ли связь между законом больших чисел и центральной предельной теоремой? Ответ был найден Д. А. Райковым и А. А. Бобровым, которые доказали следующую теорему: чтобы функции распределения сумм

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

при надлежащем выборе действительных постоянных $B_n > 0$ и A_n сходились к нормальному распределению, необходимо и достаточно чтобы суммы

$$(\xi_1 - a_1)^2 + (\xi_2 - a_2)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2$$

были относительно устойчивы, $a_n = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\,dF_n(x)$, $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Исследование вопросов сходимости функций распределения к нормальному закону не окончились и в наши дни, но теперь исследуются другие вопросы: быстрота сходимости к предельному распределению, сходимость случайного числа случайных слагаемых, суммирование неравномерно малых случайных величин.

17. Общие предельные распределения для сумм

Естественный вопрос о том, какие распределения вообще возможны в качестве предельных для сумм независимых случайных величин при условии, что они примерно одинаковы по величине, возник только в двадцатые-тридцатые годы XX века. Раньше во всей общности этот вопрос не возникал, хотя частные результаты по этому поводу и появлялись. В этом отношении заслуживает упоминания мемуар С. Пуассона «О вероятности средних результатов наблюдений», в котором, пользуясь аппаратом характеристических функций, он вывел распределение суммы большого числа независимых ошибок наблюдений и рассмотрел распределение, которое получило впоследствии название распределения Коши. Для этого распределения Пуассон нашел плотность

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

и доказал, что оно обладает двумя следующими свойствами:

1) среднее арифметическое ошибок наблюдений, распределенных по закону Коши, имеет то же распределение, что и каждое слагаемое;

2) для этого распределения точность не повышается от того, что берется среднее арифметическое результатов нескольких наблюдений.

Этот мемуар был опубликован в 1832 г.

На тридцать лет позднее, в 1853 г. в мемуаре «О средних результатах наблюдений той же природы и о результатах наиболее вероятных» О. Коши получил характеристическую функцию для всех тех распределений, для которых функция распределения суммы только на множитель при аргументе (коэффициент растяжения) отличается от распределения отдельных слагаемых. Коши нашел, что все такие функции имеют вид $f(t) = \exp(-t^{\mu})$, где μ — положительное число. Позднее выяснилось, что $f(t)$ тогда и только тогда является характеристической функцией, когда $0 < \mu \leq 2$.

П. Леви в книге "Calcul des probabilité" (1925) в главе VI «Экспоненциальные распределения» построил первую теорию устойчивых распределений. Эта теория, естественно продолжала исследования О. Коши, уйдя от них далеко вперед. Пусть $F(x)$ — функция распределения и $f(t)$ — ее характеристическая функция. Распределение $F(x)$ называется *устойчивым*, если при любых положительных постоянных a_1 и a_2 найдется такое положительное постоянное a, что выполняется равенство

$$f(a_1 t) \cdot f(a_2 t) = f(a_t).$$

В терминах случайных величин рассмотренный класс распределений обладает следующим характеристическим свойством: если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей, a_1 и a_2 — произвольные положительные числа, то для каждой пары a_1 и a_2 найдется такое положительное число a, что сумма $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ имеет такое же распределение как $a\xi_1$.

П. Леви указал, что для устойчивых распределений функция $f(t)$ имеет вид $\exp[-c(1+i\beta\frac{t}{|t|}|t|^{\alpha})]$, где $0 < \alpha \leq 2$. П. Леви также ввел понятие *области притяжения* устойчивого закона: множество всех тех распределений $F(x)$, для которых функции распределения независимых и распределенных по этому закону случайных величин при соответствующем нормировании сходятся к данному устойчивому распределению.

В 1935 г. А. Я. Хинчин пополнил понятие устойчивого распределения, введенного П. Леви, а именно: он предложил называть устойчивыми те распределения, для которых линейная форма $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ при произвольных положительных постоянных a_1 и a_2 имеет такое же распределение, как $a\xi_1 + b$, где a — некоторое положительное, а b — вещественное постоянное. Класс устойчивых в смысле Хинчина распределений оказался несколько шире класса П. Леви.

В 1939 г. независимо друг от друга Б. В. Гнеденко и В. Деблин нашли области притяжения устойчивых распределений. Условия принадлежности области притяжения устойчивого закона очень просты и сводятся к поведению «хвостов» распределений — поведению исходного распределения при больших значениях аргумента.

Основной результат, принадлежащий П. Леви и А. Я. Хинчину, можно сформулировать так: если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин, то суммы

$$S_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} \tag{1}$$

при надлежащем выборе постоянных $B_n > 0$ и вещественных A_n могут сходиться только к устойчивым законам распределения. Каждый устойчивый закон является предельным для функций распределения сумм (1).

В заметке 1936 г. П. Леви и А. Я. Хинчин дали окончательное представление устойчивых распределений через логарифмы характеристической функции. Чтобы функция $\varphi(t)$ была характеристической функцией устойчивого распределения, необходимо и достаточно следующее ее представление:

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^{\alpha}\left(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right),$$

где α, β, γ, c — вещественные постоянные ($-1 \le \beta \le 1$, $c \ge 0$, $0 < \alpha \le 2$) и

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \ne 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln |t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Этот результат полностью завершил исследования, которые были начаты Пуассоном и Коши.

Естественный вопрос о классе предельных распределений для сумм (1), когда слагаемые могут быть распределены не одинаково, был поставлен А. Я. Хинчиным в письме к П. Леви. Вскоре ответ был найден П. Леви. По предложению А. Я. Хинчина этот класс распределений получил наименование класса L. На слагаемые суммы ξ_k/B_n при этом естественно наложить требование: каждое из слагаемых оказывает на сумму незначительное влияние. Это требование можно представить так: величины ξ_k/B_n предельно постоянны, т.е. для них можно найти такую последовательность постоянных m_{nk}, что равномерно относительно k ($1 \le k \le n$) для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_k}{B_n} - m_{nk}\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Характеристическое свойство законов класса L, найденное П. Леви, состоит в следующем: чтобы функция $\varphi(t)$ была характеристической функцией закона класса L, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: при каждом α ($0 < \alpha \le 1$) имеет место равенство $\varphi(t) = \varphi(\alpha t) f_\alpha(t)$, где $f_\alpha(t)$ — некоторая характеристическая функция.

На этом история вопроса не завершилась, поскольку для полного завершения проблематики оставалось ответить еще на один вопрос, поставленный Б. В. Гнеденко. Каковы классы возможных предельных распределений, если случайные величины $\xi_1, \xi_2, dots, \xi_n, \ldots$ могут быть распределены только по k различным ($1 \le k < \infty$) различным законам распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$? Полное решение этой задачи было дано в 1971 г. А. А. Зингером.

В рассмотренном круге вопросов была изучена еще одна задача: а что будет, если рассматривать суммы (1) одинаково распределенных независимых слагаемых не по всем значениям и, а только по некоторой подпоследовательности? Какие предельные распределения при этом могут встретиться? Этот вопрос был поставлен А. Я. Хинчиным; он же дал на него ответ: класс возможных предельных распределений в только что указанном смысле совпадает с классом безгранично делимых распределений, в 1930 г. введенным итальянским математиком Бруно де Финетти и подробно исследованным А. Н. Колмогоровым, П. Леви и А. Я. Хинчиным. Случайная величина называется безгранично делимой, если для любого целого числа n ее можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределенных слагаемых. Отсюда и название этих величин.

В 1933 г. А. Н. Колмогоров высказал гипотезу, что если суммируются примерно равноправные независимые случайные величины, то при увеличении числа слагаемых из распределения будут приближаться к безгранично делимым законам и, следовательно, если распределения последовательных сумм будут сходиться к предельному, этот предельный закон обязательно должен быть безгранично делимым. В предположении, что слагаемые имеют конечные дисперсии, а дисперсии последовательных сумм ограничены эту гипотезу доказал ученик А. Н. Колмогорова Г. М. Бавли (1908–1941) в 1934 г. В полном объеме эта гипотеза была доказана А. Я. Хинчиным с привлечением довольно громоздких аналитических средств через три года. Отправляясь от этой работы, Б. В. Гнеденко построил теорию суммирования независимых случайных величин, основанную на сравнительно легко доказываемом факте: если суммируются предельно постоянные независимые слагаемые и функции распределения соответствующих центрированных сумм сходятся к некоторому предельному, то можно построить последовательность безгранично делимых случайных величин, функции распределения которых сближаются с функциями распределения сумм. Эти безгранично делимые величины получили название сопровождающих. Из этого предложения в качестве частных случаев получались теоремы Бавли и Хинчина. Кроме того, этот подход давал возможность совершенно прозрачно найти условия существования предельных распределений и условия сходимости функций распределения сумм к любому возможному предельному распределению. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия для закона больших чисел, для сходимости к нормальному распределению, распределению Пуассона, устойчивым распределениям. Весь круг этих вопросов нашел отражение в монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» (1949).

Большое число исследователей приступило к изучению предельного поведения сумм независимых случайных слагаемых в случайном числе. Первоначально усилия были сосредоточены только на условиях сходимости к нормальному распределению и выполнимости закона больших чисел. Позднее были поставлены вопросы о классе предельных распределений и об условиях существования предельного распределения. Эту задачу удалось решить в условиях одинаковой распределенности и независимости слагаемых, а также независимости индекса суммирования от слагаемых. Заметим также, что к самой постановке этих задач привели вопросы теории надежности и физики. Основная теорема, относящаяся к названной проблематике, получила наименование теоремы переноса.

18. Закон повторного логарифма

От закона больших чисел взяла начало новая предельная закономерность, получившая наименование закона повторного логарифма. Эта теорема не ставит перед собой цели разыскания предельного распределения, но зато переводит задачу рассмотрения последовательных сумм совсем в новую область, а именно изучает поведение этих сумм всех вместе. Мы вначале рассмотрим эту задачу для простейшего случая — для схемы Бернулли. Это вполне естественно; тем более, что это соответствует историческому ходу исследований.

Обозначим через μ_n число появлений события A в n независимых испытаниях и рассмотрим разности $S_n = \mu_n - np$. В 1909 г. Э. Борель дал обобщенную формулировку закона больших чисел, показав, что имеет более сильное утверждение, а именно

$$\mathbb{P}(S_n/n \to 0) = 1.$$

Через четыре года Ф. Хаусдорф (1868–1942) доказал, что имеет место еще более сильное утверждение, а именно, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n^{1+\varepsilon}} \to 0) = 1.$$

Год спустя, Г. Харди (1877–1947) и Дж. Литвуд (1885–1977) обнаружили еще более сильное предложение, согласно которому с вероятностью единица отношение $|S_n|/\sqrt{n \ln n}$ остается ограниченным. В 1922 г. А. Я. Хинчин дал для роста сумм S_n оценку $S_n = O(\sqrt{n \ln \ln n})$. Через два года А. Я. Хинчин нашел окончательный результат. Оказалось, что

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} = 1\right) = 1.$$

В 1926 г. А. Я. Хинчину удалось распространить этот результат на случай схемы Пуассона, т.е. на случай последовательных испытаний с переменной вероятностью появления события A.

Работа А. Н. Колмогорова 1929 г. значительно перекрывала результаты А. Я. Хинчина, которые являлись для нее простыми следствиями. Этими словами мы не хотим преуменьшить значения работ А. Я. Хинчина, поскольку открыть новую закономерность даже на простом случае заслуживает самой высокой оценки.

Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ взаимно независимых случайных величин, имеющих математические ожидания $a_k = \mathbb{E}\xi_k$ и дисперсии $b_k = \operatorname{Var}\xi_k$; $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k)$. Если последовательность ξ_k удовлетворяет еще двум условиям: при $n \to \infty$ 1) $B_n \to \infty$; 2) $|\xi_n| < m_n = o\left(\sqrt{\frac{B_n}{\ln \ln B_n}}\right)$, то она удовлетворяет закону повторного логарифма, т.е. для нее выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln \ln B_n}} = 1\right) = 1.$$

Иными словами было высказано следующее утверждение: в высказанных предположениях при любых положительных ε и δ можно указать столь большое целое число N, что

1) вероятность того, что хотя бы при одном $n > N$ выполнится неравенство

$$|S_n| > (1+\delta)\sqrt{2B_n \ln \ln B_n}$$

меньше ε и

2) вероятность того, что хотя бы для одного $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|S_n| > (1-\delta)\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}$$

больше $1-\varepsilon$.

Позднее задачей повторного логарифма занимались многочисленные исследователи — П. Леви, В. Феллер, Зигмунд и Марцинкевич, Хартман, Т. А. Сарымсаков, В. В. Петров, Б. В. Гнеденко и др. Среди многих прекрасных результатов мы выделим лишь один: если случайные величины ξ_k одинаково распределены и имеют конечную дисперсию (конечно, отличную от нуля), то это условие достаточно для выполнения закона повторного логарифма. Как показал А. И. Мартикайнен, этот результат допускает обращение[8]

Аналогичная задача была поставлена для устойчивых распределений, отличных от нормального. При этом выяснилось (Б. В. Гнеденко), что для любой неубывающей функции $u(n)$ и для любого устойчивого закона с показателем α $(0 < \alpha \leq 2)$ с вероятностью единица отношение $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{u(n)}$ равно 0 или бесконечности.

19. Формирование понятий математического ожидания и дисперсии

Понятие математического ожидания в самых начальных его элементах было введено в теорию вероятностей очень рано: впервые оно появилось в известной переписке Паскаля с Ферма. В более явной форме оно было введено Гюйгенсом. Именно, первые три предложения являются ничем иным как определением математического ожидания для случайных величин, способных принимать два или три значения. Как мы уже говорили в первой главе сам термин ожидание был предложен Схоутеном — учителем Гюйгенса. Этот термин прижился и сохранился до нашего времени. Но в ту пору этому термину придавался смысл ожидания той средней цены, которую можно дать за приобретение случайной величины, дающей выигрыш x_1 с вероятностью p_1, выигрыш x_2 с вероятностью $p_2, \ldots$ выигрыш x_n с вероятностью p_n.

Эта мысль красной строкой проходит и в книге Н. Бернулли «О применении искусства предположений в вопросах права». Он писал там, что «правило это (вычисления ожидания – *Б.Г.*) тождественно с тем, с помощью которого обыкновенно отыскиваются среднее арифметическое нескольких данных величин, а также и с тем правилом смешения, на которое счел уместным сослаться мой дядя». Далее он рассмотрел пример, заимствованный из рукописи книги Я. Бернулли «Искусство предположений»: «Если

[8] Обращение закона повторного логарифма для случайного блуждания// Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. 25, вып. 2. – С. 364–366.

три кружки пива ценой по 13 смешиваются с 2 кружками ценой по 8, то после перемножения 3 на 13 и 2 на 8 получится общая цена всех кружек — 55, что дает путем деления на число всех кружек, т.е. 5, среднюю цену одной кружки смеси, равную 11. Такова же должна быть, согласно правилу, и оценка величины ожидания чего-либо, что будет иметь 3 случая по 13 и 2 случая по 8». Заметим, что сказанное является ничем иным как повторением правил Гюйгенса. Заслуживает внимания не только то, что Н. Бернулли рассмотрел ожидание для случайных величин, принимающих не только два или три значения, но и большее число значений, но и нечто совсем новое, а именно сравнение формулы для вычисления математического ожидания с правилом вычисления координат центра тяжести системы материальных точек. Вот подлинные слова Н. Бернулли, из той же книги.

«Еще более заслуживает быть отмеченным особое и исключительное совпадение, наблюдающееся между этим правилом и тем, которое рекомендуется для нахождения центра тяжести нескольких грузов; действительно, ведь сумма моментов, т.е. сумма произведений весов на соответствующие расстояния от какой-либо данной точки, деленная на сумму весов, показывает расстояние от центра тяжести, т.е. той точки, по отношению к которой подвешенные грузы находятся в равновесии, точно также и та средняя, которая получается согласно настоящему правилу, является, так сказать, центром тяжести всех вероятностей, который их так уравновешивает, что ни та, ни другая из них, отклоняясь в ту или другую сторону от средней, не перевешивают друг друга. В целях соблюдения такого же равновесия в сомнительных и темных делах наши юристы придерживаются обычно середины».

Для XVIII века обращение к математическому ожиданию было не характерным. Все внимание привлекало понятие вероятности случайного события. В энциклопедии науки о вероятностях — знаменитой книге П. Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» — нет определения математического ожидания и тем более правил действий с ним. Возможно, это связано с тем, что Лаплас не рассматривал и понятия случайной величины, вместо этого он изучал ошибки наблюдений, плотности их распределений и даже вывел, и использовал формулу для плотности суммы двух независимых ошибок. Правда, при этом он не говорил о том, что рассматривались независимые, поскольку другие и не изучались.

Казалось бы создание и развитие теории ошибок наблюдений должно было стимулировать развитие числовых характеристик случайных величин (которые в ту пору еще назывались ошибками измерений). Однако этого не случилось. Впрочем, для нормального распределения были введены понятия истинного значения и точности наблюдений; было известно как их вычислять по плотности распределения. Таким образом для этого частного случая уже была известна формула для вычисления математического ожидания и дисперсии.

Обратим внимание на то, что в начале XIX века нормальное распределение затмило собой все остальные, поскольку с ним столкнулись в теории ошибок наблюдений и, казалось, доказали в работах Гаусса и Лежандра, что распределение ошибок наблюдений должно быть нормальным. С ним же столкнулись в теории стрельбы. Бельгийский биолог Кетле давал многочисленные свидетельства того, что и в биологии нормальное распределение играет центральную роль. Остальные распределения потеряли интерес, о них попросту не думали. Несомненно, в связи с этим никто и не помышлял о доказательстве теорем относительно математических ожиданий и дисперсий, поскольку для нормального распределения все уже было известно. В связи со сказанным интересно заметить, что в книге П. Л. Чебышева «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (М., 1845) понятия случайной величины, математического ожидания и дисперсии даже не упоминаются. Однако в курсе лекций по теории вероятностей, который систематически он читал в Петербургском университете, Чебышев говорит о величинах (имея в виду случайные величины), их математическом ожидании и дисперсии. Более того, в этих лекциях (записанных А. М. Ляпуновым, переписанных у него А. Н. Крыловым и изданных в 1936 г. в издательстве АН СССР) было сказано, что «оно (понятие математического ожидания) имеет большее значение на практике, чем сама вероятность, потому что на основании ее у нас составляется суждение о том, что мы можем ожидать перед появлением известного события» (с. 159). Само это утверждение не очень понятно, но, несомненно, Чебышев имел в виду какое-то определенное замечательное свойство математического ожидания. По-видимому, свою роль сыграла и формулировка закона больших чисел в форме Чебышева.

Заслуживает пристального внимания то обстоятельство, что в этих записках лекций имеется доказательство и формулировка теорем о математическом ожидании и дисперсии суммы случайных величин. Там же он привел и вывод своего знаменитого неравенства. При этом он предполагал как нечто самоочевидное, что речь идет о независимых величинах. Следует отметить, что сам факт о том, что дисперсия суммы равна сумме дисперсий, имеется и использован Чебышевым в статье «О средних величинах». Там же впервые встречается и неравенство Чебышева. Следует отметить, что в распространенных учебниках (А. Пуанкаре и Ж. Бертрана) конца прошлого века и начала текущего столетия вообще нет теорем о математическом ожидании и дисперсии.

Естественно спросить себя: когда же стал известен факт, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий всегда, а не только при независимых слагаемых? Пока на это можно лишь ответить, что в учебнике Чубера (1908) и переиздании книги А. Пуанкаре (1912) такой теоремы нет, а в знаменитом для своего времени учебнике «Исчисление вероятностей» (1913, 1924) строго доказываются и теорема о математическом ожидании произведения и о математическом ожидании суммы со специальным упоминанием о том, что она верна не только для независимых величин.

В заключение мы должны сказать, что история понятий математического ожидания и дисперсии изучена совершенно недостаточно. Мы видим, что основы понятия математического ожидания возникли одновременно с понятием вероятности, но выделены основные его свойства были очень поздно —

только во второй половине XIX – начале XX столетия. Неясно, в какой мере на понятие дисперсии влияла уже существовавшее понятие момента инерции. Впрочем, заслуживает внимания и исследование истории становления и развития теории случайных величин. То, что изложено в настоящей главе может считаться лишь первым приближением к истории этого важного раздела научных знаний.

Глава 4. К истории теории случайных процессов

20. Общие представления

Понятие случайного процесса принадлежит нашему столетию и связано с именами А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, Е. Е. Слуцкого, Н. Винера (1894–1965). Это понятие в наши дни является одним из центральных не только в теории вероятностей, но также в естествознании, инженерном деле, экономике, организации производства, теории связи. Теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин. Несомненно, что это обстоятельство в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой.

XX век не мог удовлетвориться тем идейным наследием, которое было получено им от прошлого. Действительно, в то время как физика, биолога, инженера интересовал процесс, т.е. изменение изучаемого явления во времени, теория вероятностей предлагала им в качестве математического аппарата лишь средства, изучавшие стационарные состояния. Для исследования изменения во времени теория вероятностей конца XIX-начала XX века не имела ни разработанных частных схем, ни тем более общих приемов. А необходимость их создания буквально стучала в окна и двери математической науки. Изучение броуновского движения в физике подвело математику к порогу создания теории случайных процессов. В исследованиях датского ученого А. К. Эрланга была начата новая важная область поисков, связанных с изучением загрузки телефонных сетей. Число абонентов изменяется во времени случайно, а длительность каждого разговора обладает большой индивидуальностью. И вот в этих-то условиях двойной случайности следует производить расчет пропускной способности телефонных сетей, коммутационной аппаратуры и управляющих связью систем. Несомненно, что работы Эрланга оказали значительное влияние не только на решение чисто телефонных задач, но и на формирование элементов теории случайных процессов, в частности, процессов гибели и размножения.

Во втором десятилетии XX века начались исследования динамики биологических популяций. Итальянский математик Вито Вольтерра разработал математическую теорию этого процесса на базе чисто детерминистских соображений. Позднее ряд биологов и математиков развивали его идеи уже на основе стохастических представлений. Первоначально и в этой теории применялись исключительно идеи процессов и гибели и размножения. Собственно именно от задач биологии и пошло наименование этого очень частного типа случайных процессов.

Представим себе, что мы задались целью проследить за движением какой-нибудь молекулы газа или жидкости. Эта молекула в случайные моменты сталкивается с другими молекулами и меняет при этом направление движения и скорость. Состояние молекулы, таким образом, подвержено случайным изменениям и представляет собой ничто иное, как случайный процесс. Это процесс определяется шестью параметрами -тремя координатами и тремя компонентами скорости. Многие физические явления для своего изучения требуют умения вычислять вероятности того, что определенная доля молекул успеет за заданный промежуток времени перейти из одной области пространства в другую. Например, если приведены в соприкосновение две жидкости, то начинается взаимное проникновение молекул одной жидкости в другую. Происходит диффузия. Как быстро происходит процесс диффузии, по каким законам и когда образующаяся смесь становится практически однородной? На эти и многие другие вопросы дает ответ статистическая теория диффузии, базирующаяся на использовании теории случайных процессов. Очевидно, что подобные же задачи возникают в химии, когда приступают к изучению процессов химических реакций. Какая часть молекул уже вступила в реакцию, какая особенность протекания реакции со временем, когда реакция практически уже закончилась?

Весьма важный круг явлений протекает по принципу радиоактивного распада. Суть его состоит в том, что атомы радиоактивного вещества распадаются, превращаясь в атомы другого элемента. Распад каждого атома происходит мгновенно, подобно взрыву, с выделением некоторого количества энергии. Многочисленные наблюдения показывают, что распад отдельных атомов происходит в случайно взятые моменты времени и расположение этих моментов, если количество распадающегося вещества не превосходит некоторого определенного критического предела, не зависят друг от друга. Для изучения процесса радиоактивного распада весьма важно определить вероятность того, что за определенный промежуток времени распадается то или иное число атомов. Формально, если задаться целью выяснения только математической стороны явления, аналогично происходят многие другие процессы: обрывы нитей в прядильной машине, число броуновских частиц, оказавшихся в данный момент в определенной области пространства, вызовы от абонентов, поступающие на телефонную станцию и т.д.

Теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок, была разработана в 1905 г. двумя известными физиками М. Смолуховским (1872–1917) и А. Эйнштейном (1879–1955). Позднее высказанные ими идеи использовались неоднократно как при изучении физических явлений, так и в различных инженерных задачах. В частности, именно с их работ, как, впрочем, и с работ Эрланга, начался широкий интерес к процессу Пуассона. Впрочем, сам Пуассон ввел в рассмотрение только распределение Пуассона и о процессе Пуассона даже не мечтал, но он заслужил того, чтобы его имя произносилось и при рассмотрении случайных процессов, связанных с его распределением. Это не единственный случай, когда в честь того или другого исследователя новым понятиям присваиваются их имена, хотя до этих понятий они и не доходили. Теперь широко распространены гауссовские случайные процессы, хотя сам Гаусс о них не имел никакого представления, да и само исходное распределение задолго до его рождения было получено Муавром, Лапласом и др. В теории же ошибок измерений одновременно с Гауссом к нему пришел также Лежандр.

Попытка изучения средствами теории вероятностей явления диффузии была предпринята в 1914 г. двумя известными физиками — М. Планком

(1858–1947) и Фоккером. Н. Винер в середине двадцатых годов при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, удовлетворяющие следующим условиям:

1) функция распределения разности $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$ не зависит от начального момента t_0 (однородность во времени);

2) приращения процесса $\xi(t)$ за непересекающиеся промежутки времени (s_i, t_i) в конечном числе взаимно независимы (независимость приращений);

3) величины $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$ нормально распределены со средним значением равным 0 и дисперсией $\sigma^2 t$.

Мы должны упомянуть еще о двух важных группах исследований, начатых в разное время и по разным поводам. Во-первых, это работы А. А. Маркова (1856–1922) по изучению цепных зависимостей. Во-вторых, работах Е. Е. Слуцкого (1880–1948) по теории случайных функций. Оба эти направления играли очень существенную роль в формировании общей теории случайных процессов. Для этой цели уже был накоплен значительный исходный материал и необходимость построения теории как бы носилась в воздухе. Оставалось осуществить глубокий анализ имеющихся работ, высказанных в них идей и результатов и на его базе осуществить необходимый синтез.

В 1931 г. была опубликована большая статья А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», а через три года работа А. Я. Хинчина «Теория корреляции стационарных стохастических процессов», которые следует считать началом построения общей теории случайных процессов. В первой из этих работ были заложены основы теории марковских процессов, а во второй — основы стационарных процессов. Они были источником огромного числа последующих исследований, среди которых следует отметить статью В. Феллера «К теории стохастических процессов» (1936), давшую интегро-дифференциальные уравнения для скачкообразных марковских процессов.

Обе только что упомянутые основополагающие работы содержат не только математические результаты, но и глубокий философский анализ причин, послуживших исходным пунктом для построения основ теории случайных процессов. Приведем с целью ознакомления с этим аспектом исследований довольно большой отрывок из введения к работе А. Н. Колмогорова.

«Желая подвергнуть математической обработке явления природы или социальной жизни, необходимо предварительно эти явления схематизировать; дело в том, что к исследованию процесса изменения некоторой системы математический анализ применим лишь в том случае, если предположить, что каждое возможное состояние этой системы может быть вполне определено с помощью известного математического аппарата, например, при помощи значений, принимаемых известным числом параметров; такая математически определимая система есть не сама действительность, но лишь схема, пригодная для описания действительности.

Классическая механика пользуется лишь такими схемами, при которых состояние y системы для момента времени t однозначным образом определяется ее состоянием x в любой предшествующий момент t_0; математически это выражается формулой $y = f(x, t_0, t)$.

Если такая однозначная функция существует, как это всегда предполагается в классической механике, то мы говорим, что наша схема есть схема *вполне детерминированного* процесса. К числу вполне детерминированных процессов можно было отнести и те, в которых состояние y не вполне определяется заданием состояния x для единственного момента времени t, существенным образом зависит еще от характера изменения этого состояния перед моментом t. Однако, обычно предпочитают избегать такой зависимости от предшествующего поведения системы, для чего расширяют само понятие состояния системы в момент времени t и соответственно этому вводят новые параметры.[9]

Вне области классической механики, наряду со схемами вполне детерминированных процессов, часто рассматриваются и такие схемы, где состояние x системы в некоторый момент времени t_0 обуславливает лишь известную вероятность для наступления возможного состояния y в некоторый последующий момент $t > t_0$. Если для любых заданных t_0, $t > t_0$ и x существует определенная функция распределения вероятностей для состояния y, мы говорим, что наша схема есть схема *стохастически определенного* процесса. В общем случае эта функция распределения представляется в виде $\mathbb{P}(t_0, x, t, A)$, причем A обозначает некоторое множество состояний, а $\mathbb{P}$ есть вероятность того, что в момент t окажется реализованным одно из состояний A, принадлежащих этому множеству».

Но не общефилософское содержание является основным достоинством этой работы А. Н. Колмогорова. В ней были заложены основы теории случайных процессов без последействия и получены дифференциальные уравнения (прямые и обратные), которые управляют вероятностями перехода. В этой же работе был дан набросок теории скачкообразных процессов без последействия, подробное развитие которой позднее было дано В. Феллером и В. М. Дубровским.

В настоящее время теория марковских процессов превратилась в большую и разветвленную главу математической науки, которая получила огромное число различных применений в физике, инженерном деле, геофизике, химии и ряде других областей знания.

Построение основ другого класса случайных процессов на базе физических задач было осуществлено А. Я. Хинчиным в упомянутой нами работе. Он ввел понятие стационарного процесса в широком и узком смысле и получил знаменитую формулу для коэффициента автокорреляций. Эта работа послужила основанием для последующих исследований Г. Крамера, Г. Вальда, А. Н. Колмогорова и многих других ученых.

В процессе развития теории случайных процессов произошло разделение близких понятий. Если случайная величина $\xi(t)$ или вектор $(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$

[9] Хорошо известный пример применения этого метода мы имеем при описании состояния некоторой механической системы не только координатами ее точек, но также и компонентами их скоростей.

со значениями на числовой прямой зависит от одного вещественного параметра t, то принято говорить о случайном процессе $\xi(t)$. При этом, как правило, параметр t носит название времени. Если время принимает дискретную последовательность значений $t_1, t_2, \ldots$, то говорят не о случайном процессе, а о случайной последовательности. Если же случайная величина ξ (или вектор) зависит не от одного, а от нескольких параметров, то ее называют случайным полем.

Со случайными полями столкнулись раньше всего в биологии и геофизике, а затем оказалось, что практически все области знания приводят к необходимости рассмотрения наряду со случайными процессамии случайных полей. Рассмотрим примеры. Обозначим через $\rho(t, x, y, z)$ плотность воды в океане. Эта величина изменяется от одной точки к другой и от одного момента времени к другому. Как показывают многочисленные наблюдения, ρ можно рассматривать как случайное поле.

Рассмотрим изменение силы и направления ветра. Для каждого момента времени и каждой точки пространства сила ветра $f(t, x, y, z)$ является скалярной величиной, а направление ветра $\xi(t, x, y, z), \eta(t, x, y, z), \zeta(t, x, y, z)$ — случайным вектором. Это типичный пример скалярного и векторного полей.

Число примеров случайных полей, относящихся к различным областям знания, можно продолжать практически неограниченно.

В истории каждой науки постоянно приходится сталкиваться с такими ситуациями, когда эта наука еще не создана, а исследователи рассматривают отдельные задачи, которые относятся к ее компетенции. Так было с арифметикой и геометрией, алгеброй и теорией чисел. С таким же положением мы сталкиваемся и в теории случайных процессов. Этой теории еще не было, не было и свойственных ей понятий, не было даже идеи рассмотрения изменения случайной величины во времени, а отдельные задачи в этом направлении уже изучались. Для примера еще Н. Бернулли, Монмор и Муавр занимались задачей о разорении игрока и состоянии игроков после n партий. Это типичная задача теории случайных процессов, в которой число сыгранных партий играет роль времени. Такая же ситуация складывается и с задачей Лапласа перекладывания шаров из урны в урну и подсчета содержания урны после n перекладываний. Всегда новое рождается в недрах старого и со временем вырастает из становящихся тесными рамок уже установившихся представлений и понятий. В результате появляется необходимость выделения специальной области научных исследований. Первоначально же отдельные новые задачи решаются в рамках старых представлений, как правило специальными приемами, создаваемыми для каждой задачи. Но время еще не созрело для выделения соответствующей новой ветви научного знания. Требуется иногда длительный срок, чтобы первоначальные идеи и отдельные задачи сформировались и дали начало новой теории со своими постановками проблем и методами исследования, позволяющими продвинуться по пути познания явлений окружающего нас мира.

Теория вероятностей имеет богатую и поучительную историю. Она наглядно показывает как возникали ее основные понятия и развивались методы из задач, с которыми сталкивался общественный прогресс. История теории вероятностей еще далека от совершенства и требуется систематическая работа для того, чтобы восстановить пройденный путь и воздать должное ее создателям. При этом мы увидим как человечество переходило от первичных догадок к более полному и совершенному знанию, как создание теории вероятностей позволяло переходить от строгих детерминистических представлений к более широким стохастическим концепциям, тем самым открывая новые возможности для глубоких заключений о природе вещей.

Теория вероятностей продолжает бурно развиваться, в ней появляются новые направления исследований — оптимальное управление случайными процессами, теория мартингалов, теория просачивания, случайные операторы, вероятностные закономерности на алгебраических и топологических структурах. Эти направления представляют значительный общетеоретический и прикладной интерес. Практически исторический очерк ограничивается во времени сороковыми годами XX века и только отдельные замечания относятся к более позднему времени. Я надеюсь на то, что вопросы истории теории вероятностей заинтересуют некоторых читателей и им удастся существенно дополнить настоящий очерк в ряде направлений.