ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 5-05

К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА МИХАЙЛОВИЧА ТИХОМИРОВА

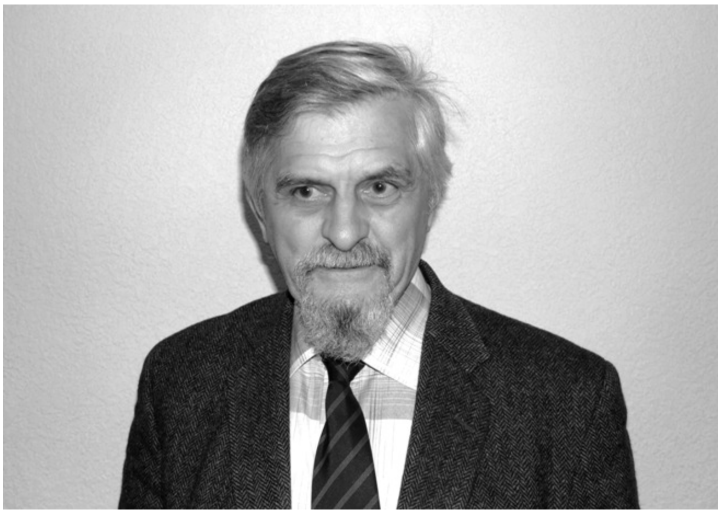
В. Б. Демидович, Г. Г. Магарил-Ильяев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы, д. 1;
e-mail: vasdem@mech.math.msu.su magaril@mech.math.msu.su

22 ноября 2014-го года исполняется 80 лет профессору механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Владимиру Михайловичу Тихомирову. Вся его творческая жизнь связана с математикой, которой он беззаветно предан на протяжении вот уже более 60-ти лет. Блестящий учёный и замечательный педагог, он и поныне неутомим в этой благородной деятельности.

Ключевые слова: В. М. Тихомиров.

I. Немного из биографии Владимира Михайловича Тихомирова. Владимир Михайлович родился в Москве. Его родители — отец Михаил Никандрович Тихомиров (1906–1995) и мать Людмила Юльевна (урожд. Гурвиц) (1910–1993) — были врачами, окончившими «санитарный» факультет Московского медицинского института. Брак распался в начале Великой Отечественной войны, и потому воспитанием мальчика занимались родители матери — Юлий Осипович Гурвиц (1882–1953) и Елизавета Фёдоровна (урожд. Банова) (1882–1954).



Дедушка Владимира Михайловича — Юлий Осипович — был известным московским учителем математики, преподававшим также в ряде московских вузов. Широко известна написанная им в соавторстве с другим математиком и педагогом-новатором — Рудольфом Вильгельмовичем Гангнусом (1883–1949), по происхождению из прибалтийских немцев — книга [1] по преподаванию геометрии. А бабушка Владимира Михайловича — Елизавета Фёдоровна — образования не имела.

Особого интереса к математике в школьные годы у Владимира Михайловича, как он рассказывал в своём интервью в мае 2007 года (см. [2, с. 9–25]), не было, хотя никаких затруднений она ему не причиняла. «Но у меня был очень близкий друг — Леонид Романович Волевич (1934–2007) — который действительно увлёкся математикой. И, в каком-то смысле, он меня в это понемножку втягивал».

Школу Владимир Михайлович окончил в 1952 году с золотой медалью. «Тогда было принято хорошо учиться, и я, как и все мои друзья, учился хорошо» — кратко прокомментировал это обстоятельство Владимир Михайлович в указанном выше интервью. На семейном совете было решено, что ему следует попытаться поступить на механико-математический факультет Московского государственного университета. Полагавшееся для медалистов собеседование Владимир Михайлович преодолел успешно и стал студентом мехмата МГУ. «Я был счастлив даже не столько потому, что осуществилась моя мечта, а потому, что не принёс огорчения дедушке своему, который угасал — он уже был неизлечимо болен», вспоминал в своём интервью Владимир Михайлович.

С первого курса Владимир Михайлович стал посещать спецсеминар Евгения Борисовича Дынкина (р. 1924), которого и поныне он причисляет к своим учителям. Под его руководством на втором курсе он написал свою курсовую работу по спинорной алгебре. Но формулируемые Евгением Борисовичем задачи, в основном относящиеся к теории представлений групп, Владимира Михайловича не увлекли, и на четвёртом курсе он уже стал писать курсовую работу, связанную с теорией вероятностей, под руководством Юрия Михайловича Прохорова (1929–2013). А в конце 4-го курса, в апреле 1956-го года, в свои ученики Владимира Михайловича неожиданно пригласил сам Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987). «Мне ничего не оставалось делать, — потрясённый этим обстоятельством, комментировал в интервью Владимир Михайлович — кроме как попытаться с ним начать работать». В беседе с Андреем Николаевичем, состоявшейся на даче Колмогорова в подмосковной Комаровке, Владимиру Михайловичу были предложены несколько задач, с которыми он довольно быстро справился. Так Владимир Михайлович навсегда влился в плеяду колмогоровских учеников.

В 1957-м году Владимир Михайлович успешно окончил кафедру теории вероятностей мехмата МГУ, причём его дипломная работа, объёмом свыше 100 страниц машинописного текста, была отмечена похвальной грамотой. В том же году он поступил в аспирантуру мехмата МГУ.

Уже на первом году аспирантуры Владимир Михайлович опубликовал заметку в ДАН СССР. А чуть позже он стал готовить (совместно Андреем Николаевичем) большую статью по «эпсилон-энтропии» для Успехов математических наук, опубликованную на третьем году его обучения в аспирантуре.

В октябре 1960-го года Владимир Михайлович успешно защитил в Отделе прикладной математики МИ АН СССР имени В. А. Стеклова (позже этот отдел стал Институтом прикладной математики АН СССР, а ныне — Институтом прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН) свою кандидатскую диссертацию «Поперечники множеств в функциональных пространствах». Оппонентами по диссертации были Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009) и Константин Иванович Бабенко (1919–1987), о её содержании тепло отозвался и Сергей Михайлович Никольский (1905–2012). В том же 1960-м году Владимир Михайлович был зачислен на работу в Лабораторию кафедры теории вероятностей мехмата МГУ.

В 1961-м году Владимир Михайлович уехал на работу в Воронежский государственный университет. Но в 1962-м году он вернулся на мехмат МГУ, где вскоре стал доцентом кафедры Теории функций и функционального анализа (ТФФА). В 1963-м году он открыл на мехмате МГУ свой спецсеминар, посвятив его общим вопросам теории аппроксимации. Довольно быстро этот спецсеминар «оброс» молодёжью. Среди его первых участников можно упомянуть Алексея Львовича Левина (р. 1944), Александра Давидовича Иоффе (р. 1938), Михаила Ароновича Ольшанецкого (р. 1938), Вольдемар-Беренкарда Константиновича Рогова (р. 1938).

В 1969-м году, под влиянием Сергея Васильевича Фомина (1917–1975), а также по совету Владимира Михайловича Алексеева (1932–1980), Владимир Михайлович Тихомиров перешёл с кафедры ТФФА на кафедру общих проблем управления (ОПУ), созданную на Мехмате МГУ в апреле 1966-го. Кафедрой заведовал Вадим Александрович Трапезников (1905–1994), но в те годы кафедрой реально руководил С. В. Фомин. С этим переходом было связано расширение тематики спецсеминара Владимира Михайловича, в круг интересов которого включились вопросы теории оптимального управления.

В 1971-м году Владимир Михайлович успешно защитил свою докторскую диссертацию «Некоторые вопросы теории приближений», оппонентами по которой были Андрей Николаевич Колмогоров, Константин Иванович Бабенко и Сергей Борисович Стечкин (1920–1995). Через два года Владимир Михайлович стал профессором кафедры ОПУ, а с 1989-го по 2011-ый годы он заведовал этой кафедрой.

В целом творческая деятельность Владимира Михайловича развернулась необычайно широко. Он опубликовал около двухсот научных работ, в том числе два десятка книг, популярных не только в России, но и далеко за её пределами. Его педагогическое мастерство в подготовке специалистов высочайшей квалификации может служить примером: он воспитал целую плеяду талантливых учеников, из которых около пятидесяти защитили кандидатские диссертации, а свыше десятка — докторские диссертации. При этом особо подчеркнём доброжелательное стремление Владимира Михайловича поддержать собеседника (скажем, докладчика на спецсеминаре) за малейший замеченный успех — ведь для молодого исследователя очень важно, чтобы его вовремя «окрылили» на дальнейшую деятельность.

Владимир Михайлович ведёт и большую научно-организационную работу. Он является почётным профессором МГУ, членом редколлегий ряда российских и международных математических журналов, членом правления Московского Математического общества. Долгое время он был руководителем секции математики Московского Дома Учёных. И всюду он трудится с полной отдачей, не жалея ни сил, ни времени.

Нельзя не отметить и деятельность Владимира Михайловича в области истории математики. Подробные публикации о развитии различных областей математики (функционального анализа, теории экстремума и др.) в российских и зарубежных журналах, десятки «статей-персоналий» о математиках, регулярные выступления с популярными математическими докладами в Доме Учёных МГУ — ко всему этому Владимир Михайлович относится исключительно ответственно и безотказно.

В последние годы Владимир Михайлович увлечён идеей создания «синтетического курса математики», пропагандирующего возможность взглянуть на развитие магистральных математических понятий в процессе обучения, «от детского сада до университета», в их естественном единстве. «Когда я поступил на Мехмат МГУ — рассказывал Владимир Михайлович, — то на первой же лекции нам, первокурсникам, было сказано: «Забудьте о том, что вы изучали по математике в школе». Но потом я осознал, что этот призыв неправильный — нет ни «школьной математики», ни «университетской математики», а есть единая математика, которая лишь требует своего доступного изложения в зависимости от того, на каком возрастном уровне находится обучающийся человек».

В любезно предоставленном нам «Введении» к задуманной Владимиром Михайловичем книге «Синтетический курс математики» даётся подробное обоснование необходимости создания такого курса. В частности, Владимир Михайлович пишет:

«... Моё поколение родилось в ту пору, когда личность должна была служить государству. Государство планировало нужное ему число физиков, инженеров, геологов, нефтяников и т. п., причём для целей, которые не объявлялись. Оно нуждалось и в людях с хорошей математической подготовкой. При этом каждый человек мог сделать выбор своей профессии только один раз. По окончании института он получал распределение, и, как правило, с очень небольшими вариациями, жизнь его протекала в достаточно узком русле. При этом престиж научного работника был высок, было много людей, увлечённых наукой, к тому же убеждённых, что трудятся на благо Родины.

При новом строе каждый должен стоять за самого себя. Сейчас нет системы ни распределения выпускников, ни их государственного трудоустройства. Нет и планирования профессиональной занятости. И ментальность молодёжи ныне радикально изменилась. Престиж научного работника или учителя стал очень низок, желание получать знания имеет (по моим собственным наблюдениям и наблюдениям всех близких мне людей) лишь небольшая доля молодёжи. Да к тому же ещё произошёл неслыханный и совершенно непредвиденный информационный взрыв, который также требует коррекции системы образования.

Всё это социальные причины. Но для меня существует и чисто «внутренняя», профессиональная претензия к образованию, которое мне суждено было получить.

Математика, которой меня учили, была *феодальной империей*. И мне даже в голову не могла прийти мысль о возможности единого обзора всего прослушанного мной. «Империя Математики» распадалась на «губернии» аналитической геометрии, алгебры, вещественного, комплексного и функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. И каждая такая «губерния» воспринималась как «независимое государство» с очень малыми связями с другими «губерниями».

Но где-то достаточно давно (и от А. Н. Колмогорова, и от И. М. Гельфанда) я узнал, что математика вместе с математическим естествознанием — **единая наука** (это слова Гельфанда). В частности, сам Андрей Николаевич попробовал бороться с математическим феодализмом, введя «синтетический» курс «Анализ III», вобравший в себя теорию функций действительного переменного и теорию интегральных уравнений, а затем и вариационное исчисление (читавшиеся до начала 1950-х годов как отдельные обязательные курсы). Я же хочу предложить свой «синтетический курс», но иного типа, чем «Анализ III», чем синтетические курсы «Линейной алгебры и геометрии» и «Дифференциальной геометрии и топологии», которые также были созданы. И его заглавие будет «Синтетический курс математики».

Мне кажется, что сама идея такого курса может оказаться весьма кстати. В частности, это относится к мехмату МГУ: ведь математическое образование на нём меняет сейчас свою форму — оно становится не пятилетним, а шестилетним. И после получения четырёхлетнего базового «мехматского» образования остаются ещё два года, которые надо чем-то наполнить.

Одна из целей моего курса — выделить наиболее важные, фундаментальные результаты, идеи, понятия, теории, методы, исчисления, концепции и алгоритмы в той математике, которой мы хотели бы обучить наших студентов. Меня вдохновляют при этом три идеи:

1. Математика и естествознание, инженерия и математическая экономика *едины*, и их можно изложить в едином ключе.

2. Математика *проста* в том смысле, что фундаментальные факты математики доступны и школьнику, который не боится размышлять, и любому человеку, который действительно хочет сделать какое-либо интеллектуальное продвижение.

3. Всё математическое образование можно выстроить *единым образом* для школы, вуза и университета . . . »

Мы желаем Владимиру Михайловичу успеха в создании задуманного им курса и его оперативном опубликовании.

II. Подробнее о научной деятельности Владимира Михайловича Тихомирова. Научные интересы Владимира Михайловича очень разнообразны, но основные его работы связаны с теорией приближений, теорией экстремальных задач и выпуклым анализом. Во всех этих областях влияние Владимира Михайловича была весьма существенно для становления и/или развития соответствующей тематики. Его монографии и учебники по данным дисциплинам переведены на многие языки мира и давно стали настольными книгами для специалистов, работающих в этих направлениях. Скажем несколько слов о каждом из них.

Теория приближений

Принято считать, что теория приближений началась с классических работ Пафнутия Львовича Чебышева о наилучшей аппроксимации индивидуальной функции конечномерными подпространствами. Затем стали изучать задачи о наилучшем приближении уже класса функций теми или иными конечномерными подпространствами. В 1936 году А. Н. Колмогоров ввёл понятие поперечника — величины, которая характеризует наилучшее приближение данного класса функций всеми пространствами фиксированной размерности.

Общее определение этой величины таково. Пусть X — нормированное пространство, C — подмножество в X и n — неотрицательное целое число. Величина

$$d_n(C,X)=\inf_{L_n}\sup_{x\in C}\inf_{y\in L_n}\|x-y\|_X,$$

где первая нижняя грань берется по всем подпространствам $L_n\subset X$ размерности не выше n, называется *n-поперечником по Колмогорову множества C в X*.

С 1936 года и вплоть до шестидесятых годов практически не было публикаций на тему о поперечниках. В 1956 году А. Н. Колмогоров предложил Владимиру Михайловичу заняться тематикой, связанной с ε-энтропией функциональных классов. С этого времени Владимир Михайлович становится учеником Андрея Николаевича Колмогорова, оказавшего огромное влияние на всю его жизнь.

Первые итоги деятельности Колмогорова и его учеников по энтропии функциональных классов подведены в статье в «Успехах математических наук» (1959 г.), написанной В. М. Тихомировым совместно с А. Н. Колмогоровым. Эта работа оказала значительное влияние на всю теорию аппроксимации в целом. В эти же годы Владимир Михайлович начинает активную деятельность, связанную с развитием новой темы в теории аппроксимации — нахождением наилучших методов приближения классов гладких и аналитических функций. Он вводит ряд величин, которые, наряду с поперечником по Колмогорову, характеризуют аппроксимативные возможности данного множества (проекционный поперечник, линейный поперечник, поперечник по Гельфанду и др.), разрабатывает новые методы исследования этих величин, которые впоследствии многократно использовались и обобщались в десятках работ, получает множество конкретных результатов по точным и асимптотически точным значениям различных поперечников и т. п. Определенный итог этого этапа своей деятельности Владимир Михайлович подвел в монографии [3].

В теории аппроксимации, начиная с работ Сергея Натановича Бернштейна (1880–1968), изучаются наилучшие приближения отдельных функций и классов функций на прямой. Бернштейн ввёл для этого некий аналог тригонометрических полиномов, а именно, пространство $B_\sigma(\mathbb{R})$, $\sigma > 0$, представляющее собой сужение целых функций $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon = C_\varepsilon\bigl(f(\cdot)\bigr) \geq 0$, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\sigma + \varepsilon)|z|$. В последующие годы появились другие средства приближения классов функций на прямой, например, пространства сплайнов и вейвлетов.

Эти пространства и пространство $B_\sigma(\mathbb{R})$ бесконечномерны, а стандартные классы функций на прямой (скажем, введенные Сергеем Львовичем Соболевым (1908–1989) так называемые «соболевские классы»), для приближения которых они используются, некомпактны. Как ставить вопрос об аппроксимативных характеристиках таких классов и как сравнивать различные средства их приближения? Впервые этот вопрос был поставлен Клодом Шенноном (1916–2001), и он дал определение «энтропии на единицу времени» случайного сигнала на прямой. А. Н. Колмогоров модифицировал это определение для обычных (не случайных функций).

Первый результат в этом направлении — энтропия на единицу времени ограниченных функций из $B_\sigma(\mathbb{R})$ — был получен Владимиром Михайловичем в работе [4]. Позднее Владимир Михайлович ввёл аппроксимационную характеристику класса, аналогичную колмогоровской, но отправляясь не от энтропии, а от поперечника по Колмогорову, которую он назвал средней ε-размерностью. Это послужило началом для многих исследований, связанных с вычислением средней ε-размерности различных некомпактных функциональных классов. Отчетливые очертания эта тематика получила в работах ученика Владимира Михайловича — Георгия Георгиевича Магарил-Ильяева (р. 1944), который ввёл понятия средней размерности пространства, усреднённых поперечников и нашёл их точные и асимптотически точные значения для ряда функциональных классов.

Владимиром Михайловичем был построен класс специальных функций, связанных с собственными функциями нелинейных уравнений типа Штурма–Лиувилля, которые позволяют найти оптимальные методы аппроксимации классов функций, задаваемых ядрами, не повышающими осцилляцию. Тем самым была решена проблема, которая занимала многих математиков и решения которой были получены лишь в отдельных частных случаях.

В шестидесятые годы прошлого века была поставлена задача об оптимальном восстановлении значений линейного функционала на классе элементов по приближенной информации о самих элементах. Постановка задачи идеологически близка к работе Колмогорова о поперечниках классов функций, упомянутой выше. Владимир Михайлович Тихомиров, совместно с Георгием Георгиевичем Магарил-Ильяевым и Константином Юрьевичем Осипенко (р. 1950), начал исследование этой задачи с позиций теории экстремума. Выяснилось, что задачи оптимального восстановления естественным образом встраиваются в классическую теорию приближений. Точнее говоря, практически каждой задаче теории аппроксимации можно сопоставить задачу оптимального восстановления, которая придаёт исходной задаче вполне отчётливый информационный смысл. Последующее развитие этой тематики дало возможность решить ряд задач, имеющих явную прикладную направленность: оптимальное восстановление сигналов по неточной информации об их спектре, решение дифференциальных и разностных уравнений по неточным исходным данным.

Теория экстремума

Шестидесятые годы прошлого века стали началом активного развития общей теории экстремальных задач (основным стимулом для этого послужило нахождение Львом Семёновичем Понтрягиным (1908–1988) и его сотрудниками необходимых условий минимума в задаче оптимального управления, которые были названы принципом максимума Понтрягина). Владимир Михайлович включился в эти исследования, принимая участие в работе семинара Алексея Алексеевича Милютина (1925–2001) по оптимальному управлению, что оказало на него значительное влияние. Вместе со свои учеником А. Д. Иоффе он начинает продумывать общие принципы теории экстремума, имея уже определенный опыт решения конкретных экстремальных задач теории приближений. Они приходят к выводу, что необходимые условия экстремума во всех экстремальных задачах, от классического *правила множителей Лагранжа* до *принципа максимума Понтрягина*, строятся по единому рецепту, который они назвали *принципом Лагранжа*. Понимания только этого принципа, без какой-либо апелляции к теории, достаточно для решения многих экстремальных задач (что согласуется с известным высказыванием французского философа XVIII века Клода-Адриана Гельвеция: «Знание некоторых принципов вполне компенсирует незнание многих фактов»).

Сам Лагранж рассматривал задачу

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где extr означает либо максимум, либо минимум. Согласно его рекомендациям, для её решения сначала надо составить функцию (которую теперь называют *функцией Лагранжа*) $\mathcal{L}(x,\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ (разумно ставить множитель и у функции f_0, хотя у Лагранжа $\lambda_0 = 1$), где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ — набор «неопределенных множителей» (*множителей Лагранжа*). Далее надо искать максимум и минимум функции $\mathcal{L}$ по x «как если бы переменные были независимы», для чего надо выписать необходимые условия экстремума: равенство нулю частных производных. При этом если f_i — функции n переменных, то мы получим n уравнений. Относительно множителей λ_i эти уравнения будут однородны и поэтому один из них можно считать, скажем, равным единице. В результате получим $n+m$ уравнений (m уравнений связи) для нахождения $n+m$ неизвестных.

Точный результат (*правило множителей Лагранжа*) звучит так: *если функции f_i, $i=0,1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\widehat{x}$ и в этой точке достигается локальный экстремум, то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, что $\widehat{x}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{L}_x(\widehat{x},\lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0$, где $f_i'(\widehat{x})$ — производные* (*градиенты*) *функций f_i $(0 \le i \le m)$ в точке $\widehat{x}$.*

Рассмотрим теперь так называемую задачу оптимального управления

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \to \min, \qquad \dot{x} = \varphi(t,x,u), \quad u(t) \in U,$$
$$x(t_0) = x_1, \quad x(t_1) = x_1, \tag{1}$$

и попробуем понять вид необходимых условий минимума в данной задаче, следуя формально рекомендациям Лагранжа. В этой задаче f и φ — функции трех переменных, а U — произвольное множество на прямой. Переменная $u(\cdot)$ называется *управлением*, а $x(\cdot)$ — *фазовой переменной*.

Интерес к такого сорта задачам возник в пятидесятые годы прошлого века в ответ на запросы практики: требовалось оптимально (в том или ином смысле) управлять различными процессами, учитывая естественную ограниченность ресурсов (материальных, энергетических и т. п.). В нашем случае процесс описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = \varphi(t,x,u)$ (на «вход» подается $u(\cdot)$, на «выходе» получаем $x(\cdot)$). Мы хотим найти такое управление $\widehat{u}(\cdot)$, чтобы соответствующая фазовая переменная $\widehat{x}(\cdot)$ в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 принимала заданные значения x_0 и x_1, чтобы управление $\widehat{u}(\cdot)$ для каждого $t \in [t_0, t_1]$ не выходило за пределы множества U (отражающего ограниченность наших возможностей) и, наконец, чтобы это управление было бы оптимальным в том смысле, что интеграл на паре $\big(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)\big)$ принимает минимальное значение.

Необходимые условия минимума в подобной задаче были найдены в пятидесятые годы, и они получили название *принципа максимума Понтрягина*. Это одно из наиболее ярких достижений теории экстремальных задач.

Посмотрим теперь на задачу (1) как на задачу минимизации функции двух переменных $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$, удовлетворяющих соответствующим ограничениям. Ограничение $\dot{x}(t)-\varphi\big(t,x(t),u(t)\big)=0$, $t\in[t_0,t_1]$, можно воспринимать как континуум равенств, каждое из которых (при фиксации t) надо умножить на «неопределенный множитель», обозначаемый (следуя традиции) $p(t)$, и затем их «сложить», т. е. проинтегрировать. Таким образом, функция Лагранжа задачи (1) имеет вид

$$\mathcal{L}\big(x(\cdot),u(\cdot),\lambda\big)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(\lambda_0 f\big(t,x(t),u(t)\big)+p(t)\Big(\dot{x}(t)-\varphi\big(t,x(t),u(t)\big)\Big)\Big)dt+\\ +\mu_0\big(x(t_0)-x_0\big)+\mu_1\big(x(t_1)-x_1\big),$$

где $\lambda=\big(\lambda_0,p(\cdot),\mu_0,\mu_1\big)$ — набор множителей Лагранжа.

Пусть, далее, $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ — решение задачи. Выпишем необходимые условия минимума функции Лагранжа в этой точке отдельно по $x(\cdot)$ и по $u(\cdot)$.

По $x(\cdot)$ это так называемая задача Больца — задача классического вариационного исчисления. Если обозначить через L подынтегральную функцию, то необходимые условия в этой задаче имеют вид

$$-\frac{d}{dt}\,\widehat{L}_{\dot{x}}(t)+\widehat{L}_x(t)=0\ \Leftrightarrow\ \dot{p}(t)=-p(t)\widehat{\varphi}_x(t)-\lambda_0\widehat{f}_x(t) \tag{2}$$

(где $\widehat{L}_{\dot{x}}(t)=L_{\dot{x}}\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t),\widehat{u}(t),\lambda_0,p(t)\big)$ и аналогично для остальных функций с крышкой) и

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0)=\mu_0,\quad \widehat{L}_{\dot{x}}(t_1)=-\mu_1\ \Leftrightarrow\ p(t_0)=\mu_0,\quad p(t_1)=-\mu_1. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что если $\widehat{u}(\cdot)$ доставляет минимум по $u(\cdot)$ функции Лагранжа, то необходимо (и достаточно), чтобы в каждой точке t, где функция $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна, функция L достигала бы минимума по $u\in U$ в точке $\widehat{u}(t)$, т. е.

$$\min_{u\in U}\Big(\lambda_0 f\big(t,\widehat{x}(t),u\big)-p(t)\varphi\big(t,\widehat{x}(t),u\big)\Big)=\\ =\lambda_0 f\big(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)-p(t)\varphi\big(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big). \tag{4}$$

Отметим, что это выражение можно записать «в форме максимума», поменяв знак выражения под знаком минимума на противоположный.

Соотношения (2), (3) и (4) (в форме максимума) и есть принцип максимума Понтрягина для данной задачи. Точную формулировку его мы не будем приводить, но суть её (как и в правиле множителей Лагранжа) состоит в том, что существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа λ, для которых выполняются условия (2)–(4).

Систематическое изложение необходимых условий экстремума для различных экстремальных задач с точки зрения принципа Лагранжа приведено в монографиях [5] и [6].

Выпуклый анализ

Работы Владимира Михайловича по выпуклому анализу связаны как собственно с развитием этой дисциплины, так и с приложениями её к задачам теории приближений и теории экстремума. Но важно и то, что под влиянием этих работ сформировался определенный взгляд на предмет выпуклого анализа, который оказался весьма плодотворным, особенно для приложений. Суть его состоит в том, что основное содержание выпуклого анализа — это соотношения двойственности для некоторого набора операторов и порожденное ими выпуклое исчисление. Поясним сказанное на примере оператора сопряжения для конусов, и затем применим это к вопросу о критериях существования решений систем линейных уравнений и неравенств.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ обычное евклидово пространство вектор-столбцов $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ (T обозначает транспонирование), а через $(\mathbb{R}^n)^*$ — евклидово пространство вектор-строк $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Если $y \in (\mathbb{R}^n)^*$, то отображение $x \to y \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i$ есть, очевидно, линейный функционал, и любой линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ может быть представлен в таком виде. Таким образом, мы отождествляем $(\mathbb{R}^n)^*$ с пространством всех линейный функционалов на $\mathbb{R}^n$ и говорим, что $(\mathbb{R}^n)^*$ — двойственное пространство к $\mathbb{R}^n$.

Сопоставим каждому выпуклому конусу $C \subset \mathbb{R}^n$ конус $C^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ по формуле: $C^* = \{\, y \in (\mathbb{R}^n)^* \mid y \cdot x \geq 0,\ \forall\, x \in C \,\}$. Он называется *сопряженным конусом к* C. Легко видеть, что это выпуклый замкнутый конус. Соответствующий оператор обозначим «$*$». Повторное применение этого оператора приводит к конусу

$$C^{**} = (C^*)^* = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot x \geq 0,\ \forall\, y \in C^* \}.$$

Элементарно проверяется, что $C \subset C^{**}$.

Соотношение двойственности для данного оператора состоит в том, что *если* C *— выпуклый замкнутый конус, то*

$$C^{**} = C. \tag{5}$$

Доказательство этого факта есть простое следствие теоремы отделимости точки от замкнутого выпуклого множества.

Если C_1 и C_2 — выпуклые конусы, то $C_1 + C_2$ и $C_1 \cap C_2$ — также выпуклые конусы. Далее, если C — выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ и $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор (который будем отождествлять с его матрицей размера $m \times n$ в стандартных базисах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и обозначать той же буквой), то образ (прообраз) C при действии A, который обозначим AC (CA), есть снова выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n$).

Выпуклое исчисление для данного случая — это формулы для сопряженных конусов только что определенных операций. Для того, чтобы их выписать, определим еще оператор $A^*\colon (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$, сопряженный к A, действующий по правилу $A^*y = yA$. Тогда формулы выглядят так:

$$\begin{array}{llll} (a) & (C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^* & (b) & (C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^* \\ (c) & (AC)^* = C^* A^* & (d) & (CA)^* = A^* C^*. \end{array}$$

Формулы (b) и (c) справедливы без каких-либо предположений (и проверяются без труда). Для справедливости формул (a) и (d) требуются дополнительные предположения, но они заведомо выполняются, если конусы являются конечнопорождёнными. Конус $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *конечнопорождённым*, если существуют такие $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, что

$$C = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Ясно, что это выпуклый конус, и нетрудно доказать, что он замкнут.

Перейдем теперь к приложениям, отметив, что если A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$, то системы m линейных уравнений и неравенств с n неизвестными могут быть записаны так: $Ax = b$ и $Ax \leq b$, где неравенство понимается покоординатно.

Первое, что мы выясним — это условия существования неотрицательного решения у системы $Ax = b$. Понятно, что существование такого решения равносильно тому, что $b \in A\mathbb{R}^n_+$, где $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$.

Очевидно, что $\mathbb{R}^n_+$ — замкнутый конечнопорождённый конус (например, векторами $e_1 = (1, 0 \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$) и конус $A\mathbb{R}^n_+$ тоже замкнут и конечнопорождён (векторами $Ae_1, \ldots, Ae_n$). В силу соотношения (5) и формулы (c) будем иметь

$$A\mathbb{R}^n_+ = \big((A\mathbb{R}^n_+)^*\big)^* = \big((\mathbb{R}^n_+)^* A^*\big)^*,$$

т. е.

$$b \in A\mathbb{R}^n_+ \ \Leftrightarrow\ y^* \cdot b \geq 0,\ \forall\, y^* \in (\mathbb{R}^n_+)^* A^*.$$

Но

$$y^* \in (\mathbb{R}^n_+)^* A^* \Leftrightarrow A^* y^* \in (\mathbb{R}^n_+)^* \Leftrightarrow A^* y^* \cdot x \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+ \Leftrightarrow A^* y^* \geq 0.$$

Тем самым, *система $Ax = b$ имеет неотрицательное решение в том и только в том случае, когда $y^* \cdot b \geq 0$ для тех $y^* \in (\mathbb{R}^m)^*$, для которых $A^* y^* \geq 0$.* Этот результат, доказанный Германом Минковским (1864–1909) и Юлиусом Фаркашем (1847–1930), обычно называют *теоремой Минковского – Фаркаша*.

Поставим теперь следующий вопрос: какие условия существования решения у системы неравенств $Ax \leq b$? Вектор x является решением, очевидно, тогда и только тогда, когда $b = Ax + u$ для некоторого $u \geq 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $b \in A\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m_+$. В силу (5), (b), (c) и того, что $(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$, будем иметь

$$A\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m_+ = \big((A\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m_+)^*\big)^* = \big((\mathbb{R}^n)^* A^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^*\big)^* = \big(0A^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^*\big)^*,$$

т. е.

$$b \in A\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m_+ \;\Leftrightarrow\; y^* \cdot b \geq 0,\ \forall\, y^* \in 0A^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^*.$$

Далее, $y^* \in 0A^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^* \;\Leftrightarrow\; A^*y^* = 0$ и $y^* \cdot x \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^m$, а $y^* \cdot x \geq 0, \forall\, x \in \in \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; y^* \geq 0$. Таким образом, *система неравенств $Ax \leq b$ имеет решение в том и только в том случае, когда $y^* \cdot b \geq 0$ для тех $y^* \in (\mathbb{R}^m)^*$, для которых $y^* \geq 0$ и $A^*y^* = 0$.* Этот результат принадлежит Ки Фаню (Фань Цзи) (1914–2010).

Подобных утверждений из анализа, теории приближений и теории экстремума можно привести ещё много, и все они могут быть получены как следствия соотношений двойственности и формул выпуклого исчисления для тех или иных операторов, переводящих выпуклые объекты (выпуклые множества и выпуклые функции) в себя.

В заключение отметим, что в монографиях [7–9] и в статье [10] Владимира Михайловича и его голландского коллеги Яна Бринхауса (р. 1952) подробно отражены основные воззрения Владимира Михайловича на предмет выпуклого анализа и его взаимосвязи с анализом, геометрией, теорией экстремума и теорией приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гангнус Р. В., Гурвиц Ю. О. Геометрия. Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы: часть 1. Планиметрия; Часть 2. Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1934. ч. 1. 323 с.; 1935. ч. 2. 330 с.
2. Демидович Василий. К истории Мехмата МГУ. — М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2013. 460 с.
3. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во МГУ, 1976. 305 с.
4. Тихомиров В. М. Об ε-энтропии некоторых классов аналитических функций // ДАН СССР, 1957. Т. 117, № 2. С. 191–194.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. 481 с.
6. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. 430 с.
7. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ. Анализ-2, Итоги науки и техн., Сер. Соврем. пробл. мат., Фундам. направления, 14. — М.: ВИНИТИ, 1987. С. 5–101.
8. Magaril-Il'yaev G. G., Tikhomirov V. M. Convex Analysis: Theory and Applications. — AMS, 2003 (Translations of Mathematical Monographs, v. 222). 183 p.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. 3-е изд. — М.: УРСС, 2011. 175 с.
10. Бринкхаус Я., Тихомиров В. М. Двойственность и исчисление выпуклых объектов (теория и приложения) // Матем. сборник. 2007. Вып. 198, № 2. С. 29–66.

Поступила 13.07.2014

TOWARDS VLADIMIR MIKHAILOVICH TIKHOMIROV'S 80th BIRTHDAY

V. B. Demidovich, G. G. Magaril-Il'yaev

On the occasion of the 80th birthday of Moscow State University professor Vladimir Mikhailovich Tikhomirov this article briefly presents his biography and main academic results.

Keywords: Vladimir Mikhailovich Tikhomirov, approximation theory, extremal problems, convex analysis.