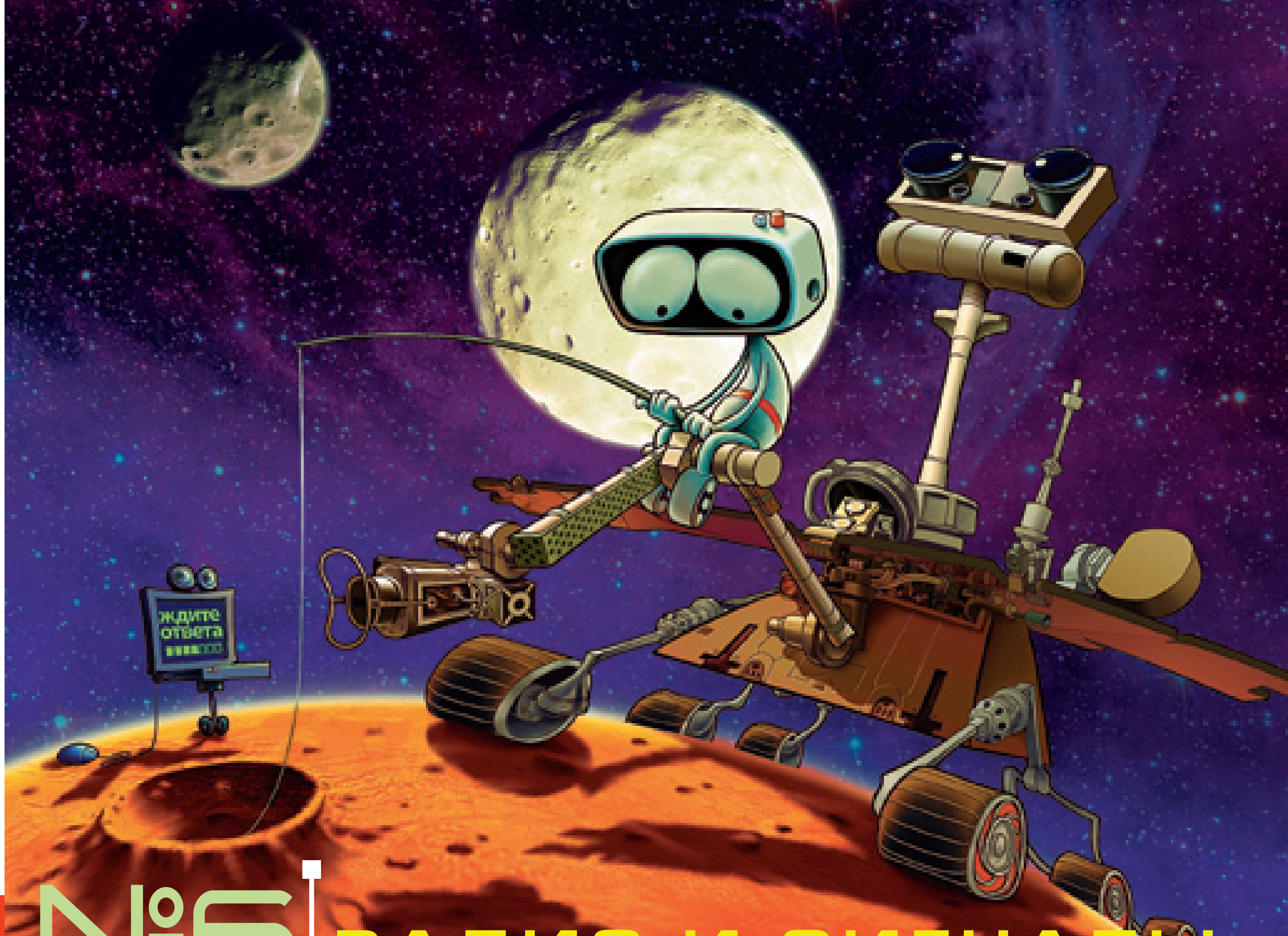
ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№6 | июнь 2012

Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru



№6
ИЮНЬ
2012

РАДИО И СИГНАЛЫ

ОБЫЧНОЕ НЕОБЫЧНОЕ ЗЕРКАЛО

КУБИЧЕСКИЕ ФЛЕКСАГОНЫ

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Хотите проникнуть в забавные тайны самого обычного зеркала? Или познакомиться с последними достижениями в той самой геометрии, которую изучают в школе? А узнать о самых разнообразных сигналах в природе? О тех, которые преодолевают огромные расстояния в космических просторах, или о тех, которые распространяются в мельчайших нервных клетках, помогая мозгу управлять телом человека?

А ну-ка, сообразите, кофе какого помола больше влезет в банку – крупного или мелкого? Догадались? А ещё вам предстоит разобраться, кто из двоих друзей прав в задаче о бильярдном шаре, поломать голову над тем, что случится с бегемотом, вздумавшим повисеть на растягивающихся пружинках. Вы сможете самостоятельно смастерить объёмный флексагон, и на его сторонах появятся картинки о приключениях Квантика. И конечно, вас ждёт очередной тур нашего конкурса.

Приступайте к чтению!

Наш электронный адрес:
kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com

Художник Yustas-07

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакторы: Александр Бердников, Алексей Воропаев, Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Художественный редактор: Дарья Кожемякина
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
Тираж: 1-й завод 500 экз.

Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83. e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Молотый кофе 2

Приключения продолжаются 19

СЛОВЕЧКИ

Такое обычное необычное зеркало 6

СМОТРИ!

Последние исследования показывают... 9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Кто прав? 10

КАК ЭТО УСТРОЕНО

Радио и сигналы 12

СВОИМИ РУКАМИ

Кубические флексагоны 16

УЛЫБНИСЬ

Математические ляпы 22

Трудная задача 26

ОТВЕТЫ

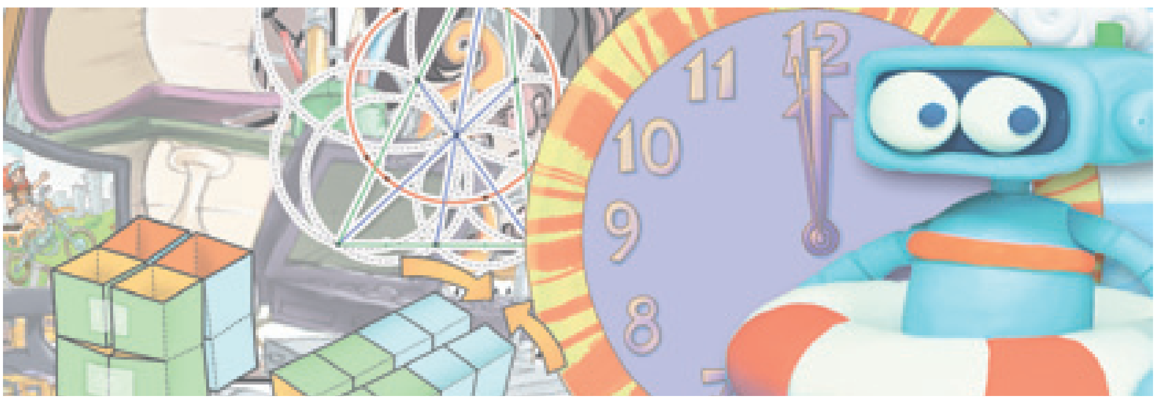
Ответы, указания, решения 28

ОЛИМПИАДЫ

Наш конкурс 32

КАРТИНКА-ЗАДАЧА

Необычные пружинки IV страница обложки



Александр Бердников

Молотый кофе

Как-то раз Лёша и Антон собрались съездить на неделю на дачу. Антон обожал пить по утрам крепкий кофе и потому решил им основательно запастись. Но вот незадача: когда он вспомнил про свой любимый напиток, в его огромной сумке после всех сборов осталось совсем мало места. Как он ни пытался перекладывать вещи, ничего больше маленькой баночки в сумку не влезало. А полной баночки кофе хватало только на пять дней. Антон уже начал терять терпение, пытаясь решить возникшее затруднение. Молча наблюдавший за ним Лёша не мог понять, что это Антон так прицепился к этим двум порциям: ну будет кофе чуть более или чуть менее крепким, какая разница-то? Но Антон был тот ещё педант: подобные мелочи значили для него куда больше, чем для Лёши.

Наконец, яростно сверля взглядом уже не так горячо любимый кофе, он заметил щели между отдельными гранулами. И тут его осенило!

– Придумал! – воскликнул он. – Сейчас я этот кофе помолю, в смысле, перемелю, короче, молотым сделаю! Тогда между гранулами пробелы станут меньше, и всё как раз в банку влезет.

– Погоди-ка, – прервал его Лёша. – Пробелы-то, конечно, уменьшатся, но их станет гораздо больше. Кто знает, больше тогда в банку поместится или меньше?

– Да, непонятно... Надо бы с этим разобраться прежде, чем всё молоть, вдруг только хуже станет? Да и самим интересно додуматься.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

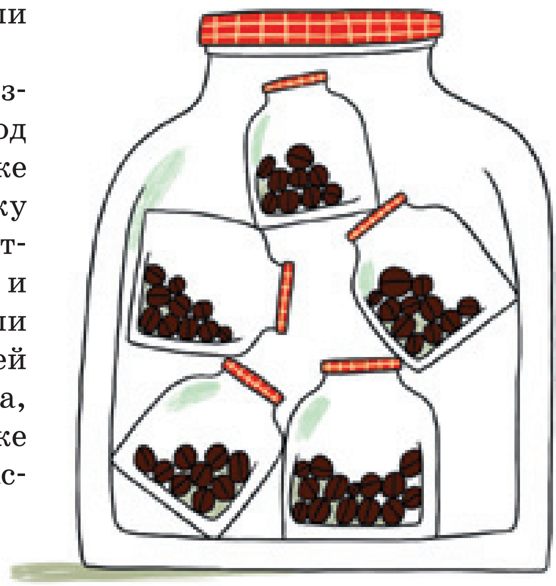
А как вы думаете, удастся таким способом сэкономить место или станет только хуже? А может быть, в обоих случаях кофе займёт один и тот же объём?

– Только я что-то не пойму, как к такой задаче подступиться. Там же кусков немерено, да все неправильной формы, – помрачнел Лёша. – Да и как понять, как они в банке располагаются?

– Ну, это понимать вроде и не обязательно. Надо только разобраться, чем различаются эти два случая, а как конкретно устроен каждый из них – не важно.

– Чем они отличаются, говоришь? Да только размером крупиц. Наверное, можно считать, что крупицы просто, к примеру, во сто раз меньше стали по объёму, и их стало больше, соответственно, в сто раз. О, значит, если его перемолоть, будет то же самое, как если бы взяли сто твоих баночек кофе и ссыпали в кучу, а потом ещё и в сто раз уменьшили.

– Ух ты! – подхватил Антон. – Значит, объём не изменится. Ведь если крупицы помолоть, а потом под увеличительным стеклом посмотреть – будет та же картина, словно и не мололи. Поэтому если банку мысленно в сто раз уменьшить по объёму, получится как бы немного молотого кофе, только, понятно, и кофе, и пустого места в сто раз меньше станет. И если из ста таких банок потом исходную составить, в ней получится сколько и было и кофе, и пустого места, только кофе уже как будто молотый! Слушай, это же что получается – плотность, ну то есть отношение мас-



сы к объёму, у порошка не меняется! Хотя что это я радуюсь, что с кофе-то делать, всё равно непонятно.

– Да, сколько его не мели, лучше не становится. Что же делать-то?

Пока друзья думают, попробуйте найти какой-нибудь выход из этой ситуации. Подсказка: всё же можно обойтись одним лишь измельчением, но догадаться до решения не так-то просто, так что не опускайте руки раньше времени!

Подумав, Антон заявил:

– Нет, наверняка должен быть какой-то способ! Плотность порошка из-за щелей между крупицами явно меньше, чем у самого кофе. Надо как-то этим воспользоваться, избавиться от щелей...

– Точно! – осенило Лёшу. – Если насыпать полную банку немолотого кофе, а не влезающий остаток хорошенько измельчить, то его можно будет засыпать в промежутки между крупными частичками! Ведь так?

– Вроде всё выглядит правильно... Но как же так получается, что и крупный, и мелкий помолы не помещались (они имели одинаковую плотность), а их смесь влезла (она большей плотности, чем то, что смешивали)?

– Так если бы мы просто слой крупного кофе насыпали, а поверх него «положили» слой мелкого, ничего бы и не получилось. А мы ещё после этого заставляем эти слои друг в друга проникать. Вот и получается, что в банку уже больше влезает.

– И вправду. Смотри, а я ещё один способ понять всё это придумал. Представь, что мы сначала полную банку мелким кофе засыплем. Влезет, как мы уже поняли, столько же, сколько и раньше. А теперь много областей размером с большую крупинку заменим этой самой крупинкой. Но она ведь сплошная, в ней-то щелей уже нет! Вот и получится в той же области больше масса.

– Да, это почти то же самое рассуждение, только «с точки зрения» уже мелкого кофе. А я вот ещё что подумал. Сколько сам кофе, без промежутков, объёма занимал? А какая, собственно, разница, пусть, к примеру, $\frac{3}{4}$. То есть щели занимают $\frac{1}{4}$. Засыпав гораздо более мелкий помол, мы уже у этих щелей только $\frac{1}{4}$ незанятыми оставим. То есть доля пустого места уже

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

– Ну да, щелей стало меньше, это-то мы и так выяснили.

– Ты дальше слушай. Если бы могли ещё более мелко помолоть, можно было бы эту «кофейную пыль» снова засыпать в оставшиеся промежутки, и незанятым осталось бы лишь

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$$

Такую процедуру можно было бы проделывать сколько душе угодно, и свободного пространства останется

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\ldots\approx 0,$$

то есть мы займём почти весь объём.

– Погоди, погоди! Это что же получается? – изумлённо воскликнул Антон. – Если бы у нас были не крупинки кофе, а какие-нибудь раскоряки, тонкие такие, ветвящиеся, то понятно, что если их в кучу свалить, то свободное место в куче останется чуть ли не всё. Обозначим его долю через x, это будет почти 1, но всё-таки не всё, то есть $x<1$. Тогда, беря меньшие копии этих коряг и засыпая в промежутки, получим, что сначала доля пустого места будет x, потом x^2, x^3 и так далее, чем дальше, тем меньше. Рано или поздно она станет меньше хотя бы $\frac{1}{10}$. То есть мы почти всё пространство заполнили этими корягами (правда, разного размера, ну и что?), которые, казалось, как ни складывай, плотно никак не уложишь! Прямо магия какая-то!

– Да, чудеса сплошные. Давай теперь это попробуем на практике применить!

Таким образом, кофе поместился-таки в банку в устраивающих Антона количествах и сумка, наконец, была сложена. Но куда большее удовольствие друзья получили не от избавления от бытовой проблемы, а от той интересной и удивительной задачи, которую они решили. Надеюсь, вам она понравилась не меньше!

Художник Наталья Гаврилова

слОВечки
выпуск 2

Сергей Федин

ТАКОЕ ОБЫЧНОЕ НЕОБЫЧНОЕ

ЗЕРКАЛО

Каждая из окружающих нас вещей скрывает какую-нибудь тайну. Но, наверное, самая среди них загадочная – это зеркало. В прежние времена люди относились к зеркалам с большим уважением и даже страхом. Ещё бы! Из-за способности зеркала удваивать (то есть повторять) всё вокруг его считали дверью в потусторонний мир, к привидениям, духам и нечистой силе. Кстати, наверное, поэтому люди верят, что привидения и вампиры не отражаются в зеркале. Так что, если ты когда-нибудь не увидишь своего отражения, проверь, не превратился ли ты в привидение.

Но у зеркала есть и другие волшебные свойства. Хочешь, например, я легко докажу с его помощью, что 2 = 3? Тогда посмотри на эту удивительную картинку (эту и следующие надписи мне помог красиво оформить художник Сергей Орлов).

Видишь, слово ДВОЕ, симметрично отражаясь в зеркале, чудесным образом превращается в слово ТРОЕ? Это ли не доказательство? 🙂

Как же так, – возможно, скажешь ты, – ведь зеркало всегда отражает всё вокруг суперточно? Точно, да не совсем. Подойди, например, к зеркалу и подними правую руку. И ты увидишь, как твоё «суперточное» отражение тоже послушно поднимет руку. Но левую!!! Разве можно после этого верить зеркалу?

Словечки

Такое обычное необычное

Зеркало

Ты всё ещё сомневаешься? Тогда вот тебе ещё один примерчик «зеркального» коварства, который я придумал, чтобы уж совсем тебя убедить.

НА ДВОРЕ ТРАВА

Если ты приставишь к этой надписи сверху зеркало, то увидишь в отражении не то же самое! Зеркало, шутя, допишет продолжение скороговорки, и вот, что у него получится.

НА ТРАВЕ ДРОВА

А вот еще одна «зеркальная» шутка из книги А. Калинина «Видение тайны. Загадочные картины в прошлом и настоящем». Посмотри на отражение имени МАШКА в зеркальном столике. Там оно чудесным образом превращается в слово ШУТКА. Так и кажется, что зеркало подмигивает нам и говорит: «Я пошутило!»

Кстати, такие странные, как будто из Зазеркалья Алисы, надписи, отражение которых прочитывается по-другому, так и называются – зазеркалами. Секрет их придумывания прост: каждую букву можно записать самыми разными способами – ну и отражения тогда тоже будут разными. Например, буква А может в отражении, в зависимости от написания, превращаться чуть ли не в половину алфавита. Вот, пожалуйста!

Перед тобой шесть разных букв А (одна повторяется дважды). А если приставить к этой «команде А» снизу зеркало, она превратится в слово ПОГАНКА!

Обрати внимание, до сих пор мы приставляли к нашим хитрым надписям зеркало сверху или снизу (та-

кие зазеркалы называются вертикальными). Но ведь его можно ставить и сбоку, и это будут совсем другие зазеркалы (боковые). Вот один из них, придуманный в Америке. Английское слово Hate (то есть ненависть), написанное на футболке, зеркало превращает в противоположное – Love (любовь).

А еще, оказывается, зеркало умеет не только шутить и говорить по-английски, но и... считать! Достаточно посмотреть на эти два равенства с римскими цифрами. Второе – просто зеркальное отражение первого. Получилась совсем другая формула, но тоже верная!

V + VI = XI | IX = IV + V

Теперь ты видишь, как много чудес скрывает такое обычное на вид зеркало. Быть может, некоторые из них откроются и тебе.

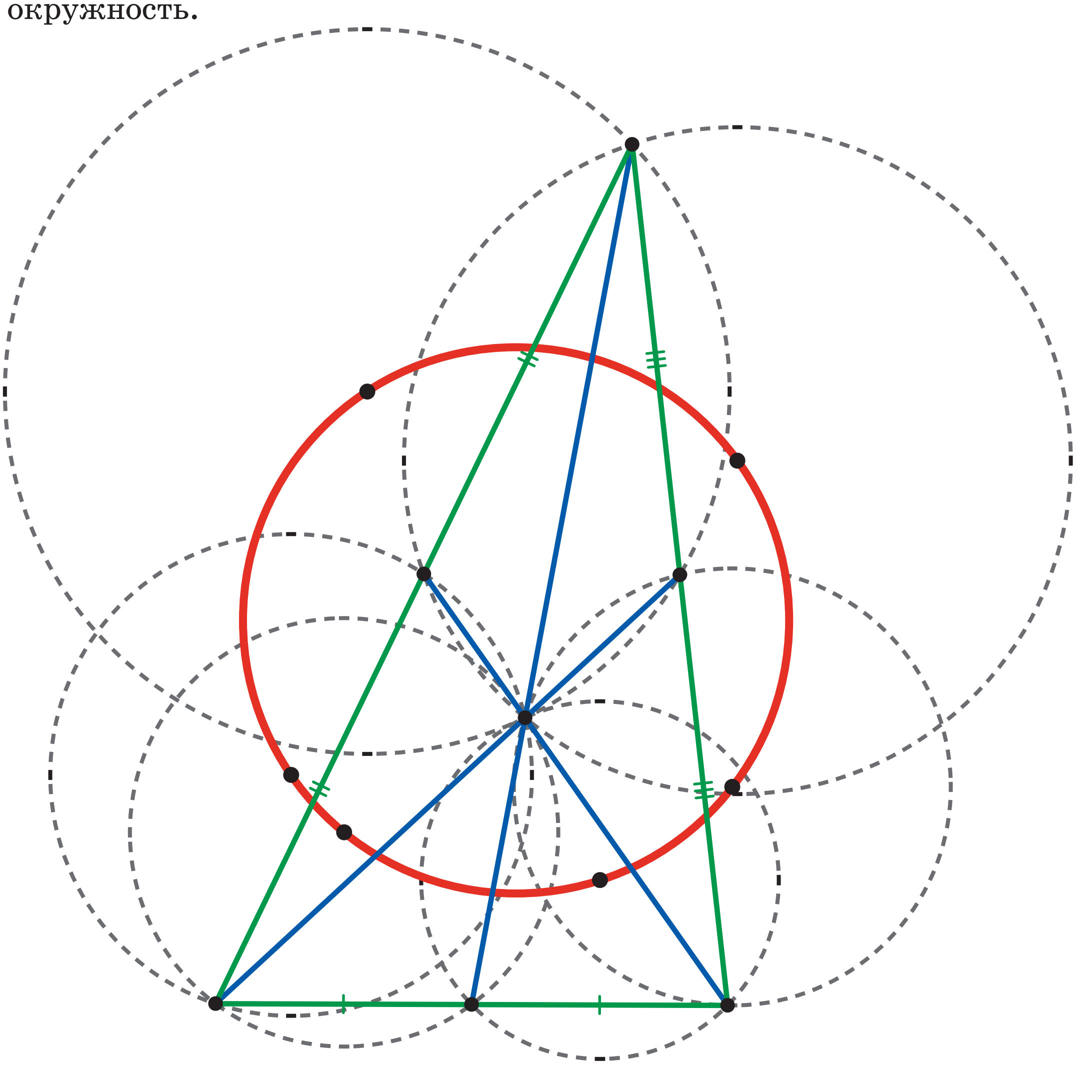
Художник Сергей Чуб

ПОСЛЕДНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКАЗЫВАЮТ…

Григорий Фельдман

СМОТРИ!

Люди изучают геометрию треугольника уже около 4000 лет. Практически все факты из обычного школьного учебника геометрии были известны уже в середине XVII века. Тем удивительней, что люди всё ещё открывают в этой области теоремы, которые формулируются достаточно просто, и непонятно – как раньше такое не придумали? Например, в 2000 году голландец ван Ламун обнаружил следующую удивительную окружность.



Отметим середины сторон зелёного треугольника и проведём к ним из противолежащих вершин синие отрезки (*медианы*). Они разделят треугольник на 6 треугольников. Опишем вокруг них пунктирные окружности (описанная окружность треугольника проходит через его вершины). Тогда центры этих окружностей лежат на одной окружности, которую стали называть *окружностью ван Ламуна*.

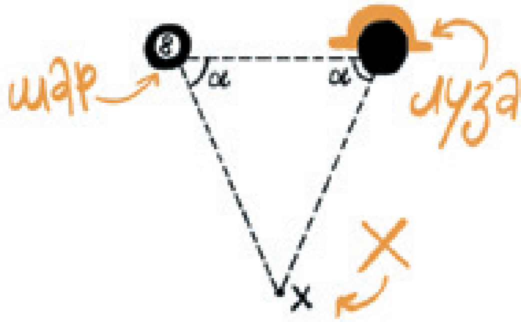
КТО ПРАВ?

Егор Бакаев

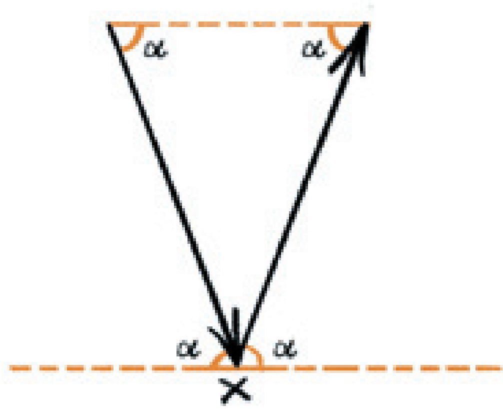
Петя и Вася прочитали задачу:

На схеме изображено расположение бильярдного шара, лузы, в которую шар нужно загнать, и точки X, через которую проходит прямолинейный борт бильярдного стола.

Они образуют равнобедренный треугольник с углом α при основании. Можно ли, исходя из этих данных, установить, под каким углом к борту надо выпустить шар, чтобы он, отскочив, попал в лузу?

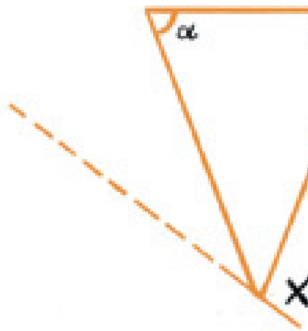


Петя, прочитав задачу, воскликнул: «Конечно же, под углом α! Какая-то слишком простая задача», – и нарисовал чертёж:



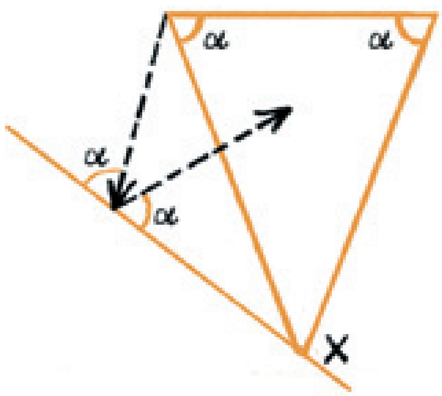
Вася: Не так всё просто! Мы же не знаем, проходит ли борт параллельно основанию треугольника. Если бы это было так, то действительно, раз прямые параллельны, то углы, которые борт образует со сторонами треугольника, равны α как накрест лежащие.

И траектория шара, выпущенного под углом α к борту, будет проходить как раз по сторонам треугольника. Но борт же может проходить и под каким-нибудь другим углом:



Петя: Тогда в этой задаче не хватает данных! В условии нам даны только два равных угла при основании этого треугольника. Зная, что они равны α, мы можем найти третий угол треугольника, но не можем найти угол, под которым проходит борт, потому что он не зависит от углов треугольника! А угол, под которым следует выпустить шар, очевидно, зависит от того, как проходит борт!

Вася: А вдруг не зависит? То есть под каким бы углом борт ни проходил, шар нужно выпускать под одним и тем же углом к борту! И раз мы уже выяснили, что в случае, когда борт параллелен основанию треугольника, шар нужно выпускать под углом α, то и во всех других случаях его надо выпускать под углом α:



Кто же прав:
Петя или Вася?

Художник Анастасия Мошина

Александр Бердников

Радио и сигналы

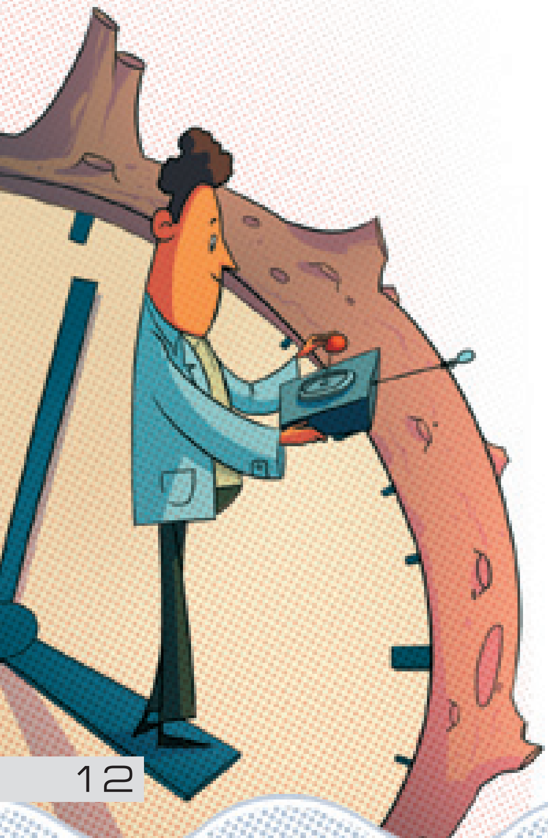
Продолжение. Начало см. в № 5 за 2012 г.

В прошлом номере вы познакомились с тем, как радиосигналы (по сути своей – свет) помогают связывать города, передавая информацию по всей Земле в мгновение ока. Теперь мы поговорим о том, какую роль подобные явления играют в других ситуациях.

Большое значение при выборе нашего «почтальона», как мы видели, играла скорость света: он способен практически мгновенно доставить наше сообщение в любую точку Земли, в отличие от звука, у которого возникали с этим серьёзные проблемы. Но сколь бы ни велика была эта скорость, она всё-таки конечна. Если расстояние между собеседниками будет увеличиваться, рано или поздно и свет начнёт тратить ощутимое время на полёт из одного конца в другой.

Даже ближайший наш космический сосед – Луна – находится так далеко, что свет, казалось бы, не знающий никаких пределов, тратит более секунды, чтобы добраться до неё. Скажете, мало? Тогда вот вам пример повнушительней. Свет, который вы видите ежедневно, по большей части немного «просроченный». Чтобы добраться от своего источника – Солнца – до нашей планеты, лучам требуется более 8 минут.

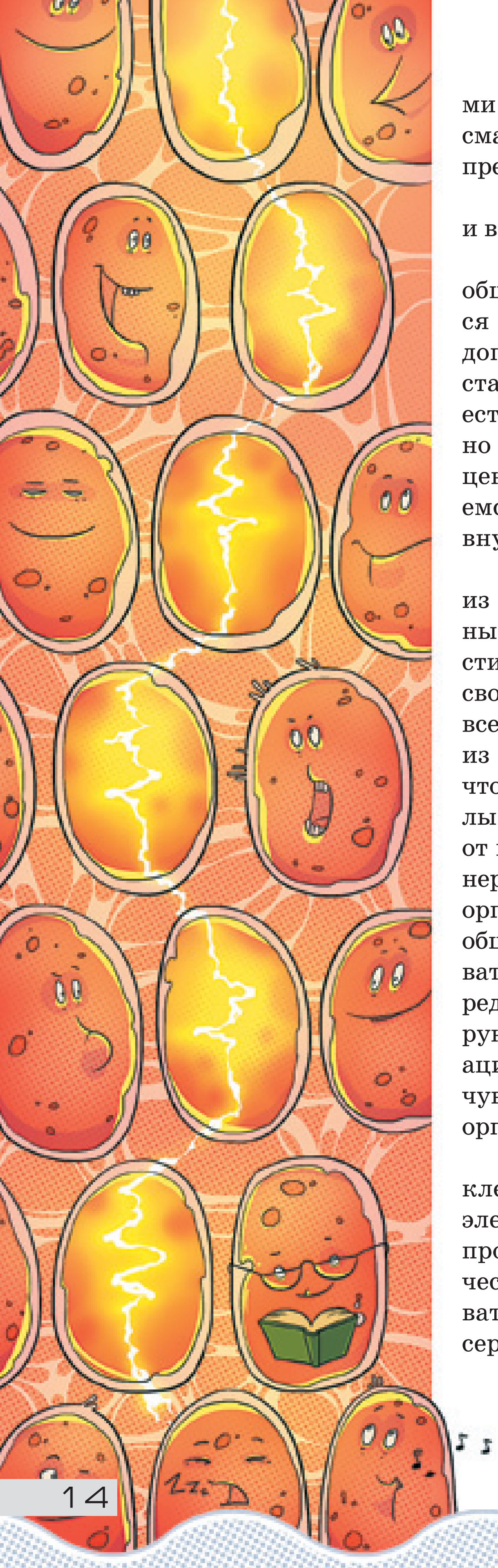
В связи с этим читателям предлагается следующая незамысловатая, но требующая внимательности задачка (Я. И. Перельман. «Знаете ли вы физику»). Солнечный свет достигает Земли только через 8 минут после излучения Солнцем. Значит ли это, что восход и закат происходят на эти 8 минут позже, по сравнению с воображаемой ситуацией, в которой свет распространяется мгновенно?



Конечно, Солнце в этом плане не исключение. Задержки испытывают световые сигналы и при достижении других планет Солнечной системы. Это довольно неприятно влияет на их исследование. Если при управлении луноходом (искусственным аппаратом, посланным на поверхность Луны) задержки в пару секунд – терпимое препятствие, то уже в случае Марса это становится серьёзной проблемой. Представьте, что вы управляете таким аппаратом, глядя на Марс «глазами марсохода». То есть он снимает окружающее его пространство на камеру и передаёт эти данные вам. Заметьте, что в лучшем случае эта передача будет лететь в космосе около трёх минут, прежде чем достигнуть вас.

Вот вы смело ведёте марсоход вперёд, ничто не предвещает беды. Но вдруг вы замечаете вдали подозрительную чёрную полоску. Ладно, остановимся, посмотрим, что это. Пока приказ остановиться долетит до аппарата, он как раз подойдёт поближе. Вот проходит три минуты, и перед вами открывается марсианская пропасть во всей своей красе. «Хорошо, – думаете вы, – что опасность была замечена заранее, можно было бы и провалиться невзначай...». Но что такое? Приказ стоять уже должен был достичь марсохода, а картинка перед вами показывает, как он продолжает целеустремлённо идти навстречу своей гибели! И тут догадка: экран же показывает то, что было три минуты назад. Марсоход послушно остановился на дне расщелины, а вы видите запоздавшее видео, на котором запечатлены последние секунды существования аппарата. Когда вы только заметили опасность и приказали остановиться, он уже подошёл к краю бездны, и спасти его вы были не в состоянии. Чтобы избежать такой драмы (оборудование совсем не дешёвое), конструкторам приходится обучать аппараты справляться с различными проблемами и задачами самим, не полагаясь на далёких и не успевающих прийти на выручку людей.

Однако запоздание света не всегда играет такую отрицательную роль в исследовании далёкого космоса. Сейчас астрономы в состоянии наблюдать звёзды, удалённые от нас на огромные расстояния. Даже свету, чтобы их пройти, требуются миллионы лет! В результате та картина, которую наблюдают с помощью самых сильных телескопов, оказывается ужасно устаревшей (вспомните гром: из-за не столь высокой скорости звука часто гром слышен заметно позже вспышки молнии, то есть вы слышите уже на самом деле не существующую молнию). Это позволяет увидеть звёзды такими, каки-



ми они были огромное время назад, как будто мы пересматриваем старые-старые записи. А какого учёного не прельстит возможность заглянуть в далёкое прошлое?..

Но довольно гигантизма. Вернёмся на Землю и взглянем на нашу проблему с другого ракурса.

Прежде чем люди и даже животные стали как-либо общаться между собой, им приходилось справляться со странными на первый взгляд проблемами. Как договориться с самим собой? Задумайтесь, как вы заставите своё тело сделать хоть что-нибудь? У человека есть большое число мышц и органов и всеми ими нужно управлять, доносить до них приказы «командного центра» – мозга. Несмотря на то, что все мы справляемся с этим не задумываясь, за передачу информации внутри нас самих отвечает сложная система.

Тело человека, как и тела всех животных, состоит из мельчайших[1], до некоторой степени самостоятельных «подорганизмов» – клеток. Эти элементарные частички очень разнообразны, и у каждой их группы своя роль в поддержании жизни и слаженной работы всего их сообщества – организма в целом. Некоторые из них – нервные клетки – как раз и занимаются тем, что доставляют по всему организму различные сигналы. Они выстроены в длинную цепочку друг за другом от пункта отправления до пункта назначения, образуя нерв. Если вы дотронетесь до чего-либо, специальный орган это почувствует и отправит соответствующее сообщение по нерву в мозг: нервные клетки будут передавать сигнал друг другу по цепочке. А мозг, в свою очередь, пошлёт по другому нерву сигнал мышцам, дабы рука сделала необходимое (по его мнению) в этой ситуации движение. Всё, что вы видите, слышите и вообще чувствуете, так бы и не покинуло глаз, ушей и других органов и не было бы осмыслено мозгом, не будь нервов.

И как же справляются со своей работой нервные клетки? Оказывается, каждая из них передаёт по себе электрический сигнал, то есть они работают почти как провода в машинах! У некоторых животных (электрических угрей, скатов) нервная система может создавать электрический ток такой силы, что становится серьёзным оружием. Но подождите, мы же знаем, что

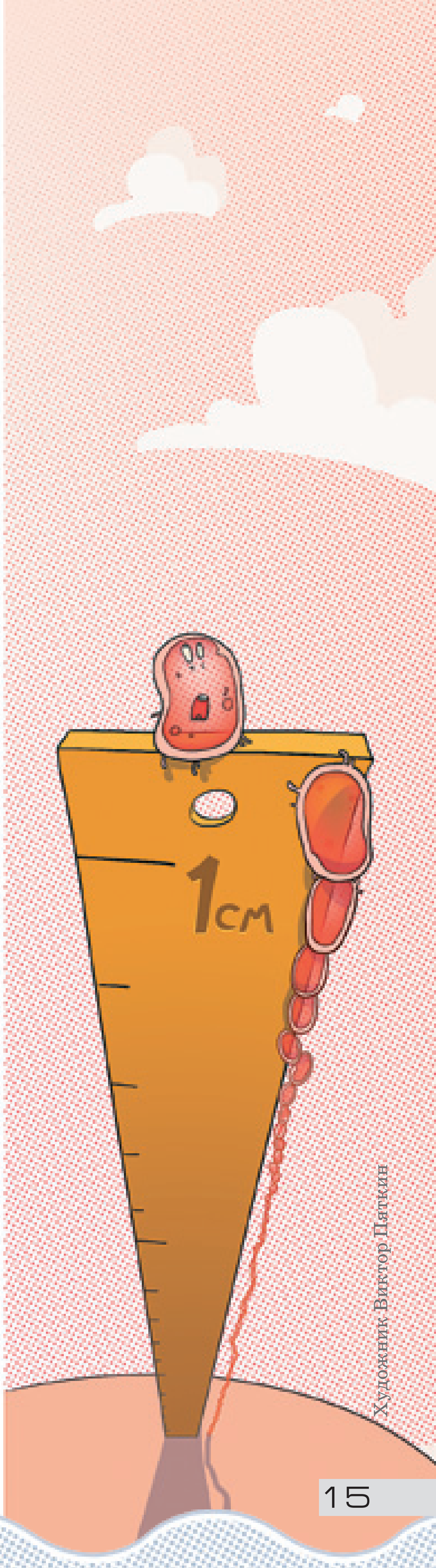
[1]В сантиметровой цепочке умещается несколько сотен среднестатистических клеток.

электрические сигналы, как и свет, движутся с такой огромной скоростью, что пройти человеческое тело из конца в конец они могут миллион раз за секунду. Почему же человек тогда не обладает соответствующей, мгновенной на наш взгляд реакцией?

Просто это была не вся правда. Внутри каждой клетки сигнал летит с завидной стремительностью, но вот когда нужно передать его соседней клетке, происходит относительно медленный процесс, занимающий основное время. Первая клетка испускает из своего конца специальные вещества, которые обнаруживает следующая клетка, и процесс возобновляется с прежней скоростью. И хотя расстояние между сигнализирующим кончиком одной клетки и чувствительным кончиком другой крайне мало даже по клеточным меркам, времени на это уходит куда больше, чем на проход быстрого электрического импульса по длинной клетке.

В заключение, чтобы не быть голословным, приведу пример способа, как можно вручную измерить скорость вашей реакции. Пускай другой человек легонько держит небольшую (примерно 15 см) линейку нулём книзу. Возьмитесь двумя пальцами в точности за ноль на шкале линейки и чуть раздвиньте пальцы, чтобы линейка освободилась. Цель второго человека – без каких-либо предупреждений в случайный момент отпустить свой конец. Линейка, конечно, начнёт падать. Как только вы это заметили, сомкните пальцы обратно, чтобы поймать линейку. Вы поймаете её настолько быстро, какова ваша реакция.

Заметьте, что ваши пальцы теперь расположены не напротив нуля – ведь линейка успела немного упасть. За t секунд свободно падающее тело пролетает примерно $5t^2$ метров или $500t^2$ сантиметров. Значит, время, за которое вы успеваете среагировать, можно вычислить так: $\sqrt{5s}/50$, где s см – отметка, напротив которой ваши пальцы поймали линейку. Мне, например, требуется в среднем 3/4 секунды. Повторите эксперимент несколько раз, чтобы избавиться от случайных ошибок и погрешностей в его проведении. Правда, не стоит ожидать постоянного результата, даже когда приноровитесь: мозг – штука сложная и непостоянная...



Художник Виктор Пяткин

Григорий Фельдман

КУБИЧЕСКИЙ ФЛЕКСАГОН

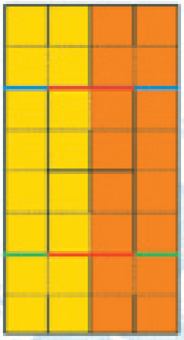


Рис. 1а

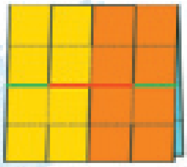


Рис. 1б

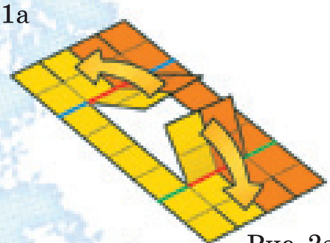


Рис. 2а

Рис. 2б

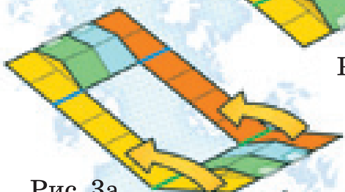


Рис. 3а

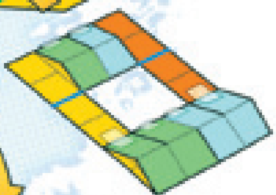


Рис. 3б

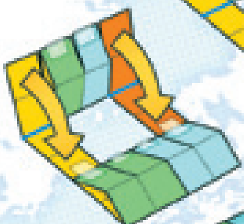


Рис. 4а

Рис. 4б

В «Квантике» №4 (2012) мы рассказывали, как сделать своими руками флексагоны – удивительные фигурки, которые умеют «самовыворачиваться», меняясь на глазах. Сейчас вы узнаете, как легко изготовить объёмный флексагон.

1. Вырежьте развёртку со стр. 17. О том, что за странные кусочки картинок изображены на её обороте, мы расскажем чуть позже.

2. Прогните развёртку по всем линиям, которые делят её на квадратики.

3. Сделайте прорези вдоль чёрных сплошных линий. Для этого проще всего вначале согнуть развёртку пополам (рис. 1б), сделать прорези вдоль вертикальных чёрных линий, развернуть её и сделать прорезь вдоль горизонтальной чёрной линии.

4. Согните развёртку по красным жирным линиям, как показано на рис. 2а и склейте скотчем квадратики, как на рис. 2б (сверху и снизу развертки).

5. Согните развёртку по зелёным жирным линиям, как на рис. 3а, и склейте скотчем две пары квадратиков: справа и слева, как на рис. 3б.

6. Согните развёртку по голубым жирным линиям, как на рис. 4а, и склейте скотчем две пары квадратиков: справа и слева, как на рис. 4б.

7. Осталось «развернуть» флексагон. Как это сделать – показано на рис. 5а, 5б, 5в.

Флексагон готов! Поэкспериментируйте, изгибая его. Если вы всё сделали правильно, вас ожидает небольшой сюрприз. По-разному сворачивая флексагон, вы сможете увидеть на сторонах получающейся фигурки две серии картинок о приключениях Квантика. В уменьшенном виде они изображены справа на стр. 18.

На нашем сайте www.kvantik.com размещён видеоролик, в котором флексагон делают прямо на ваших глазах за пару минут.

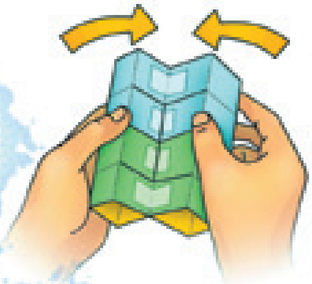


Рис. 5а

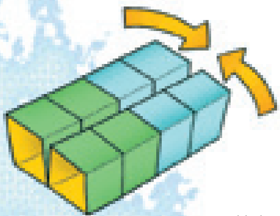


Рис. 5б

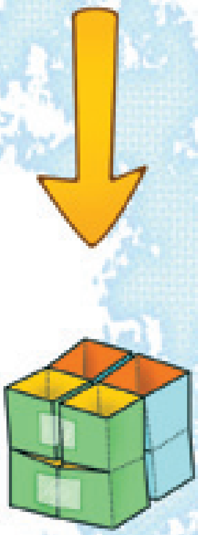
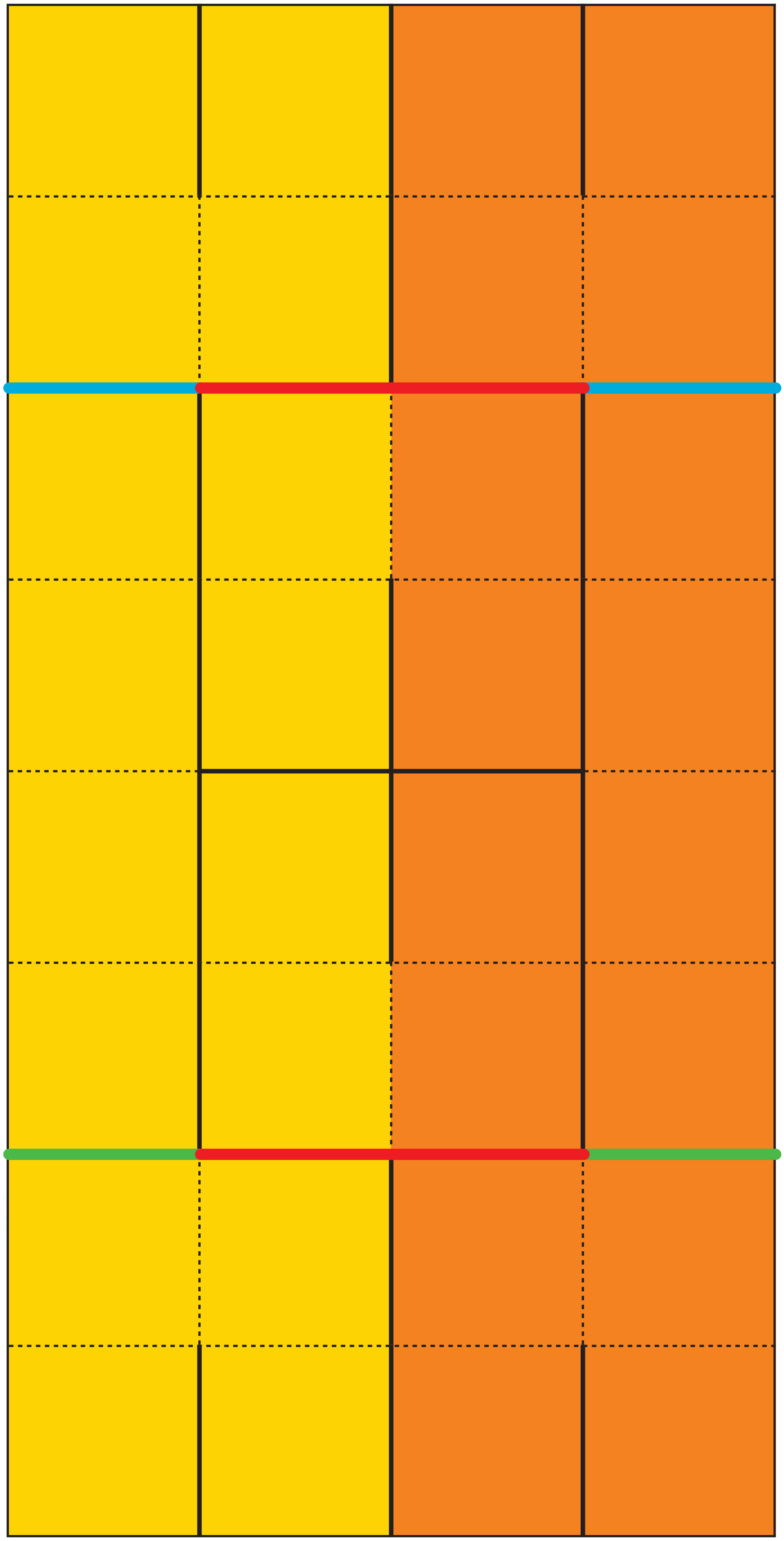
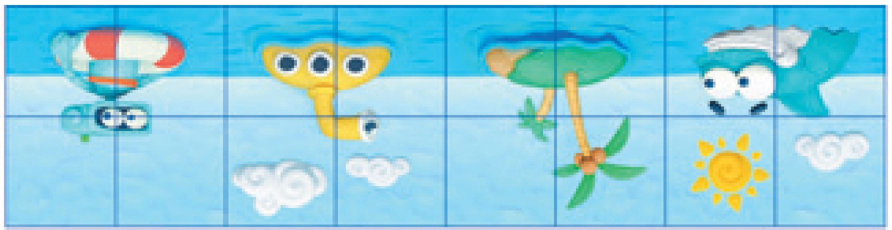
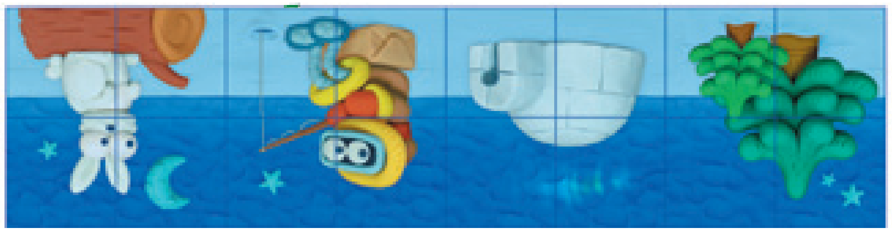


Рис. 5в







Художник Дарья Котова

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ

Игорь Акулич

(эта статья написана как продолжение статьи С.Дориченко «Приключения со стрелками» из «Квантика» № 1 за 2012 год)

– Что ж, Федя, задачу о том, сколько раз в сутки совпадают часовая и минутная стрелки, мы с тобой одолели, – разглагольствовал Даня. – Оказалось, ровно 22 раза. Ну, а теперь предлагаю победить более сложную, на мой взгляд, задачу – выяснить, сколько раз совпадут все три стрелки.

– Что ж тут сложного! – воскликнул Федя. – Только в полдень. Ну, и в полночь.

– Ты уверен?

– Ну... Почти.

– Вот именно. Секундная стрелка делает полный оборот за минуту и движется очень даже шустро. И если часовая и минутная стрелки очень близки, а в этот момент через них перепрыгивает секундная – поди тут разбери, совпали они все три или нет!

– Как же быть?

– И ты меня ещё спрашиваешь! Кто из нас в Заочной математической школе учится? Вот и привлекай математику! Иначе какой смысл её зубрить?

– Верно. А как?

– Э... да я и сам не знаю. Но попробую. В полночь все стрелки совпадают, и в полдень тоже – это понятно. А в промежутке между ними – что? Неясно. О! Придумал! Для начала давай весь путь обозначим за единицу.

– А где тут весь путь?

– Конечно, полный оборот – что же ещё? Предположим, три стрелки совпали. При этом часовая прошла путь x, где x больше 0, но меньше 1. Минутная движется в 12 раз быстрей, и она продвинется на $12x$, а секундная – в 60 раз быстрей минутной, значит, она преодолеет $720x$. Вот! А дальше? Как отобразить тройное совпадение?

– Подожди, я понял, как! Если две стрелки совпадают, то разность пройденных ими путей равна целому числу оборотов! Поэтому совпадение часовой и минутной стрелок можно выразить так: разность $12x-x=11x$ – *целое* число!

– Более того: это *натуральное* число, то есть непременно и *целое*, и *положительное*. Ведь минутная стрелка заведомо сделает *больше* оборотов, чем часовая!

– Согласен. Из совпадения часовой и секундной стрелок делаем вывод: разность $720x-x=719x$ – тоже натуральное число! А из совпадения минутной и секундной...

– Хватит уже, разошёлся! Если совпадают часовая и минутная стрелки, а также часовая и секундная, то минутная и секундная *автоматически* совпадут – куда им деваться-то?

– Что же дальше? Нас учили, что удобнее всего натуральные числа обозначать буквами m, n и им подобными. Так и сделаем. Пусть $11x=m$, а $719x=n$. И теперь...

– Я знаю, что теперь! Из первого равенства $x=\frac{m}{11}$, из второго $x=\frac{n}{719}$. Поэтому $\frac{m}{11}=\frac{n}{719}$.

– Ну, ты даёшь! Дробей каких-то наворотил! Ещё сложней всё стало!

– Но зато мы избавились от числа x, которое может быть *любым*, и работаем с двумя *натуральными* числами! А от дробей избавиться легко – умножим обе части на 11 и на 719 и получим $719m=11n$.

– Отлично! Дальше всё ясно. Ведь 719 на 11 не делится. Поэтому m *обязано* делиться на 11. А значит, m не меньше 11 – оно ведь натуральное! Поэтому x, равное $\frac{m}{11}$, не меньше $\frac{11}{11}=1$. А это противоречит предположению, что x меньше 1. Готово! Значит, и вправду, совпадения всех трёх стрелок только в полдень и в полночь бывают.

– Ай да мы!

– Знаешь что, давай попробуем ответить на другой вопрос. Я раньше подумывал над ним, но не знал, как подступиться. Теперь, кажется, знаю. Слушай: сколько раз в сутки три стрелки направлены строго в разные стороны? Иначе говоря, образуют между собой углы, равные 120°?

– По-моему, здесь возможны два варианта: по направлению вращения после часовой стрелки сначала находится минутная, а потом секундная, либо наоборот – сначала секундная, затем минутная.

– Верно! Рассмотрим первый вариант. В тех же обозначениях, что и раньше, тот факт, что минутная стрелка опережает часовую на некоторое *целое* число оборотов плюс *одна треть* оборота, запишется так: $11x = m + \frac{1}{3}$, а то, что секундная стрелка опережает часовую тоже на целое число оборотов *плюс две трети* оборота, выглядит так: $719x = n + \frac{2}{3}$. Аналогично предыдущему, исключаем x и получаем: $\frac{m+\frac{1}{3}}{11} = \frac{n+\frac{2}{3}}{719}$. Ого!

– Давай умножим оба числителя на 3 – от многоэтажности избавимся: $\frac{3m+1}{11} = \frac{3n+2}{719}$. Теперь уберём дроби: $719(3m+1) = 11(3n+2)$. Раскроем скобки: $2157m + 719 = 33n + 22$. Можно ещё вычесть из обеих частей по 22: получим, что $2157m + 697 = 33n$. А дальше?

– Я понял! Смотри – 697 *не делится* на 3!

– И что?

– Но остальные-то слагаемые делятся! Запишем так: $33n - 2157m = 697$, или, по-другому: $3(11n - 719m) = 697$. Левая часть делится на 3, правая – нет. Значит, решения нет.

– Осталось рассмотреть второй вариант...

– Ну, это проще простого. Здесь получается $\frac{m+\frac{2}{3}}{11} = \frac{n+\frac{1}{3}}{719}$. Если теперь аналогично преобразовать, то приходим... э-э-э... вот к такому равенству: $3(11n - 719m) = 1427$. Та же история! Итак, стрелки не могут попарно образовывать углы, равные 120°.

– А жаль! Так бы красиво было!

– Согласен!

Художник Алие Аблямитова

Улыбнись

Игорь Акулич

Математические ляпы

Нередко для «оживления» придуманной задачи автор пытается вместо строгого сугубо математического изложения придумать какой-нибудь занимательный сюжет. Но здесь главное – не переборщить. Иной раз автор настолько увлекается занимательностью сюжета, что пропадает всякая реальность, и остаётся только изумляться возникающим парадоксам.

Рассмотрим положительные числа a и b. Их среднее арифметическое – это $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое – это $\sqrt{ab}$. Чуть меньшей известностью пользуется среднее гармоническое, равное $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$. Обратим внимание, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b, т.е. $\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab$. В 1999 году московский математик и педагог А. Канель понял, что из этого можно «слепить» неплохую олимпиадную задачу, примерно такую:

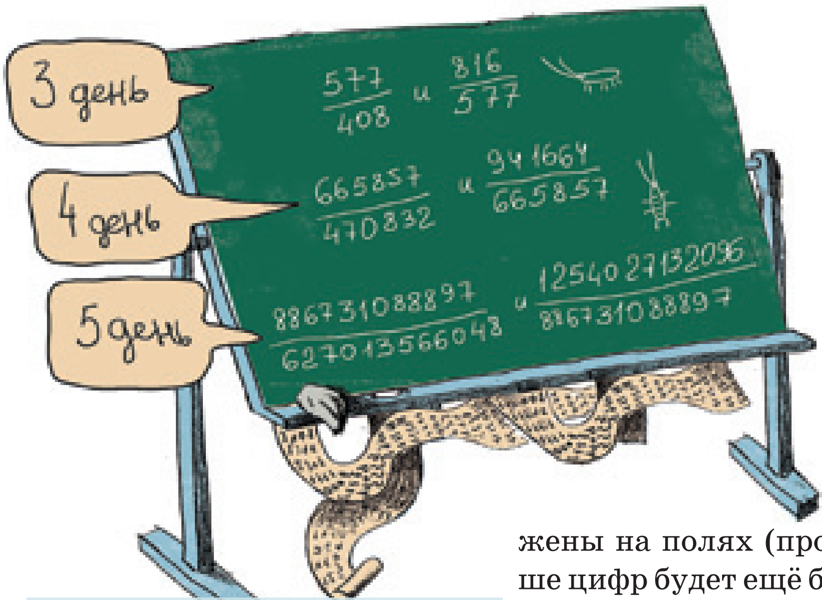
Пусть $a_0=1$, $b_0=2$, *и для любого натурального* n *числа* a_n и b_n *– соответственно среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел* $a_{n\text{-}1}$ *и* $b_{n\text{-}1}$. *Найдите произведение* $a_{1999}\times b_{1999}$.

Решение вполне очевидно: произведение $a_n\times b_n$ одно и то же для всех n, поэтому $a_{1999}\times b_{1999}=a_0\times b_0=2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его следующим образом:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 *и* 2. *Найдите произведение чисел, которые Петя напишет вечером* 1999*-го дня.*

В таком виде задачу предложили девятиклассникам на LXII Московской олимпиаде. Вроде бы задача отличается от первоначальной лишь появлением сюжетной линии, а по сути эквивалентна первоначальной. Но давайте-ка проследим за действиями старшего научного сотрудника Пети. В первый день он напишет на доске числа $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ и $2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$. Во второй день – чис-



ла $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\dfrac{17}{12}$ и $2:\dfrac{17}{12}=\dfrac{24}{17}$ (мы ведь помним, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно 2, так что можно вычислять только среднее арифметическое, а среднее гармоническое получать его «переворачиванием» с одновременным умножением на 2). Числа, которые окажутся на доске на третий, четвёртый и пятый дни, изображены на полях (проверьте, если сомневаетесь). Дальше цифр будет ещё больше. Через день-другой возможности обыкновенного калькулятора будут исчерпаны, и Пете придется вернуться к старому доброму умножению «в столбик». Конечно, Петя может воспользоваться и компьютером – старший научный сотрудник всё-таки. Но интересно, сможет ли он выписывать на доске эти числа – хватит ли ему места? Да и сумеет ли компьютер подсчитать эти числа? Уж больно быстро они возрастают…

Читатель, наверное, уже предчувствует ответ. А если есть желание в нём убедиться – взгляните на поля.

Итак, числитель дроби, которую Петя должен написать на доске на 1999-й день, будет содержать более 10^{599} цифр. Сказать, что это число очень большое – значит ничего не сказать. Оно неимоверно большое. Даже если Петя будет выписывать сто цифр в секунду, то ему потребуется более 10^{597} секунд. Так как в году заведомо меньше 100 миллионов секунд, то Пете понадобится более 10^{589} лет для того, чтобы выписать один только этот числитель…[1]

Другой казусный случай произошёл со следующей задачей.

Сорок четыре точки движутся с постоянными скоростями по отрезку AB от A к B и обратно (A-B-A-B-... и так далее). В начальный момент все точки совпадают с точкой A. При этом скорость второй точки вдвое больше скорости первой, скорость третьей вдвое больше скорости второй и так далее. Мо-

Запишем число в виде несократимой дроби: $\dfrac{p}{q}$. Тогда второе $\dfrac{2q}{p}$, и следующее «поколение» чисел окажется таково: одно $\dfrac{\frac{p}{q}+\frac{2q}{p}}{2}=\dfrac{p^2+2q^2}{2pq}$, а второе – $\dfrac{4pq}{p^2+2q^2}$.

Можно доказать, что, если $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, то есть p и q взаимно просты, то и дроби в выражениях для следующих чисел также несократимы. Таким образом, числители и знаменатели новых дробей неукротимо растут. Но какими темпами? Давайте их оценим. Числитель очередного числа p^2+2q^2, что больше p^2. Оценка, заметьте, довольно грубая, но нам с избытком хватит и её. Мы уже знаем, что $p_5=886731088897>10^{11}$. Значит, $p_6>10^{22}$, $p_7>10^{44},\ldots,p_{1999}>$ $>10^{11\cdot 2^{1994}}>10^{11\cdot 16\cdot (2^{10})^{199}}>10^{176\cdot (10^3)^{199}}=$ $=10^{176\cdot 10^{597}}>10^{10^{599}}$.

[1] А на самом деле – и того больше, потому что оценка количества цифр числителя, как мы отметили, довольно грубая. Попробуйте её оценить, используя точную формулу.

гут ли положения всех точек в какой-то момент времени совпасть в каком-то месте, отличном от A?

Создатель этой задачи (к сожалению, он неизвестен), по-видимому, просмотрел когда-то великолепную экранизацию пьесы М.Булгакова «Бег», где показаны яркие эпизоды тараканьих бегов. Весьма вероятно, что этот фильм (или же личная бытовая неустроенность) сподвиг автора сформулировать задачу по-иному и предложить ее в 2005 г. на одном из турниров в следующем виде:

В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 веселых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй – вдвое быстрее, третий – вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

Авторский ответ таков: *могут*. А именно, если ширина коридора равна S, а скорость первого таракана равна v, то ровно через промежуток времени после старта, равный $2S/3v$, все тараканы окажутся на расстоянии $2S/3$ от точки старта. Попробуйте сами доказать это несложное утверждение. Очевидно, что это первый момент, когда встретятся все тараканы – это первая встреча даже только для первых двух тараканов.

Убедились? Все согласны? Хорошо.

А теперь проследим, как грубая реальность нахально врывается в изящные теоретические рассуждения и с треском обрушивает ажурные умозрительные конструкции. Оказывается, что на самом деле тараканы не встретятся никогда. Хотите убедиться – взгляните на поля. Вычисление показывает, что встреча произойдет не раньше, чем через... 165 тысяч лет. Увы (или, может быть, к счастью), тараканы столько не живут. А значит, и встретиться им не суждено. Вот если бы тараканов было поменьше – в пределах десятка – тогда другое дело.

А в заключение – совет читателям: когда будете сами составлять «сюжетную» задачу, будьте осторожны! Иначе есть риск попасть впросак, подобно авторам рассмотренных нами задач.

Из условия следует, что последний таракан бежит быстрее первого в $2^{43} = 8\ 796\ 093\ 022\ 208$ раз. Это больше, чем $8 \cdot 10^{12}$. Скорость любого «бытового» таракана заведомо не превосходит 1 м/с (тоже сильно завышенное значение). Значит, и скорость последнего – самого быстрого – таракана не больше 1 м/с. Посему скорость первого таракана никак не больше $1 : (8 \cdot 10^{12}) = 1{,}25 \cdot 10^{-13}$ м/с. Ширина коридора общежития, наверное, не меньше метра (дабы жильцы могли в нём хоть как-то разминуться), и тогда предполагаемая точка встречи всех тараканов находится на расстоянии не менее $2 \cdot 1/3 > 0{,}66$ метра от точки старта. И, стало быть, первый (не слишком быстрый, как сказано в условии) таракан доберётся до неё не раньше, чем через

$$0{,}66 : (1{,}25 \cdot 10^{-13}) = 5{,}28 \cdot 10^{12}$$

секунд, что составляет больше 165 тысяч лет!

Художник Артём Костюкевич

Трудная задача

Борис Дружинин

Папа купил мне развивающую книжку-раскраску для подготовки к школе. Больше всего мне, конечно, нравилось раскрашивать. А задачки решала только те, где картинки были интересными. Одна попалась очень занятная. На самокате мчался бородатый дед, а навстречу ему с соской во рту летел внук на мотоцикле. Я попросила папу прочитать условие задачки. Папа прочитал:

Из Бубликово в Москву выехал на самокате дед Матвей со скоростью 53 км/час. Через час навстречу ему из Москвы в Бубликово выехал на мотоцикле его внук со скоростью 107 км/час. Кто из них будет ближе к Бубликово в момент встречи, дед или внук? Кто будет ближе к Москве?

Пока раскрашивала деда, всё время думала про задачку. Я уже умею считать до десяти, иногда получается до двенадцати, а один раз даже до семнадцати досчитала, но в задачке числа были чересчур большие. Пришлось звать на помощь папу.

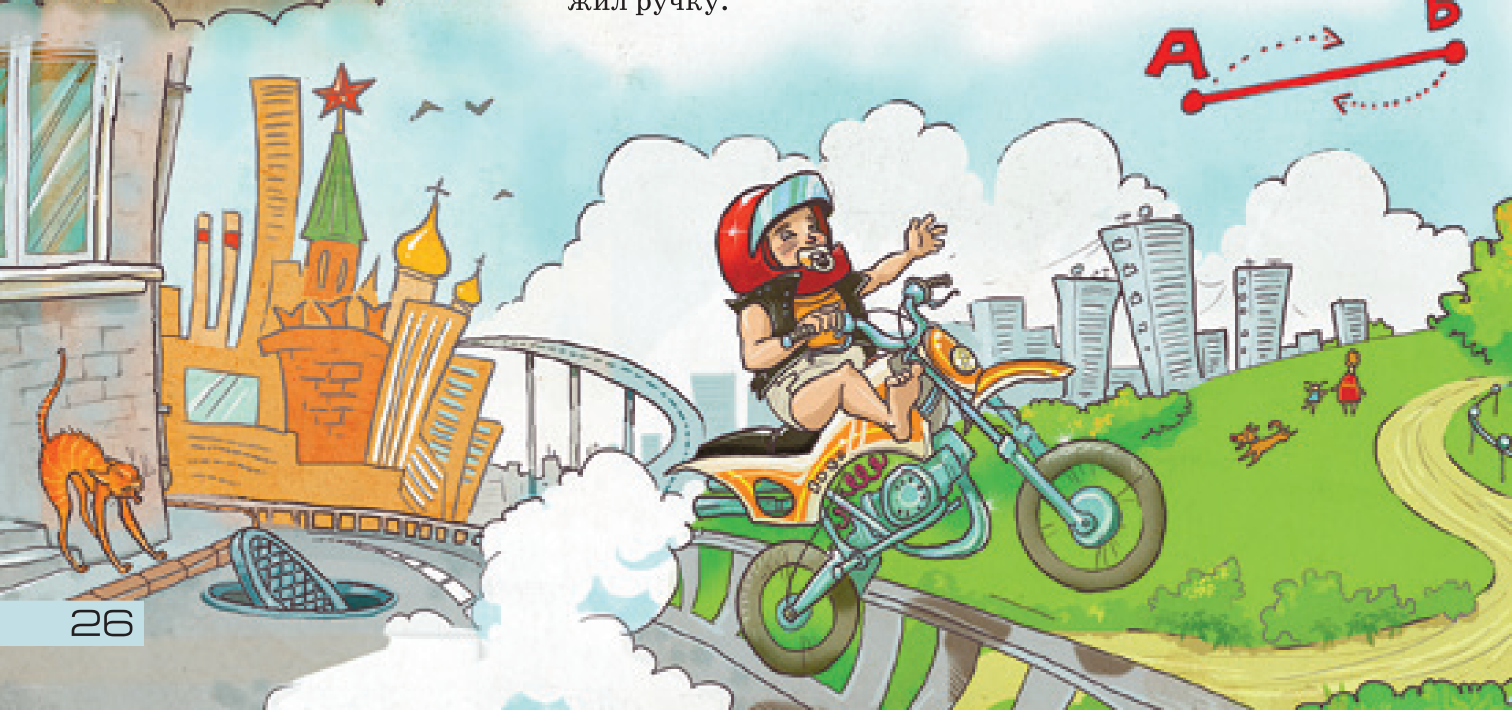
– Пап, а сто семь больше, чем семнадцать?

– Больше, – сразу ответил папа, вгляделся в условие задачки и задумался. – Ты себя не мучай, тут систему уравнений составлять требуется. Кто додумался такие задачки малышам предлагать?

Я докрасила внука и поинтересовалась:

– Так кто же будет ближе к Бубликово?

Папа взял листочек и долго что-то писал, потом зачеркивал, опять писал и опять зачеркивал. Через час он отложил ручку.



– Подзабыл я что-то, – виновато сказал он. – Ладно, сейчас всем спать, а завтра я на работе всё решу. У нас всё-таки инженеры с высшим техническим образованием. В случае чего – помогут.

На следующий день после обеда папа позвонил с работы.

– Напомни-ка условие задачки, – попросил он. – Тут у нас все уверены, что там что-то напутали.

Вечером папа пришёл с работы какой-то задумчивый. Обычно он первым делом моет руки и ужинает. Но сейчас он взял книжку, долго в неё смотрел и качал головой. Потом позвонил приятелю дяде Мише.

– Понимаешь, мне кран в ванной чинить надо, а у дочки задачка не получается. Ты за пять минут справишься, – и папа продиктовал условие задачки. – Как решишь, перезвони. Договорились?

Конечно, никакой кран в починке не нуждался, но не мог же папа признаться, что не может решить задачку для дошкольников. Прошло часа два, а от дяди Миши не было никаких известий. Наконец, раздался звонок, и папа снял трубку.

– Да! Здравствуйте! Да... да... сейчас... да, это точно, я проверял. Хорошо. Будем вам благодарны.

Папа положил трубку и радостно потёр руки.

– Считай, что твоя задачка решена! Это звонил профессор Бабин, товарищ Русанова, приятеля нашего дяди Миши. Он преподаёт математику в университете. Пообещал, что завтра даст эту задачку своим студентам. Уж они-то наверняка решат.

Назавтра позвонил дядя Миша и передал извинения от профессора Бабина. Оказывается, этот профессор считает, что задача неполная и в таком виде решения вовсе не имеет.

В комнату вошла мама и поинтересовалась, чего я такая грустная?

– Очень жалко, – пояснила я. – Задачку раскрасила, а она, оказывается, какая-то худая.

– Не худая, а неполная, – поправил папа. – Её даже в университете решить не смогли, ни студенты, ни профессора. Вот, посмотри сама, какие ужасные задачки детишкам предлагают.

Мама взглянула и рассмеялась.

– В момент встречи дед и внук будут на одинаковом расстоянии и от Москвы, и от Бубликово, и от чего угодно, даже от Северного Полюса.

Папа сразу кинулся к телефону и стал успокаивать всех, кто трудился над решением моей задачки. Она оказалась совсем простой.

А в школу я пошла через год.

Художник Евгения Орлова

КОНКУРС, IV ТУР (см. «Квантик» № 4)

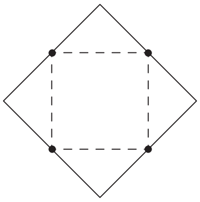


Рис. 1

16. Смотрите рисунок 1. Пунктиром показана граница старого пруда, а сплошной линией – граница расширенного пруда. Докажите, что площадь и вправду увеличилась в два раза.

17. Сначала надо договориться, учитываем ли мы встречи в портах; давайте их не учитывать. Посмотрим, какие пароходы встретит на своем пути выходящий из Гавра пароход? Во-первых, это 6 пароходов, которые уже плывут в Гавр (один вышел 6суток назад, другой – 5 суток назад, и так далее, последний плывущий вышел сутки назад). Во-вторых, за ближайшие 7 суток пути ещё 7 пароходов успеют выплыть из Нью-Йорка навстречу нашему пароходу (один выходит одновременно с нашим, другой – спустя сутки, и т.д., последний выплывет за сутки до прибытия нашего парохода в Нью-Йорк). Итого получаем 13 пароходов.

(Если учитывать встречи в портах, ответ будет на 2 парохода больше: один из них наш пароход встретит при выходе из Гавра, а второй – при заходе в Нью-Йорк).

18. *Ответ:* в ящике скорее всего три чёрных шара и один белый.

Решение. Ясно, что чёрных шаров в ящике не меньше двух (иначе два чёрных шара мы бы никогда не смогли вытащить). Все шары не могут быть чёрными: тогда мы всегда вынимали бы 2 чёрных шара. Значит, чёрных шаров два или три.

Если бы чёрных шаров было два, то и белых было бы два. Тогда два белых шара мы бы тоже вынули примерно 50 раз, а значит белый и чёрный шар не вынули бы практически ни разу, что маловероятно. Значит, чёрных шаров скорее всего три.

Посмотрим, насколько вероятно, что при этом мы примерно в половине случаев вынем два чёрных шара. Два чёрных шара можно выбрать из трёх чёрных тремя способами. А белый и чёрный шар из трёх чёрных и одного белого – тоже тремя способами. Значит, если мы выбираем шары случайно, примерно в половине случаев мы вытащим белый и чёрный шар, и примерно в половине случаев – два чёрных.

19. Давайте преобразуем равенство к виду КВАН + НТ = КВА + ТИК. Ясно, что сумма двух трёхзначных чисел всегда меньше, чем 2000, поэтому и КВАН меньше, чем 2000, то есть К = 1. Тогда имеем: 1ВАН + НТ = 1ВА + ТИ1. Сумма 1ВА+ТИ1 всегда меньше, чем 200 + 1000 = 1200, поэтому и 1ВАН меньше, чем 1200, то есть В = 0 (1 уже занята буквой К). Тогда 10АН + НТ = 10А + ТИ1.

Предположим, что Т – не девятка, тогда 10А+ТИ1 меньше, чем 110+900=1010, но 10АН+НТ всегда больше, чем 1010. Значит, всё-таки Т – девятка, и цифры 0, 1, 9 больше использовать нельзя.

Итак, Т = 9, тогда 10АН + Н9 = 10А + 9И1, или 1000+АН+Н9=100+А+900+И1=1000+И1+А, отсюда АН + Н9 = И1 + А. Заметим, что левая часть заканчивается на ту же цифру, что и Н + 9, а правая — на ту же, что и А + 1. Поэтому Н + 9 должно заканчиваться на ту же цифру, что и А + 1, то есть Н + 8 заканчивается на А.

Если Н = 2, то А = 0, что невозможно.

Если Н = 3, то А = 1, что невозможно.

Если Н = 4, то А = 2, тогда 24 + 49 = И1 + 2 = 73, откуда И = 1 — подходит под условие!

Если Н принимает значения от 5 до 8, то А принимает значения от 3 до 6 соответственно, тогда АН + Н9 не меньше, чем 35 + 59 = 94, но И1 + А – не больше, чем 81 + 6 = 87. Значит, такое тоже невозможно.

Итак, мы получили единственное решение: 1024 – 971 = 102 – 49.

20. Шпион может поступить так. Он начинает обход по кругу от одной из комнат (назовём её первой), включив в ней свет (если тот был погашен). Шпион идёт по кругу, считая комнаты, и в каждой очередной комнате зажигает свет. Пусть шпион попал в комнату, где свет уже зажжён, и это была, например, 10-я по счёту комната. Тогда он выключает в ней свет и возвращается обратно в начало к самой первой комнате (пройдя 9 комнат назад). Если, вернувшись в первую комнату, он обнаруживает, что там свет погашен, то 10-я комната была на самом деле первой: дойдя до неё, он замкнул круг, и всего в здании 9 комнат. Если же свет в первой комнате по-прежнему горит, шпион возвращается обратно в 10-ю комнату и идёт дальше, действуя по такому же алгоритму.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

СТРАННАЯ НАДПИСЬ (см. «Квантик» №3)

Надпись «Реанимация» сделана таким странным образом, чтобы водители впереди идущих машин правильно прочитали её в зеркале заднего вида и уступили дорогу.

КИТАЙСКАЯ ГРАМОТА (см. «Квантик» №5)

1.
本 – корень，大 – большой，井 – колодец，田 – поле，伞 – зонт，口 – рот，丁 – гвоздь.

2.
大 (большой) + 小 (маленький) = 大小 (размер, величина),

多 (много) + 少 (мало) = 多少 (много, количество),

高 (высокий) + 低 (низкий) = 高低 (высота),

买 (покупать) + 卖 (продавать) = 买卖 (торговля),

长 (длинный) + 短 (короткий) = 长短 (длина),

不 (не) + 正 (прямой) = 歪 (кривой).

СИМБИОЗ (см. «Квантик» №5)

Первое решение. Попытки расположить кубики наподобие того, как это сделано в первых двух задачах, ничего не дадут. Более того – эти примеры были специально приведены, чтобы задать ложное направление поисков. Настоящий же выход состоит, во-первых, в использовании шероховатости стола, и во-вторых – в переходе от статики к динамике. А именно: расположим кубики как на рис. 1, совместив их грани. Придерживая затем пальцем один из них, перекатим второй через ребро, получив расположение, показанное на рис. 2. На шероховатом столе такое перекатывание можно произвести без проскальзывания. Осталось измерить расстояние между точками A и B.

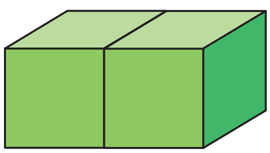


Рис. 1

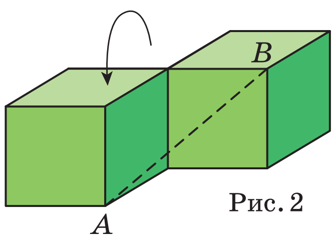


Рис. 2

Развивая эту идею, можно измерить большую диагональ и единственного кубика, если стол имеет хотя бы один угол (не обязательно даже прямой!). Надо лишь совместить одну из вершин кубика с углом стола, а затем перекатить его через ребро и измерить расстояние между углом и нужной вершиной кубика. Вместо угла сгодится и любая отмеченная точка поверхности стола (дырка от кнопки, например). В случае же бесконечно большого совершенно однородного стола, на котором к тому же запрещается делать какие-либо пометки, вопрос остаётся открытым. Не помогут ли читатели разобраться с ним?

Второе решение. Оказывается, можно обойтись и без шероховатого стола (при желании даже вообще без стола). Как? Очень просто. Поставим один кубик на другой. Если бы линейка могла проникать сквозь верхний кубик, то мы бы могли измерить длину диагонали AB (рис. 3). К сожалению, кубик мешает. Но если мы повернём его (рис. 4), то место для линейки освободится, и длину AB можно будет измерить!

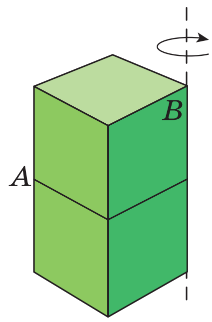


Рис. 3

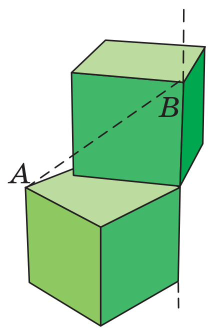


Рис. 4

КАЛЕНДАРЬ (см. «Квантик» №5)

1. Между двумя днями, один из которых находится в календаре сразу под другим, проходит ровно неделя, 7 дней. Поэтому одно из этих чисел на 7 больше другого. Точно так же получаем, что число, которое находится на одну клетку ниже и левее другого, больше того на 6. А если какое-то число делится на 3 нацело, то и числа, отличающиеся от него на 6 в ту или другую сторону, тоже делятся на 3.

2. Запомним число, которое находится в середине столбца, и обратим внимание на другие числа. Число, которое располагается в клетке под средним числом, больше него на 7. То, которое на клетку выше, – на 7 меньше. Значит, если сложить эти два числа, то получим удвоенное среднее число столбца. Такая же сумма будет у первого и последнего чисел в столбце. Получается, что сумма всех пяти чисел столбца в 5 раз больше числа, стоящего в середине, и значит, делится на 5.

3. Обозначим числа, которые находятся в вершинах параллелограмма, через A, B, C и D – по часовой стрелке, начиная от левой нижней вершины. Тогда насколько A будет больше B, настолько и D будет больше C – например, если A на одну клетку ниже и на две правее, чем B (а это значит, что $A=B+7+2$), то и для C и D верно то же самое. Это можно записать, как $A-B=D-C$. Прибавив к обеим частям этого равенства $B+C$, получим требуемое: $A+C=D+B$.

4. С числами в строке всё ясно – это семь последовательных чисел, и цифры у них не успевают повториться.

Про числа на диагонали, идущей сверху вниз в левую сторону, мы уже говорили: каждое следующее получается прибавлением 6 к предыдущему. Если бы на диагонали оказались числа с одинаковой последней цифрой, то разность этих чисел оканчивалась бы нулём. Но разность любых двух чисел на диагонали – это число вида $6k$, где k – количество прибавлений шестёрки, необходимых, чтобы получить из одного числа другое. При этом $k<5$, так как на диагонали может быть не более пяти чисел. Но $6k$ не заканчивается нулём при $k=1,2,3,4$. Значит, числа на диагонали оканчиваются на разные цифры.

Аналогично, очередное число в столбце получается из предыдущего прибавлением семёрки, но 7, 14, 21 и 28 не делятся на 10.

Разберитесь самостоятельно с диагоналями, идущими сверху вниз в правую сторону.

5. Заметьте, что случай квадрата 2×2 сразу следует из решения задачи 3 – ведь квадрат 2×2 – это тоже параллелограмм, а числа в его противоположных углах как раз образуют его диагональ. В случае квадрата 3×3 суммы чисел в противоположных углах равны по задаче 3, осталось добавить центральное число, и мы получим, что равны суммы на диагоналях. А случай квадрата 4×4 можно решить, дважды применив задачу 3: сначала для углов этого квадрата, а потом – для углов внутреннего квадрата 2×2.

Подумайте, а может ли в календаре встретиться целиком заполненный числами квадрат 5×5?

6. Пусть n – наименьшее число в этом квадрате. Тогда в квадрате будут записаны такие числа, как на рисунке 5. Тогда

n	$n+1$
$n+7$	$n+8$

Рис. 5

$$(n+1)(n+7)-n(n+8)=(n^2+8n+7)-(n^2+8n)=7.$$

7. Один из возможных способов приведён на рисунке 6.

8. Раскрасим все клетки в три цвета, как показано на рисунке 7. Убедитесь, что как бы ни расположить рассматриваемый прямоугольник, всегда будут закрыты три клетки разного цвета. Но на этой табличке зеленых клеток – 11, а розовых – 9. То есть разное количество. Поэтому закрыть все клетки не удастся.

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Рис. 6

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Рис. 7

9. $3840\times7=4\times8\times3\times8\times7\times5$.

МУДРЕЦЫ И КОЛПАКИ

Итак, в третьем туре мудрецам надели на головы колпаки одного из трех цветов – синего, красного и зелёного. Закодируем цвета числами: синий – числом 0, красный – числом 1, зелёный – числом 2. Тогда мудрецы могут себе представлять, что они видят колпаки с числами. Пусть последний в шеренге мудрец подсчитает сумму чисел, которые он видит. Потом возьмёт остаток от деления этой суммы на 3 и назовёт цвет, соответствующий этому остатку. Тогда следующий мудрец может подсчитать сумму чисел, которые он видит, и сравнить остаток от деления её на 3 с остатком, который назвал предыдущий мудрец. По этим данным он восстановит свой цвет и назовёт его. Дальше мудрецы могут действовать аналогично.

К примеру, пусть в шеренге цвета колпаков шли в таком порядке: 2, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 0 (от последнего к первому). Последний находит сумму чисел, которые он видит: 2+0+2+1+2+1+1+1+0=10, берёт остаток от деления на 3 – получает 1. Он называет красный цвет, свой цвет не угадывает, но не в этом дело: главное, что он сообщает следующему остаток 1. У следующего сумма равна 8 (на 2 меньше), то есть остаток равен 2. Следующий понимает: у него такой цвет, что если прибавить соответствующее число к 2, остаток от деления на 3 станет равным 1. Ясно, что прибавлять надо 2, то есть у него колпак зелёного цвета: он его и называет (сообщая очередному мудрецу остаток 2). У третьего мудреца сумма будет 8. Прибавляя к ней число предыдущего мудреца, он получает 8+2=10, то есть остаток 1. Теперь надо прибавить такое число, чтобы получилось 1 – остаток, названный в самом начале. Значит, прибавлять надо 0, и у него синий колпак. И так далее.

Аналогично можно решить задачу и в случае, когда мудрецам надевают на головы колпаки десяти разных цветов: надо закодировать цвета числами от 0 до 9 и подсчитывать остаток суммы видимых чисел от деления на 10.

ХОД НАЗАД

Задача 2. При короле на c8 решение то же самое – белые берут назад ход b6:a7 и дают мат **b6-b7×**, но в данном случае на a7 стоял черный слон. Кстати, заменяя пешку a7 белым конем (при короле на c8), получаем третьего близнеца – вместо b5:a7 матует **b5-c7×**.

Задача 3. Позиция возникла после того, как рассеянный Ленский нарушил правила и забрал пешкой g4 свою собственную ладью h5. Теперь он умоляет Ольгу простить его, берет неверный ход назад и объявляет удивленной барышне шах и мат – **h5-h8×**.

Задача шуточная, но решение однозначно. Например, предположение, что Ленский взял на h5 своего ферзя, а не ладью, означает, что Ольга тоже играла рассеянно – отправила короля под шах. Но об этом у Пушкина ничего не сказано...

НАНОЧЕЛОВЕЧКИ

1. Когда он бывает *не за будкою*.

3. а) Икра сочная / И красочная.
б) По машинам! / Помаши нам...
в) Ужас! Мина! / У жасмина!
г) Ты желаешь удачи? / Ты же лаешь у дачи!

4. а) В селе жатва, а все – / все лежат в овсе.
б) Стой, лошадка! – / стойло шатко.
в) Пойду шакалом бурым. –/
Пой, душа, каламбуром!
г) Мил ли он нам, / миллионам?

5. а) Не тусил – / нету сил.
б) Музыка – приз, / музы каприз.
в) Нет, удавы, / не туда вы!

ПЕЛЬМЕНИ

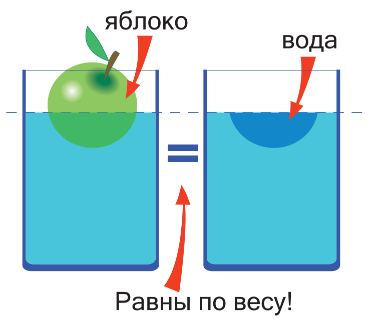
Ответ: первому путнику 0 пельменей, второму 6 пельменей, третьему 10 пельменей.

Рассуждаем так: 3-й путник оставил своим товарищам 16 пельменей – 2 равные части, – а сам съел 1 часть, то есть он съел 8 пельменей, а всего перед ним их было 8 + 16 = 24. Второй путник оставил 24 пельменя для двоих товарищей, значит, сам съел 12, а всего пельменей перед ним было 24 +12 = 36. Именно столько оставил своим товарищам 1-й путник, а значит, сам он съел 18. Таким образом, только первый съел то, что ему причиталось, и по 18 должны были съесть его товарищи. Восстановим справедливость: второму дадим 6 пельменей, а третьему 10.

ЯБЛОКО В БАНКЕ

Ответ: никакая, весы будут в равновесии.

Если вы уже изучали физику, то знаете (а если не изучали – то скоро узнаете), что по закону Архимеда вес плавающего тела равен весу вытесненной им воды. Значит, вес первой банки (с яблоком) не изменится, если мы заменим яблоко тем количеством воды, которое это яблоко вытесняет. Но тогда мы получим в точности вторую банку – с тем же уровнем воды, но без яблока.



НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 20 сентября по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «КВАНТИК».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

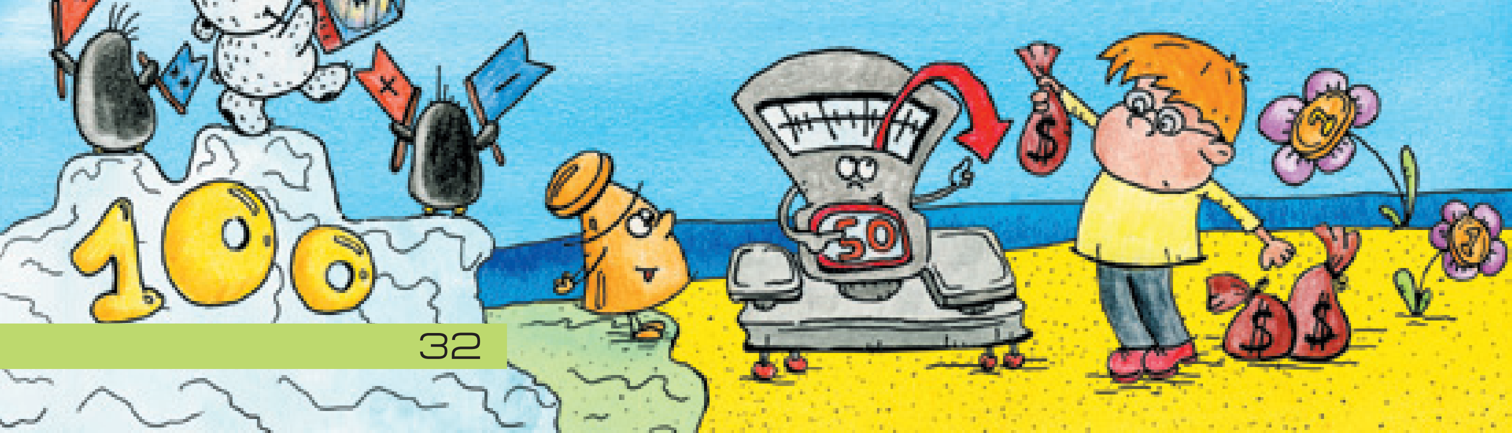
Желаем успеха!

VI ТУР

26. Одну сторону прямоугольника удлинили на 10%, а другую – укоротили на 10%. Можно ли наверняка сказать, что именно произошло с площадью прямоугольника – увеличилась она, уменьшилась или не изменилась?

27. Можно ли между каждыми двумя соседними цифрами числа 22222222 поставить один из знаков «+», «–», «•» и «:», а потом расставить скобки так, чтобы полученное выражение равнялось 100?

28. Имеются 3 мешочка, в каждом по 100 монеток. В одном из них все монетки весят по 9,9 г, во втором – по 10 г, в третьем – по 10,1 г. Гриша хочет определить, где какой мешочек, при помощи весов, которые умеют определять вес положенного на них груза, но ломаются от веса 50 г и больше. Как ему это сделать за одно взвешивание, не ломая весы?

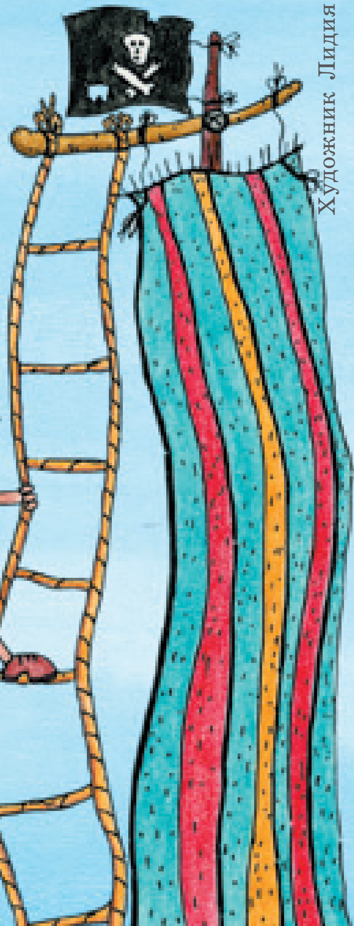


Авторы задач:
Константин Кноп (28),
Егор Бакаев (29),
Игорь Акулич (30)

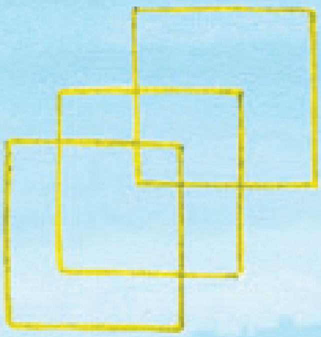
29. У пиратов А, Б и В состоялся такой разговор:

А: «У Б – 2 глаза».
Б: «У В – 2 глаза».
В: «У А – 2 глаза».
А: «У нас 2 глаза на троих».
Б: «У нас 3 глаза на троих».
В: «У нас 4 глаза на троих».

Оказалось, что каждый соврал столько раз, сколько у него глаз. Сколько глаз у каждого из пиратов?



30. Льюис Кэрролл как-то предложил такую задачу. Надо нарисовать следующую конфигурацию, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию. При этом дополнительно требовалось, чтобы в процессе рисования *никакие линии не пересекались*.



Попробуйте решить задачу Кэрролла, а когда сумеете, попытайтесь решить противоположную задачу: нарисовать ту же конфигурацию так, чтобы, наоборот, *произошло максимальное возможное число пересечений*. Каково это максимальное число?

Художник Лидия Широнина

НЕОБЫЧНЫЕ ПРУЖИНКИ

К потолку подвесили одну за другой две пружинки, связанные кусочком красной верёвки, и прикрепили к ним груз. Когда пружинки растянулись, привязали две страховочные зелёные веревки, как показано на рисунке (верёвки почти натянуты). Что произойдёт с грузом, если теперь перерезать красную верёвку – опустится он или поднимется?

Художник Юлия Можейко