Труды Санкт-Петербургского математического общества
Январь 2004
Том 10. С. 265–269

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

И.К. Даугавет, В.М. Рябов, Б.А. Самокиш

Наиболее характерной чертой математической индивидуальности Леонида Витальевича Канторовича был жгучий интерес к приложениям, стремление к синтезу теоретических исследований с практической работой. Лучше сказать, для Леонида Витальевича не было границы между абстрактной математикой и прикладной — математика в целом для него была прикладной наукой. К моменту создания кафедры вычислительной математики в Ленинградском университете осенью 1951 г. Л.В. был известным математиком, в том числе и в области приближенных вычислений. Поэтому естественно, что с самого начала он вошел в ее состав, оставаясь заведующим отделом приближенных вычислений ЛОМИ АН СССР. С 1957 г. до отъезда в Новосибирск он заведовал кафедрой (первым заведующим был до отъезда в Минск В. И. Крылов). После Л.В. кафедрой заведовали его ученики М. К. Гавурин (1960-70) и И. П. Мысовских (1970-97). В настоящее время кафедрой руководит В. М. Рябов — ученик М. К. Гавурина. На кафедре продолжают работать три бывших аспиранта Л.В. — И. П. Мысовских, И. К. Даугавет и Б. А. Самокиш. Л.В. участвовал в разработке учебных программ, вел практические занятия, например, по программированию. Л.В. считал необходимым для вычислителей полноценное математическое образование. К примеру, курс функционального анализа на отделении математики ЛГУ читался как спецкурс, для вычислителей же был обязательным. Естественно, учебная нагрузка у вычислителей была немалая. Пишущие эти строки вспоминают с благодарностью годы учебы на кафедре вычислительной математики.

Обзор работ Л.В. по вычислительной математике естественно начинать со статьи [**1**]. Ее ядро составляет общая теория приближенных методов анализа — абстрактная схема исследования осуществимости и сходимости численных методов решения линейных задач. В ее основе лежит революционная идея: если в прежних исследованиях возникающая в приближенном методе система линейных уравнений рассматривалась как техническая подробность, то здесь именно она встала в центр внимания как приближенный образ оператора уравнения. Вот что говорит по этому поводу сам Л.В. [**2**]: “Мне кажется, что основная идея этой теории носит общий характер и отражает общий гносеологический принцип исследования сложных систем. Он, разумеется, применялся и раньше, применяется и в системном анализе, но не имеет строгого математического аппарата. Попросту этот принцип состоит в том, что данная большая сложная система, расположенная в некотором пространстве, сопоставляется с более простой, малоразмерной моделью, расположенной в этом же или более простом пространстве, посредством однозначного или одномногозначного соответствия. Изучение этой упрощенной модели оказывается, естественно, более доступным и осуществимым. Этот метод предъявляет, конечно, определенные требования к качеству аппроксимирующей системы". Эта общая теория почти сразу же нашла конкретные приложения в работах А. И. Каландия [**3**], Э. Б. Карпиловской [**4**], И. К. Даугавета [**5**] и др. Однако значение этой теории далеко не исчерпывается возможностью конкретных приложений. Была дана — впервые и для многих неожиданно — абстрактная, обобщающая точка зрения на вычисления. В численные методы проник новый язык, т.е. форма мышления. Не сразу и не без сопротивления, но этот язык стал общепринятым. Теперь и в технических вузах курс численных методов предваряется сведениями из функционального анализа.

Можно указать, например, на работы М. К. Гавурина [**6**], М. Ш. Бирмана [**7**] по применению операторных полиномов наилучшего приближения, как порожденные новым мышлением; появились разнообразные общие теории — можно назвать, к примеру, теорию сходимости и устойчивости разностных схем В. С. Рябенького и А. В. Филиппова [**8**]. Основная теорема этой теории — теорема об устойчивости и сходимости — как и так называемая теорема Лакса об эквивалентности (американский вариант теории устойчивости разностных схем) уже содержалась в общей формулировке в статье [**1**]. Назовем еще общую теорию В. В. Иванова [**9**], приспособленную для рассмотрения сингулярных интегральных уравнений, теорию М. К. Гавурина [**10**], в которую включено общее рассмотрение вопроса о вычислительной устойчивости, принцип компактной аппроксимации Г. М. Вайникко [**11**]. В этом же ряду, как мы считаем, стоит концепция замыкания вычислительных алгоритмов С. Л. Соболева [**12**]. Заметим, что книга М. К. Гавурина [**10**] стала первым в мировой литературе учебником по методам вычислений, в которой изложение систематически ведется на основе общей теории приближенных методов.

В статье [**1**] также были подытожены прежние исследования по методу наискорейшего спуска и методу Ньютона; в частности, описан многошаговый вариант метода наискорейшего спуска, который мог бы породить методы минимальных итераций — сопряженных градиентов — но они достались на долю других исследователей (и в другой стране). Абстрактный метод Ньютона, названый позже методом Ньютона — Канторовича, получил впоследствии дальнейшее развитие в работах Л.В. (с применением метода мажорант) и И. П. Мысовских. Исследования Л.В. по методу Ньютона стали источником многочисленных работ по различным обобщениям этого метода и уточнению их свойств — число таких работ давно перевалило за тысячу.

Связь абстрактной математики и прикладной для Л.В. была двусторонней — численные методы можно применять для получения теоретических результатов. Теоремы общей теории о разрешимости "точного" уравнения, использующие информацию, полученную при численном решении "приближенного" уравнения, получили применение в работах Б. А. Самокиша и Н. А. Смолянской [**13**], А. Д. Зива [**14**], Н. Б. Павлова [**15**], посвященных апостериорным оценкам операторов, обратных к дифференциальным. Теорема Л.В. о методе Ньютона формулируется, в частности, как теорема существования, единственности и области расположения решения нелинейного функционального уравнения. Используя эту теорему, К. И. Бабенко и В. Ю. Петрович [**16**] доказали существование неподвижной точки у оператора удвоения и выяснили некоторые ее свойства. Ученик Л.В., Л. Цах [**17**] применил теоремы о методе наискорейшего спуска к доказательству трудно доказываемой другими способами теоремы Жиро об уравнениях в частных производных.

Из работ Л.В. по собственно численным методам в первую очередь следует назвать два цикла: первый — по методу приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, который так и называется — метод Л. В. Канторовича. Он сходен с методом Ритца — Галеркина, но здесь в форму искомого приближенного решения включены неопределенные функции одной переменной, и условия минимума функционала приводят для них к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Более гибкий, чем метод Ритца, и в определенных ситуациях более эффективный, он нашел в ряде работ применение к конкретным задачам и дальнейшее развитие в работах А. А. Дородницына [**18**], П. И. Чушкина [**19**], О. М. Белоцерковского [**20, 21**] и др. К этому же кругу примыкает известный метод прямых, хотя и не являющийся впрямую частным случаем метода Канторовича.

Другой цикл составляют работы по численному конформному отображению, где предложен метод разложения отображающей функции в ряд по параметру, содержащемуся в уравнении границы области, являющийся в то же время методом последовательных приближений — последовательные приближения являются частными суммами рада. Как и для метода приведения к обыкновенным уравнениям, автором дано доказательство сходимости. Этот метод был развит в расчете на приложения к краевым задачам — в стандартной области (круг) решение краевых задач проще. Отметим, что интерес к приближенному конформному отображению обострился в последнее десятилетие в связи с задачей построения сеток в разностном методе — конформная сетка считается наиболее совершенной среди неадаптивных.

Наконец, о книге “Приближенные методы высшего анализа” [**22**], совместной с В. И. Крыловым. Первый вариант (1936 г.) под названием “Методы приближенного решения уравнений в частных производных” [**23**] был составлен тогда, когда эти вопросы были, можно сказать, в зародышевой фазе. Ряд разделов разработан специально для этой книги — о теоретическом обосновании метода Фурье, оценках погрешности, сходимости и т.д. При переизданиях книга дополнялась и совершенствовалась, но долгое время оставалась в этой области единственным учебником. Почти половина объема посвящена конформному отображению — в этом отношении книга уникальна.

Практическая деятельность Л.В. в области вычислений протекала в основном в послевоенные годы и связана с использованием счетно-аналитических (электромеханических) машин. Эффективность их работы оказалось возможным существенно повысить за счет параллелизации вычислений. Эти принципы позволили выполнить под руководством Л.В. такую масштабную работу, как составление таблиц функций Бесселя целых номеров (В. Н. Фаддеева, М. К. Гавурин [**24**]). В процессе этих работ состоялось также изобретение функционального преобразователя — прибора, позволяющего включить в вычислительный процесс расчет значений какой-либо функции, причем можно было выбирать ту или иную функцию с помощью простой коммутации. Любопытно, что размышление над этим изобретением шло параллельно и под влиянием работы над доказательством некоей абстрактной теоремы об универсальной функции — так иногда абстрактные размышления стимулируют прикладную работу.

Говоря об этом периоде, следует назвать также "Таблицы для решения граничных задач"[**25**] (речь идет о задачах для уравнений Лапласа — Пуассона), составленных К. Е. Черниным при участии Л.В. и В. И. Крылова.

В то время, когда общепринятое мнение склонялось в сторону наиболее простых и легко программируемых алгоритмов, Л.В. утверждал, что в дальнейшем получат применение быть может более сложные, но универсальные и эффективные методы, и по этой причине необходимо интенсивно развивать теорию численных методов и автоматизацию программирования. Должны приобрести большое значение асимптотические и апостериорные оценки с возможным использованием последних для управления вычислительным процессом. Л.В. предвидел изменение роли и характера таблиц специальных функций, аналитических методов, реализацию аналитических выкладок на машинах. Л.В. указывал на возможность использования численных методов для теоретического анализа математических проблем, возникновение новых проблем: вычислительной устойчивости, разработки новых методов типа метода Монте-Карло.

Вообще, вычислители могут только пожалеть, что открывшаяся в 50-е годы возможность занятий математической экономикой и отъезд Л.В. из Ленинграда помешали развитию и реализации многих его идей. А что такие далеко идущие идеи относительно развития вычислительной математики в электронную эпоху у Л.В. были, свидетельствует его статья [**26**].

References

1. Л. В. Канторович, *Функциональный анализ и прикладная математика*, Успехи мат. наук, **3** (1948), no. 6, 80–185.
2. Л. В. Канторович, *Мой путь в науке*, Успехи мат. наук, **42** (1987), no. 2, 183–213.
3. А. И. Каландия, *Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применения в теории упругости*, Мат. сб., **42** (1957), no. 2, 249–272.
4. Э. Б. Карпиловская, *О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Успехи мат. наук, **8** (1953), no. 3, 111–118.
5. И. К. Даугавет, *О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сиб. мат. журн., **6** (1965), no. 1, 70–85.
6. М. К. Гавурин, *Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итерационных процессов*, Успехи мат. наук, **5** (1950), no. 3, 156–160.
7. М. Ш. Бирман, *Об одном варианте метода последовательных приближений*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. (1952), no. 9, 69–76.
8. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, *Об устойчивости разностных уравнений*, М., 1956.
9. В. В. Иванов, *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений*, Киев, 1968.
10. М. К. Гавурин, *Лекции по методам вычислений*, М., 1971.
11. Г. М. Вайникко, *Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений*, Тарту, 1970.
12. С. Л. Соболев, *Замыкание вычислительных алгоритмов и некоторые его применения*, М., 1955.
13. Б. А. Самокиш, Н. А. Смолянская, *Численная апостериорная оценка обратного оператора для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*, Методы вычисления (1981), no. 12, 94–101.
14. А. Д. Зив, Б. А. Самокиш, *Об апостериорной оценке обратного оператора вырожденной двухточечной краевой задачи*, Ж. вычисл. мат. мат. физ., **20** (1980), no. 1, 77–83.

15. Н. Б. Павлов, *Апостериорные оценки обратных операторов с помощью проекционных методов*, Ж. вычисл. мат. мат. физ., **27** (1987), no. 8, 1249–1252.
16. К. И. Бабенко, В. Ю. Петрович, *Доказательные вычисления в задаче о существовании решения уравнения удвоения*, Докл. АН СССР, **277** (1984), no. 2, 265–269.
17. Л. Цах, *Метод наискорейшего спуска для дифференциальных уравнений эллиптического типа*, Автореф. дисс. канд. ф.-м. н. Л., ЛГУ, 1955.
18. А. А. Дородницын, *Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя*, Ж. прикл. мех. техн. физ. **3** (1960),. 111–118.
19. П. И. Чушкин, *Расчет некоторых звуковых течений газа*, Прикл. матем. и мех. **21** (1957), no. 3, 353–360.
20. О. М. Белоцерковский, *Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной*, Прикл. мат. мех. **22** (1958), no. 2, 206–219.
21. О. М. Белоцерковский, *О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине*, Прикл. мат. мех. **24** (1960), no. 3, 511–517.
22. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа.* Изд. 5. М.-Л., 1962.
23. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Методы приближенного решения уравнений в частных производных*, М.-Л., 1936.
24. В. Н. Фаддеева, М. К. Гавурин, *Таблицы функций Бесселя $J_n(x)$ целых номеров от 0 до 120*, М.-Л., 1950.
25. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, К. Е. Чернин, *Таблицы для решения граничных задач*, М., 1956.
26. Л. В. Канторович, *Перспективы развития и использования электронных счетных машин*, В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, М., 1956. Т. 2, 382–390.

Санкт-Петербургский госуниверситет